TIESINĖS ALGEBROS IR MATEMATINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI

MYKOLO ROMERIO UNIVERSITETAS

MYKOLO ROMERIO UNIVERSITETAS

Kristina Kaulakytė
Rima Kriauzienė

TIESINĖS ALGEBROS IR MATEMATINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI

Mokomoji priemonė

Vilnius, 2011

UDK 512(075.8)
Ka613

Recenzavo:
prof. dr. Aleksandras Krylovas, MRU
doc. dr. Natalja Kosareva, VGTU

Autorių indelis:
Kristina, Kaulakytė – 1,98 autorinių lankų
Rima, Kriauzienė – 1,98 autorinių lankų

Mykolo Romerio universiteto Socialinės informatikos fakulteto tarybos 2011 m. balandžio 4 d. posėdyje (protokolas Nr. 2SI-5) nutarta leidinį spausdinti.

Mykolo Romerio universiteto matematinio modeliavimo katedros 2011 m. balandžio 1 d. posėdyje (protokolas Nr. 1MMK-3) leidinį rekomenduota spausdinti.

Mykolo Romerio universiteto mokslinių-mokomųjų leidinių aprobavimo spaudai komisija 2011 m. balandžio 22 d. posėdyje (protokolas Nr. 2L-13) leidinį patvirtino spausdinti.

ISBN 978-9955-19-327-2

TURINYS

PRATARMĖ

Ši mokymo priemonė skirta įvairių specialybių studentams, studijuojantiems tiesinės algebros ir matematinės analizės dalyką.

Pirmoje mokomosios knygos dalyje pateikiamos pagrindinės tiesinės algebros sąvokos: matricos, determinanto, tiesinės lygčių sistemos. Išnagrinėti ekonominės sistemos balanso modelio bei tiesinio programavimo uždaviniai. Antroje dalyje skaitytojai supažindinami su pagrindinėmis matematinės analizės sąvokomis: skaičių sekos ir funkcijos ribomis, funkcijos išvestine, diferencialu, neapibrėžtiniu integralu. Atskiras skyrelis skirtas aprašyti bendrai funkcijos tyrimo schemai.

Paragrafų pradžioje pateikiami apibrėžimai ir teoremos, kuriomis reikia remtis sprendžiant uždavinius. Knyga išsiskiria dideliu kiekiu detaliai išspręstų uždavinių pavyzdžių. Norint įtvirtinti pateiktos medžiagos suvokimą, paragrafų gale yra suformuluoti savarankiško darbo uždaviniai su atsakymais.

Autorės nuoširdžiai dėkoja recenzentams, pateikusiems vertingų pasiūlymų ir pastabų.

I. TIESINĖ ALGEBRA

1. Matricos ir determinantai

1.1 Matricos sąvoka

Iš skaičių sudaryta stačiakampė lentelė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinama $m \times n$ matmenų matrica arba tiesiog **matrica.** Lentelėje surašyti skaičiai vadinami **matricos elementais.**
Kai matricos A eilučių skaičius m lygus stulpelių skaičiui n (t. y. $m = n$), tai tokia matrica vadinama n-tosios eilės **kvadratine matrica**. Tokiu atveju turime

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elementai $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ sudaro matricos **pagrindinę įstrižainę**, o elementai $a_{1\,n}, a_{2\;n-1}, ..., a_{n\,1}$ sudaro matricos **šalutinę įstrižainę.**
Kvadratinė matrica, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs vienetui, o kiti – lygūs nuliui, vadinama **vienetine matrica** ir žymima raide E , t. y.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinama **nuline matrica** ir žymima raide O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica, gauta iš matricos A, sukeitus jos eilutes ir stulpelius vietomis, vadinama **transponuotąja matrica** ir žymima A^T.

Pavyzdžiui, jei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, tai $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2 Veiksmai su matricomis

Veiksmai su matricomis yra tokie:

- matricos daugyba iš skaičiaus
- matricų sudėtis
- matricų atimtis
- matricų daugyba

Matricos daugyba iš skaičiaus. Matricą A dauginant iš skaičiaus λ, kiekvienas jos elementas yra padauginamas iš to skaičiaus, t. y.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pavyzdžiui, jei turime $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$,

tai $\lambda \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 12 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

Matricų sudėtis ir atimtis. Sudedant (atimant) matricas, yra sudedami (atimami) jų atitinkami elementai. Sudėti ir atimti galime tik tokias matricas, kurios turi **vienodus matmenis** (t. y. vienodą skaičių eilučių ir vienodą skaičių stulpelių). Vienodus matmenis turinčios matricos vadinamos **vienarūšėmis**.

Pavyzdžiui, duotos tokios matricos: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ ir

$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Matricos A ir B yra vienarūšės, nes jų matmenys yra vienodi, t. y. matrica A turi dvi eilutes ir tris stulpelius bei matrica B turi dvi eilutes ir tris stulpelius. Tokiu atveju duotas matricas galime sudėti ir atimti. Taigi,

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 3+6 & 2+(-4) \\ 4+3 & 0+2 & -5+(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 7 & 2 & -6 \end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & 3-6 & 2-(-4)\\ 4-3 & 0-2 & -5-(-1)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 6\\ 1 & -2 & -4\end{pmatrix}.$$

Beje, jei turime matricas $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & -5\end{pmatrix}$ ir $B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, tai jos negali būti sudedamos (atimamos), nes jų matmenys skirtingi, t. y. matrica A turi 3 stulpelius ir 2 eilutes, o matrica B turi 2 stulpelius ir 2 eilutes.

Pavyzdžiai

1. Atlikite veiksmus:

a) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4 & 3-5\\ 2-2 & 4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 0\\ 5 & -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+4 & (-1)+5 \\ 4+2 & 2+1 & 0+0 \\ 5+5 & (-3)+3 & 4+(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix},$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & 15\end{pmatrix},$$

$$4\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 12 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3 & 8-0\\ 12-6 & 20-15\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}1 & 8\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

e) $2\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\right)$.

<u>Sprendimas</u>

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 0+2\\ -1+3 & 4+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 6 & 2\cdot 2\\ 2\cdot 2 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}12 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$.

2. Apskaičiuokite $A=2B+3C-D$, kai:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1 & 9 & -4\\ 1 & -3 & 7\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}.$$

Sprendimas

$$2B=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&0&1\\0&-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1&2\cdot2&2\cdot(-2)\\2\cdot(-2)&2\cdot0&2\cdot1\\2\cdot0&2\cdot(-4)&2\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&-4\\-4&0&2\\0&-8&10\end{pmatrix},$$

$$3C=3\cdot\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&-1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)&3\cdot2&3\cdot0\\3\cdot2&3\cdot(-1)&3\cdot2\\3\cdot0&3\cdot2&3\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&6&0\\6&-3&6\\0&6&-3\end{pmatrix},$$

$$2B+3C=\begin{pmatrix}2&4&-4\\-4&0&2\\0&-8&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6&0\\6&-3&6\\0&6&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+(-3)&4+6&(-4)+0\\(-4)+6&0+(-3)&2+6\\0+0&(-8)+6&10+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&10&-4\\2&-3&8\\0&-2&7\end{pmatrix},$$

$$2B+3C-D=\begin{pmatrix}-1&10&-4\\2&-3&8\\0&-2&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&9&-4\\1&-3&7\\0&-3&7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1-(-1)&10-9&-4-(-4)\\2-1&-3-(-3)&8-7\\0-0&-2-(-3)&7-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Raskite matricos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ transponuotąją matricą.

Sprendimas

Matrica, gauta iš matricos A sukeitus jos eilutes ir stulpelius vietomis, vadinama ***transponuotąja matrica.***

Atsakymas: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Apskaičiuokite matricą $A = \left(B + B^T\right)^T$, kai:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-2) & 5+(-5) \\ -2+2 & 3+3 & 4+(-4) \\ -5+5 & -4+4 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(B+B^T\right)^T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

6. Apskaičiuokite:

a) $B-A$, **b)** $4A-5B$, **c)** $3B-2A$, **d)** $4A+3B$, **e)** $7B-3A$, kai:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3&4\\1&-1&5&3\\-7&10&11&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3&-2&5&1\\-2&1&1&4\\0&3&-5&7\end{pmatrix}.$$

a) <u>Sprendimas</u>

$$B-A=\begin{pmatrix}-3&-2&5&1\\-2&1&1&4\\0&3&-5&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&-3&4\\1&-1&5&3\\-7&10&11&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3-2&-2-1&5-(-3)&1-4\\-2-1&1-(-1)&1-5&4-3\\0-(-7)&3-10&-5-11&7-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5&-3&8&-3\\-3&2&-4&1\\7&-7&-16&7\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}-5&-3&8&-3\\-3&2&-4&1\\7&-7&-16&7\end{pmatrix}$.

b) $4A-5B$

<u>Sprendimas</u>

$$4A=4\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 5 & 3\\ -7 & 10 & 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2 & 4\cdot 1 & 4\cdot(-3) & 4\cdot 4\\ 4\cdot 1 & 4\cdot(-1) & 4\cdot 5 & 4\cdot 3\\ 4\cdot(-7) & 4\cdot 10 & 4\cdot 11 & 4\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & 4 & -12 & 16\\ 4 & -4 & 20 & 12\\ -28 & 40 & 44 & 0\end{pmatrix},$$

$$5B=5\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-3) & 5\cdot(-2) & 5\cdot 5 & 5\cdot 1\\ 5\cdot(-2) & 5\cdot 1 & 5\cdot 1 & 5\cdot 4\\ 5\cdot 0 & 5\cdot 3 & 5\cdot(-5) & 5\cdot 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-15 & -10 & 25 & 5\\ -10 & 5 & 5 & 20\\ 0 & 15 & -25 & 35\end{pmatrix},$$

$$4A-5B=\begin{pmatrix}8 & 4 & -12 & 16\\ 4 & -4 & 20 & 12\\ -28 & 40 & 44 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-15 & -10 & 25 & 5\\ -10 & 5 & 5 & 20\\ 0 & 15 & -25 & 35\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8-(-15) & 4-(-10) & -12-25 & 16-5\\ 4-(-10) & -4-5 & 20-5 & 12-20\\ -28-0 & 40-15 & 44-(-25) & 0-35\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}23 & 14 & -37 & 11\\ 14 & -9 & 15 & -8\\ -28 & 25 & 69 & -35\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}23 & 14 & -37 & 11\\ 14 & -9 & 15 & -8\\ -28 & 25 & 69 & -35\end{pmatrix}.$

c) $3B-2A$

<u>Sprendimas</u>

$$3B=3\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-3) & 3\cdot(-2) & 3\cdot 5 & 3\cdot 1\\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot 1 & 3\cdot 4\\ 3\cdot 0 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-5) & 3\cdot 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -6 & 15 & 3\\ -6 & 3 & 3 & 12\\ 0 & 9 & -15 & 21\end{pmatrix},$$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 5 & 3\\ -7 & 10 & 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 4\\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 5 & 2\cdot 3\\ 2\cdot(-7) & 2\cdot 10 & 2\cdot 11 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 2 & -6 & 8\\ 2 & -2 & 10 & 6\\ -14 & 20 & 22 & 0\end{pmatrix},$$

$$3B-2A=\begin{pmatrix}-9 & -6 & 15 & 3\\ -6 & 3 & 3 & 12\\ 0 & 9 & -15 & 21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 2 & -6 & 8\\ 2 & -2 & 10 & 6\\ -14 & 20 & 22 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9-4 & -6-2 & 15-(-6) & 3-8\\ -6-2 & 3-(-2) & 3-10 & 12-6\\ 0-(-14) & 9-20 & -15-22 & 21-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-13 & -8 & 21 & -5\\ -8 & 5 & -7 & 6\\ 14 & -11 & -37 & 21\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}-13 & -8 & 21 & -5\\ -8 & 5 & -7 & 6\\ 14 & -11 & -37 & 21\end{pmatrix}.$

d) $4A+3B$

<u>Sprendimas</u>

$$4A=4\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 5 & 3\\ -7 & 10 & 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2 & 4\cdot 1 & 4\cdot(-3) & 4\cdot 4\\ 4\cdot 1 & 4\cdot(-1) & 4\cdot 5 & 4\cdot 3\\ 4\cdot(-7) & 4\cdot 10 & 4\cdot 11 & 4\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & 4 & -12 & 16\\ 4 & -4 & 20 & 12\\ -28 & 40 & 44 & 0\end{pmatrix},$$

$$3B=3\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-3) & 3\cdot(-2) & 3\cdot 5 & 3\cdot 1\\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot 1 & 3\cdot 4\\ 3\cdot 0 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-5) & 3\cdot 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -6 & 15 & 3\\ -6 & 3 & 3 & 12\\ 0 & 9 & -15 & 21\end{pmatrix},$$

$$4A+3B=\begin{pmatrix}8 & 4 & -12 & 16\\ 4 & -4 & 20 & 12\\ -28 & 40 & 44 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & -6 & 15 & 3\\ -6 & 3 & 3 & 12\\ 0 & 9 & -15 & 21\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8+(-9) & 4+(-6) & -12+15 & 16+3\\ 4+(-6) & -4+3 & 20+3 & 12+12\\ -28+0 & 40+9 & 44+(-15) & 0+21\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3 & 19\\ -2 & -1 & 23 & 4\\ -28 & 49 & 29 & 21\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3 & 19\\ -2 & -1 & 23 & 4\\ -28 & 49 & 29 & 21\end{pmatrix}$.

e) $7B-3A$

<u>Sprendimas</u>

$$7B=7\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot(-3) & 7\cdot(-2) & 7\cdot 5 & 7\cdot 1\\ 7\cdot(-2) & 7\cdot 1 & 7\cdot 1 & 7\cdot 4\\ 7\cdot 0 & 7\cdot 3 & 7\cdot(-5) & 7\cdot 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-21 & -14 & 35 & 7\\ -14 & 7 & 7 & 28\\ 0 & 21 & -35 & 49\end{pmatrix},$$

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 5 & 3\\ -7 & 10 & 11 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 4\\ 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 5 & 3\cdot 3\\ 3\cdot(-7) & 3\cdot 10 & 3\cdot 11 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 3 & -9 & 12\\ 3 & -3 & 15 & 9\\ -21 & 30 & 33 & 0\end{pmatrix},$$

$$7B-3A=\begin{pmatrix}-21 & -14 & 35 & 7\\ -14 & 7 & 7 & 28\\ 0 & 21 & -35 & 49\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 3 & -9 & 12\\ 3 & -3 & 15 & 9\\ -21 & 30 & 33 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-21-6 & -14-3 & 35-(-9) & 7-12\\ -14-3 & 7-(-3) & 7-15 & 28-9\\ 0-(-21) & 21-30 & -35-33 & 49-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-27 & -17 & 44 & -5\\ -17 & 10 & -8 & 19\\ 21 & -9 & -68 & 49\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix}-27 & -17 & 44 & -5\\ -17 & 10 & -8 & 19\\ 21 & -9 & -68 & 49\end{pmatrix}.$

Savarankiško darbo užduotys

1. Atlikite veiksmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Apskaičiuokite matricą $A = \left(B + B^T\right)^T$, kai:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Apskaičiuokite $A + 2C$, kai:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

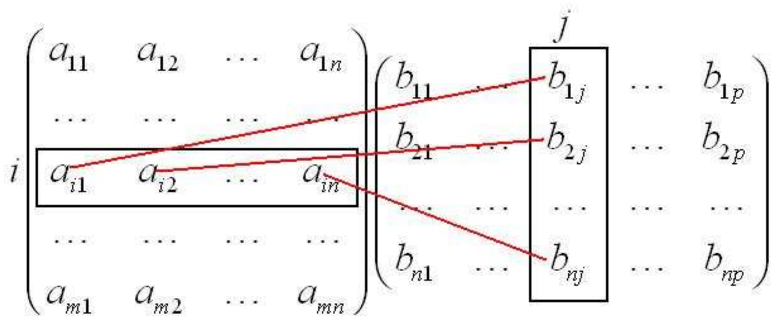
1.3 Matricų daugyba

Kad galėtume sudauginti dvi matricas A ir B, jos turi būti **suderintos**. Matrica A vadinama **suderinta** su matrica B, kai matricos A stulpelių skaičius lygus matricos B eilučių skaičiui. Beje, pastebėkime: iš to, kad matrica A suderinta su matrica B, neišplaukia, kad matrica B suderinta su matrica A.

Pavyzdžiui, turime tokias matricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matrica A suderinta su matrica B, nes matricos A stulpelių skaičius (trys stulpeliai) lygus matricos B eilučių skaičiui (trys eilutės). Tačiau matrica B nėra suderinta su matrica A, nes matricos B stulpelių skaičius yra keturi, o matricos A eilučių skaičius yra du.
Matricų daugybą pailiustruoja tokia schema:



Matricos $A \cdot B$ elementas, esantis i-ojoje eilutėje ir j-ajame stulpelyje, randamas sudauginus matricaos A i-osios eilutės bei matricos B j-ojo stulpelio elementus ir sudėjus šias sandaugas.

Pavyzdžiui, turime tokias dvi matricas:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Matrica A yra suderinta su matrica B. Tuomet

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} \\ a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}+a_{33}\cdot b_{31} & a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}+a_{33}\cdot b_{32} \end{pmatrix}.$$

Matricos $A\cdot B$ eilučių skaičius sutaps su matricos A eilučių skaičiumi, o stulpelių – su matricos B stulpelių skaičiumi.
Pastebėkime, kad matrica B nėra suderinta su matrica A, nes matricos B stulpelių skaičius yra du, o matricos A eilučių skaičius trys. Todėl sandauga $B\cdot A=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ yra negalima. Kitaip tariant, matrica $B\cdot A$ neegzistuoja.

Pavyzdžiui, sudauginsime matricas $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ir $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Pirmiausia nustatome, ar sandauga $A\cdot B$ galima, t. y. ar matricos A ir B yra suderintos. Matricos A stulpelių skaičius (3 stulpeliai) sutampa su matricos B eilučių skaičiumi (3 eilutės). Vadinasi, sandauga $A\cdot B$ yra galima:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

Pavyzdžiai

1. Apskaičiuokite matricų A ir B sandaugas AB ir BA, kai:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

Kadangi matricos A ir B yra suderintos (matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi), vadinasi, jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [3×3]:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos B ir A yra suderintos (matricos B stulpelių skaičius sutampa su matricos A eilučių skaičiumi), vadinasi, jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [3×3]:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot0+1\cdot(-1) & 1\cdot3+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot5+0\cdot2+1\cdot1\\ 0\cdot2+1\cdot0+1\cdot(-1) & 0\cdot3+1\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot5+1\cdot2+1\cdot1\\ 1\cdot2+1\cdot0+0\cdot(-1) & 1\cdot3+1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot5+1\cdot2+0\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $A\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 5\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=A^T$.

Sprendimas

$$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=A^T=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos A ir B yra suderintos (matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi), vadinasi, jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [3×3]:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4\cdot4+5\cdot5+0\cdot0+1\cdot1 & 4\cdot2+5\cdot0+0\cdot1+1\cdot2 & 4\cdot0+5\cdot1+0\cdot3+1\cdot4\\ 2\cdot4+0\cdot5+1\cdot0+2\cdot1 & 2\cdot2+0\cdot0+1\cdot1+2\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot1+1\cdot3+2\cdot4\\ 0\cdot4+1\cdot5+3\cdot0+4\cdot1 & 0\cdot2+1\cdot0+3\cdot1+4\cdot2 & 0\cdot0+1\cdot1+3\cdot3+4\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}42 & 10 & 9\\ 10 & 9 & 11\\ 9 & 11 & 26\end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos B ir A yra suderintos (matricos B stulpelių skaičius sutampa su matricos A eilučių skaičiumi), vadinasi, jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [4×4]:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 4\cdot4+2\cdot2+0\cdot0 & 4\cdot5+2\cdot0+0\cdot1 & 4\cdot0+2\cdot1+0\cdot3 & 4\cdot1+2\cdot2+0\cdot4 \\ 5\cdot4+0\cdot2+1\cdot0 & 5\cdot5+0\cdot0+1\cdot1 & 5\cdot0+0\cdot1+1\cdot3 & 5\cdot1+0\cdot2+1\cdot4 \\ 0\cdot4+1\cdot2+3\cdot0 & 0\cdot5+1\cdot0+3\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+3\cdot3 & 0\cdot1+1\cdot2+3\cdot4 \\ 1\cdot4+2\cdot2+4\cdot0 & 1\cdot5+2\cdot0+4\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot1+4\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot2+4\cdot4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20 & 20 & 2 & 8 \\ 20 & 26 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & 14 \\ 8 & 9 & 14 & 21 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $A\cdot B=\begin{pmatrix} 42 & 10 & 9 \\ 10 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 26 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 20 & 20 & 2 & 8 \\ 20 & 26 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & 14 \\ 8 & 9 & 14 & 21 \end{pmatrix}$.

Savarankiško darbo užduotys

1. Atlikite veiksmus:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}.$

f) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

h) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: (4).

i) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Duotos matricos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Apskaičiuokite: **a)** $AB + 2A$, **b)** $2B + AB$.

Atsakymas: a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Apskaičiuokite AB ir BA. Ar $AB = BA$?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $AB \neq BA$.

b) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $AB = BA$.

4.* Apskaičiuokite $f(A)$, jei:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 7E_2$.

Atsakymas: $f(A) = 2A^2 - 5A + 7E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 7x - 4E_3$.

Atsakymas: $f(A) = 3A^2 - 7A - 4E_3 = \begin{pmatrix} -17 & -9 & 1 \\ -18 & -24 & -4 \\ -3 & 6 & -35 \end{pmatrix}$.

5.* Įrodykite, kad matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yra lygties $x^2 - (a+d)\cdot x + (ad - bc)\cdot E_2 = 0$ sprendinys.

1.4 Determinantas

1.4.1 Antrosios ir trečiosios eilės determinantas

Determinantas – tai kvadratinės matricos $A = \left(a_{ij}\right)$ skaitinė reikšmė. Determinantus žymėsime D, $|A|$, Δ arba $\det A$. Determinantai skaičiuojami pagal tam tikras taisykles. Antrosios eilės determinantas lygus įstrižainių elementų sandaugų skirtumui:

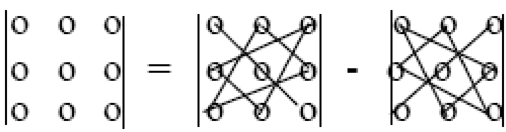
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} .$$

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -5 - 12 = -17$.

Trečiosios eilės determinantas skaičiuojamas pagal trikampių taisyklę:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$
$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}.$$

Ši taisyklė lengviau įsimenama geometrinėje formoje:



Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 6 + 0 + 0 - 12 + 4 - 0 = -2.$$

Išbraukę determinanto i-ąją eilutę ir j-ąjį stulpelį, kurių susikirtime yra elementas a_{ij}, gausime determinantą, kuris vadinamas elemento a_{ij} **minoru** ir žymimas M_{ij}.

Pavyzdžiui,

determinanto $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ elemento a_{21} minoras $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

elemento a_{22} minoras $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Determinanto elemento a_{ij} **adjunktu** vadinamas jo minoras M_{ij}, padaugintas iš daugiklio $(-1)^{i+j}$ ir žymimas A_{ij}, t. y.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} .$$

Pavyzdžiui,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21}$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22}$.

Pagrindinės determinanto savybės:

- Determinantas nesikeičia, jeigu jo eilutes sukeičiame su stulpeliais, t. y. $|A| = |A^T|$.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

- Jeigu determinantas turi nulinę eilutę (stulpelį), tai jis lygus nuliui.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

▪ Sukeitus dvi determinanto eilutes (stulpelius) vietomis, determinato ženklas pasikeičia.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$

▪ Jeigu determinantas turi dvi lygias eilutes (stulpelius), tai jis lygus nuliui.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

▪ Jeigu determinanto eilutės (stulpeliai) yra proporcingos, tai toks determinantas lygus nuliui.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} -4 & 8 & -24 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Čia proporcingos pirmoji ir antroji determinanto eilutės (t. y. pirmąją eilutę padalinę iš (-4), gauname tokius pačius elementus kaip ir antrojoje eilutėje).

▪ Jeigu kurios nors determinanto eilutės (stulpelio) elementai turi bendrą daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 12 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$

Čia iškėlėme daugiklį 2 iš pirmosios eilutės.

▪ Jeigu prie vienos determinanto eilutės (stulpelio) elementų pridėsime kitos eilutės (stulpelio) elementus, padaugintus iš bet kurio (to paties) skaičiaus, nelygaus nuliui, determinanto reikšmė nepakis.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & -11 \end{vmatrix}$.

Čia pirmąją eilutę padauginome iš (-2) ir pridėjome prie trečiosios eilutės.

- Determinantas lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir juos atitinkančių adjunktų sandaugų sumai. Ši formulė vadinama determinanto *skleidiniu* eilutės (stulpelio) elementais (ši taisyklė yra vienintelis būdas apskaičiuoti aukštesnės eilės negu trečioji determinantams).

Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$
$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Pavyzdžiai

Apskaičiuokite determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot 4 = 2 - 12 = -10.$$

Atsakymas: – 10.

b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{4}{3}\cdot 6 = 4 - 8 = -4\,.$$

Atsakymas: – 4.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-1)\cdot 1 - (-4)\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-2\cdot(-2)\cdot 2 - (-1)\cdot(-1)\cdot 0 = 14.$$

Atsakymas: 14.

d) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot 5 + (-2)\cdot 6\cdot 5 - 5\cdot(-1)\cdot 5 -$$

$$-6\cdot(-1)\cdot 4 - (-1)\cdot(-2)\cdot(-1) = 0.$$

Atsakymas: 0.

e) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -16 & -4 & -1 \\ -13 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -16 & -4 & -1 \\ -13 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) \cdot (-13) + (-16) \cdot (-1) \cdot 1 -$$

$$-(-13) \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot (-16) \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 6 = 0.$$

Atsakymas: 0.

f) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) \cdot 5 - 5 \cdot 0 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot 0 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) \cdot (-2) = 5.$$

Atsakymas: 5.

g) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 5A_{12} + 6A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} +$$

$$+ 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 10 - 24 = -11.$$

Atsakymas: – 11.

Savarankiško darbui užduotys

1. Apskaičiuokite šiuos determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Atsakymas: -3.

b) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Atsakymas: -3.

c) $\begin{vmatrix} -21 & 1 & 5 \\ -23 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Atsakymas: 5.

d) $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Atsakymas: -54.

e) $\begin{vmatrix} -10 & -3 & 1 \\ 22 & 3 & -4 \\ 12 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Atsakymas: 0.

f) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Atsakymas: 28.

g) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$

Atsakymas: 6.

2*. Išspręskite lygtis:

a) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 10 = 0.$

Atsakymas: $-2; 0$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 16 = 0.$

Atsakymas: $-3; 6$.

c) $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

Atsakymas: $-2; -1$.

3*. Išspręskite nelygybes:

a) $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} \le 0.$

Atsakymas: $-4 \le x \le 5$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \ge \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}.$

Atsakymas: $4 \le x,\ x \ge 5$.

c) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \le 0.$

Atsakymas: $-2 \le x \le 4$.

1.4.2 Ketvirtosios eilės determinantas

Ketvirtosios eilės determinantas apskaičiuojamas, skleidžiant jį pagal bet kurį stulpelį arba bet kurią eilutę, t. y. determinantas lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir juos atitinkančių adjunktų sandaugų sumai.

Skleidimas pagal eilutes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} =$$

$$= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24} =$$
$$= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34} =$$
$$= a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44}.$$

Skleidimas pagal stulpelius:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} =$$

$$= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42} =$$
$$= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$
$$= a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44}.$$

Pavyzdžiai

Apskaičiuokite 4-osios eilės determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Sprendimas

Duotąjį determinantą skleisime pagal 4-ąją eilutę, nes joje yra du nuliniai elementai ir tokiu atveju bus mažiau skaičiavimo nei skleidžiant, pavyzdžiui, pagal 1-ąją eilutę.

Taigi, šiuo atveju formulė atrodys taip:

$$\det A = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}.$$

Tuomet nagrinėjamu atveju turėsime

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 0 \cdot A_{44} = 5 \cdot (-1)^{4+1} \cdot M_{41} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot M_{42} = -5 \cdot M_{41} + M_{42} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot (-32) + (-58) = 102.$$

Taigi, apskaičiavome duotąjį determinantą, skleisdami jį pagal ketvirtąją eilutę.

Atsakymas: 102.

Taikant determinantų savybes, nagrinėjamą determinantą pakeičiame taip, kad visi kurios nors eilutės (stulpelio) elementai, išskyrus vieną, būtų lygūs nuliui.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

Pasirenkame antrąją eilutę (ją patogu imti, nes joje trečiasis elementas yra vienetas) ir šios eilutės elementus, nuosekliai padauginus iš $(-2), (-6)$ ir (-2), pridėkime atitinkamai prie pirmosios, trečiosios ir ketvirosios eilučių. Virš vieneto ir po juo gausime nulius ir gautą determinantą, skleisdami pagal trečiąjį stulpelį, turėsime:

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -18 & 0 & 8 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ -38 & -27 & 0 & 16 \\ -16 & -9 & 0 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -11 & -18 & 8 \\ -38 & -27 & 16 \\ -16 & -9 & 13 \end{vmatrix} = -(-2727) = 2727.$$

Atsakymas: 2727.

c) $\begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -7 & 6 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

Sprendimas

Jeigu determinante nėra nė vieno elemento, lygaus vienetui, tai, pasinaudodami determinantų savybėmis, kurį nors determinanto elementą pakeičiame vienetu.

Duotajame determinante trečiąją eilutę pridėdami prie ketvirtosios, elementą $a_{43} = -2$ pakeičiame vienetu:

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -7 & 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dabar, pasinaudoję ketvirtojoje eilutėje esančiu vienetu, trečiajame stulpelyje virš vieneto esančius elementus pakeisime nuliais (analogiškai kaip b) pavyzdyje). Tuo tikslu ketvirtąją eilutę padauginę iš (-3), (-9) bei 6 ir atitinkamai pridėję prie trečiosios, antrosios ir pirmosios eilučių, gausime

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -27 & 55 & 0 & 26 \\ 32 & -80 & 0 & -50 \\ 13 & -22 & 0 & -7 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Gautąjį determinantą skleisdami pagal trečiąjį stulpelį, suvedame į trečiosios eilės determinantą:

$$\begin{vmatrix} -27 & 55 & 0 & 26 \\ 32 & -80 & 0 & -50 \\ 13 & -22 & 0 & -7 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 1 \cdot A_{43} = 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot M_{43} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -27 & 55 & 26 \\ 32 & -80 & -50 \\ 13 & -22 & -7 \end{vmatrix} = -(-114) = 114.$$

Atsakymas: 114.

Savarankiško darbui užduotys

Apskaičiuokite 4-osios eilės determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 4 \\ 5 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

Atsakymas: -6.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Atsakymas: 15.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Atsakymas: -20.

d) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 7 & -8 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

Atsakymas: 364.

1.5 Atvirkštinė matrica

n-tosios eilės kvadratinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vadinama **neišsigimusiąja**, kai $\det A \neq 0$. Priešingu atveju, t. y. kai $\det A = 0$, ji vadinama **išsigimusiąja.**

Matrica A^{-1} vadinama **matricos** A **atvirkštine matrica**, jei

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

čia E yra n-tosios eilės vienetinė matrica.

Kvadratinė matrica A turi atvirkštinę A^{-1} tik tada, kai $\det A \neq 0$, t. y. kai ji yra neišsigimusioji.

Atvirkštinę matricą galima rasti dviem būdais:

1) pagal formulę $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$, kur $\widetilde{A}$ – transponuotoji adjunktų matrica (dar vadinama prijungtine matricai A);
2) Gauso metodu.

<u>**I būdas.**</u> Jei A yra n-tosios eilės matrica, tai jos atvirkštinė apskaičiuojama taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

čia A_{ij}, $i = 1,..,n$, $j = 1,...n$, yra matricos A elementų a_{ij} adjunktai, o matrica

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

yra transponuotoji adjunktų matrica, vadinama **prijungtine** matrica matricai A. Reikia atkreipti dėmesį, kad pirmojoje jos eilutėje surašyti matricos A pirmojo stulpelio elementų adjunktai, antrojoje eilutėje – matricos A antrojo stulpelio elementų adjunktai ir t. t.

Pavyzdžiai

1) Raskite matricos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą A^{-1}.

Sprendimas

Pirmiausia apskaičiuojame jos determinantą

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0.$ Vadinasi, nagrinėjama matrica yra neišsigimusioji ir ji turi atvirkštinę matricą. Šiuo atveju formulė atrodo taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Dabar randame matricos adjunktus:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -1,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -3,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -2,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1.$$

Tuomet prijungtinė matrica atrodys taip:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gauname, kad

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Patikriname, ar $A \cdot A^{-1} = E$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}+\frac{6}{7} & \frac{2}{7}-\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7}-\frac{3}{7} & \frac{6}{7}+\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Vadinasi, atvirkštinė matrica apskaičiuota teisingai.

Atsakymas: $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

2) Raskite matricos $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą A^{-1}.

Sprendimas

Pirmiausia apskaičiuojame jos determinantą

$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 20-9+8+12-24-5 = 2 \neq 0.$ Vadinasi, matrica yra neišsigimusioji ir ji turi atvirkštinę matricą. Šiuo atveju formulė atrodo taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Dabar randame matricos adjunktus:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(12-4) = -8,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-(-3)) = -11,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(5-8) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(5-(-9)) = -14,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1.$$

Tuomet

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -8 & -1\\ -11 & 32 & 3\\ 5 & -14 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -4 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{11}{2} & 16 & \frac{3}{2}\\ \frac{5}{2} & -7 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1{,}5 & -4 & -0{,}5\\ -5{,}5 & 16 & 1{,}5\\ 2{,}5 & -7 & -0{,}5\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}5 & -4 & -0{,}5\\ -5{,}5 & 16 & 1{,}5\\ 2{,}5 & -7 & -0{,}5\end{pmatrix}$.

<u>II būdas.</u> Gauso metodas schematiškai atrodo taip:

$$(A|E_n)\xrightarrow[\text{elementarieji pertvarkymai}]{}(E_n|A^{-1}).$$

Tegul $\det A\neq 0$. Jei prie matricos A iš dešinės pusės prirašysime vienetinę matricą E_n, t. y.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

ir gautą matricą eilučių elementariaisiais pertvarkymais pakeisime matrica

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right),$$

tai gautoji matrica $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ bus matricos A atvirkštinė matrica A^{-1}.

Elementariaisias pertvarkymais laikomi tokie veiksmai:

- matricos eilutės daugyba iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
- matricos eilutės, padaugintos iš nelygaus nuliui skaičiaus, pridėjimas prie kitos matricos eilutės;
- dviejų matricos eilučių sukeitimas vietomis.

Pavyzdžiai

1) Raskite matricos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą A^{-1} Gauso metodu:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{2)}{\sim}$$

$$\overset{2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\overset{3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\overset{4)}{\sim}$$

$$\overset{4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)=\left(E\middle|A^{-1}\right),$$

1) pirmoji ir trečioji eilutės sukeistos vietomis;
2) pirmoji eilutė padauginta iš (-3) ir pridėta prie antrosios eilutės;
3) pirmoji eilutė padauginta iš (-1) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
4) antroji eilutė padauginta iš (-2) ir pridėta prie trečiosios eilutės.

Taigi, gavome, kad

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$

2) Raskite matricos $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą A^{-1}

Gauso metodu:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2)}{\sim}$$

$$\overset{2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{4)}{\sim}$$

$$\overset{4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{5)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right),$$

1) pirmoji eilutė padauginta iš 2 ir pridėta prie antrosios eilutės;
2) pirmoji eilutė padauginta iš (-6) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
3) antroji eilutė padauginta iš (-2) ir pridėta prie trečiosios eilutės.
4) trečioji eilutė padauginta iš 2 ir pridėta prie antrosios;
5) trečioji eilutė padauginta iš (-1) ir pridėta prie pirmosios.

Taigi, gavome, kad

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -1 \\ -18 & -3 & 2 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -1 \\ -18 & -3 & 2 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Savarankiško darbui užduotys

1. Raskite matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{11}{42} & \frac{5}{42} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{42} & \frac{11}{42} \end{pmatrix}$.

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -0{,}6 & 2{,}6 & 1{,}8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & -1{,}4 & -1{,}2 \end{pmatrix}$.

e) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 1{,}4 & -1 \\ 0{,}3 & 0{,}9 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

g) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Gauso metodu raskite matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Tiesinių lygčių sistemos

2.1 Tiesinių lygčių sistemos

Nagrinėkime sistemą, sudarytą iš m lygčių ir n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

čia a_{ij}, b_i ($i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$) – realieji skaičiai. Skaičiai a_{ij} vadinami sistemos koeficientais, b_i – laisvaisiais nariais, x_j – nežinomaisiais (arba kintamaisiais). Ši sistema vadinama **tiesinių lygčių sistema**, nes ją sudarančios lygtys yra tiesinės (pirmos eilės) nežinomųjų x_j atžvilgiu. Bendruoju atveju lygčių skaičius m nebūtinai sutampa su nežinomųjų skaičiumi n.

Tiesinės lygčių sistemos sprendiniu vadinamas skaičių rinkinys $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, kurį įrašę vietoj nežinomųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iš kiekvienos lygties gauname teisingą lygybę.

Kai visi laisvieji nariai $b_i = 0$ ($i = 1,...,m$), sistema vadinama **homogenine lygčių sistema**, o kai bent vienas $b_i \neq 0$ – **nehomogenine lygčių sistema**.

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sudaryta iš sistemos koeficientų, vadinama **sistemos matrica,** o matrica

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

gauta prie A prijungus laisvųjų narių stulpelį, vadinama **išplėstąja sistemos matrica**.

- Tiesinių lygčių sistemą, kuri turi bent vieną sprendinį, vadiname **suderinta** sistema.
- Tiesinių lygčių sistemą, kuri neturi sprendinių, vadiname **nesuderinta** sistema.
- Suderinta sistema, vadinama **apibrėžta**, jei ji turi vienintelį sprendinį.
- Suderinta sistema, vadinama **neapibrėžta**, jei ji turi be galo daug sprendinių.
- Dvi sistemos vadinamos **ekvivalenčiomis**, kai bet kuris vienos sistemos sprendinys kartu yra ir kitos sistemos sprendinys, ir atvirkščiai. Ekvivalenčiųjų sistemų sprendinių aibės sutampa.

2.2 Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Kramerio metodu

Tarkime, turime tiesinių lygčių sistemą, sudarytą iš n lygčių su n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Sudarykime šios sistemos koeficientų matricą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ir pažymėkime matricos A determinantą taip:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tarkime, kad $\Delta \neq 0$.

Determinanto Δ pirmąjį stulpelį pakeitus laisvųjų narių $b_1, b_2, \dots, b_n$ stulpeliu, gaunamas determinantas

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanto Δ antrąjį stulpelį pakeitus laisvųjų narių $b_1, b_2, \dots, b_n$ stulpeliu, gaunamas determinantas

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analogiškai determinanto Δ trečiąjį stulpelį pakeisime laisvųjų narių $b_1, b_2, \dots, b_n$ stulpeliu, determinanto Δ ketvirtąjį stulpelį pakeisime laisvųjų narių $b_1, b_2, \dots, b_n$ stulpeliu ir t. t., kol galiausiai determinanto Δ n-tąjį stulpelį pakeisime laisvųjų narių $b_1, b_2, \dots, b_n$ stulpeliu ir gausime

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Tada $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ – ***Kramerio formulės***, o duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinys yra toks rinkinys $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$, kur $\Delta \neq 0$.

Pastabos

Jei $\Delta \neq 0$, tai nagrinėjama lygčių sistema turi vienintelį sprendinį.

Jei $\Delta = 0$, o bent vienas iš $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ nelygus nuliui, tai nagrinėjama sistema neturi sprendinių.

Jei $\Delta = 0$ ir visi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ lygūs nuliui, tai nagrinėjama sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys

Išspręsime duotą sistemą, remdamiesi Kramerio formulėmis:

$$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 27, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 13. \end{cases}$$

Sprendimas

Sudarome sistemos koeficientų matricos determinantą Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 133.$$

Tada sudarome ir apskaičiuojame determinantus $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 27 & -8 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 13 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 133, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 27 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & 13 & 3 \end{vmatrix} = -133,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -8 & 27 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 399.$$

Tuomet pagal Kramerio formules randame:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{133}{133} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-133}{133} = -1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{399}{133} = 3.$$

Taigi, duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinys yra $(1, -1, \; 3)$.

Atsakymas: $(1, -1, \; 3)$.

Savarankiško darbui užduotys

Išspręskite lygčių sistemas Kramerio metodu:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Atsakymas: $(2,1)$.

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

Atsakymas: $(1, -2, 3)$.

c) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -\,28, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

Atsakymas: $(-2, 2, 4)$.

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

Atsakymas: $(1, 0, -2)$.

e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_3 = 7, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Atsakymas: $(2, -1, 1)$.

f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$

Atsakymas: $(-1, 2, 2)$.

g) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + y + z = 2, \\ 4x - 2y + 6z = 1. \end{cases}$

Atsakymas: Nėra sprendinių.

h) $\begin{cases} 3x - 4y + 4z = 11, \\ 5x + 5y + z = -11, \\ 4x + 2y - z = -1. \end{cases}$

Atsakymas: $(1, -3, -1)$.

i) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -9, \\ 2x + y + z = -10, \\ 5x - 2y - 4z = 8. \end{cases}$

Atsakymas: $(-2, -3, -3)$.

2.3 Tiesinių lygčių sistemų sprendimas atvirkštinės matricos metodu

Tarkime, turime tiesinių lygčių sistemą, turinčią n lygčių su n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

kurią galime užrašyti tokia matricine lygtimi $Ax = B$,

kur $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – sistemos koeficientų matrica, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – nežinomųjų vektorius, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – laisvųjų narių vektorius. Iš matricinės lygties galime gauti $x = A^{-1}B$. Tai ir yra duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinys. Tuo tikslu reikia apskaičiuoti koeficientų matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}, todėl turi būti $\det A \neq 0$.

Pavyzdžiai

1) Išspręsime duotą sistemą, remdamiesi atvirkštinės matricos metodu:

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ -x + 2y - 2z = 1. \end{cases}$$

Sprendimas

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 - 4 - 3 - 2 + 4 = -12 \neq 0 .$$

Dabar randame matricos adjunktus:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 ,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 2) = 0 ,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 ,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 1) = 3 ,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 ,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 2) = -3 ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 ,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3 ,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 .$$

Taigi, turime

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Todėl

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $(1,\ 0,\ -1)$.

2) Išspręsime duotąją sistemą, remdamiesi atvirkštinės matricos metodu:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Sprendimas

Sudarome sistemos koeficientų matricą:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame sudarytos matricos determinantą:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 .$$

Kadangi $\det A = 4 \neq 0$, tai galime apskaičiuoti atvirkštinę matricą:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tuomet randame duotosios sistemos sprendinį:

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}b=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\-12\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Taigi, sprendinys yra $(1,\,-3,\,2)$.

Atsakymas: $(1,\,-3,\,2)$.

Pastaba

Lygčių sistema sprendžiama atvirkštinės matricos metodu tada, kai jos koeficientų matrica yra kvadratinė ir kai $\det A \neq 0$.

3) Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases}2x-2y+z=10,\\x+2y+2z=17,\\x+4y-5z=63,\\2x+y-2z=25.\end{cases}$$

Šios lygčių sistemos atvirkštinės matricos metodu nespręsime, nes joje yra 4 lygtys ir 3 nežinomieji. Užrašytos lygčių sistemos koeficientų matricos matmenys yra 4×3, o tai nėra kvadratinė matrica, todėl negalime apskaičiuoti determinanto.

4) Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases}2x-2y+z=6,\\x+2y+2z=10,\\4y+2z=12.\end{cases}$$

Sprendimas

Lygčių sistemos koeficientų matrica:

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&2&2\\0&4&2\end{pmatrix}$$

yra kvadratinė, todėl apskaičiuojame jos determinantą:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8+0+4-0-16+4=0\,.$$

Kadangi determinantas lygus nuliui, atvirkštinės matricos metodu lygčių sistemos nespręsime. To tiesiog neįmanoma padaryti, nes atvirkštinė matrica neegzistuoja.

Savarankiško darbo užduotys

Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = -1, \\ -5x_1 + 3x_2 + x_3 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Atsakymas: $(1,\ 0,\ -1)$.

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 28, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -25. \end{cases}$

Atsakymas: $(2, -1, 4)$.

c) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Atsakymas: $(-1, 1, -1)$.

d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 3x_3 = 12, \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

Atsakymas: $(-3, -3, -2)$.

2.4 Matricos rangas

Matricos **rangu** vadinama didžiausios eilės minoro, nelygaus nuliui, eilė. Matricos rangą žymėsime $rang(A)$. Tačiau skaičiuoti pagal apibrėžimą matricos rangą nėra patogu. Naudinga žinoti, kad matricos rangas yra tiesiškai nepriklausomų eilučių (stulpelių) skaičius, o ekvivalenčių matricų rangai lygūs. Todėl atliekame elementarius pertvarkymus, kurie nepakeičia matricos rango, suteikdami matricai trikampio, trapecijos ar laiptuotą formą. Jei pertvarkant atsiranda nulininė eilutė (stulpelis), tai ją išbraukiame. Tuomet nenulinių eilučių (stulpelių) skaičius yra matricos rangas.

Elementariaisiais pertvarkymais, kurie nekeičia matricos rango, yra šie veiksmai:

- sukeičiamos vietomis eilutės (stulpeliai),
- matricos eilutė (stulpelis) dauginama iš nelygaus nuliui skaičiaus,
- prie vienos eilutės (stulpelio) pridedama kuri nors kita eilutė (stulpelis), padauginta iš skaičiaus, nelygaus nuliui.

Pavyzdžiai

1) Apskaičiuosime matricos A rangą, kai $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sprendimas

Atliksime elementarius matricos pertvarkius:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim}$$

$$\overset{3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 5 & -10 & -15 \end{pmatrix} \overset{4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1) sukeistos pirmoji ir antroji eilutė vietomis;
2) pirmoji eilutė padauginta iš (-2) ir pridėta prie antrosios eilutės;
3) pirmoji eilutė padauginta iš (-3) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
4) antroji eilutė padalinta iš 3, o trečioji eilutė padalinta iš 5;
5) antroji eilutė padauginta iš (-1) ir pridėta prie trečiosios eilutės.

Atmetę gautąją nulinę eilutę, turime, kad matricos rangas yra 2 (nenulinių eilučių skaičius), t. y. $rang(A)=2$. Čia matrica A suvesta į trapecijos formą.

Atsakymas. $rang(A)=2$.

2) Apskaičiuosime matricos A rangą, kai $A=\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

Sprendimas

Atliksime elementarius matricos pertvarkius:

$$\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\overset{1)}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 5 & 1 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\overset{2)}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 0 & -14 & 29\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\overset{3)}{\sim}$$

$$\overset{3)}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 0 & -14 & 29\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}\overset{4)}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & -14 & 29\end{pmatrix}\overset{5)}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 127\end{pmatrix},$$

1) sukeisti pirmasis ir trečiasis stulpelis vietomis;
2) pirmoji eilutė padauginta iš 5 ir pridėta prie antrosios eilutės;
3) pirmoji eilutė pridėta prie trečiosios eilutės;
4) sukeistos antroji ir trečioji eilutė vietomis;
5) antroji eilutė padauginta iš 14 ir pridėta prie trečiosios eilutės.

Taigi, elementus po pagrindine įstrižaine pavertėme nuliais ir nė viena eilutė netapo nuline, todėl nagrinėjamos matricos rangas yra 3 (nenulinių eilučių skaičius), t. y. $rang(A) = 3$. Čia matrica A suvesta į trikampio formą.

Atsakymas: $rang(A) = 3$.

Savarankiško darbui užduotys

Apskaičiuokite matricų rangus:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $rang(A) = 2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $rang(A) = 3$.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: $rang(A) = 2$.

2.5 Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Gauso metodu

Gauso metodas – tai nuoseklus nežinomųjų eliminavimo metodas, kai duotąją sistemą suvedame į laiptuotą, trapecinę arba trikampę tiesinių lygčių sistemą. Šis metodas patogus tuo, kad juo galima spręsti **bet kurią** tiesinių lygčių sistemą.
Turime tiesinių lygčių sistemą iš m lygčių ir n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Šią sistemą patogiau spręsti ne pertvarkant jos lygtis, o pertvarkant išplėstosios matricos eilutes.
Sudarykime šios sistemos **išplėstinę matricą**:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Elementariaisiais eilučių pertvarkymais išplėstinė matrica $A|B$ pakeičiama tokia matrica:

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3r}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{rr}^{(r-1)} & \ldots & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{rn}^{(r)} & b_{r+1}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

<u>Elementarūs pertvarkymai galimi tokie:</u>
1) bet kurios eilutės elementus galima padauginti arba padalinti iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
2) bet kurią eilutę galima pakeisti, pridėjus prie jos kitą eilutę, padaugintą iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
3) nulinę eilutę, jei visi jos nariai lygūs nuliui ir laisvasis narys už brūkšnio taip pat lygus nuliui, galime atmesti;
4) eilutes galima sukeisti vietomis.

Lygčių sistema gali:

- turėti vienintelį sprendinį (jei $rang(A) = rang(A|B) = n$);
- neturėti sprendinių (jei $rang(A) \neq rang(A|B)$);
- turėti be galo daug sprendinių (jei $rang(A) = rang(A|B) < n$).

Su šiais atvejais susipažinsime išsprendę konkrečius pavyzdžius.

Pavyzdžiai

1) Gauso metodu išspręsime duotąją keturių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 \quad\quad - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>

Sudarome sistemos išplėstinę matricą:

$$A|B = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Sukeitę vietomis pirmąją ir antrąją eilutes, turime:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), prie trečios pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3), o prie ketvirtos pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2). Gauname

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nebekeičiame, o prie trečiosios ir ketvirtosios eilučių pridedame antrąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Pirmųjų trijų eilučių nebekeičiame, o prie ketvirtosios eilutės pridedame trečiąją eilutę, padaugintą iš 2. Gauname

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ketvirtąją eilutę galime išbraukti, nes visi jos elementai lygūs nuliui, o trečiąją eilutę galime padauginti iš (-1). Tada turėsime:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Šią matricą atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ \quad x_2 - 3x_3 = 0, \\ \qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Iš čia nuosekliai randame:

$$x_3 = 1,$$
$$x_2 = 3x_3 = 3 \cdot 1 = 3,$$
$$x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Taigi, duota sistema turi vienintelį sprendinį $(2,\ 3,\ 1)$.

<u>Pastaba:</u> šiuo atveju $rang(A) = rang(A|B) = 3$ (nes po elementariųjų pertvarkymų liko trys nenulinės eilutės ir matricos forma yra trikampė).

Atsakymas: $(2,\ 3,\ 1)$.

2) Gauso metodu išspręsime duotąją trijų lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>

Sudarome sistemos išplėstąją matricą:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Sukeitę vietomis pirmąją ir antrąją eilutes, turime:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), o prie trečiosios pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 2 \end{array}\right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nebekeičiame, o prie trečiosios eilutės pridedame antrąją eilutę, padaugintą iš (-1). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Iš gautosios matricos matome, kad duotoji lygčių sistema sprendinių neturi, nes paskutinė eilutė atitinka lygtį

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1,$$

o tokia lygtis neturi nė vieno sprendinio.

<u>**Pastaba:**</u> šiuo atveju $rang(A) = 2$, o $rang(A|B) = 3$, t. y. $rang(A) \neq rang(A|B)$. Todėl sistema sprendinių neturi.

Atsakymas: sistema sprendinių neturi.

3) Gauso metodu išspręsime duotąją keturių lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 5, \\ \quad\; 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 \qquad - x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>

Sudarome sistemos išplėstinę matricą:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Sukeitę vietomis pirmąją ir trečiąją eilutes, turime:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios ir antrosios eilučių nekeičiame, prie trečiosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), o prie ketvirtos pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Sukeičiame vietomis antrąją ir trečiąją eilutes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nebekeičiame, o prie trečiosios ir ketvirtosios eilučių pridedame antrąją eilutę, padaugintą atitinkamai iš 2 ir (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Prie ketvirtos eilutės pridėję trečiąją eilutę, turime:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ketvirtoji eilutė sudaryta iš nulių, todėl ją galime išbraukti. Antrąją eilutę padauginame iš (-1), trečiąją eilutę padaliname iš (-5). Po visų šių veiksmų turime

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Šią matricą atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Sistemoje nežinomųjų skaičius yra didesnis nei lygčių skaičius, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Lygčių skaičius nurodo bazinių nežinomųjų skaičių. Taigi, nagrinėjamu atveju bazinių nežinomųjų yra trys, o laisvasis nežinimasis yra vienas.
Pasirenkame vieną iš nežinomųjų laisvuoju parametru, pavyzdžiui, pasirinkime $x_4 = t,\ t \in R$.
Tuomet

$$\begin{cases} x_1 + 1 - t + \ \ t + \ \ t = 3 \Rightarrow x_1 = 2 - t, \\ \qquad x_2 + 3t - 2t = 1 \quad \Rightarrow x_2 = 1 - t, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ x_3 = t. \end{cases}$$

Taigi, gavome, kad sistema turi be galo daug sprendinių:

$$\{(2-t;\, 1-t;\ \ t;\ t),\ t \in R\ \}.$$

Šis sprendinys vadinamas bendruoju lygčių sistemos sprendiniu.
Čia x_4 yra laisvasis nežinomasis, o x_1, x_2, x_3 – baziniai nežinomieji.
Imdami $x_4 = t = 0$, gauname bazinį sprendinį $(2;\, 1;\, 0;\, 0)$.
<u>Pastaba:</u> šiuo atveju $rang(A) = rang(A|B) = 3 < 4$, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Bazinių nežinomųjų skaičius sutampa su rangu $rang(A)$. Po elementariųjų pertvarkymų matrica A įgyja trapecinę formą.

Atsakymas: $\{(2-t;\, 1-t;\ \ t;\ t),\ t \in R\ \}$.

4) Gauso metodu išspręsime duotąją trijų lygčių sistemą su penkiais nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 5. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>

Sudarome sistemos išplėstinę matricą:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & -2 & -3 & 3 \\ 6 & -3 & 9 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), o prie trečiosios pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Šią matricą atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_3 - 4x_4 + x_5 = 1, \\ -x_4 = 2. \end{cases}$$

Sistemoje nežinomųjų skaičius yra didesnis nei lygčių skaičius, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Lygčių skaičius nurodo bazinių nežinomųjų skaičių. Taigi, nagrinėjamu atveju bazinių nežinomųjų yra trys, o laisvieji nežinomieji yra du.

Pasirenkame du nežinomuosius laisvaisiais parametrais, pavyzdžiui, pasirinkime $x_5 = t_1$ ir $x_2 = t_2$, $t_1, t_2 \in R$.

Tuomet

$$\begin{cases} 2x_1 - t_2 + 3\cdot(-t_1 - 7) + (-2) - 2t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{5t_1 + t_2 + 24}{2}, \\ x_3 - 4\cdot(-2) + t_1 = 1 \Rightarrow x_3 = -t_1 - 7, \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

Taigi, gavome, kad sistema turi be galo daug sprendinių:

$$\left\{\left(\frac{5t_1+t_2+24}{2};\ t_2;\ -t_1-7;\ \ -2;\ t_1\right),\ t_1,t_2\in R\ \right\}.$$

Čia x_2 ir x_5 yra laisvieji nežinomieji, o x_1, x_3, x_4 – baziniai nežinomieji.

<u>1 pastaba:</u> šiuo atveju $rang(A)=rang(A|B)=3<5$, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Bazinių nežinomųjų skaičius sutampa su matricos A rangu.

<u>2 pastaba:</u> paėmę $t_1=0,\ t_2=0$, gaunate bazinį sprendinį $(12;\ 0;\ -7;\ \ -2;\ 0)$.

Be to, jei laisvaisiais nežinomaisiais būtume paėmę x_1 ir x_5, o baziniais – x_2, x_3, x_4, tai tuomet bendrasis sprendinys atrodytų taip:

$\{(t_2;\ -5t_1+2t_2-24;\ \ -7-t_1;\ \ -2;\ t_1),\ t_1,t_2\in R\}$.

Atsakymas: $\left\{\left(\frac{5t_1+t_2+24}{2};\ t_2;\ -t_1-7;\ \ -2;\ t_1\right),\ t_1,t_2\in R\ \right\}$.

Savarankiško darbui užduotys

Gauso metodu išspręskite tiesinių lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=3, \\ x_2+6x_3+x_4=8. \end{cases}$

Atsakymas: $\{(3-2t;\ 5t-4;\ 2-t;\ t),\ t\in R\}$.

b) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-3x_2+3x_3=7, \\ 5x_1-3x_2+3x_3=7. \end{cases}$

Atsakymas: sprendinių nėra.

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Atsakymas: (1; 1; 1; 0).

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

Atsakymas: (1; 0; 0; 1).

e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

Atsakymas: $\left\{ \left(2t + 2; \frac{4}{5} - \frac{t}{5}; \frac{11}{5} + \frac{16}{5}t; t \right), t \in R \right\}.$

f) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

Atsakymas: $\left\{ \left(\frac{1}{8}t - \frac{1}{2}z + \frac{11}{8}; \frac{11}{8}t - \frac{1}{2}z + \frac{1}{8}; t; z \right),\ \mathrm{t,z} \in R \right\}.$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

Atsakymas: sprendinių nėra.

h) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_2 + 6x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

Atsakymas: $\{(3-2t; 5t-4; 2-t; t),\ t \in R\}$.

i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$

Atsakymas: sprendinių nėra.

j) $\begin{cases} 5x_1 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$

Atsakymas: sprendinių nėra.

k) $\begin{cases} x\text{-}y + z = 5, \\ 2x + y + z = 6, \\ x + y + 2z = 4, \\ x\text{-}2y\text{-}2z = 5. \end{cases}$

Atsakymas: sprendinių nėra.

l) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x - y + 2z = 4, \\ 2x - 2y + z = 1. \end{cases}$

Atsakymas: $\left\{\left(\frac{7-3z}{4}; \frac{5-z}{4}; z\right),\ z \in R\right\}$.

3. Ekonominės sistemos balanso modelis[1]

Ekonominės sistemos balanso lygtis $(E-A)X=C$, kai

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – sistemos technologinė matrica,

$C=(c_1,c_2,\dots,c_n)^T$ – paklausa, E – vienetinė matrica (n-tosios eilės), $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ – gamybos planas, $X\geq 0$.

Gamybos planas X vadinamas **subalansuotu** (optimaliu), jei jis tenkina sistemą

$$\begin{cases}(E-A)X=C,\\ X\geq 0.\end{cases}$$

Jei galima rasti subalansuotą planą X, tai ekonominė sistema vadinama **produktyvia**.

Būtina ir pakankama sąlyga, kad ekonominė sistema su technologine matrica A būtų produktyvi, yra: **egzistuoja neneigiama atvirkštinė matrica** $(E-A)^{-1}$. Tada $X=(E-A)^{-1}C$.

Uždavinio sprendimo algoritmas:

1. Randame vienetinės ir technologinės matricos skirtumą $E-A$.
2. Randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E-A)^{-1}$.
3. Jeigu atvirkštinėje matricoje $(E-A)^{-1}$ nėra **nė vieno** neigiamo elemento, vadinasi, ekonominė sistema yra produktyvi. Galime rasti subalansuotą (optimalų) gamybos planą X, tenkinantį duotąją paklausą:

$$X=(E-A)^{-1}C.$$

[1] Daugiau apie ekonominės sistemos balanso modelį žr.:
Apynis, Antanas; Stankus, Eugenijus. *Matematika.Vadovėlis su taikymo ekonomikoje pavyzdžiais*. Vilnius: TEV, 2001, p. 159–164. ISBN 9955-491-08-6.

Pavyzdžiai

1. Duotoji ekonominės sistemos technologinė matrica $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Koks turi būti gamybos planas $X = (x_1, x_2)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (66\ \ 99)^T$?

Sprendimas

1. Randame vienetinės ir technologinės matricos skirtumą $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

2. Randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E - A)^{-1}$:

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{vmatrix} = 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}22,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 0{,}6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 0{,}8,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 0{,}1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 0{,}5,$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}22} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

3. Visi gautosios matricos elementai teigiami, vadinasi, ekonominė sistema yra produktyvi. Galime rasti subalansuotą (optimalų) gamybos planą X, patenkinantį duotąją paklausą.

$X = (E - A)^{-1} C$, tai

$$X = \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 66 \\ 99 \end{pmatrix} = \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 39{,}6 + 9{,}9 \\ 52{,}8 + 49{,}5 \end{pmatrix} = \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 49{,}5 \\ 102{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 465 \end{pmatrix}.$$

Planas $X=(225,465)^T$, t. y. $x_1=225$, $x_2=465$.

Atsakymas: pirmos rūšies produkcijos reikia pagaminti 225 vienetų, o antros rūšies – 465 vienetų.

2. Duotoji ekonominės sitemos technologinė matrica $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}7\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}7 & 1 & 0{,}5\end{pmatrix}$. Patikrinkite, ar ši sistema produktyvi, jei taip, tai raskite gamybos planą $X=(x_1, x_2, \mathrm{x}_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C=(30\ \ 45\ \ 50)^T$.

<u>Sprendimas</u>

1. Randame vienetinės ir technologinės matricos skirtumą $E-A$:

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}7\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}7 & 1 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & -0{,}7\\ -0{,}6 & 0{,}8 & -0{,}5\\ -0{,}7 & -1 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

2. Randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E-A)^{-1}$:

$$\det(E-A)=\begin{vmatrix}0{,}5 & 0 & -0{,}7\\ -0{,}6 & 0{,}8 & -0{,}5\\ -0{,}7 & -1 & 0{,}5\end{vmatrix}=0{,}2-0{,}42-0{,}392-0{,}25=-0{,}862.$$

Dabar randame matricos $E-A$ adjunktus:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}0{,}8 & -0{,}5\\ -1 & 0{,}5\end{vmatrix}=0{,}4-0{,}5=-0{,}1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-\begin{vmatrix}0 & -0{,}7\\ -1 & 0{,}5\end{vmatrix}=-(0-0{,}7)=0{,}7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -0{,}7 \\ 0{,}8 & -0{,}5 \end{vmatrix} = 0 + 0{,}56 = 0{,}56\,,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} -0{,}6 & -0{,}5 \\ -0{,}7 & 0{,}5 \end{vmatrix} = -(-0{,}3 - 0{,}35) = 0{,}65\,,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}25 - 0{,}49 = -0{,}24\,,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & -0{,}5 \end{vmatrix} = -(-0{,}25 - 0{,}42) = 0{,}67\,,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}7 & -1 \end{vmatrix} = 0{,}6 + 0{,}56 = 1{,}16\,,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}7 & -1 \end{vmatrix} = -(-0{,}5 - 0) = 0{,}5\,,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}4 - 0 = 0{,}4\,.$$

Atvirkštinė matrica

$$(E - A)^{-1} = -\frac{1}{0{,}862} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}56 \\ 0{,}65 & -0{,}24 & 0{,}67 \\ 1{,}16 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0{,}862} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}7 & -0{,}56 \\ -0{,}65 & 0{,}24 & -0{,}67 \\ -1{,}16 & -0{,}5 & -0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Gauta matrica turi neigiamų elementų, vadinasi, ekonominė sistema yra neproduktyvi. Negalime rasti subalansuoto (optimalaus) gamybos plano X, patenkinančio duotąją paklausą.

Atsakymas: ekonominė sistema neproduktyvi.

3. Duotoji ekonominės sitemos technologinė matrica $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5\end{pmatrix}$. Patikrinkite, ar ši sistema produktyvi, jei taip, tai raskime gamybos planą $X=(x_1, x_2, x_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C=(10\ \ 20\ \ 5)^T$? Atvirkštinę matricą raskite Gauso metodu.

Sprendimas

1. Randame vienetinės ir technologinės matricos skirtumą $E-A$:

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & -0{,}5\\ -0{,}25 & 0{,}5 & 0\\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

2. Gauso metodu randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E-A)^{-1}$:

$$(E-A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0\\ -0{,}25 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\overset{2)}{\sim}$$

$$\overset{2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4\end{array}\right)\overset{3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0\end{array}\right)\overset{4)}{\sim}$$

$$\overset{4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 8\end{array}\right)\overset{5)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 8 & 4 & 8\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 8\end{array}\right)\overset{6)}{\sim}$$

$$\overset{6)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 8 & 4 & 8\\ 0 & -1 & 0 & -4 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 8\end{array}\right)\overset{7)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 8 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 8\end{array}\right)=\left(E\middle|(E-A)^{-1}\right),$$

1) pirmoji eilutė padauginta iš 2, antroji eilutė padauginta iš 4, o trečioji eilutė padauginta taip pat iš 2 (tikslas – gauti sveikuosius skaičius);
2) pirmoji eilutė pridėta prie antrosios ir trečiosios eilučių;
3) antroji ir trečioji eilutės sukeičiamos vietomis;
4) antroji eilutė padauginta iš 2 ir pridėta prie trečiosios eilutės;
5) trečioji eilutė pridėta prie pirmosios eilutės;
6) trečioji eilutė padauginta iš (–1) ir pridėta prie antrosios eilutės;
7) antroji eilutė padauginta iš (–1).

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 8\\ 4 & 4 & 4\\ 6 & 4 & 8\end{pmatrix}.$$

3. Visi gautosios matricos elementai teigiami, vadinasi, ekonominė sistema yra produktyvi. Galime rasti subalansuotą (optimalų) gamybos planą X, patenkinantį duotąją paklausą.

$X=(E-A)^{-1}C$, tai

$$X=\begin{pmatrix}8 & 4 & 8\\ 4 & 4 & 4\\ 6 & 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80+80+40\\ 40+80+20\\ 60+80+40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\ 140\\ 180\end{pmatrix}.$$

Atsakymas: pirmos rūšies produkcijos reikia pagaminti 200 vienetų, antros rūšies – 140 vienetų, o trečios rūšies – 180.

Savarankiško darbui užduotys

1. Ekonominės sitemos technologinė matrica $A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}5\\ 0{,}6 & 0{,}2\end{pmatrix}$. Koks turi būti gamybos planas $X=(x_1, x_2)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C=(50\ 100)^T$?

Atsakymas: pirmos rūšies produkcijos reikia pagaminti 180 vienetų, o antros rūšies – 260 vienetų.

2. Ekonominės sitemos technologinė matrica $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}$. Patikrinkite, ar ši sistema produktyvi, ir jei taip, tai raskime gamybos planą $X=(x_1, x_2, \mathrm{x}_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C=(30\ \ 45\ \ 50)^T$.

Atsakymas: ekonominė sistema neproduktyvi.

3. Ekonominės sistemos technologinė matrica yra A, o produkcijos paklausos vektorius yra C. Raskite subalansuotą gamybos planą (jei egzistuoja), kai:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 26 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas: $X=\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$.

4. Ar ekonominė sistema produktyvi, kai jos technologinė matrica A tokia:

a) $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Atsakymas:taip.

b) $A=\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Atsakymas: ne.

5. Duotoji ekonominės sitemos technologinė matrica
$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$. Patikrinkite, ar ši sistema produktyvi, ir jei taip, tai raskite gamybos planą $X = (x_1, x_2, \mathrm{x}_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (10\ \ 15\ \ 5)^T$. Atvirkštinę matricą raskite Gauso metodu.

Atsakymas: $X = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}$.

4. Tiesinio programavimo grafinis uždavinių sprendimas

Nagrinėsime dviejų kintamųjų standartinį tiesinio programavimo uždavinį:

$$\max,\ \min\ \left(c_1x + c_2y\right),\ \text{kai}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \le b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x + a_{m2}y \le b_m. \end{cases}$$

Čia $f = c_1x + c_2y$ yra **tikslo funkcija**, o **leistinoji aibė** Ω – tiesinių nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Leistinoji aibė, jeigu ji netuščia, gali būti baigtinio arba begalinio ploto.

Pasirinkime bet kurį leistinosios srities tašką. Tikslo funkcijos reikšmę tame taške pažymėkime C. Sudarykime lygtį $c_1x + c_2y = C$ ir ją pavadinkime **lygio lygtimi**.

Lygio lygties geometrinis vaizdas yra tiesė, kurią vadinsime tikslo funkcijos **lygio tiese**.

Geometriškai tiesinio programavimo uždavinys formuluojamas taip: leistinųjų sprendinių aibėje Ω reikia rasti tokį tašką $\left(x^*, y^*\right)$, per kurį einančios tiesės reikšmė f būtų didžiausia (arba mažiausia).

Standartinį uždavinį galime spręsti pagal šitokią schemą:

1. Plokštumoje nubrėžiamos tiesės, kurios gaunamos apribojimų sistemoje nelygybes pakeitus lygybėmis.
2. Pagal gautų nelygybių ženklus nustatoma leistinųjų sprendinių sritis Ω.
3. Plokštumoje nubrėžiamas vektorius $\mathbf{c} = \left(c_1, c_2\right)$ ir viena iš tiesių $c_1x + c_2y = C$ (pvz., $c_1x + c_2y = 0$).

4. Tiesę $c_1x + c_2y = 0$ stumiant vektoriaus $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ kryptimi arba prieš ją, randame maksimumo arba minimumo taškus (jei tokie egzistuoja).
5. Apskaičiuojane maksimumo ir minimumo taškų koordinates.
6. Randame funkcijos f reikšmes tuose taškuose.

Priklausomai nuo leistinųjų sprendinių aibės Ω ir nuo vektoriaus $\mathbf{c}$ padėties galimi įvairūs atvejai:

1) vienintelis sprendinys, esantis daugiakampio Ω viršūnėje,
2) be galo daug sprendinių – daugiakampio Ω briaunoje,
3) nėra sprendinio, nes apribojimų sistema nesuderinta (Ω tuščia aibė),
4) nėra sprendinio, nes tikslo funkcija neaprėžta.

Pavyzdžiai

Grafiškai išspręskite šiuos tiesinio programavimo uždavinius:

a) min ir max $(-3x + y)$, kai

$$\begin{cases} 4x + 3y \geq 0, \\ 6x - y \leq 6, \\ x + y \leq 4, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Sprendimas

Nubrėžiame tieses:

$$4x + 3y = 0 \qquad (L_1),$$

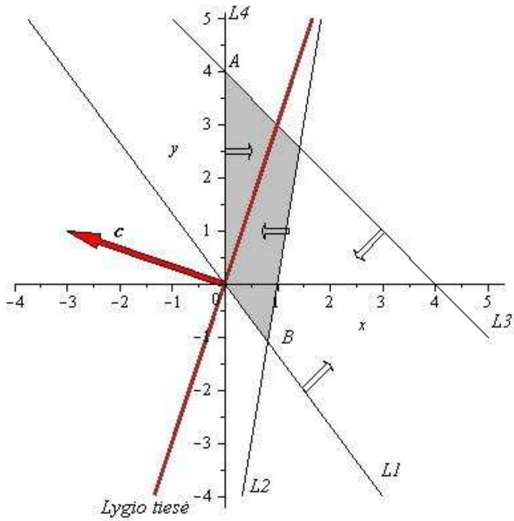
$$6x - y = 6 \qquad (L_2),$$

$$x + y = 4 \qquad (L_3),$$

$$x = 0 \qquad (L_4).$$

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį). Geometriškai sprendžiant nelygybę $4x+3y\geq 0$, pirmiausia brėžiama tiesė $4x+3y=0$, atidedant du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, pvz., $(0;0)$ ir $(-3;4)$. Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(-1,-1)$. Kadangi taško $(-1,-1)$ koordinatės netenkina šios nelygybės, t. y. $4\cdot(-1)+3\cdot(-1)\geq 0$ ($-7\geq 0$ – neteisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra priešingoje pusėje negu taškas $(-1,-1)$. Dabar rodykle pažymime šios nelygybės sprendinių aibę. Atliekame tokius pat veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių aibes. Nelygybės $6x-y\leq 6$ sprendinių aibė yra tiesės $6x-y=6$ kairėje pusėje. Kitos nelygybės $x+y\leq 4$ sprendinių pusplokštumė yra šios tiesės apačioje, o $x\geq 0$ – ašies Oy dešinėje. Visų rastųjų pusplokštumių taškų aibė yra sritis Ω, kurią užtušuojame.

Lieka papildyti brėžinį lygio tiese $-3x+y=0$ ir vektoriumi $\mathbf{c}=(-3,1)$, kurio koordinatės yra tikslo funkcijoje esantys koeficientai prie x ir y. Atlikus visus nurodytus veiksmus, brėžinys atrodo taip:



Vektorius **c** rodo funkcijos $f=-3x+y$ didėjimą, todėl tiesę $-3x+y=0$ „stumiame“ lygiagrečiai vektoriaus **c** kryptimi, kol pasiekiame tolimiausią srities Ω tašką A. Šis taškas yra maksimumo taškas, kuris gaunamas susikirtus (L_3) ir (L_4) tiesėms. Išsprendę susikertančių šiame taške tiesių lygčių sistemą, randame taško A koordinates:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4, \\ x=0. \end{cases}$$

Taigi, taško A koordinatės yra $x=0$ ir $y=4$. Apskaičiuojame funkcijos maksimumą tame taške, t. y. tikslo funkcijoje $f=-3x+y$ vietoje x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\max}=f(A)=-3\cdot 0+4=0+4=4\,.$$

Lygio tiesę $f=0$, t. y. tiesę $2x+4y=0$, „stumiame“ priešinga vektoriaus **c** kryptimi, kol pasiekiame tolimiausią srities Ω tašką B. Šis taškas yra minimumo taškas, kuris gaunamas susikirtus (L_1) ir (L_2) tiesėms. Norėdami rasti šio taško koordinates, turime spręsti sistemą:

$$\begin{cases} 4x+3y=0, \\ 6x-y=6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=0, \\ y=6x-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3(6x-6)=0, \\ y=6x-6, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+18x-18=0, \\ y=6x-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22x-18=0, \\ y=6x-6, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{22}=\dfrac{9}{11}, \\ y=6\cdot\dfrac{9}{11}-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{11}, \\ y=-\dfrac{12}{11}. \end{cases}$$

Viršūnės B koordinatės yra $x=\dfrac{9}{11}$ ir $y=-\dfrac{12}{11}$. Apskaičiuojame funkcijos minimumą tame taške:

$$f_{\min}=f(B)=-3\cdot\frac{9}{11}+\left(-\frac{12}{11}\right)=-\frac{27}{11}-\frac{12}{11}=-\frac{39}{11}.$$

Atsakymas: $f_{\max}=f(A)=4$, kai $x=0$ ir $y=4$,

$f_{\min}=f(B)=-\frac{39}{11}$, kai $x=\frac{9}{11}$ ir $y=-\frac{12}{11}$.

b) min ir max $(2x+4y)$, kai

$$\begin{cases}3x+2y\le 15,\\ x+2y\ge 4,\\ x-2y\le 0,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$$

Sprendimas

Nubrėžiame tieses:

$3x+2y=15 \qquad (L_1)$,

$x+2y=4 \qquad (L_2)$,

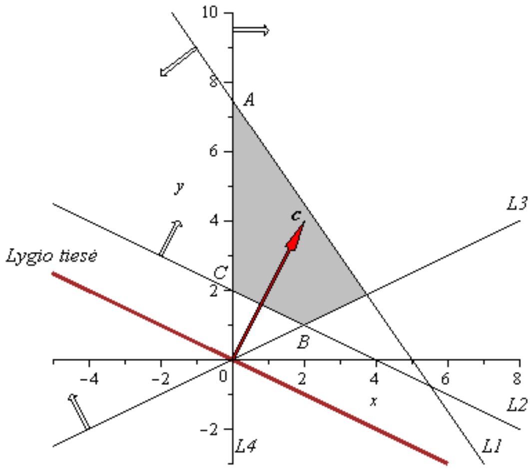
$x-2y=0 \qquad (L_3)$,

$x=0 \qquad (L_4)$,

$y=0 \qquad (L_5)$.

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį). Geometriškai sprendžiant nelygybę $3x+2y\le 15$, pirmiausia brėžiama tiesė $3x+2y=15$, atidedant du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, pvz., $(5,0)$ ir $(3,3)$. Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina duotąją nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(0,0)$. Kadangi taško $(0,0)$ koordina-

tės tenkina šią nelygybę, t. y. $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 15$ ($0 \leq 15$ – teisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra po tiese $3x + 2y = 15$ (toje pat pusėje, kurioje yra taškas $(0, 0)$). Tuomet rodykle pažymime šios nelygybės sprendinių pusplokštumę. Analogiškai atliekame veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių pusplokštumes. Nelygybės $x + 2y \geq 4$ sprendinių aibė yra virš tiesės $x + 2y = 4$. Kitos nelygybės $\mathrm{x} \geq 0$ sprendinių pusplokštumė yra ašies Oy dešinėje, o $\mathrm{y} \geq 0$ – virš ašies Ox. Visų rastųjų pusplokštumių taškų aibė yra sritis Ω, kurią užtušuojame.
Lieka papildyti brėžinį lygio tiese $2x + 4y = 0$ ir vektoriumi $\mathbf{c} = (2, 4)$, kurio koordinatės yra tikslo funkcijoje esantys koeficientai prie x ir y. Atlikus visus nurodytus veiksmus, brėžinys atrodo taip:



Kadangi aibė Ω yra virš lygio tiesės $2x + 4y = 0$, tai lygiagrečiai „stumiame“ lygio tiesę vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, kol pasiekiame artimiausią srities Ω tašką. Kadangi lygio tiesė yra lygiagreti tiesei $x + 2y = 4$,

kurioje yra dvi srities Ω viršūnės B ir C (jos gaunamos susikirtus (2) ir (3), ir (2) ir (4) tiesėms), tai šiuo atveju minimumas yra atkarpa, esanti tarp šių tiesių susikirtimo taškų. Funkcijos minimumui apskaičiuoti, pakanka imti bet kurį tašką (iš šių dviejų).
Randame koordinates, išsprendus susikertančių tiesių L_2 ir L_3 lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ x-2y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4\text{-}2y, \\ 4\text{-}2y-2y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-2y, \\ -4y=-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-2\cdot 1, \\ y=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Rastame taške apskaičiuojame funkcijos minimumą, t. y. tikslo funkcijoje vietoje x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\min} = f(B) = 2\cdot 2+4\cdot 1 = 4+4 = 8.$$

Dabar ieškome funkcijos maksimumo taško, t. y. „stumiame“ tiesę $2x+4y=0$ vektoriaus **c** kryptimi, kol pasiekiame labiausiai nutolusį aibės Ω tašką A, kuris yra tiesių L_1 ir L_4 sankirta. Išsprendę šių susikertančių tiesių lygčių sistemą, randame taško koordinates:

$$\begin{cases} 3x+2y=15, \\ x=0. \end{cases}$$

Viršūnės A koordinatės yra $x=0$ ir $y=\dfrac{15}{2}$. Apskaičiuojame funkcijos maksimumą tame taške, t. y. tikslo funkcijoje vietoje x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\max} = f(A) = 2\cdot 0+4\cdot\frac{15}{2} = 0+2\cdot 15 = 30.$$

Atsakymas: $f_{\min} = f(BC) = 8$ atkarpoje BC,

$f_{\max} = f(A) = 30$, kai $x=0$ ir $y=\dfrac{15}{2}$.

c) min ir max $(2x+y)$, kai

$$\begin{cases} x+5y \le 10, \\ 4x-y \le 4, \\ -x+3y \le 6. \end{cases}$$

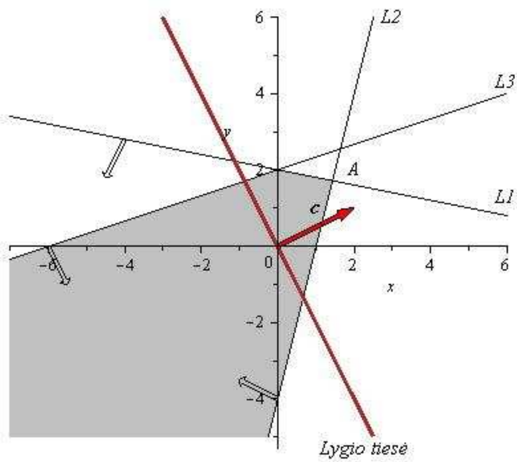
Sprendimas

Nubrėžiame tieses:

$x+5y=10 \quad (L_1)$,
$4x-y=4 \quad (L_2)$,
$-x+3y=6 \quad (L_3)$.

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį. Geometriškai sprendžiant nelygybę $x+5y \le 10$, pirmiausia brėžiama tiesė $x+5y=10$, atidedant du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, pvz., $(0;2)$ ir $(5;1)$. Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina duotąją nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(0,0)$. Kadangi taško $(0,0)$ koordinatės tenkina šią nelygybę, t. y. $0+5\cdot 0 \le 10$ ($0 \le 10$ – teisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra po tiese $x+5y=10$ (toje pat pusėje, kurioje yra taškas $(0,0)$). Tuomet rodykle pažymime šios nelygybės sprendinių pusplokštumę. Dabar atliekame veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių pusplokštumes. Nelygybės $4x-y \le 4$ sprendinių aibė yra tiesės $4x-y=4$ kairėje pusėje, o nelygybės $-x+3y \le 6$ sprendinių pusplokštumė yra po tiese $-x+3y=6$.

Papildome brėžinį lygio tiese $2x+y=0$ ir vektoriumi $\mathbf{c}=(2,1)$, kurio koordinatės yra tikslo funkcijoje esantys koeficientai prie x ir y. Atlikus visus nurodytus veiksmus, brėžinys atrodo taip:



Vektorius $\mathbf{c}$ rodo funkcijos $f = 2x + y$ didėjimą. Taigi, tiesę $2x + y = 0$ „stumiame" lygiagrečiai vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, kol pasiekiame tolimiausią srities Ω tašką A. Šis taškas yra maksimumo taškas. Jis gaunamas susikirtus (L_1) ir (L_2) tiesėms. Išsprendę šiame taške susikertančių tiesių lygčių sistemą, randame taško A koordinates:

$$\begin{cases} x + 5y = 10, \\ 4x - y = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5y + 10, \\ 4x - y = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5y + 10, \\ 4(-5y + 10) - y = 4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5y + 10, \\ -20y + 40 - y = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5y + 10, \\ -21y = -36, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \cdot \dfrac{12}{7} + 10, \\ y = \dfrac{36}{21} = \dfrac{12}{7}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{7}, \\ y = \dfrac{12}{7}. \end{cases}$$

Apskaičiuojame funkcijos maksimumą taške A, t. y. tikslo funkcijoje vietoje x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\max} = f(A) = 2\cdot\frac{10}{7}+\frac{12}{7}=\frac{20}{7}+\frac{12}{7}=\frac{32}{7}.$$

Lygio tiesę $f=0$, t. y. tiesę $2x+4y=0$, „stumdami“ priešinga vektoriaus **c** kryptimi, gauname minimumo tašką. Tačiau pastebime, kad ir kiek toli lygiagrečiai „stumtume“ tiesę $2x+4y=0$ prieš vektoriaus **c** kryptį, ji vis tiek turės bendrų taškų su aibe Ω. Šio uždavinio sprendinys neegzistuoja, t. y. $f_{\min}$ neegzistuoja. Funkcija f neaprėžta iš apačios aibėje Ω, t. y. tikslo funkcija f gali įgyti kiek norima mažą reikšmę. Šiuo atveju $f_{\min}=-\infty$.

Atsakymas: $f_{\max} = f(A)=\frac{32}{7}$, kai $x=\frac{10}{7}$ ir $y=\frac{12}{7}$, $f_{\min}=-\infty$.

d) min ir max $(-3x+y)$, kai

$$\begin{cases} x+2y\le 2, \\ x-y\ge 3, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>

Nubrėžiame tieses:

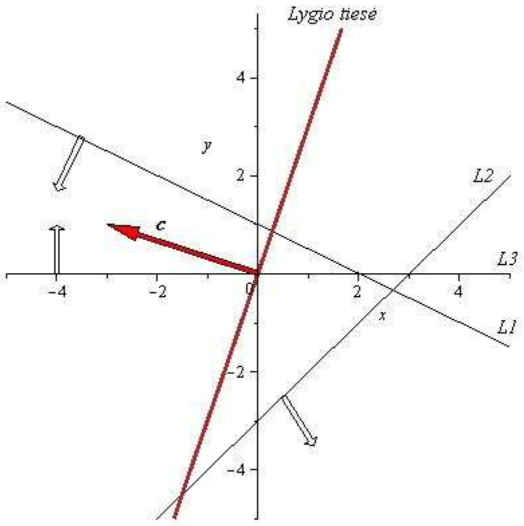
$x+2y=2 \qquad (L_1)$,

$x-y=3 \qquad (L_2)$,

$y=0 \qquad (L_3)$.

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį. Geometriškai sprendžiant nelygybę $x+2y\le 2$, pirmiausia brėžiama tiesė $x+2y=2$, atidedant du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, pvz., $(0;1)$ ir $(2;0)$. Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(0,0)$. Kadangi taško $(0,0)$ koordinatės tenkina šią nelygybę, t. y. $x \cdot 0 + 2 \cdot 0 \le 2$ ($0 \le 2$ – teisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra toje pusėje kaip ir taškas $(0{,}0)$. Dabar pažymime šios nelygybės sprendinių aibę rodykle. Atliekame tokius pat veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių aibes. Nelygybės $x - y \ge 3$ sprendinių aibė yra tiesės $x - y = 3$ apačioje, o $y \ge 0$ – virš Ox ašies. Visų rastųjų pusplokštumių taškų aibė yra sritis Ω, tačiau šiuo atveju pastebime, kad visų trijų nelygybių sprendinių pusplokštumės bendrų taškų neturi. Taigi sritis Ω yra tuščia aibė ir uždavinys sprendinių neturi.

Papildžius brėžinį lygio tiese $-3x + y = 0$ ir vektoriumi $\mathbf{c} = (-3, 1)$, brėžinys atrodo taip:



Atsakymas: sprendinių nėra.

Savarankiško darbo užduotys

1. Grafiškai pavaizduokite šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes ir apskaičiuokite jų kontūrų viršūnių koordinates:

a) $\begin{cases} 6x-7y \geq -30, \\ x+4y \leq 26, \\ 5x+2y \leq 40, \\ y \geq 0. \end{cases}$

Atsakymas: $(-5;0)$, $(2;6)$, $(6;5)$, $(8;0)$.

b) $\begin{cases} 2x-3y \geq -12, \\ 4x+y \leq 46, \\ x+2y \leq 22, \\ 2x-3y \leq 16. \end{cases}$

Atsakymas: $(6;8)$, $(10;6)$, $(11;2)$.

2. Grafiškai išspręskite šiuos tiesinio programavimo uždavinius:

a) min $(2x+3y)$, kai

$$\begin{cases} 3x+y \leq 6, \\ 3x-y \leq 4, \\ x \geq -1, \\ y \geq -2. \end{cases}$$

Atsakymas: -8, kai $x=-1$, $y=-2$.

b) max $(2x+y)$, kai

$$\begin{cases} 4x+y \leq 4, \\ 2x-y \geq -4, \\ x+y \geq -2. \end{cases}$$

Atsakymas: 4, kai $x=0$, $y=4$.

c) $\min\,(x-2y)$, kai

$$\begin{cases} x+2y\le 4, \\ x+y\ge 1, \\ x\ge 0, \\ y\ge -1. \end{cases}$$

Atsakymas: -4, kai $x=0$, $y=2$.

d) $\max\,(3x+2y)$, kai

$$\begin{cases} x+6y\le 30, \\ 2x-y\le 8, \\ 3x+2y\ge 6, \\ y\ge 0, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

Atsakymas: 26, kai $x=6$, $y=4$.

e) $\min\,(3x_1+2x_2)$, kai

$$\begin{cases} x_1+6x_2\le 30, \\ 2x_1-x_2\le 8, \\ 3x_1+2x_2\ge 6, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Atsakymas: 6, kai $x_1=0$, $x_2=3$ arba $x_1=2$, $x_2=0$.

f) min $\left(3x_1 + 4x_2\right)$, kai

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Atsakymas: 15, kai $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.

g) min $\left(4x_1 + 3x_2\right)$, kai

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 32, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Atsakymas: 0, kai $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

h) min $\left(2x_1 + x_2\right)$, kai

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq -2, \\ 4x_1 + x_2 \leq 4. \end{cases}$$

Atsakymas: – 4, kai $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

II. MATEMATINĖ ANALIZĖ

1. Ribos

1.1 Sekos riba

Tegu $x_n = f(n)$ – funkcija, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje N. Tada jos reikšmių begalinė eilė

$$f(1),\ f(2)\ ...,\ f(n), ...$$

yra vadinama **skaičių seka**. Reiškinys $f(n)$ vadinamas **bendruoju sekos nariu**, nes iš jo galima gauti bet kurį sekos narį $x_n = f(n)$ (čia n – nario numeris). Seką žymėsime simboliu $\{x_n\}$.

Pavyzdžiui,

1. Formulė $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ apibrėžia seką

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\ .$$

2. Formulė $x_n = (-1)^n$ apibrėžia seką

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ ...\ ,\ (-1)^n,\ ...\ .$$

3. Formulė $x_n = a_1 + d\cdot(n-1)$ apibrėžia **aritmetinę progresiją**

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2\cdot d,\ ...,\ a_1+d\cdot(n-1),\ ...\ .$$

4. Formulė $x_n = b_1 q^{n-1}$ apibrėžia **geometrinę progresiją**

$$b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2,\ ...,\ b_1 q^{n-1},\ ...\ .$$

Skaičius a vadinamas **sekos** $\{x_n\}$ **riba**, kai kiekvieną teigiamą skaičių ε atitinka toks natūralusis skaičius N, kad su visais $n > N$ teisinga nelygybė $|x_n - a| < \varepsilon$.

Kai seka $\{x_n\}$ turi ribą skaičių a, tai rašome $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ arba $x_n \to a$, kai $n \to \infty$.

Ribų savybės:

Sakykime, kad $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ turi baigtines ribas. Tuomet:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_{n,}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_{n,}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, jei $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0, \ \forall n \in N$.

Pastaba. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \begin{cases} 0, \ kai \ |q| < 1, \\ neapibr., \ kai \ |q| = 1, \\ \infty, \ kai \ |q| > 1. \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^a} = 0, \text{kai}\, c \in R, c \neq 0, a > 0.$

Pavyzdžiai

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt{n} - 3n^2}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą[1] $\dfrac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio), tuomet turime:

---

[1] Detaliau apie neapibrėžtumus žr.:
Fichtengolcas, G. *Matematinės analizės pagrindai*. 1 tomas. Vilnius: Mintis, 1965, p. 82–83.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n}-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2\sqrt[3]{n}}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n}}{n^2}-\frac{3n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2\sqrt[3]{n}}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n}}{n^2}-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}-3}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=0$, tai gauname

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}-3}=\frac{1-0+0}{0-3}=-\frac{1}{3}.$$

Atsakymas: $-\frac{1}{3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[4]{n+\sqrt{n}}}{\sqrt[6]{n}-2\sqrt[6]{n^4}+\sqrt{n}}$.

Sprendimas

Kadangi turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš $n^{\frac{2}{3}}$ (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[4]{n+\sqrt{n}}}{\sqrt[6]{n}-2\sqrt[6]{n^4}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\sqrt[3]{n^2+n}}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{\sqrt[4]{n+\sqrt{n}}}{n^{\frac{2}{3}}}}{\frac{\sqrt[6]{n}}{n^{\frac{2}{3}}}-\frac{2\sqrt[6]{n^4}}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{2}{3}}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+\sqrt[4]{\frac{n}{n^{\frac{8}{3}}}+\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{8}{3}}}}}{\frac{n^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{2}{3}}}-\frac{2n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}-2+\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}=0$, tai turime

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}-2+\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}}=\frac{4\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[4]{0+0}}{0-2+0}=\frac{4}{-2}=-2.$$

Atsakymas: -2.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio reiškinio $n+\sqrt{n^2-4n}$:

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)\cdot\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2-4n}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{4n}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0,$ tai gauname

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{4}{2}=2.$$

Atsakymas: 2.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš nepilnojo kvadrato $n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)\cdot\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}\right)}{\left(n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^3+n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n}+\frac{\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}-\frac{n^2}{n^3}}+\sqrt[3]{\frac{\left(n^3-n^2\right)^2}{n^6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{n^6-2n^5+n^4}{n^6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{n^6}{n^6}-\frac{2n^5}{n^6}+\frac{n^4}{n^6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}\ .$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, tai turime

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-0}+\sqrt[3]{1-0+0}}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

Atsakymas: $\frac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right)$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio daugiklio $n+\sqrt{n^2+1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2-n^2-1\right)}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+1}}.$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

Atsakymas: $-\frac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^{n+1}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)},$$

čia iškėlėme 3^n ir 3^{n+1}, nes $|3|>|2|$. Kadangi $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$, kai $n\to\infty$, tai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{0+1}{3\cdot(0+1)}=\frac{1}{3}.$$

Atsakymas: $\frac{1}{3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n+(-2)^{n-1}}{(-3)^{n+1}+4}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+(-2)^{n-1}}{(-3)^{n+1}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+(-2)^n\cdot(-2)^{-1}}{(-3)^n\cdot(-3)+4}.$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš $(-3)^n$, nes $|-3|>|-2|$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-3)^n}{(-3)^n}+\frac{(-2)^n}{(-3)^n}\cdot(-2)^{-1}}{\frac{(-3)^n}{(-3)^n}\cdot(-3)+\frac{4}{(-3)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot(-3)+\frac{4}{(-3)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 1}{2\cdot\left(1\cdot(-3)+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}.$$

Kadangi $\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \left(-\frac{1}{3}\right)^n \to 0$, kai $n \to \infty$, tai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 1}{2\cdot\left(1\cdot(-3)+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}=\frac{2-0\cdot 1}{2\cdot(1\cdot(-3)+0)}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}.$$

Atsakymas: $-\frac{1}{3}$.

8. $\lim_{n\to\infty}\frac{S(G)\cdot n^2}{S_n(A)}$, kai aritmetinė progresija: $6, 2, \ldots$, o geometrinė progresija: $12, -8, \ldots$, $S(G)$ - nykstamosios geometrinės progresijos suma, $S_n(A)$ – n pirmųjų aritmetinės progresijos narių suma.

Sprendimas

$$S(G)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{12}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{12}{\frac{3+2}{3}}=\frac{36}{5},$$

$$S_n(A)=\frac{2\cdot a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2\cdot 6+(-4)\cdot(n-1)}{2}\cdot n=$$

$$=\frac{12-4\cdot(n-1)}{2}\cdot n=\frac{12n-4\cdot n^2+4n}{2}=8n-2n^2.$$

Dabar gautus rezultatus įsirašome į duotąją ribą:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{36}{5}\cdot n^2}{8n-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{36\cdot n^2}{5\cdot(8n-2n^2)}.$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{36\cdot n^2}{5\cdot\left(8n-2n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{36\cdot\frac{n^2}{n^2}}{40\cdot\frac{n}{n^2}-10\cdot\frac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{36}{40\cdot\frac{1}{n}-10}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ tai turime

$$\lim_{n\to\infty}\frac{36}{40\cdot\frac{1}{n}-10}=\frac{36}{40\cdot 0-10}=-3{,}6.$$

Atsakymas: $-3{,}6.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S(G)\cdot\left(n^2+\sqrt[4]{n+1}\right)}{S_n(A)}$, kai aritmetinė progresija: $48,\ -36,\ \ldots,$ o geometrinė progresija: $5, 3,\ \ldots$.

Sprendimas

$$S(G)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{5}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{\frac{5-3}{5}}=\frac{25}{2},$$

$$S_n(A)=\frac{2\cdot a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2\cdot 48+(-84)\cdot(n-1)}{2}\cdot n=$$

$$=\frac{96-84\cdot(n-1)}{2}\cdot n=\frac{96n-84\cdot n^2+84n}{2}=90n-42n^2.$$

Dabar gautus rezultatus įsirašome į duotąją ribą:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{25}{2}\cdot\left(n^2+\sqrt[4]{n+1}\right)}{90n-42n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{25\cdot\left(n^2+\sqrt[4]{n+1}\right)}{180n-84n^2}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{25\cdot\left(n^2+\sqrt[4]{n+1}\right)}{180n-84n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{25\cdot\left(\frac{n^2}{n^2}+\sqrt[4]{\frac{n}{n^8}+\frac{1}{n^8}}\right)}{\frac{180}{n}-84\cdot\frac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{25\cdot\left(1+\sqrt[4]{\frac{1}{n^7}+\frac{1}{n^8}}\right)}{\frac{180}{n}-84\cdot 1}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^8}=0$, tai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{25\cdot\left(1+\sqrt[4]{\frac{1}{n^7}+\frac{1}{n^8}}\right)}{\frac{180}{n}-84\cdot 1}=\frac{25\cdot\left(1+\sqrt[4]{0+0}\right)}{0-84\cdot 1}=-\frac{25}{84}.$$

Atsakymas: $-\frac{25}{84}$.

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite ribas:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n(A)}{n^2\cdot S_n(G)}$, kai $AP:7,\ 2,\ldots$, $GP:15,\ -5,\ \ldots$.

Atsakymas: $-\frac{2}{9}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}+(-6)^{n+1}}{(-6)^{n-1}+(-2)^{n-2}}$.

Atsakymas: 36.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-5n+1}{4-n^2-2n^3}$.

Atsakymas: $-\frac{3}{2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n^4}{2+n+3n^2}$.

Atsakymas: ∞ .

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4}+5n}{(3n+2)^2}$.

Atsakymas: 0.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n^5+n}-\sqrt[3]{n}}$.

Atsakymas: 1.

1.2 Funkcijos riba

1.2.1 Paprasčiausios funkcijos ribos savybės

Funkcijos ribos apibrėžimas yra sudėtingas, todėl pailiustruosime jį tokiu pavyzdžiu. Ištirkime, kokios yra funkcijos $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ reikšmės, kai x įgyja reikšmes iš $x=3$ aplinkos:

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,9	5,99	5,999	neapibrėžta	6,001	6,01	6,1

Iš lentelės matyti, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės mažai skiriasi nuo skaičiaus 6, kai $x\in[2{,}9;3{,}1]$. Tokiu atveju sakoma, kad **funkcijos** $f(x)$ **riba, kai** x **artėja prie 3, yra lygi** 6, o užrašoma $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ arba bendruoju atveju $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}}f(x)=\mathrm{A}$.

Funkcijų ribų savybės.

Sakykime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ turi baigtines ribas, kai $x\to a$. Tada

- $\lim\limits_{x\to c}c=c$, c – konstanta;
- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

- $\lim\limits_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$, c – konstanta;
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, jei $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Pavyzdžiai

Raskite funkcijos ribą:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$, todėl skaitiklį ir vardiklį išskaidome dauginamaisiais. Suprastinę turime:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4.$$

Atsakymas: 4.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2-5x+2}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$, todėl surandame skaitiklio ir vardiklio trinarių šaknis ir, juos išskaidę dauginamaisiais, suprastiname:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{2x-1}=\frac{2+4}{2\cdot 2-1}=2.$$

Atsakymas: 2.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+2x+1}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš x^2 (x aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, tai

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}.$$

Atsakymas: $\dfrac{1}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio reiškinio $x+\sqrt{x^2-4x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš x (x aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}}=$$

$$=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{4}{2}=2.$$

Atsakymas: 2.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-\left(\sqrt{3+x}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{3-x-3-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3-0}+\sqrt{3+0}}{-2}=-\sqrt{3}.$$

Atsakymas: $-\sqrt{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+\sqrt{6+x}}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio daugiklio $x-\sqrt{6+x}$:

$$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+\sqrt{6+x}} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x^3+8\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{\left(x+\sqrt{6+x}\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)} =$$

$$= \lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x^3+8\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{x^2-6-x}.$$

Dar turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$, todėl skaitiklį išskaidome pagal formulę $a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$, o suradę vardiklio trinario šaknis, išskaidome jį dauginamaisiais:

$$\lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x^3+8\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{x^2-6-x} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{\left(x+2\right)\left(x-3\right)}.$$

Suprastinę gauname:

$$\lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{\left(x+2\right)\left(x-3\right)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{\left(x-3\right)}.$$

Dabar jau galime apskaičiuoti ribą:

$$\lim\limits_{x\to -2} \frac{\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{\left(x-3\right)} = \frac{\left(\left(-2\right)^2-2\cdot\left(-2\right)+4\right)\left(-2-\sqrt{6-2}\right)}{\left(-2-3\right)} =$$

$$= \frac{\left(4+4+4\right)\cdot\left(-4\right)}{-5} = \frac{-48}{-5} = \frac{48}{5}.$$

Atsakymas: $\dfrac{48}{5}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x+\sqrt[3]{2-5x}}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $x+\sqrt{x+2}$ ir vardikliui – $\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x+\sqrt[3]{2-5x}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{\left(x+\sqrt[3]{2-5x}\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{\left(x^3+2-5x\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}.$$

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$, todėl suradę skaitiklio trinario šaknis, išskaidome dauginamaisiais, o vardiklį (t. y. x^3+2-5x) „daliname kampu“ iš $x-2$, nes $x\to 2$, ir išskaidome dauginamaisiais.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^3-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^3-2x^2\quad & x^2+2x-1 \\ \cline{1-1}
-\;2x^2-5x+2 & \\
2x^2-4x\quad & \\ \cline{1-1}
-\;-x+2 & \\
-x+2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Daugianariai išsiskaido taip: $x^3+2-5x=(x-2)(x^2+2x-1)$ ir $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Įrašę gautąsias išraiškas į ribą, turime

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{(x^3+2-5x)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{(x-2)(x^2+2x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}.$$

Suprastiname ir apskaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{(x-2)(x^2+2x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{(x^2+2x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\frac{(2+1)\cdot(4+4+4)}{(4+4-1)\cdot(2+2)}=\frac{3\cdot 12}{7\cdot 4}=\frac{9}{7}.$$

Atsakymas: $\frac{9}{7}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{2x+1}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $x^2+\sqrt{x+2}$ ir vardikliui –
$\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x-\sqrt[3]{2x+1}\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^4-x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^3-2x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)},$$

turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį (t. y. x^4-x-2 ir x^3-2x-1) „daliname kampu“ iš $x+1$, nes $x\to -1$.

Daliname daugianarį x^4-x-2 iš daugianario $x+1$ ir daugianarį x^3-2x-1 iš daugianario $x+1$.

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^4-x-2 \\ x^4+x^3 \end{array} & \begin{array}{|l} \quad x+1 \\ \hline x^3-x^2+x-2 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{l} -x^3-x-2 \\ -x^3-x^2 \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} x^2-x-2 \\ x^2+x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} -2x-2 \\ -2x-2 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^3-2x-1 \\ x^3+x^2 \end{array} & \begin{array}{|l} \quad x+1 \\ \hline x^2-x-1 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{l} -x^2-2x-1 \\ -x^2-x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} -x-1 \\ -x-1 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Daugianariai išsiskaido dauginamaisiais:
$x^4-x-2=(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)$ ir $x^3-2x-1=(x+1)\left(x^2-x-1\right)$.
Įrašę gautąsias išraiškas į ribą, turime

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^4-x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^3-2x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{(x+1)\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}.$$

Suprastinę turime:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{(x+1)\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}.$$

Dabar apskaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\frac{(-1-1-1-2)\cdot(1-1\cdot(-1)+1)}{(1+1-1)\cdot\left(1+\sqrt{-1+2}\right)}=\frac{(-5)\cdot 3}{1\cdot 2}=-\frac{15}{2}.$$

Atsakymas: $-\dfrac{15}{2}$.

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite šias funkcijų ribas:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$.

Atsakymas: $\dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+\sqrt[3]{3-8x}}{x+\sqrt{6-x}}$.

Atsakymas: $\dfrac{38}{45}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

Atsakymas: $\dfrac{3}{2}$.

4. $\lim\limits_{n\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Atsakymas: – 2.

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$.

Atsakymas: 3.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x\text{-}2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x\text{-}1}}$.

Atsakymas: 3.

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$.

Atsakymas: $\dfrac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

Atsakymas: $\dfrac{15}{11}$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Atsakymas: 1.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-1}{x}$.

Atsakymas: $\dfrac{1}{9}$.

11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Atsakymas: $\dfrac{4}{3}$.

1.2.2 Pagrindinės ribos

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e}$ arba $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$

Skaičius e yra iracionalusis, o jo reikšmė apytiksliai lygi $2{,}718282\ldots$. Dažnai vartojama rodiklinė funkcija, kurios pagrindas yra e, t. y. $y=e^{x}$, taip pat logaritminė funkcija, kurios pagrindas yra lygus e, t. y. $y=\log_{e}x$. Ši funkcija vadinama **natūraliuoju logaritmu** ir žymima $y=\ln\, x$.

Pavyzdžiai

I sprendimo būdas

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}=e^{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{3x}\cdot 3} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 6} = \lim\limits_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{6} = e^{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot(-1)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-1} = e^{-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\alpha} = e^{\alpha}$.

II sprendimo būdas

Kai turime neapibrėžtumą 1^{∞}, tai naudojame formulę $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$, kai a gali būti baigtinis $a\in R$ arba begalinis $\pm\infty$.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą 1^{∞}, nes $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)=1$, o $\lim\limits_{x\to\infty}(x)=\infty$. Todėl

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}-1\right)\cdot x\right]} = e^{\alpha}$.

Atsakymas: e^{α}.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą 1^{∞}, nes

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1,\ \text{o}\quad \lim_{x\to\infty}(2-3x)=\infty.\ \text{Todėl}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)\cdot(2-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1-x}{x}\right)\cdot(2-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\cdot(2-3x)}.$$

Atlikę veiksmus, gauname:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)(2-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}+3\right)}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$, tai $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}+3\right)}=e^{3}$.

Atsakymas: e^3.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Sprendimas

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{1}=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$, turime neapibrėžtumą 1^{∞}. Todėl

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2-2}\right)x^2}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}=e^{\frac{3}{1-0}}=e^3.$$

Atsakymas: e^3.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+2}\right)^{x-3}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x\text{-}5}{3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\left(3\text{-}\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{3-0}{3+0}=1$,

o $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)=\infty$. Todėl

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{x\text{-}3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}-1\right)(x-3)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5-3x-2}{3x+2}\right)(x-3)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7}{3x+2}\right)(x-3)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7x+21}{3x+2}\right)}.$$

Dar turime neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$. Todėl

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7x+21}{3x+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-7+\frac{21}{x}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(-7+\frac{21}{x}\right)}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21}{x}=0$, tai

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(-7+\frac{21}{x}\right)}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}}=e^{\frac{(-7+0)}{(3+0)}}=e^{-\frac{7}{3}}.$$

Atsakymas: $e^{-\frac{7}{3}}$.

Savarankiško darbo užduotys

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Atsakymas: e^3.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

Atsakymas: e^2.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Atsakymas: e^{-1}.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$ arba $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1}$.

Be to, yra teisingos šios formulės, jei vietoje x paimsime funkciją $y(x)$, t. y. $\lim\limits_{y(x)\to 0}\dfrac{\sin y(x)}{y(x)}=1$, $\lim\limits_{y(x)\to 0}\dfrac{y(x)}{\sin y(x)}=1$.

Pavyzdžiai

Raskite funkcijos ribą:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{4}=1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Atsakymas: $\dfrac{3}{4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{1\cdot 4}{1\cdot 5}=\frac{4}{5}.$$

Atsakymas: $\dfrac{4}{5}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}}{x\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{4}{25}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{25}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}\cdot\frac{25}{4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2\cdot\frac{25}{4}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2=1^2\cdot\frac{25}{4}=\frac{25}{4}.$$

Atsakymas: $\dfrac{25}{4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{2x^2}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{\dfrac{x^2}{16}\cdot 16\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{4}}{\dfrac{x}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{32}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{4}}{\dfrac{x}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{32}=1^2\cdot\frac{1}{32}.$$

Atsakymas: $\dfrac{1}{32}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}x\,ctg3x$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 0}x\,ctg3x=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos 3x}{3}\cdot\frac{3}{\sin 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{3}=\frac{\cos 0}{3}=\frac{1}{3}.$$

Atsakymas: $\dfrac{1}{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\dfrac{x+\alpha}{2}\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}{x-\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\dfrac{x+\alpha}{2}\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}{2\cdot\dfrac{x-\alpha}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha+\alpha}{2}=\cos\frac{2\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

Atsakymas: $\cos\alpha$.

7* ir **8*** sprendžiami panaudojant formules $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$ ir $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

7*. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x}{1-tgx}\right)^{ctg^3 4x}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x}{1-tgx}\right)=\frac{1-0}{1-0}=1$, o $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}^3 4x\right)=\infty$. Sprendžiame remiantis formule $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x}{1-tgx}\right)^{ctg^3 4x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x}{1-tgx}-1\right)ctg^3 4x}.$$

Kad būtų patogiau, e laipsnio ribą skaičiuosime atskirai:

$$\left(\frac{1-\sin x}{1-tgx}-1\right)\cdot ctg^3 4x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x-1+tgx}{1-tgx}\right)\cdot ctg^3 4x =$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x-1+tgx}{1-tgx}\right)\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}\right)\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{-\sin x\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}\right)\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x(-\cos x+1)}{\cos x-\sin x}\right)\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą, tai pasinaudojame trigonometrine formule $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ ir riba $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x(-\cos x+1)}{\cos x-\sin x}\right)\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos x-\sin x}\cdot\frac{\cos^3 4x}{\sin^3 4x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\dfrac{\sin x}{x}\cdot x\cdot 2\cdot\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\cos x-\ \sin x}\cdot\frac{\cos^3 4x}{\dfrac{\sin^3 4x}{(4x)^3}\cdot(4x)^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1\cdot x\cdot 2\cdot 1\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\cos x-\sin x}\cdot\frac{\cos^3 4x}{1\cdot(4x)^3}\right).$$

Atlikę veiksmus, gauname:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1\cdot x\cdot 2\cdot 1\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\cos x-\sin x}\cdot\frac{\cos^3 4x}{1\cdot(4x)^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^3}{2\cdot(\cos x-\sin x)}\cdot\frac{\cos^3 4x}{64x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos^3 4x}{128\cdot(\cos x-\sin x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{128\cdot(1-0)}=\frac{1}{128}.$$

Nepamirškime, kad apskaičiavome e laipsnio ribą, todėl

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x}{1-tgx}\right)^{ctg^3 4x} = e^{\frac{1}{128}}.$$

Atsakymas: $e^{\frac{1}{128}}$.

8*. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)=1$, o $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$. Sprendžiame remiantis formule $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}.$$

Kad būtų patogiau, e laipsnio ribą skaičiuosime atskirai:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, tai pasinaudojame trigonometrine formule $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ ir riba $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-2\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-2\cdot 1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Atlikę veiksmus, gauname:

$$\lim_{x\to 0}\left(-2\cdot 1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Nepamirškime, kad apskaičiavome e laipsnio ribą, todėl

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Atsakymas: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite šias funkcijų ribas:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x}$.

Atsakymas: $\frac{5}{6}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

Atsakymas: $\frac{5}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}$.

Atsakymas: $\frac{9}{4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{2x^2}$.

Atsakymas: $\frac{1}{18}$.

5*. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{ctg^2 3x}$.

Atsakymas: $e^{-\frac{2}{9}}$.

1.2.3 Vienpusės ribos

Kai nagrinėjama funkcijos $f(x)$ riba taške a, kintamasis x įgyja reikšmes ir iš kairės, ir iš dešinės nuo taško a. Jeigu ieškant ribos, kai $x \to a$, apsiribojama x reikšmėmis, kuriios yra tik į kairę (arba tik į dešinę) nuo taško a, tai tokia riba vadinama funkcijos riba iš kairės (dešinės) ir žymima:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0),\ x<a,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0),\ x>a.$$

Funkcijos ribos iš kairės ir iš dešinės vadinamos vienpusėmis ribomis. Kai funkcija $f(x)$ taške a turi ribą, tai vienpusės ribos yra lygios tarpusavyje ir lygios funkcijos ribai:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Pavyzdžiai

1. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{3x-1}{x-1}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3\cdot 1-1}{1-0-1} = \frac{2}{-0} = -\infty.$$

Atsakymas: $-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{3x-1}{x-1}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3\cdot 1-1}{1+0-1} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

Atsakymas: $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to 1-0} \left(\dfrac{3x}{x-1} + 3x \right)$.

Sprendimas

$$\lim_{x \to 1-0} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x \right) = \frac{3}{-0} + 3 = -\infty .$$

Atsakymas: $-\infty$.

4. $\lim\limits_{x \to 1+0} \left(\dfrac{3x}{x-1} + 3x \right)$.

Sprendimas

$$\lim_{x \to 1+0} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x \right) = \frac{3}{+0} + 3 = +\infty .$$

Atsakymas: $+\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to 0-0} \left(\dfrac{2x-1}{x^2} \right)$.

Sprendimas

$$\lim_{x \to 0-0} \left(\frac{2x-1}{x^2} \right) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{+0} = \frac{-1}{+0} = -\infty .$$

Atsakymas: $-\infty$.

6. $\lim\limits_{x \to 0+0} \left(\dfrac{2x-1}{x^2} \right)$.

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{2x-1}{x^2} \right) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{+0} = \frac{-1}{+0} = \frac{-1}{+0} = -\infty .$$

Atsakymas: $-\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right).$

Sprendimas

I būdas

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1-4x^2+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+5}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą, tai iškeliame x^2 prieš skliaustus skaitiklyje ir vardiklyje (atkreipiame dėmesį į x ženklą, nes $x\to-\infty$):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=0$, tai turime

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{-\infty\cdot(-3+0)}{(-1-2)}=\frac{-\infty\cdot(-3)}{(-3)}=-\infty\cdot1=-\infty.$$

Atsakymas: $-\infty$.

II būdas

Kadangi $x \to -\infty$ ir norime iškelti x^2 prieš kvadratinės šaknies ženklą, turime atkreipti dėmesį į ženklą. Vienas iš būdų yra $-\infty$ pakeisti į $+\infty$, todėl įveskime kintamąjį

$x = -t$, $t = -x$, kai $t = -\infty$, tuomet gauname:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{(-t)^2+1}-2\sqrt{(-t)^2-1}\right)=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+1}-2\sqrt{t^2-1}\right),$$

o dabar iškeliame t prieš kvadratinės šaknies ženklą:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+1}-2\sqrt{t^2-1}\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-2t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right).$$

Kadangi $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0$, tai turime

$$\lim_{t\to+\infty}\left(t\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)\right)=-\infty\cdot(-1+2)=-\infty.$$

Atsakymas: $-\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{16x^2-2}+4x}$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{x^2+14}-x$ ir vardikliui – $\sqrt{16x^2-2}-4x$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{16x^2-2}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+14}+x\right)\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)}{\left(\sqrt{16x^2-2}+4x\right)\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+14-x^2\right)\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)}{\left(16x^2-2-16x^2\right)\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)}{-2\cdot\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą, tai iškeliame x prieš skliaustus skaitiklyje ir vardiklyje (atkreipiame dėmesį į x ženklą, nes $x\to-\infty$):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(\sqrt{x^2\left(16-\frac{2}{x^2}\right)}-4x\right)}{-2\cdot\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{14}{x^2}\right)}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(|x|\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}-4x\right)}{-2\cdot\left(|x|\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(-x\cdot\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}-4x\right)}{-2\cdot\left(-x\cdot\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot(-x)\left(\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}+4\right)}{-2\cdot(-x)\left(\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1\right)}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14}{x^2}=0$, tai turime

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}+4\right)}{-2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1\right)}=\frac{14\cdot(4+4)}{-2\cdot(1+1)}=-\frac{7\cdot 8}{2}=-(7\cdot 4)=-28.$$

Atsakymas: -28.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$. Iškeliame x prieš skliaustus skaitiklyje ir vardiklyje:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}.$$

Kadangi $x\to+\infty$, tai $|x|=x$.

Vadinasi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}$.

Kadangi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$, tai turime $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Atsakymas: 1.

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite šias funkcijų ribas:

1. $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x-2}{x-1}$.

Atsakymas: $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{3x}{x-1}$.

Atsakymas: $-\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{16x^2-2}+4x}$.

Atsakymas: $\dfrac{1}{4}$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x+\sqrt{x^2+6x-1}\right)$.

Atsakymas: $+\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x}}$.

Atsakymas: -1.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$.

Atsakymas: $\dfrac{2}{3}$.

2. Funkcijos išvestinė

2.1 Funkcijos išvestinės apibrėžimas

Funkcijos $y = f(x)$ **išvestine** taške x_0 vadinama tos funkcijos pokyčio ir jį atitinkančio argumento pokyčio santykio riba, kai argumento pokytis artėja prie nulio:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jeigu funkcija $f(x)$ turi išvestinę visuose kurio nors intervalo taškuose, tai sakoma, kad ji **diferencijuojama** tame intervale. Išvestinės radimo veiksmas vadinamas **diferencijavimu**.

Pagrindinės diferencijavimo taisyklės ir sudėtinių funkcijų išvestinės:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$,
3. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$,
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$,
5. $c' = 0$,
6. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$,
7. $(e^u)' = e^u \cdot u'$,
8. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$,
9. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$,
10. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$,
11. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$,
12. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,
13. $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$,
14. $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$,
15. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,
16. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,
17. $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$,
18. $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Pavyzdžiai

Raskite duotųjų funkcijų išvestines:

1. $y = \left(1 - x^2\right)^4$.

Sprendimas

Kadangi negalime iš karto pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele, nes funkcija yra sudėtinė, tuomet ieškome išvestinės remdamiesi formule (6), t. y. $\left(u^4\right)' = 4u^{4-1} \cdot u'$:

$$y' = \left(\left(1 - x^2\right)^4\right)' = 4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1 - x^2\right)',$$

o $\left(1 - x^2\right)'$ ieškome remdamiesi formule $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$. Tada gauname

$$4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1 - x^2\right)' = 4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1' - \left(x^2\right)'\right).$$

Dabar jau galime pasinaudoti išvestinių lentele ir apskaičiuoti x^2 ir 1 išvestines:

$$4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1' - \left(x^2\right)'\right) = 4\left(1 - x^2\right)^3 \left(0 - 2x\right).$$

Atlikę veiksmus, turėsime

$$4\left(1 - x^2\right)^3 \left(0 - 2x\right) = 4\left(1 - x^2\right)^3 \left(-2x\right) = -8x\left(1 - x^2\right)^3.$$

Atsakymas: $y' = -8x\left(1 - x^2\right)^3$.

2. $y = \sqrt{6 + 4x - x^2}$.

Sprendimas

Ieškome išvestinės remdamiesi formule (6), t. y. $\left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2} - 1} \cdot u'$:

$$y' = \left(\sqrt{6+4x-x^2}\right)' = \left(\left(6+4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(6+4x-x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(6+4x-x^2\right)',$$

o $\left(6+4x-x^2\right)'$ ieškome remdamiesi formule $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$. Tada gauname

$$\frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(6+4x-x^2\right)' = \frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(6' + \left(4x\right)' - \left(x^2\right)'\right).$$

Pasinaudoję išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų x^2, $4x$ ir 6:

$$\frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(6' + \left(4x\right)' - \left(x^2\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(0+4-2x\right).$$

Atlikę elementarius pertvarkymus, turėsime

$$\frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(0+4-2x\right) = \frac{1}{2}\left(6+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4-2x\right) =$$

$$= -\frac{4-2x}{2\sqrt{6+4x-x^2}} = -\frac{2-x}{\sqrt{6+4x-x^2}}.$$

Atsakymas: $y' = -\dfrac{2-x}{\sqrt{6+4x-x^2}}$.

3. $y = x^3 e^x$.

<u>Sprendimas</u>

Ieškome išvestinės remdamiesi formule (2), t. y. $\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + v' \cdot u$:

$$y' = \left(x^3 e^x\right)' = \left(x^3\right)' e^x + \left(e^x\right)' x^3.$$

Pasinaudoję išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų x^3 ir e^x:

$$\left(x^3\right)' e^x + \left(e^x\right)' x^3 = 3x^2 e^x + e^x x^3 = e^x x^2 \left(3+x\right).$$

Atsakymas: $y' = e^x x^2 \left(3+x\right)$.

4. $y = \ln(\cos x)$.

Sprendimas

Ieškome išvestinės remdamiesi formule (9), t. y. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Tuomet turėsime

$$y' = (\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)'.$$

Pasinaudoję išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestinę funkcijos $\cos x$:

$$\frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\frac{1}{\cos x}\sin x = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pastebime, kad $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx$. Vadinasi,

$$y' = -\,tgx.$$

Atsakymas: $y' = -\,tgx$.

5. $y = \log_4\left(\frac{4x}{4x-1}\right)$.

Sprendimas

Ieškome išvestinės remdamiesi formule (10), t. y. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

Tuomet turėsime

$$y' = \left(\log_4\left(\frac{4x}{4x-1}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{4x}{4x-1}\right)'}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}.$$

Skaitiklio išvestinės ieškosime naudodami dalmens formulę

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}:$$

$$\frac{\left(\frac{4x}{4x-1}\right)'}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}=\frac{\frac{(4x)'(4x-1)-(4x-1)'(4x)}{(4x-1)^2}}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}=\frac{\frac{4(4x-1)-4(4x)}{(4x-1)^2}}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}.$$

Atlikę veiksmus, gauname

$$\frac{\frac{4(4x-1)-4(4x)}{(4x-1)^2}}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}=\frac{\frac{16x-4-16x}{(4x-1)^2}}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}=\frac{\frac{-4}{(4x-1)^2}}{\frac{4x}{4x-1}\ln 4}=\frac{-4}{(4x-1)^2}\cdot\frac{4x-1}{4x\ln 4}=$$

$$=\frac{-4}{4x(4x-1)\ln 4}=\frac{-1}{x(4x-1)\ln 4}=\frac{1}{x(1-4x)\ln 4}.$$

Atsakymas: $y'=\dfrac{1}{x(1-4x)\ln 4}$.

6. $y=9\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$.

Sprendimas

Ieškome išvestinės remdamiesi formule $(u\pm v)'=u'\pm v'$. Tada gauname

$$y'=\left(9\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}\right)'=\left(9\sqrt[3]{x}\right)'-\left(4\sqrt[4]{x}\right)'.$$

Dabar pritaikome (3) formulę $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$:

$$\left(9\sqrt[3]{x}\right)'-\left(4\sqrt[4]{x}\right)'=9\left(\sqrt[3]{x}\right)'-4\left(\sqrt[4]{x}\right)'.$$

$\sqrt[3]{x}$ ir $\sqrt[4]{x}$ ieškome remdamiesi formule $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ ir atlikę veiksmus, turime:

$$9\left(\sqrt[3]{x}\right)' - 4\left(\sqrt[4]{x}\right)' = 9\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 4\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = 9\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4\cdot\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} =$$

$$= 3x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Atsakymas: $y' = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

7. $y = \sqrt[3]{(2x+1)^2}$.

Sprendimas

Ieškome išvestinės remdamiesi formule (6), t. y. $\left(u^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}-1}\cdot u'$:

$$y' = \left(\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)' = \left((2x+1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{2}{3}-1}(2x+1)' =$$

$$= \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2x+1)',$$

o $(2x+1)'$ ieškome remdamiesi formule $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Tada gauname

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2x+1)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\left((2x)' + (1)'\right).$$

Pasinaudoję išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų $2x$ ir 1:

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\left((2x)' + (1)'\right) = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2x+0).$$

Atlikę veiksmus, turėsime

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2+0) = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}.$$

Atsakymas: $y' = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$.

8 . $y = 3\sin(2x^2 - 3)$.

Sprendimas

Ieškome išvestinės remdamiesi formule $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$:

$$y' = (3\sin(2x^2 - 3))' = 3(\sin(2x^2 - 3))' = 3\cos(2x^2 - 3)(2x^2 - 3)',$$

o $(2x^2 - 3)'$ ieškome remdamiesi formule $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Tada gauname

$$3\cos(2x^2 - 3)(2x^2 - 3)' = 3\cos(2x^2 - 3)\left((2x^2)' - 3'\right).$$

Pasinaudoję išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų $2x^2$ ir 3:

$$3\cos(2x^2 - 3)\left((2x^2)' - 3'\right) = 3\cos(2x^2 - 3)(2 \cdot 2x - 0).$$

Atlikę veiksmus, turėsime

$$3\cos(2x^2 - 3)(2 \cdot 2x - 0) = 3\cos(2x^2 - 3)4x = 12x\cos(2x^2 - 3).$$

Atsakymas: $y' = 12x\cos(2x^2 - 3)$.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x^3 - \dfrac{1}{2}$.

Sprendimas

$$f'(x) = \left(2x^2 - 3x^3 - \frac{1}{2}\right)' = (2x^2)' - (3x^3)' - \left(\frac{1}{2}\right)' =$$

$$= 2(x^2)' - 3(x^3)' - 0 = 2 \cdot 2x - 3 \cdot 3x^2 = 4x - 9x^2.$$

Atsakymas: $f'(x) = 4x - 9x^2$.

10. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{4x^2 - 5}$.

Sprendimas

$$f'(x)=\left(\frac{3x+1}{4x^2-5}\right)'=\frac{(3x+1)'(4x^2-5)-(4x^2-5)'(3x+1)}{(4x^2-5)^2}=$$

$$=\frac{3\cdot(4x^2-5)-8x\cdot(3x+1)}{(4x^2-5)^2}=$$

$$=\frac{12x^2-15-24x^2-8x}{(4x^2-5)^2}=\frac{-12x^2-8x-15}{(4x^2-5)^2}=-\frac{12x^2+8x+15}{(4x^2-5)^2}.$$

Atsakymas: $f'(x)=-\dfrac{12x^2+8x+15}{(4x^2-5)^2}.$

11. $f(x)=\ln^3\sin^2(x^2+1).$

Sprendimas

$$f'(x)=\left(\ln^3\sin^2(x^2+1)\right)'=3\ln^2\sin^2(x^2+1)\cdot\left(\ln\sin^2(x^2+1)\right)'=$$

$$=\frac{3\ln^2\sin^2(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}\left(\sin^2(x^2+1)\right)'=$$

$$=\frac{3\ln^2\sin^2(x^2+1)2\sin(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}\left(\sin(x^2+1)\right)'=$$

$$=\frac{6\ln^2\sin^2(x^2+1)\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}(x^2+1)'=$$

$$=\frac{6\ln^2\sin^2(x^2+1)\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)2x}{\sin^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{12x\ln^2\sin^2(x^2+1)\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{12x\ln^2\sin^2(x^2+1)\cos(x^2+1)}{\sin(x^2+1)}=$$

$$=12x\ln^2\sin^2(x^2+1)ctg(x^2+1).$$

Atsakymas: $f'(x)=12x\ln^2\sin^2(x^2+1)ctg(x^2+1).$

12. $f(x)=\sqrt[3]{1+\cos^2 x}$.

Sprendimas

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{1+\cos^2 x}\right)'=\left(\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(1+\cos^2 x\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{-\frac{2}{3}}2\cos x(\cos x)'=\frac{1}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{-\frac{2}{3}}2\cos x(-\sin x)=$$

$$=\frac{-2\cos x\sin x}{3\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 x\right)^2}}=\frac{-\sin 2x}{3\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 x\right)^2}}.$$

Atsakymas: $f'(x)=\dfrac{-\sin 2x}{3\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 x\right)^2}}$.

13. $f(x)=(ctgx)^{x+1}$.

Sprendimas

Kai $f(x)=u(x)^{v(x)}$, čia $u(x)$ ir $v(x)$ yra diferencijuojamos funkcijos, tai $f'(x)$ randama logaritmuojant.

Logaritmuojame abi šio reiškinio puses:

$$\ln f(x)=\ln(ctgx)^{x+1}.$$

Tuomet dešinėje gautojo reiškinio pusėje nukeliame laipsnio rodiklį prieš logaritmo ženklą

$$\ln f(x)=(x+1)\ln(ctgx).$$

Dabar ieškome gautojo reiškinio išvestinės

$$(\ln f(x))'=((x+1)\ln(ctgx))'.$$

Pasinaudodami formulėmis $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ ir

$(\ln f(x))'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, gauname

$$(\ln f(x))'=((x+1)\ln(ctgx))',$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=(x+1)'\ln(ctgx)+(\ln(ctgx))'(x+1).$$

Surandame $x+1$ ir $\ln(ctgx)$ išvestines:

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)+\frac{1}{ctgx}(ctgx)'(x+1),$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)+\frac{1}{ctgx}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)(x+1).$$

Atliekame veiksmus

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)-\frac{x+1}{ctgx\sin^2 x},$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)-\frac{x+1}{\frac{\cos x}{\sin x}\sin^2 x},$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)-\frac{x+1}{\sin x\cos x},$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)-\frac{2(x+1)}{2\sin x\cos x},$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(ctgx)-\frac{2(x+1)}{\sin 2x}.$$

Kadangi mums reikia rasti $f'(x)$, o kairėje šio reiškinio pusėje turime $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, todėl padauginame abi šio reškinio puses iš $f(x)$:

$$f'(x)=f(x)\left(\ln(ctgx)-\frac{2(x+1)}{\sin 2x}\right).$$

Dešinėje pusėje vietoje $f(x)$ įrašę duotąją funkciją, t. y. $f(x)=(ctgx)^{x+1}$, turime

$$f'(x)=(ctgx)^{x+1}\left(\ln(ctgx)-\frac{2(x+1)}{\sin 2x}\right).$$

Atsakymas: $f'(x)=(ctgx)^{x+1}\left(\ln(ctgx)-\frac{2(x+1)}{\sin 2x}\right).$

Jeigu y' yra funkcijos $y = f(x)$ išvestinė, tai $(y')'$ vadinama funkcijos $y = f(x)$ **antrąja išvestine** arba antros eilės išvestine. Antroji išvestinė žymima y'' arba $f''(x)$. Antrosios išvestinės išvestinė vadinama **trečiąja išvestine**, t. y. $y''' = (y'')'$ ir t. t.

Pavyzdžiui, rasime reiškinio $y = 4x^2 + 2x$ trečiąją išvestinę:

$$y' = (4x^2 + 2x)' = 8x + 2,$$
$$y'' = (y')' = (8x + 2)' = 8,$$
$$y''' = (y'')' = (8)' = 0.$$

Savarankiško darbo užduotys

Raskite funkcijos išvestinę:

1. $y = \sin \alpha x$.

Atsakymas: $y' = \alpha \cdot \cos \alpha x$.

2. $y = \cos \alpha x$.

Atsakymas: $y' = -\alpha \cdot \sin \alpha x$.

3. $y = \cos^3 \alpha x$.

Atsakymas: $y' = -3\alpha \cdot \cos^2 \alpha x \cdot \sin \alpha x.$

4. $f(x) = \cos^4 x$.

Atsakymas: $-4\cos^3 x \sin x$.

5. $y = 2^{arctgx}$.

Atsakymas: $y' = \dfrac{2^{arctgx} \ln 2}{1 + x^2}$.

6. $f(x) = 6x^5 - 3\sqrt[5]{x^2} + 4$.

Atsakymas: $f'(x) = 30x^4 - \dfrac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}$.

7. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2+3x^2}\right)$.

Atsakymas. $\dfrac{-6x}{\left(2+3x^2\right)^2}$.

8. $f(x)=x^3 arctgx$.

Atsakymas: $f'(x)=3x^2 arctgx+\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

9. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x\ln x+1}$.

Atsakymas: $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x\ln x+\ln x-x+3)}{(x\ln x+1)^2}$.

10. $f(x)=\ln\sin x$.

Atsakymas: *ctgx*.

11. $f(x)=ctg\sqrt[3]{1+x^2}$.

Atsakymas: $-\dfrac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\,\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}}$.

12. $f(x)=\sin^2 arctg\sqrt{1+x^2}$.

Atsakymas: $f'(x)=\dfrac{x\sin 2arctg\sqrt{1+x^2}}{\left(2+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

13. $y=2^{tg\frac{1}{x}}+e^{\sin x^2}$.

Atsakymas: $y'=-\dfrac{\ln 2}{x^2\cos^2\dfrac{1}{x}}\cdot 2^{tg\frac{1}{x}}-2x\cos x^2\, e^{\sin x^2}$.

14. $f(x)=x^x$.

Atsakymas: $f'(x)=x^x(\ln x+1)$.

15. $f(x)=(tgx)^{x+1}$.

Atsakymas: $f'(x)=(tgx)^{x+1}\left(\ln(tgx)+\dfrac{2(x+1)}{\sin 2x}\right)$.

16*. $y = \cos^4 \sin^3 \mathrm{tg}^2 e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}}$.

Atsakymas:

$$y' = -\frac{144x\cos^3 \sin^3 \mathrm{tg}^2 e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}} \sin \sin^3 \mathrm{tg}^2 e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}} \sin^2 \mathrm{tg}^2 e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}} \cos \mathrm{tg}^2 e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}} \mathrm{tg}\, e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}} e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}}}{2\sqrt{3x^2+1} \cdot \ln 2 \cdot \cos^2 e^{\log_2 \sqrt{3x^2+1}} \cdot \sqrt{3x^2+1}}.$$

17. Rasti funkcijos $f(x) = x^3 \ln x$ ketvirtąją išvestinę.

Atsakymas: $\frac{6}{x}$.

2.2 Diferencialo apibrėžimas ir pagrindinės savybės

Funkcijos $y = f(x)$ **diferencialu**[2] dy vadinama sandauga $f'(x) \cdot \Delta x$, t. y.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Diferencialo formulėje vietoje Δx galima rašyti dx, nes pagal apibrėžimą funkcijos $y = x$ diferencialas $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Taigi,

$$dy = f'(x)dx.$$

Pagrindinės diferencialo savybės:
1) $d(A \cdot f(x)) = A \cdot d(f(x))$, t. y. konstantą galima iškelti prieš diferencialo ženklą; čia $A \in R$ – konstanta, $f(x)$ – diferencijuojama funkcija.
2) $d(f(x) \pm C) = d(f(x))$, t. y. po diferencialo ženklu galima pridėti\atimti bet kokią konstantą; čia $C \in R$ – konstanta, $f(x)$ – diferencijuojama funkcija.
3) Iš **1)** ir **2)** savybių išplaukia, kad teisinga yra tokia lygybė:
$d(A \cdot f(x) \pm C) = A \cdot d(f(x))$.

[2] Išsamiau apie diferencialo sąvoką žr.:
Fichtengolcas, G. *Matematinės analizės pagrindai*. 1 tomas. Vilnius: Mintis, 1965, p. 153–167.

Funkcijos diferencialas dažnai taikomas matematikoje skaičiuojant funkcijų reikšmes, taip pat vertinant paklaidų didumą. Tai daroma remiantis tuo, kad **funkcijos pokytis yra apytiksliai lygus funkcijos diferencialui, kai argumento pokytis mažas**, t. y $\Delta y \approx dy$.

Funkcijos $y = f(x)$ diferencialo diferencialas vadinamas **antruoju diferencialu** (arba antrosios eilės diferencialu) ir žymimas $d^2 y$ arba $d^2 f(x)$. Taigi, $d^2 y = d(dy)$. Analogiškai $d^3 y = d(d^2 y)$ ir t. t. Rasime antros eilės diferencialą:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f''(x)dx)dx = f''(x)dx^2 .$$

Taigi,

$$d^2 y = f''(x)dx^2 .$$

Pavyzdys

Raskite funkcijos $y = \cos^2 x$ diferencialą.

<u>Sprendimas</u>

$$dy = f'(x)\,dx = \left(\cos^2 x\right)' dx = -2\cos x \sin x\, dx = -\sin 2x\, dx .$$

Atsakymas: $dy = -\sin 2x\, dx$.

Savarankiško darbo užduotys

Raskite funkcijų diferencialus:

1. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Atsakymas: $dy = \dfrac{2x}{x^2+1} dx$.

2. $y = 2^{-3x} + 7x$.

Atsakymas: $dy = \left(-3\ln 2 \cdot 2^{-3x} + 7\right)dx$.

3. $y = \cos^3(3x)$.

Atsakymas: $dy = \left(-9\cos^2(3x)\sin(3x)\right)dx$.

3. Liopitalio taisyklė

1. *Neapibrėžtumas* $\frac{0}{0}$. Jeigu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, tai

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\substack{\text{Liopitalio}\\ \text{taisyklė}}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

kai riba $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ egzistuoja. Čia a gali būti tiek baigtinis ($a\in R$), tiek begalinis ($\pm\infty$).

2. *Neapibrėžtumas* $\frac{\infty}{\infty}$. Jeigu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, tai

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\substack{\text{Liopitalio}\\ \text{taisyklė}}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

kai riba $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ egzistuoja. Čia a gali būti tiek baigtinis ($a\in R$), tiek begalinis ($\pm\infty$).

3. *Neapibrėžtumas* $0\cdot\infty$. Kai turime neapibrėžtumą $0\cdot\infty$, tai jį pertvarkome į neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$, t.y. jei $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, o $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, tai

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Po pertvarkymų turime neapibrėžtumus $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$, todėl dabar jau galime taikyti Liopitalio taisyklę kaip 1-ame ir 2-ame punktuose.

4. *Neapibrėžtumas* $\infty-\infty$. Šį neapibrėžtumą galime suvesti į neapibrėžtumus $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$. Jei $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, tai

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

Dažnai neapibrėžtumą $\infty-\infty$ galime suvesti į neapibrėžtumus $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$ tiesiog subendravardiklindami, jei bent viena iš funkcijų $f(x)$ ar $g(x)$ yra trupmena.

Po pertvarkymų turime neapibrėžtumus $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$, todėl jau galime taikyti Liopitalio taisyklę kaip 1-ame ir 2-ame punktuose.

5. *Neapibrėžtumai* 0^0, ∞^0, 1^∞. Šie neapibrėžtumai yra pakeičiami neapibrėžtumu $0\cdot\infty$ išlogaritmavus nagrinėjamą reiškinį arba pritaikius formules:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$, jei turime neapibrėžtumus 0^0, ∞^0,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)}$, jei turime neapibrėžtumą 1^∞.

1 pastaba. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ gali neegzistuoti, nors funkcijų f ir g santykio riba $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ir egzistuoja.

2 pastaba. Jeigu $f'(x)$ ir $g'(x)$ tenkina tas pačias sąlygas, kaip ir funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, tai Liopitalio taisyklę galima taikyti dar kartą. Tuomet: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Dažnai Liopitalio taisyklę reikia taikyti keletą kartų.

3 pastaba. Jei nepasakyta kitaip, tai teorijoje ir pavyzdžiuose, kai rašoma ∞, tai tokiu atveju begalybės ženklas esmės nekeičia, galima laikyti, kad $\infty=\pm\infty$.

Pavyzdžiai

Remdamiesi Liopitalio taisykle, raskite šias ribas:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-7^x}{tgx}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$. Taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-7^x}{tgx} \overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^x-7^x\right)'}{\left(tgx\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3-7^x\ln 7}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\left(3^x\ln 3-7^x\ln 7\right)=$$

$$=1^2\cdot\left(\left(3^0\ln 3\right)-7^0\ln 7\right)=\ln 3-\ln 7=\ln\frac{3}{7}.$$

Atsakymas: $\ln\dfrac{3}{7}$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$. Taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1} \overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\pi-2arctgx\right)'}{\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{3\left(1+x^2\right)e^{\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{3\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)e^{\frac{3}{x}}}=\frac{2}{3},\ \text{nes čia}\ \lim_{x\to +\infty}e^{\frac{3}{x}}=e^0=1.$$

Atsakymas: $\dfrac{2}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$.

Sprendimas

Kadangi $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$, tai turime neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$. Todėl iš karto taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}\overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(2^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}.$$

Pritaikius Liopitalio taisyklę, dar turime neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$. Todėl dar kartą taikome Liopitalio taisyklę :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}\overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(2^x\ln 2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln 2\cdot 2^x\ln 2}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

Atsakymas: 0.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$. Todėl iš karto taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}\overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Atsakymas: 1.

5. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $0\cdot\infty$. Reiškinį pertvarkome taip, kad gautume neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$ (žr. 3 punktą) ir tada taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\substack{\textit{Liopitalio}\\ \textit{taisyklė}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-2}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Atsakymas: 0.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

Kadangi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{0} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{\ln x} = \frac{3}{0} = +\infty$, tai turime neapibrėžtumą $\infty - \infty$. Tokiu atveju iš karto Liopatalio taisyklės taikyti negalime. Reiškinį pertvarkome taip, kad gautume neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$ (žr. 4 punktą) ir tada taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{\textit{Liopitalio}\\ \textit{taisyklė}}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x'\ln x + x(\ln x)' - x'}{(x-1)'\ln x + (x-1)(\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{\textit{Liopitalio}\\ \textit{taisyklė}}}{=}}$$

$$\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{Liopitalio\\taisyklė}}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Atsakymas: $\frac{1}{2}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

<u>Sprendimas</u>

Kadangi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos x} = \infty$, tai turime neapibrėžtumą 1^{∞}.

Todėl taikysime formulę $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)\cdot(f(x)-1)}$.

Nagrinėjamu atveju $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{1-\cos x}$. Taigi, turime

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)}.$$

Kad būtų patogiau, atskirai skaičiuosime e laipsnio ribą:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{(1-\cos x)\cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x - x\cdot\cos x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{Liopitalio\\taisyklė}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x - x\cdot\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \cos x + x\sin x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{Liopitalio\\taisyklė}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(1 - \cos x + x\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\sin x + \sin x + x\cos x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{Liopitalio\\taisyklė}}{=}}$$

$$\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\substack{\text{Liopitalio} \\ \text{taisyklė}}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(\sin x+\sin x+x\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\cos x+\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{-1}{1+1+1-0\cdot 0}=-\frac{1}{3}.$$

Nepamirškime, kad apskaičiavome laipsnio ribą, todėl galutinis atsakymas yra

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Atsakymas: $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

Sprendimas

Kadangi $\lim\limits_{x\to 0}ctgx=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0}=\infty$, o $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, tai turime neapibrėžtumą ∞^0. Todėl taikysime formulę $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln f(x)}$. Nagrinėjamu atveju, $f(x)=ctgx$, $g(x)=\sin x$. Taigi, turime

$$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln ctgx}.$$

Kad būtų patogiau, atskirai skaičiuosime e laipsnio ribą: $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln ctgx$. Kadangi $\lim\limits_{x\to 0}\ln ctgx=\infty$, o $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, tai turime neapibrėžtumą $0\cdot\infty$. Todėl iš karto Liopitalio taisyklės taikyti negalime. Reiškinį pertvarkome taip, kad gautume neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$ (žr. 3 punktą) ir tada taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln ctgx \underset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln ctgx}{\frac{1}{\sin x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln ctgx)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot(ctgx)'}{\left(\sin^{-1}x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\sin^{-2}x\cdot(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{ctgx\cdot\sin^2 x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{ctgx\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Nepamirškime, kad apskaičiavome laipsnio ribą, todėl galutinis atsakymas yra

$$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln ctgx} = e^0 = 1\,.$$

Atsakymas: 1.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$.

Sprendimas

Kadangi $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, o $\lim\limits_{x\to 0}tgx = 0$, tai turime neapibrėžtumą 0^0. Todėl taikysime formulę $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln f(x)}$.

Nagrinėjamu atveju, $f(x)=\sin x$, $g(x)=tgx$. Taigi, turime

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tgx} = e^{\lim\limits_{x\to 0}tgx\ln\sin x}.$$

Kad būtų patogiau, atskirai skaičiuosime e laipsnio ribą: $\lim\limits_{x\to 0}tgx\ln\sin x$.

Kadangi $\lim\limits_{x\to 0}tgx = 0$, o $\lim\limits_{x\to 0}\ln\sin x = \infty$, tai turime neapibrėžtumą $0\cdot\infty$.

Todėl iš karto Liopitalio taisyklės taikyti negalime. Reiškinį pertvarkome taip, kad gautume neapibrėžtumą $\dfrac{\infty}{\infty}$ (žr. 3 punktą) ir tada taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to 0} tgx \ln\sin x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{tgx}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\substack{Liopitalio\\ taisyklė}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(ctgx)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'}{-\frac{1}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2 x\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\cos x\sin x = 0\,.$$

Nepamirškime, kad apskaičiavome laipsnio ribą, todėl galutinis atsakymas yra

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tgx} = e^{\lim\limits_{x\to 0} tgx\ln\sin x} = e^0 = 1\,.$$

Atsakymas: 1.

Savarankiško darbo užduotys

Remdamiesi Liopitalio taisykle, raskite šias ribas:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$.

Atsakymas: 3.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \sin x}{\sin x - x}$.

Atsakymas: – 3.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - arctgx}{x^3}$.

Atsakymas: $\dfrac{1}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$.

Atsakymas: $\dfrac{1}{4}$.

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^{3x}}$.

Atsakymas: 0.

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5^x - x^5}{x-5}$.

Atsakymas: $25\cdot(\ln 5 - 1)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^5 \ln x$.

Atsakymas: 0.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

Atsakymas: $\dfrac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx - \dfrac{1}{x}\right)$.

Atsakymas: 0.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Atsakymas: $e^{-\frac{1}{6}}$.

11. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

Atsakymas: 1.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$.

Atsakymas: 1.

4. Funkcijų tyrimas ir grafikų brėžimas

4.1 Funkcijos didėjimo ir mažėjimo požymis

Jeigu funkcija $y = f(x)$ turi teigiamą išvestinę kiekviename intervalo $(a;b)$ taške, tai funkcija **didėja** tame intervale, o jeigu funkcija turi neigiamą išvestinę kiekviename intervalo $(a;b)$ taške, tai ji **mažėja** tame intervale.

Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalai vadinami **monotoniškumo intervalais**.

Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalai nustatomi tokia tvarka:

- Randami funkcijos **kritiniai taškai**, t. y. taškai, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja.
- Atidedant kritinius taškus, nustatomi intervalai, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.
- Nustatomas išvestinės ženklas kiekviename iš gautųjų intervalų. Jei $f'(x) > 0$ – funkcija didėja, o jei $f'(x) < 0$ – funkcija mažėja.

Pavyzdys

Raskite funkcijos $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$ monotoniškumo intervalus.

<u>Sprendimas</u>

Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

$$y' = x^2 - 3x - 4,$$

$$y' = x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Atidėdami kritinius taškus $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, nustatome intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą:

Intervalai	$(-\infty;-1)$	$(-1;4)$	$(4;+\infty)$
y' ženklas	$+$	$-$	$+$
y kitimas	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

$\downarrow$ žymime mažėjančią funkciją; $\uparrow$ žymime didėjančią funkciją.
Funkcija didėja, kai $x\in(-\infty;-1)$ ir $x\in(4;+\infty)$, mažėja, kai $x\in(-1;4)$.

Atsakymas: didėja, kai $x\in(-\infty;-1)$ ir $x\in(4;+\infty)$, mažėja, kai $x\in(-1;4)$.

Savarankiško darbo užduotys

1. Raskite funkcijos $y=3x^2-12x+5$ monotoniškumo intervalus.

Atsakymas: didėja, kai $x\in(2;+\infty)$, mažėja $x\in(-\infty;2)$.

2.Raskite funkcijos $y=(1-\ln x)x$ didėjimo ir mažėjimo intervalus.

Atsakymas: didėja, kai $x\in(0;1)$, mažėja $x\in(1;+\infty)$.

Jei funkcijos išvestinė, pereidama (iš kairės į dešinę) kritinį tašką x_0, keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai x_0 – **maksimumo taškas**, o jei iš minuso į pliusą, tai x_0 – **minimumo taškas**. Funkcijos minimumo ir maksimumo taškai vadinami jos **ekstremumų taškais**, o funkcijos reikšmės tuose taškuose – jos **maksimumu** ir **minimumu** arba **ekstremumu**.
Jei išvestinė, pereidama kritinį tašką, ženklo nekeičia, tai tame taške ekstremumo nėra.

Funkcijos ekstremumai nustatomi tokia tvarka:

1. Randami funkcijos kritiniai taškai.

2. Atidedant kritinius taškus, nustatomi intervalai, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.

3. Nustatomas funkcijos išvestinės ženklas kiekviename iš gautų intervalų. Jei funkcijos išvestinė, pereidama kritinį tašką, keičia ženklą iš

„+“ į „–“, tai turime maksimumo tašką, jei keičia ženklą iš „–“ į „+“ – minimumo tašką, o jei ženklo nekeičia – ekstremumo nėra.

4. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes ekstremumų taškuose.

Pavyzdžiai

1. Raskite funkcijos $y = x^4 - \frac{2}{3}x^6$ ekstremumus.

Sprendimas

Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Dabar randame funkcijos išvestinę:

$$y' = \left(x^4 - \frac{2}{3}x^6\right)' = 4x^3 - 4x^5 = 4x^3(1 - x^2) = 4x^3(1 - x)(1 + x).$$

Randame funkcijos kritinius taškus, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja .

$4x^3(1 - x)(1 + x) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Atidėdami kritinius taškus $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, nustatome intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.

Intervalai	$(-\infty; -1)$	$x = -1$	$(-1; 0)$	$x = 0$	$(0; 1)$	$x = 1$	$(1; +\infty)$
y' ženklas	+		–		+		–
y kitimas	↑	max	↓	min	↑	max	↓

$$y_{\max} = y(\pm 1) = (\pm 1)^4 - \frac{2}{3}(\pm 1)^6 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$y_{\min} = y(0) = (0)^2 - \frac{2}{3}(0)^4 = 0.$$

Atsakymas: $y_{\max}(\pm 1) = \frac{1}{3}$, $y_{\min}(0) = 0$.

2. Raskite funkcijos $y = 5\sqrt[5]{x^2} - x^2$ ekstremumus.

Sprendimas

Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Dabar randame funkcijos išvestinę:

$$y' = \left(5\sqrt[5]{x^2} - x^2\right)' = \left(5x^{\frac{2}{5}}\right)' - \left(x^2\right)' = 5 \cdot \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} - 2x = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} - 2x =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - x\right) = 2\left(\frac{1 - x\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}\right).$$

Randame funkcijos kritinius taškus, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja.

$1 - x\sqrt[5]{x^3} = 0$,

$y' = 0$, kai $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ir y' neegzistuoja, kai $x_3 = 0$.

Atidėdami kritinius taškus $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, nustatome intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.

Intervalai	$(-\infty; -1)$	$x = -1$	$(-1; 0)$	$x = 0$	$(0; 1)$	$x = 1$	$(1; +\infty)$
y' ženklas	+		–	neegz.	+		–
y kitimas	↑	max	↓	min	↑	max	↓

Iš lentelės pastebime, kad y didėja intervaluose $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ ir mažėja intervaluose $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

$y_{\max} = y(\pm 1) = 5\sqrt[5]{(\pm 1)^2} - (\pm 1)^2 = 5 - 1 = 4$.

$y_{\min} = y(0) = 5\sqrt[5]{0^2} - 0^2 = 0$.

Atsakymas: $y_{\max}(\pm 1) = 4$, $y_{\min}(0) = 0$.

Savarankiško darbo užduotys

1. Raskite funkcijos $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2$ ekstremumus.

Atsakymas: $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}(-0{,}5) = -\dfrac{3}{16}$, $y_{\min}(2) = -8$.

2. Raskite funkcijos $y = e^x + e^{-x}$ ekstremumus.

Atsakymas: $y_{\min}(0) = 2$.

4.2 Funkcijos iškilumo intervalai

Kreivės $y = f(x)$ iškilumo aukštyn (iškilumo žemyn) intervalus ir perlinkio (vingio) taškus randame taip:

1. Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį.

2. Randame funkcijos $y = f(x)$ pirmosios ir antrosios eilės išvestines.

3. Atidedant kritinius taškus, nustatomi intervalai, kuriuose funkcijos antroji išvestinė turi pastovų ženklą.

4. Nustatomas antrosios išvestinės ženklas kiekviename iš gautųjų intervalų. Jei $f''(x) > 0$ – funkcija iškila žemyn, o jei $f''(x) < 0$ – funkcija iškila aukštyn.

5. Jei taške x antroji išvestinė $f''(x)$ keičia ženklą ir $f''(x) = 0$ (arba $f''(x)$ neegzistuoja), tai šis taškas yra kreivės perlinkio (vingio) taškas.

Pavyzdžiai

1. Nustatykite kreivės $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$ iškilumo intervalus ir raskite perlinkio (vingio) taškus.

Sprendimas

Nustatome apibrėžimo sritį, $x^2 \neq 0$, $x \neq 0$. Taigi,
$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$y' = \left(\frac{2x-1}{x^2}\right)' = \frac{(2x-1)' x^2 - (x^2)'(2x-1)}{(x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(-2x+2)}{x^4} = \frac{2-2x}{x^3} .$$

Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$y'' = \left(\frac{2-2x}{x^3}\right)' = \frac{(2-2x)' x^3 - (x^3)'(2-2x)}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{-2 \cdot x^3 - 3x^2(2-2x)}{x^6} = \frac{4x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{4x-6}{x^4}.$$

$y'' = 0$, kai

$$\frac{4x-6}{x^4} = 0 \Rightarrow 4x-6=0 \Rightarrow 4x=6 \Rightarrow x=\frac{3}{2} .$$

Pastebime, jog y'' neegzistuoja, kai $x = 0 \notin D(y)$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty; 0)$	$\left(0; \frac{3}{2}\right)$	$x = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$
y'' ženklas	–	–		+
y kitimas	iškila aukštyn $\cap$	iškila aukštyn $\cap$	vingio (perlin-kio) taškas	iškila žemyn $\cup$

Kreivė iškila aukštyn, kai $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right)$, iškila žemyn, kai $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

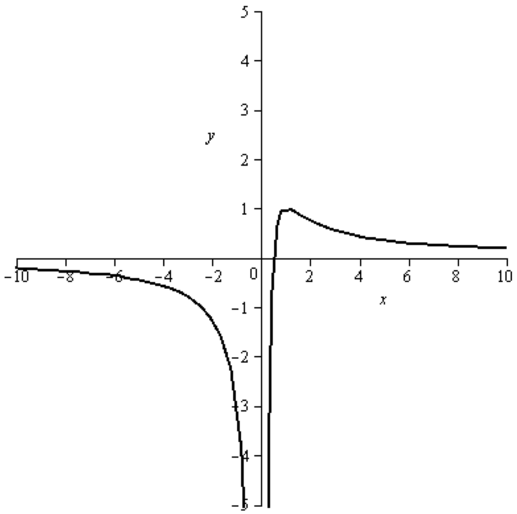
Antrosios eilės išvestinė y'', pereidama tašką $x = 0$, ženklo nekeičia, todėl kreivės iškilumo pobūdis nesikeičia.

Antrosios eilės išvestinė y'' keičia ženklą pereidama tašką $x=\frac{3}{2}$, todėl šis taškas yra perlinkio taško abscisė.

Apskaičiuojame perlinkio taško ordinatę:

$$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2\cdot\frac{3}{2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{2}{\frac{9}{4}}=2\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{9}.$$

Funkcijos grafikas:



Atsakymas: funkcijos grafikas iškilas aukštyn, kai $x\in(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)$,

iškilas žemyn, kai $x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$,

perlinkio taškas $A=\left(\frac{3}{2};\frac{8}{9}\right)$.

2. Nustatykite kreivės $y=\sqrt[5]{x^7}$ iškilumo intervalus ir raskite perlinkio (vingio) taškus.

<u>Sprendimas</u>

Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

$$y'=\left(\sqrt[5]{x^7}\right)'=\left(x^{\frac{7}{5}}\right)'=\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}.$$

Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$y''=(y')'=\left(\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}\right)'=\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{14}{25\sqrt[5]{x^3}}.$$

Pastebime, kad $y''\neq 0$ su visais $x\in R$ ir funkcija y'' neegzistuoja, kai $x=0$.

Sudarome lentelę:

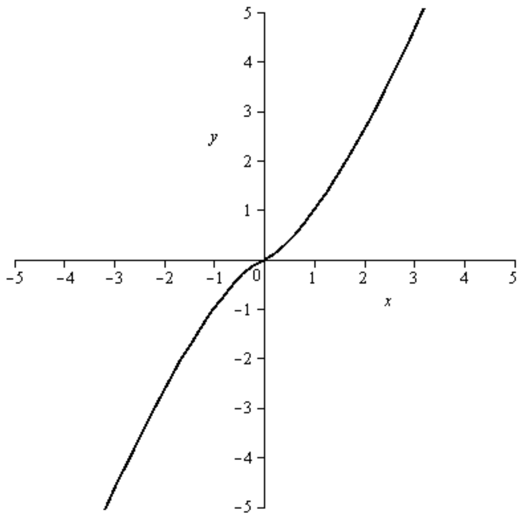
Intervalai	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
y'' ženklas	$-$		$+$
y kitimas	iškila aukštyn $\cap$	vingio (perlinkio) taškas	iškila žemyn $\cup$

Kreivė iškila aukštyn, kai $x\in(-\infty;0)$, iškila žemyn, kai $x\in(0;+\infty)$.

Antrosios eilės išvestinė y'' keičia ženklą pereidama tašką $x=0$, todėl šis taškas yra perlinkio taško abscisė. Apskaičiuojame perlinkio taško ordinatę:

$$y(0)=\sqrt[5]{0^7}=0.$$

Funkcijos grafikas:

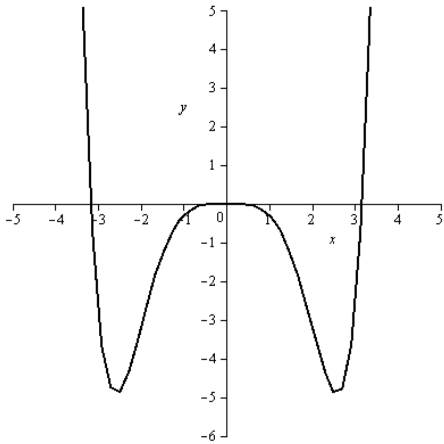


Atsakymas: funkcijos grafikas iškilas aukštyn, kai $x \in (-\infty; 0)$,
iškilas žemyn, kai $x \in (0; +\infty)$,
perlinkio taškas $A = (0; 0)$.

Savarankiško darbo užduotys

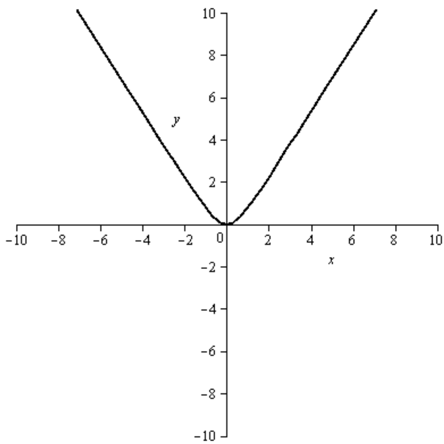
1. Nustatykite kreivės $y = \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{3}$ iškilumo intervalus ir raskite perlinkio (vingio) taškus.

Atsakymas: funkcijos grafikas iškilas žemyn, kai $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$,
iškilas aukštyn, kai $x \in (-2;2)$,
perlinkio taškai $A = \left(-2; -\frac{16}{5}\right)$, $B = \left(2; -\frac{16}{5}\right)$.



2. Nustatykite kreivės $y = x\,arctgx$ iškilumo intervalus ir raskite perlinkio (vingio) taškus.

Atsakymas: funkcijos grafikas iškilas žemyn $(-\infty; +\infty)$, perlinkio taškų nėra.



4.3 Funkcijos grafiko asimptotės

Tiesė vadinama **kreivės asimptote**, kai bet kurio kreivės taško atstumas iki tos tiesės artėja prie nulio, taškui tolstant kreive.
Tiesė $x = a$ vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko **vertikaliąja asimptote**, jei bent viena iš ribų $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ ar $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ yra begalinė ($\pm \infty$).
Tiesė $y = kx + b$ vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko **pasvirąja asimptote**, jei riba $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(f(x) - (kx + b)\right) = 0$. Pasvirosios asimptotės koeficientai k ir b randami iš lygybių:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ir } b = \lim_{x \to \pm\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

Jei, apskaičiuodami koeficientus k ir b, sužinome, kad bent viena iš ribų yra begalinė arba neegzistuoja, tai funkcijos grafikas pasvirosios asimptotės neturi.
Kai koeficientas $k = 0$, tiesė $y = b$ vadinama **horizontaliąja asimptote**, kuri yra lygiagreti su O_x ašimi.

Pavyzdžiai

1. Raskite funkcijos $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ asimptotes.

Sprendimas

Apibrėžimo sritis $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$.
Kadangi taškas $x = 0$ nepriklauso funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai, tai vertikalioji asimptotė gali būti tik šiame taške.

Vertikalioji asimptotė:

$x = 0$,

$$\lim_{x \to 0-0}\left(\frac{2x - 1}{x^2}\right) = \frac{-1}{+0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)=\frac{-1}{+0}=-\infty .$$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)=-\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=0$ yra vertikalioji asimptotė.

Dabar ieškosime pasvirosios asimptotės.

Pasviroji asimptotė:

$y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x-1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x^3}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2}-0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Vadinasi, tiesė $y=0$ yra grafiko horizontalioji asimptotė (koeficientas $k=0$), kai $x\to-\infty$ arba $x\to+\infty$. Funkcijos grafikas nubrėžtas skyrelyje 4.4 .

Atsakymas: tiesė $x=0$ (ašis O_y) yra vertikalioji asimptotė, o tiesė $y=0$ (ašis O_x) yra grafiko horizontalioji asimptotė.

2. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}+3x$ asimptotes.

<u>Sprendimas</u>

Apibrėžimo sritis $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Kadangi taškas $x=1$ nepriklauso funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai, tai vertikalioji asimptotė gali būti tik šiame taške.

Vertikalioji asimptotė:

$x = 1$,

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=\frac{3}{-0}+3=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=\frac{3}{+0}+3=+\infty.$$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x = 1$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:

$y = kx + b$,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x-1}+3x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1}+3\right)=\frac{3}{\infty}+3=0+3=3,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x-1}+3x-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{1-\frac{1}{x}}\right)=\frac{3}{1-0}=3.$$

Vadinasi, tiesė $y = 3x + 3$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$. Funkcijos grafikas nubrėžtas skyrelyje 4.4.

Atsakymas: tiesė $x = 1$ yra vertikalioji asimptotė, o tiesė $y = 3x + 3$ yra grafiko pasviroji asimptotė.

3. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{3x}{e^x}$ asimptotes.

<u>Sprendimas</u>

Apibrėžimo sritis $D(f)=(-\infty,+\infty)$.
Kadangi funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis sutampa su visa realiųjų skaičių aibe, todėl vertikaliųjų asimptočių nėra.
Raskime pasvirąsias asimptotes.

$y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{e^x}\right)=\frac{3}{e^{-\infty}}=\frac{3}{\frac{1}{e^{+\infty}}}=\frac{3}{0}=+\infty .$$

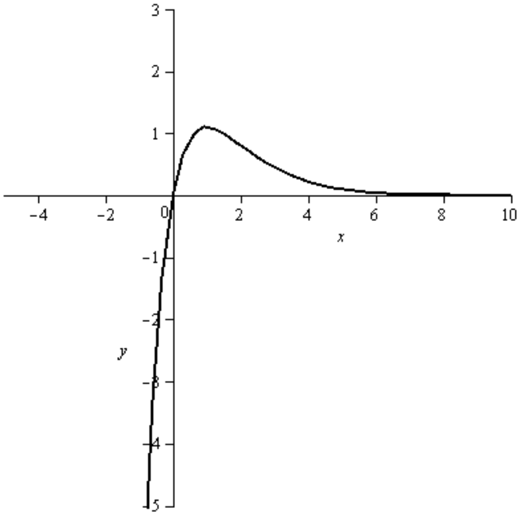
Apskaičiuodami koeficientą k, gavome, kad riba yra begalinė, tai funkcijos grafikas pasvirosios asimptotės neturi, kai $x\to-\infty$.
Dabar ieškosime pasvirosios asimptotės, kai $x\to+\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{e^x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{e^x}\right)=\frac{3}{e^{+\infty}}=\frac{3}{\infty}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{e^x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x)'}{(e^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x}=\frac{3}{e^{+\infty}}=\frac{3}{\infty}=0.$$

Vadinasi, tiesė $y=0$ yra grafiko horizontalioji asimptotė, kai $x\to+\infty$.
Funkcijos grafikas:



Atsakymas: funkcijos grafikas vertikaliųjų asimptočių neturi. Tiesė $y=0$ yra grafiko horizontalioji asimptotė, kai $x \to +\infty$.

Savarankiško darbo užduotys

1. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ asimptotes.

Atsakymas: funkcijos grafikas vertikaliųjų asimptočių neturi. Tiesė $y=0$ yra grafiko horizontalioji asimptotė, kai $x \to -\infty$, tiesė $y=x$ – pasviroji asimptotė, kai $x \to +\infty$.

4.4 Funkcijų tyrimas ir grafikų brėžimas

Funkcijos grafiką galima braižyti atidedant plokštumoje atskirus taškus. Toks metodas netobulas, nes funkcijos kitimo vaizdą ne visada galima susidaryti, net ir apskaičiavus daugelio taškų koordinates. Prieš braižant grafiką reikėtų ištirti funkciją.

Funkcijos tyrimo schema:

- Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį.
- Nustatome funkcijos charakteringąsias savybes (periodiškumą ir lyginumą).
- Randame monotoniškumo intervalus ir ekstremumus.
- Nustatome funkcijos iškilumo intervalus ir perlinkio (vingio) taškus.
- Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.
- Surandame funkcijos ribas, kai x tolsta į begalybes $\pm\infty$ ir artėja prie funkcijos apibrėžimo srities galų (jei funkcijos apibrežimo sritis nėra $(-\infty; +\infty)$).
- Nustatome, ar funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis, jei taip, surandame funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškus.
- Brėžiame funkcijos grafiko eskizą.

Tiriant konkrečią funkciją, kai kuriuos klausimus galima praleisti, papildyti. Grafikui patikslinti galima papildomai parinkti keletą taškų.

Pavyzdžiai

Ištirti funkciją ir nubraižyti jos grafiką:

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x-1} + 3x$.

a) Nustatome apibrėžimo sritį, $x-1 \neq 0$, $x \neq 1$. Taigi $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; + \ \infty)$.

b) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{-x-1} + 3(-x) = \dfrac{-3x}{-x-1} - 3x = -\left(-\dfrac{3x}{x+1} + 3x\right) \neq$
$\neq f(x) \neq f(-x)$.

Funkcija $f(x) = \dfrac{3x}{x-1} + 3x$ yra nei lyginė, nei nelyginė. Ji taip pat yra neperiodinė.

c) Randame funkcijos ekstremumus bei monotoniškumo intervalus.

$$f'(x)=\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)'=\left(\frac{3x}{x-1}\right)'+(3x)'=\frac{(3x)'(x-1)-(x-1)'3x}{(x-1)^2}+$$

$$+3=\frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}+3=\frac{-3}{(x-1)^2}+3.$$

$f'(x)=0$, kai

$$\frac{-3}{(x-1)^2}+3=0\Rightarrow\frac{-3}{(x-1)^2}=-3\Rightarrow\frac{1}{(x-1)^2}=1\Rightarrow 1=(x-1)^2,$$

$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Pastebime, jog išvestinė neegzistuoja taške $x=1\notin D(f)$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;0)$	x = 0	$(0;1)$	$(1;2)$	x = 2	$(2;+\infty)$
f' ženklas	+		–	–		+
f kitimas	↑	max	↓	↓	min	↑

Taigi, $f_{\max}(0)=\dfrac{3\cdot 0}{0-1}+3\cdot 0=0+0=0$, $f_{\min}(2)=\dfrac{3\cdot 2}{2-1}+3\cdot 2=6+6=12$.

d) Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$f''(x)=\left(\frac{-3}{(x-1)^2}+3\right)'=\left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)'+(3)'=$$

$$=\frac{(-3)'(x-1)^2-\left((x-1)^2\right)'(-3)}{(x-1)^4}=\frac{6(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}.$$

Pastebime, jog $f''(x)\neq 0$, $\forall x\in R$. $f''(x)$ neegzistuoja, kai $x=1$ $\notin D(f)$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty; 1)$	$(1; +\infty)$
f'' ženklas	$-$	$+$
f kitimas	iškila aukštyn $\cap$	iškila žemyn $\cup$

e) Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.

Vertikalioji asimptotė:

$x = 1$,

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=\frac{3}{-0}+3=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=\frac{3}{+0}+3=+\infty.$$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=+\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=1$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:

$y = kx + b$,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x}{x-1}+3x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1}+3\right)=\frac{3}{\infty}+3=0+3=3,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x-1}+3x-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{1-\frac{1}{x}}\right)=\frac{3}{1-0}=3.$$

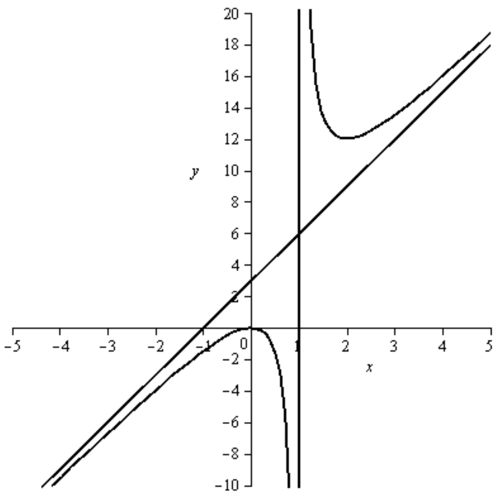
Vadinasi, tiesė $y = 3x + 3$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$.

f) Rasime grafiko susikirtimo taškus su O_x ir O_y ašimis:

$$\frac{3x}{x-1} + 3x = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 3x^2 - 3x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{x-1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

$y = 0$, kai $x = 0$.

g) Remdamiesi gautais duomenimis, braižome grafiką.



2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$.

Sprendimas

a) Nustatome apibrėžimo sritį, $x^2 \neq 0$, $x \neq 0$. Taigi $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\ \infty)$.

b) $f(-x) = \dfrac{2(-x)-1}{(-x)^2} = \dfrac{-2x-1}{x^2} = -\dfrac{2x+1}{x^2} \neq f(x) \neq f(-x)$.

Funkcija $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$ yra nei lyginė, nei nelyginė. Funkcija neperiodinė.

c) Randame funkcijos ekstremumus bei monotoniškumo intervalus.

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)'=\frac{(2x-1)'x^2-(x^2)'(2x-1)}{(x^2)^2}=\frac{2x^2-2x(2x-1)}{x^4}=$$

$$=\frac{-2x^2+2x}{x^4}=\frac{x(-2x+2)}{x^4}=\frac{2-2x}{x^3}.$$

$f'(x)=0$, kai

$$\frac{2-2x}{x^3}=0\Rightarrow 2-2x=0\Rightarrow -2x=-2\Rightarrow x=1.$$

Pastebime, jog išvestinė neegzistuoja taške $x=0\notin D(f)$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	x = 1	$(1;+\infty)$
f' ženklas	-	+		-
f kitimas	$\downarrow$	$\uparrow$	max	$\downarrow$

Taigi $f_{\max}(1)=\dfrac{2\cdot 1-1}{1^2}=1$.

d) Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$f''(x)=\left(\frac{2-2x}{x^3}\right)'=\frac{(2-2x)'x^3-(x^3)'(2-2x)}{(x^3)^2}=$$

$$=\frac{-2\cdot x^3-3x^2(2-2x)}{x^6}=\frac{4x^3-6x^2}{x^6}=\frac{4x-6}{x^4}.$$

$f''(x)=0$, kai

$$\frac{4x-6}{x^4}=0\Rightarrow 4x-6=0\Rightarrow 4x=6\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Pastebime, jog $f''(x)$ neegzistuoja, kai $x = 0 \notin D(f)$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;\ 0)$	$\left(0; \frac{3}{2}\right)$	$x = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$
f'' ženklas	$-$	$-$		$+$
f kitimas	iškila aukštyn $\cap$	iškila aukštyn $\cap$	vingio taškas	iškila žemyn $\cup$

e) Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.

Vertikalioji asimptotė:

$x = 0$,

$$\lim_{x \to 0-0} \left(\frac{2x-1}{x^2} \right) = \frac{-1}{+0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{2x-1}{x^2} \right) = \frac{-1}{+0} = -\infty.$$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} f(x) = -\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x = 0$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:

$y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x-1}{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{x^3} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{x^2} - 0 \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

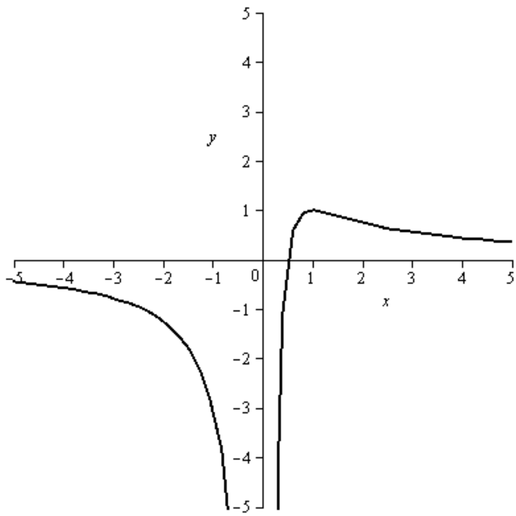
Vadinasi, tiesė $y=0$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$.

f) Rasime grafiko susikirtimo taškus su O_x ir O_y ašimis:

$$\frac{2x-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

$y=0$, kai $x=\frac{1}{2}$.

g) Remdamiesi gautais duomenimis, braižome grafiką.



3. $f(x)=\frac{x^3}{3\text{-}x^2}$.

<u>Sprendimas</u>

a) Nustatome apibrėžimo sritį, $3-x^2 \neq 0$, $x \neq \pm\sqrt{3}$. Taigi, $D(f)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

b) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)=-f(x)$, $f(-x)=-f(x)$.

Vadinasi turime nelyginę funkciją.

c) Randame funkcijos ekstremumus bei monotoniškumo intervalus.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\left(3-x^2\right)-\left(3-x^2\right)'x^3}{\left(3-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)+2x\cdot x^3}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)+2x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{9x^2-3x^4+2x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

$f'(x)=0$, kai

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=0 \Rightarrow x^2\left(9-x^2\right)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=-3.$$

Pastebime, jog išvestinė neegzistuoja taške $x=\pm\sqrt{3}\notin D(f)$.

Sudarome lentelę:

Interva-lai	$(-\infty;-3)$	$x=-3$	$(-3;-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};0)$	$x=0$	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};3)$	$x=3$	$(3;+\infty)$
f' ženklas	$-$		$+$	$+$		$+$	$+$		$-$
f kitimas	$\downarrow$	min	$\uparrow$	$\uparrow$	ekstr. nėra	$\uparrow$	$\uparrow$	max	$\downarrow$

Taigi, $f_{\max}(3)=\dfrac{3^3}{3-3^2}=\dfrac{27}{3-9}=-\dfrac{27}{6}=-\dfrac{9}{2}$,

$f_{\min}(-3)=\dfrac{(-3)^3}{3-(-3)^2}=\dfrac{-27}{3-9}=\dfrac{-27}{-6}=\dfrac{9}{2}$.

d) Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$f''(x)=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(9x^2-x^4\right)'\left(3-x^2\right)^2-\left(\left(3-x^2\right)^2\right)'\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3\text{-}x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3\text{-}x^2\right)x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(3\text{-}x^2\right)\left(\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)+2x^2\left(9-x^2\right)\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$f''(x)=0$, kai

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=0\Rightarrow 6x\left(9+x^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\9+x^2\neq 0,\forall x\in R.\end{cases}$$

Pastebime, jog $f''(x)=0$, kai $x=0$. $f''(x)$ neegzistuoja, kai $x=\pm\sqrt{3}$ $\notin D(f)$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	x = 0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3};+\infty\right)$
f' ženklas	$+$	$-$		$+$	$-$
f kitimas	$\cup$	$\cap$	vingio (perlinkio) taškas	$\cup$	$\cap$

e) Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.

Vertikalioji asimptotė:

$x=-\sqrt{3}$,

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}-0\right)}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(-0)}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\mathbf{3}+0}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\left(\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(+0)}=-\infty.$$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0}f(x)=-\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=-\sqrt{3}$ yra vertikalioji asimptotė.

$x=\sqrt{3}$,

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}(f(x))=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\left(\frac{x^3}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}\right)=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0)(\sqrt{3}+\sqrt{3})}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{(+0)\cdot 2\sqrt{3}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}(f(x))=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\left(\frac{x^3}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}\right)=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}-0)(\sqrt{3}+\sqrt{3})}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{(-0)\cdot 2\sqrt{3}}=-\infty.$$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0} f(x)=-\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=\sqrt{3}$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:

$y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\frac{3}{x^2}-1}\right)=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{3-x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2}-1}\right)=\frac{0}{0-1}=0.$$

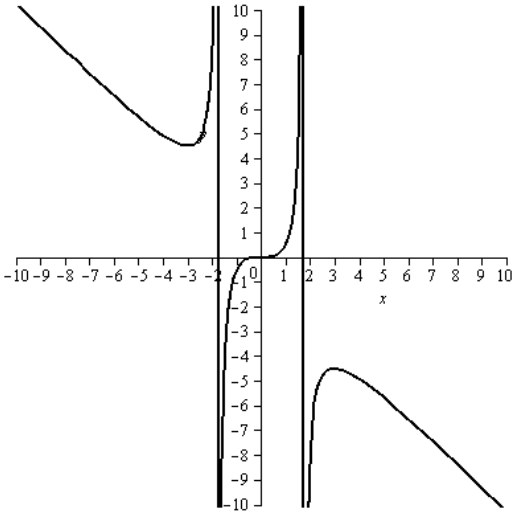
Vadinasi, tiesė $y = -x$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$.

f) Rasime grafiko susikirtimo taškus su O_x ir O_y ašimis:

$$\frac{x^3}{3-x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

$y = 0$, kai $x = 0$.

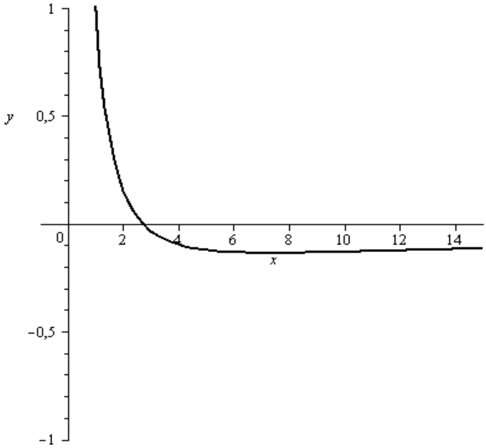
g) Remdamiesi gautais duomenimis, braižome grafiką.



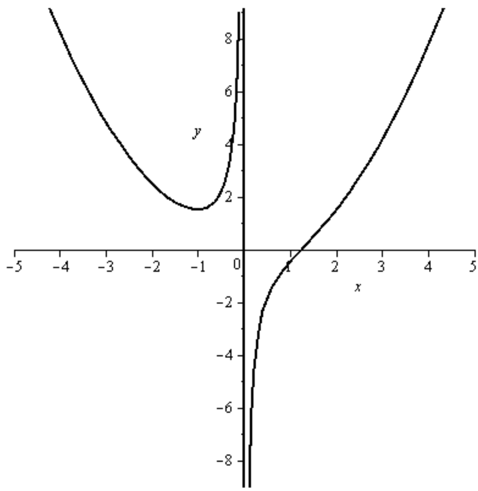
Savarankiško darbo užduotys

Ištirti funkciją ir nubraižyti jos grafiką:

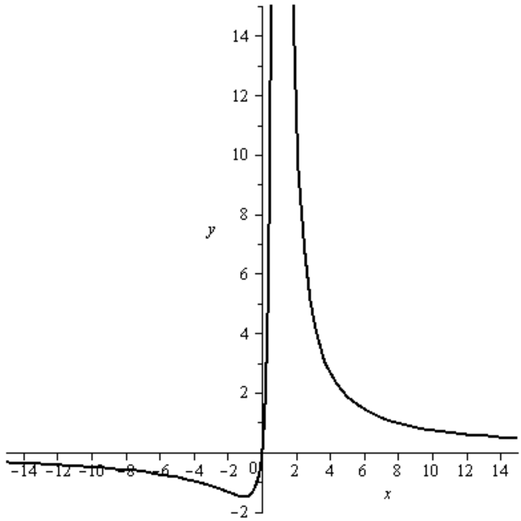
1. $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$.



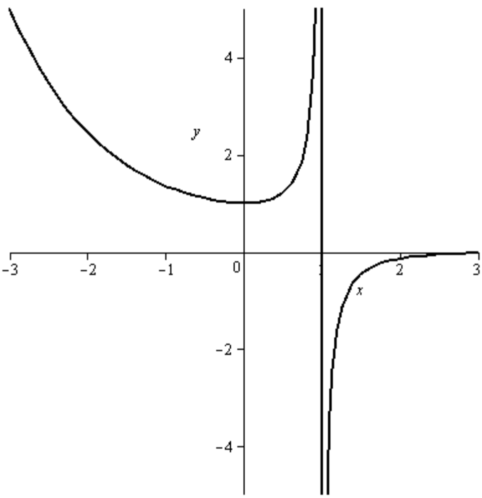
2. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$.



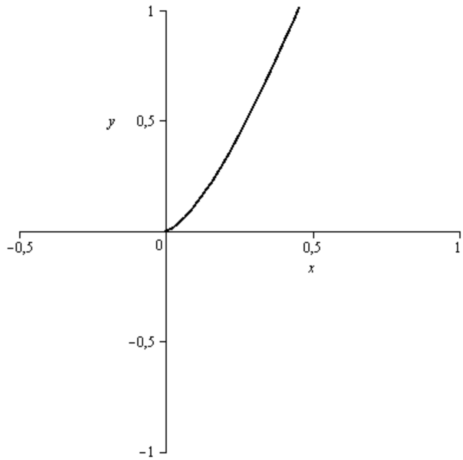
3. $f(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^2}$.



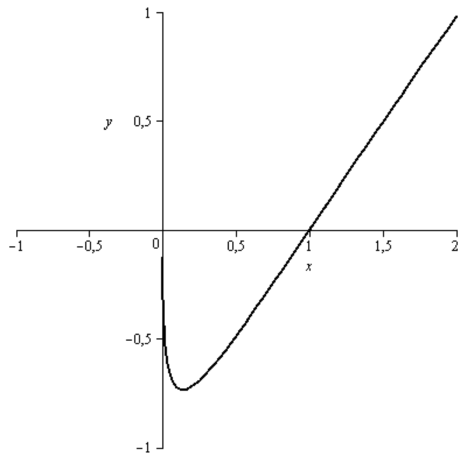
4. $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.



5. $f(x)=4x\sqrt{x}-x^2$.



6. $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.



5. Neapibrėžtinis integralas

Funkcijos $f(x)$ pirmykšte funkcija vadinama tokia funkcija $F(x)$, kuriai teisinga lygybė $F'(x) = f(x)$. Jei $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė ir C – bet koks realusis skaičius, tai $F(x)+C$ irgi yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija. Funkcijos $f(x)$ **neapibrėžtiniu integralu** vadinama šios funkcijos visų pirmykščių funkcijų aibė $F(x)+C$, t. y.

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Pagrindinių integralų lentelė:

1. $\int 0dx = C$,
2. $\int 1dx = \int dx = x + C$,
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$,
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
5. $\int e^x dx = e^x + C$,
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$,
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| + C$,
12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$,
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$,
15. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$,
16. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$,
17. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$,
18. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$,
19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

5.1 Paprasčiausios integravimo taisyklės

Pagrindinės neapibrėžtinio integralo savybės:

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,

2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, čia c - bet koks realusis skaičius, nelygus 0,

3. $\int df(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$,

4. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$,

5. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

Pavyzdžiai

1) $$\int (4x^2 - 5x + 7)dx = \int 4x^2\,dx - \int 5x\,dx + \int 7\,dx =$$
$$= 4\int x^2\,dx - 5\int x\,dx + 7\int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + C =$$
$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C,$$

2) $$\int (1 + \sqrt{x})^2 dx = \int (1 + 2\sqrt{x} + x)dx = \int dx + 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x\,dx =$$
$$= x + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$3)\ \int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-4}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx - \int \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{6}}dx - 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} - 4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} - 4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 8\sqrt{x} + C,$$

$$4)\ \int \frac{4dx}{9+x^2} = 4\int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{4}{3}arctg\frac{x}{3} + C\ ,$$

$$5)\ \int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite integralus:

1. $\int \left(5x^2 + \sqrt{x} - 2\right)dx$.

Atsakymas: $\frac{5x^3}{3} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2x + C$.

2. $\int \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[4]{x^5}}dx$.

Atsakymas: $4\sqrt[4]{x} + \frac{24\sqrt[12]{x^5}}{5} - \frac{84\sqrt[28]{x^{17}}}{17} + C.$

3. $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

Atsakymas: $3arctg\ x-7\arcsin x+C$.

4. $\int 3^x\left(1+\frac{3^{-x}}{x}\right)dx$.

Atsakymas: $\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C$.

5. $\int\frac{2-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

Atsakymas: $-2ctg\ x+\cos x+C$.

5.2 Integravimas, pakeičiant kintamąjį

Gan efektyvus būdas funkcijoms integruoti – kintamojo pakeitimo metodas. Šio metodo esmė yra tokia: jei žinome, kad

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

tai bus teisinga ir tokia lygybė

$$\int f(g(t))d(g(t))=\int f(g(t))\cdot g'(t)dt=F(g(t))+C,$$

čia $f(x)$, $g(t)$, $g'(t)$ yra tolydžios[3] funkcijos.

Paprasčiausia nauju kintamuoju pažymėti po diferencialu esančią funkciją $g(t)$.

1 pastaba. Norint funkciją įkelti po diferencialu, reikia tą funkciją **suintegruoti**.

[3] Tolydžios funkcijos apibrėžimą žr.:
Pekarskas, Vidmantas, *Trumpas matematikos kursas*. Kaunas:Technologija, 2005, p. 152–153. ISBN 9955-09-858-9.

Pavyzdžiui,

1. $x^3dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4}d\left(x^4\right)$,

2. $\cos x\,dx = d(\sin x)$,

3. $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$,

4. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}dx = d\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = 2d\left(\sqrt{x}\right)$.

2 pastaba. Naudinga prisiminti pagrindines diferencialo savybes:

1) konstantą galima iškelti prieš diferencialo ženklą: $d(A\cdot f(x)) = A\cdot d(f(x))$,

2) po diferencialu galima pridėti/atimti bet kokią konstantą: $d(f(x)\pm C) = d(f(x))$,

3) iš 1) ir 2) savybių išplaukia, kad teisinga tokia lygybė: $d(A\cdot f(x)\pm C) = A\cdot d(f(x))$.

Pavyzdžiai

1. $\int \sin(9x)dx = \frac{1}{9}\int \sin(9x)d(9x) = \frac{1}{9}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{9}\cos t + C =$

$= -\frac{1}{9}\cos(9x) + C$,

2. $\int \cos(3x+5)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+5)d(3x+5) =$

$= \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+5) + C$,

3. $\int (4x+7)^5 dx = \frac{1}{4}\int (4x+7)^5 d(4x+7) = \frac{1}{4}\int t^5 dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6} + C =$

$= \frac{1}{24}(4x+7)^6 + C$,

4. $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$,

5. $\int \frac{dx}{(3x-5)^2} = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{-2} d(3x-2) = \frac{1}{3}\int t^{-2}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C =$

$= -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3(3x-2)} + C,$

6. $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$,

7. $\int e^{2\cos x}\sin x dx = \int e^{2\cos x} d(-\cos x) = -\frac{1}{2}\int e^{2\cos x} d(2\cos x) =$

$= -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{2\cos x} + C$,

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$= \arcsin t + C = \arcsin(\ln x) + C.$

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite integralus:

1. $\int \sqrt[3]{1+x}dx$.

Atsakymas: $\frac{3\sqrt[3]{(1+x)^4}}{4} + C.$

2. $\int x\cdot\sqrt[3]{3+x^2}dx$.

Atsakymas: $\frac{3\cdot\sqrt[3]{(3+x^2)^4}}{8} + C.$

3. $\int \frac{x^4}{2+x^5}dx$.

Atsakymas: $\frac{1}{5}\ln\left|2+x^5\right|+C.$

4. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Atsakymas: $\ln\left|\ln x\right|+C.$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Atsakymas: $-\sqrt{1-x^2}+C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Atsakymas: $-2\sqrt{1-x}+C.$

7. $\int \frac{dx}{x(1-4\ln x)}$.

Atsakymas: $-\frac{1}{4}\ln\left|1-4\ln x\right|+C.$

8. $\int \frac{dx}{x(1-4\ln^2 x)}$.

Atsakymas: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\ln x}{1-2\ln x}\right|+C.$

9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x-5}}dx$.

Atsakymas: $-\frac{3\cdot\sqrt[3]{(\cos x-5)^2}}{2}+C.$

5.3 Trigonometrinių reiškinių integravimas

Norint suintegruoti integralą $\int \sin^n ax \cdot \cos^m bx\, dx$, naudingos trigonometrinės formulės:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$;

$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$;

$\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\left(\sin(x+y)x + \sin(x-y)\right)$;

$\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)x - \cos(x+y)\right)$.

Jei $a = b$ ir bent viena pointegralinė[4] trigonometrinė funkcija yra pirmojo laipsnio, tai tą funkciją keliame po diferencialu.
Jei $a = b$ ir bent viena pointegralinė trigonometrinė funkcija yra nelyginio laipsnio, tai tada reikia nuo nelyginio laipsnio trigonometrinės funkcijos atskirti pirmojo laipsnio daugiklį ir jį įkelti po diferencialu.

Pavyzdžiai

1. $\int tgx dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} \underset{\cos x = t}{=} -\int \dfrac{dt}{t} = -\ln|t| + C =$
$= -\ln|\cos x| + C,$

[4] Jei turime $\int f(x)dx$, tai $f(x)$ vadinsime pointegraline funkcija.

$$2.\ \int \frac{\sin x}{2-3\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{2-3\cos x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(-3\cos x)}{2-3\cos x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(2-3\cos x)}{2-3\cos x} \underset{2-3\cos x = t}{=} \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|2-3\cos x| + C,$$

$$3.\ \int \sin^5 x\,\cos x\,dx = \int \sin^5 x\; d(\sin x) \underset{\sin x = t}{=} \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C\,,$$

$$4.\ \int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C,$$

$$5.\ \int \cos^4 x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx + 2\int \cos 2x\,dx + \int \cos^2 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + 2\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x) + \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C,$$

$$6.\ \int \sin^2 x\cos^4 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\ \cos^2 x dx =$$

$$= \int (\sin x\cos x\ )\cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\, dx + \int \sin^2 2x\cos 2x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x\, dx + \int \sin^2 2x\, d(\sin 2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C,$$

$$7.\ \int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x\ \sin x\, dx = -\int \sin^4 x\ d(\cos x) =$$

$$= -\int \left(\sin^2 x\right)^2 d(\cos x) = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 d(\cos x) \underset{\cos x = t}{=}$$

$$= -\int \left(1-t^2\right)^2 dt = -\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt = -\left(\int dt - 2\int t^2 dt + \int t^4 dt\right) =$$

$$= -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C,$$

$$8.\ \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^4 x} d(\sin x) \underset{\sin x = t}{=}$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-4+1}}{-4+1} - \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C,$$

9. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\sqrt{\cos x}}d\left(-\cos x\right) =$

$$= -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\sqrt{\cos x}}d\left(\cos x\right) \underset{\cos x = t}{=} -\int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\int t^{-\frac{1}{2}}dt + \int t^{\frac{3}{2}}dt = -\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C =$$

$$= -2\sqrt{t} + \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + C = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C,$$

10. $\displaystyle\int \sin 7x \cdot \cos 5x \, dx =$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\sin(7+5)x + \sin(7-5)x\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 12x + \sin 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \sin 12 dx + \int \sin 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\int \sin 12x \, d\left(12x\right) + \frac{1}{2}\int \sin 2x \, d\left(2x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = -\frac{1}{24}\cos 12x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite integralus:

1. $\displaystyle\int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Atsakymas: $x - \cos x + C$.

2. $\displaystyle\int ctg^2 x dx$.

Atsakymas: $-ctgx - x + C.$

3. $\int \sin 3x \cdot \sin 9x dx.$

Atsakymas: $\frac{1}{12}\sin 6x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$

4. $\int \sin^6 x dx.$

Atsakymas: $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

5. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$

Atsakymas: $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

5.4 Integravimas dalimis

Tai integralų apskaičiavimas taikant integravimo dalimis formulę:

$$\int f(x)d(g(x)) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)d(f(x)).$$

Šis metodas dažniausiai taikomas tuomet, kai reikia integruoti tokią dviejų funkcijų sandaugą: $P_n(x)\cdot f(x)$; čia $P_n(x)$ yra n-tojo laipsnio daugianaris ($n \geq 0$), o $f(x)$ – rodiklinė, logaritminė, trigonometrinė arba atvirkštinė trigonometrinė funkcija. Funkciją $g(x)$ galima gauti keliant kurį nors dauginamąjį $P_n(x)$ ar $f(x)$ po diferencialu. Galima išskirti dažniausiai pasitaikančius atvejus. Jei po integralu yra sandauga $P_n(x)\cdot f(x)$, kur

1) $f(x)$ – trigonometrinė funkcija, tai po diferencialu reikia kelti trigonometrinę funkciją;
2) $f(x)$ – eksponentinė funkcija, tai po diferencialu reikia kelti eksponentinę funkciją;
3) $f(x)$ – logaritminė funkcija, tai po diferencialu reikia kelti daugianarį $P_n(x)$;

4) $f(x)$ – atvirkštinė trigonometrinė funkcija, tai po diferencialu reikia kelti daugianarį $P_n(x)$.

Pavyzdžiai

1) $\int x\cdot\cos x dx=\int xd(\sin x) = x\cdot\sin x-\int\sin x dx =$

$= x\cdot\sin x + \cos x + C,$

2) $\int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int xd\left(e^{2x}\right)=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)\right)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C,$

3) $\int x^5\ln x dx=\int\ln x d\left(\frac{x^6}{6}\right)=\frac{1}{6}\int\ln x d\left(x^6\right)=\frac{1}{6}\left(x^6\ln x-\int x^6 d(\ln x)\right)=$

$=\frac{1}{6}\left(x^6\ln x-\int x^6\cdot\frac{1}{x}dx\right)=\frac{1}{6}\left(x^6\ln x-\int x^5 dx\right)=$

$=\frac{1}{6}\left(x^6\ln x-\frac{x^6}{6}\right)+C=\frac{1}{6}x^6\ln x-\frac{1}{36}x^6+C,$

4) $\int x\cdot arctgx\, dx=\int arctgx\, d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\int arctgx\, d\left(x^2\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(x^2 arctgx-\int x^2 d(arctgx)\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(x^2 arctgx-\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2 arctgx-\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(x^2 arctgx-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2 arctgx-\left(\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}\right)\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(x^2 arctgx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}x^2 arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C,$

5) $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x d(\ln x) = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C,$

6) $\int \frac{x-1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (x-1) dx = \int (x-1) d(tgx) =$

$= (x-1)tgx - \int tgx\, d(x-1) = (x-1)tgx - \int tgx\, dx =$

$= (x-1)tgx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = (x-1)tgx - \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} =$

$= (x-1)tgx + \int \frac{dt}{t} = (x-1)tgx + \ln|t| + C = (x-1)tgx + \ln|\cos x| + C.$

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite integralus:

1. $\int arctgx\, dx$.

Atsakymas: $xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + C.$

2. $\int x^3 \ln x dx$.

Atsakymas: $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$.

3. $\int \arcsin x dx$.

Atsakymas: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Atsakymas: $2\sqrt{x}\left(\ln|x| - 2\right) + C$.

5. $\int xe^x dx$.

Atsakymas: $xe^x - e^x + C$.

6. $\int x \sin x dx$.

Atsakymas: $-x\cos x + \sin x + C$.

5.5 Racionaliųjų funkcijų integravimas

Racionaliąja funkcija vadinsime trumpeną

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kur $P_n(x)$ yra n-tojo laipsnio daugianaris, o $Q_m(x)$ – m-tojo laipsnio daugianaris.

Jei trupmenos skaitiklio laipsnis yra griežtai mažesnis už trupmenos vardiklio laipsnį ($n<m$), tai tokia trupmena vadinama **taisyklingąja trupmena**. Priešingu atveju ($n \geq m$) turime **netaisyklingąją trupmeną**.

Norėdami suinteguoti netaisyklingąją trupmeną, turime atskirti sveikąją dalį (dalinant kampu) ir tokiu būdu netaisyklingoji trumpena yra suvedama į taisyklingąją. Todėl pakanka išnagrinėti taisyklingųjų trupmenų integravimą. Tokios trupmenos yra integruojamos išskaidant jas į paprastųjų (elementariųjų) trupmenų sumą.
Išskirsime pagrindinius taisyklingųjų trupmenų tipus ir parodysime, kaip reikia jas (t. y. trupmenas) skaidyti:

- $$\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}=\frac{P_n(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2},$$

čia trinaris ax^2+bx+c turi dvi realiąsias šaknis x_1, x_2.

- $$\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}=\frac{P_n(x)}{(x-x_{1,2})^2}\cdot=\frac{A}{x-x_{1,2}}+\frac{B}{(x-x_{1,2})^2},$$

čia trinaris ax^2+bx+c turi vieną kartotinę realiąją šaknį $x_{1,2}$.

- Jei trinaris ax^2+bx+c neturi realiųjų šaknų, tuomet reikia išskirti pilnąjį kvadratą, naudojantis formule $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

- $$\frac{P_n(x)}{(x-c)^{\alpha}\left(ax^2+bx+c\right)^{\beta}}=\frac{A_1}{x-c}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\frac{A}{(x-c)^3}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-c)^{\alpha}}+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\frac{B_3x+C_3}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\ldots+\frac{B_{\beta}x+C_{\beta}}{\left(ax^2+bx+c\right)^{\beta}},$$

čia trinaris ax^2+bx+c neturi realiųjų šaknų.
Konstantos $A, B, A_1, A_2, ..., A_{\alpha}, B_1, B_2, ..., B_{\beta}$ yra vadinamieji neapibrėžtieji koeficicientai, kurie randami subendravardiklinus dešiniosiose lygybių pusėse esančias trupmenas ir sulyginus koeficientus prie atitinkamų x laipsnių, esančių dešiniosiose ir kairiosiose lygybių pusėse. Tokiu būdu gaunama algebrinių lygčių sistema, kurią išsprendę turime konkrečias koeficientų $A, B, A_1, A_2, ..., A_{\alpha}, B_1, B_2, ..., B_{\beta}$ reikšmes.

Pavyzdžiai

1. $I=\int\frac{x^4+1}{(x-1)^2}dx=\int\frac{x^4+1}{x^2-2x+1}dx.$

Kadangi po integralu turime netaisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra didesnis už vardiklio laipsnį), tai turime skaitiklį padalinti iš vardiklio kampu ir tokiu būdu atskirti sveikąją netaisyklingosios trupmenos dalį. Šiuo atveju skaitiklį x^4+1 padalinę iš vardiklio x^2-2x+1, gauname dalmenį x^2+2x+3 ir liekaną $4x-2$.
Taigi, pointegralinė funkcija atrodo taip:

$$\frac{x^4+1}{(x-1)^2}=x^2+2x+3+\frac{4x-2}{(x-1)^2}.$$

Po šių pertvarkymų nagrinėjamas integralas yra tokio pavidalo:

$$I=\int\left(x^2+2x+3+\frac{4x-2}{(x-1)^2}\right)dx=\int x^2dx+\int 2xdx+\int 3dx+\int\frac{4x-2}{(x-1)^2}dx.$$

Pirmus tris integralus suintegruoti paprasta. Atskirai apskaičiuosime ketvirtąjį integralą $\int \frac{4x-2}{(x-1)^2}dx$.

Po integralu esančią taisyklingąją trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{4x-2}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\frac{4x-2}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}=\frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}.$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A=4, \\ -A+B=-2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4, \\ B=-2+A=-2+4=2. \end{cases}$$

Taigi, gavome, kad $A=4,\ B=2$. Tuomet

$$\int \frac{4x-2}{(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{4}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=4\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}+2\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=4\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

Grįžtame prie nagrinėjamo integralo I:

$$I=\int\left(x^2+2x+3+\frac{4x-2}{(x-1)^2}\right)dx=\int x^2dx+\int 2xdx+\int 3dx+\int\frac{4x-2}{(x-1)^2}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2+3x+4\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

Atsakymas: $\frac{x^3}{3}+x^2+3x+4\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$

2. $I = \int \frac{x+4}{x^2 - x - 2} dx.$

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį).
Vardiklis yra kvadratinis trinaris $x^2 - x - 2$, kurio **diskriminantas yra teigiamas.**
Vadinasi, $x^2 - x - 2$ galime išskaidyti dauginamaisiais.
Tuo tikslu randame kvadratinio trinario šaknis:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9,$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Taigi, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

Po integralu esančią taisyklingąją trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{x+4}{x^2 - x - 2} = \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\frac{x+4}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)}.$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A - 2B = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B, \\ 1 - B - 2B = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B, \\ -3B = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1, \\ A = 2. \end{cases}$$

Taigi, gavome, kad $A = 2,\ B = -1$.
Tuomet

$$I=\int\frac{x+4}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{-1}{x+1}\right)dx=2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=2\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\int\frac{d(x+1)}{x+1}=2\ln|x-2|-\ln|x+1|+C=\ln\frac{(x-2)^2}{|x+1|}+C.$$

Atsakymas: $\ln\frac{(x-2)^2}{|x+1|}+C$.

3. $I=\int\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklis yra kvadratinis trinaris $x^2-6x+13$, kurio **diskriminantas yra neigiamas.** Todėl išskaidyti dauginamaisiais negalime. Tokiu atveju vardiklyje išskirsime pilnąjį kvadratą, t. y. $x^2-6x+13=x^2-2\cdot3\cdot x+9+4=(x-3)^2+4$.
Taigi, turime

$$I=\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}\underset{x-3=t}{=}\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{x-3}{2}+C.$$

Atsakymas: $\frac{1}{2}arctg\frac{x-3}{2}+C.$

4. $I=\int\frac{x-1}{x^2+5x+6}dx$.

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį).
Vardiklis yra kvadratinis trinaris x^2+5x+6, kurio **diskriminantas yra teigiamas.**
Vadinasi, x^2+5x+6 galime išskaidyti dauginamaisiais. Tuo tikslu randame kvadratinio trinario šaknis:

$$x^2+5x+6=0,$$
$$D=5^2-4\cdot1\cdot6=1,$$
$$x_1=\frac{-5+1}{2}=-2,\quad x_2=\frac{-5-1}{2}=-3.$$

Taigi, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

Po integralu esančią taisyklingąją trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6}=\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}.$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases}A+B=1,\\3A+2B=-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1-B,\\3(1-B)+2B=-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1-B,\\-B=-4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=4,\\A=-3.\end{cases}$$

Taigi, gavome, kad $A=-3,\ B=4$.

Tuomet

$$I=\int\frac{x-1}{x^2+5x+6}=\int\left(\frac{-3}{x+2}+\frac{4}{x+3}\right)dx=-3\int\frac{dx}{x+2}+4\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=-3\int\frac{d(x+2)}{x+2}+4\int\frac{d(x+3)}{x+3}=-3\ln|x+2|+4\ln|x+3|+C=$$
$$=\ln\frac{(x+3)^4}{|x+2|^3}+C.$$

Atsakymas: $\ln\dfrac{(x+3)^4}{|x+2|^3}+C$.

5. $I = \int \frac{xdx}{x^2 + x + 1}$.

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklis yra kvadratinis trinaris $x^2 + x + 1$, kurio **diskriminantas yra neigiamas.** Todėl išskaidyti dauginamaisiais negalime. Tokiu atveju vardiklyje išskirsime pilnąjį kvadratą, t. y.

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \, .$$

Taigi, turime

$$I = \int \frac{xdx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{xdx}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = t, \\ x = t - \frac{1}{2}, \\ dx = d\left(t - \frac{1}{2} \right) = dt \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{\left(t - \frac{1}{2} \right) dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{t\,dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\,arctg\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Atsakymas: $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

6. $I=\int\frac{2x-1}{x^2+6x+12}dx$.

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklis yra kvadratinis trinaris $x^2+6x+12$, kurio **diskriminantas yra neigiamas.** Todėl išskaidyti dauginamaisiais negalime. Tokiu atveju vardiklyje išskirsime pilnąjį kvadratą, t. y.

$$x^2+6x+12=x^2+2\cdot3\cdot x+3^2+3=\left(x+3\right)^2+3 \ .$$

Taigi, turime

$$I=\int\frac{2x-1}{x^2+6x+12}dx=\int\frac{2x-1}{\left(x+3\right)^2+3}dx=$$

$$\left\{\begin{aligned}&x+3=t,\\&x=t-3,\\&dx=d\left(t-3\right)=dt\end{aligned}\right\}$$

$$=\int\frac{2\left(t-3\right)-1}{t^2+3}dt=\int\frac{2t-7}{t^2+3}dt=2\int\frac{t\,dt}{t^2+3}-7\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3}-7\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\ln\left(t^2+3\right)-\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\ln\left(x^2+6x+12\right)-\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Atsakymas: $\ln\left(x^2+6x+12\right)-\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{3}}+C$.

7. $I=\int\frac{xdx}{x^2+4x+4}$.

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklis yra kvadratinis trinaris x^2+4x+4 , kurio **diskriminantas yra lygus nuliui.**

Vadinasi, lygtis $x^2+4x+4=0$ turi kartotinę šaknį $x_{1,2}=\frac{-4\pm 0}{2}=-2$.

Todėl $x^2+4x+4=\left(x+2\right)\left(x+2\right)=\left(x+2\right)^2$.

Po integralu esančią taisyklingąją trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{x}{\left(x+2\right)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{\left(x+2\right)^2}\ .$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{x}{\left(x+2\right)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{\left(x+2\right)^2}=\frac{A\left(x+2\right)+B}{\left(x+2\right)^2}=\frac{Ax+2A+B}{\left(x+2\right)^2}\ .$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases}A=1,\\2A+B=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\B=-2A=-2.\end{cases}$$

Taigi, gavome, kad $A=1,\ B=-2$.

Tuomet

$$I=\int\frac{xdx}{x^2+4x+4}=\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x+2}-2\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=\int\frac{d(x+2)}{x+2}-2\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2}=\ln|x+2|-2\cdot\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+C=$$

$$=\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}+C.$$

Atsakymas: $\ln|x+2|+\dfrac{2}{x+2}+C.$

8. $I=\int\dfrac{4x-2}{x\left(x^2-2x+2\right)}dx$.

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklyje yra kvadratinis trinaris x^2-2x+2, kurio diskriminantas yra neigiamas, todėl pointegralinę funkciją išreikšime tokia paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{4x-2}{x\left(x^2-2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\frac{4x-2}{x\left(x^2-2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}=\frac{A\left(x^2-2x+2\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2-2x+2\right)}=$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2-2x+2\right)}=\frac{x^2(A+B)+x(-2A+C)+2A}{x\left(x^2-2x+2\right)}.$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases}A+B=0,\\-2A+C=4,\\2A=-2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1,\\B=-A=1,\\C=4+2A=4-2=2.\end{cases}$$

Taigi, gavome, kad $A=-1$, $B=1$, $C=2$.
Tuomet

$$I=\int\frac{4x-2}{x\left(x^2-2x+2\right)}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1\cdot x+2}{x^2-2x+2}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x+2}{x^2-2x+2}dx=I_1+I_2.$$

Integralą I_1 jau galime suintegruoti:

$$I_1=-\int\frac{dx}{x}=-\ln|x|+C_1.$$

Kadangi kvadratinio trinario x^2-2x+2 diskriminantas yra neigiamas, tai turime išskirti pilnąjį kvadratą, t. y.

$$x^2-2x+2=\left(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2\right)+1=(x-1)^2+1.$$

Tuomet

$$I_2=\int\frac{x+1}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{x+2}{(x-1)^2+1}dx=$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=t, \\ x=t+1, \\ dx=d(t+1)=dt \end{array}\right\}$$

$$=\int\frac{t+1+2}{t^2+1}dt=\int\frac{t+3}{t^2+1}dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\frac{3\,dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}+3\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+3arctg\,t+C_2=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+3arctg\,(x-1)+C_2.$$

Taigi, randame duotąjį integralą I:

$$I=I_1+I_2=-\ln|x|+C_1+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+3arctg\,(x-1)+C_2=$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+3arctg\,(x-1)+C, \text{ kur } C=C_1+C_2.$$

Atsakymas: $-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+3arctg\,(x-1)+C$.

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite integralus:

1) $\int \frac{dx}{x(x+3)}$.

Atsakymas: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C$.

2) $\int \frac{x^2+x+12}{(x+1)(x^2-9)}dx$.

Atsakymas: $-\frac{3}{2}\ln|x+1| + \ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$

3) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$.

Atsakymas: $\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$

4) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$.

Atsakymas: $x + 2arctgx + C.$

5) $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

Atsakymas: $2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

5.6 Kai kurių iracionaliųjų funkcijų integravimas

Nagrinėsime keletą iracionaliųjų funkcijų tipų:

1. $R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, ..., \sqrt[s]{x^r}\right)$,

2. $R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^m}, ..., \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^r}\right)$, kur a, b, c, f – realieji skaičiai, $af - bc \neq 0$.

- Jei turime integralą $\int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, ..., \sqrt[s]{x^r}\right)dx$, tai keitinys, kuriuo iracionalioji funkcija suvedama į racionaliąją funkciją, yra toks: $\sqrt[k]{x} = t$, čia skaičius k yra trupmenų $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$ bendras vardiklis.

- Jei turime integralą $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^m}, ..., \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^r}\right)dx$, tai keitinys, kuriuo iracionalioji funkcija suvedama į racionaliąją funkciją, yra toks: $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+f}} = t$, čia skaičius k yra trupmenų $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$ bendras vardiklis.

- Jei turime integralą $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 \pm bx \pm c}}$, tai tokiu atveju po šaknies ženklu esančiame reiškinyje reikia išskirti pilnąjį kvadratą, naudojantis formule $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Pavyzdžiai

1. $I = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}$.

Kadangi trupmenų $\frac{1}{2}$ ir $\frac{3}{4}$ bendras vardiklis yra 4, tai norėdami iracionaliąją trumpeną suvesti į racionaliąją trumpeną, darome tokį keitinį: $\sqrt[4]{x} = t$.

Tuomet $x = t^4$, $x^{\frac{1}{2}} = t^2$, $x^{\frac{3}{4}} = t^3$, $dx = d\left(t^4\right) = 4t^3 dt$.

Gautus keitinius įsistatę į pradinį integralą, gauname

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1}.$$

Dabar turime netaisyklingąją racionaliąją trupmeną, todėl dalinsime skaitiklį iš vardiklio kampu ir tokiu būdu atskirsime sveikąją netaisyklingosios trupmenos dalį. Šiuo atveju, skaitiklį t^5 padalinę iš vardiklio t^3+1, gauname dalmenį t^2 ir liekaną $-t^2$.

Taigi, turime

$$I = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1} = 4\int \left(t^2 + \frac{-t^2}{t^3+1} \right) dt = 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2 dt}{t^3+1} =$$

$$= 4\int t^2 dt - 4 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln\left|t^3+1\right| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| \right) + C.$$

Atsakymas: $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| \right) + C$.

2. $I = \int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

Darome keitinį: $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = t$.

Tuomet

$$\frac{1+x}{1-x} = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{t^3+1},$$

$$1-x = 1-\frac{t^3-1}{t^3+1} = \frac{t^3+1-(t^3-1)}{t^3+1} = \frac{2}{t^3+1},$$

$$dx = d\left(\frac{t^3-1}{t^3+1}\right) = \left(\frac{t^3-1}{t^3+1}\right)' dt = \frac{(t^3-1)'(t^3+1)-(t^3-1)(t^3+1)'}{(t^3+1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{3t^2(t^3+1)-(t^3-1)3t^2}{(t^3+1)^2}\,dt = \frac{3t^2(t^3+1)-(t^3-1)3t^2}{(t^3+1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{3t^5+3t^2-3t^5+3t^2}{(t^3+1)^2}\,dt = \frac{6t^2}{(t^3+1)^2}\,dt.$$

Gautas išraiškas įsistatę į pradinį integralą, gauname

$$I = \int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^2}\cdot t\cdot\frac{6t^2}{(t^3+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t^3+1)^2}{4}\cdot t\cdot\frac{6t^2}{(t^3+1)^2}\,dt = \frac{6}{4}\int t^3 dt == \frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\right)^4 + C = \frac{3}{8}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Atsakymas: $\frac{3}{8}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

3. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$.

Darome keitinį: $\sqrt{x+1} = t$.

Tuomet

$x = t^2 - 1,$

$dx = d(t^2 - 1) = (t^2 - 1)' dt = 2tdt.$

Gautas išraiškas įsistatę į pradinį integralą, gauname

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} = \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2\int \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$
$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t+1} dt = 2\int dt - 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} =$$
$$= 2t - \ln|t+1| + C = 2\left(\sqrt{x+1} - \ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right) + C.$$

Atsakymas: $2\left(\sqrt{x+1} - \ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right) + C$.

4. $I = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

Darome keitinį: $\sqrt[3]{3x+1} = t$.

$x = \frac{t^3 - 1}{3},$

$dx = d\left(\frac{t^3-1}{3}\right) = \left(\frac{t^3-1}{3}\right)' dt = \frac{3t^2}{3} dt = t^2\, dt.$

Gautas išraiškas įsistatę į pradinį integralą, gauname

$$I=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{3x+1}}=\int\frac{\left(\frac{t^3-1}{3}\right)t^2dt}{t}=\int\left(\frac{t^3-1}{3}\right)t\,dt=\frac{1}{3}\int\left(t^4-t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int t^4dt-\frac{1}{3}\int t\,dt=\frac{t^5}{15}-\frac{t^2}{6}+C=\frac{2t^5-5t^2}{30}+C=\frac{t^2}{30}\left(2t^3-5\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{30}\left(2\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)^3-5\right)+C=\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{30}\left(2\left(3x+1\right)-5\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{30}\left(6x-3\right)+C=\frac{(2x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{10}+C.$$

Atsakymas: $\dfrac{(2x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{10}+C$.

5. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot1\cdot x+1-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-4}}=$$

$$=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-4}}=\ln\left|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2-4}\right|+C=$$

$$=\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x-x}\right|+C.$$

Atsakymas: $\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x-x}\right|+C$.

6. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+4}}=\int\frac{d(x-1)}{2^2-(x-1)^2}=\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

Atsakymas: $\arcsin\dfrac{x-1}{2}+C$.

7. $I=\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+4\right)}$.

Kadangi trupmenų $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{4}$ bendras vardiklis yra 4, tai, norėdami iracionaliąją trupmeną suvesti į racionaliąją trupmeną, darome tokį keitinį: $\sqrt[4]{x}=t$.

Tuomet

$$x=t^4,\quad x^{\frac{1}{2}}=t^2,\quad x^{\frac{1}{4}}=t,$$

$$dx=d\left(t^4\right)=4t^3dt.$$

Gautas išraiškas įsistatę į pradinį integralą, gauname

$$I=\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+4\right)}=\int \frac{4t^3dt}{t^4\left(t^2+2t+4\right)}=\int \frac{4dt}{t\left(t^2+2t+4\right)}\ .$$

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį).
Kadangi kvadratinis trinaris t^2+2t+4 realių šaknų neturi (diskriminantas neigiamas), tai pointegralinę trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{4dt}{t\left(t^2+2t+4\right)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+2t+4}\ .$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus gauname:

$$\frac{4\,dt}{t\left(t^2+2t+4\right)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+2t+4}=\frac{A\left(t^2+2t+4\right)+\left(Bt+C\right)t}{t\left(t^2+2t+4\right)}=$$

$$=\frac{At^2+2At+4A+Bt^2+Ct}{t\left(t^2+2t+4\right)}.$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų t laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A+C=0, \\ 4A=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A, \\ C=-2A, \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1, \\ C=-2, \\ A=1. \end{cases}$$

Išsprendę lygčių sistemą, gauname, kad $A=1,\ B=-1,\ C=-2$.

Taigi, turime

$$I=\int \frac{4dt}{t\left(t^2+2t+4\right)}=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1\cdot t+(-2)}{t^2+2t+4}\right)dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t+2}{t^2+2t+4}\right)dt=$$
$$=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{t+2}{t^2+2t+4}dt=I_1-I_2.$$

Skaičiuodami integralą I_2, vardiklyje išskirsime pilnąjį kvadratą, t. y. $t^2+2t+4=t^2+2\cdot1\cdot t+1+3=(t+1)^2+3$ ir atliksime keitinį

$$t+1=z,$$
$$t=z-1,$$
$$dt=d(z-1)=(z-1)'\,dz=dz.$$

$$I_2=\int\frac{t+2}{t^2+2t+4}dt=\int\frac{t+2}{(t+1)^2+3}dt=\int\frac{(z-1)+2}{z^2+3}dz=$$
$$=\int\frac{z+1}{z^2+3}dz=\int\frac{zdz}{z^2+3}+\int\frac{dz}{z^2+3}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(z^2+3\right)}{z^2+3}+\int\frac{dz}{z^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(z^2+3\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{z}{\sqrt{3}}+C_2=\frac{1}{2}\ln\left((t+1)^2+3\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+1}{\sqrt{3}}+C_2=\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}}+C_2.$$

Taigi, gavome, kad

$$I = I_1 - I_2 = \ln\left(\sqrt[4]{x}\right) + C_1 - \frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C_2 =$$

$$= \ln\left(\sqrt[4]{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C \text{, čia } C = C_1 + C_2 .$$

Atsakymas: $\ln\left(\sqrt[4]{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C$.

Savarankiško darbo užduotys

Apskaičiuokite integralus:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

Atsakymas: $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$

2. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

Atsakymas: $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C.$

3. $\int arctg\sqrt{x}\, dx$.

Atsakymas:. $(x+1)arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

4. $\int \frac{\sqrt{2x+3}-1}{2x+3}dx$.

Atsakymas: $\sqrt{2x+3} - \ln\sqrt{2x+3} + C$.

LITERATŪRA

1. Apynis, A.; Stankus, E. *Matematika.Vadovėlis su taikymo ekonomikoje pavyzdžiais*. Vilnius:TEV, 2001. ISBN 9955-491-08-6.
2. Bulota K.: Survila, P. *Algebra ir skaičių teorija. 1 dalis*. Vilnius: Mokslas, 1989. ISBN 5-420-00415-1.
3. Čiočys, V.; Jasilionis, R. *Matematinis programavimas*. Mokslas, Vilnius, 1990. ISBN 5-420-00254-X.
4. Демидович, Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Астрель, 2010. ISBN 978-5-17-010062-0.
5. Fichtengolcas, G. *Matematinės analizės pagrindai. I tomas.* Vilnius: Mintis, 1965.
6. Furmonavičienė, Z.; Janušauskaitė, S.; Marčiukaitienė, A.; Prašmantienė, D.; Ratkienė, N. *Tiesinė algebra ir matematinė analizė. Uždavinių sprendimai*. Kaunas:Technologija, 2001. ISBN 9986-13-760-8.
7. Kavaliauskas, A. *Aukštosios matematikos uždavinynas.* Vilnius: TEV, 2008. ISBN 978-9955-879-26-8.
8. Kubilius, K.; Saulis, L. *Matematinės analizės praktikumas. 1 dalis*. Vilnius: TEV, 2004. ISBN 9955-491-78-7.
9. Krylovas, A.; Kriauzienė, R.; Lavcel, O.; Kastickaitė, J. *Taikomoji matematika*. Vilnius, 2010.
10. Orinauskas, A. *Tiesinis programavimas*. Vilnius: Mintis, 1971.
11. Pekarskas, V. *Trumpas matematikos kursas*. Kaunas: Technologija, 2005. ISBN 9955-09-858-9.
12. Rumšas, P. *Trumpas aukštosios matematikos kursas*. Vilnius: Mokslas, 1976.
13. Skrabutėnas, R.; Survila, P. *Algebros ir skaičių teorijos uždavinynas*. Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1995. ISBN 5-420-01293-6.

Kaulakytė, Kristina; Kriauzienė, Rima
Ka613 TIESINĖS ALGEBROS IR MATEMATINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI: mokomoji priemonė: – Vilnius: Mykolo Romerio universiteto leidyba, 2011. – 228 p.
Bibliogr.: 227 p.
ISBN 978-9955-19-327-2

Mokymo priemonėje pateiktos pagrindinės tiesinės algebros ir matematinės analizės sąvokos, iliustruotos detaliai išspręstų uždavinių pavyzdžiais. Knygoje dera matematinis griežtumas ir išsamus medžiagos išdėstymas, o šis ypač svarbus, kai matematika nėra pagrindinis studijų dalykas.

Mokymo priemonė skirta įvairių specialybių studentams, studijuojantiems tiesinės algebros ir matematinės analizės dalyką. Trumpas teorijos išdėstymas ir išspręstų pavyzdžių gausa padės studijuojantiesiems savarankiškai.

UDK 512(075.8)

Kristina Kaulakytė, Rima Kriauzienė
TIESINĖS ALGEBROS IR MATEMATINĖS ANALIZĖS PAGRINDAI
Mokomoji priemonė

Maketavo Aušrinė Ilekytė

SL 585. 2011 08 10. 3,96 leidyb. apsk. l.
Tiražas 100 egz. Užsakymas 13611.
Mykolo Romerio universiteto užsakymu išleido UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13b, Vilnius
Puslapis internete www.kopija.lt
El. pastas info@kopija.lt
Spausdino UAB „Vitae Litera“
Kurpių g. 5–3, Kaunas
Puslapis internete www.bpg.lt
El. paštas info@bpg.lt