

УДК 534.26

ОБРАТНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГО-ЖИДКОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

А. О. ВАТУЛЯН, П. С. УГЛИЧ

Ростовский государственный университет, Российская Федерация

Получено 04.12.2005

Рассмотрена плоская задача о вынужденных колебаниях идеальной жидкости, ограниченной сверху упругим слоем с неровной нижней поверхностью. Построено решение обратной задачи об определении формы нижней поверхности по характеру колебаний верхней. Для решения прямой задачи предлагаются три подхода – метод малого параметра, метод граничного элемента, а также приближение Борна. Решение обратной задачи сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Приведены результаты численного эксперимента.

Розглянуто плоску задачу про вимушені коливання стисливої ідеальної рідини, обмеженої зверху пружним шаром з нерівною нижньою поверхнею. Побудовано розв'язок зворотної задачі про визначення форми нижньої поверхні за характером коливань верхньої. Для розв'язання прямої задачі запропоновані три підходи – метод малого параметру, метод граничного елемента, а також наближення Борна. Розв'язок зворотної задачі зведено до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Наведено результати чисельних експериментів.

The paper deals with a plane problem on forced oscillations of ideal fluid. The ideal fluid is bounded at the top by the elastic layer with uneven undersurface. The solution of the inverse problem on reconstructing the undersurface shape by the character of the upper surface oscillations is developed. The three approaches are used to solve the direct problem: method of small parameter, method of boundary elements, and Born's approximation. Solving of the inverse problem is reduced to solving the Fredholm integral equation of the first kind with a smooth kernel. The results of the numerical experiment are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о колебаниях слоистых структур различной природы с нерегулярностями часто возникают в акустике, сейсмологии, биомеханике, технической диагностике трубопроводов, при моделировании ледяного покрова и физике твердого тела. Как правило, они решаются методом возмущений [1–7], который обычно реализуется в предположении малости амплитуды неровности по сравнению с толщиной слоя и длиной волны. Однако такой подход становится неприменимым в случае больших амплитуд.

В этой ситуации может быть с успехом использована идеология метода граничных интегральных уравнений, широко применяемая в акустике и теории упругости для решения задач о колебаниях полуограниченных сред с дефектами типа полости, трещины, включения. Техника построения таких уравнений подробно описана в [8–10]. В качестве примера приведем статью [11], в которой рассмотрена задача об антиплоских колебаниях упругого двухслойного полупространства с полостью, расположенной в верхнем слое (в том числе, выходящей на поверхность).

В работах [12–17] подробно исследованы краевые задачи для области типа полуплоскости с неровной границей, внутри которой выполняются уравнения Гельмгольца или Ляме. Они сведены

к решению граничных интегральных уравнений, сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности решения и предложены приближенные методы отыскания решений [18]. В [19–24] аналогичным образом изучены интегральные уравнения для задачи о рассеянии волн на неровной границе между жидкостью и твердым телом.

Помимо прямых задач о расчете полей и влиянии неровности на характер волновых процессов, большой интерес представляют обратные задачи об определении характера и формы неровности по полю упругих перемещений на поверхности слоистой среды. В частности, в статьях [25–27] они решались методом линеаризации в предположении о малости амплитуды неровности. Аналогичные формулировки для уравнения Гельмгольца были ранее подробно исследованы для трехмерного случая [28–30]. В работах [31, 32] рассмотрены прямая и обратная задачи о рассеянии волн на малых компактных неоднородностях в морском волноводе. При этом считалось, что амплитуда неровности мала по сравнению с длиной волны, а сама неровность задана на ограниченном множестве. Для решения прямой задачи использовалось приближение Борна [33].

В данной работе исследуются колебания идеальной сжимаемой жидкости, ограниченной сверху упругим слоем с неровной нижней поверхностью.

На верхней поверхности слоя действует нормальная нагрузка, а на нижней выполняется условие непротекания жидкости (касательное напряжение отсутствует, а нормальное равно давлению жидкости).

Для решения поставленной задачи используются три способа. Первый основан на методе граничных интегральных уравнений и позволяет свести исходную задачу к системе нерегулярных интегральных уравнений, которая решается численно на основе идеологии метода граничных элементов. В рамках второго подхода с помощью теоремы взаимности получено соотношение, выражающее поле перемещений в слое через значения вектора перемещений и потенциала скоростей на неровном участке границы раздела. При малой амплитуде неровности оно позволяет приближенно найти поле перемещений на верхней поверхности слоя, не решая систему граничных интегральных уравнений. Третий подход основан на методе возмущений и сводит исходную краевую задачу к последовательности неоднородных краевых задач для ровного слоя. Он применим в случае малой амплитуды неровности.

Сформулирована обратная задача о нахождении формы неровного участка нижней поверхности по известному полю перемещений на верхней поверхности слоя. В предположении малой глубины неровности задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Решение такого уравнения является некорректной задачей и строится с помощью метода регуляризации Тихонова.

Приведены результаты вычислительных экспериментов при решении прямой и обратной задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в плоской постановке установившиеся колебания полубесконечной слоистой среды $|x_1| < \infty$, $x_2 \leq 1$, состоящей из упругого слоя $|x_1| < \infty$, $0 \leq \varepsilon f(x_1) \leq x_2 \leq 1$ с неровной нижней границей, контактирующего с идеальной сжимаемой жидкостью, занимающей область $|x_1| < \infty$, $x_2 < \varepsilon f(x_1)$. Здесь ε – малый параметр; $f(x_1)$ – гладкая финитная функция, характеризующая неровность.

Считаем, что компоненты вектора упругих перемещений и потенциала скоростей изменяются по закону $e^{-i\omega t}$, где ω – частота колебаний. В этом случае, отделяя временной множитель, имеем следующие уравнения движения:

- для амплитуд смещений слоя – уравнения Ля-

ме

$$(1 - 2\nu)^{-1}u_{j,ji} + \Delta u_i + \kappa_2^2 u_i = 0, \quad (1)$$

где $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – скорость поперечных волн в упругом слое; $\kappa_2 = \omega/c_2$; G и ν – соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона для слоя;

- для амплитуды потенциала скоростей жидкости – уравнение Гельмгольца

$$\Delta \varphi + \kappa_0^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

где φ – потенциал скоростей в жидкости; $\kappa_0 = \omega/c_0$; c_0 – скорость звука в жидкости.

Пусть на верхней поверхности слоя действует нормальная нагрузка и касательные напряжения отсутствуют:

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = q(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 = h. \quad (3)$$

Напомним, что на нижней поверхности слоя касательные компоненты вектора напряжений равны нулю, а нормальная компонента равна давлению жидкости. Кроме того, поверхность слоя считается непроницаемой для жидкости, что приводит к следующим условиям сопряжения на границе раздела:

$$\sigma_{n\tau} = 0, \quad \sigma_{nn} = -i\omega\rho_*\varphi, \quad -i\omega u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \quad (4)$$

при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$.

Здесь \bar{n} , $\bar{\tau}$ – нормальный и касательный векторы к кривой $x_2 = \varepsilon f(x_1)$ соответственно.

Замыкают постановку условия излучения на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [34].

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ СЛОЙ – ЖИДКОСТЬ

Обозначим через $U_i^{(m)}$ фундаментальное решение для системы слой – жидкость с ровными границами, удовлетворяющее следующим уравнениям и краевым условиям:

$$(1 - 2\nu)^{-1}U_{k,ki}^{(m)} + \Delta U_i^{(m)} + \kappa_2^2 U_i^{(m)} + \frac{\delta_{im}}{G} \delta(x - \xi) = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \Phi^{(m)} + \kappa_0^2 \Phi^{(m)} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 G(U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)}) \Big|_{x_2=0,1} &= 0, \\
 \frac{2G}{1-2\nu} [\nu U_{1,1}^{(m)} + (1-\nu)U_{2,2}^{(m)}] \Big|_{x_2=1} &= 0, \\
 \frac{2G}{1-2\nu} [\nu U_{1,1}^{(m)} + (1-\nu)U_{2,2}^{(m)} + \\
 + \frac{i\rho_*\omega}{G}\Phi^{(m)}] \Big|_{x_2=0} &= 0, \\
 -i\omega U_2^{(m)} \Big|_{x_2=0} &= \Phi_{,2}^{(m)} \Big|_{x_2=0}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Будем искать решение задачи (5)–(7) в виде суммы двух слагаемых

$$U_i^{(m)}(x, \xi) = V_i^{(m)}(x, \xi) + W_i^{(m)}(x, \xi), \tag{8}$$

где $V_i^{(m)}(x, \xi)$ – решение неоднородных уравнений Ляме (5) для плоскости, а $W_i^{(m)}(x, \xi)$ – решение краевой задачи для системы однородных уравнений при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 G(W_{1,2}^{(m)} + W_{2,1}^{(m)}) \Big|_{x_2=0,1} &= \\
 &= -G(V_{1,2}^{(m)} + V_{2,1}^{(m)}) \Big|_{x_2=0,1}, \\
 \frac{2G}{1-2\nu} [\nu W_{1,1}^{(m)} + (1-\nu)W_{2,2}^{(m)}] \Big|_{x_2=1} &= \\
 &= -\frac{2G}{1-2\nu} [\nu V_{1,1}^{(m)} + (1-\nu)V_{2,2}^{(m)}] \Big|_{x_2=1}, \\
 \frac{2G}{1-2\nu} [\nu W_{1,1}^{(m)} + \\
 + (1-\nu)W_{2,2}^{(m)} + \frac{i\rho_*\omega}{G}\Phi^{(m)}] \Big|_{x_2=0} &= \\
 &= -\frac{2G}{1-2\nu} [\nu V_{1,1}^{(m)} + (1-\nu)V_{2,2}^{(m)}] \Big|_{x_2=0}, \\
 -(i\omega W_2^{(m)} + \Phi_{,2}^{(m)}) \Big|_{x_2=0} &= i\omega V_2^{(m)} \Big|_{x_2=0}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Фундаментальное решение для упругой плоскости может быть найдено с помощью двойного преобразования Фурье. Трансформанты Фурье функций $V_i^{(m)}$ по первой координате имеют вид

$$\tilde{V}_i^{(m)}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} V_i^{(m)}(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

и представимы в форме

$$\tilde{V}_1^{(1)} = \frac{e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2} \left(\frac{\alpha^2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1|x_2-\xi_2|} - \gamma_2 e^{-\gamma_2|x_2-\xi_2|} \right), \tag{10}$$

$$\tilde{V}_2^{(1)} = \frac{i\alpha e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2} \left(e^{-\gamma_1|x_2-\xi_2|} - e^{-\gamma_2|x_2-\xi_2|} \right) \text{sign}(x_2 - \xi_2),$$

$$\tilde{V}_1^{(2)} = \frac{i\alpha e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2} \left(e^{-\gamma_1|x_2-\xi_2|} - e^{-\gamma_2|x_2-\xi_2|} \right) \text{sign}(x_2 - \xi_2), \tag{11}$$

$$\tilde{V}_2^{(2)} = \frac{e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2} \left(\gamma_1 e^{-\gamma_1|x_2-\xi_2|} - \frac{\alpha^2}{\gamma_1} e^{-\gamma_2|x_2-\xi_2|} \right),$$

$$\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Функции $W_i^{(m)}(x, \xi)$ найдены в форме интегралов Фурье в результате решения соответствующей краевой задачи методом интегральных преобразований. В соответствии с формулой (8), функции Грина для полосы $U_i^{(m)}(x, \xi)$ построены в виде интегралов по контуру в комплексной плоскости. Следует отметить, что функции $V_i^{(m)}(x, \xi)$ имеют логарифмическую особенность при $\xi = x$, а $W_i^{(m)}(x, \xi)$ непрерывны всюду внутри полосы, за исключением граничных поверхностей.

Обозначим через $U_i^-(x, \xi)$ фундаментальное решение для системы слой – жидкость в случае, когда источник возмущений находится в жидкости:

$$(1-2\nu)^{-1} U_{k,ki}^- + \Delta U_i^- + \kappa_2^2 U_i^- = 0, \tag{12}$$

$$\Delta \Phi^- + \kappa_0^2 \Phi^- = -\delta(x - \xi). \tag{13}$$

Краевые условия для U_i^- , Φ^- имеют вид, аналогичный (7). Будем искать решение Φ^- в виде суммы двух слагаемых:

$$\Phi^-(x, \xi) = \Phi_0(x, \xi) + \Phi_1(x, \xi). \tag{14}$$

Здесь Φ_0 – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для неограниченной плоскости:

$$\Phi_0 = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_0 \rho), \tag{15}$$

трансформанта Фурье которого имеет вид

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\alpha_1 x_1 - \gamma_0 |x_2 - \xi_2|}}{\gamma_0}. \quad (16)$$

Функция $\Phi_1(x, \xi)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} (U_{1,2}^- + U_{2,1}^-) \Big|_{x_2=0,1} &= 0, \\ \frac{2G}{1-2\nu} [\nu U_{1,1}^- + (1-\nu)U_{2,2}^-] \Big|_{x_2=1} &= 0, \\ \frac{2G}{1-2\nu} [\nu U_{1,1}^- + (1-\nu)U_{2,2}^- + \\ + \frac{i\rho_*\omega}{G}\Phi_1] \Big|_{x_2=0} &= -i\rho_*\omega\Phi_0 \Big|_{x_2=0}, \\ -(i\omega U_2^- + \Phi_{1,2}) \Big|_{x_2=0} &= \Phi_{0,2} \Big|_{x_2=0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Окончательное выражение для трансформанты Фурье функции Φ^- имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^- = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-\gamma_0 |x_2 - \xi_2|}}{\gamma_0} - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{i\eta\kappa_2^2}{\gamma_0} B_{54} + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{55} \text{sign } \xi_2 \right] e^{\gamma_0(x_2 - |\xi_2|)} \right\} e^{i\alpha_1 x_1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= i\eta\kappa_2^2 B_{54} + \gamma_0 B_{55}; \\ B_{54} &= i\gamma_1 \kappa_2^2 [4\alpha_1^2 \gamma_1 \gamma_2 \text{sh } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 - \\ &\quad - (2\alpha_1^2 - \kappa_2^2)^2 \text{ch } \gamma_1 \text{sh } \gamma_2]; \\ B_{55} &= [16\alpha_1^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 + (2\alpha_1^2 - \kappa_2^2)^4] \text{sh } \gamma_1 \text{sh } \gamma_2 - \\ &\quad - 8\alpha_1^2 (2\alpha_1^2 - \kappa_2^2)^2 \gamma_1 \gamma_2 (\text{ch } \gamma_1 \text{ch } \gamma_2 - 1). \end{aligned}$$

Выражение (18) обращается в тождественный нуль при $\xi_2 > 0$ и $x_2 < \xi_2$. Кроме того, следует отметить, что интеграл Фурье, с через который выражается $\Phi^-(x, \xi)$, расходится при $x_2 > 0$.

3. ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ СЛОЙ – ЖИДКОСТЬ

Обозначим область, занятую слоем, через S_+ , верхнюю поверхность слоя – через L_+ , нижнюю – через L_- , а неровный участок – через Γ_f .

Рассмотрим область $S_R^+ = S_+ \cap \{|x_1| < R\}$. По формулам Сомильяны получим

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= \int_{\partial S_R^+} [\sigma_{kl}(x) n_l U_k^{(m)}(x, \xi) - \\ &\quad - u_k(x) \sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi) n_l] dl_x, \\ \sigma_{nn} &= \sigma_{ij} n_i n_j. \end{aligned} \quad (19)$$

Устремив R к бесконечности и приняв во внимание краевые условия, найдем

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^{et}(\xi) + \int_{L_-} [\sigma_{nn}(x) U_n^{(m)}(x, \xi) - \\ &\quad - u_k(x) \sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi) n_l] dl_x, \end{aligned} \quad (20)$$

где $u_k^{et}(\xi)$ – поле смещений в слое с ровными границами от действия нагрузки $q(x_1)$.

Перейдем к рассмотрению области S_R^- , ограниченной сверху кривой L_- , а снизу – полуокружностью радиуса R с центром в начале координат. Умножим уравнение (2) на функцию $\Phi^{(m)}$, а уравнение (6) – на функцию φ , вычтем их друг из друга и проинтегрируем по области S_R^- :

$$\begin{aligned} \int_{S_R^-} [\Delta_x \Phi^{(m)}(x, \xi) \varphi(x) - \\ - \Delta_x \varphi(x) \Phi^{(m)}(x, \xi)] dS_x = \\ = \int_{\partial S_R^-} \left[\frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial n} \varphi(x) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} \Phi^{(m)}(x, \xi) \right] dl_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Устремив R к бесконечности, и с учетом краевых условий на границе слоя и жидкости получим

$$\begin{aligned} -i \int_{\Gamma_f} \left[\frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial n} \left(\frac{\sigma_{nn}(x)}{\rho_* \omega} \right) - \right. \\ \left. - \omega u_n(x) \Phi^{(m)}(x, \xi) \right] dl_x + \\ + \frac{1}{\rho_*} \int_{L_- \setminus \Gamma_f} [\sigma_{22}(x) U_2^{(m)}(x, \xi) - \\ - u_2(x) \sigma_{22}^{(m)}(x, \xi)] dl_x = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Умножим выражение (22) на ρ_* и вычтем его из

выражения (20):

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(y) + \int_{\Gamma_f} \left\{ \sigma_{nn}(x) \left[U_n^{(m)}(x, \xi) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \Phi^{(m)}(x, y)}{\partial n} \right] - u_n(x) \left[\sigma_{nn}^{(m)}(x, \xi) + i\omega\rho_* \Phi^{(m)}(x, \xi) \right] - u_\tau(x) \sigma_{n\tau}^{(m)}(x, \xi) \right\} dl_x. \quad (23)$$

Это соотношение позволяет при известных функциях u_n, u_τ, σ_{nn} найти поле перемещений в слое в любой точке ξ , для которой выполняется условие $\xi > \varepsilon \max f(x)$.

4. ВЫВОД СИСТЕМЫ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим полуплоскость $x_2 < 0$. Для нее обычным образом может быть получено соотношение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \Phi^{(m)}(x, \xi)}{\partial n} \varphi(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} \Phi^{(m)}(x, \xi) \right] dl_x = 0. \quad (24)$$

Умножим выражение (24) на ρ_* и вычтем его из соотношения (20). Учитывая краевые условия на границе раздела, находим

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(\xi) - \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^{(m)}(x, \xi) + u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi)] dl_x + \rho_* \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^{(m)}(x_1, 0; \xi) - \chi(x_1)\Phi^{(m)}(x_1, 0; \xi)] dx_1. \quad (25)$$

Устремляя $\xi \rightarrow y \in \Gamma_f$, получаем

$$\frac{1}{2}u_m(y) = u_m^{et}(y) - \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^{(m)}(x, y) + u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, y)] dl_x + \rho_* \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^{(m)}(x_1, 0; y) - \chi(x_1)\Phi^{(m)}(x_1, 0; y)] dx_1. \quad (26)$$

В последних равенствах введены следующие обозначения: $\psi(x_1) = \varphi(x)|_{x_2=0}$; $\chi(x_1) = \varphi_{,2}(x)|_{x_2=0}$.

Рассмотрим область $\{a \leq x_1 \leq b, 0 \leq x_2 \leq \varepsilon f(x_1)\}$. Применив к ней формулу Грина для уравнения Гельмгольца при $\xi \rightarrow y \in \Gamma_f$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\varphi(y) = - \int_{\Gamma_f} \left[i\omega\rho_*u_n(x)\Phi^0(x, y) + \varphi(x)\frac{\partial \Phi^0}{\partial n}(x, y) \right] dl_x - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^0(x_1, 0; y) - \chi(x_1)\Phi^0(x_1, 0; y)] dx_1. \quad (27)$$

Устремив точку ξ к прямой $x_2 = 0$, придем к следующему уравнению по отрезку $[a, b]$:

$$\frac{1}{2}\psi(y) = - \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*u_n(x)\Phi^0(x; y_1, 0) + \varphi(x)\frac{\partial \Phi^0}{\partial n}(x; y_1, 0)] dl_x - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^0(x_1, 0; y_1, 0) - \chi(x_1)\Phi^0(x_1, 0; y_1, 0)] dx_1. \quad (28)$$

Для области $x_2 \leq 0$ справедливо

$$-\frac{1}{2}\psi(y_1, 0) = Q(y_1) - \frac{1}{\rho_*} \int_{\Gamma_f} [i\omega\rho_*\varphi(x)U_n^-(x; y_1, 0) + u_k(x)\sigma_{kl}^-(x; y_1, 0)] dl_x - \int_a^b [\psi(x_1)\Phi_{,2}^-(x_1, 0; y_1, 0) - \chi(x_1)\Phi^-(x_1, 0; y_1, 0)] dx_1, \quad (29)$$

где

$$Q(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x_1)U_2^-(x_1, 1; y_1, 0) dx_1.$$

Таким образом, получена система из пяти интегральных уравнений относительно пяти неизвестных функций.

5. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Считая глубину заглабления малой для компонент тензора напряжений на неровной границе, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{22} - 2\varepsilon f'(x_1)\sigma_{12} + O(\varepsilon^2), \\ \sigma_{n\tau} &= -\sigma_{12} - \varepsilon f'(x_1)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично

$$u_n = -u_2 + \varepsilon f'(x_1)u_1 + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\varphi_{,2} + \varepsilon f'(x_1)\varphi_{,1} + O(\varepsilon^2). \quad (31)$$

Разложим граничные значения функций $\bar{u}(x_1, x_2)$ и $\varphi(x_1, x_2)$ при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$ в ряд Тейлора по x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_1, \varepsilon f(x_1)) &= \bar{u}(x_1, 0) + \\ &+ \varepsilon f(x_1)\bar{u}_2(x_1, 0) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi(x_1, \varepsilon f(x_1)) &= \varphi(x_1, 0) + \\ &+ \varepsilon f(x_1)\varphi_2(x_1, 0) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставив эти выражения (с учетом формул (30) и (31)) в соотношения (4) и отбросив малые величины высоких порядков, получим при $x_2 = 0$ следующие линеаризованные краевые условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} + \varepsilon f(x_1)\sigma_{12,2} + \varepsilon f'(x_1)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) &= 0, \\ \sigma_{22} + \varepsilon f(x_1)\sigma_{22,2} - 2\varepsilon f'(x_1)\sigma_{12} &= \\ &= -i\omega\rho_*(\varphi + \varepsilon f(x_1)\varphi_{,2}), \quad (33) \\ \varphi_{,2} + \varepsilon f(x_1)\varphi_{,22} - \varepsilon f'(x_1)\varphi_{,1} &= \\ &= -i\omega[u_2 + \varepsilon f(x_1)u_{2,2} - \varepsilon f'(x_1)u_1]. \end{aligned}$$

Будем искать решение задачи в виде ряда по степеням ε :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}^0 + \varepsilon\bar{u}^1 + \dots \\ \varphi &= \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1 + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Подставим эти разложения в исходные уравнения (1), (2) и краевые условия (33) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Для определения \bar{u}^i, φ^i получим однородные уравнения Ляме и уравнение Гельмгольца:

$$(1 - 2\nu)^{-1}u_{j,jk}^i + \Delta u_k^i + \kappa_2^2 u_k^i = 0, \quad (35)$$

$$\Delta \varphi^i + \kappa_0^2 \varphi^i = 0. \quad (36)$$

При этом выполняются следующие краевые условия:

- для \bar{u}^0, φ^0 (нулевое приближение)

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^0 &= 0, \quad \sigma_{22}^0 = q(x_1) \quad \text{при } x_2 = h; \\ \sigma_{12}^0 &= 0, \quad \sigma_{22}^0 = -i\omega\rho_*\varphi^0, \\ \varphi_{,2}^0 &= -i\omega u_2^0 \quad \text{при } x_2 = 0; \end{aligned} \quad (37)$$

- для \bar{u}^1, φ^1 (первое приближение)

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^1 &= 0, \quad \sigma_{22}^1 = 0 \quad \text{при } x_2 = h; \\ \sigma_{12}^1 &= -f(x_1)\sigma_{12,2}^0 - f'(x_1)(\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0), \\ \sigma_{22}^1 + i\omega\rho_*\varphi^1 &= -f(x_1)(\sigma_{22,2}^0 + \\ &+ i\omega\rho_*\varphi_{,2}^0), \\ \varphi_{,2}^1 + i\omega u_2^1 &= -f(x_1)(\varphi_{,22}^0 + i\omega u_{2,2}^0) + \\ &+ f'(x_1)(\varphi_{,1}^0 + i\omega u_1^0) \quad \text{при } x_2 = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Обе задачи решены с помощью преобразования Фурье. Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение, найденное в нулевом приближении, совпадает с “эталонным” решением u_i^{et} .

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Полученная система (26)–(29) может быть исследована лишь численно на основе идей метода граничного элемента [10]. Разобьем отрезок $[a, b]$ на N отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \bar{0}, N-1$, $x_i = a + hi$, $h = (b-a)/N$. Кривая Γ_f аппроксимируется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (элементов) l_i с концами в точках $l_{i+N} = [(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))]$. Предположим, что функции u_i постоянны на отрезках l_i . В качестве узлов, в которых выполнены интегральные уравнения (26)–(29), выбираем точки ξ_i , расположенные в серединах отрезков l_i . В результате, для нахождения узловых неизвестных u_i получаем систему линейных алгебраических уравнений. Вообще говоря, коэффициенты алгебраической системы представляют собой двойные интегралы, однако за счет явного интегрирования по элементу удалось выразить их через однократные.

На рис. 1 показан результат численного решения системы интегральных уравнений (26)–(29) при $\kappa_2 = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$. Здесь и далее подразумеваем, что жидкость – вода, а упругий материал – сталь. Сплошной линией показана вещественная, а точками – мнимая часть горизонтального перемещения.

Найдя узловые неизвестные, согласно представлению (23) рассчитаем волновые поля на верхней границе слоя. Это можно сделать также, используя метод линеаризации. Кроме того, при отыскании волнового поля на поверхности при малой глубине неровности допустимо напрямую подставить “эталонное” решение u_i^0 в представление (23). Такой подход называется приближением Борна.

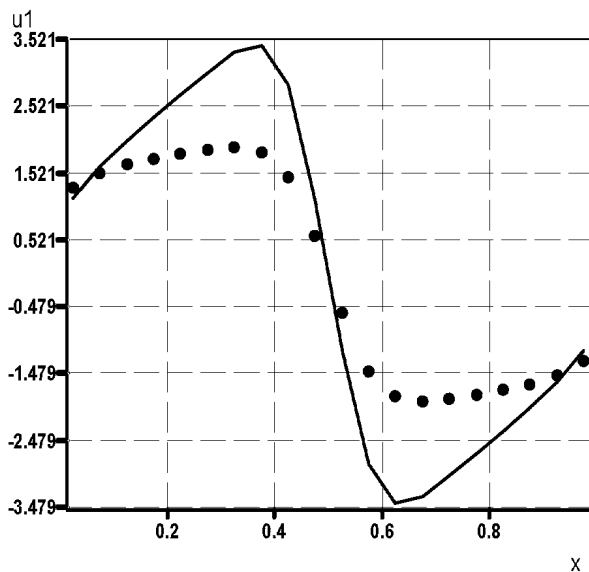


Рис. 1. Результат численного решения системы интегральных уравнений (26)–(29) при $\kappa_2 = 1$, $\varepsilon = 0.2$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$

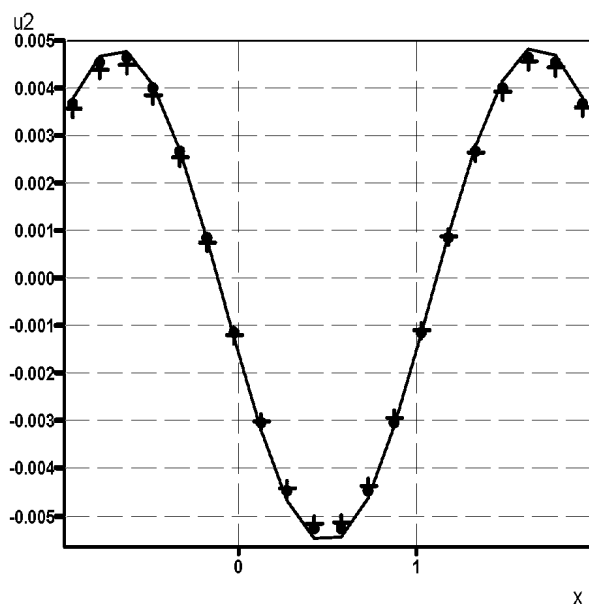


Рис. 2. График величины $\text{Re}(u_2 - u_2^0)$ при $\kappa_2 = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$

На рис. 2 изображен график величины $\text{Re}(u_2 - u_2^0)$ для случая синусоидальной неровности. Сплошной линией показано перемещение, полученное с использованием метода граничного элемента, точками – методом линейаризации, а крестами – в приближении Борна.

Обозначим через g_i^I волновое поле, найденное

Таблица. Величина δ_1^I при различных значениях амплитуды неровности и волнового числа

ε	$\kappa_2 = 1$		$\kappa_2 = 2$	
	$N = 20$	$N = 40$	$N = 20$	$N = 40$
0.1	37.43	38.67	97.17	82.14
0.01	2.43	2.66	3.76	3.67
0.001	3.09	2.53	0.98	0.18
0.0001	3.53	2.60	1.12	0.37

по формуле (23), а через g_i^{II} – поле, найденное по формуле (38). Введем в рассмотрение величину

$$\delta_i^I = \frac{\|g_i^I - g_i^{II}\|}{\|g_i^I\|} \cdot 100\%$$

и исследуем ее поведение в зависимости от амплитуды неровности. В таблице приведены данные о параметре δ_1^I (в процентах) при различных значениях амплитуды неровности и волнового числа. Они свидетельствуют о том, что удовлетворительная сходимость решений, полученных методом малого параметра, обеспечивается только для $\varepsilon \ll 0.1$.

7. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим обратную задачу об определении формы границы по известной на отрезке $[c, d]$ одной из составляющих вектора перемещения на верхней поверхности слоя. Допустим также, что известно эталонное поле перемещений на поверхности слоя, соответствующее решению задачи для слоя с ровной нижней поверхностью (u^0). Тогда

$$u_i(0, x_1) = u_i^0(0, x_1) + \varepsilon u_i^1(0, x_1) + \dots,$$

откуда

$$\varepsilon u_i^1(0, x_1) = u_i(0, x_1) - u_i^0(0, x_1).$$

Предположим, что функция f отлична от нуля только на отрезке $[a, b]$, непрерывно дифференцируема на нем и $f(a) = f(b) = 0$. Тогда, рассматривая представление для решения в первом приближении, получаем

$$u_i^1|_{x_2=1} = \int_a^b f(x'_1) K_i^1(x_1, x'_1) dx'_1, \quad (39)$$

$$x \in [c, d],$$

где $K_i^1(x_1, x'_1)$ имеет достаточно сложный вид и не может быть выражено в явном виде.

Это равенство представляет собой интегральное уравнение Фредгольма с гладким ядром относительно функции $f(x_1)$. Процедура построения решения такого уравнения, как известно, некорректна и требует регуляризации [3, 4]. В данной работе для построения регуляризованного решения использован метод регуляризации А. Н. Тихонова [35, 36].

Далее представлены результаты численного эксперимента по восстановлению формы неровности. Численные эксперименты проводились следующим образом. Сначала при известной форме неровности для отыскания неизвестных перемещений на неровном участке границы решалась система интегральных уравнений (26)–(29). Затем для найденных перемещений с помощью соотношений Сомильяны (23) находились поля перемещений на $[c, d]$ – участке верхней поверхности полосы. Найденные перемещения использовались в качестве исходной информации для решения обратной задачи (в линеаризованной постановке – для решения интегрального уравнения (39)).

На рис. 3 приведены результаты расчета при $\kappa_2 = 1$ ($\omega \approx 4$ кГц), $\varepsilon = 0.01$, для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался метод Воеводина с автоматическим подбором параметра регуляризации по критерию обобщенной невязки. Здесь и далее точками изображена исходная форма неровности, сплошной линией – форма неровности, восстановленная по информации на отрезке $[c, d] = [-1, 2]$. На рис. 4 приведены результаты решения обратной задачи при более сложной форме неровного участка. Хорошее совпадение результатов на обоих графиках свидетельствует об эффективности использованного подхода и соответствующей численной реализации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода линеаризации обратная геометрическая задача об определении формы неровного участка границы раздела между упругим слоем и жидкостью сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Численные эксперименты показали, что данный подход эффективен только при малой амплитуде неровности, не превышающей одной десятой ширины слоя. При большей амплитуде неровности следует использовать итерационные схемы решения обратных задач [37]. Предложенная методика может быть использована для диагностики неровностей в трубопроводах и резервуарах.

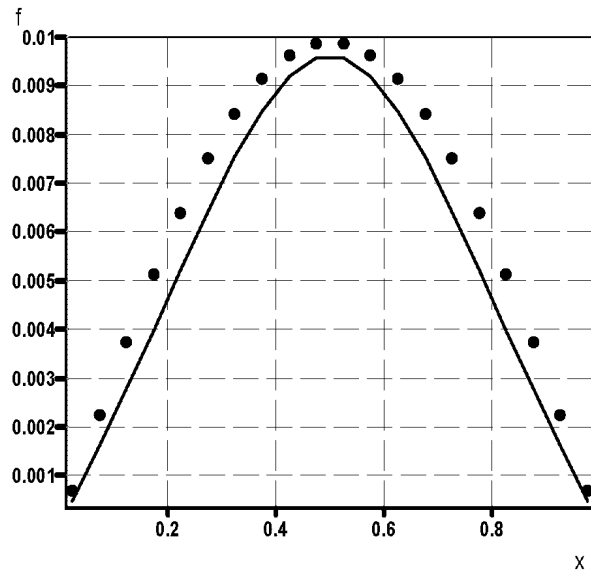


Рис. 3. Результаты численного эксперимента по решению обратной задачи при $\kappa_2 = 1$ ($\omega \approx 4$ кГц), $\varepsilon = 0.01$

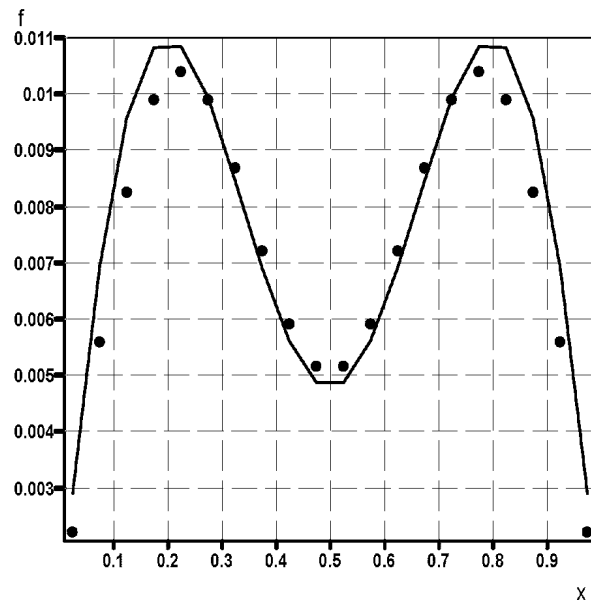


Рис. 4. Результат решения обратной задачи при $\kappa_2 = 2$, ($\omega \approx 8$ кГц), $[c, d] = [0, 1]$, $f(x_1) = 0.0093(\sin \pi x_1 + 0.5 \sin 3\pi x_1)$

БЛАГОДАРНОСТИ

Данное исследование выполнено на средства гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущей научной школы РИ-112/001/428, государственный контракт N 02.445.11.7042.

1. Гуляев Ю. В., Плесский Б. П. Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах // Успехи физических наук.– 1989.– **157**, N 1.– С. 85–127.
2. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.– М.: Наука, 1981.– 288 с.
3. Мухсичаоян А., Белубекян М. Распространение SH-волн в упругом слое с неровной поверхностью // Мат. пробл. механіки неоднорідних структур: том 2.– Львів: ІППММ НАН України.– 2000.– С. 212–215.
4. Мацьшура В. Т. Звуковые поля в нерегулярных волноводах // Зб. праць акуст. симпоз. “КОНСОНАНС-2003”.– Київ: ІГМ НАН України, 2003.– С. 131–135.
5. Багдоев А. Г., Шекоян А. В., Амбарцумян В. А. Влияние рельефа земной поверхности на интенсивность сейсмических взаимодействий // Физика Земли.– 2003.– 7.– С. 17–24.
6. Fang Yinguang. Series solution for scattering of plane SH-waves by multiple shallow circular arc canyons // Xingyong Shuxue He Lixue (Appl. Math. Mech.).– 1995.– **16**, N 7.– P. 615–624.
7. Roberts R. A. Elastodynamic scattering by a surface-breaking void // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– **85**, N 2.– P. 561–566.
8. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории установившихся колебаний // Усп. мат. наук.– 1953.– **8**, N 3(55).– С. 21–74.
9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках.– М.: Мир, 1984.– 494 с.
10. Колтон Д., Кресс Р. Интегральные уравнения в теории рассеяния.– М.: Мир, 1987.– 311 с.
11. Ляпин А. А. О возбуждении волн в слоистой среде с локальным дефектом // Прикл. мех. техн. физ.– 1994.– N 5.– С. 87–91.
12. Arens T. A new integral equation formulation for the scattering of plane elastic waves by diffraction gratings // J. Int. Equ. Appl.– 1999.– **11**.– P. 279–297.
13. Arens T., Chandler-Wilde S. N., Meier A. Integral equation methods for scattering by one-dimensional rough surfaces // Proc. Fifth International Conf. Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM.– Philadelphia, 2000.– P. 463–488.
14. Chandler-Wilde S. N., Ross C. R. Scattering by rough surfaces: the Dirichlet problem for the Helmholtz equation in a non-locally perturbed half-plane // Math. Meth. Appl. Sci.– 1996.– **19**.– P. 959–976.
15. Chandler-Wilde S. N., Ross C. R., Zhang B. Scattering by infinite one-dimensional rough surfaces // Proc. Roy. Soc. Lond.– 1999.– **A455**.– P. 3637–3787.
16. Langdon S., Chandler-Wilde S. A Galerkin boundary element method for an acoustic scattering problem, with convergence rate independent of frequency // Proc. Fourth UK Conf. on Boundary Integral Methods.– Salford University Press, 2003.– P. 67–76.
17. Ross R. A. Direct and inverse scattering by rough surfaces.– Brunel University: Ph.D. thesis, 1996.
18. Meier A., Arens T., Chandler-Wilde S. N., Kirsch A. A Nyström method for a class of integral equations on the real line with applications to scattering by diffraction gratings and rough surfaces // J. Int. Equ. Appl.– 2000.– **12**.– P. 281–321.
19. Natroshvili D., Kharibegashvili S., Tediashvili Z. Direct and inverse fluid-structure interaction problems // Rendiconti di Matematica (Roma).– 2000.– Ser. VII, **20**.– P. 57–92.
20. Natroshvili D. Direct and inverse problems of fluid-structure interaction // Int. Congr. Math. (ICM 1998).– Abstr. Short Commun. and Poster Sess, Aug. 18–27, 1998, Berlin.– P. 241–242.
21. Natroshvili D., Tediashvili Z. Mixed type direct and inverse scattering problems // Operator Theory: Advances and Applications.– 2001.– **121**.– P. 366–389 (In memory of Prof. S.Prössdorf).
22. Natroshvili D., Arens T., Chandler-Wilde S. N. Uniqueness, existence and integral equation formulations for interface scattering problems // Mem. Dif. Eqs Math. Phys. (Georgian Acad. Sci.).– 2003.– **30**.– P. 105–146.
23. Natroshvili D., Karseladze G. Uniqueness results for fluid-solid interaction problems // Bull. Georgian Acad. Sci.– 2001.– **164**, N 3.– P. 454–457.
24. Natroshvili D. Uniqueness theorems for inverse fluid-solid interaction problems // Abstr. 11.TMP, Int. Conf. on Recent Advances in Analytical and Numerical Treatment of Operator Equations (in memory of Prof S.Prössdorf).– March 25–28, 1999, Chemnitz, Germany.– P. 241–242.
25. Ватульян А. О., Коренский С. А. Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // Прикл. мат. мех.– 1997.– **61**, N 4.– С. 639–646.
26. Ватульян А. О., Коренский С. А. О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // Докл. РАН.– 1995.– **334**, N 6.– С. 753–755.
27. Ватульян А. О., Углич П. С. Определение формы неровной границы раздела между упругой и жидкой средами // Изв. вузов. Северо-Кавказский Регион.– 2001.– Спецвыпуск. Математическое моделирование.– С. 44–46.
28. Ingenito F. F. Scattering from an object in stratified medium // J. Acoust. Soc. Amer.– 1987.– **87**.– P. 2051–2059.
29. Wetton B. T. R., Fawcett J. A. Scattering from small tree-dimensional irregularities in ocean floor // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– **85**.– P. 1482–1488.
30. Fawcett J. A. Reconstruction of bathymetry shape from remote acoustic observation // Inverse Problems.– 1990.– **6**.– P. 185–191.
31. Захаренко А. Д. Рассеяние звука на малых компактных неоднородностях в морском волноводе // Акуст. ж.– 2000.– **46**, N 2.– С. 200–204.
32. Захаренко А. Д. Рассеяние звука на малых компактных неоднородностях в морском волноводе: обратная задача // Акуст. ж.– 2002.– **48**, N 2.– С. 200–204.
33. Горюнов А. А., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике.– М.: Изд-во МГУ, 1989.– 152 с.
34. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.– М.: Наука, 1979.– 320 с.
35. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1986.– 288 с.
36. Тихонов А. Н., Степанов В. В., Гончарский А. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1986.– 287 с.
37. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1988.– 288 с.