

УДК 519.863:338.3

М.В. БОЙЧУК, Н.М. ШМУРИГІНА

ДИНАМІЧНА УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ З УРАХУВАННЯМ КОНТРОЛЮ НАД ЗАБРУДНЕННЯМ

Abstract: Generalized mathematical model of dynamic intersector balance taking into account the control above contamination and the resulted algorithm of its researching is offered.

Key words: intersector balance, highway, management, point of switching managements.

Анотація: Запропонована узагальнена математична модель динамічного міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням і приведений алгоритм її дослідження

Ключові слова: міжгалузевий баланс, магістраль, керування, точка перемикання керувань.

Аннотация: Предложена обобщенная математическая модель динамического межотраслевого баланса с учетом контроля над загрязнением и приведен алгоритм ее исследования

Ключевые слова: межотраслевой баланс, магистраль, управление, точка переключения управлений.

1. Вступ. Постановка проблеми

Забруднення навколишнього середовища є побічним продуктом кожної нормальної економічної діяльності – в будь-якій із своїх численних форм воно пов'язане з певними процесами виробництва і споживання.

Боротьба із забрудненням навколишнього середовища вимагає постійно зростаючих витрат, приводить до створення нових виробництв по переробці і знищенню шкідливих відходів. В результаті розширюється сама сфера суспільного виробництва: вона включає не тільки створення матеріальних благ, але й різні види діяльності, пов'язані із зменшенням забруднення навколишнього середовища і відновлення природних ресурсів.

Однією із основних проблем є прогнозування подальшого розвитку екологічної ситуації, метою якого служить пошук оптимального плану розвитку економіки. Основним засобом прогнозування у цьому випадку є динамічні моделі еколого-економічної взаємодії. Моделі цього класу зберігають традиційну структуру економіко-математичних моделей, а також містять додаткові змінні і зв'язки, що характеризують екологічну підсистему.

У даній роботі проводиться дослідження однієї з економічних задач – оптимізація динамічної узагальненої моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням. Процес описується моделлю економічної динаміки, в основу якої покладений міжгалузевий баланс, а потужності галузей описуються виробничими функціями. В динамічній моделі міжгалузевого балансу припускається миттєвість перетворення виробничого накопичення (капітальних вкладень) у приріст виробництва продукції.

Автори досліджували динаміку узагальненої моделі міжгалузевого балансу, визначили можливі сценарії її розвитку і зростання, особисто запропонували алгоритм обчислення моменту перемикання керувань.

Отже, за методами системного аналізу дослідимо процес і визначимо можливі й оптимальні траєкторії зростання узагальненої динамічної моделі міжгалузевого балансу з метою її використання в задачах прогнозування, планування та управління.

2. Аналіз основних досліджень і публікацій, в яких започатковане розв'язання поставленої проблеми

Перша міжгалузева модель, яка охоплює взаємозв'язки економіки і навколишнього середовища, була запропонована В. Леонтьєвим і Д. Фордом. Вона охоплює дві групи галузей (виробництв): галузі матеріального виробництва і галузі, які знищують шкідливі відходи.

Запропонована В. Леонтьєвим на початку 50-х років динамічна міжгалузева модель [1] стала класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. З часу своєї появи модель В. Леонтьєва знайшла широкий відгук, і вже накопичений значний досвід практичного використання моделі і її модифікацій на національному і регіональному рівнях. Зокрема, в [2] проведені дослідження і числове моделювання статичної моделі міжгалузевого балансу. Це дало можливість отримати такі результати:

– запропонувати механізм для визначення магістральних траєкторій і відповідних їм керувань;

– досліджувати граничні траєкторії і керування.

В [3] приведено побудову узагальненої статичної моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням.

Серед сучасних досліджень в області математичного моделювання еколого-економічних систем слід зазначити роботи М.В. Михалевича, А.А. Петрова, І.Г. Поспелова, О.В. Рюміної, І.М. Ляшенка, В.С. Григорківа та ін., в яких обґрунтовується необхідність оцінювання еколого-економічної взаємодії на основі моделей, що в сукупності описують систему екологічних і економічних процесів.

3. Мета і методика проведення досліджень

Основною метою даної роботи є подальша розробка методологічних питань аналізу розвитку економіки, дослідницьких прийомів узагальненої динамічної моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням.

Теоретичну і методологічну основу дослідження складають фундаментальні положення і принципи економічної теорії, методи оптимізації, економіко-математичне моделювання, теорії невід'ємних матриць і диференціальних рівнянь.

Динамічна узагальнена модель міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням має вигляд:

$$X^{(1)} = A_{11}X^{(1)} + A_{12}X^{(2)} + A_{13}X^{(3)} + Y^{(1)}, \quad X^{(2)} = A_{21}X^{(1)} + A_{22}X^{(2)} + A_{23}X^{(3)} - Y^{(2)};$$

$$X^{(3)} = A_{31}X^{(1)} + A_{32}X^{(2)} + A_{33}X^{(3)} - Y^{(3)};$$

$$Y_k^{(1)} = \sum_{j=1}^n q_{kj} I_j + C_k, \quad I = B_1 \dot{X}^{(1)} + B_2 \dot{X}^{(2)} + B_3 \dot{X}^{(3)};$$

$$\dot{K}_k = I_k - \mu_k K_k, \quad K_k(0) = K_{k0}, \quad k \in \{1, \dots, n\};$$

$$\sum_{k=1}^n L_k \leq N, \quad 0 \leq X_k^{(1)} \leq F_k(t, K_k, L_k);$$

$$Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)} \geq 0, \quad I_k \geq 0, \quad K_k \geq 0, \quad C_k \geq C_k^{\min}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

де $X^{(1)}, (n \times 1)$ – вектор валового випуску продукції; $Y^{(1)}, (n \times 1)$ – вектор кінцевої продукції; $X^{(2)}, (n \times 1)$ – вектор створеного рукотворного капіталу; $Y^{(2)}, (n \times 1)$ – заданий запас наявного капіталу; $X^{(3)}, (n \times 1)$ – вектор знищених забруднювачів; $Y^{(3)}, (n \times 1)$ – задані ліміти на викиди забруднювачів в навколишнє середовище; A_{11}, A_{12}, A_{13} – невід’ємні матриці матеріальних витрат; A_{21}, A_{22}, A_{23} – невід’ємні матриці використання рукотворного капіталу; A_{31}, A_{32}, A_{33} – невід’ємні матриці випуску забруднювачів; I – інвестиції; C – невиробниче споживання; K – основні виробничі фонди; L – трудові ресурси; μ – норми амортизації капіталів; $\dot{X}^{(1)}, (n \times 1)$ – вектор абсолютних приростів випуску продукції; $\dot{X}^{(2)}, (n \times 1)$ – вектор абсолютних приростів створеного рукотворного капіталу; $\dot{X}^{(3)}, (n \times 1)$ – вектор абсолютних приростів знищених забруднювачів; B_1, B_2, B_3 – невід’ємні матриці коефіцієнтів капіталоємності приростів відповідних виробництв.

Задача полягає в тому, щоб знайти такий процес, який би задовольняв умови (1) і був оптимальним у змісті функціоналу

$$R(\pi) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g(t, C) dt \rightarrow \max_{\pi \in M}, \quad (2)$$

де M – множина процесів, які допускають виконання умов (1); δ – норма дисконтування.

Функції F_k є виробничими функціями кожної галузі з властивостями [4]. На функцію корисності g накладають такі вимоги: двічі неперервно-диференційована по C і неперервна по $t \geq 0$; монотонно зростаюча по C ; угнута по C ; $\lim_{C \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial C} = \infty$, $\lim_{C \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial C} = 0$.

Матриця структури капіталовкладень Q – невід’ємна, причому $q_{kj} > 0$ при всіх $k > s$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Галузі з номерами $k \leq s$ такі, що для кожного $k \leq s$ існує хоча б одне j , при якому $q_{kj} > 0$, називаються фондоутворюючими. Для кожної галузі j знайдеться фондоутворююча галузь

k така, що $q_{kj} > 0$, причому $\sum_{k=1}^n q_{kj} = 1$ для всіх $j \in \{1, \dots, n\}$.

У задачі (1)-(2) в ролі стану виступає вектор капіталу, а решта змінних $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, Y^{(1)}, I, L, C$ – компоненти вектора керування.

Оскільки економіка розвивається в умовах стійкої екологічної рівноваги, то $Y^{(2)} = const$, $Y^{(3)} = const$.

З системи (1) виразимо $X^{(2)}$ і $X^{(3)}$ через $X^{(1)}$ і продиференціюємо ці вирази:

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= (E - A_{22} - UA_{32})^{-1} \{ (A_{21} + UA_{31})X^{(1)} - UY^{(3)} - Y^{(2)} \}; \\ X^{(3)} &= (E - A_{33})^{-1} \{ [A_{31} + A_{32}(E - A_{22} - UA_{32})^{-1}(A_{21} + UA_{31})]X^{(1)} - \\ &\quad - [A_{32}(E - A_{22} - UA_{32})^{-1}U + E]Y^{(3)} - A_{32}(E - A_{22} - UA_{32})^{-1}Y^{(2)} \}; \\ \dot{X}^{(2)} &= (E - A_{22} - UA_{32})^{-1} (A_{21} + UA_{31})\dot{X}^{(1)}; \\ \dot{X}^{(3)} &= (E - A_{33})^{-1} [A_{31} + A_{32}(E - A_{22} - UA_{32})^{-1}(A_{21} + UA_{31})]\dot{X}^{(1)}. \end{aligned}$$

Підставимо останні рівності в перше і п'яте рівняння системи, отримаємо

$$X_k^{(1)} = \sum_{j=1}^n w_{kj} X_j^{(1)} - \sum_{j=1}^n (z_{kj} + b_{kj}) Y_j^{(2)} - \sum_{j=1}^n s_{kj} Y_j^{(3)} + Y_k^{(1)}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

$$I = D\dot{X}^{(1)},$$

де матриці $U = A_{23}(E - A_{33})^{-1}$, $Z = A_{12}(E - A_{22} - UA_{32})^{-1}$, $R = A_{13}(E - A_{33})^{-1}$,

$B = RA_{32}(E - A_{22} - UA_{32})^{-1}$, $D1 = (Z + B)(A_{21} + UA_{31}) + RA_{31}$, $W = A_{11} + D1$, $S = (Z + B)U + R$,

$D2 = (E - A_{22} - UA_{32})^{-1}(A_{21} + UA_{31})$, $D = B_1 + B_2 D2 + B_3(E - A_{33})^{-1}(A_{31} + A_{32} D2)$, $M = QD$.

Відповідно до достатніх умов оптимальності [2, с. 382–385], необхідно оптимізувати дві функції:

$$R(t, K, C, I) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi(t, K)}{\partial K_k} [-\mu_k K_k + I_k] + e^{-\delta t} g(t, C) + \frac{\partial \varphi(t, K)}{\partial t} \rightarrow \max,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \min_{K \geq 0} \varphi(t, K). \quad (3)$$

Невідому функцію φ шукатимемо у вигляді

$$\varphi(t, K) = \sum_{k=1}^n \psi_k(t) K_k.$$

Тоді (3) набуває вигляду

$$R = \sum_{k=1}^n [\dot{\psi}_k - \mu_k \psi_k] K_k + \sum_{k=1}^n \psi_k I_k + e^{-\delta t} g(t, C) \rightarrow \max;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \min_{K_k \geq 0} \psi_k(t) K_k = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Враховуючи міжгалузеві зв'язки моделі (1), за допомогою методу множників Лагранжа замінимо задачу про максимум R на максимум функції

$$\tilde{R} = \sum_{k=1}^n [\dot{\psi}_k - \mu_k \psi_k] K_k + \sum_{k=1}^n \psi_k I_k + e^{-\delta t} g(t, C) + \gamma \left(N - \sum_{k=1}^n L_k \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(X_k^{(1)} - \sum_{j=1}^n w_{kj} X_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n (z_{kj} + b_{kj}) Y_j^{(2)} + \sum_{j=1}^n s_{kj} Y_j^{(3)} - \sum_{j=1}^n q_{kj} I_j - C_k \right) \rightarrow \max_M \quad (4)$$

на множині M всіх $X^{(1)}, C, K, I, L$ моделі (1). Тут $\gamma(t \geq 0)$, $\lambda_k(t \geq 0)$, $k \in \{1, \dots, n\}$ - множники Лагранжа. Введемо позначення:

$$G(t, C) = e^{-\delta t} g(t, C) - \sum_{k=1}^n \lambda_k C_k, \quad h_k = \lambda_k - \sum_{j=1}^n \lambda_j w_{jk}, \quad \omega_k = \psi_k - \sum_{j=1}^n q_{jk} \lambda_j;$$

$$P_k = -\dot{\psi}_k + \mu_k \psi_k, \quad R_k(t, K, X^{(1)}, L) = -P_k K_k + h_k X_k^{(1)} - \gamma L_k.$$

Тоді

$$\tilde{R} = \sum_{k=1}^n R_k(t, K, X^{(1)}, L) + \sum_{k=1}^n \omega_k I_k + G(t, C) + \gamma N + \sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{j=1}^n \{(z_{kj} + b_{kj}) Y_j^{(2)} + s_{kj} Y_j^{(3)}\}.$$

Задача (4) набуває такого вигляду в нових позначеннях:

$$R_k(t, K, X^{(1)}, L) \rightarrow \max_{\substack{0 \leq X_k^{(1)} \leq F_k(t, K, L), \\ K_k \geq 0, L_k \geq 0}} \quad (5)$$

$$\max_{I_k \geq 0} \omega_k I_k = 0 \quad \forall k, t. \quad (6)$$

Пошук оптимального режиму економічного розвитку зводиться до максимізації функцій $R_k(t, K, X^{(1)}, L)$ і $G(t, C)$ і підбору таких множників $\psi_k(t), \lambda_k(t), \gamma(t)$, щоб цей процес $\pi \in M$ виявився допустимим.

Множники $\psi_k, \lambda_k, \gamma$ мають зміст дисконтованих до початкового моменту внутрішніх цін. Зміст поточних цін мають величини

$$\bar{\psi}_k(t) = \psi_k(t) e^{\delta t}, \quad \bar{\lambda}_k(t) = \lambda_k(t) e^{\delta t}, \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(t) e^{\delta t}.$$

Режим розвитку економіки, визначений (5)–(6), назвемо оптимальним при даних цінах. Він забезпечує максимум всіх видів прибутку в кожний момент часу. Ціни $\zeta = (\psi, \lambda, \gamma) \in \Pi$ назвемо допустимими.

Згідно з (5), споживання $C(t \geq 0)$ забезпечує максимум комерційного прибутку $G(t, C)$. З урахуванням властивостей функції $g(t, C)$ необхідною умовою існування цього максимуму є

невід'ємність вектора $\lambda(t)$ при кожному $t \geq 0$. Якщо корисність лінійна $g = \sum_{k=1}^n \theta_k C_k$, то внутрішні

поточні ціни не нижче за зовнішні: $\bar{\lambda}_k \geq \theta_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Якщо $C_k > C_k^{\min}$, то поточна ціна даного

продукту дорівнює граничній корисності $\bar{\lambda}_k = \frac{\partial g(t, C)}{\partial C_k}$. Якщо $\bar{\lambda}_k > \frac{\partial g(t, C)}{\partial C_k}$, то $C_k = C_k^{\min}$. В

частинному випадку, якщо $g = \sum_{k=1}^n \theta_k C_k$, то значення $C_k > C_k^{\min}$ можливе тільки при такому $k = l$,

що

$$\frac{\theta_l}{\lambda_l} = \max_k \frac{\theta_k}{\lambda_k} = 1. \quad (7)$$

Галузь l є єдиною.

Згідно з (5), оптимальний продукт галузі X_k , капітал K_k і робоча сила L_k повинні забезпечити максимум прибутку R_k . А це можливо при виконанні умови

$$X_k = \begin{cases} F_k(t, K_k, L_k), & \text{якщо } h_k > 0, \\ 0, & \text{якщо } h_k < 0, \\ \text{не визначено,} & \text{якщо } h_k = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Позначимо

$$\tilde{R}_k = \max_{0 \leq X_k \leq F_k(t, K_k, L_k)} R_k = h_k F_k(t, K_k, L_k) - P_k K_k - \gamma L_k. \quad (9)$$

Враховуючи лінійну однорідність виробничих функцій F_k , можемо записати

$$\tilde{R}_k = \tilde{r}_k(t, k_k) L_k,$$

де $k_k = K_k / L_k$ – фондоозброєність, $\tilde{r}_k(t, k_k) = h_k f_k(t, k_k) - P_k k_k - \gamma$ – виробничий прибуток галузі з одиниці праці. Оскільки $L_k > 0$ для всіх k і t , отримуємо необхідні і достатні умови максимуму \tilde{R}_k за K_k і L_k :

$$\tilde{r}_k(t, \hat{k}_k) = \max_k \tilde{r}_k(t, k_k) \quad (10)$$

для всіх k і t . Для існування такого \hat{k}_k необхідно, щоб $P_k > 0$, $\gamma > 0$ для всіх k і t . Якщо $h_k > 0$ і $f_k(t, k_k) > 0$, $P_k > 0$, $\gamma > 0$, то існує $\hat{k}_k > 0$.

Вектор $H = (h_1, \dots, h_n)$ виражається через вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матричною формулою

$$H = (E - W^T) \lambda. \quad (11)$$

Із (8), згідно з (10), впливає повна загруженість галузей на оптимальному режимі:

$$X_k = F_k(t, K_k, L_k), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad t \geq 0.$$

На основі властивості обмеженості на сумарну робочу силу матимемо

$$\sum_{k=1}^n L_k(t) = N(t), \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Використовуючи (9) і (10), отримаємо

$$h_k \frac{\partial F_k(t, K_k, L_k)}{\partial L_k} = \gamma, \quad h_k \frac{\partial F_k(t, K_k, L_k)}{\partial K_k} = P_k \quad (13)$$

для всіх k і $t \geq 0$. Це означає, що чистий граничний прибуток з одиниці праці однаковий для всіх галузей і повинен співпадати з ціною праці, а з одиниці фондів – з ціною їх зношення. Якщо

$$\eta_k(t, k_k) = \frac{\partial F_k / \partial L_k}{\partial F_k / \partial K_k}, \quad \tilde{P}_k = P_k / \gamma, \quad \text{тоді} \quad \tilde{P}_k \eta_k(t, k_k) = 1, \quad \text{тобто оптимальна фондоозброєність}$$

залежить тільки від відношення ціни зношення фондів до ціни праці.

Зокрема, для виробничої функції Кобба-Дугласа $F_k = a_k e^{\sigma_k t} (K_k)^{\alpha_k} (L_k)^{\beta_k}$ маємо

$$\eta_k(t, k_k) = \frac{\beta_k}{\alpha_k} k_k, \quad k_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k} (\tilde{P}_k)^{-1}. \quad (14)$$

Позначивши $\tilde{h}_k = h_k / \gamma$, $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k / \gamma$, з (11) отримаємо

$$\tilde{\lambda} = (E - W^T)^{-1} \tilde{H}, \quad \tilde{h}_k = \left(\frac{\partial F_k(t, K_k, L_k)}{\partial L_k} \right)^{-1}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (15)$$

Максимум (6) за I_k визначений при умові $\omega_k = \psi_k - \sum_{j=1}^n q_{jk} \lambda_j \leq 0$. Тоді

$$I_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \psi_k - \sum_{j=1}^n q_{jk} \lambda_j < 0, \\ > 0, & \text{якщо } \psi_k - \sum_{j=1}^n q_{jk} \lambda_j = 0. \end{cases}$$

Назвемо k -ту галузь розвиваючою в момент часу t , якщо $I_k(t) > 0$. Якщо всі галузі розвиваються, то

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n q_{jk} \lambda_j, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Тоді ціни зношення приймають вигляд

$$\tilde{P}_k = \sum_{j=1}^n q_{jk} (\mu_k \tilde{\lambda}_j - v_j), \quad v_j = \frac{\dot{\lambda}_j}{\gamma}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, s\}. \quad (16)$$

Перші s рівнянь в (15) при заданих λ_j , $j \in \{1, \dots, s\}$ утворюють замкнену нелінійну систему з s невідомими v_j . Позначимо через $\tilde{v}_j(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_s)$ розв'язок цієї системи при заданих $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_s$.

Тоді для цін фондоутворюючих продуктів λ_j , $j \in \{1, \dots, s\}$ одержимо задачу Коші:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_j = \gamma \tilde{v}_j(\lambda_1/\gamma, \dots, \lambda_s/\gamma), & j \in \{1, \dots, s\}, \\ \lambda_j(0) = \lambda_{j0}, \end{cases}$$

яку при заданій ціні праці $\gamma(t \geq 0)$ можна розв'язати.

Якщо відомі ціни фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(t)$, $k \leq s$, ціна праці $\gamma(t)$, $t \geq 0$, то з (16) знаходимо ціни зношення \tilde{P}_k , з (14) – магістральні фондоозброєності $k_{kmag}(t \geq 0)$, з (15) – ціни нефондоутворюючих продуктів λ_k , $k > s$. Таким чином, ціни всіх продуктів і фондів $\lambda_k(t), \psi_k(t)$, $t \geq 0$, а також магістральні фондоозброєності $k_{kmag}(t \geq 0)$ залежать від ціни праці $\gamma(t)$ та початкових значень цін фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(0)$, $k \in \{1, \dots, s\}$.

У випадку сталих і не залежних явно від часу початкових матриць системи (1), виробничих функцій і функції корисності магістральні значення траєкторії і керування визначаються за таким алгоритмом.

1. Задамо $\lambda_k = \lambda_{k0} e^{-\delta t}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma = \gamma_0 e^{-\delta t}$, де λ_{k0}, γ_0 – сталі, які необхідно визначити. Тоді $\tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_{k0}}{\gamma_0}$, $\tilde{P}_k = \sum_{j=1}^n q_{jk}(\mu_k + \delta)\tilde{\lambda}_j$, $k \in \{1, \dots, n\}$ і система (15) при $k \in \{1, \dots, s\}$ є нелінійною системою рівнянь з s невідомими $\tilde{\lambda}_k$, $k \in \{1, \dots, s\}$. Позначимо її розв'язок $\tilde{\lambda}^*$. Тоді \tilde{P}_k^* , k_k^* відповідні цьому розв'язку значення з урахуванням рівності (14). Значення змінних $\tilde{\lambda}_j$, $j \in \{s+1, \dots, n\}$ обчислюємо за формулою (15).

2. Нехай $g(C) = \sum_{k=1}^n \theta_k C_k$. Із (5) знаходимо C_{kmag} . Якщо значення C_k не визначені умовою (5), то маємо надлишкову галузь $k=l$. Знайдемо $\frac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l^*} = \max_k \frac{\theta_k}{\tilde{\lambda}_k^*}$ і задамо $\gamma = \frac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l^*}$.

3. З лінійної системи $n+1$ рівняння

$$\sum_{j=1}^n (E-W)_{kj} f_j(t, k_j) L_j = - \sum_{j=1}^n (z_{kj} + b_{kj}) Y_j^{(2)} - \sum_{j=1}^n s_{kj} Y_j^{(3)} + \sum_{j=1}^n q_{kj} \mu_j k_j L_j + C_k, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

$$\sum_{k=1}^n L_k = N$$

знаходимо $n+1$ невідому L_k , $k \in \{1, \dots, n\}$; C_l при $C_k = C_k^{\min}$, $k \neq l$, $l > s$.

4. Якщо задовольняється нерівність $C_l \geq C_l^{\min}$, то знаходимо сталий оптимальний план

$$K_{kmag} = k_{kmag} L_k, \quad I_{kmag} = \mu_k K_{kmag}, \quad X_{mag}^{(1)} = f(k_{mag}) L,$$

$$X_{mag}^{(2)} = (E - A_{22} - UA_{32})^{-1} \{ (A_{21} + UA_{31}) X_{mag}^{(1)} - UY^{(3)} - Y^{(2)} \},$$

$$X_{mag}^{(3)} = (E - A_{33})^{-1} \{ A_{31} X_{mag}^{(1)} + A_{32} X_{mag}^{(2)} - Y^{(3)} \}; \dot{X}^{(1)} = D^{-1} I_{mag}, \dot{X}^{(2)} = D2 \cdot \dot{X}^{(1)},$$

$$\dot{X}^{(3)} = (E - A_{33})^{-1} (A_{31} + A_{32} \cdot D2) \dot{X}^{(1)},$$

$$\dot{X}_{mag}^{(i)} = \begin{cases} \dot{X}^{(i)}, & \text{якщо } \dot{X}^{(i)} > 0, \\ 0, & \text{якщо } \dot{X}^{(i)} \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

збалансований за всіма умовами постановки задачі.

Ліві граничні траєкторії знаходяться з відповідних задач Коші (1). Розв'язавши їх, отримаємо

$$K_k(t) = \frac{I_k}{\mu_k} + (K_{k0} - \frac{I_k}{\mu_k}) e^{-\mu_k t}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Перетин лівої граничної траєкторії з магістраллю дає точку перемикання τ . Її можна визначити з такої задачі математичного програмування:

$$\min \tau, \quad 0 \leq \frac{\mu_k (K_{kmag}^* - K_{k0} e^{-\mu_k \tau})}{1 - e^{-\mu_k \tau}} \leq I_{kmag}^*, \quad \tau \geq 0,$$

де

$$I_{kmag}^* = \begin{cases} I_{kmag}, & K_{k0} \leq K_{kmag}, \\ \frac{K_{k0}}{K_{kmag}} I_{kmag}, & K_{k0} > K_{kmag}, \end{cases} \quad K_{kmag}^* = \begin{cases} K_{kmag} (1 - \varepsilon_k), & K_{k0} \leq K_{kmag}, \\ K_{kmag} (1 + \varepsilon_k), & K_{k0} > K_{kmag}. \end{cases}$$

Оскільки кожна компонента лівої крайової траєкторії $K_k(t)$ при прямуванні t до безмежності наближається знизу при $K_{k0} \leq K_{kmag}$ або зверху $K_{k0} > K_{kmag}$ до відповідної компоненти магістралі K_{kmag} і їх не перетинають, тому введені досить малі додатні величини ε_k , щоб ліва крайова траєкторія перетинала $K_{kmag} (1 - \varepsilon_k)$ при $K_{k0} \leq K_{kmag}$ або $K_{kmag} (1 + \varepsilon_k)$ при $K_{k0} > K_{kmag}$.

Після визначення точки перемикання τ можна знайти компоненту лівого керування за формулою:

$$I_{kl} = \frac{\mu_k (K_{kmag}^* - K_{k0} e^{-\mu_k \tau})}{1 - e^{-\mu_k \tau}}.$$

Наведемо результати дослідження динамічної узагальненої моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням при таких даних: $n=3$, $\mu_1=0,07$, $\mu_2=0,04$, $\mu_3=0,05$; $\sigma_1=0,08$, $\sigma_2=0,09$, $\sigma_3=0,07$; $\delta=0,05$; $s=1$; $\theta_1=0,1$, $\theta_2=0,2$, $\theta_3=0,3$; $N=30$; $F_1(K_1, L_1)=10(K_1)^{1/2}(L_1)^{1/2}$, $F_2(K_2, L_2)=12(K_2)^{1/3}(L_2)^{2/3}$, $F_3(K_3, L_3)=15(K_3)^{1/4}(L_3)^{3/4}$;

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{pmatrix} 0,003 & 0,05 & 0,099 \\ 0,07 & 0,003 & 0,09 \\ 0,03 & 0,07 & 0,0056 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,02 & 0,01 \\ 0,09 & 0,025 & 0,03 \\ 0,06 & 0,059 & 0,06 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,02 & 0,05 \\ 0,02 & 0,085 & 0,073 \\ 0,18 & 0,045 & 0,025 \end{pmatrix}, \\
A_{21} &= \begin{pmatrix} 0,0001 & 0,0004 & 0,00043 \\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0006 \\ 0,0003 & 0,0007 & 0,00076 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0,001 & 0,1 & 0,06 \\ 0,08 & 0,05 & 0,45 \\ 0,07 & 0,087 & 0,004 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,13 \\ 0,2 & 0,3 & 0,06 \\ 0,46 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}, \\
A_{31} &= \begin{pmatrix} 0,0008 & 0,00048 & 0,0009 \\ 0,00057 & 0,0008 & 0,0007 \\ 0,00073 & 0,00027 & 0,00064 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 0,002 & 0,034 & 0,012 \\ 0,08 & 0,045 & 0,023 \\ 0,048 & 0,075 & 0,003 \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,02 & 0,05 \\ 0,67 & 0,5 & 0,03 \\ 0,08 & 0,9 & 0,5 \end{pmatrix}, \\
B_1 &= \begin{pmatrix} 0,037 & 0,4 & 0,05 \\ 0,02 & 0,1 & 0,03 \\ 0,06 & 0,01 & 0,4 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0,031 & 0,3 & 0,03 \\ 0,09 & 0,5 & 0,02 \\ 0,05 & 0,01 & 0,5 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0,028 & 0,51 & 0,42 \\ 0,09 & 0,7 & 0,011 \\ 0,048 & 0,01 & 0,7 \end{pmatrix}; \\
Q &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,004 \\ 0,003 \end{pmatrix}, Y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,001 \\ 0,002 \\ 0,006 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$K_{10} = 40, K_{20} = 55, K_{30} = 45; C_1^{\min} = 10, C_2^{\min} = 12, C_3^{\min} = 15.$$

В результаті розрахунків отримали магістраль:

- ціни зношення $\tilde{P}_1 = 0,118, \tilde{P}_2 = 0,102, \tilde{P}_3 = 0,094$;
- ціни продуктів $\tilde{\lambda}_1 = 0,788, \tilde{\lambda}_2 = 0,78, \tilde{\lambda}_3 = 0,979$;
- надлишкова галузь $l=3$;
- початкове значення ціни праці $\gamma_0 = 0,307$;
- початкові значення цін продуктів $\lambda_{10} = 0,242, \lambda_{20} = 0,239, \lambda_{30} = 0,3$;
- трудові ресурси $L_1 = 5,365, L_2 = 12,361, L_3 = 12,274$;
- невиробниче споживання $C_1 = 10, C_2 = 12, C_3 = 25,275$;
- капітал $K_1 = 45,46, K_2 = 59,532, K_3 = 43,339$;
- валовий випуск $X_1^{(1)} = 156,164, X_2^{(1)} = 249,189, X_3^{(1)} = 252,382$;
- створений рукотворний капітал $X_1^{(2)} = 518,04, X_2^{(2)} = 773,446, X_3^{(2)} = 1098$;
- знищені забруднювачі $X_1^{(3)} = 109,352, X_2^{(3)} = 405,717, X_3^{(3)} = 920,798$;
- приріст випуску продукції $\dot{X}_1^{(1)} = 6,381, \dot{X}_2^{(1)} = 1,45, \dot{X}_3^{(1)} = 0$;
- приріст рукотворного капіталу $\dot{X}_1^{(2)} = 5,817, \dot{X}_2^{(2)} = 8,684, \dot{X}_3^{(2)} = 12,332$;
- приріст знищеного забруднення $\dot{X}_1^{(3)} = 1,229, \dot{X}_2^{(3)} = 4,556, \dot{X}_3^{(3)} = 10,343$;

- кінцева продукція $Y_1^{(1)} = 17,73$, $Y_2^{(1)} = 12$, $Y_3^{(1)} = 25,275$;
- інвестиції $I_1 = 3,182$, $I_2 = 2,381$, $I_3 = 2,167$;
- лівий момент перемикання $\tau = 3,25$;
- ліве керування за інвестиціями $I_{1l} = 3,163$, $I_{2l} = 0,865$, $I_{3l} = 0,532$.

4. Висновки

Економічне обґрунтування для отриманих результатів таке: спочатку на часовому проміжку $(0; 3,25)$ перша галузь виробництва вкладає 74,282% капіталу на споживання і 25,718% на накопичення щодо кінцевої продукції, а друга і третя галузі вкладають весь свій капітал на споживання, накопичення капіталу не відбувається. Починаючи з моменту перемикання $\tau = 3,25$ розвиток усіх галузей іде за магістральним режимом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика: Пер. с англ. / Автор предисл. и науч. ред. А.Г. Гранберг. – М.: ОАО издательство «Экономика», 1997. – 479 с.
2. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Знание, 1990. – 430 с.
3. Ляшенко І.М. Деякі узагальнення моделі Леонтьєва “Витрати-випуск” // International Conference: Dynamical system modelling and stability investigation. – Kyiv. – 2003. – May 27–30. – С. 200.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.