
**Synthese ferromagnetischer Kernmodelle auf
Systemebene für induktive Komponenten
in der Leistungselektronik**

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Sylvio Salomon

Saarbrücken

2019

Tag des Kolloquiums: 05. Juni 2020
Dekan: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Guido Kickelbick
Berichterstatter: Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Klaus Kuhnen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Seelecke
Vorsitz: Univ.-Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger
Akad. Mitarbeiter: Dr.-Ing. Emanuele Grasso

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen einer Industriepromotion in der Arbeitsgruppe für Antriebstechnik und Leistungselektronik im Zentralbereich Forschung und Vorausbewicklung der Robert Bosch GmbH in Kooperation mit der Universität des Saarlandes.

Mein besonderer Dank gilt Herrn PD Dr. Klaus Kuhnen für die hervorragende wissenschaftliche Betreuung meiner Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats. Mit seinem fachlichen Rat und der steten Diskussionsbereitschaft hat er maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Darüber hinaus möchte ich mich auch herzlich für den zugewandenen Freiraum und das entgegengebrachte Vertrauen im gesamten Verlauf der Arbeit bedanken.

Herrn Prof. Dr. Stefan Seelecke vom Lehrstuhl für Intelligente Materialsysteme danke ich für das Interesse an meiner Arbeit, die anregenden Diskussionen und für die Übernahme des Korreferats. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr. Romanus Dyczij-Edlinger vom Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik für das Interesse an meiner Arbeit und die wertvollen Anregungen sowie die wissenschaftliche Begleitung während meiner Doktorandenzeit danken.

Meinen ehemaligen Kollegen und Vorgesetzten der Arbeitsgruppe Antriebstechnik und Leistungselektronik danke ich für die hilfreichen Fachgespräche sowie die angenehme Arbeitsatmosphäre. Des Weiteren möchte ich den von mir betreuten Studenten für ihre Unterstützung danken.

Für den Rückhalt im privaten Umfeld geht ein großer Dank an meine Familie und Freunde. Eine ganz besonders tiefe Dankbarkeit empfinde ich gegenüber meiner liebevollen Lebensgefährtin Lysanne, die mich auch in dieser sehr fordernden Zeit der Entstehung der Arbeit stets verständnisvoll und geduldig unterstützt hat.

Weissach, im Oktober 2019

Sylvio Salomon

Kurzfassung

Das zentrale Thema der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines neuartigen, numerisch stabilen und effizienten Systemmodells im Zeitbereich zur präzisen Beschreibung des Magnetisierungs- und Verlustverhaltens ferromagnetischer Kernmaterialien in induktiven Bauelementen der Leistungselektronik für allgemeine Signalformen sowie für einen großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich. Zu diesem Zweck wird ein operatorbasiertes Modell des Prandtl-Ishlinskii-Typs für die Modellierung der komplexen ratenunabhängigen magnetischen Hysterese unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit in den zugehörigen Verlustterm des Verlustseparationsansatzes nach Bertotti integriert. Daraus geht ein dynamisches Kernmodell in Form einer nichtlinearen Operatordifferentialgleichung hervor, das die effiziente Nachbildung des gedächtnisbehafteten ratenabhängigen magnetischen Verhaltens erlaubt. Zur Vergrößerung des Gültigkeitsbereiches wird dieser Zusammenhang mit einem Schalenmodell verknüpft, wodurch sich auch der Einfluss der Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen im Kernmaterial berücksichtigen lässt. Abschließend werden die operatorbasierten Kernmodelle, die zugehörigen Verlustberechnungsmethoden und ein aus der Kopplung der Kernmodelle mit einfachen Wicklungsmodellen hervorgehendes Systemmodell zur Beschreibung einer induktiven Komponente anhand von Simulations- und Messdaten validiert.

Abstract

The central topic of the present work is the development of a novel, numerically stable and efficient time domain system model that allows accurate simulation of the magnetization and loss behaviour of ferromagnetic core materials in inductive components in power electronics for arbitrary signals as well as a wide range of amplitudes, frequencies and temperatures. For this purpose, an operator-based Prandtl-Ishlinskii approach to model the complex rate-independent magnetic hysteresis is integrated into the corresponding loss term of the loss separation principle by Bertotti with consideration of temperature dependence. As a result of this, a dynamic core model in the form of a nonlinear differential equation containing a hysteresis operator emerges, allowing the efficient modelling of the rate-dependent magnetic behaviour with memory. In order to extend the validity range, this approach is combined with a ladder network model, whereby the influence of the magnetic skin effect due to classical eddy currents in the core material is also taken into account. Finally, the operator-based core models, the associated core loss calculation methods and a system model for an inductive component derived by coupling core and simple winding models are validated by comparison of simulated and measured data.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
1.1 Einführung und Motivation	1
1.2 Stand der Technik	2
1.3 Ziel der Arbeit	6
2 Ferromagnetische Materialien	9
2.1 Das Wesen des Ferromagnetismus	9
2.2 Magnetisierungs- und Verlustprozesse auf verschiedenen Längenskalen . . .	15
2.3 Ferromagnetika in der Leistungselektronik	35
3 Messdatenbasierte Charakterisierung ferromagnetischer Materialien	45
3.1 Messverfahren zur breitbandigen Bestimmung von Magnetisierungskennlinien	45
3.2 Technische Realisierung des Messsystems	49
3.3 Messergebnisse an Beispielen	56
4 Operatorbasierte Modellierung des ferromagnetischen Materialverhaltens	61
4.1 Klassischer Preisach-Ansatz als Ausgangspunkt für die Modellbildung . . .	62
4.2 Prandtl-Ishlinskii-Ansatz zur Beschreibung ratenunabhängiger Hysterese .	73
4.2.1 Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell	79
4.2.2 Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell	85
4.2.3 Verkettung der Prandtl-Ishlinskii-Hysterese- und Superpositionsmodelle zum Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell	91
4.2.4 Verkettung der Prandtl-Ishlinskii-Hysterese- und Superpositionsmodelle zum Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell . . .	99
4.3 Kernmodellerweiterungen auf der Basis des Prandtl-Ishlinskii-Ansatzes . .	108
4.3.1 Moving-Term als zusätzlicher Freiheitsgrad	108
4.3.2 Dynamisches Kernmodell auf Basis des Verlustseparationsprinzips .	112
4.3.3 Berücksichtigung von Flussverdrängung	125
4.3.4 Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit	140
4.4 Kernverlustberechnung	143
4.5 Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen	150
5 Messungen und Ergebnisse	155
5.1 Kernmodelle und Dissipationsmodell für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten	155
5.2 Kernmodellerweiterungen für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten	175

5.3 Gekoppeltes Gesamtmodell einer induktiven Komponente	200
6 Zusammenfassung und Ausblick	213
Literaturverzeichnis	217
A Spannungsübertragungsfunktionen zur Regelkreis-Analyse und -Synthese	225
B Polynomielle Approximation der Wurzelfunktion	229
C Beweis zur Regularität der Jacobi-Matrix	231
D Wirbelstromgesamtleitwert als Funktion der Schalenanzahl	235

Symbolverzeichnis

Lateinische Formelzeichen

Symbol	Beschreibung
A	Querschnittsfläche; Anzahl der Amplitudenstufen
A_e	effektive Querschnittsfläche des weichmagnetischen Pfades eines Magnetkreises
A_{ei}	effektive Querschnittsfläche des weichmagnetischen Pfades eines i -ten Magnetkreissegmentes
A_L	effektive Querschnittsfläche des weichmagnetischen Pfades eines Magnetkreises an den Grenzflächen zu einem Luftspalt
A_r	Amplitudenreserve
A_W	Flächeninhalt einer der Wirbelstromschicht zugeordneten Querschnittsfläche des Vollmaterials
A_+	Menge der Relayoperatoren mit positivem Zustand
A_-	Menge der Relayoperatoren mit negativem Zustand
bei	Hilfsfunktion für den Imaginärteil der Bessel-Funktion
ber	Hilfsfunktion für den Realteil der Bessel-Funktion
B	magnetische Flussdichte; Vektor der magnetischen Flussdichten bei der Verwendung des Schalenmodells
\dot{B}	Vektor der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Flussdichten
B_{\max}	Vektor der Maximalamplituden der magnetischen Flussdichte
B	magnetische Flussdichte
\hat{B}	maximal auftretende Flussdichteamplitude nach Aussteuerung aus dem entmagnetisierten Zustand
B_{\max}	Maximalamplitude der magnetischen Flussdichte
B_r	remanente magnetische Flussdichte
B_S	magnetische Sättigungsflussdichte
c_A	Parameter zur Beschreibung der Austauschverluste im Zeitbereich auf Materialebene
c_A^*	Parameter zur Beschreibung der Austauschverluste im Frequenzbereich auf Materialebene
c_H^*	Parameter zur Beschreibung der ratenunabhängigen Hystereseverluste im Frequenzbereich auf Materialebene
c_{Obj}	Parameter zur Beschreibung der Wirbelstromverluste im Zeitbereich für korrelierende bewegte Domänenwände innerhalb eines magnetischen Objektes
c_W	Parameter zur Beschreibung der klassischen Wirbelstromverluste im Zeitbereich auf Materialebene

c_W^*	Parameter zur Beschreibung der klassischen Wirbelstromverluste im Frequenzbereich auf Materialebene
c_{Wand}	Parameter zur Beschreibung der Wirbelstromverluste im Zeitbereich für eine sich bewegende Domänenwand
C	Integrationskonstante
C_D	elektrische Kapazität des Differentiator-Kondensators
C_I	elektrische Kapazität des Integrator-Kondensators
C_K	elektrische Kapazität des Nullstellenkompensator-Kondensators
C_{w_i}	Parameter des natürlichen Monotonietests im i -ten Iterationsschritt
d	Kreisdurchmesser; kleinste Kernquerschnittsabmessung
d_a	Außendurchmesser
d_i	Innendurchmesser
D	elektrische Flussdichte
e	Einheitsvektor
e	Eulersche Zahl
e_+	magnetische potentielle Energie für die positive Systemzustandsgröße
e_-	magnetische potentielle Energie für die negative Systemzustandsgröße
E	elektrische Feldstärke
E_{AW}	Fehlervektor zur Identifikation der Modellparameter für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten
E	elektrische Feldstärke; Energie
E_{Ani}	magnetische Anisotropieenergie
E_{Aus}	Austauschenergie
E_{AW}	Fehlermaß zur Identifikation der Modellparameter für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten
E_{BS}	durchschnittlich dissipierte Energie infolge eines Barkhausen-Sprunges je Einheitslänge in z -Richtung
E_G	Fehleroperator des verallgemeinerten Fehlers zur Identifikation von S und H^{-1} im Fehlermodell für Γ_{HSH}
E_{mag}	magnetische Gesamtenergie
E_{stat}	magnetostatische Energie
E_{V1}	Fehleroperator des verallgemeinerten Fehlers zur Identifikation von S_1 und H^{-1} im Fehlermodell für Γ_{HSHS}
E_{V2}	Fehleroperator des Eingangsfehlers zur Identifikation von S_2^{-1} im Fehlermodell für Γ_{HSHS}
$E_{V\Gamma^{-1}}$	Fehleroperator des Eingangsfehlers zur Identifikation von $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$
$E_{\Gamma_{\text{HM}}}$	Fehleroperator des Ausgangsfehlers zur Identifikation von Γ_{HM}
$E_{\Gamma_{\text{HM}}^{-1}}$	Fehleroperator des Eingangsfehlers zur Identifikation von Γ_{HM}^{-1}
f	Integrationsvariable eines Integrals über eine Fläche F
$f_{\Delta\theta}$	Vektor der Funktionen des mehrdimensionalen Kernmodells
f	Frequenz; allgemeine Funktion
f_{OV}	Grenzfrequenz des Operationsverstärkers
f_V	Grenzfrequenz des Leistungsverstärkers

$f_{\Delta\theta}$	Funktion des eindimensionalen Kernmodells
$f_{\Delta\theta_i}$	i-te Funktion des mehrdimensionalen Kernmodells
f_+	Differenz der Helmholtzschen freien Energie zwischen dem lokalen Energieminimum und der Energiebarriere für die positive Systemzustandsgröße
f_-	Differenz der Helmholtzschen freien Energie zwischen dem lokalen Energieminimum und der Energiebarriere für die negative Systemzustandsgröße
F	Helmholtzsche freie Energie; eine Fläche; Anzahl der Frequenzstufen
F_G	Geometriefaktor zur Berücksichtigung der geometriespezifischen Ausprägung von klassischen Wirbelströmen
F_K	Korrekturfaktor zur Kompensation des Diskretisierungsfehlers infolge einer endlichen Schalenanzahl
F_P	Helmholtzsche freie Energie einer Preisach-Einheit
F_V	volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz
$F_{V\Gamma}$	volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz bezüglich Γ im Dissipationsmodell von Γ mit Moving-Erweiterung
$F_{V\Gamma^{-1}}$	volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz bezüglich Γ^{-1} im Dissipationsmodell von Γ^{-1} mit Moving-Erweiterung
$F_{V\Gamma_M}$	volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz bezüglich Γ_M im Dissipationsmodell von Γ mit Moving-Erweiterung
$F_{V\Gamma_M^{-1}}$	volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz bezüglich Γ_M^{-1} im Dissipationsmodell von Γ^{-1} mit Moving-Erweiterung
\mathbf{g}_{V2}	Vektor der Gleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S_2^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$
g_{0A}	erster Parameter der flussdichteabhängigen Austauschleitfähigkeit $g_A(B(t))$
g_{0W}	erster Parameter der flussdichteabhängigen geometriespezifischen Wirbelstromleitfähigkeit $g_W(B(t))$
g_{1A}	zweiter Parameter der flussdichteabhängigen Austauschleitfähigkeit $g_A(B(t))$
g_{1W}	zweiter Parameter der flussdichteabhängigen geometriespezifischen Wirbelstromleitfähigkeit $g_W(B(t))$
g_A	flussdichteabhängige Austauschleitfähigkeit
g_W	flussdichteabhängige geometriespezifische Wirbelstromleitfähigkeit
g_+	Differenz der Gibbsschen freien Energie zwischen dem lokalen Energieminimum und der Energiebarriere für die positive Systemzustandsgröße
g_-	Differenz der Gibbsschen freien Energie zwischen dem lokalen Energieminimum und der Energiebarriere für die negative Systemzustandsgröße
\mathbf{G}_A	Matrix der flussabhängigen Austauschleitwerte
\mathbf{G}_G	Vektor der Gleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H}$
\mathbf{G}_L^{-1}	Matrix der inversen Luftspaltpermeanzen
\mathbf{G}_M^{-1}	Matrix der inversen Moving-Permeanzen
\mathbf{G}_{V1}	Vektor der Gleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S_1 und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$
\mathbf{G}_{V2}	Matrix der Gleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S_2^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$

\mathbf{G}_W	Matrix der flussabhängigen Wirbelstromleitwerte
G	Gibbssche freie Energie
G_{0A}	erster Parameter des flussabhängigen Austauschleitwertes $G_A(\Phi(t))$
G_{0W}	erster Parameter des flussabhängigen Wirbelstromleitwertes $G_W(\Phi(t))$
G_{1A}	zweiter Parameter des flussabhängigen Austauschleitwertes $G_A(\Phi(t))$
G_{1W}	zweiter Parameter des flussabhängigen Wirbelstromleitwertes $G_W(\Phi(t))$
G_A	flussabhängiger Austauschleitwert
G_{Ai}^*	dem Austauschanteil der i -ten Flussröhre zugeordnete Komponente in $\mathbf{J}_{\Delta\theta}$
G_i	Gibbssche freie Energie für den Zustand i
G_L	freie Energie nach Landau; Luftspaltpermeanz
G_M	Moving-Permeanz
G_P	Gibbssche freie Energie einer Preisach-Einheit
$G_{s,p}$	einer primärseitigen Wicklung zuzuordnende Streuflusspermeanz
$G_{s,s}$	einer sekundärseitigen Wicklung zuzuordnende Streuflusspermeanz
G_W	flussabhängiger Wirbelstromleitwert
G_{Wges}	flussabhängiger Wirbelstromgesamtleitwert im Schalenmodell
h	geometrische Höhe
h_c	halber Abstand der Aufwärts- und der Abwärtsschwellwertvariable einer allgemeinen magnetischen Hystereseurve
h_{c0}	halber Abstand des Aufwärts- und des Abwärtsschwellwertes einer spezifischen magnetischen Hystereseurve
h_u	Mittelwert der Aufwärts- und der Abwärtsschwellwertvariable einer allgemeinen magnetischen Hystereseurve
h_{u0}	Mittelwert des Aufwärts- und des Abwärtsschwellwertes einer spezifischen magnetischen Hystereseurve
\mathbf{H}	magnetische Feldstärke
\mathbf{H}_{rH}	Playoperatorenvektor von \mathbf{H}
$\mathbf{H}_{r'H}$	Playoperatorenvektor von \mathbf{H}^{-1}
\mathbf{H}	Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
\mathbf{H}^{-1}	inverser Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
\mathbf{H}^*	der durch \mathbf{H} beschreibbare Anteil der gemessenen Übertragungscharakteristik
H	magnetische Feldstärke
\hat{H}	maximal auftretende Feldstärkeamplitude nach Aussteuerung aus dem entmagnetisierten Zustand
H_A	Anteil der magnetischen Feldstärke infolge von Austauscheffekten
H_B	Spannungsübertragungsfunktion des Messverstärkers zur Bestimmung des B -Feldes
H_c	magnetische Koerzitivfeldstärke
$H_{c,h}$	magnetische Koerzitivfeldstärke eines hartmagnetischen Materials
$H_{c,w}$	magnetische Koerzitivfeldstärke eines weichmagnetischen Materials
H_D	Spannungsübertragungsfunktion des Differentiators
H_g	Spannungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises
H_H	Anteil der magnetischen Feldstärke infolge von ratenunabhängiger Hysterese

H_H	Spannungsübertragungsfunktion des Messverstärkers zur Bestimmung des H -Feldes
H_{h_c}	gewöhnlicher Playoperator mit dem allgemeinen Schwellwert h_c
H_I	Spannungsübertragungsfunktion des Integrators
H_K	Spannungsübertragungsfunktion des Nullstellenkompensators
H_m	Spannungsübertragungsfunktion des Transformators
H_o	Spannungsübertragungsfunktion des offenen Regelkreises
H_{OV}	Spannungsübertragungsfunktion des Operationsverstärkers
H_P	Spannungsübertragungsfunktion des Proportional-Verstärkers
H_{r_H}	gewöhnlicher Playoperator mit dem allgemeinen Schwellwert r_H
$H_{r'_H}$	gewöhnlicher Playoperator mit dem allgemeinen transformierten Schwellwert r'_H
H_S	Spannungsübertragungsfunktion des Subtrahierers
H_T	Spannungsübertragungsfunktion des Spannungsteilers
H_V	Spannungsübertragungsfunktion des Leistungsverstärkers
H_W	Anteil der magnetischen Feldstärke infolge von klassischen Wirbelströmen
H_{Wand}	magnetische Feldstärke infolge von Wirbelströmen um eine bewegte 180° -Domenänenwand
i	Einsvektor
i	Zählvariable
I	Vektor der Primär- und Sekundärströme
\dot{I}	Vektor der zeitlichen Ableitungen der Primär- und Sekundärströme
I_p	Vektor der Primärströme
\dot{I}_p	Vektor der zeitlichen Ableitungen der Primärströme
I_s	Vektor der Sekundärströme
\dot{I}_s	Vektor der zeitlichen Ableitungen der Sekundärströme
I	elektrischer Strom
I_A	Wirbelstrom infolge von Austauschprozessen
I_p	durch eine primärseitige Wicklung fließender elektrischer Strom
I_s	durch eine sekundärseitige Wicklung fließender elektrischer Strom
I_W	klassischer Wirbelstrom
j	elektrische Stromdichte
j_i	Wirbelstromdichtebeitrag infolge eines i -ten Barkhausen-Sprunges
j_j	Wirbelstromdichtebeitrag infolge eines j -ten Barkhausen-Sprunges
j	imaginäre Einheit
j	Zählvariable; elektrische Stromdichte
$j_{\Delta\theta zs}$	Matrix-Element in der Zeile z und in der Spalte s von $J_{\Delta\theta}$
J_{r_A}	Matrix mit den partiellen Ableitungen der Wurzelfunktionen des Austauschanteils
$J_{\Delta\theta}$	Jacobi-Matrix
$J_{\Delta\theta zs}$	Untermatrix, die durch Streichen der Zeile z und der Spalte s von $J_{\Delta\theta}$ entsteht
J	magnetische Polarisierung; Komponente von F_V im Dissipationsmodell des generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese-modells
J_{max}	maximale magnetische Polarisierung

k	Anzahl der Segmente eines Magnetkreises; Moving-Parameter; Zählvariable
k_B	Boltzmann-Konstante
\mathbf{K}_I	Koeffizientenmatrix der Ströme im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
\mathbf{K}_{I_p}	Koeffizientenmatrix der Primärströme im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
\mathbf{K}_{I_s}	Koeffizientenmatrix der Sekundärströme im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
\mathbf{K}_U	Koeffizientenmatrix der Spannungen im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
\mathbf{K}_{U_p}	Koeffizientenmatrix der Primärspannungen im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
\mathbf{K}_{U_s}	Koeffizientenmatrix der Sekundärspannungen im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
$\mathbf{K}_{\dot{\phi}_h}$	Koeffizientenmatrix der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
$\mathbf{K}_{\dot{\phi}_{h,p}}$	Koeffizientenmatrix der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse für die primärseitige Kopplung im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
$\mathbf{K}_{\dot{\phi}_{h,s}}$	Koeffizientenmatrix der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse für die sekundärseitige Kopplung im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
K_{eb}	Koeffizient zur Gewichtung der ratenabhängigen Verluste infolge von klassischen Wirbelströmen auf der makroskopischen Ebene
K_{ep}	Koeffizient zur Gewichtung der ratenabhängigen Verluste infolge von lokalen Wirbelströmen auf Partikelebene
K_h	Koeffizient zur Gewichtung der ratenunabhängigen Hystereseverluste
K_{OV}	Verstärkungsfaktor des Operationsverstärkers
K_V	Verstärkungsfaktor des Leistungsverstärkers
l	Länge eines elektrischen Leiters; halbe Anzahl der Schwellwerte von S
l_1	halbe Anzahl der Schwellwerte von S_1
l_2	halbe Anzahl der Schwellwerte von S_2
l_e	effektive Länge des weichmagnetischen Pfades eines Magnetkreises
l_{ei}	effektive Länge des weichmagnetischen Pfades eines i-ten Magnetkreissegmentes
l_L	effektive Länge des Pfades magnetischer Feldlinien im Luftspalt eines Magnetkreises
l_W	Wirbelstromweglänge entlang der Wirbelstromschicht bei flächengleicher Schalenauflage
l_W^*	Wirbelstromweglänge entlang der Wirbelstromschicht bei äquidistanter Schalenauflage
\mathbf{m}	magnetisches Moment
m	magnetisches Moment; Anzahl der Schwellwerte von H; Parameter des Approximationspolynoms; Anzahl primärseitiger Wicklungen
m_r	remanentes magnetisches Moment

\mathbf{M}	Magnetisierung
\mathbf{M}_G	Vektor von Elementaroperatoren im Fehlermodell E_G
\mathbf{M}_{V1}	Vektor von Elementaroperatoren im Fehlermodell E_{V1}
M	Magnetisierung
M_S	Sättigungsmagnetisierung
n	schwellspezifische Relayoperatordichte; Ordnung des Schalenmodells; Parameter des Approximationspolynoms; Anzahl sekundärseitiger Wicklungen
n_O	Anzahl von magnetischen Objekten mit korrelierenden bewegten Domänenwänden
$n_{O,\text{eff}}$	effektive Anzahl von magnetischen Objekten mit korrelierenden bewegten Domänenwänden
$n_{O,\text{eff},0}$	materialspezifischer, phänomenologischer Parameter zur Charakterisierung des $n_{O,\text{eff}}(H_A)$ -Zusammenhangs
n_W	Anzahl bewegter Domänenwände
\mathbf{N}	Vektor der Primär- und Sekundärwindungszahlen
\mathbf{N}_p	Vektor der Primärwindungszahlen
\mathbf{N}_s	Vektor der Sekundärwindungszahlen
N	Anzahl an Barkhausen-Sprüngen; Windungszahl; Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells eines gegengekoppelten Operationsverstärkers; Anzahl an Relayoperatoren
N_B	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Messverstärker zur Bestimmung des B -Feldes
N_D	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Differentiator
N_H	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Messverstärker zur Bestimmung des H -Feldes
N_I	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Integrator
N_K	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Nullstellenkompensator
N_{m1}	erster Nennerterm der Spannungsübertragungsfunktion des Transformators
N_{m2}	zweiter Nennerterm der Spannungsübertragungsfunktion des Transformators
N_{m3}	dritter Nennerterm der Spannungsübertragungsfunktion des Transformators
N_p	Windungszahl einer primärseitigen Wicklung
N_P	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Proportional-Verstärker
N_s	Windungszahl einer sekundärseitigen Wicklung
N_S	Übertragungsglied im Rückkopplungszweig des regelungstechnischen Modells für den Subtrahierer
N_t	Anzahl der Monotonieintervalle eines zeitabhängigen Signalverlaufs
\mathbf{o}	Nullvektor
\mathbf{O}	Nullmatrix
\mathbf{p}_{AW^*}	Vektor der von $\sigma(B(t))$ unabhängigen Komponenten der volumenspezifischen Verlustleistungen infolge von ratenabhängigen Magnetisierungseffekten

\mathbf{p}_G	Vektor der auf das Volumen bezogenen Gesamtverlustleistungen
\mathbf{p}_H	Vektor der auf das Volumen bezogenen Verlustleistungen infolge von ratenunabhängiger Hysterese
p	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Barkhausen-Sprüngen; Gewichtsfunktion von P ; Parameter des Approximationspolynoms; Parameter der Transformationsabbildung für die Radien des äquidistanten und des flächengleichen Schalenmodells; allgemeine auf das Volumen bezogene Verlustleistung
p_A	Anteil der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von Austauscheffekten
p_{A^*}	von $\sigma(B(t))$ unabhängige Komponente der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von Austauscheffekten
p_{AW}	Anteil der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von ratenabhängigen Magnetisierungseffekten
p_{AW^*}	von $\sigma(B(t))$ unabhängige Komponente der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von ratenabhängigen Magnetisierungseffekten
p_B	Wahrscheinlichkeit für das Einnehmen eines bestimmten Zustandes nach Boltzmann
p_G	bei der Ummagnetisierung eines magnetischen Materials auftretende volumenspezifische Gesamtverlustleistung
p_H	Gewichtsfunktion von P in alternativer Darstellung mit Playoperatoren; Anteil der volumenspezifischen Verlustleistung infolge ratenunabhängiger Hysterese
$p_{H\Gamma}$	volumenspezifische Verlustleistung bezüglich Γ im Dissipationsmodell von Γ mit Moving-Erweiterung
$p_{H\Gamma^{-1}}$	volumenspezifische Verlustleistung bezüglich Γ^{-1} im Dissipationsmodell von Γ^{-1} mit Moving-Erweiterung
$p_{H\Gamma_M}$	volumenspezifische Verlustleistung bezüglich Γ_M im Dissipationsmodell von Γ mit Moving-Erweiterung
$p_{H\Gamma_M^{-1}}$	volumenspezifische Verlustleistung bezüglich Γ_M^{-1} im Dissipationsmodell von Γ^{-1} mit Moving-Erweiterung
p_W	Anteil der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von klassischen Wirbelströmen
p_{W^*}	von $\sigma(B(t))$ unabhängige Komponente der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von klassischen Wirbelströmen
p_{Wand}	auf eine Einheitslänge in z -Richtung bezogene Verlustleistung infolge von Wirbelströmen in der Umgebung einer bewegten 180° -Domänenwand
p_{ZW}	volumenspezifische Verlustleistung infolge von Wirbelströmen in der Umgebung von bewegten, parallelen 180° -Domänenwänden mit zufällig verteilten Abständen
P	Preisach-Hystereseoperator
P	allgemeine Verlustleistung
P_A	Anteil der Verlustleistung infolge von Austauscheffekten
P_G	bei der Ummagnetisierung eines magnetischen Materials auftretende Gesamtverlustleistung
P_H	Anteil der Verlustleistung infolge von ratenunabhängiger Hysterese

P_{off}	zeitlich unveränderlicher Offset von P bei alternativer Darstellung mit Playoperatoren
P_p	mittlere am Transformator primärseitig eingespeiste Leistung
P_W	Anteil der Verlustleistung infolge von klassischen Wirbelströmen
P_Ω	Summe aus Kupferverlustleistung und Verlustleistung am Lastwiderstand R_a
q	Parameter des Approximationspolynoms; Parameter der Transformationsabbildung für die Radien des äquidistanten und des flächengleichen Schalenmodells
Q	Wärme; Anzahl der Temperaturstufen; Komponente von F_V im Dissipationsmodell des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells
\mathbf{r}	allgemeine Ortskoordinate
\mathbf{r}_H	Schwellwertvektor von H
\mathbf{r}'_H	Schwellwertvektor von H^{-1}
\mathbf{r}_i	allgemeine Ortskoordinate eines i -ten Wirbelstromdichtebeitrages
r	allgemeine Ortskoordinate; Kreisradius; Schalenaußenradius bei flächengleicher Schalenaufteilung
r^*	Schalenaußenradius bei äquidistanter Schalenaufteilung
r_a	Außenradius
r_H	allgemeiner Schwellwert des gewöhnlichen Playoperators
r'_H	allgemeiner transformierter Schwellwert des gewöhnlichen Playoperators
r_{Hi}	i -ter Schwellwert von H
r'_{Hi}	i -ter Schwellwert von H^{-1}
r_i	Innenradius
r_W	innerer Begrenzungsradius einer vom Wirbelstrom durchsetzten Teilfläche bei flächengleicher Schalenaufteilung
r_W^*	innerer Begrenzungsradius einer vom Wirbelstrom durchsetzten Teilfläche bei äquidistanter Schalenaufteilung
\mathbf{R}_a	Außenwiderstandsmatrix im Differentialgleichungssystem des Modells einer induktiven Komponente
R	elektrischer Widerstand; Außenradius eines geraden Kreiszyinders
R_a	elektrischer Außen- oder Lastwiderstand
R_{B1}	elektrischer Widerstand des Messverstärkers zur Bestimmung des B -Feldes
R_{B2}	elektrischer Widerstand des Messverstärkers zur Bestimmung des B -Feldes
R_{Cu}	elektrischer Widerstand einer Wicklung
$R_{Cu,p}$	elektrischer Widerstand einer primärseitigen Wicklung
$R_{Cu,s}$	elektrischer Widerstand einer sekundärseitigen Wicklung
R_{D1}	elektrischer Widerstand des Differentiators
R_{D2}	elektrischer Widerstand des Differentiators
R_{H1}	elektrischer Widerstand des Messverstärkers zur Bestimmung des H -Feldes
R_{H2}	elektrischer Widerstand des Messverstärkers zur Bestimmung des H -Feldes
$R_{h_c h_u}$	Relayoperator, dessen allgemeine charakteristische Parameter die Bezeichnungen h_c und h_u tragen
R_{I1}	elektrischer Widerstand des Integrators
R_{I2}	elektrischer Widerstand des Integrators
R_{K1}	elektrischer Widerstand des Nullstellenkompensators

R_{K2}	elektrischer Widerstand des Nullstellenkompensators
R_L	Luftspaltreluktanz
R_m	Reluktanz
R_M	Messwiderstand zur Bestimmung des Primärstromes
R_{P1}	elektrischer Widerstand des Proportional-Verstärkers
R_{P2}	elektrischer Widerstand des Proportional-Verstärkers
R_s	Streuflussreluktanz
R_{S1}	elektrischer Widerstand des Subtrahierers
R_{S2}	elektrischer Widerstand des Subtrahierers
R_{T1}	elektrischer Widerstand des Spannungsteilers
R_{T2}	elektrischer Widerstand des Spannungsteilers
R_v	elektrischer Vorwiderstand
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen ohne die Null
s	Integrationsvariable eines Integrals über eine Kurve S
s_H	Schwellwertvektor von S
s'_H	Schwellwertvektor von S^{-1}
s_{H1}	Schwellwertvektor von S_1
s'_{H1}	Schwellwertvektor von S_1^{-1}
s_{H2}	Schwellwertvektor von S_2
s'_{H2}	Schwellwertvektor von S_2^{-1}
s	komplexer Frequenzparameter; Spaltenindex
s_H	allgemeiner Schwellwert der einseitigen Totzonefunktion
s'_H	allgemeiner transformierter Schwellwert der einseitigen Totzonefunktion
$s_{H1,i}$	i -ter Schwellwert von S_1
$s'_{H1,i}$	i -ter Schwellwert von S_1^{-1}
$s_{H2,i}$	i -ter Schwellwert von S_2
$s'_{H2,i}$	i -ter Schwellwert von S_2^{-1}
s_{Hi}	i -ter Schwellwert von S
s'_{Hi}	i -ter Schwellwert von S^{-1}
\mathbf{S}_{s_H}	Totzoneoperatorenvektor von S
$\mathbf{S}_{s'_H}$	Totzoneoperatorenvektor von S^{-1}
$\mathbf{S}_{s_{H1}}$	Totzoneoperatorenvektor von S_1
$\mathbf{S}_{s'_{H1}}$	Totzoneoperatorenvektor von S_1^{-1}
$\mathbf{S}_{s_{H2}}$	Totzoneoperatorenvektor von S_2
$\mathbf{S}_{s'_{H2}}$	Totzoneoperatorenvektor von S_2^{-1}
S	Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator
S^{-1}	inverser Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator
S^*	der durch S beschreibbare Anteil der gemessenen Übertragungscharakteristik
S	Entropie; eine geschlossene Kurve; einseitige Totzonefunktion
S_1	vorgeschalteter Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator im Modell $\Gamma_{H_S H_S}$
S_1^{-1}	Inverse zum vorgeschalteten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator im Modell $\Gamma_{H_S H_S}$

S_1^*	der durch S_1 beschreibbare Anteil der gemessenen Übertragungscharakteristik
S_2	nachgeschalteter Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator im Modell $\Gamma_{H_S H_S}$
S_2^{-1}	Inverse zum nachgeschalteten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator im Modell $\Gamma_{H_S H_S}$
S_2^*	der durch S_2 beschreibbare Anteil der gemessenen Übertragungscharakteristik
S_{s_H}	einseitiger Totzoneoperator mit dem allgemeinen Schwellwert s_H
$S_{s'_H}$	einseitiger Totzoneoperator mit dem allgemeinen transformierten Schwellwert s'_H
S_V	volumenspezifische Entropie
t	kontinuierliche Zeitvariable
t_0	Anfangszeitpunkt
t_E	Endzeitpunkt
t_i	kontinuierliche Zeitvariable eines i -ten Wirbelstromdichtebeitrages; Zeitpunkt i
T	absolute Temperatur
T_{OV}	Zeitkonstante des Operationsverstärkers
T_P	Periodendauer
T_V	Zeitkonstante des Leistungsverstärkers
\mathbf{u}_G	Vektor der Ungleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$
\mathbf{u}_H	Vektor der Ungleichungsnebenbedingungen des Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells
\mathbf{u}_S	Vektor der Ungleichungsnebenbedingungen des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodells
\mathbf{u}_{V1}	Vektor der Ungleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S_1 und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$
u	Eingangsfunktion von Γ im zugehörigen Dissipationsmodell bei Verwendung der Moving-Erweiterung
\mathbf{U}	Vektor der Primär- und Sekundärspannungen
\mathbf{U}_G	Matrix der Ungleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$
\mathbf{U}_H	Matrix der Ungleichungsnebenbedingungen des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators
\mathbf{U}'_H	Matrix der Ungleichungsnebenbedingungen des inversen Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators
\mathbf{U}_p	Vektor der Primärspannungen
\mathbf{U}_s	Vektor der Sekundärspannungen
\mathbf{U}_S	Matrix der Ungleichungsnebenbedingungen des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodells
\mathbf{U}_{V1}	Matrix der Ungleichungsnebenbedingungen zur Identifikation von S_1 und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{H_S H_S}$
U	innere Energie; elektrische Spannung
U_A	Ausgangsspannung
U_B	Ausgangsspannung des Messverstärkers zur Bestimmung des B -Feldes
U_E	Eingangsspannung

U_H	Ausgangsspannung des Messverstärkers zur Bestimmung des H -Feldes
U_M	Messspannung zur Bestimmung des Primärstromes
U_p	an einer primärseitigen Wicklung anliegende elektrische Spannung
U_s	an einer sekundärseitigen Wicklung anliegende elektrische Spannung
\mathbf{v}_H	Gewichtvektor von S
\mathbf{v}'_H	Gewichtvektor von S^{-1}
\mathbf{v}_{H1}	Gewichtvektor von S_1
\mathbf{v}'_{H1}	Gewichtvektor von S_1^{-1}
\mathbf{v}_{H2}	Gewichtvektor von S_2
\mathbf{v}'_{H2}	Gewichtvektor von S_2^{-1}
\mathbf{v}'_{H20}	initialer Gewichtvektor von S_2^{-1}
v	Ausgangsfunktion von S im Dissipationsmodell von Γ_{HS_H}
v_H	Gewichtsfunktion von S
v'_H	Gewichtsfunktion von S^{-1}
v_{H0}	Gewicht zur Gewichtung des Eingangssignals von S
v'_{H0}	Gewicht zur Gewichtung des Eingangssignals von S^{-1}
$v_{H1,i}$	i -tes Gewicht von S_1
$v'_{H1,i}$	i -tes Gewicht von S_1^{-1}
$v_{H2,i}$	i -tes Gewicht von S_2
$v'_{H2,i}$	i -tes Gewicht von S_2^{-1}
v_{Hi}	i -tes Gewicht von S
v'_{Hi}	i -tes Gewicht von S^{-1}
V	Volumen
V_{AW}	Gütefunktion des quadratischen Optimierungsproblems zur Identifikation der Modellparameter für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten
V_G	Gütefunktion des quadratischen Optimierungsproblems zur Bestimmung der Gewichte von S und H^{-1} im Fehlermodell für Γ_{HS_H}
$V_{O,eff,0}$	materialspezifischer, phänomenologischer Parameter zur Charakterisierung des $n_{O,eff}(H_A)$ -Zusammenhangs
V_{V1}	Gütefunktion des quadratischen Optimierungsproblems zur Bestimmung der Gewichte von S_1 und H^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{HS_H S}$
V_{V2}	Gütefunktion des quadratischen Optimierungsproblems zur Bestimmung der Gewichte von S_2^{-1} im Fehlermodell für $\Gamma_{HS_H S}$
$V_{VT^{-1}}$	Gütefunktion zur Identifikation von $\Gamma_{HS_H S}^{-1}$
\mathbf{w}_G	Vektor von Gewichten im Fehlermodell E_G
\mathbf{w}_H	Gewichtvektor von H
\mathbf{w}'_H	Gewichtvektor von H^{-1}
\mathbf{w}_{V1}	Vektor von Gewichten im Fehlermodell E_{V1}
w	Anzahl der Wicklungen
w_H	Gewichtsfunktion von H
w'_H	Gewichtsfunktion von H^{-1}
w_{H0}	Gewicht zur Berücksichtigung reversibler Anteile im Übertragungsverhalten von H

w'_{H0}	Gewicht zur Berücksichtigung reversibler Anteile im Übertragungsverhalten von H^{-1}
w_{Hi}	i-tes Gewicht von H
w'_{Hi}	i-tes Gewicht von H^{-1}
w_i	Dämpfungsfaktor des gedämpften Newton-Verfahrens im i-ten Iterationsschritt
w_{\min}	minimal zulässiger Dämpfungsfaktor des gedämpften Newton-Verfahrens
W	Arbeit
x	erste kartesische Koordinate; allgemeine Eingangsfunktion
x_{\max}	innerhalb eines Zeitintervalls auftretender Maximalwert des Eingangssignals x
x_{\min}	innerhalb eines Zeitintervalls auftretender Minimalwert des Eingangssignals x
x_{mod}	modifiziertes Eingangssignal
y	zweite kartesische Koordinate; allgemeine Ausgangsfunktion
y_{\max}	innerhalb eines Zeitintervalls auftretender Maximalwert des Ausgangssignals y
y_{\min}	innerhalb eines Zeitintervalls auftretender Minimalwert des Ausgangssignals y
z_{H0}	Vektor der Anfangszustände von H
z'_{H0}	Vektor der Anfangszustände von H^{-1}
z	dritte kartesische Koordinate; Zeilenindex
z_H	Trennungslinie der Preisach-Ebene; Zustand des Hystereseoperators mit Preisachgedächtnis
z'_H	Zustand des inversen Hystereseoperators mit Preisachgedächtnis
z_{H0}	Trennungslinie der Preisach-Ebene für t_0 ; Anfangszustand des Hystereseoperators mit Preisachgedächtnis
z'_{H0}	Anfangszustand des inversen Hystereseoperators mit Preisachgedächtnis
z_R	Zustand des Relayoperators
z_{R0}	Anfangszustand des Relayoperators
Z	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell eines gegengekoppelten Operationsverstärkers
Z_B	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Messverstärkers zur Bestimmung des B -Feldes
Z_D	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Differentiators
Z_H	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Messverstärkers zur Bestimmung des H -Feldes
Z_I	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Integrators
Z_K	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Nullstellenkompensators
Z_m	Zählerterm der Spannungsübertragungsfunktion des Transformators
Z_P	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Proportional-Verstärkers
Z_S	Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung im regelungstechnischen Modell des Subtrahierers

Griechische Formelzeichen

Symbol	Beschreibung
α	Aufwärtsschaltsschwellwert des Relayoperators
β	Abwärtsschaltsschwellwert des Relayoperators
γ	Parameter als Maß für die Streuung der Domänenwandgeschwindigkeiten
Γ_A	Vektor der Wurzelfunktionen des Austauschanteils
Γ_{AW}	Vektor der Funktionen für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten
Γ_H^{-1}	Vektor der inversen allgemeinen ratenunabhängigen Hystereseoperatoren, bestehend aus verketteten Teilmodellen des Prandtl-Ishlinskii-Typs
Γ	allgemeiner Hystereseoperator
Γ^{-1}	Inverse eines allgemeinen Hystereseoperators
Γ_{AW}	Funktion für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten
Γ_H	allgemeiner ratenunabhängiger Hystereseoperator, bestehend aus verketteten Teilmodellen des Prandtl-Ishlinskii-Typs
Γ_H^{-1}	Inverse eines allgemeinen ratenunabhängigen Hystereseoperators, bestehend aus verketteten Teilmodellen des Prandtl-Ishlinskii-Typs
Γ_{HM}	ratenunabhängiger Hystereseoperator, bestehend aus verketteten Teilmodellen des Prandtl-Ishlinskii-Typs mit Moving-Erweiterung
Γ_{HM}^{-1}	Inverse eines ratenunabhängigen Hystereseoperators, bestehend aus verketteten Teilmodellen des Prandtl-Ishlinskii-Typs mit Moving-Erweiterung
Γ_{HSH}	Generalisierter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
Γ_{HSH}^{-1}	inverser Generalisierter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
Γ_{HSH}^*	der durch Γ_{HSH} beschreibbare Anteil der gemessenen Übertragungscharakteristik
Γ_{HSHS}	Verallgemeinerter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
Γ_{HSHS}^{-1}	inverser Verallgemeinerter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
Γ_{HSHS}^*	der durch Γ_{HSHS} beschreibbare Anteil der gemessenen Übertragungscharakteristik
Γ_M	allgemeiner Hystereseoperator mit Moving-Erweiterung
Γ_M^{-1}	Inverse eines allgemeinen Hystereseoperators mit Moving-Erweiterung
δ	Eindringtiefe
$\overline{\Delta\dot{\Phi}}$	Vektor der Newton-Korrekturen bezüglich $\dot{\Phi}$
$\underline{\Delta\dot{\Phi}}$	Vektor der vereinfachten Newton-Korrekturen bezüglich $\dot{\Phi}$
Δy	Störungen und Effekte in der gemessenen Übertragungscharakteristik, die durch das Hysteresemodell nicht berücksichtigt werden
$\Delta\theta_\varepsilon$	Genauigkeitsschranke für die Newton-Iteration
$\Delta\phi$	Änderung des magnetischen Flusses infolge eines Barkhausen-Sprunges
$\Delta\Phi$	Differenz zwischen dem Sollwert und dem tatsächlichen Wert des magnetischen Flusses
$\overline{\Delta\dot{\Phi}}$	Newton-Korrektur bezüglich $\dot{\Phi}$
$\underline{\Delta\dot{\Phi}}$	vereinfachte Newton-Korrektur bezüglich $\dot{\Phi}$
ε	untere positive Schranke

ϑ	Celsius-Temperatur
Θ	Vektor der magnetischen Durchflutungen
Θ_A	Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge von Austauscheffekten
Θ_{AW}	Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge von ratenabhängigen Magnetisierungseffekten
Θ_H	Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge von ratenunabhängiger Hysterese
Θ_L	Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge eines Luftspaltes im Magnetkreis
Θ_M	Vektor der magnetischen Durchflutungen zur Kompensation einer Moving-Scherung
Θ_W	Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge von klassischen Wirbelströmen
Θ	magnetische Durchflutung
Θ_A	Anteil der magnetischen Durchflutung infolge von Austauscheffekten
Θ_{Aapp}	approximierter Anteil der magnetischen Durchflutung infolge von Austauscheffekten
Θ_{AW}	Anteil der magnetischen Durchflutung infolge von ratenabhängigen Magnetisierungseffekten
Θ_H	Anteil der magnetischen Durchflutung infolge von ratenunabhängiger Hysterese
Θ_L	Anteil der magnetischen Durchflutung infolge eines Luftspaltes im Magnetkreis
Θ_M	Anteil der magnetischen Durchflutung zur Kompensation einer Moving-Scherung
Θ_W	Anteil der magnetischen Durchflutung infolge von klassischen Wirbelströmen
λ	Parameter zur Gewichtung des Einflusses von Austauscheffekten
\mathbf{A}_H	Transformationsabbildung für die Gewichte des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese-modells
\mathbf{A}_S	Transformationsabbildung für die Gewichte des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodells
μ_r	relative Permeabilität
μ_0	magnetische Feldkonstante
μ_a	Amplitudenpermeabilität
μ_d	differentielle Permeabilität
μ_i	Anfangspermeabilität
μ_{max}	maximale Permeabilität
μ_r	relative Permeabilität
μ_{rem}	remanente Permeabilität
μ_{rev}	reversible Permeabilität
μ_{ri}	relative Permeabilität eines i-ten Magnetkreissegmentes
ξ	Integrationsvariable
Ξ_H	Transformationsabbildung für die Schwellwerte des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese-modells
Ξ_S	Transformationsabbildung für die Schwellwerte des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodells
π	Kreiszahl

Π_H	Transformationsabbildung für die Anfangszustände des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells
ρ	Dichte
σ	elektrische Leitfähigkeit
σ_0	erster Parameter der flussdichteabhängigen elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(B(t))$
σ_1	zweiter Parameter der flussdichteabhängigen elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(B(t))$
φ	Phasenwinkel
φ_g	Phasenwinkel des geschlossenen Regelkreises
φ_o	Phasenwinkel des offenen Regelkreises
φ_r	Phasenreserve
Φ	Vektor der magnetischen Flüsse
$\dot{\Phi}$	Vektor der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Flüsse
$\dot{\Phi}^*$	gesuchte Nullstelle von $f_{\Delta\theta}$
$\dot{\Phi}_h$	Vektor der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse
Φ	magnetischer Fluss
$\dot{\Phi}^*$	gesuchte Nullstelle von $f_{\Delta\theta}$
Φ_h	gemeinsamer magnetischer Hauptfluss
Φ_s	magnetischer Streufluss
$\Phi_{s,p}$	einer primärseitigen Wicklung zuzuordnender magnetischer Streufluss
$\Phi_{s,s}$	einer sekundärseitigen Wicklung zuzuordnender magnetischer Streufluss
Φ_{soll}	Sollwert für den magnetischen Fluss
$\dot{\Phi}_\epsilon$	Variable für die Intervallgrenzen der Funktionsapproximation
χ	allgemeiner Funktionswertvektor im Interpolationsmodell zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit
χ	allgemeiner Funktionswert im Interpolationsmodell zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit
ω	Kreisfrequenz
ω_{OV}	Grenzkreisfrequenz des Operationsverstärkers
ω_V	Grenzkreisfrequenz des Leistungsverstärkers
Ω	Transformationsabbildung für die Radien des äquidistanten und des flächengleichen Schalenmodells

1 Einleitung

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in das Thema „Synthese ferromagnetischer Kernmodelle auf Systemebene für induktive Komponenten in der Leistungselektronik“. Zunächst wird die zugrunde liegende Problemstellung in den Kontext eingeordnet und die Motivation für deren Bearbeitung herausgestellt. Im weiteren Verlauf folgt eine Zusammenfassung der verschiedenen Lösungsansätze von den ersten Modellen bis zum aktuellen Stand der Technik, wobei auch Defizite der bestehenden Methoden aufgezeigt sind. Darauf aufbauend werden abschließend die Ziele und die Gliederung der vorliegenden Arbeit erläutert.

1.1 Einführung und Motivation

Der Wunsch nach zunehmender Elektrifizierung technischer Systeme zur Verbesserung von Funktionalität, Komfort, Mobilität und Umweltverträglichkeit ist in sämtlichen Bereichen des privaten, öffentlichen und gewerblichen Umfeldes fortwährend präsent. Gleichzeitig steigen die Ansprüche bezüglich Zuverlässigkeit, Miniaturisierung und Kosten- sowie Energieeffizienz. Dabei sollen sich die Entwicklungszeiten der Produkte trotz ihrer stetig wachsenden Komplexität nicht verlängern. Folglich ergeben sich hohe Anforderungen an die Leistungselektronik und die dafür verwendeten Entwurfswerkzeuge.

Der Schlüssel zu einer gesamtheitlich optimierten Auslegung einer leistungselektronischen Schaltung liegt zum einen in der Verwendung präziser, numerisch effizienter und robuster Modelle zur Beschreibung der einzelnen Teilkomponenten und ihres Zusammenwirkens und zum anderen in der Nutzung von Methoden, die eine möglichst zielgerichtete Suche nach einem Optimum erlauben. Mit dem Einzug leistungsstarker Computertechnik hat sich der Produktentwicklungsprozess grundlegend verändert. Wo früher elektronische Komponenten hauptsächlich mit Erfahrungswerten in einer überschaubaren Anzahl von Iterationszyklen ausgelegt wurden, kommen heute Mehrzieloptimierungswerkzeuge zum Einsatz, die mit intelligenten Suchalgorithmen viele Tausend Designs innerhalb der gleichen Zeitspanne berechnen können. Das Ergebnis sind Pareto-Fronten, die die besten Kompromisse hinsichtlich der jeweils gewählten Zielgrößen beschreiben. Im Idealfall kann in der Folge auf dieser Basis eine gesamtheitlich optimierte Auslegung identifiziert werden.

Insbesondere induktive Komponenten beeinflussen in der Regel maßgeblich die auslegungsrelevanten Zielgrößen nahezu jeder leistungselektronischen Schaltung und müssen deshalb treffsicher dimensioniert werden können. Sie kommen in diesem Zusammenhang als Spulen für die Zwischenspeicherung und als Transformatoren für die Übertragung von Energie zur Anwendung. Ihre Herstellung ist im Allgemeinen vergleichsweise aufwendig und das

Volumen groß. Daneben besteht die Schwierigkeit einer geeigneten thermischen Kopplung, die in manchen Fällen einer komplizierten und kostspieligen Konstruktion bedarf.

Die vollständige Verhaltensbeschreibung einer induktiven Komponente für allgemeine Signalformen über einen großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich erfordert die Berücksichtigung zahlreicher physikalischer Effekte sowohl in der elektrischen als auch in der magnetischen Domäne. So muss für gewöhnlich bei der Modellierung einer Wicklung die frequenzabhängige Stromverdrängung im elektrischen Leiter infolge des Skin- und Proximity-Effektes ebenso berücksichtigt werden wie Koppelkapazitäten zwischen den einzelnen Windungen und Streufluss. Für diese Aufgabe stehen zum einen für zahlreiche Anwendungsfälle schnelle analytische Lösungen zur Verfügung und zum anderen kann die ortsauflösende, aber zeitintensivere Finite-Elemente-Methode herangezogen werden. Die Prozesse im Kernmaterial und damit in der magnetischen Domäne können ebenfalls mit Verdrängungseffekten in Verbindung stehen. Sie sind aber vor allem durch eine Überlagerung von nichtlinearem Verhalten infolge von Sättigungseffekten und nichtlinearem gedächtnisbehafteten Verhalten aufgrund von Hystereseeffekten gekennzeichnet. Die den Hystereseeffekten zugrunde liegenden physikalischen Wirkzusammenhänge weisen eine komplexe Natur auf und lassen sich bisher weder mit analytischen Beziehungen noch mit der Finite-Elemente-Methode in praktikabler Rechenzeit handhaben. Die heutigen Anforderungen an die Leistungselektronik machen jedoch eine Berücksichtigung dieser Phänomene notwendig, weil ihre Auswirkungen wegen der immer stärkeren Beanspruchung der verwendeten magnetischen Materialien infolge hoher Taktraten und Feldamplituden bis zur Sättigungsgrenze nicht mehr vernachlässigbar sind. Dies erfordert ein geeignetes Modell, das einen akzeptablen Kompromiss zwischen aufzuwendender Rechenzeit und erzielbarer Genauigkeit bietet. Die zugehörige Modellstruktur sollte eine praxistaugliche Modellparameteridentifikation erlauben. Das setzt ein effizientes Identifikationsverfahren voraus, welches robust gegenüber Fehlern in den Messdaten ist.

1.2 Stand der Technik

Die Literatur beschreibt zahlreiche Methoden zur Magnetkernmodellierung für induktive Komponenten der Leistungselektronik, die sich grob in vier Kategorien unterscheiden lassen, aber auch in Kombination verwendet werden:

- Kernverlustmodelle auf empirischer Basis nach Steinmetz
- Kernverlustmodelle auf der Basis physikalisch motivierter Verlustseparation
- Nichtlinearitätsmodelle ohne Gedächtnis
- Hysteresemodelle mit lokalem oder komplexem Gedächtnis

Die empirischen Modelle der ersten Kategorie erlauben die Abschätzung der entstehenden Magnetkernverluste einer induktiven Komponente für spezielle periodische und von vornherein bekannte Signalverläufe. Die Steinmetzgleichung in ihrer ursprünglichen Form

[Ste92] geht zurück auf das Jahr 1892. Sie unterliegt zudem der zusätzlichen Einschränkung auf harmonische Feldverläufe. Dies gilt auch für die 1993 veröffentlichte Modifikation [Mul93], die den originalen Zusammenhang um eine Temperaturabhängigkeit erweitert.

Aufgrund des zunehmenden Einsatzes von getakteten leistungselektronischen Schaltungen hat es seit dem Beginn des 21. Jahrhunderts zahlreiche Bemühungen gegeben, die Anwendung der Steinmetzgleichung auch auf nicht harmonische Signalformen zu ermöglichen. Die bekanntesten dieser Erweiterungen werden in [RBD01, LAS01, VSAT02, VVG04, LZF⁺04, She06, Che09] beschrieben. Darüber hinaus haben sich im selben Zeitraum Modellmodifikationen hervorgetan, die die Relaxationsvorgänge im Kernmaterial berücksichtigen [MBKE12] oder die Verlustberechnung über einen größeren Frequenzbereich ermöglichen [VVV05].

Eine besondere Modifikation der Steinmetzgleichung und damit einen ersten Beitrag zum Prinzip der Verlustseparation hat H. Jordan [Jor24] zu Beginn des 20. Jahrhunderts vorgestellt. Dabei wird eine Aufteilung der Gesamtverluste in einen frequenzproportionalen Hystereseeanteil und einen quadratisch mit der Frequenz ansteigenden Wirbelstromanteil vorgenommen. Dieser Ansatz geht jedoch nicht aus physikalischen Theorien hervor und kann aufgrund seiner Unvollständigkeit zu sehr schlechten Ergebnissen führen [RBD01].

Die Steinmetzgleichung und insbesondere ihre zahlreichen Modifikationen werden trotz der genannten Einschränkungen sehr häufig für die Komponentenauslegung und in der Optimierung von Schaltungstopologien eingesetzt. Wesentliche Gründe dafür liegen zum einen in der sehr einfachen Anwendung und zum anderen in dem Vorteil, dass die Materialhersteller die zugehörigen empirischen Modellparameter für einfache Signalformen und ausgewählte Betriebspunkte zur Verfügung stellen können. Die Grenzen der Anwendbarkeit sind spätestens dann erreicht, wenn die entstehenden Signalformen aus einer komplexen Systemdynamik resultieren oder aus Steuerungsverfahren hervorgehen, die mit der Systemdynamik verkoppelt sind. Ein Beispiel dafür sind Schaltstrategien, die Ereignisse in der Leistungselektronik als Schaltinformationen verwenden. Das können etwa Spannungs- und Stromnulldurchgänge sein.

Die zweite Kategorie umfasst physikalisch motivierte Ansätze zur Verlustseparation, die sich vor allem dadurch auszeichnen, dass sie die Domänenstruktur des magnetischen Materials und die damit verbundenen Domänenprozesse berücksichtigen. Die Anfänge dieses Modelltyps gehen mit der Arbeit von H. J. Williams, W. Shockley und C. Kittel [WSK50] auf die Mitte des 20. Jahrhunderts zurück. Darin wird erstmalig der physikalische Zusammenhang zwischen den magnetischen Domänen und den sogenannten Austauschverlusten aufgezeigt. Letztere sind in der Literatur heute auch als Anomalieverluste, Zusatzverluste, Exzessverluste oder Überschussverluste bekannt. Die Autoren R. H. Pry und C. P. Bean [PB58] haben diese Theorie acht Jahre später in einem praktisch nutzbaren Ausdruck zur Verlustberechnung abgebildet und den Einfluss des Verhältnisses zwischen Domänengröße und Materialschichtdicke auf die Austauschverluste verdeutlicht. Die durch Jordan vorgenommene strukturelle Aufteilung der Gesamtverluste bleibt bestehen, wobei der Wirbelstromanteil zur Berücksichtigung der Austauschverluste um einen zusätzlichen Faktor ergänzt wird. Eine wesentliche Schwäche dieses Modells besteht in der idealisierten Annahme

einer perfekt homogenen Beschaffenheit der Domänen und eines deterministischen Verhaltens der Domänenwandbewegungen. Die daraus resultierenden Abweichungen zur Realität geben den Anlass für die im Jahr 1976 vorgeschlagene Weiterentwicklung des bestehenden Modells zur Berücksichtigung unregelmäßiger Domänenwandanordnungen durch die Annahme einer Poisson-Verteilung der Domänenwandbreiten [Bis76]. In der Folge gewinnen statistische Lösungsansätze zur Interpretation und Beschreibung der Magnetisierungsvorgänge während der 80er und 90er Jahre zunehmend an Bedeutung. Das führt nach G. Bertotti [Ber83, Ber84] zu einem neuartigen Ansatz der Verlustseparation, der die bestehende Aufteilung der Verluste um einen dritten expliziten Verlustterm für die Berücksichtigung der Austauschverluste ergänzt. Die Erkenntnis, dass die substanzielle Unordnung in der magnetischen Domänenstruktur wesentlich vereinfachende Annahmen ermöglicht, ist eine wichtige Voraussetzung für die anschließende Ableitung einer konkreten Berechnungsvorschrift für die Austauschverluste [Ber85, Ber88]. In der weiteren Entwicklung entsteht daraus der Gedanke, dass die einzelnen Verlustmechanismen während eines Magnetisierungsvorganges auf unterschiedlichen Zeit- und Längenskalen wirken, sich deshalb gegenseitig nicht beeinflussen und folglich als voneinander entkoppelt betrachtet werden können. Diese Feststellung führt schließlich zu einer signalformunabhängigen Zeitbereichsformulierung für die Berechnung der Gesamtverluste aus der additiven Überlagerung der Einzelverlustanteile [FN90, Ber98]. Die Berücksichtigung des ratenunabhängigen Verlustanteils erfolgt dabei stellvertretend mit einem allgemeinen zeitabhängigen Verlustterm. Dieser lässt sich durch die Integration eines geeigneten Hysterese Modells zur Beschreibung des ratenunabhängigen Verzweigungsverhaltens zwischen der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte spezifizieren.

Die dritte Kategorie umfasst Modelle zur Nachbildung der nichtlinearen Sättigungseffekte in den magnetischen Materialien der induktiven Komponenten. Hysterese wird dabei vernachlässigt. Dieses stark vereinfachte Verhalten lässt sich mit eindeutigen Kennlinien beschreiben. Daher kommen für diese Aufgabe analytische Funktionen wie Polynome, Hyperbeln, trigonometrische Funktionen und Potenzreihen zur Anwendung. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Approximation durch additiv überlagerte stückweise lineare Funktionen [Kle94]. Von besonderer Bedeutung ist hier der analytisch invertierbare und dabei strukturinvariante Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator, der durch die gewichtete Überlagerung des Identitätsoperators mit einseitigen Totzoneoperatoren entsteht [Kuh01, Kuh03]. Die Berechnung der hysteresebelasteten Kernverluste ist mit dieser Art von Ansätzen nicht möglich.

Die Modelle der vierten Kategorie verfolgen den Zweck, die magnetische Hysterese der Kernmaterialien nachzubilden. Das ermöglicht sowohl Aussagen über das Klemmen- als auch über das Verlustverhalten eines elektromagnetischen Übertragungsgliedes. Im Bereich der Leistungselektronik werden dafür vor allem skalare Hysterese Modelle verwendet, weil in der Regel auf eine Richtungseigenschaft des Magnetfeldes verzichtet werden kann. Im Laufe der Zeit sind zahlreiche Ansätze zur Lösung dieses Problems entstanden, deren wichtigste Vertreter bis Mitte der 1990er Jahre in der Dissertation von T. Kleineberg [Kle94] zusammengefasst sind. Als Resultat seines Modellvergleiches favorisiert Kleineberg Verfahren, die auf dem physikalischen Jiles-Atherton- [JA86, JTD92, Jil92] und dem empirischen

Coleman-Hodgdon-Modell [CH87, Hod88a, Hod88b] basieren. Das zuletzt Genannte wird auch in der Dissertation von A. Stadler [Sta09] zur transienten Beschreibung induktiver Bauelemente verwendet. Beide Modelle gehören in ihrer ursprünglichen Form zur Klasse der Duhemoperatoren [Duh97, Vis94]. Sie bilden das hysterese-typische Verzweigungsverhalten mit den Richtungsfeldern einer Differentialgleichung nach, welche in Abhängigkeit der Anfangswerte und des Vorzeichens der zeitlichen Änderung des Eingangssignals den Verlauf der Lösungstrajektorie bestimmen. Diese Klasse von Hystereseoperatoren besitzt den Nachteil eines lokalen Gedächtnisses zur makroskopischen Nachbildung der Phänomenologie von Domänenwandbewegungen auf der mikroskopischen Längenskala, was zu einer inkonsistenten Vorhersage von Unterschleifen führt. Zur Korrektur dieses unphysikalischen Verhaltens werden beide Ansätze mit einem Stackautomaten versehen, der den Modellen ein komplexes Gedächtnis verleiht. Die Berücksichtigung der ratenabhängigen Effekte erfolgt rein phänomenologisch ohne Bezug zum Verlustseparationstheorem und führt letztendlich zu Modellformulierungen, die hinsichtlich der Modellparametrierung, der Numerik und der Modellintegration unhandlich und physikalisch schwer zu interpretieren sind.

Arbeiten zu diesem Thema seit Mitte der 1990er bis heute basieren im Wesentlichen auf dem klassischen Preisach-Modell und seinen zahlreichen erweiterten Varianten [Pre35, May91, Vis94, Del99, BCC00, BMB02]. Dieser Modelltyp nutzt das Prinzip der gewichteten additiven Überlagerung von einfachen hysteresebehafteten Schwellwertschaltern zur Nachbildung des realen Hystereseverhaltens. Im Unterschied zu dem Duhemoperator ist das Preisach-Modell durch sein komplexes Gedächtnis in der Lage, die Phänomenologie von Domänenwandbewegungen auf der mikroskopischen Längenskala korrekt wiederzugeben und damit konsistente Unterschleifen zu erzeugen. Es trägt aber gleichzeitig auch zu einem deutlichen Anstieg der Modellkomplexität bei, was die praktische Anwendbarkeit reduziert. Der prinzipielle Nachteil des Preisach-Modells besteht aber vor allem darin, dass seine Inverse bis auf wenige Spezialfälle nur auf numerischem Weg aus dem Hysterese-modell ermittelt werden kann und im Allgemeinen kein Preisach-Hystereseoperator ist [BS96, Kuh01]. Aufgrund dieser Tatsache sind Ansätze mit dem klassischen Preisach-Modell zunächst inkompatibel zum Verlustseparationsansatz und führen so zu sehr diffizilen mathematischen Differentialgleichungsmodellen zur Berechnung nichtlinearer, verlustbehafteter Induktivitäten [ACS98, ASC05]. Es besteht die Möglichkeit, eine approximative Inverse mithilfe des zum klassischen Modell dualen Ansatzes zu bilden. Das damit einhergehende thermodynamisch konsistente Modell wird wegen des Hysterons, auf dem es basiert, auch als Preisach-Modell des Stop-Typs bezeichnet [BMSV97]. Da keine einfachen Transformationsbeziehungen zwischen den zueinander dualen Formulierungen bestehen, müssen seine Modellparameter direkt aus dem inversen magnetischen Materialverhalten abgeleitet werden. Des Weiteren verbleibt der Nachteil einer hohen Modellkomplexität.

Nun sind insbesondere in den letzten zwanzig Jahren sehr große Fortschritte bei der Modellierung komplexer Hysterese-Phänomene gemacht worden, die den Aspekt der analytischen Invertierbarkeit der Hysterese-Modelle von vornherein bei der Modellsynthese mit berücksichtigen [Kuh08]. Der wesentliche Treiber für diese Entwicklungen war der Bedarf an inversen Vorsteuerungen für hysteresebehaftete Nichtlinearitäten zur effizienten Steuerung und Regelung von Systemen mit aktiven Materialien. Für diese Aufgabe eignet sich besonders

die Klasse der Prandtl-Ishlinskii-Operatoren [Pra28, Ish44, KP89, Vis94, BS96, Kre96]. Sie stellt eine Unterklasse von Preisach-Operatoren dar, bei der die Inverse, sofern sie existiert, gegenüber dem zugehörigen und analytisch darstellbaren Vorwärtsmodell strukturinvariant ist und deshalb ebenfalls eine analytische Darstellung besitzt, die direkt zur Modellbildung verwendet werden kann. Ein wesentlicher Nachteil der Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperatoren besteht aber darin, dass sie nicht in der Lage sind, Sättigungsphänomene nachzubilden. Aus diesem Grund wurde diese Klasse von Hysterese-Modellen durch einen Zusatz so modifiziert, dass Sättigungsphänomene berücksichtigt und gleichzeitig die Inversen dazu analytisch formuliert werden können [Kuh01, Kuh03]. Ein weiterer wesentlicher Vorteil der modifizierten Prandtl-Ishlinskii-Operatoren gegenüber den Preisach-Operatoren besteht zudem darin, dass sie deutlich weniger Parameter besitzen und daher einfacher zu parametrieren sind sowie eine effizientere Berechnung erlauben. Damit sind sie besser für den Einsatz in der Praxis geeignet.

Eine grundsätzliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit der beschriebenen Hysterese-Modelle ist ein homogener Flussdichteverlauf im betrachteten flussführenden Material. Zur Berücksichtigung einer inhomogenen Flussdichteverteilung als Folge von dynamischen Flussverdrängungseffekten kann eine räumliche Partitionierung der Magnetkernegeometrie erfolgen. Das Vollmaterial geht dadurch gedanklich in konzentrische Schalen oder Flussröhren über. Diese Ersatzanordnung lässt sich durch ein magnetisches Netzwerk abbilden, für dessen Beschreibung in Analogie zur elektrischen Domäne die Kirchhoffschen Regeln nutzbar sind. In den Monografien von J. G. Zhu [Zhu94], J. B. Schweer [Sch97] und T. Ströhl [Str02] werden diese Netzwerkmodelle erfolgreich angewendet, wobei der erstgenannte Autor ein modifiziertes und letzterer ein klassisches Preisach-Hysterese-Modell für die Beschreibung des ratenunabhängigen magnetischen Materialverhaltens einsetzt. Schweer nutzt für diesen Zweck ein gedächtnisloses Modell der dritten Kategorie.

Somit sind heute die Modellierungswerkzeuge vorhanden, um in systematischer Art und Weise Kernmodelle für magnetische Komponenten zu entwickeln, die das durch den Verlustseparationsansatz induzierte Verlustverhalten in allgemein anwendbare Zeitbereichsmodelle integrieren. Aus der Sicht des Autors existieren jedoch zum Entstehungszeitpunkt dieser Arbeit noch keine Ansätze zur Magnetkernmodellierung für leistungselektronische Komponenten, die auf der Anwendung der vorteilhaften modifizierten Prandtl-Ishlinskii-Operatoren in Verbindung mit dem Verlustseparationsprinzip nach Bertotti basieren. Eine praxistaugliche Umsetzung dieses Konzeptes, das vor allem von dem Aspekt der analytischen Invertierbarkeit des Hystereseoperators getragen wird, steht daher noch aus.

1.3 Ziel der Arbeit

Das primäre Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines neuartigen, numerisch stabilen und effizienten Systemmodells im Zeitbereich zur präzisen Beschreibung des magnetischen Verhaltens inklusive der damit einhergehenden Kernverluste von ferromagnetischen Kernmaterialien in induktiven Bauelementen der Leistungselektronik. Das angestrebte Kern-

modell soll für allgemeine Signalformen sowie für einen großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich Gültigkeit besitzen und sich zudem robust in übergeordnete Systemmodelle integrieren lassen.

Im Rahmen der Modellbildung besteht ein Teilziel in der Auswahl und in der Anpassung eines geeigneten mathematischen Verfahrens auf der Grundlage der operatorbasierten Prandtl-Ishlinskii-Methode für eine möglichst exakte phänomenologische Beschreibung der ratenunabhängigen Hysterese von verschiedenartigen Ferromagnetika. Das resultierende Teilmodell soll mit Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit in den zugehörigen Verlustterm des Verlustseparationsansatzes nach Bertotti integriert werden, um daraus ein dynamisches Kernmodell in Form einer nichtlinearen Operatordifferentialgleichung erster Ordnung für die effiziente Nachbildung des gedächtnisbehafteten ratenabhängigen Verhaltens abzuleiten. Zur Vergrößerung des Gültigkeitsbereiches ist dieser Zusammenhang so zu erweitern, dass sich auch eine inhomogene Flussdichteverteilung im Kernmaterial infolge von frequenzabhängiger Flussverdrängung simulieren lässt. Das Ergebnis der Modellbildung ist dann ein System von nichtlinearen Operatordifferentialgleichungen, das eine definierte Struktur aufweist und von vorerst unbekanntem Parametern abhängt.

Die Modellkalibrierung erfordert ein praxistaugliches Verfahren zur Identifikation der Modellparameter auf der Grundlage von gemessenen Magnetisierungskennlinien. Deshalb soll im Rahmen dieser Arbeit auch ein Identifikationstool entwickelt werden, das numerisch effizient und robust gegenüber Fehlern in den Messdaten ist. Zudem muss es die thermodynamische Konsistenz und die Invertierbarkeit der auf dem Prandtl-Ishlinskii-Ansatz basierenden Modelle für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten durch geeignete Nebenbedingungen im Parametrierungsprozess sicherstellen.

Mit dem parametrisierten Kernmodell lässt sich das magnetische Verhalten eines Kernmaterials für beliebige zeitabhängige Signalformen wiedergeben. Besonders wichtig für die Praxis ist die Berechnung der dabei entstehenden Kernverluste. In einem weiteren Schritt ist deshalb die modellbasierte Kernverlustberechnung zu implementieren, die für beliebige Signalformen auch ohne zeitliche Periodizität gelten soll und eine Unterscheidung der einzelnen Verlustarten zulässt.

Zur exemplarischen Entwicklung eines Systemmodells für die Beschreibung einer allgemeinen induktiven Komponente soll das Kernmodell außerdem mit einfachen Wicklungsmodellen unter Berücksichtigung der geometrieabhängigen Streuflüsse gekoppelt werden.

Die Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert. Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen zu Ferromagnetika und ihrer Verwendung in induktiven Bauelementen der Leistungselektronik erläutert. Der Schwerpunkt liegt auf den auf unterschiedlichen Längen- und Zeitskalen stattfindenden Magnetisierungs- und Verlustprozessen sowie auf dem damit im Zusammenhang stehenden Verlustseparationsprinzip nach Bertotti. Das dritte Kapitel behandelt die messdatenbasierte Charakterisierung ferromagnetischer Materialien, wobei das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Messverfahren und die technische Realisierung des zugehörigen Messsystems beschrieben sowie dessen Leistungsfähigkeit an Beispielen demonstriert wird. Das vierte Kapitel führt zunächst Hysterese- und Superpositionsoperatoren ein, mit denen

sich in geeigneter Kombination Kernmodelle zur Beschreibung des von ratenunabhängigen Hysterese- und Sättigungseffekten geprägten Magnetisierungsverhaltens bilden lassen. Im weiteren Verlauf werden Modellansätze aufgezeigt, die die Gültigkeits- und Anwendungsbereiche dieser ratenunabhängigen Kernmodelle erweitern können. So erlaubt ein zusätzlicher Modellfreiheitsgrad eine höhere Genauigkeit bei der Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens und mithilfe des Verlustseparationsprinzips lassen sich auch ratenabhängige Effekte einbeziehen. Die Verwendung eines Schalenmodells gestattet zudem die Modellierung der Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen und die Einführung temperaturabhängiger Modellparameter ermöglicht die Berücksichtigung des Temperatureinflusses. Im Anschluss daran werden Methoden zur Kernverlustberechnung vorgestellt. Der letzte Abschnitt des vierten Kapitels behandelt die exemplarische Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen zur Bildung eines Systemmodells für eine allgemeine induktive Komponente. Im fünften Kapitel werden die neuartigen, operatorbasierten Kernmodelle, die zugehörigen Verlustberechnungsmethoden und das aus der Kopplung der Kern- und Wicklungsmodelle hervorgehende Systemmodell zur Beschreibung einer induktiven Komponente anhand von Simulationen und Messdaten verifiziert. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse sowie einem Ausblick auf zu erwartende Forschungstrends.

2 Ferromagnetische Materialien

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Grundlagen zu verschiedenen magnetischen Zuständen behandelt und darauf aufbauend die Besonderheiten des Ferromagnetismus herausgestellt. Das magnetische Verhalten ferromagnetischer Werkstoffe ist das Ergebnis komplexer Prozesse auf unterschiedlichen Längenskalen. Eine detaillierte Beschreibung dieser Vorgänge und das Prinzip der Verlustseparation nach Bertotti bilden die Schwerpunkte des zweiten Unterkapitels. Der dritte Teil behandelt wesentliche Themen, die im Zusammenhang mit der Verwendung ferromagnetischer Materialien für induktive Bauelemente der Leistungselektronik stehen. Es werden verschiedene Materialklassen und Bauformen aufgeführt sowie grundlegende Definitionen und Abhängigkeiten in Bezug auf Magnetisierungskurven und magnetische Kreise erläutert. Der Abschnitt schließt mit dem Aufzeigen von Analogien zwischen der elektrischen und der magnetischen Domäne.

2.1 Das Wesen des Ferromagnetismus

Magnetische Felder resultieren zum einen aus der Eigenschaft von Elementarteilchen einen Spin aufzuweisen, der mit einem magnetischen Moment verknüpft ist, und zum anderen aus der Bewegung von elektrischen Ladungen. Ein einzelnes Elektron, das um einen Atomkern kreist, hat in seiner Umgebung auf der mikroskopischen Ebene ebenso ein Magnetfeld zur Folge wie ein elektrischer Stromfluss in einem Leiter auf der makroskopischen Ebene.

Ob und gegebenenfalls in welcher Weise es zu einer Wechselwirkung zwischen einem äußeren Magnetfeld und einem Stoff kommt, wird also durch dessen atomare Eigenschaften bestimmt. Die gerade beschriebene Bahnbewegung eines Elektrons um einen Atomkern entspricht einem Kreisstrom und verursacht ein magnetisches Moment, das als Bahnmoment bezeichnet wird. Das mit dem Elektronenspin einhergehende magnetische Moment ist als Spinnmoment bekannt. Der Atomkern bewirkt ein drittes Moment, welches im Vergleich zu den beiden anderen jedoch sehr klein und damit vernachlässigbar ist. Das nach außen hin wirksame magnetische Gesamtmoment eines jeden Atoms resultiert daher im Wesentlichen aus der vektoriellen Überlagerung der Einzelmomente aller zugehörigen Elektronen und wird somit maßgeblich durch die Beschaffenheit der Elektronenhülle bestimmt. Es stellt ein wichtiges Kriterium für die makroskopischen magnetischen Eigenschaften von Materie dar. Von ebenso hoher Bedeutung in diesem Zusammenhang ist die räumliche Lage der Atome zueinander, denn dadurch wird die Ausrichtung der einzelnen atomaren magnetischen Momente beeinflusst.

Die soeben dargestellten Wirkzusammenhänge sollen die Basis bilden, um im Folgenden das Wesen des Ferromagnetismus zu erläutern und seine Besonderheit gegenüber anderen magnetischen Ausprägungsformen herauszustellen. Zu diesem Zweck werden die fünf wichtigsten magnetischen Zustände und ihre Ursachen in zusammenfassender Weise beschrieben. Man unterscheidet hauptsächlich zwischen Dia-, Para-, Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetismus. Darüber hinaus existieren noch weitere, sehr spezielle und für technische Anwendungen bisher unbedeutende Arten des Magnetismus. Für weiterführende Informationen zu diesen Themen sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen [HM86, Koh96, Coe10, HR13, GM14].

In diamagnetischen Materialien kompensieren sich die Bahn- und Spinnmomente der Elektronen wegen der vollbesetzten Elektronenschalen vollständig, sodass die Atome nach außen hin keine magnetischen Momente besitzen. Folglich sind diese Substanzen zunächst nicht magnetisch. Wird nun ein diamagnetisches Atom einem äußeren magnetischen Feld ausgesetzt, so führt dies zu einer Wechselwirkung mit den sich bewegenden Elektronen. Daraus resultiert ein induziertes atomares Magnetfeld, das nach der Regel von Lenz das ursächliche, von außen wirkende Feld schwächt. Diese Form des induzierten Magnetismus ist von der Temperatur unabhängig und tritt grundsätzlich in allen Materialien auf, stellt aber angesichts der geringen Ausprägung häufig nur eine Hintergrunderscheinung dar. In diamagnetischen Stoffen, wie zum Beispiel Kupfer, Wasser oder Stickstoff, ist dieser Effekt jedoch dominant, sodass sie im Vergleich zum Vakuum die Feldliniendichte eines externen Magnetfeldes leicht reduzieren.

Bei den paramagnetischen Stoffen heben sich die durch Elektronenumlauf und -spin verursachten magnetischen Momente aufgrund eines unsymmetrischen Atomaufbaus nicht auf. Die Asymmetrie geht aus dem Vorhandensein einer unvollständig besetzten Elektronenschale hervor. Dennoch zeigen diese Materialien nach außen hin ohne externe Feldeinwirkung ebenfalls keine makroskopische Magnetisierung, weil die unkompensierten Momente wegen der thermischen Bewegung der Atome in ihrer Orientierung statistisch gleich verteilt sind. In einem äußeren Magnetfeld richten sich diese atomaren Momente gegen die Temperaturbewegung in Feldrichtung aus. Ein paramagnetisches Material, wie etwa Aluminium, Platin oder Sauerstoff, wird dadurch selbst schwach makroskopisch magnetisiert und wirkt im Vergleich zum Vakuum geringfügig verstärkend auf ein externes Magnetfeld. Der Prozess ist naturgemäß temperaturabhängig, sodass die Magnetisierbarkeit dieser Stoffe zu höheren Temperaturen hin abnimmt, weil damit eine gesteigerte Teilchenbewegung einhergeht.

Die Atome ferromagnetischer Materialien sind ebenso paramagnetisch, mit dem Unterschied, dass ihre magnetischen Momente miteinander in enger Wechselwirkung stehen und sich entgegen ihrer regellosen Temperaturbewegung innerhalb von Elementarbereichen von selbst gleichsinnig auszurichten suchen. Dieses Bestreben setzt eine gleichbleibende räumliche Lage der Atome mit einem bestimmten Abstand zueinander voraus, sodass es energetisch günstiger ist, die Elektronenspins parallel zu orientieren. Diese Bedingung kann nur erfüllt sein, wenn die Atome an ein Kristallgitter gebunden sind. Deshalb ist der Ferromagnetismus ein Festkörpereffekt. Dabei entstehen im gesamten Material spontan - also auch

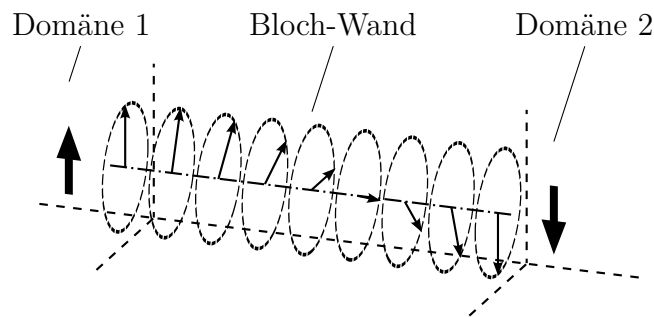


Bild 2.1: Drehung der Magnetisierungsrichtung innerhalb einer 180°-Bloch-Wand in Anlehnung an [GM14]

ohne die Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes - vollständig magnetisierte Domänen, die nach ihrem Entdecker als Weißsche Bezirke bezeichnet werden. Sie sind durch die ebenfalls nach ihrem Entdecker benannten Bloch-Wände, in denen sich ein stetiger Übergang der Momentenrichtung vollzieht, voneinander abgegrenzt. Abbildung 2.1 stellt den Ausschnitt einer Domänenwand mit zwei angrenzenden Domänen schematisch dar. Darin symbolisieren die breiten Pfeile die Magnetisierungsrichtungen der Domänen und die schmalen Pfeile kennzeichnen die Drehung des Magnetisierungsvektors innerhalb der Bloch-Wand. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass noch weitere Arten von Domänenwänden existieren, innerhalb derer sich die Magnetisierungsrichtungen auf eine andere Weise drehen. Sie kommen aber nur in dünnen magnetischen Schichten vor und sollen deshalb im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden. Jede der Domänen besitzt im Allgemeinen eine andere räumliche Ausdehnung und eine magnetische Vorzugsrichtung, die durch die magnetische Anisotropie des zugehörigen Kristalls vorgegeben ist. Aus Gründen der Energieminimierung ordnen sich die benachbarten Elementarbereiche tendenziell in der Art, dass sie einen geschlossenen magnetischen Kreis bilden und nach außen hin unmagnetisch erscheinen. Infolge nicht idealer Materialeigenschaften kann in Abhängigkeit der magnetischen Vorgeschichte dennoch eine temporäre makroskopische Restmagnetisierung, die sogenannte Remanenz, verbleiben. In Abbildung 2.2 ist die schrittweise Entwicklung einer energieminierten Domänenstruktur durch die zunehmende Reduzierung des Streufeldes aufgezeigt.

In einem äußeren Magnetfeld \mathbf{H} wachsen die in Feldrichtung orientierten Bezirke auf Kosten aller anderen an. Dieser Vorgang erzeugt infolge der beschriebenen kooperativen Effekte bereits bei kleinen Feldamplituden eine hohe makroskopische Magnetisierung und lässt sich, wie in der Abbildung 2.3 dargestellt ist, durch eine Feldstärkeerhöhung fortführen, bis es nur noch einen einzigen in Feldrichtung ausgerichteten Weiß-Bezirk gibt. Eine weitere Steigerung des äußeren Magnetfeldes bewirkt dann keine zusätzliche Magnetisierung mehr. Das Material ist magnetisch gesättigt. Während die Domänenwandverschiebungen, die die feldabhängige Umstrukturierung der Domänenkonfiguration begleiten, durch verlustbehaftete Prozesse gekennzeichnet sind, entspricht die im letzten Schritt dargestellte Drehung der Magnetisierungsrichtung einem reversiblen Verhalten.

Dieser kollektive Magnetismus ist temperaturabhängig, da auch hier die thermische Bewe-

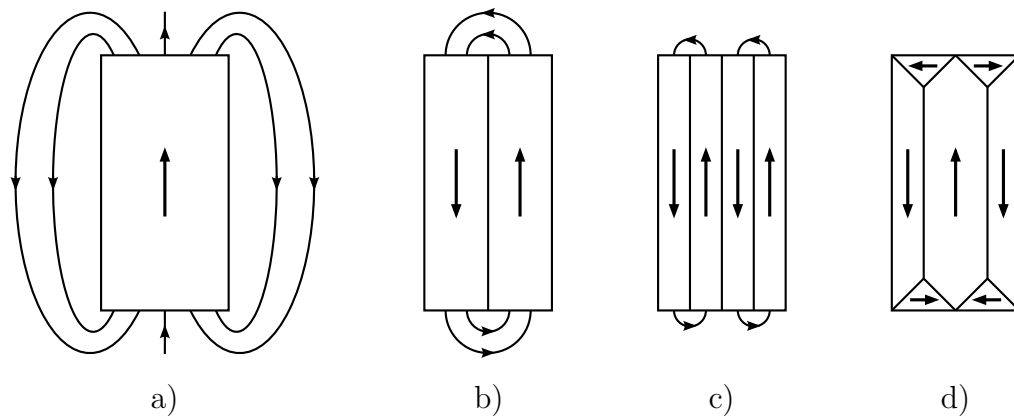


Bild 2.2: Entwicklung einer energieminierten magnetischen Domänenstruktur in Anlehnung an [HR13]

- a) einzelne Domäne mit großer Streufeld-Energie
- b) Unterteilung in zwei Domänen mit reduzierter Streufeld-Energie
- c) Unterteilung in vier Domänen mit geringer Streufeld-Energie
- d) streufeldarme Domänenkonfiguration mit Abschlussdomänen

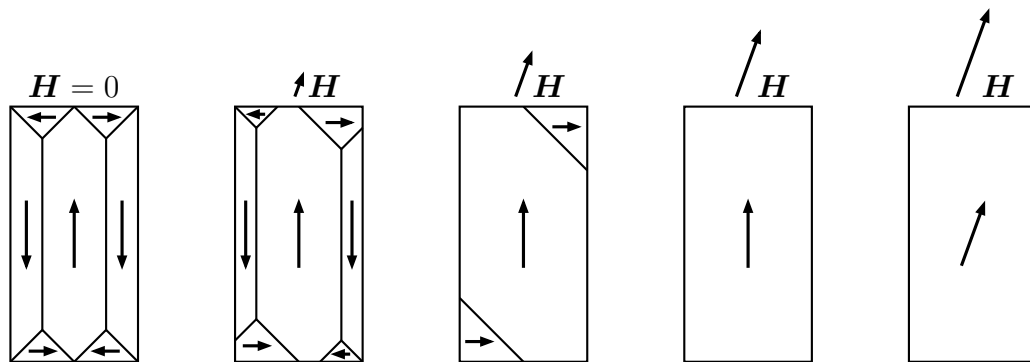


Bild 2.3: Entwicklung der magnetischen Domänenstruktur unter dem Einfluss eines wachsenden externen Magnetfeldes in Anlehnung an [HM86]

gung der Elektronen der gemeinsamen Spinausrichtung entgegen wirkt. Wird ein ferromagnetischer Stoff erwärmt, so erschwert die wachsende Wärmebewegung der Teilchen den Magnetisierungsprozess zunehmend, bis ab einer bestimmten materialabhängigen Temperatur, der Curie-Temperatur, die spontane Magnetisierung vollständig ausbleibt und der Ferromagnetismus in den Paramagnetismus übergeht. Ferromagnetische Stoffe besitzen folglich unterhalb ihrer Sättigungsgrenze und Curie-Temperatur die Eigenschaft, sich in einem äußeren Magnetfeld so zu magnetisieren, dass sie die magnetischen Feldlinien gegenüber dem Vakuum in hohem Maße in sich bündeln und daher erheblich verstärkend wirken. Bei Raumtemperatur weisen als reine Elemente nur Eisen, Nickel und Kobalt diesen magnetischen Zustand auf. So beschaffene Legierungen sind hingegen in großer Zahl vorhanden. Die während der Magnetisierung stattfindenden Domänenprozesse und ihre Auswirkungen werden in Kapitel 2.2 detailliert beschrieben.

Der Antiferromagnetismus ist ein weiterer kollektiver Festkörpereffekt, der ebenfalls an das Vorhandensein von paramagnetischen Atomen mit definierten Plätzen im Kristallgitter gebunden ist. Das Verhältnis des Atomabstandes der benachbarten Atome zum Radius der unvollständig besetzten Elektronenschale ist hier jedoch kleiner als bei den ferromagnetischen Materialien. Das Resultat ist eine atomare Wechselwirkung, die aus energetischen Gründen die Elektronenspins sowie die damit verbundenen Spinnmomente antiparallel zueinander ausrichten lässt und die spontane Bildung von einheitlich gearteten Domänen hervorruft. Die magnetischen Momente der Atome kompensieren sich in der Regel vollständig, sodass auch die Domänen und folglich das gesamte Material nach außen hin unmagnetisch sind, wenn kein externes Magnetfeld existiert. Wegen nicht idealer Materialeigenschaften kann es aber auch hier eine sehr geringe remanente Magnetisierung geben. Liegt ein äußeres Magnetfeld vor, so sind seine Auswirkungen auf die zueinander antiparallel ausgerichteten Elementarmagnete richtungsabhängig. Atomare Magnete, die senkrecht zum Feld ausgerichtet sind, werden um kleine Winkel aus ihrer antiparallelen Lage in Richtung des einwirkenden Feldes gedreht und erzeugen dadurch eine schwache Magnetisierung in Feldrichtung. Dieser Effekt ist unterhalb einer charakteristischen und vom Material abhängigen Temperatur, die in diesem Fall Néel-Temperatur heißt, temperaturunabhängig. Verläuft die Orientierung der gekoppelten Elementarmagnete parallel beziehungsweise antiparallel zur Feldrichtung, führt dies oberhalb des absoluten Nullpunktes ebenfalls zu einer geringen, feldunterstützten Magnetisierung. Sie steigt jedoch mit zunehmender Temperatur an, solange die Néel-Temperatur noch nicht erreicht ist. Aus der Überlagerung dieser Vorgänge geht eine schwache Magnetisierung in Feldrichtung hervor, wodurch das Material geringfügig verstärkend auf ein externes Magnetfeld im Vakuum wirkt. Die Magnetisierbarkeit der antiferromagnetischen Stoffe erreicht folglich bei der Néel-Temperatur ihr Maximum. Unterhalb davon nimmt die feldverstärkende Eigenschaft bis zum absoluten Nullpunkt kontinuierlich ab, weil die geringer werdende thermische Bewegung der Teilchen die spontane antiparallele Ausrichtung der Spinnmomente und damit ihre Kompensation zunehmend weniger stört. Oberhalb der Néel-Temperatur ist die Wärmebewegung so stark, dass die Spinkopplungen und folglich der kollektive Magnetismus nicht länger bestehen können. Das Material verhält sich dann paramagnetisch. Typische Vertreter dieser Kategorie sind beispielsweise Mangan, Eisenmonoxid oder Chrom. Die beiden erstgenannten Substanzen verlieren ihre antiferromagnetische Ordnung bereits weit unterhalb der Raumtemperatur.

Manche Materialien besitzen eine antiferromagnetische Ordnung, bei denen die antiparallel ausgerichteten magnetischen Momente unterschiedlich groß sind und sich deshalb nur teilweise aufheben. Solche Substanzen werden als ferrimagnetisch bezeichnet. Das Vorliegen unkompensierter Momente führt unter dem Einfluss kooperativer Effekte zur Bildung von spontan magnetisierten Domänen und zu einem magnetischen Verhalten, das dem der Ferromagnetika sehr ähnlich ist. Im Vergleich zu ihnen unterscheiden sich ferrimagnetische Materialien, die zu den keramischen Werkstoffen zählen und auch als Ferrite bezeichnet werden, vor allem durch niedrigere Sättigungswerte und deutlich kleinere elektrische Leitfähigkeiten. Während die zuerst genannte Eigenschaft einen erheblichen Nachteil darstellt, bedeutet die letztere einen entscheidenden Vorteil, weil dies in Verbindung mit zeitab-

hängigen Magnetfeldern zu sehr viel geringeren Magnetkernverlusten führen kann. Ihr Temperaturverhalten ist in den meisten Fällen qualitativ mit dem der ferromagnetischen Substanzen vergleichbar. Nur einzelne ferrimagnetische Stoffe weisen diesbezüglich Unterschiede im Bereich unterhalb ihrer Curie-Temperatur auf. Die Ursache dafür liegt in den antiparallel orientierten atomaren Momenten, die nicht nur in ihren Beträgen, sondern auch in ihren Temperaturabhängigkeiten voneinander abweichen können. Da die Magnetisierung des Materials aus den Momentendifferenzen hervorgeht, kann es dann einerseits sein, dass sie zu höheren Temperaturen hin bereichsweise ansteigt, oder andererseits bei einer charakteristischen Temperatur, der Kompensationstemperatur, das Vorzeichen wechselt. Typische ferrimagnetische Stoffe mit Curie-Temperaturen weit oberhalb der Raumtemperatur sind zum Beispiel die Mangan-Zink-Ferrite, die Nickel-Zink-Ferrite oder das in der Natur vorkommende Magnetit.

Die Abbildung 2.4 zeigt zusammenfassend eine Gegenüberstellung der prinzipiellen Ausrichtungen der magnetischen Momente innerhalb von para-, ferro-, antiferro- und ferrimagnetischen Materialien, wobei das Vorhandensein einer Domänenstruktur bei den drei zuletzt genannten Stoffklassen durch jeweils eine zentrierte senkrechte Linie in den Darstellungen angedeutet wird.

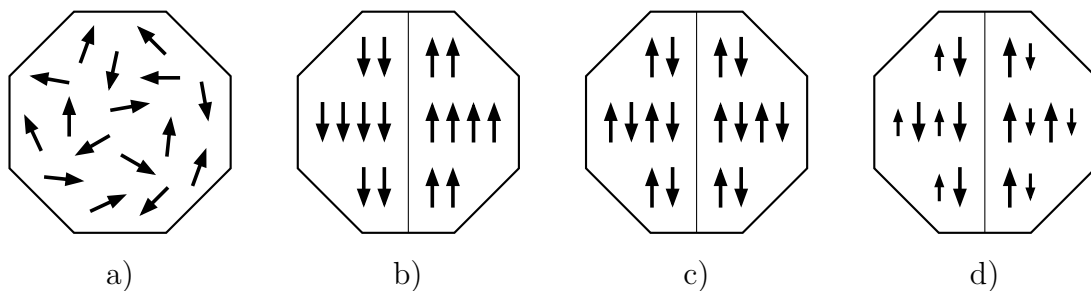


Bild 2.4: Prinzipielle Ausrichtung der magnetischen Momente ohne ein externes Magnetfeld für verschiedene magnetische Zustände in Anlehnung an [HR13]
a) Paramagnetismus b) Ferromagnetismus c) Antiferromagnetismus
d) Ferrimagnetismus

Es ist üblich, die fünf beschriebenen magnetischen Zustände entsprechend der daraus resultierenden Magnetisierbarkeit von Stoffen in drei Gruppen einzuteilen. Die relative Permeabilität μ_r ist ein Maß für die Wirkung der Materialien in einem externen Magnetfeld und soll zur Unterscheidung dieser Gruppen herangezogen werden. Bei den meisten leistungselektronischen Anwendungen kommen entweder isotrope Magnetwerkstoffe zum Einsatz oder der Einfluss der magnetischen Anisotropie ist vernachlässigbar. Es genügt dann die Annahme einer skalaren relativen Permeabilitätszahl μ_r . Sie gibt den Faktor an, um den sich die magnetische Flussdichte \mathbf{B} in einer Substanz gegenüber der magnetischen Flussdichte im Vakuum unter dem Einfluss einer magnetischen Feldstärke \mathbf{H} unterscheidet. Die Permeabilität des Vakuums, auch magnetische Feldkonstante genannt, wird im Allgemeinen mit μ_0 bezeichnet. Da der Zusammenhang $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ bei ferro-, antiferro- und ferrimagnetischen Stoffen von Sättigungseffekten und Hysterese geprägt ist, soll μ_r hier

als eine gemittelte Größe verstanden werden, die sich ausgehend vom entmagnetisierten Zustand bei moderater Aussteuerung des Magnetmaterials ergibt. Dementsprechend kann eine Einteilung in die nachstehenden Gruppen erfolgen:

1. $\mu_r < 1$ Diamagnetismus
2. $\mu_r > 1$ Paramagnetismus und Antiferromagnetismus
3. $\mu_r \gg 1$ Ferromagnetismus und Ferrimagnetismus

Die Wirkung von Materialien dieser Stoffklassen auf den Feldlinienverlauf eines ursprünglich homogenen äußeren Magnetfeldes im Vakuum verdeutlicht die Abbildung 2.5. So werden die Feldlinien aus Substanzen mit Permeabilitätszahlen, die kleiner als eins sind, herausgedrängt. Andererseits bündeln Materialien, deren Permeabilitätszahlen Werte größer als eins annehmen, die Feldlinien in sich.

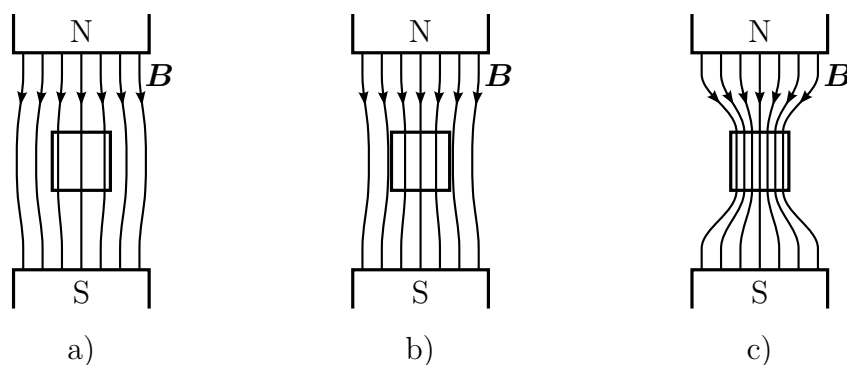


Bild 2.5: Wirkung von dia-, para-, ferro-, antiferro- und ferrimagnetischen Materialien auf den Feldlinienverlauf in einem homogenen Magnetfeld in Anlehnung an [HM86]
a) diamagnetisch b) para- und antiferromagnetisch c) ferro- und ferrimagnetisch

Während die relativen Permeabilitäten der Para- und Antiferromagnetika nur wenig größer als eins sind, können sie bei Ferro- und Ferrimagnetika Werte in der Größenordnung 10^5 erreichen. Deshalb sind vor allem die Werkstoffe der dritten Gruppe für technische Anwendungen interessant. Da der Ferrimagnetismus in vielerlei Hinsicht einer schwächeren Form des Ferromagnetismus entspricht, kann es zweckmäßig sein, auf unterscheidende Termini zu verzichten, wenn atomistische Aspekte von untergeordneter Relevanz sind. Diese vereinfachte Sichtweise ist häufig in der Literatur anzutreffen. Folglich soll auch im Rahmen dieser Arbeit von nun an der Begriff Ferromagnetismus für beide magnetischen Ausprägungsformen stehen.

2.2 Magnetisierungs- und Verlustprozesse auf verschiedenen Längenskalen

Unter dem Einfluss eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes kommt es in ferromagnetischen Materialien auf der Mikro-, Meso- und Makroskala zu unterschiedlichen Magnetisierungs- und Verlustprozessen. Wegen der verschiedenen Längen- und in der Folge auch

Zeitskalen, auf denen sie wirken, beeinflussen sie sich gegenseitig nicht und können daher als voneinander unabhängig angesehen werden. Dieser Sachverhalt wird durch das sogenannte Verlustseparationsprinzip beschrieben, wonach sich die Ummagnetisierungsverluste aus einer additiven Überlagerung von drei verschiedenen Verlustarten ergeben [Ber98]. Das Prinzip bildet eine wesentliche Grundlage für das in dieser Arbeit entwickelte Kernmodell. Deshalb soll eine tiefer gehende Erläuterung der Annahmen, auf denen es basiert, erfolgen. In diesem Zusammenhang werden zunächst die Vorgänge auf der Mikroskala beschrieben. Der erste und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sowie die daraus abgeleiteten thermodynamischen Potentiale bilden den theoretischen Rahmen dafür. Im Anschluss daran sind außerdem die Effekte auf der Meso- und Makroskala Gegenstand einer detaillierteren Betrachtung. Darauf aufbauend wird zum einen die Motivation für die Anwendung des Verlustseparationsprinzips und zum anderen seine physikalische Rechtfertigung herausgestellt. Schließlich erfolgt die Herleitung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten zur Berechnung der einzelnen Verlustanteile. Ergänzende Informationen zu dieser Thematik und verwandten Problemen stellt die Fachliteratur mit [GM14] und insbesondere [Ber98] bereit.

Physikalische Systeme streben stets den Zustand des thermodynamischen Gleichgewichtes an, bei dem eine optimale Balance zwischen minimaler Energie und maximaler Unordnung vorherrscht. Zur Beschreibung dieses Zusammenhangs können entsprechend den vorgegebenen Randbedingungen geeignete thermodynamische Potentiale herangezogen werden. Ein thermodynamisches System nimmt dann das globale Minimum im zugehörigen thermodynamischen Potential ein, wenn es sich in seinem thermodynamischen Gleichgewichtszustand befindet.

Die innere Energie U ist ein Maß für die Energie, die jedem System innewohnt, und stellt ein solches Potential dar. Sie wird als grundlegende Funktion der Thermodynamik und zunächst ohne Bezug zu irreversiblen Prozessen durch den ersten thermodynamischen Hauptsatz definiert. Demnach kann sie sich in ihrer Größe nur durch den Transport von Energie in Form von Arbeit W oder Wärme Q über die Systemgrenzen verändern. Ihr totales Differential

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (2.1)$$

drückt diese Abhängigkeit in allgemeiner Weise aus. Die am System verrichtete Arbeit soll hier durch ein konjugiertes Variablenpaar, bestehend aus der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} und dem sich daraus ergebenden magnetischen Moment \mathbf{m} beziehungsweise $\mu_0 \mathbf{m}$, gegeben sein, sodass

$$\delta W = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m} \quad (2.2)$$

gilt. Dabei resultiert \mathbf{m} im Allgemeinen aus der vom Ort \mathbf{r} abhängigen Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ des magnetischen Materials mit dem Volumen V und folgt der Beziehung

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.3)$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik verlangt nur die Erhaltung der Energie, wohingegen der zweite Hauptsatz deren begrenzte Umwandelbarkeit definiert. Dazu führt er die Entropie S ein, die sich als ein Maß der Unordnung interpretieren lässt, und fordert mit der Gleichung

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (2.4)$$

dass diese in einem isolierten System niemals von allein abnehmen kann. Dabei stellt T die absolute Temperatur dar. Während die Gesamtentropie bei irreversiblen Prozessen stets zunimmt, bleibt sie bei reversiblen Vorgängen konstant und es gilt

$$\delta Q = TdS. \quad (2.5)$$

Hier bilden T und S die thermodynamisch konjugierten Variablen. Mit den Gleichungen (2.2) und (2.4) folgt aus (2.1) für die Änderung der inneren Energie schließlich

$$dU \leq \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m} + TdS. \quad (2.6)$$

Die Gleichung (2.6) lässt nun erkennen, wie das eingangs genannte Wechselspiel zwischen Energie und Unordnung im thermodynamischen Potential Berücksichtigung findet.

Es wird in der Folge die Annahme zugrunde gelegt, dass die Magnetisierungsvorgänge auf Zeitskalen stattfinden, die sehr kurz gegenüber den thermischen Zeitkonstanten des betrachteten magnetischen Systems sind, sodass die magnetischen Zustandsänderungen in guter Näherung bei konstanter Temperatur ablaufen. Deshalb ist es zweckmäßig, thermodynamische Potentiale zu wählen, die für die Beschreibung von Vorgängen bei konstanter Temperatur prädestiniert sind. Hierfür eignet sich zum einen die Helmholtzsche freie Energie F , die sich als Legendre-Transformierte der inneren Energie U nach der Entropie S aus

$$F = U - TS \quad (2.7)$$

ergibt und unter Berücksichtigung der zuvor abgeleiteten Zusammenhänge das totale Differential

$$dF \leq \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m} - SdT \quad (2.8)$$

besitzt. Durch eine Legendre-Transformation dieser Helmholtzschen freien Energie nach dem magnetischen Moment \mathbf{m} erhält man zum anderen die Gibbsche freie Energie G

$$G = F - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}, \quad (2.9)$$

deren totales Differential

$$dG \leq -\mu_0 \mathbf{m} \cdot d\mathbf{H} - SdT \quad (2.10)$$

lautet. Darin tritt anstelle von \mathbf{m} nun \mathbf{H} als die natürliche Variable auf. Sowohl $F(\mathbf{m}, T)$ als auch $G(\mathbf{H}, T)$ zeigen bei isothermen Zustandsänderungen die Eigenschaft, ein globales Minimum einzunehmen, wenn das betrachtete System in das thermodynamische Gleichgewicht übergeht.

Der Magnetisierungsprozess in ferromagnetischen Materialien ist durch sprunghafte Veränderungen der Magnetisierung \mathbf{M} beziehungsweise der Zustandsgröße \mathbf{m} gekennzeichnet. Währenddessen verringert sich die freie Energie des Systems $G(\mathbf{H}, T)$ auch ohne eine Veränderung von \mathbf{H} und T . Dieser Umstand deutet auf Nicht-Gleichgewichtszustände sowie interne Freiheitsgrade hin und muss für die weitere Betrachtung Berücksichtigung finden. Es liegt die Annahme zugrunde, dass \mathbf{m} selbst diese Freiheitsgrade repräsentiert. Anstatt der Gibbsschen freien Energie wird deshalb die freie Energie nach Landau

$$G_L(\mathbf{m}; \mathbf{H}, T) = F(\mathbf{m}, T) - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} \quad (2.11)$$

herangezogen, bei der eine zusätzliche Abhängigkeit von \mathbf{m} besteht. Der Wert, den \mathbf{m} unmittelbar nach einem Sprung bei konstanter Feldstärke \mathbf{H} und Temperatur T annehmen kann, ist durch systeminterne Vorgänge und die damit verbundene Minimierung der freien Energie bestimmt. Die spontanen Transformationen und ihre Ursachen sind Gegenstand des nachfolgenden Abschnittes.

Von nun an soll $G_L(\mathbf{m}; \mathbf{H}, T)$ ohne expliziten Hinweis auf die Landau-Theorie als freie Energie bezeichnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird außerdem davon ausgegangen, dass sich die untersuchten Problemstellungen durch skalare Feldgrößen hinreichend genau beschreiben lassen. Dementsprechend erfolgt in den nachstehenden Ausführungen der Übergang von vektoriellen zu skalaren magnetischen Größen.

Das Streben nach dem Gleichgewichtszustand führt in ferromagnetischen Materialien, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, zur spontanen Bildung von magnetischen Domänen, die ihre Gestalt und Ausrichtung grundsätzlich im Sinne einer Minimierung der freien Energie anzupassen suchen. Bei diesem Vorgang konkurrieren mehrere Energiearten miteinander, die im Wesentlichen zu drei Termen zusammengefasst werden können und deren Summe die magnetische Gesamtenergie E_{mag} nach

$$E_{\text{mag}} = E_{\text{Aus}} + E_{\text{stat}} + E_{\text{Ani}} \quad (2.12)$$

ergibt. Dazu zählt zum einen die Austauschenergie E_{Aus} , deren Reduktion eine möglichst parallele beziehungsweise antiparallele Ausrichtung der einzelnen magnetischen Momente zueinander erfordert. Einen weiteren Beitrag leistet die magnetostatische Energie E_{stat} . Sie bewirkt eine Orientierung der magnetischen Momente, sodass einerseits Streufelder minimal werden und andererseits bei Anwesenheit eines externen Magnetfeldes eine Magnetisierung in dessen Richtung resultiert. Die magnetische Anisotropieenergie E_{Ani} stellt den dritten Energieterm dar und erzeugt eine Orientierung der magnetischen Momente entlang bestimmter Vorzugsrichtungen, welche zum Beispiel durch kristallografische Eigenschaften vorgegeben sein können. Die jeweiligen Vorgänge, die zur Minimierung der einzelnen Energieterme führen, sind im Allgemeinen gegensätzlicher Natur. Demzufolge ist eine Minimierung der magnetischen Gesamtenergie, die unter isothermen Bedingungen gleichzeitig eine Minimierung der freien Energie bedeutet, nur durch eine entsprechende Balance der Einzelenergiebeiträge möglich.

Der Übergang des magnetischen Systems in seinen absoluten Gleichgewichtszustand wird jedoch stets durch zahlreiche Inhomogenitäten in der Mikrostruktur behindert. Das können zum Beispiel Korngrenzen, Gitterdeformationen oder nichtmagnetische Einschlüsse sein. Die Domänenwände bleiben während ihrer Verschiebung immer wieder daran haften, weil sie auch dadurch eine Energiereduktion erfahren. Die stark vereinfachte Konstellation, bei der nur eine Domänenwand und zwei identische Störstellen existieren, lässt sich durch ein Energieprofil nach Bild 2.6a beschreiben. Dabei wird die Annahme zugrunde gelegt, dass die Domänenwand in Abwesenheit eines externen Magnetfeldes zur Energieminimierung an nur einer der beiden Fehlerstellen haften kann, weshalb es zwei gleichwertige stabile Zustände gibt, die jeweils einem Energieminimum entsprechen. Die magnetische Vorgeschichte bestimmt darüber, welcher der beiden Zustände einzunehmen ist. Die Domänenwand- respektive die Domänenkonfiguration steht in direktem Zusammenhang mit der resultierenden Magnetisierung des Materials und dem sich daraus ergebenden magnetischen Moment. Daher ist es zweckmäßig, die freie Energie G_L des Systems in Abhängigkeit des magnetischen Momentes m darzustellen. Der Einfluss aller materiellen Unvollkommenheiten auf die komplexe Domänenstruktur kann gedanklich als das Ergebnis einer Überlagerung zahlreicher bistabiler Systeme aufgefasst werden, wobei diese aus energetischer Sicht nicht notwendigerweise ein symmetrisches Profil aufweisen müssen und sich in der Ausprägung ihrer Extrema unterscheiden können. Die Störstellen erzeugen somit eine Vielzahl von lokalen Energieminima in der Energielandschaft des Systems, deren möglicher Verlauf schematisch in Abbildung 2.6b dargestellt ist.

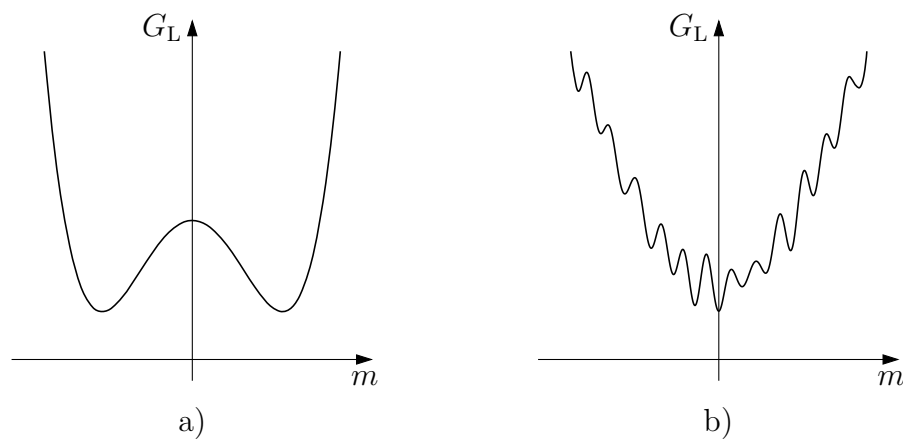


Bild 2.6: Energielandschaften der freien Energie von magnetischen Systemen in Anlehnung an [Ber98]

- a) bistabiles magnetisches System
- b) komplexes magnetisches System mit zahlreichen lokalen Energieminima

Das Ablösen einer Domänenwand von einer Störstelle erfolgt erst, wenn es eine energetisch günstigere Domänenwandkonfiguration gibt, in die das metastabile System übergehen kann. Dazu muss sich das von ihm eingenommene lokale Energieminimum in einen Sattelpunkt transformieren, sodass die bestehende Domänenwandstruktur energetisch instabil wird. Dafür gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Zum einen kann ein zeitlich variierendes

externes Magnetfeld die Ursache sein, denn dadurch wird das energetische Gleichgewicht des Systems kontinuierlich verändert. Zum anderen kann dieser Vorgang bei Temperaturen oberhalb des absoluten Nullpunktes allein durch thermische Fluktuationen erfolgen. Die Domänenstruktur wird demnach auch ohne ein zeitabhängiges äußeres Magnetfeld fortlaufend modifiziert, wodurch sich das System kontinuierlich in die Richtung abnehmender Energiezustände entwickelt und dem thermodynamischen Gleichgewicht annähert. Dieser Prozess wird als thermische Relaxation bezeichnet und soll im Rahmen dieser Arbeit nicht tiefer gehend behandelt werden. Unabhängig davon, ob durch ein externes Magnetfeld oder thermische Fluktuationen ausgelöst, ist jeder Übergang zum nächstgelegenen lokalen Energieminimum grundsätzlich mit einer sprungartigen Veränderung der Domänenwandkonfiguration verbunden. Dieser Effekt wird nach seinem Entdecker als Barkhausen-Sprung bezeichnet und kann auf ein einzelnes Wandsegment beschränkt sein oder ganze Domänenwände involvieren. Angesichts der zahlreichen und zufällig verteilten strukturellen Störungen im Material sowie der komplexen energetischen Wechselwirkungen weist sowohl die Häufigkeit seines Auftretens als auch seine räumliche Ausdehnung einen stochastischen Charakter auf.

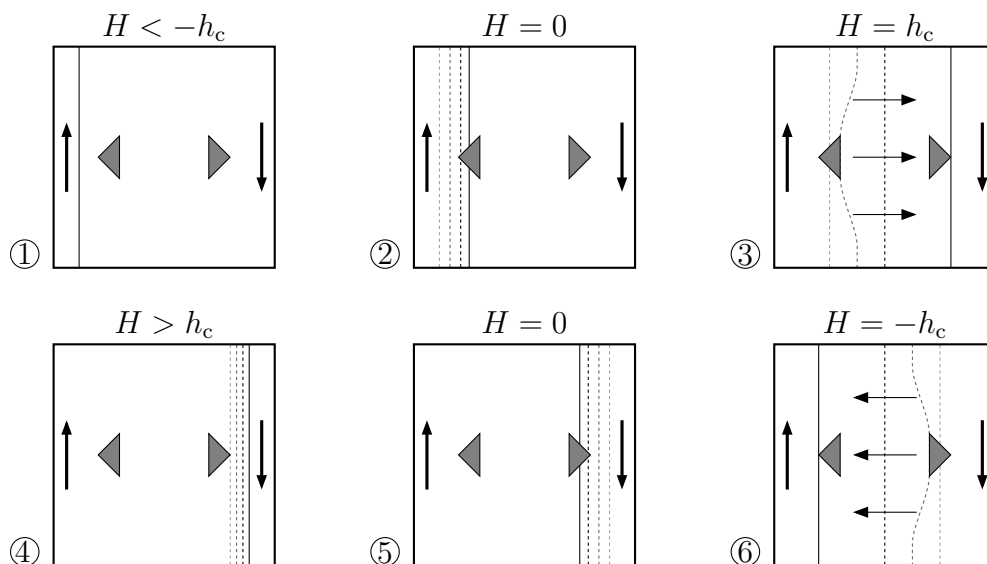


Bild 2.7: Gedankenmodell eines bistabilen magnetischen Systems unter dem Einfluss eines veränderlichen externen Magnetfeldes H

In Bild 2.7 ist das zuvor beschriebene bistabile System unter dem Einfluss eines externen Magnetfeldes H als Gedankenmodell dargestellt. Ein derartig vereinfachtes magnetisches System kommt in der Realität zwar nicht vor, die grundsätzlichen Wirkzusammenhänge des realen Magnetisierungsprozesses lassen sich dadurch aber anschaulich wiedergeben. Damit die Konsistenz im Zusammenhang mit dem idealisierten Energieprofil nach Abbildung 2.6a gegeben ist, werden bezüglich der Beschaffenheit der Störstellen bestimmte Annahmen getroffen. So sind diese durch zwei seitwärts gerichtete Dreiecke mit vertikal verlaufenden Basen repräsentiert. Deren gewählte Form und Ausrichtungen symbolisieren reversible und irreversible Wandverschiebungswege. Bewegungen der vertikalen Domänen-

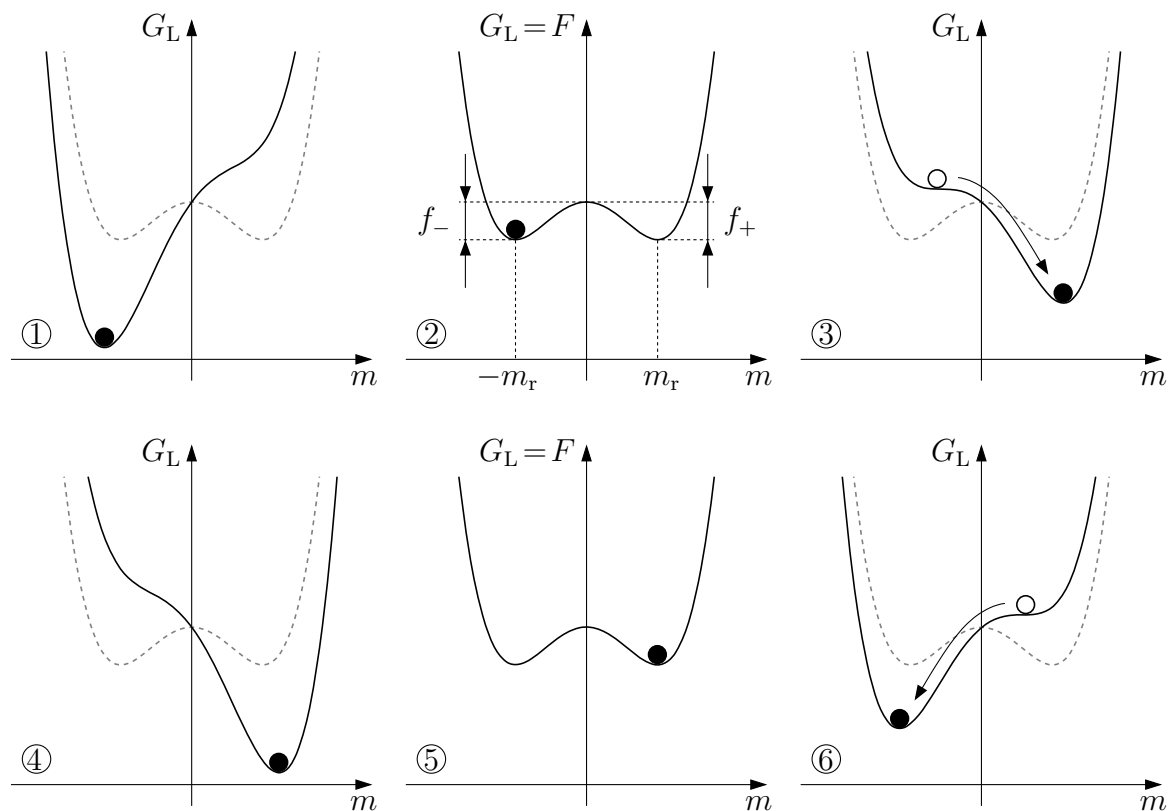


Bild 2.8: Entwicklung der freien Energie eines bistabilen magnetischen Systems unter dem Einfluss eines veränderlichen externen Magnetfeldes, angelehnt an [Ber98]

wand, die links von der Basis der linken Störstelle und rechts von der Basis der rechten Störstelle erfolgen, sind demnach gleichmäßig und reversibel, denn in diesem Bereich gibt es keine abrupten Übergänge, an denen die Wand haften bleibt. Verschiebungen über die Basen hinaus verlaufen dahingegen sprunghaft und irreversibel, weil hier kein Übergangsbereich existiert, in dem sich die Domänenwand kontinuierlich von der Fehlerstelle ablösen kann. Ein irreversibler Barkhausen-Sprung ereignet sich demnach ausschließlich, wenn die Domänenwand von einer Fehlerstelle zur benachbarten wechselt. Alle Wandverschiebungen, die keinen solchen Wechsel nach sich ziehen, sollen reversibel sein und folglich nur Bestand haben, solange das ursächliche Magnetfeld existiert. Der Verschiebungsweg der Domänenbegrenzung ist durch gestrichelte Linien gekennzeichnet. Die zwei senkrechten und in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Pfeile geben die Magnetisierungsrichtungen der beiden Domänen an, wobei ein nach oben gerichteter Pfeil einer positiven Magnetisierung und ein nach unten zeigender Pfeil einer negativen Magnetisierung entspricht. Die Fläche einer Domäne ist proportional zu dem von ihr ausgehenden magnetischen Moment. Das resultierende Gesamtmoment m ergibt sich aus der additiven Überlagerung der Teilmomente. Die Abbildungen 2.8 und 2.9 stellen den zugehörigen $G_L(m)$ -Zusammenhang und die $m(H)$ -Trajektorie dar. Die Zahlen in den drei Abbildungen kennzeichnen die Zuordnung der Domänenkonfigurationen zu den entsprechenden Energieprofilen und den Kurvenabschnitten in der $m(H)$ -Darstellung. Die metastabilen Zustände ergeben sich als

die Minima von G_L durch die Bedingungen $\partial G_L/\partial m = 0$ und $\partial^2 G_L/\partial m^2 > 0$.

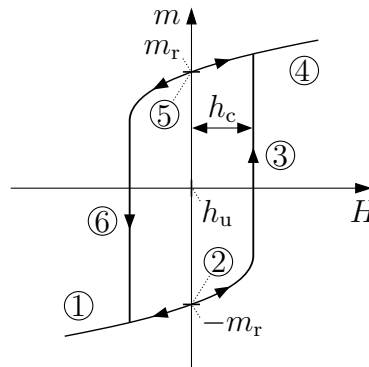


Bild 2.9: Hystereseschleife eines bistabilen magnetischen Systems, angelehnt an [Ber98]

Für betragsmäßig große negative Werte von H ist auch das resultierende magnetische Moment negativ und es existiert zunächst nur ein einziges Energieminimum, in dem sich das System aufhalten kann. Wächst H in die Richtung positiver Werte an, so bildet sich ab einer bestimmten Feldstärke $H = -h_c$ ein weiteres Minimum aus. Bei $H = 0$ verschwindet der zweite Term der rechten Seite von Gleichung (2.11) und es gilt $G_L = F$. Beide Minima besitzen dann die gleiche Energie und sind durch eine Energiebarriere voneinander getrennt, deren Höhe den identischen Energiedifferenzen f_+ beziehungsweise f_- entspricht. Die zugehörigen remanenten magnetischen Momente m_r und $-m_r$ sind betragsmäßig gleich groß. Erreicht die Feldstärke den Aufwärtsschwellwert $H = h_c$, geht das eingenommene Energieminimum in einen Sattelpunkt über und die bestehende Domänenkonfiguration wird instabil. Die Domänenwand löst sich in diesem Fall abrupt von der Störstelle ab und verschiebt sich, bis sie auf die andere Inhomogenität trifft. Dieser Vorgang entspricht einem spontanen Wechsel des Systems in das benachbarte Energieminimum. Bei diesem irreversiblen Barkhausen-Sprung verringert sich die freie Energie G_L und das magnetische Moment nimmt einen positiven Wert an. Währenddessen bedarf es keiner weiteren Veränderung des externen Magnetfeldes. Für weiter steigende Werte von H existiert nur noch das besetzte Energieminimum. Eine vergleichbare Situation zeigt sich, wenn das äußere Feld ausgehend von großen positiven Werten verringert wird. Der Barkhausen-Sprung ereignet sich in diesem Fall bei dem Abwärtsschwellwert $H = -h_c$. Der $m(H)$ -Zusammenhang ist dementsprechend durch eine Hysteresekurve gegeben, die zum Koordinatenursprung punktsymmetrisch ist und deren Schnittpunkte mit der Abszisse durch $\pm h_c$ und mit der Ordinate durch $\pm m_r$ definiert sind. Die Größe h_u in Bild 2.9 entspricht dem Mittelwert des Aufwärts- und des Abwärtsschwellwertes der magnetischen Hysteresekurve und stimmt wegen der zugrunde gelegten symmetrischen Systemkonfiguration mit der m -Achse überein.

Die Magnetisierung einer ferromagnetischen Substanz resultiert folglich aus Domänenprozessen, die das Ausbalancieren der miteinander konkurrierenden Energiebeiträge bewirken, wodurch das magnetische System stets ein lokales oder im speziellen Fall ein globales Minimum in der Energielandschaft der freien Energie einnimmt. Die strukturelle

Unordnung im Material definiert die Gestalt dieses Energieprofils und ist auf diese Weise an die Magnetisierung gekoppelt. Die makroskopisch wirksame Magnetisierung entspricht zu jedem Zeitpunkt einem Durchschnittswert, der sich aus den einzelnen Beiträgen aller Domänen ergibt. Dabei wirkt sich der hysteresebehaftete $m(H)$ -Zusammenhang der elementaren magnetischen Teilsysteme auf der mikroskopischen Ebene in der Art auf das makroskopische Verhalten des magnetischen Gesamtsystems aus, dass dessen charakterisierende $M(H)$ -Abhängigkeit ebenfalls durch Hysterese geprägt ist. Wegen der komplexen Domänenstruktur sind bei Feldamplituden unterhalb der magnetischen Sättigung nahezu unendlich viele verschiedene Domänenkonfigurationen möglich, die für ein und dasselbe äußere Magnetfeld je nach Feldhistorie identische oder auch unterschiedliche makroskopische Magnetisierungen hervorrufen. Die Abbildung 2.10 verdeutlicht diesen Sachverhalt anhand von verschiedenen makroskopischen Magnetisierungskennlinien eines Systems mit komplexer Domänenstruktur. Die durchgezogene gezeichnete Kurve symbolisiert die äußere Hysterese kennlinie. Sie reicht bis zur magnetischen Sättigungsamplitude des Materials und begrenzt damit das Gebiet möglicher Systemzustände in der M - H -Ebene. Die gestrichelt gezeichneten Kurven beschreiben innere Hystereseschleifen, deren Gestalt auch von der magnetischen Vorgeschichte abhängt. Die Eigenschaft, dass für ein bestimmtes H -Feld verschiedene Magnetisierungen M entstehen können, ist deutlich zu erkennen. Dort, wo sich innere Schleifen kreuzen, geht vom System für dieselbe Amplitude des äußeren Magnetfeldes eine identische Magnetisierung aus, obwohl sich die inneren Zustände, bedingt durch eine andere magnetische Historie, unterscheiden.

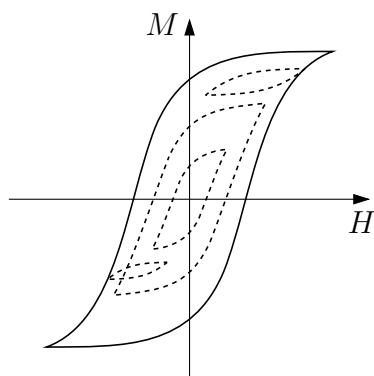


Bild 2.10: Makroskopische äußere und innere Hysteresekurven eines magnetischen Systems mit komplexer Domänenstruktur

Da der Ausdruck $\mu_0 H dM$ einen auf das Volumen bezogenen infinitesimalen Energiebeitrag definiert, ist die von der Hysteresekurve in der M - H -Ebene eingeschlossene Fläche proportional zu der während einer Signalperiode dissipierten Energiedichte. Letztere lässt sich auch als der Quotient aus der mittleren volumenspezifischen Verlustleistung p_G und der Signalfrequenz f ausdrücken. Die Integration über einen vollständigen Umlauf der Magnetisierungskurve liefert daher die Beziehung

$$\frac{p_G}{f} = \mu_0 \oint H dM. \quad (2.13)$$

Die mit den Barkhausen-Sprüngen verbundenen Domänenprozesse auf der Mikroskala weisen sehr kleine Zeitkonstanten auf, weshalb sie im Bereich leistungselektronischer Anwendungen in der Regel als ratenunabhängig angesehen werden können. Die Ursache für die damit einhergehenden ratenunabhängigen Hystereseverluste sind lokale Wirbelströme, die sich in der unmittelbaren Umgebung der sprunghaft bewegenden Domänenwände und Wandsegmente ausbilden. Die ausschließlich darauf zurückzuführende Komponente des $M(H)$ -Zusammenhangs für einen Magnetisierungszyklus wird durch eine Hystereseurve beschrieben, deren Gestalt ebenfalls unabhängig von der Änderungsrate des Magnetfeldes ist. Daneben kommt es in ferromagnetischen Stoffen unter dem Einfluss eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes auch zu verlustbehafteten Prozessen, die von dessen Änderungsrate abhängig sind. Dazu zählen die sogenannten Austauschprozesse. Sie beschreiben korrelierte Domänenwandverschiebungen auf der Mesoskala, die ebenso lokale Wirbelströme zur Folge haben. Die Änderungsrate des ursächlichen Feldes beeinflusst dabei jedoch die Anzahl der gleichzeitig aktiven Wände und dadurch die Höhe der damit verbundenen Verluste, auch Austauschverluste genannt. Ein zweiter ratenabhängiger Effekt tritt auf der Makroskala in Erscheinung. Hier kommt es zur Ausbildung von Wirbelströmen, die unabhängig von der Domänenstruktur sind. Sie werden deshalb als klassische Wirbelströme und die daraus entstehenden Verluste als klassische Wirbelstromverluste bezeichnet. Die ratenabhängigen Verlustprozesse führen zu einer ratenabhängigen Aufweitung der Hystereseurve. Abbildung 2.11 stellt diesen Effekt dar, wobei H_H das H -Feld der ratenunabhängigen Hysterese kennzeichnet. Die zusätzlichen Feldstärkeanteile infolge von Austauscheffekten und klassischen Wirbelströmen sind durch H_A und H_W gegeben.

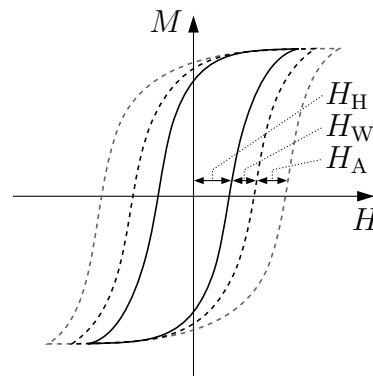


Bild 2.11: Ratenabhängige Aufweitung der magnetischen Hystereseschleife durch ratenabhängige Verlustprozesse in Anlehnung an [Ber98]

Eine allgemeingültige Theorie auf der Basis detaillierter mikromagnetischer Modelle zur präzisen Vorhersage des makroskopischen Magnetisierungsverhaltens unter Berücksichtigung der ratenunabhängigen und ratenabhängigen Effekte existiert bisher nicht. Eine alternative Herangehensweise für die Lösung dieses Problems baut auf dem Verlustseparationsprinzip auf. Anstelle die Magnetisierungsprozesse im Detail zu beschreiben und daraus das magnetische Gesamtverhalten abzuleiten, steht hierbei die Beschreibung des Verlustverhaltens im Vordergrund, was wiederum Rückschlüsse auf die Magnetisierungskennlinie eines Materials ermöglicht. Die physikalische Begründung für dieses Vorgehen liegt in der

Tatsache, dass der Magnetisierungsvorgang in einem Material auf weit verteilten Zeit- und Längenskalen stattfindet, weshalb das makroskopisch resultierende Verlustverhalten aus dem statistischen Durchschnitt vieler zufällig verteilter Einzelbeiträge hervorgeht. Im Zuge dieser natürlichen Durchschnittsbildung werden viele Details des Magnetisierungsprozesses irrelevant und es verbleiben nur wenige dominante Eigenschaften, die es zu beschreiben gilt.

Ausgehend von der Annahme, dass die gesamte im Material dissipierte Energie ausschließlich durch Wirbelströme verursacht wird, lässt sich die durchschnittliche volumen- und frequenzspezifische Verlustleistung für eine periodische Erregung zunächst ganz allgemein durch

$$p_G = \frac{f}{V} \int_V d^3r \int_0^{1/f} \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)|^2}{\sigma} dt \quad (2.14)$$

ausdrücken. Darin beschreibt σ die konstante elektrische Leitfähigkeit des Stoffes und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die vom Ort \mathbf{r} und von der Zeit t abhängige Wirbelstromdichte. Nun wird letztere durch die Geometrie des feldführenden Materials und dessen komplizierte Domänenstruktur mitsamt aller energetischen Wechselwirkungen bestimmt, sodass eine präzise Berechnung ihres räumlichen und zeitlichen Verlaufs ebenfalls nicht möglich ist. Auf der Basis statistischer Ansätze erlaubt Gleichung (2.14) jedoch das Ableiten genereller Aussagen über das Verlustverhalten. Dafür wird ein in z -Richtung unendlich ausgedehnter Materialabschnitt gemäß Abbildung 2.12 betrachtet. Das äußere Feld H sei räumlich homogen und wirke entlang der positiven z -Achse. Entmagnetisierungseffekte können bei dieser Konstellation vernachlässigt werden. Die Magnetisierung M und die Flussdichte B sollen überall senkrecht zur Querschnittsfläche gerichtet und unabhängig von z sein. Dementsprechend ereignen sich die Magnetisierungsänderungen infolge von Barkhausen-Sprüngen gedanklich in unendlich langen Zylinderelementen des Materials. Die daraus resultierenden lokalen Wirbelströme verlaufen parallel zur Querschnittsebene. Sie sind in der Abbildung durch Pfeile angedeutet.

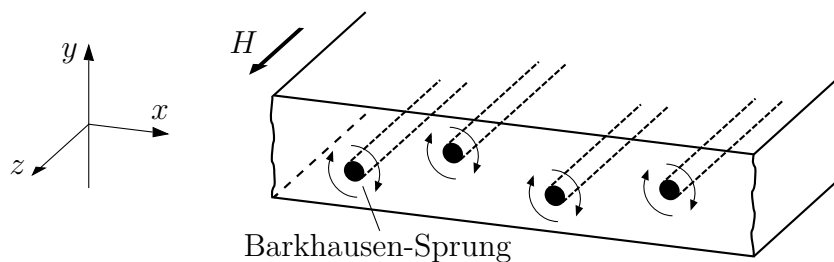


Bild 2.12: Ausschnitt eines magnetischen Materials mit einer idealisierten Repräsentation von Barkhausen-Sprüngen [Ber98]

Mit den beschriebenen Voraussetzungen kann die Untersuchung unabhängig von der z -Koordinate erfolgen, wodurch sich das Problem zu einer zweidimensionalen Anordnung in der y - x -Ebene vereinfachen lässt. Mit der darin liegenden Querschnittsfläche A des

Materialausschnitts tritt an die Stelle von Gleichung (2.14) die Beziehung

$$p_G = \frac{f}{A} \int_A d^2r \int_0^{1/f} \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)|^2}{\sigma} dt. \quad (2.15)$$

Weiterhin wird angenommen, es handele sich um ein weichmagnetisches Material. Bei leistungselektronischen Anwendungen trifft dies in der Regel zu, weil es ein notwendiges Kriterium für das Erzielen einer geringen Verlustleistung darstellt. Mit dieser Eigenschaft geht außerdem einher, dass die involvierten magnetischen Felder klein im Vergleich zur Magnetisierung des Materials sind. Die magnetische Flussdichte, die im Allgemeinen durch die Überlagerung von H und M gemäß

$$B = \mu_0(H + M) \quad (2.16)$$

bestimmt wird, gehorcht dann in guter Näherung dem vereinfachten Ausdruck

$$B \approx \mu_0 M. \quad (2.17)$$

Der Term auf der rechten Seite entspricht der magnetischen Polarisierung

$$J = \mu_0 M. \quad (2.18)$$

Bei dem Durchlauf einer halben Hysteresekurve von der minimalen Polarisierung $-J_{\max}$ bis zur maximalen Polarisierung $+J_{\max}$ kommt es innerhalb des Materialquerschnittes zu einer zufälligen Sequenz aus N Barkhausen-Sprüngen, von denen jeder einzelne eine magnetische Flussänderung $\Delta\phi$ bewirkt. Mit dem Gesamtfluss

$$\Phi = BA \quad (2.19)$$

sowie den Beziehungen (2.17) und (2.18) gilt

$$N = \frac{2AJ_{\max}}{\Delta\phi}. \quad (2.20)$$

Wegen der Linearität der Maxwell-Gleichungen resultiert die Wirbelstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ aus der additiven Überlagerung der Einzelbeiträge $\mathbf{j}_i(\mathbf{r}_i, t_i)$, die während des Magnetisierungsvorganges infolge von Barkhausen-Sprüngen entstehen. Die Summe

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i \quad (2.21)$$

drückt dies aus. Gemäß Gleichung (2.15) sind die Verluste proportional zum Quadrat der Stromdichte mit

$$\begin{aligned} |\mathbf{j}|^2 &= \sum_i |\mathbf{j}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \\ &= N \langle |\mathbf{j}_i|^2 \rangle + N(N-1) \langle \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die spitzen Klammern kennzeichnen statistische Durchschnittswerte aus allen Sprüngen beziehungsweise Paaren von Sprüngen. Da N typischerweise einen sehr großen Wert annimmt, gilt in sehr guter Näherung

$$|\mathbf{j}|^2 = N\langle |\mathbf{j}_i|^2 \rangle + N^2 \langle \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \rangle. \quad (2.23)$$

Der Term, der proportional zu N^2 ist, wird durch die Korrelationseigenschaften der Sprungsequenz bestimmt. Dabei lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Sind die Sprünge statistisch unabhängig voneinander, folgt daraus $N^2 \langle \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \rangle = \langle N\mathbf{j}_i \rangle^2$. Gibt es hingegen eine Form von Wechselbeziehung zwischen ihnen, so gilt ganz allgemein $\langle \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \rangle \neq \langle \mathbf{j}_i \rangle^2$. Gleichung (2.23) kann damit umgeschrieben werden zu

$$|\mathbf{j}|^2 = N\langle |\mathbf{j}_i|^2 \rangle + N^2 \left(\langle \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \rangle - \langle \mathbf{j}_i \rangle^2 \right) + \langle N\mathbf{j}_i \rangle^2. \quad (2.24)$$

Der linke Term auf der rechten Seite der Gleichung beschreibt den ratenunabhängigen Beitrag aller Barkhausen-Sprünge als das Produkt ihrer Anzahl N und dem statistischen Durchschnittswert der einzelnen quadrierten Wirbelstromdichtebeträge $\langle |\mathbf{j}_i|^2 \rangle$.

Der Ausdruck $\langle N\mathbf{j}_i \rangle^2$ hingegen entspricht dem Quadrat der durchschnittlichen Wirbelstromdichte. Diese wiederum ergibt sich nach den Maxwell-Gleichungen aus der mittleren Magnetisierungsrate innerhalb des Materialquerschnittes. Das diskontinuierliche Verhalten der Barkhausen-Sprünge hat wegen der Mittelwertbildung an dieser Stelle keinen Einfluss mehr. Damit repräsentiert der Term einen Beitrag infolge von klassischen Wirbelströmen, wie sie sich auch in einem domänenfreien und ideal homogenen Material ausbilden.

Der mittlere Term steht für den Austauschanteil und resultiert aus dem Vorhandensein von korrelierten Barkhausen-Sprüngen. Er geht aus der Differenz des allgemeinen korrelationsabhängigen Ausdrucks $N^2 \langle \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_j \rangle$ und dem klassischen Wirbelstromanteil $\langle N\mathbf{j}_i \rangle^2$ hervor. Die physikalische Ursache für den Effekt liegt in der Domänenstruktur begründet. Ereignet sich ein Barkhausen-Sprung, so erhöht sich dadurch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines weiteren Sprunges an einer unmittelbar benachbarten Stelle derselben Domänenwand oder innerhalb einer etwaigen Korrelationsregion, bestehend aus mehreren zu diesem Zeitpunkt simultan aktiven Wänden.

Die Gleichung (2.24) eingesetzt in die Beziehung (2.15) ergibt die spezifische Gesamtverlustleistung p_G als die Summe aus drei eigenständigen Verlusttermen, repräsentiert durch p_H , p_A und p_W . Das sind in dieser Reihenfolge die spezifischen Verlustleistungen aufgrund von ratenunabhängiger Hysterese, ratenabhängigen Austauscheffekten sowie infolge von ratenabhängigen klassischen Wirbelströmen und es gilt

$$p_G = p_H + p_A + p_W. \quad (2.25)$$

Daran wird deutlich, dass das Prinzip der Verlustseparation eine Konsequenz der stochastischen Natur des Magnetisierungsprozesses darstellt. Allein die Tatsache, dass die räumliche und zeitliche Durchschnittsbildung nach Gleichung (2.15) eine additive Struktur nach Gleichung (2.25) hervorbringt, rechtfertigt eine getrennte Beschreibung der auf unterschiedlichen Längen- und Zeitskalen stattfindenden Verlustmechanismen.

Zur Untersuchung der volumenspezifischen Verlustleistung infolge von ratenunabhängiger Hysterese wird der linke Term auf der rechten Seite der Gleichung (2.24) in die Beziehung (2.15) eingesetzt und N gemäß Gleichung (2.20) substituiert. Daraus erhält man den frequenzproportionalen Zusammenhang

$$p_H = 4J_{\max}f \frac{E_{BS}}{\Delta\phi}, \quad (2.26)$$

wobei E_{BS} die durchschnittlich dissipierte Energie infolge eines einzelnen Barkhausen-Sprunges bezogen auf eine Einheitslänge in z -Richtung darstellt. Die Unabhängigkeit der Verlustprozesse von der Änderungsrate des Magnetfeldes wird sichtbar, wenn man die zugehörige Dissipationsenergiedichte für einen Hystereseumlauf betrachtet, denn in Anlehnung an Gleichung (2.13) ist sie identisch mit der auf die Frequenz bezogene Verlustleistungsdichte $\frac{p_H}{f}$.

Der vorrangige Zweck von Gleichung (2.26) besteht hier im Aufzeigen der Ratenunabhängigkeit. Die Berechnung von p_H für eine bestimmte Anzahl von Barkhausen-Sprüngen ist aber zumeist nicht praktikabel. Stattdessen ist es im Bereich der Leistungselektronik zweckmäßig, den zeitabhängigen Magnetisierungsvorgang und die dabei entstehenden Verluste anhand von makroskopischen magnetischen Größen zu beschreiben. Dies erfordert ein Modell, das in der Lage ist, den ratenunabhängigen Zusammenhang $B(H_H)$ beziehungsweise das zugehörige inverse Verhalten korrekt abbilden zu können. In Kapitel 4 wird ein solches Modell vorgestellt. Eine entsprechende Zeitbereichsformulierung zur Berechnung von $p_H(t)$ kann dann auf der Grundlage von (2.8) für isotherme Bedingungen

$$p_H(t) = H_H(t) \frac{dB}{dt} - \frac{dF_V}{dt} \quad (2.27)$$

lauten. Die auf das Volumen bezogene und zeitabhängige Verlustleistung aufgrund von ratenunabhängigen Effekten resultiert demnach im Allgemeinen aus der Differenz der volumenspezifischen ratenunabhängigen Momentangesamtleistung $H_H(t) \frac{dB}{dt}$ und dem Blindleistungsdichteanteil als die zeitliche Ableitung der volumenspezifischen Helmholtzschen freien Energie $\frac{dF_V}{dt}$. Liegt ein periodischer Feldverlauf vor und genügt es, anstelle der Momentanverlustleistungsdichte die mittlere Verlustleistungsdichte zu bestimmen, so kann dies durch die Mittelwertbildung der Momentangesamtleistungsdichte über eine Periode erfolgen. Der Blindleistungsdichteanteil wird in diesem speziellen Fall zu null und muss keine Berücksichtigung finden, was die Anforderungen an das Hysteresemodell erheblich senkt.

Für das Ableiten einer Zeitbereichsformulierung zur Beschreibung des klassischen Wirbelstromverlustterms p_W ist zum einen das Durchflutungsgesetz

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.28)$$

und zum anderen das Induktionsgesetz

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.29)$$

heranzuziehen. Darin beschreibt der Ausdruck $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} , was der Verschiebungsstromdichte entspricht. Sie liefert erst bei vergleichsweise sehr hohen Frequenzen einen relevanten Beitrag und muss im Rahmen dieser Betrachtungen keine weitere Berücksichtigung finden. Die Wirbelstromdichte \mathbf{j} entspricht dem Durchschnittswert $\langle N \mathbf{j}_i \rangle$ aus Gleichung (2.24) und verlaufe mit der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} näherungsweise parallel zur x -Achse, weshalb an die Stelle der vektoriellen Größen von nun an die skalaren Größen j und E treten. Sie sind durch die elektrische Leitfähigkeit nach dem Ohmschen Gesetz

$$j = \sigma E \quad (2.30)$$

miteinander verbunden. Außerdem sei das durch die Wirbelströme hervorgerufene magnetische Gegenfeld so klein, dass Flussverdrängungseffekte vernachlässigbar sind. Die magnetische Feldstärke und die magnetische Flussdichte lassen sich deshalb im Folgenden auch weiterhin durch die mittleren skalaren Größen H und B ausdrücken. Mit den Maxwell-Gleichungen (2.28) und (2.29) sowie dem Ohmschen Gesetz nach (2.30) erhält man unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen für den Querschnitt aus Abbildung 2.12 die Beziehungen

$$\frac{\partial H}{\partial y} = j \quad (2.31)$$

und

$$\frac{\partial j}{\partial y} = \sigma \frac{dB}{dt} \quad (2.32)$$

zur Beschreibung des Problems. Während Gleichung (2.31) die Rückwirkung der Wirbelströme auf das magnetische Feld widerspiegelt, definiert der Ausdruck (2.32) deren Entstehung als Folge einer zeitlich veränderlichen magnetischen Flussdichte. Demnach ergibt sich die Wirbelstromdichte innerhalb des Querschnittes in Abhängigkeit von y aus

$$j(y, t) = \sigma \frac{dB}{dt} y. \quad (2.33)$$

Gemäß den Gleichungen (2.15) und (2.33) lässt sich die innerhalb eines Volumenelementes umgesetzte Momentanverlustleistung aufgrund von klassischen Wirbelströmen mit dem geometrie- und leitfähigkeitsabhängigen Faktor c_W nun allgemein durch

$$p_W(t) = c_W \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.34)$$

ausdrücken. Hier fällt die quadratische Abhängigkeit von der Änderungsrate der magnetischen Flussdichte auf. Formuliert man die volumenspezifische magnetische Verlustleistung auf der Basis konjugierter Variablen als das Produkt aus der magnetischen Feldstärke und der Zeitableitung der magnetischen Flussdichte, so führt dies auf

$$p_W(t) = H_W(t) \frac{dB}{dt} \quad (2.35)$$

mit

$$H_W(t) = c_W \frac{dB}{dt}. \quad (2.36)$$

Der durch H_W gegebene Wirbelstromanteil der magnetischen Feldstärke wächst demzufolge linear mit der Magnetisierungsrate des Materials an.

Schließlich soll auch für den Verlustleistungsdichteanteil infolge von Austauscheffekten p_A eine allgemeine zeitabhängige Berechnungsvorschrift hergeleitet werden. Hierfür ist zunächst eine einfache Anordnung mit zwei entgegengesetzt magnetisierten Domänen nach Abbildung 2.13 zu betrachten. Die beiden Bereiche werden durch eine ebene und unbiegsame 180° -Domänenwand voneinander getrennt, die sich in Abhängigkeit des äußeren Magnetfeldes parallel zur x -Achse verschiebt.

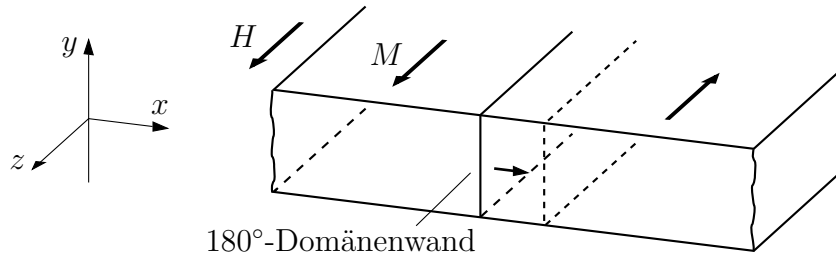


Bild 2.13: Ausschnitt eines magnetischen Materials mit einer idealisierten Repräsentation einer bewegten 180° -Domänenwand [Ber98]

Mit dieser Bewegung geht eine Veränderung des magnetischen Flusses Φ einher, wodurch in der unmittelbaren Wandumgebung Wirbelströme entstehen. Deren Verteilung lässt sich ebenfalls durch die Anwendung der Maxwell-Gleichungen bestimmen. Man erhält einen Ausdruck für die damit einhergehende und auf eine Einheitslänge in z -Richtung bezogene Verlustleistung $p_{\text{Wand}}(t)$, der in seiner Struktur äquivalent zu Gleichung (2.34) ist. Der darüber hinaus entstehende Verlustanteil infolge von ratenunabhängigen Domänenprozessen auf der Mikroskala wird in diesem Zusammenhang nicht betrachtet. Die unterschiedlichen Randbedingungen finden Berücksichtigung, indem an die Stelle von c_W nun der Faktor c_{Wand} tritt, sodass

$$p_{\text{Wand}}(t) = c_{\text{Wand}} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \quad (2.37)$$

gilt. In einem nächsten Schritt wird die Anordnung gedanklich um eine Vielzahl von parallelen und ebenso beschaffenen Wänden mit zufälligen Abständen zueinander erweitert. Eine schematische Darstellung dessen zeigt die Abbildung 2.14.

Die Anwendung der Maxwell-Gleichungen in Verbindung mit statistischen Betrachtungen ermöglicht das Berechnen der zugehörigen ratenabhängigen Momentanverlustleistung je Volumeneinheit, die in diesem Fall als $p_{\text{ZW}}(t)$ bezeichnet wird und sich aus der Summe von zwei verschiedenen Beiträgen zu

$$p_{\text{ZW}}(t) = p_W(t) + \frac{n_W}{A} \langle p_{\text{Wand}}(t) \rangle \quad (2.38)$$

ergibt. Das ist zum einen die volumenspezifische Verlustleistung infolge von klassischen Wirbelströmen $p_W(t)$ und zum anderen der Term $\frac{n_W}{A} \langle p_{\text{Wand}}(t) \rangle$, der sich proportional zu

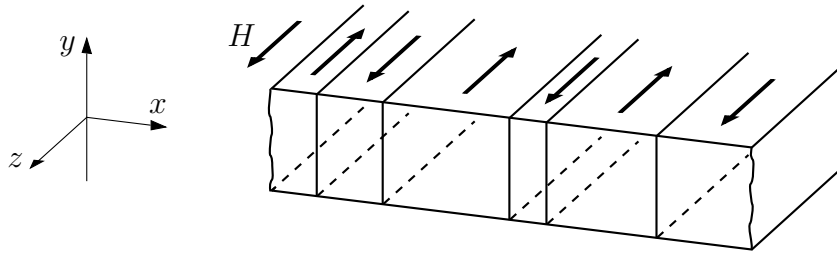


Bild 2.14: Ausschnitt eines magnetischen Materials mit einer idealisierten Repräsentation von parallelen 180° -Domänenwänden, deren Abstände zueinander sich in zufälliger Weise unterscheiden [Ber98]

der durchschnittlichen Verlustleistungsdichte verhält, die durch jede einzelne Wand in Abwesenheit der anderen Wände erzeugt würde. Die Größe n_W beschreibt die Anzahl der aktiven Domänenwände. Dieser Zusammenhang widerspiegelt die aus Gleichung (2.24) resultierende Separation der ratenabhängigen Verlustleistungsdichte in zwei voneinander unabhängige Verlustleistungsdichteanteile. Demzufolge ist der rechte Term in Gleichung (2.38) den Austauschverlusten p_A zuzuordnen. In Kombination mit der Gleichung (2.37) erhält man den Ausdruck

$$p_A(t) = c_{\text{Wand}} \frac{n_W}{A} \left\langle \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right\rangle. \quad (2.39)$$

Es wird angenommen, dass die Wandbewegungsgeschwindigkeit von Wand zu Wand in statistischer Weise variiert. Dieser Umstand lässt sich durch die Formulierung

$$\left\langle \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \right\rangle = (1 + \gamma) \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle^2 \quad (2.40)$$

berücksichtigen. Dabei gilt für den Parameter γ , der ein Maß für die Streuung der Domänenwandgeschwindigkeiten darstellt, die Bedingung $\gamma > 0$. Mit dieser Annahme und der durchschnittlichen Polarisationsrate innerhalb des Materialquerschnittes nach

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{n_W}{A} \left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle \quad (2.41)$$

folgt aus Gleichung (2.39) die Beziehung

$$p_A(t) = c_{\text{Wand}} \frac{A(1 + \gamma)}{n_W} \left(\frac{dJ}{dt} \right)^2. \quad (2.42)$$

Drückt man den Austauschverlustanteil ganz allgemein in Abhängigkeit eines konjugierten Variablenpaares nach

$$p_A(t) = H_A(t) \frac{dJ}{dt} \quad (2.43)$$

aus, so ergibt sich der zugehörige Feldstärkeanteil zu

$$H_A(t) = c_{\text{Wand}} \frac{A(1 + \gamma)}{n_W} \frac{dJ}{dt}. \quad (2.44)$$

Gleichung (2.44) gilt für eine bestimmte Anzahl von ungleichmäßig verteilten und bewegten, parallelen 180° -Domänenwänden. Reale Domänenstrukturen sind wesentlich komplexere Gebilde, als es die angenommene Anordnung nach Abbildung 2.14 vorgibt. Nach [Ber98] ist aber das dynamische und damit auch das dissipative Verhalten von komplizierten Domänenstrukturen, wo viele aktive Wände gemeinsam eine Flussänderung innerhalb eines Materialausschnittes hervorrufen, nicht wesentlich anders als das einer einzelnen fiktiven 180° -Domänenwand. Schließlich ist die Flussänderungsrate $\frac{d\phi}{dt}$ innerhalb eines Bereiches die grundlegende Größe, die die Ausprägung der Wirbelströme und folglich die Energiedissipation bestimmt, unabhängig davon, ob sie durch eine einzelne Wand oder durch eine komplexe Domänenstruktur erzeugt wird. Die einzigen Unterschiede bestehen in der geometrischen Ausdehnung und der Anzahl der aktiven Elemente. Darauf aufbauend kann die Beschreibung von übergeordneten Bereichen mit einer größeren Komplexität durch eine Generalisierung der abgeleiteten Zusammenhänge erfolgen. Jeder dieser Bereiche soll die miteinander in Korrelation stehenden, aktiven Domänenwände zusammenfassen. In der Literatur werden diese Korrelationsregionen auch als magnetische Objekte bezeichnet. Damit lässt sich eine allgemeine phänomenologische Beschreibung des Magnetisierungsprozesses vornehmen, bei dem eine bestimmte Anzahl an Korrelationsregionen, die gemäß Abbildung 2.15 in zufälliger Weise über den Materialquerschnitt verteilt sind, die beobachtbare Gesamtflussänderung hervorrufen.

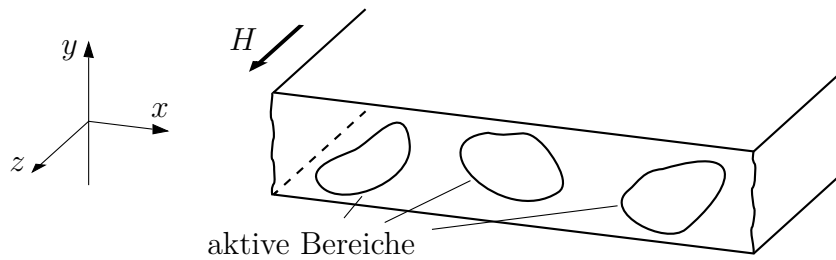


Bild 2.15: Ausschnitt eines magnetischen Materials mit einer idealisierten Repräsentation von zufällig verteilten aktiven Korrelationsregionen [Ber98]

Der mit den Austauschverlusten verbundene Feldstärkeanteil für das System mit Korrelationsregionen kann folglich durch eine Beziehung ausgedrückt werden, die äquivalent zu der Gleichung (2.44) ist. Anstelle von c_{Wand} und n_{W} werden die neuen Parameter c_{Obj} zur Berücksichtigung der unterschiedlichen geometrischen Verhältnisse und n_{O} für die Anzahl der aktiven magnetischen Objekte eingeführt. Daraus resultiert die Gleichung

$$H_{\text{A}}(t) = c_{\text{Obj}} \frac{A(1 + \gamma)}{n_{\text{O}}} \frac{dJ}{dt}. \quad (2.45)$$

Aus den vorhergehenden Überlegungen zur Konfiguration mit nur einer Domänenwand kann man die damit im Zusammenhang stehende Feldstärke zu

$$H_{\text{Wand}}(t) = c_{\text{Wand}} A \frac{dJ}{dt} \quad (2.46)$$

ableiten. Mit diesem Ausdruck und der effektiven Anzahl an aktiven Korrelationsregionen $n_{O,\text{eff}}$, die nach

$$n_{O,\text{eff}} = \frac{c_{\text{Wand}} n_O}{c_{\text{Obj}}(1 + \gamma)} \quad (2.47)$$

auch die Unterschiede bezüglich der geometrischen Verhältnisse und die Dispersion der Flussänderungsraten gemäß Gleichung (2.40) berücksichtigt, lässt sich die Beziehung (2.45) alternativ durch

$$H_A(t) = \frac{H_{\text{Wand}}(t)}{n_{O,\text{eff}}} \quad (2.48)$$

wiedergeben. Es wird deutlich, dass $n_{O,\text{eff}}$ die entscheidende Größe ist, die das Verlustverhalten charakterisiert. Zwischen ihr und dem Austauschfeldanteil H_A besteht eine wechselseitige Beziehung. Bei geringen Magnetisierungsraten verläuft der Magnetisierungsvorgang im Material räumlich inhomogen unter Mitwirkung von nur wenigen aktiven magnetischen Objekten, deren vergleichsweise kleine Feldstärke-Schwellwerte zum Erreichen der energetischen Instabilität gerade schon überschritten werden. Das Erzeugen höherer Magnetisierungsraten durch erhöhte Flussänderungsraten in den Korrelationsregionen erfordert gesteigerte Feldstärkeamplituden. Das hat zur Folge, dass zusätzlich auch Bereiche mit größeren Feldstärke-Schwellen aktiviert werden. Mit steigenden Frequenzen kommt es daher zu einer zunehmenden Homogenisierung des Magnetisierungsvorganges, zumindest solange Flussverdrängungseffekte infolge von klassischen Wirbelströmen noch vernachlässigbar sind. Darauf aufbauend wird ein linearer Zusammenhang zwischen der effektiven Anzahl an aktiven Korrelationsregionen $n_{O,\text{eff}}$ und dem Austauschfeldanteil H_A gemäß

$$n_{O,\text{eff}}(H_A) = n_{O,\text{eff},0} + \frac{H_A}{V_{O,\text{eff},0}} \quad (2.49)$$

angenommen. Darin sind $n_{O,\text{eff},0}$ und $V_{O,\text{eff},0}$ materialspezifische, phänomenologische Parameter. Die Gleichungen (2.48) und (2.49) beschreiben somit zwei konkurrierende Mechanismen. Einerseits bewirkt die Verteilung einer bestimmten Flussänderung über eine erhöhte Anzahl an aktiven Regionen $n_{O,\text{eff}}$ eine Verringerung des Austauschfeldanteils H_A . Andererseits kann die effektive Zahl der magnetischen Objekte $n_{O,\text{eff}}$ nur steigen, wenn das Feld H_A stärker wird. Vereint man beide Gleichungen durch die Elimination von $n_{O,\text{eff}}$, so folgt daraus eine Beschreibung des Austauschfeldanteils H_A , die diese wechselseitige Abhängigkeit berücksichtigt. Für ausreichend hohe Magnetisierungsraten, was nach [Ber98] bei vielen Materialien bereits ab Frequenzen von wenigen Hertz zutrifft, ist der Einfluss von $n_{O,\text{eff},0}$ vernachlässigbar und es ergibt sich der Wurzelausdruck

$$H_A(t) = \sqrt{H_{\text{Wand}} V_{O,\text{eff},0}} \cdot \quad (2.50)$$

Fasst man alle Faktoren, die von der Amplitude und der Änderungsrate unabhängig sind, mit dem Parameter c_A zusammen, kann ein alternativer Ausdruck für Gleichung (2.50) auch

$$H_A(t) = c_A \sqrt{\frac{dJ}{dt}} \quad (2.51)$$

lauten. Demnach steigt der durch H_A definierte Feldstärkeanteil infolge von Austauschfeldern mit der Wurzel aus der Magnetisierungsrate des Materials an. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die Gleichungen (2.49)-(2.51) nur für positive Werte von H_A und $\frac{dJ}{dt}$ gelten. Einer äquivalenten Formulierung für negative Werte steht aber nichts entgegen.

Mit den abgeleiteten Beziehungen für die ratenunabhängigen und ratenabhängigen Magnetisierungsprozesse lässt sich die undifferenzierte Beschreibung des Verlustseparationsprinzips nach Gleichung (2.25) weiter präzisieren. Die volumenspezifische Momentangesamtverlustleistung $p_G(t)$ kann in Abhängigkeit der magnetischen Polarisation dann durch

$$p_G(t) = p_H(t) + c_A \left(\frac{dJ}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} + c_W \left(\frac{dJ}{dt} \right)^2 \quad (2.52)$$

oder wegen $B \approx J$ alternativ auch in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte durch

$$p_G(t) = p_H(t) + c_A \left(\frac{dB}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} + c_W \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (2.53)$$

angegeben werden. Unter der einschränkenden Annahme harmonischer Signale ist außerdem eine entsprechende Formulierung im Frequenzbereich möglich. Dazu werden die neuen Koeffizienten c_H^* , c_A^* sowie c_W^* definiert. Sie fassen die probenspezifischen Parameter zusammen und sind Funktionen der während der Aussteuerung des Materials auftretenden maximalen Polarisation J_{\max} beziehungsweise der maximalen Flussdichte B_{\max} . Damit erhält man für die mittlere volumenspezifische Gesamtverlustleistung den Ausdruck

$$p_G = c_H^* f + c_A^* f^{\frac{3}{2}} + c_W^* f^2 \quad (2.54)$$

und für die im Verlauf von einer Signalperiode dissipierte Energiedichte den Zusammenhang

$$\frac{p_G}{f} = c_H^* + c_A^* \sqrt{f} + c_W^* f. \quad (2.55)$$

Letzterer ist in Abbildung 2.16 grafisch dargestellt.

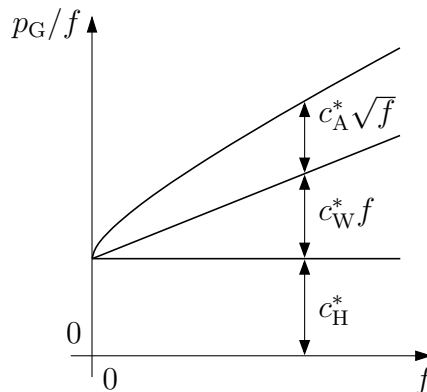


Bild 2.16: Auf eine Signalperiode bezogene frequenzabhängige Entwicklung der einzelnen Verlustanteile [Ber98]

Wegen der direkten Proportionalität zwischen der Höhe der Ummagnetisierungsverluste und der eingeschlossenen Fläche der Magnetisierungskurve nach Gleichung (2.13) spiegelt der frequenzabhängige Verlauf der einzelnen Verlustanteile auch die bisher durch die zugehörigen Feldstärkeanteile beschriebene Aufweitung der Hysteresekurve nach Bild 2.11 wider. Während der ratenunabhängige Hystereseanteil c_H^* einen über die Frequenz konstanten Beitrag liefert, steigen die Flächenanteile infolge von Austauscheffekten nach $c_A^* \sqrt{f}$ mit der Wurzel aus der Frequenz und infolge von klassischen Wirbelströmen gemäß $c_W^* f$ linear mit der Frequenz an.

2.3 Ferromagnetika in der Leistungselektronik

Ferromagnetika werden in der Leistungselektronik in Form von Magnetkernen für induktive Bauelemente eingesetzt, wo sie infolge ihrer hohen magnetischen Permeabilität zur Steigerung des magnetischen Flusses sowie zur Führung desselben dienen. Das begünstigt die Energieübertragung in Transformatoren sowie die Zwischenspeicherung von Energie in Spulen.

Im Allgemeinen gibt es zahlreiche Zielgrößen, die bei der Auslegung einer induktiven Komponente optimiert werden sollen. Für gewöhnlich stehen dabei manche von ihnen miteinander in Konflikt, weil die zugehörigen Maßnahmen zur Optimierung gegenläufig sind. Ein ganzheitliches Optimum ist dann nur im Sinne eines von den Randbedingungen der jeweiligen Anwendung abhängigen Kompromisses möglich. Dabei können die Anforderungen an die induktiven Bauelemente aufgrund des breiten Anwendungsbereiches von leistungselektronischen Schaltungen sehr unterschiedlich sein. Grundsätzlich erfordert die Gestaltung einer induktiven Komponente, dass die Wicklung oder die Wicklungen und der Magnetkern wegen der komplexen wechselseitigen Abhängigkeiten im Verbund betrachtet werden. Das daraus hervorgehende Optimierungsproblem lässt sich meist nur iterativ lösen. Geeignete Strategien und ausführlichere Informationen dazu findet der Leser zum Beispiel in [EM01, McL04]. An dieser Stelle soll darauf nicht weiter eingegangen werden, da die vorliegende Arbeit die magnetische Domäne fokussiert. Dort kann man prinzipiell zwischen zwei übergeordneten Designfreiheitsgraden unterscheiden. Das ist zum einen das Magnetkernmaterial und zum anderen die Magnetkerengeometrie.

Im Laufe der Zeit ist deshalb eine große Anzahl ferromagnetischer Materialien mit angepassten magnetischen Eigenschaften auf der Basis von Metallen und Metalloxiden entwickelt worden. Deren magnetische Kenngrößen resultieren abgesehen von der jeweiligen chemischen Zusammensetzung auch aus einer gezielten Beeinflussung mittels technologischer Herstellungsschritte. In der Literatur werden die Magnetwerkstoffe nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert. Gemäß [MS06] lassen sich magnetische Materialien zum Beispiel in Abhängigkeit der Bindungsverhältnisse und der Materialstruktur in die Gruppen

- metallisch kristalline Werkstoffe,
- metallisch amorphe Werkstoffe,

- metallisch nanokristalline Werkstoffe,
- oxidische Werkstoffe und
- polymergebundene metallische oder oxidische Werkstoffe

unterteilen. Des Weiteren kann man laut [MS06] auf der makroskopischen Ebene bezüglich des zugrunde liegenden Herstellungsverfahrens

- Bandmaterialien,
- Gussmagnetwerkstoffe,
- Sintermagnetwerkstoffe und
- Pulververbundwerkstoffe

voneinander abgrenzen. Ebenfalls üblich ist eine Klassifizierung magnetischer Materialien in Abhängigkeit davon, wie leicht sie sich magnetisieren und ummagnetisieren lassen. Ein Maß dafür stellt die betragsmäßige magnetische Feldstärke dar, die benötigt wird, um die remanente Magnetisierung eines zuvor bis zur Sättigungsgrenze angesteuerten Ferromagnetikums zum Verschwinden zu bringen. Sie heißt Koerzitivfeldstärke H_c . So unterscheidet man

- weichmagnetische Werkstoffe mit $H_c < 1 \text{ kA m}^{-1}$,
- magnetisch halbharte Werkstoffe mit $1 \text{ kA m}^{-1} \leq H_c \leq 10 \text{ kA m}^{-1}$ und
- hartmagnetische Werkstoffe mit $H_c > 10 \text{ kA m}^{-1}$

[HR13]. Zur Verdeutlichung stellt die Abbildung 2.17 die Hystereseschleifen eines weichmagnetischen Materials mit $H_c = H_{c,w}$ und eines hartmagnetischen Materials mit $H_c = H_{c,h}$ qualitativ gegenüber. In der Leistungselektronik kommen in der Regel die vergleichsweise leicht magnetisierbaren und verlustarm ummagnetisierbaren weichmagnetischen Materialien zum Einsatz.

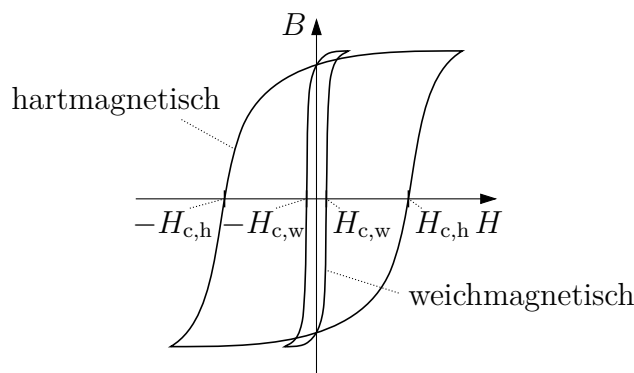


Bild 2.17: Äußere Hystereseschleifen eines weich- und eines hartmagnetischen Werkstoffes in Anlehnung an [Ben75]

Als weiterführende Literatur zu den Materialien und ihren Herstellungsverfahren wird dem Leser beispielsweise [HM86] und [HR13] empfohlen.

Mittlerweile sind auch im Hinblick auf die Magnetkerngeometrie standardmäßig sehr viele Varianten bezüglich der Form und der Größe verfügbar. Band- und Blechkerne gibt es

vor allem als Ring-, C-, E- und I-Kerne. Gesinterte Magnetkerne und Pulverkerne sind darüber hinaus auch in geometrisch komplexeren Ausführungen erhältlich, weil deren Herstellungsverfahren deutlich mehr Möglichkeiten bei der Formgebung bieten. Beispielgebend sind hier die häufig eingesetzten ETD-, PC- und RM-Kerne zu nennen [McL04, Pin15].

Die Abbildungen 2.18a und 2.18b stellen zwei unterschiedliche induktive Bauelemente schematisch dar. Sie dienen zur Illustration der im Folgenden zu erläuternden grundlegenden Zusammenhänge und Definitionen bezüglich magnetischer Kreise.

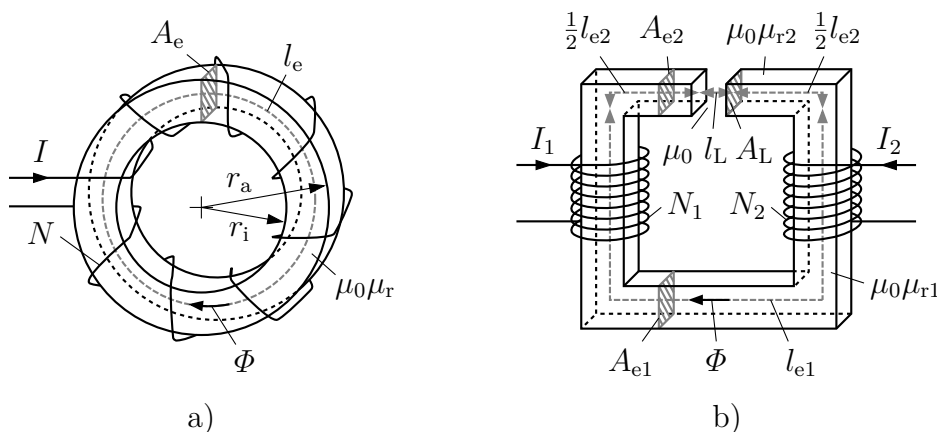


Bild 2.18: Schematische Darstellung induktiver Bauelemente

- Geschlossener magnetischer Kreis in Gestalt eines Ringkerns mit einer Wicklung zur Realisierung einer Toroidspule
- Magnetischer Kreis mit Luftspalt und zwei Wicklungen zur Realisierung eines Transformators

Gemäß dem Durchflutungsgesetz in integraler Form

$$\oint_{S(F)} \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \iint_F \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\mathbf{f} \quad (2.56)$$

entspricht das Flächenintegral über die Gesamtstromdichte $\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ dem Umlaufintegral über die magnetische Feldstärke \mathbf{H} entlang der Berandung S dieser Fläche F . Demnach ist der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom I , der durch einen geraden elektrischen Leiter fließt, und dem daraus resultierenden magnetischen Feld \mathbf{H} unter Vernachlässigung der Verschiebungsstromdichte $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ durch

$$\oint_{S(F)} \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = I \quad (2.57)$$

gegeben. Im Fall einer geschlossenen Toroidspule mit dem Innenradius r_i , dem Außenradius r_a und einer aus N Windungen bestehenden, vom Strom I durchflossenen Wicklung gemäß Abbildung 2.18a erhält man in guter Näherung

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r} \quad ; \quad r_i \leq r \leq r_a. \quad (2.58)$$

Ist zudem die Annahme $r_i \approx r_a$ zulässig, kann näherungsweise ein homogenes H -Feld im Magnetkern vorausgesetzt werden. Dann lässt sich die durchschnittlich erzeugte Feldstärke unter Verwendung einer effektiven Weglänge des weichmagnetischen Pfades, die in diesem Fall mit

$$l_e = \pi(r_i + r_a) \quad (2.59)$$

dem mittleren Umfang entspricht, zu

$$H = \frac{NI}{l_e} \quad (2.60)$$

approximieren. Jede weitere stromführende Wicklung ist anhand einer Addition des entsprechenden Produktes aus Windungszahl und vorzeichenrichtiger Stromstärke im Zähler der rechten Seite der Gleichung zu berücksichtigen. Eine entsprechend verallgemeinerte Formulierung für w Wicklungen lautet

$$H = \frac{1}{l_e} \sum_{j=1}^w N_j I_j. \quad (2.61)$$

Wie zum Beispiel [HR13] zu entnehmen ist, gilt die Beziehung (2.61) mit einer der Geometrie angepassten mittleren Pfadlänge l_e in guter Näherung auch für geschlossene unverzweigte magnetische Kreise, die nicht die Gestalt eines Toroiden aufweisen, vorausgesetzt ein hochpermeables, homogenes Material führt den magnetischen Fluss.

Die durch mindestens eine bestromte Wicklung erzeugte magnetische Feldstärke H hat eine Magnetisierung M des ferromagnetischen Kernmaterials zur Folge, wobei der Zusammenhang $M(H)$ eine komplexe Hysterese gemäß Bild 2.10 aufweist. In der Leistungselektronik ist es üblich, die magnetische Flussdichte B anstelle von M heranzuziehen. Die Abbildung 2.19 stellt die ebenfalls hysteresebehaftete Beziehung $B(H)$ und die in diesem Zusammenhang häufig verwendeten Definitionen anhand einer äußeren Schleife mit innerer Verzweigung exemplarisch dar. Wird ein magnetisches Material ausgehend vom entmagnetisierten Zustand mit einem äußeren Magnetfeld magnetisiert, bezeichnet man die dabei entstehende Kurve in der B - H -Ebene als Neukurve. Die bei maximaler Magnetisierung des Materials erreichte Flussdichte entspricht in Anlehnung an die Definition der magnetischen Sättigung der sogenannten Sättigungsflussdichte B_s . Weitere charakteristische Punkte sind die Remanenzflussdichte B_r , die als Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die verbleibende Magnetisierung in Abwesenheit eines äußeren H -Feldes nach vorausgegangener Aussteuerung des Magnetmaterials bis zur Sättigungsgrenze widerspiegelt, und die bereits eingangs erläuterte Koerzitivfeldstärke H_c als Schnittpunkt mit der Abszissenachse.

Die Abhängigkeit zwischen den Größen B und H wird gemeinhin mit der bereits in Kapitel 2.1 eingeführten relativen Permeabilität μ_r in Verbindung mit der magnetischen Feldkonstante μ_0 hergestellt. Ausgehend von der Gleichung (2.16) erhält man

$$\begin{aligned} B &= \mu_0(H + M) \\ &= \mu_0 \left(1 + \frac{M}{H} \right) H \\ &= \mu_0 \mu_r H. \end{aligned} \quad (2.62)$$

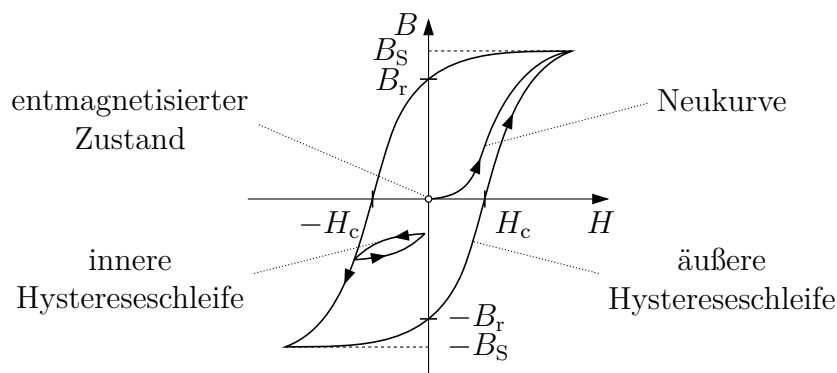


Bild 2.19: Wichtige Bezeichnungen und charakteristische Punkte im Zusammenhang mit der hysteresenbehafteten Beziehung zwischen B und H in Anlehnung an [HM86]

Das Verhältnis von B zu H entspricht mit

$$\frac{B}{H} = \mu_0 \mu_r \quad (2.63)$$

der magnetischen Leitfähigkeit als das Produkt $\mu_0 \mu_r$.

Variieren Material oder Geometrie innerhalb eines magnetischen Kreises, ist er gedanklich in der Art zu segmentieren, dass die daraus hervorgehenden Abschnitte in diesen Eigenschaften zumindest näherungsweise konstante Verhältnisse aufweisen. Die auf die magnetische Materialebene bezogenen Gleichungen (2.61) und (2.63) gehen dadurch bei einer Aufteilung in k hintereinander geschaltete magnetische Segmente in

$$\sum_{i=1}^k H_i l_{ei} = \sum_{j=1}^w N_j I_j \quad (2.64)$$

und

$$\frac{B_i}{H_i} = \mu_0 \mu_{ri} \quad ; \quad i = 1 \dots k \quad (2.65)$$

über. Dabei ist die dem Magnetkreissegment i zugeordnete magnetische Pfadlänge durch l_{ei} , die Querschnittsfläche durch A_{ei} und die relative Permeabilität durch μ_{ri} gegeben. Die zugehörigen magnetischen Feldgrößen tragen die Bezeichnungen H_i und B_i .

Häufig wird die Permeabilitätszahl zur besseren Berücksichtigung der nichtlinearen Beziehung zwischen B und H als feldabhängige Funktion $\mu_r = f(H)$ angenommen. Doch auch dann stellt die Verwendung der Gleichungen (2.63) beziehungsweise (2.65) zur Beschreibung des ferromagnetischen Magnetisierungsverhaltens eine starke Vereinfachung dar, weil die komplexe Hysterese des realen $B(H)$ -Zusammenhangs auf dieser Grundlage nicht ohne Weiteres abzubilden ist. Trotz ihrer erheblich eingeschränkten Aussagekraft ist die Größe μ_r in der Praxis von hoher Bedeutung. Dies liegt auch darin begründet, dass sich Materialien mit ihr in unkomplizierter Weise grob magnetisch charakterisieren und klassifizieren lassen. Zudem ermöglicht sie eine vereinfachte analytische Darstellung grundlegender

Zusammenhänge bezüglich magnetischer Komponenten. Deshalb soll hier zunächst ebenfalls noch von ihr Gebrauch gemacht werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit kommt hingegen ein operatorbasiertes Modell zum Einsatz, das den realen hysteresebefahenen $B(H)$ -Zusammenhang inklusive der Sättigungserscheinungen ohne direkten Bezug zu μ_r wiedergibt. Das Modell erlaubt aber die Berechnung der Permeabilitätszahl für beliebige Arbeitspunkte und jede magnetische Vorgeschichte.

Die Abbildungen 2.20a und 2.20b zeigen ohne Anspruch auf Vollständigkeit einige zur Charakterisierung ferromagnetischer Stoffe gebräuchliche Definitionen der betriebspunkt-abhängigen relativen Permeabilität auf [WD67, HM86, HR13]. Die Amplitudenpermeabilität

$$\mu_a = \frac{1}{\mu_0} \frac{\hat{B}}{\hat{H}} \quad (2.66)$$

definiert die relative Permeabilität, die durch das Verhältnis zweier einander zugeordneter Flussdichte- und Feldstärkeamplituden \hat{B} und \hat{H} auf der Neukurve bestimmt ist. Wichtige Spezialfälle sind die Anfangspermeabilität und die maximale Permeabilität. Die Anfangspermeabilität μ_i entspricht der Amplitudenpermeabilität bei $\hat{B} = 0$ und $\hat{H} = 0$. Aus praktischen Gründen wird stattdessen meist der Grenzwert für sehr kleine Amplituden

$$\mu_i = \lim_{\hat{H} \rightarrow 0} \mu_a \quad (2.67)$$

angegeben. Die maximale Permeabilität μ_{\max} ist der Höchstwert der relativen Permeabilität, der entlang der Neukurve erreicht wird. Eine weitere Definition stellt die differentielle Permeabilität dar. Sie ist die relative Permeabilität, die nach

$$\mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \quad (2.68)$$

mit dem Quotienten aus der Steigung der Magnetisierungskurve $B(H)$ und der magnetischen Feldkonstante in einem bestimmten Punkt korrespondiert. Die sogenannte reversible Permeabilität

$$\mu_{\text{rev}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (2.69)$$

beschreibt die relative Permeabilität bei kleinen periodischen Wechselfeldaussteuerungen mit den Amplituden ΔH und ΔB in einem Arbeitspunkt auf der Neukurve oder der Hysteresekurve, der durch eine zusätzliche Gleichfeldüberlagerung bestimmt wird. Die remanente Permeabilität μ_{rem} ist schließlich die relative Permeabilität, die man bei kleiner Wechselaussteuerung um einen Remanenzpunkt nach vorangegangener Magnetisierung erhält.

Neben dem Durchflutungsgesetz stellt das Gaußsche Gesetz des Magnetismus eine wesentliche Grundlage für die Berechnung magnetischer Kreise dar. Es drückt die Quellenfreiheit des Magnetfeldes aus, indem es mit

$$\oint_{F(V)} \mathbf{B} \, d\mathbf{f} = 0 \quad (2.70)$$

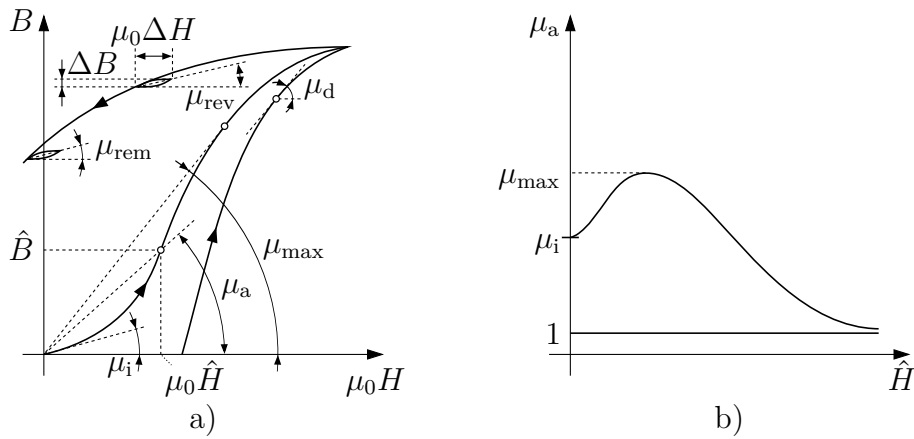


Bild 2.20: Definitionen der relativen Permeabilität, angelehnt an [WD67, HM86, HR13]
a) Neukurve und Hysteresekurve im ersten Quadranten der B - $\mu_0 H$ -Ebene
b) Amplitudenpermeabilität μ_a als Funktion der magnetischen Feldstärke \hat{H}

besagt, dass das Flächenintegral der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} über eine geschlossene Oberfläche F eines Volumens V immer gleich null ist. Das Flächenintegral über die magnetische Flussdichte \mathbf{B} definiert gemäß

$$\iint_F \mathbf{B} \, d\mathbf{f} = \Phi \quad (2.71)$$

zugleich den magnetischen Fluss Φ , der danach eine skalare Größe beschreibt, die in jedem Abschnitt eines unverzweigten magnetischen Kreises stets gleich groß ist. Anhand der effektiven Querschnittsfläche des weichmagnetischen Pfades A_e kann man deshalb bei einer gleichmäßigen Kernquerschnittsgeometrie und einer homogenen magnetischen Flussdichte B die Beziehung

$$\Phi = B A_e \quad (2.72)$$

zwischen der Größe Φ der Systemebene und der Größe B der Feldebene herstellen. Die zu H zugehörige Größe auf der Systemebene wird als magnetische Durchflutung bezeichnet und entspricht nach

$$\Theta = \sum_{j=1}^w N_j I_j \quad (2.73)$$

der Summe der umfassten Ströme. Zwischen ihr und der magnetischen Feldstärke H besteht Gleichung (2.61) zufolge der Zusammenhang

$$\Theta = H l_e. \quad (2.74)$$

Das Verhältnis von Φ zu Θ definiert in Analogie zu (2.63) den magnetischen Leitwert

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\Theta} &= \frac{B A_e}{H l_e} \\ &= \mu_0 \mu_r \frac{A_e}{l_e} \end{aligned} \quad (2.75)$$

und der Kehrwert wird sinngemäß magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_e}{A_e} \quad (2.76)$$

genannt. Mit der magnetischen Durchflutung nach (2.73) resultiert der magnetische Fluss folglich aus

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} . \quad (2.77)$$

In dem Fall, dass Inhomogenitäten des Materials oder der Geometrie eine gedankliche Segmentierung des magnetischen Kreises erfordern, ist begründet durch (2.70) bei einer Unterteilung in k hintereinander geschaltete magnetische Abschnitte anstatt Gleichung (2.72) die Beziehung

$$\Phi = B_i A_{ei} \quad ; \quad i = 1 \dots k \quad (2.78)$$

heranzuziehen. Der Zusammenhang (2.74) geht dann wegen (2.64) in

$$\Theta = \sum_{i=1}^k H_i l_{ei} \quad (2.79)$$

über. Das Verhältnis der magnetischen Durchflutung Θ zum magnetischen Fluss Φ definiert in der Folge anhand von

$$\begin{aligned} \frac{\Theta}{\Phi} &= \sum_{i=1}^k \frac{H_i l_{ei}}{B_i A_{ei}} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{l_{ei}}{A_{ei}} \end{aligned} \quad (2.80)$$

den magnetischen Gesamtwiderstand

$$R_m = \sum_{i=1}^k R_{mi} \quad (2.81)$$

als die Summe der k Teilwiderstände mit

$$R_{mi} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{l_{ei}}{A_{ei}} \quad ; \quad i = 1 \dots k . \quad (2.82)$$

Wenn der ferromagnetische Pfad des magnetischen Kreises wie in Bild 2.18b durch einen Luftspalt mit der approximierten Permeabilitätszahl $\mu_r = 1$ unterbrochen ist, kann man dies zweckmäßigerweise anhand eines separaten magnetischen Luftspaltwiderstandes

$$R_L = \frac{1}{\mu_0} \frac{l_L}{A_L} \quad (2.83)$$

mit der effektiven Länge des Pfades magnetischer Feldlinien im Luftspalt l_L und der effektiven Querschnittsfläche des Luftspalts A_L berücksichtigen. Es sei das Segment k dem

Luftspalt zugeordnet, sodass gilt $l_{ek} = l_L$, $A_{ek} = A_L$ und $\mu_{rk} = 1$. Der magnetische Gesamtwiderstand des unverzweigten magnetischen Kreises berechnet sich dann zu

$$R_m + R_L = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{l_{ei}}{A_{ei}} + \frac{1}{\mu_0} \frac{l_L}{A_L} \quad (2.84)$$

und für den magnetischen Fluss gilt

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m + R_L}. \quad (2.85)$$

Die Auswirkungen eines Luftspaltes und anderer Einflüsse auf das Ausgangs-Eingangs-Verhalten eines magnetischen Systems mit einem ferromagnetischen Kernmaterial zeigt die Abbildung 2.21. So bewirkt ein Luftspalt im magnetischen Kreis eine Scherung der Hystereseurve in der Art, dass abgesehen von einer Verringerung der effektiven magnetischen Permeabilität die magnetische Sättigung gemäß Bild 2.21a erst bei betragsmäßig größeren magnetischen Durchflutungen einsetzt. Dahingegen hat eine gesteigerte Temperatur nach Bild 2.21b in der Regel eine herabgesetzte magnetische Sättigungsgrenze zur Folge. Für gewöhnlich verändert sich, der Illustration entsprechend, auch die gesamte Gestalt der Hystereseurve in Abhängigkeit der Temperatur. Zur Art dieser Änderung lässt sich aber keine generell gültige Aussage treffen, weil der Zusammenhang sehr materialspezifisch ist. Bild 2.21c deutet schließlich an, wie eine erhöhte Frequenz des Eingangssignals zu einer Aufweitung der Hystereseurve führt.

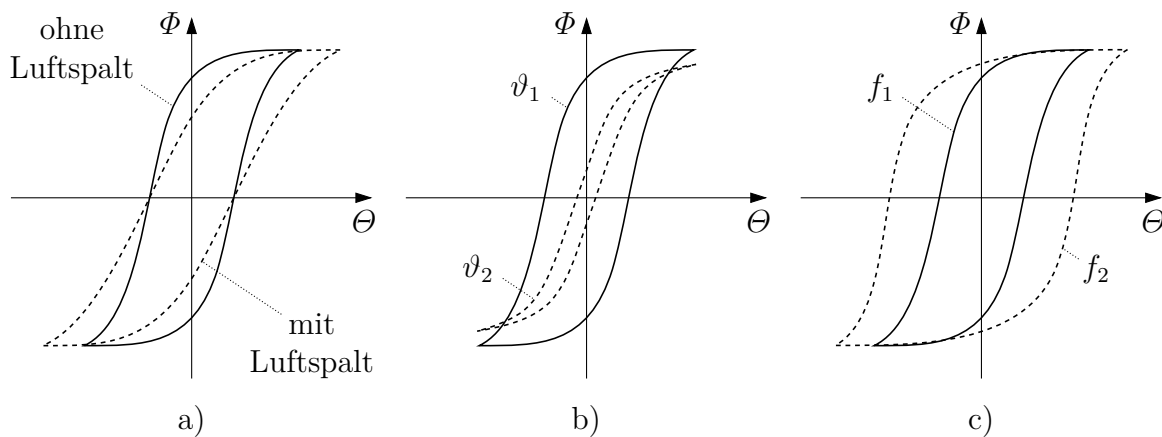


Bild 2.21: Qualitative Auswirkungen verschiedener Einflüsse auf die Magnetisierungskurve eines magnetischen Kreises mit ferromagnetischem Kernmaterial
a) Scherung der Hystereseurve infolge eines Luftspaltes im Magnetkreis
b) Hysteresekurven bei unterschiedlichen Temperaturen mit $\vartheta_2 > \vartheta_1$
c) Hysteresekurven bei unterschiedlichen Frequenzen mit $f_2 > f_1$

Die in diesem Unterkapitel dargestellten analytischen Zusammenhänge zeigen Ähnlichkeiten zwischen elektrischen und magnetischen Kreisen auf. In der Tabelle 2.1 sind wesentliche Analogien der beiden Domänen zusammengefasst. Eine wichtige Konsequenz dessen ist,

dass sich magnetische Kreise wie auch elektrische Kreise durch Ersatznetzwerke mit aktiven und passiven Elementen in Serien- und Parallelschaltung modellieren lassen und zur Analyse die Kirchhoffschen Gesetze herangezogen werden können.

Elektrische Größen		Magnetische Größen	
Elektr. Spannung	$U = \oint_{S(F)} \mathbf{E} \, d\mathbf{s}$	Magn. Durchflutung	$\Theta = \oint_{S(F)} \mathbf{H} \, d\mathbf{s}$
Elektr. Strom	$I = \iint_F \mathbf{j} \, d\mathbf{f}$	Magn. Fluss	$\Phi = \iint_F \mathbf{B} \, d\mathbf{f}$
Materialgleichung	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$	Materialgleichung	$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$
Elektr. Widerstand	$R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma A}$	Magn. Widerstand	$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{l_e}{\mu_0 \mu_r A_e}$

Tabelle 2.1: Analogien elektrischer und magnetischer Größen

Die Abbildungen 2.22a und 2.22b illustrieren die Entwicklung eines magnetischen Ersatzschaltbildes am Beispiel des in der Zeichnung 2.18b gezeigten Transformators. Dazu veranschaulicht Bild 2.22a die Segmentierung des magnetischen Kreises sowie die Zuordnung der magnetischen Widerstände. Damit und unter Verwendung von Quellen zur Berücksichtigung der Wicklungen lässt sich der magnetische Kreis dann durch ein äquivalentes Ersatznetzwerk nach Bild 2.22b modellieren.

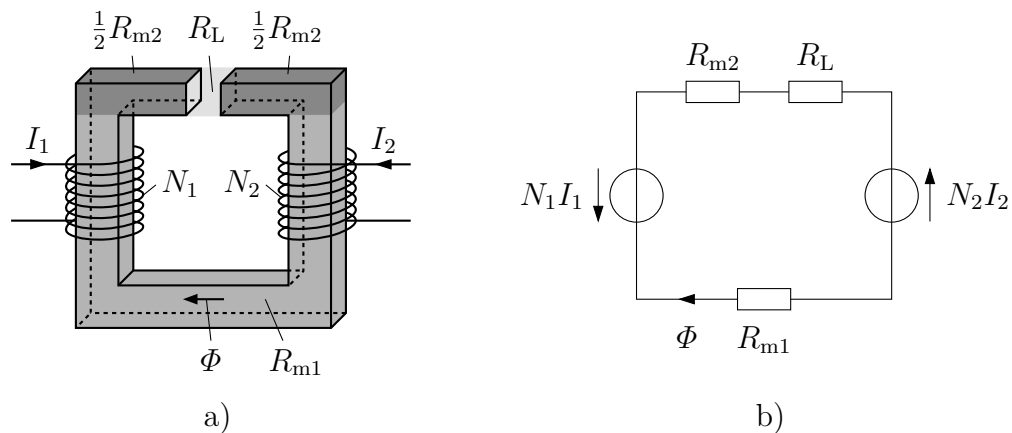


Bild 2.22: Entwicklung eines magnetischen Ersatzschaltbildes für die in der Abbildung 2.18b dargestellte induktive Komponente
a) Magnetkreissegmentierung und Zuordnung der magnetischen Widerstände
b) Magnetisches Ersatzschaltbild

3 Messdatenbasierte Charakterisierung ferromagnetischer Materialien

Die Parametrierung des Modells zur Beschreibung des sättigungs- und hysteresebefahenen magnetischen Übertragungsverhaltens ferromagnetischer Stoffe für allgemeine Zeitsignale innerhalb eines großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereiches setzt eine geeignete Messdatenbasis voraus. Im Fokus dieses Kapitels steht das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Messsystem, das eine entsprechend umfassende und präzise Charakterisierung der Kernmaterialien zulässt. Im ersten Teil wird zunächst das grundsätzliche Prinzip des gewählten Messverfahrens erläutert. Der zweite Abschnitt geht auf die technische Realisierung des Messsystems ein und der dritte Teil zeigt schließlich beispielgebend das Resultat der messtechnischen Analyse anhand einer Auswahl von Magnetisierungskurven verschiedener Kernmaterialien auf.

3.1 Messverfahren zur breitbandigen Bestimmung von Magnetisierungskennlinien

Das Messverfahren soll die präzise magnetische Charakterisierung von Kernmaterialien über einen großen Amplituden- und Frequenzbereich erlauben, wobei das Magnetisierungsverhalten in Abhängigkeit des Magnetwerkstoffes und der Temperatur sehr unterschiedlich sein kann. Während der relevante Amplitudenbereich zu betragsmäßig hohen magnetischen Feldern hin für gewöhnlich durch die magnetische Sättigung des jeweiligen Materials limitiert ist, werden die Grenzen des Frequenzbereiches zur Erstellung der Messdatenbasis durch die stoffspezifische Ausprägung der ratenunabhängigen und der ratenabhängigen Magnetisierungsvorgänge bestimmt. So erfordert die Modellparameteridentifikation für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten einerseits die Messung von $B(H)$ -Kennlinien bei vergleichsweise kleinen Änderungsraten des magnetischen Feldes, damit ratenabhängige Prozesse nahezu keinen Einfluss haben. Andererseits verlangt die Bestimmung der Modellparameter für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten auch die messtechnische Analyse der Magnetisierungsvorgänge bei höheren Änderungsraten des Magnetfeldes, sodass ratenabhängige Effekte in ihrer Wirkung bereits signifikant sind, die Flussverdrängung infolge klassischer Wirbelströme hingegen noch vernachlässigbar ist. In Abhängigkeit des Materials können die zu erzeugenden Amplituden und Frequenzen der magnetischen Feldstärke demnach sehr unterschiedlich sein.

Daher nutzt das hier eingesetzte Messsystem für einen unteren und einen oberen Frequenzbereich jeweils eine eigene Messschaltung. In beiden Fällen kommt jedoch dasselbe

Grundprinzip zur Anwendung. So wird mit einer vom Strom $I_1(t)$ durchflossenen Primär- oder Anregungsspule der Windungszahl N_1 in einem aus dem zu charakterisierenden Material bestehenden Magnetkern mit den effektiven Geometrieparametern l_e und A_e gemäß dem Durchflutungsgesetz (2.56) und der daraus abgeleiteten Beziehung (2.61) ein magnetisches Feld $H(t)$ und infolge dessen eine magnetische Flussdichte $B(t)$ erzeugt. Gemäß dem Induktionsgesetz, dessen integrale Darstellung

$$\oint_{S(F)} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_F \mathbf{B} \, d\mathbf{f} \quad (3.1)$$

lautet, ist die negative zeitliche Änderung des mit (2.71) gegebenen magnetischen Flusses durch die Fläche F gleich dem Umlaufintegral über die elektrische Feldstärke \mathbf{E} längs der Berandung S dieser Fläche. Zwischen den Drahtenden einer hochohmig abgeschlossenen Sekundär- oder Messspule mit der Windungszahl N_2 entsteht in der Folge eine Potentialdifferenz, die der messbaren Sekundärspannung

$$U_2(t) = N_2 A_e \frac{dB}{dt} \quad (3.2)$$

entspricht. Solange für den Sekundärstrom die Bedingung $I_2(t) = 0$ hinreichend gut erfüllt ist, kann das von ihm ausgehende magnetische Gegenfeld sowie der Spannungsabfall über dem ohmschen Widerstand der Sekundärwicklung vernachlässigt werden. Ist zudem das magnetische Streufeld verschwindend gering und das den Kern durchsetzende Magnetfeld in guter Näherung homogen über den Kernquerschnitt, genügt die messtechnische Erfassung von $I_1(t)$ und $U_2(t)$ zur Bestimmung der $B(H)$ -Kennlinien.

Bei der Messung der Magnetisierungskurven im unteren Frequenzbereich von ungefähr 1 Hz bis 1 kHz ist die zur Erzeugung des Primärstromes $I_1(t)$ erforderliche Spannung sowie die induzierte Sekundärspannung $U_2(t)$ in der Regel klein und die Messdauer verhältnismäßig lang. Somit wirken schon geringe, etwa durch parasitäre Nullpunktverschiebungen, Rauschen und Driften verursachte absolute Fehler in den generierten Spannungsamplituden der präzisen Materialcharakterisierung erheblich entgegen. Ohne geeignete Gegenmaßnahmen können insbesondere die nicht idealen Eigenschaften eines zur Erzeugung des Primärstromes verwendeten Leistungsverstärkers die definierte Aussteuerung des Kernmaterials erschweren.

Aus diesem Grund kommt für den niederfrequenten Betriebsbereich das in der Abbildung 3.1 gezeigte Messprinzip nach [GB05] zur Anwendung. Der Leistungsverstärker wird dabei nicht direkt gesteuert, sondern er ist das Stellglied in einem Regelkreis. Die Verstärker Ausgangsspannung entspricht hier der Stellgröße, die sich in die Primärspannung $U_1(t)$ und die Messspannung $U_M(t)$ aufteilt. Die Sekundärspannung $U_2(t)$ ist als Regelgröße zur Differenzbildung mit der Eingangsspannung $U_E(t)$ als Führungsgröße auf einen primärseitigen Differenzverstärker rückgekoppelt. Letztere lässt sich durch analytische Differentiation eines gewünschten Flussdichteverlaufs gemäß

$$U_E(t) = N_2 A_e \frac{dB}{dt} \quad (3.3)$$

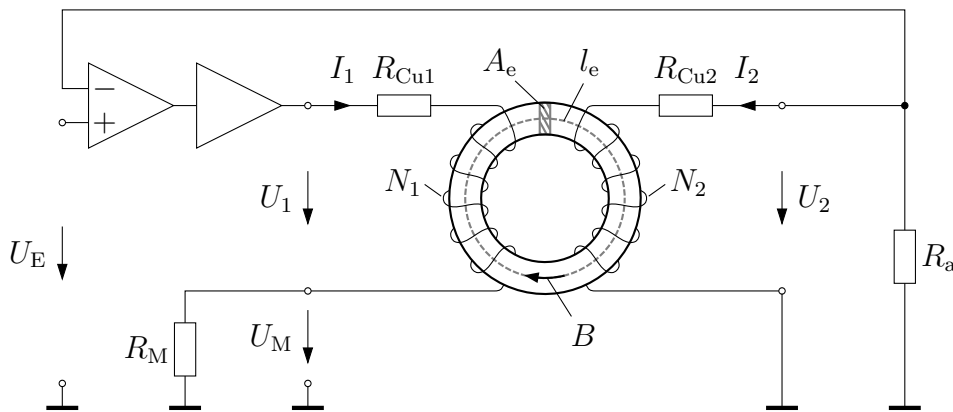


Bild 3.1: Messprinzip mit rückgekoppelter Sekundärwicklung zur messtechnischen Analyse der Magnetisierungsvorgänge bei 1 Hz bis 1 kHz

vorab ermitteln. Folglich wird die magnetische Flussdichte $B(t)$ bei diesem Verfahren mittels Spannungszeitflächen indirekt vorgegeben und somit der inverse Zusammenhang $H(B)$ anhand von $I_1(t)$ und $U_2(t)$ gemessen. Störungen werden durch kontinuierliches Nachführen von $U_2(t)$ weitgehend ausgeglichen und beeinflussen daher hauptsächlich $I_1(t)$. Da bei der Berechnung des H -Feldes aus dem Primärstrom im Gegensatz zur Berechnung des B -Feldes aus der Sekundärspannung keine Integration erforderlich ist, zeigt sich das Messverfahren weitgehend unempfindlich gegenüber den zuvor beschriebenen Fehlereinflüssen. Aufgrund einer potentiellen Regelabweichung als die Differenz zwischen dem Istwert $U_2(t)$ und dem Sollwert $U_E(t)$ erfolgt die Bestimmung der Flussdichte grundsätzlich nicht unter Nutzung der Führungsgröße $U_E(t)$.

Die Widerstände R_{Cu1} und R_{Cu2} im Bild 3.1 entsprechen den ohmschen Widerständen der Primär- beziehungsweise der Sekundärwicklung und R_M beschreibt den Messwiderstand zur Bestimmung des Primärstromes. Der Widerstand R_a repräsentiert hier allgemein einen Außen- oder Lastwiderstand, der aus dem Eingangswiderstand der nachgeschalteten Elektronik resultiert. Er sollte so groß sein, dass die Bedingung eines verschwindend geringen Sekundärstroms nicht verletzt wird.

Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte $B(t)$ und der Sekundärspannung $U_2(t)$ ist dann wegen (3.2) durch

$$B(t) = \frac{1}{N_2 A_e} \int U_2(t) dt \quad (3.4)$$

gegeben. Dabei bewirkt die Integralbildung eine Unterdrückung des dem Nutzsignal überlagerten Rauschens in $U_2(t)$. Da der Primärstrom in Abhängigkeit der über dem Strommesswiderstand R_M anliegenden Messspannung $U_M(t)$ aus

$$I_1(t) = \frac{U_M(t)}{R_M} \quad (3.5)$$

resultiert, erhält man die magnetische Feldstärke mithilfe von (2.61) aus

$$H(t) = \frac{N_1}{R_M l_e} U_M(t). \quad (3.6)$$

Zur messtechnischen Analyse der Magnetisierungsvorgänge im höheren Frequenzbereich von ungefähr 1 kHz bis 50 kHz wird das in der Abbildung 3.2 dargestellte Messprinzip ohne Rückkopplung der Sekundärspannung genutzt, weil innerhalb dieses Frequenzbereiches die zur Erzeugung des Primärstromes $I_1(t)$ erforderliche Spannung und die induzierte Sekundärspannung $U_2(t)$ für gewöhnlich so groß sind, dass geringe absolute Fehler in den Spannungsamplituden die Materialcharakterisierung kaum noch beeinträchtigen. Wegen der relativ kurzen Messdauer sind auch unkontrolliert driftende Spannungen weniger kritisch. Das gesteuerte Messprinzip ist im Vergleich zum geregelten Messprinzip nach Abbildung 3.1 wesentlich einfacher in der Handhabung, denn bei der Auslegung des Messkreises sind deutlich weniger Parameter zu berücksichtigen und es können keine instabilen Zustände auftreten. Unter der Voraussetzung, dass auch hier der Sekundärstrom, das Streufeld und Inhomogenitäten des magnetischen Feldes im Magnetkern vernachlässigbar sind, erfolgt die Bestimmung der Feldstärke $H(t)$ und der daraus resultierenden Flussdichte $B(t)$ in derselben Weise wie bei dem geregelten Messprinzip, weshalb auch hier die Gleichungen (3.4) und (3.6) Anwendung finden.

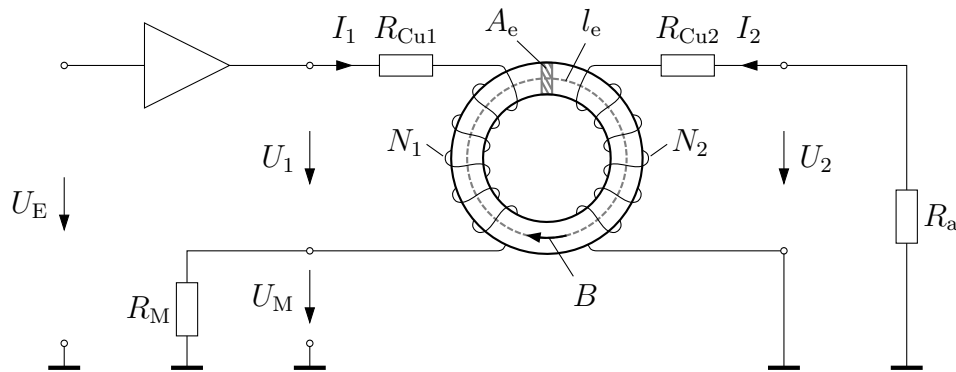


Bild 3.2: Gesteuertes Messprinzip zur messtechnischen Analyse der Magnetisierungsvorgänge bei 1 kHz bis 50 kHz

Der Frequenzbereich, für den dieses Messprinzip gut geeignet ist, wird nach oben hin vor allem durch parasitäre Phasenverschiebungen bei den Strom- und Spannungsmessungen begrenzt. Insbesondere die parasitäre Induktivität des Messwiderstandes R_M stellt diesbezüglich eine limitierende Einflussgröße dar, denn sie bewirkt mit steigenden Frequenzen ein zunehmendes Voreilen der Spannung $U_M(t)$ gegenüber der Stromstärke $I_1(t)$. Schon kleine Phasenfehler verfälschen die anhand der Messdaten durch Mittelwertbildung über volle Perioden bestimmten Ummagnetisierungsverluste deutlich, und das umso stärker, je größer der reaktive Anteil der magnetischen Gesamtleistung im Vergleich zum dissipativen Anteil ist. Da die Modellparameter zur Beschreibung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens gerade auf der Basis der mittleren ratenunabhängigen und ratenab-

hängigen Verlustleistungskomponenten bestimmt werden, ist eine phasentreue Strom- und Spannungsmessung also besonders wichtig.

Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit genügt die Leistungsfähigkeit der beiden zuvor beschriebenen Messschaltungen. Zur präzisen Analyse der magnetischen Verluste bei sehr hohen Frequenzen im Bereich von ungefähr 50 kHz bis 1 MHz kann zum Beispiel die Methode nach [MLL⁺11] herangezogen werden. Dieses Messprinzip basiert auf der Idee, den bei der Ummagnetisierung des Magnetkerns entstehenden reaktiven Leistungsbestandteil mit einer weiteren im Messkreis befindlichen induktiven Komponente zu jedem Zeitpunkt zu kompensieren. Dazu muss diese so beschaffen sein, dass die an ihr entstehende Momentanleistung nahezu ausschließlich reaktiv ist und betragsmäßig weitgehend mit dem reaktiven Momentanleistungsanteil des zur Materialcharakterisierung verwendeten Magnetkerns übereinstimmt. Dafür eignet sich insbesondere eine entsprechend dimensionierte Luftspule. Das Verfahren ermöglicht bei hinreichend guter Kompensation der Blindleistungsanteile in Bezug auf die Bestimmung der mittleren Verlustleistungskomponenten eine deutliche Reduzierung der Sensitivität gegenüber parasitären Phasendrehungen und in der Folge eine gegenüber diesen Fehlern wesentlich robustere Modellparameteridentifikation bei sehr hohen Frequenzen. Dennoch sollte die Messung des Primärstromes dann unter Verwendung eines besonders induktivitätsarmen Messwiderstandes oder mithilfe einer breitbandigen Strommesszange erfolgen.

3.2 Technische Realisierung des Messsystems

Das für die vorliegende Arbeit zur Materialcharakterisierung eingesetzte Messsystem ist in Bild 3.3 dargestellt. Es umfasst einen Computer, einen Funktionsgenerator, ein Oszilloskop, eine elektrische Messschaltung, einen Leistungsverstärker und ein Gerät, das es ermöglicht, den im Messkreis integrierten Prüfling anhand eines präzise geregelten Luftstroms unterschiedlichen Temperaturen auszusetzen. Mit dem Computer werden die gewünschten Kurvenformen des magnetischen Flusses beziehungsweise der elektrischen Spannung erzeugt und an den Funktionsgenerator übertragen, damit dieser unter Vorgabe der Wiederholrate und der Maximalamplitude dem Messkreis die entsprechenden Spannungssignale zur Verfügung stellen kann. Daneben dient der Computer auch zur Steuerung des Messablaufs sowie zur Verarbeitung der mit dem Oszilloskop automatisiert erfassten Messdaten.

Das grundlegende Schaltungskonzept zur Umsetzung des geregelten Messprinzips veranschaulicht das Bild 3.4. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind Schutzbeschaltungen, der Versorgungskreis und Maßnahmen zur Spannungsstabilisierung nicht dargestellt.

Die Bildung der Differenz aus der Führungsgröße $U_E(t)$ und der Regelgröße $U_B(t)$ realisiert ein Subtrahierer, dessen äußere Beschaltung durch die Widerstände R_{S1} und R_{S2} gegeben ist.

Zur Sicherstellung einer hohen Regelgüte kommt ein Proportional-Integral-Differential-Regler zur Anwendung. Er erhält die Regeldifferenz als Eingangsgröße. Die hier verwendete

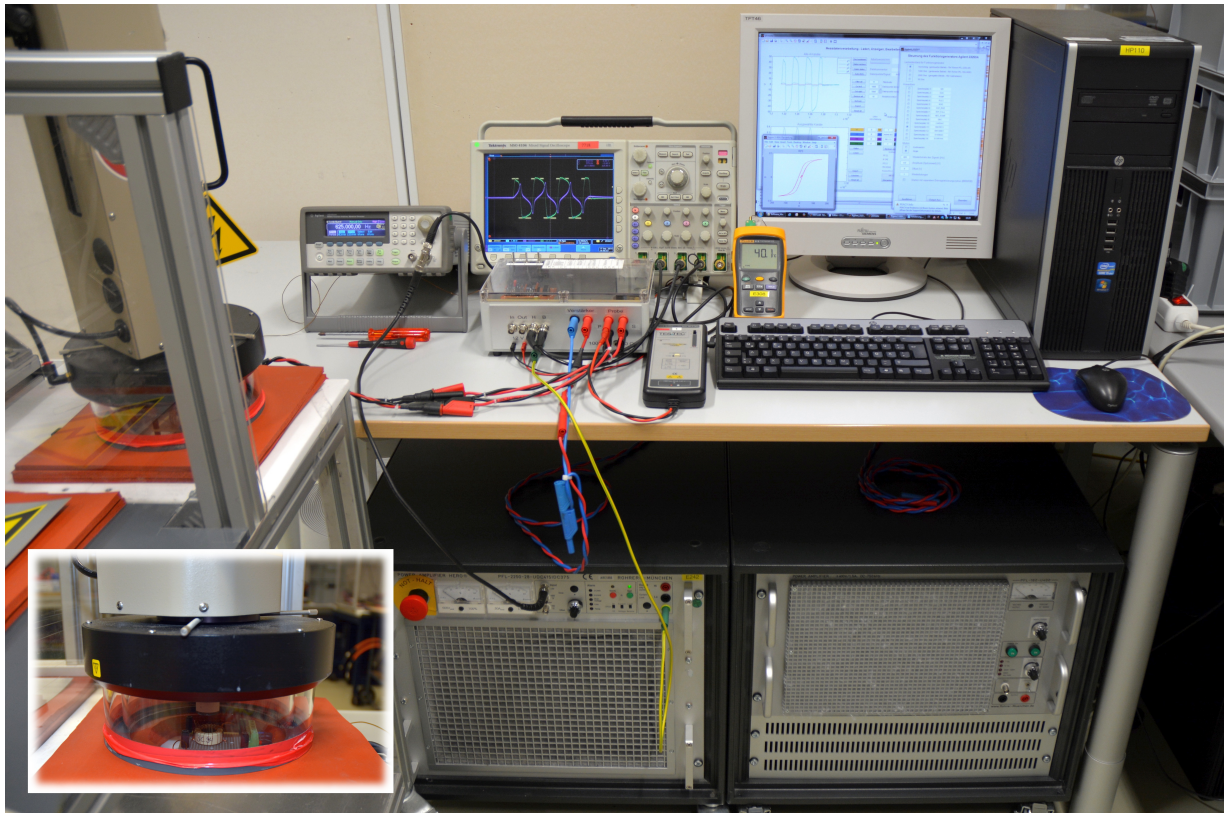


Bild 3.3: Messsystem zur Charakterisierung magnetischer Materialien

te Ausführung dieses Reglertyps erlaubt eine voneinander entkoppelte Justierung der Proportional-, Integral- und Differential-Anteile mittels R_{P1} , R_{P2} , R_{I1} , R_{I2} , C_I , R_{D1} , R_{D2} und C_D .

Das Ausgangssignal des Reglers ist das Eingangssignal eines weiteren Integral-Anteils, der zur Verbesserung des Regelverhaltens die Nullstelle der Regelstrecke kompensiert. Die Einstellung geeigneter Parameter erfolgt anhand von R_{K1} , R_{K2} und C_K .

Dem Kompensationsglied ist ein Leistungsverstärker nachgeschaltet. Er bildet das Stellglied des Regelkreises und stellt demnach die zur Aussteuerung des Magnetkerns erforderlichen Spannungs- und Stromamplituden bereit. Mit dem Leistungs-Vorwiderstand R_v lässt sich eine Vorlast einstellen, die einerseits die Funktion einer Maximalstrombegrenzung hat und andererseits den Einfluss der Verstärker-Offset-Spannung verringert.

Der Transformator im Schaltbild entspricht der Regelstrecke und repräsentiert die Kernprobe eines zu charakterisierenden Magnetmaterials mit der primärseitigen Wicklung zur Erzeugung der magnetischen Feldstärke und der sekundärseitigen Wicklung zur messtechnischen Bestimmung der magnetischen Flussdichte. Die hier verwendeten Magnetkerne weisen eine Toroid-Gestalt auf. Insbesondere schlanke Ringkerne eignen sich für die Materialcharakterisierung, weil das den Magnetkern durchsetzende Magnetfeld dann weitgehend

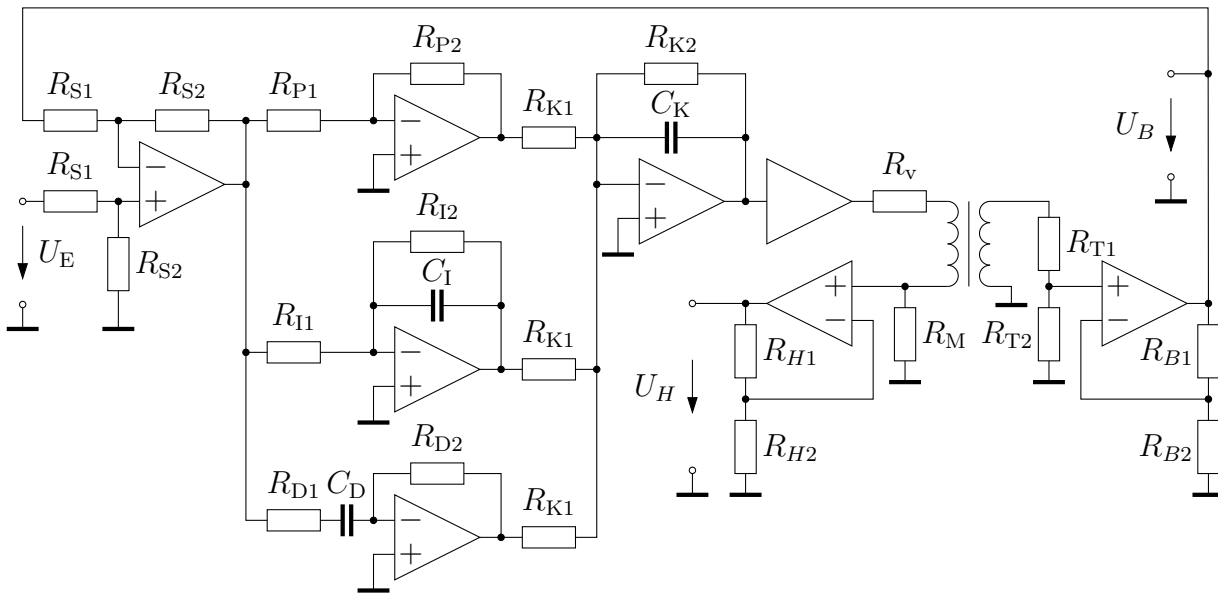


Bild 3.4: Messschaltung für das geregelte Messprinzip nach Abbildung 3.1

homogen ist. Eine gleichmäßige Verteilung der Wicklungen entlang des gesamten Kernumfangs verringert zudem das magnetische Streufeld. Dies ist vor allem für magnetisch niederpermeable Materialien bedeutsam. Bei hochpermeablen Stoffen können die Wicklungen hingegen auch räumlich konzentriert angeordnet sein, ohne dass das Streufeld dadurch nennenswert zunimmt.

Der Widerstand R_M ist ein Messwiderstand zur Erfassung des Primärstromes, um damit auf die erzeugte magnetische Feldstärke schließen zu können. Die an ihm abfallende Spannung wird mit einem nichtinvertierenden Verstärker für eine Weiterverarbeitung konditioniert. Die zugehörigen Widerstände zur Einstellung des Verstärkungsfaktors sind mit R_{H1} und R_{H2} bezeichnet.

Da sich die Amplituden des in der Sekundärspule induzierten Spannungssignals nach Gleichung (3.2) proportional zur Änderungsrate der magnetischen Flussdichte verhalten, können sie dem Betrage nach sehr unterschiedlich große Werte annehmen. Wenn man nun die Sekundärspannung stets direkt zur Differenzbildung mit der Führungsgröße $U_E(t)$ heranziehen würde, hätten beide Spannungen grundsätzlich denselben Amplitudenbereich. Das führte dann zu einem Problem, wenn der Ausgangsspannungsbereich des Signalgenerators, mit dem die Führungsgröße vorgegeben wird, nicht ausreichte, um eine gewünschte Flussdichte einzuprägen, oder wenn ein zulässiger Spannungsbereich eines Operationsverstärkers überschritten würde. Aus diesem Grund ist es erforderlich, die sekundärseitigen Spannungsamplituden skalieren zu können. So soll bei großen zu erwartenden Sekundärspannungsamplituden nur ein Teil der induzierten Spannung gemessen sowie rückgeführt werden und bei kleinen zu erwartenden Sekundärspannungsamplituden eine Verstärkung derselben möglich sein.

Eine kontrollierte Abschwächung der Spannungsamplituden wird mit dem durch R_{T1} und

R_{T2} gebildeten Spannungsteiler realisiert. Diesem ist ein nichtinvertierender Messverstärker nachgeschaltet, der eine mittels R_{B1} und R_{B2} eingestellte Spannungsverstärkung erlaubt. Die rückgekoppelte Spannung ist in jedem Fall die Ausgangsspannung des Messverstärkers $U_B(t)$.

Bei kleinen Sekundärspannungsamplituden kommt der Spannungsteiler nicht zur Anwendung. Dazu wird R_{T1} kurzgeschlossen und R_{T2} hochohmig ausgelegt. Stattdessen arbeitet der Messverstärker mit einer Verstärkung, die größer als eins ist. Dadurch lässt sich die Führungsgröße $U_E(t)$ um denselben Verstärkungsfaktor erhöhen, ohne dass es die maximalen Flussdichteamplituden im Magnetkern verändert. Infolge der größeren Spannungsamplituden reduziert sich zudem der störende Einfluss des Signalrauschens.

Bei mittleren Sekundärspannungsamplituden bleibt der Spannungsteiler in der Regel weiterhin ungenutzt. Nun wird auch der Widerstand R_{B1} kurzgeschlossen und R_{B2} hinreichend hochohmig ausgelegt. Das macht den Messverstärker zu einem Spannungsfollower mit der Verstärkung eins. Die Sekundärspannung wird dann unverändert auf den Eingang des Subtrahierers rückgekoppelt.

Bei höheren Sekundärspannungsamplituden erfolgt die Dimensionierung des Spannungsteilers schließlich so, dass die nach ihm auftretenden Spannungsamplituden innerhalb des zulässigen Bereiches liegen. Hierbei gilt es zu beachten, dass der Spannungsteiler mit der Eingangskapazität des nachgeschalteten Operationsverstärkers einen Tiefpass erster Ordnung bildet. Aufgrund der Forderung nach möglichst rückwirkungsfreier Sekundärspannungsmessung soll der Spannungsteiler zwar einerseits hochohmig sein, andererseits sinkt mit dessen zunehmender Hochohmigkeit jedoch die Grenzfrequenz des Tiefpasses, womit insbesondere eine zunehmende parasitäre Phasenverschiebung bezüglich der zu messenden Spannung $U_B(t)$ einhergeht. Aus diesem Grund erfordert die richtige Dimensionierung des Spannungsteilers vor allem bei der Materialcharakterisierung zu höheren Frequenzen hin einen Kompromiss.

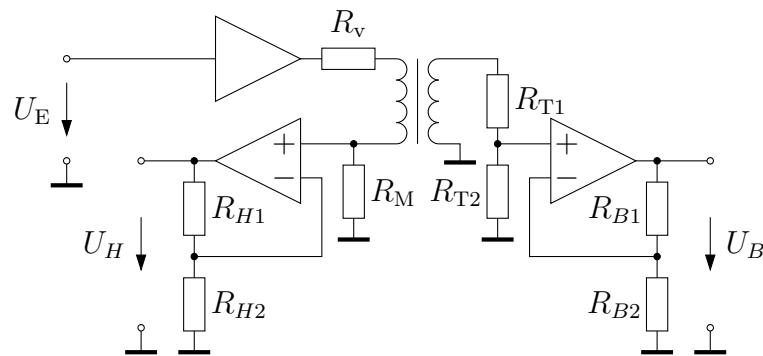


Bild 3.5: Messschaltung für das gesteuerte Messprinzip nach Abbildung 3.2

Die schaltungstechnische Umsetzung des gesteuerten Messprinzips ist in der Abbildung 3.5 dargestellt. Im Unterschied zum geregelten Messkreis kann hier auf den Einsatz eines Subtrahierers, eines Reglers und eines Nullstellenkompensators verzichtet werden. Der

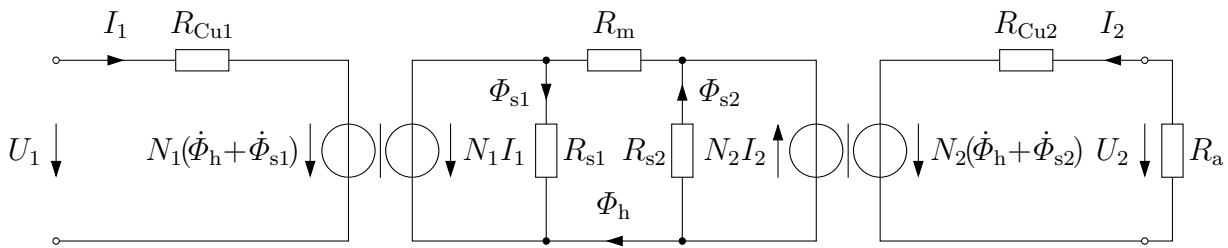


Bild 3.6: Domänenübergreifendes Ersatzschaltbild des Transformators

Leistungsverstärker wird in diesem Fall direkt mit der durch den Funktionsgenerator vorgegeben Eingangsspannung $U_E(t)$ angesteuert.

Während sich der gesteuerte Messkreis sehr einfach an veränderte Bedingungen anpassen lässt, ist es zweckmäßig, die Auslegung des geregelten Messkreises vorab simulativ vorzunehmen. Die dafür verwendeten Modelle der einzelnen Übertragungsglieder sind in Form von Spannungsübertragungsfunktionen im Anhang A angegeben. Für deren Herleitung kommen die Kirchhoffschen Gesetze sowie die üblichen Berechnungsmethoden für gegengekoppelte Operationsverstärker nach [TS02] zur Anwendung. Es wird dabei angenommen, dass die Verstärker selbst ein proportionales Übertragungsverhalten mit Verzögerung erster Ordnung aufweisen.

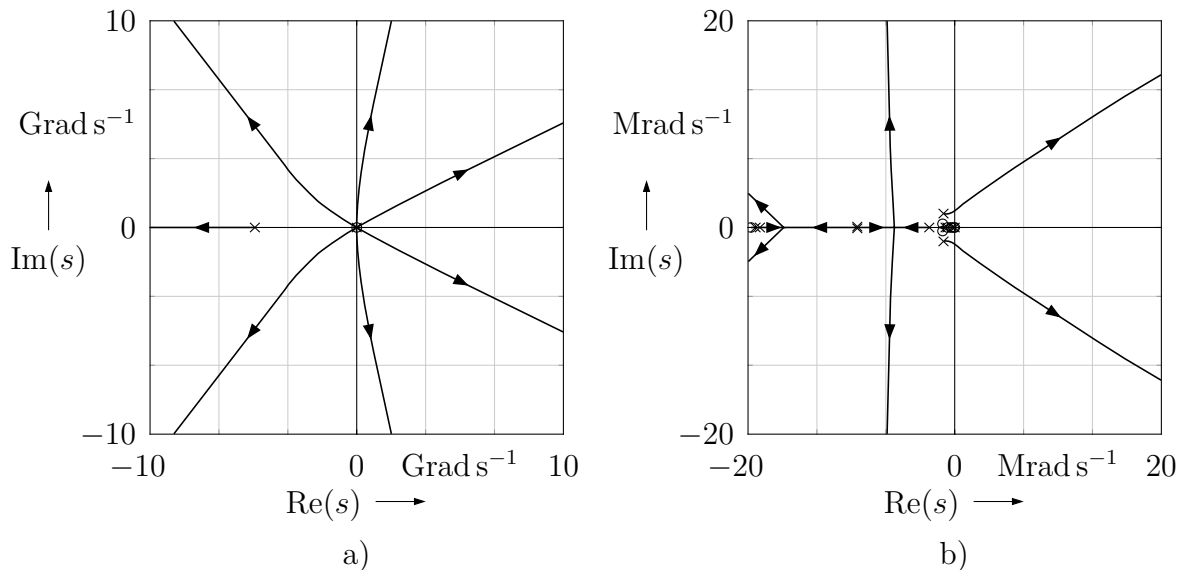


Bild 3.7: Wurzelortskurve des Regelkreises

a) Verlauf aller Asymptoten der Wurzelortskurve

b) Vergrößerte Ansicht der Wurzelortskurve im Gebiet der dominierenden Pole

Die Herleitung der Transformator-Übertragungsfunktion stützt sich auf dem domänenübergreifenden Ersatzschaltbild nach Abbildung 3.6. Darin beschreiben R_{s1} und R_{s2} die Streuflussreluktanzen der Primär- und Sekundärwicklungen. Die zugehörigen Streuflüsse werden durch Φ_{s1} sowie Φ_{s2} repräsentiert und Φ_h entspricht dem gemeinsamen magneti-

schen Hauptfluss. Zur simulativen Vorauslegung des Regelkreises genügt es, den Magnetkern auf der Grundlage einer konstanten mittleren Reluktanz R_m gemäß Gleichung (2.76) zu modellieren. Der Außenwiderstand ergibt sich im Wesentlichen aus den Spannungsteilerwiderständen zu

$$R_a = R_{T1} + R_{T2}. \quad (3.7)$$

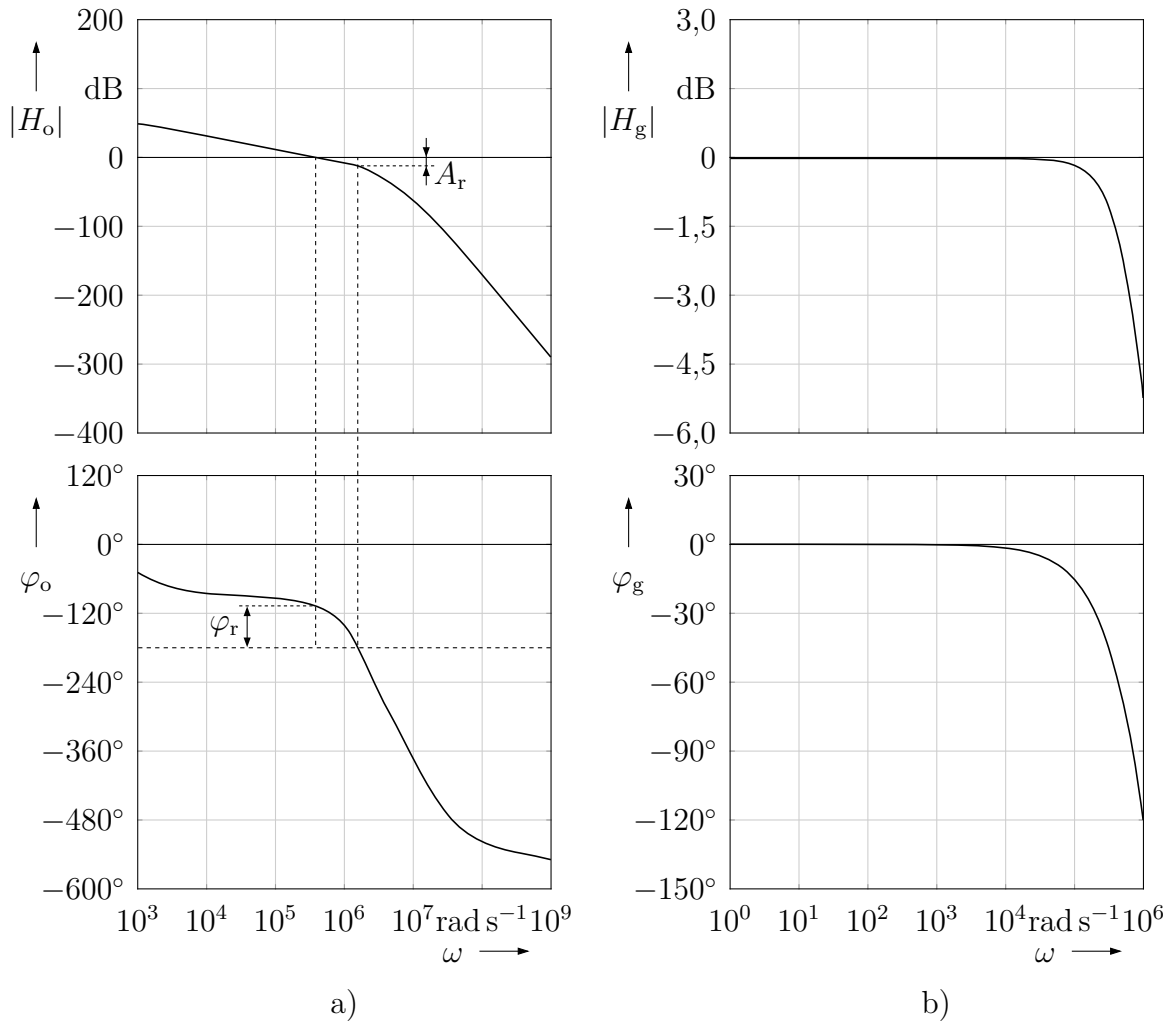


Bild 3.8: Bode-Diagramme des offenen und des geschlossenen Regelkreises

- Bode-Diagramm des offenen Regelkreises im Bereich der Amplituden- und Phasendurchtrittsfrequenzen
- Bode-Diagramm des geschlossenen Regelkreises

Die Eignung des Regelkreises für die messtechnische Charakterisierung von Magnetkernmaterialien in einem unteren Frequenzbereich wird beispielgebend anhand einer simulativen Analyse für die nachstehenden Parameter aufgezeigt.

$K_V = 100$	$R_{I1} = 8,2 \text{ k}\Omega$	$C_K = 330 \text{ nF}$	$A_e = 48,9 \text{ mm}^2$
$f_V = 150 \text{ kHz}$	$R_{I2} = 5,6 \text{ M}\Omega$	$R_v = 100 \Omega$	$l_e = 60,2 \text{ mm}$
$K_{OV} = 2 \cdot 10^5$	$C_I = 200 \text{ pF}$	$R_M = 100 \text{ m}\Omega$	$R_{s1} = 100R_m$
$f_{OV} = 15 \text{ Hz}$	$R_{D1} = 5,6 \text{ k}\Omega$	$R_{T1} = 0 \Omega$	$R_{s2} = 100R_m$
$R_{S1} = 1 \text{ k}\Omega$	$R_{D2} = 47 \text{ k}\Omega$	$R_{T2} = 100 \text{ k}\Omega$	$N_1 = 20$
$R_{S2} = 1 \text{ k}\Omega$	$C_D = 120 \text{ pF}$	$R_{B1} = 1 \text{ k}\Omega$	$N_2 = 20$
$R_{P1} = 1,5 \text{ k}\Omega$	$R_{K1} = 10 \text{ k}\Omega$	$R_{B2} = 1 \text{ k}\Omega$	$R_{Cu1} = 100 \text{ m}\Omega$
$R_{P2} = 10 \text{ k}\Omega$	$R_{K2} = 5,6 \text{ M}\Omega$	$\mu_r = 2500$	$R_{Cu2} = 100 \text{ m}\Omega$

Dabei entsprechen K_V und f_V sowie K_{OV} und f_{OV} in dieser Reihenfolge dem Verstärkungsfaktor und der Grenzfrequenz des Leistungsverstärkers sowie dem Verstärkungsfaktor und der Grenzfrequenz eines Operationsverstärkers.

Mithilfe der Gesamtübertragungsfunktion $\frac{U_B(s)}{U_E(s)}$, die unter Verwendung der in Anhang A angegebenen Einzelübertragungsfunktionen gebildet werden kann, lässt sich die im Bild 3.7 dargestellte Wurzelortskurve des Regelkreises bestimmen. Während die Abbildung 3.7a einen Überblick über den Verlauf aller Asymptoten der Wurzelortskurve gibt, zeigt die Abbildung 3.7b eine vergrößerte Darstellung der Wurzelortskurve im Bereich der dominierenden Pole. Man kann daran erkennen, dass sich bei geeigneter Wahl der Kreisverstärkung alle Polstellen in der linken komplexen Halbebene befinden, wodurch die Stabilität des Regelkreises sichergestellt ist.

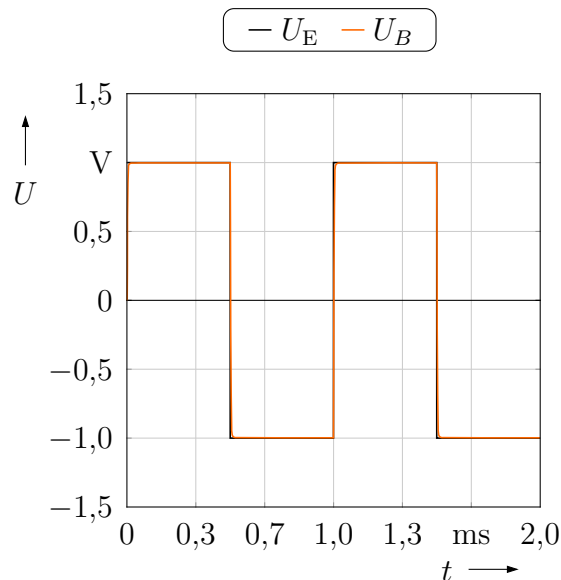


Bild 3.9: Simuliertes dynamisches Verhalten des Regelkreises bei der Anregung mit einem Rechtecksignal, dessen Grundwellenfrequenz 1 kHz beträgt

Wie das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises in Bild 3.8a zeigt, führen die gewählten Parameter zu einem stabilen Systemverhalten mit einer Phasenreserve von $\varphi_r = 73^\circ$

und einer Amplitudenreserve von $A_r = 13$ dB. Das Bode-Diagramm des geschlossenen Regelkreises in Bild 3.8b lässt erkennen, dass die Regelgröße $U_B(t)$ und die Führungsgröße $U_E(t)$ im Bereich 1 rad s^{-1} bis 10 krad s^{-1} beziehungsweise $0,16 \text{ Hz}$ bis $1,6 \text{ kHz}$ in Betrag und Phase weitgehend übereinstimmen.

Die simulierte Systemantwort des geschlossenen Regelkreises für sprungförmige Anregung bestätigt ein sehr gutes Führungsverhalten. Dazu stellt Bild 3.9 das Regelverhalten des Messkreises anhand eines Vergleiches der Regelgröße $U_B(t)$ mit der Führungsgröße $U_E(t)$ bei Vorgabe eines Rechtecksignals mit einer Grundwellenfrequenz von 1 kHz dar. Der Sollwert wird nach einer Führungsgrößenänderung schnell und ohne Überschwingen erreicht.

3.3 Messergebnisse an Beispielen

Bei der messtechnischen Charakterisierung der magnetischen Materialien kommen in Abhängigkeit der zu untersuchenden magnetischen Eigenschaften spezielle Signalformen zur Anwendung. Grundsätzlich ist zur Erzeugung eines definierten Ausgangszustandes ohne Vormagnetisierung als Erstes eine sorgfältige Entmagnetisierung des Kernmaterials sicherzustellen. Daher beginnt jeder Messdurchlauf zunächst mit einem Entmagnetisierungssignal, dem sich das eigentliche Signal zur Charakterisierung der magnetischen Eigenschaften unmittelbar anschließt.

Für die Analyse des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens wird das in Bild 3.10a schematisch dargestellte Eingangsspannungssignal zur Entmagnetisierung und das in Bild 3.10b angedeutete Eingangsspannungssignal zur Charakterisierung verwendet. Beide Signale beschreiben einen rechteckförmigen Verlauf mit zunehmend schneller aufeinanderfolgenden Vorzeichenwechseln von $U_E(t)$. In Analogie zum integralen Zusammenhang nach Gleichung (3.4) führt ein derartiges Eingangsspannungssignal zu einem dreieckförmigen Flussdichteverlauf mit betragsmäßig abnehmenden Maximalamplituden. Der zur Abbildung 3.10b zugehörige Verlauf von $B(t)$ ist im Bild 3.10c gezeigt. Diese Signalform ist besonders gut für die Charakterisierung der ratenunabhängigen Magnetisierungsvorgänge geeignet, weil die Änderungsrate des B -Feldes dann abschnittsweise konstant ist. In der B - H -Ebene resultieren daraus fünf zusammenhängende Hysteresekurven mit unterschiedlichen Aussteuerungsgraden, anhand derer sich die Parameter für das Modell zur Beschreibung des ratenunabhängigen Hystereseverhaltens identifizieren lassen. Um vorab eine ausreichende Entmagnetisierung zu gewährleisten, muss die magnetische Aussteuerung des Materials zu Beginn der Entmagnetisierungsphase betragsmäßig groß genug sein. Idealerweise wird dabei die magnetische Sättigung erreicht. Zudem ist es wichtig, dass die betragsmäßigen Maximalamplituden in möglichst kleinen Schritten bis auf null reduziert werden. Deshalb ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel beim Entmagnetisierungssignal für gewöhnlich deutlich höher als beim Charakterisierungssignal.

Bei der Analyse der ratenabhängigen Magnetisierungsvorgänge kommt das in Bild 3.10d skizzierte Entmagnetisierungssignal und das in Bild 3.10e dargestellte Charakterisierungssignal zur Anwendung. In beiden Fällen ist die zugrunde liegende Signalform kosinus-

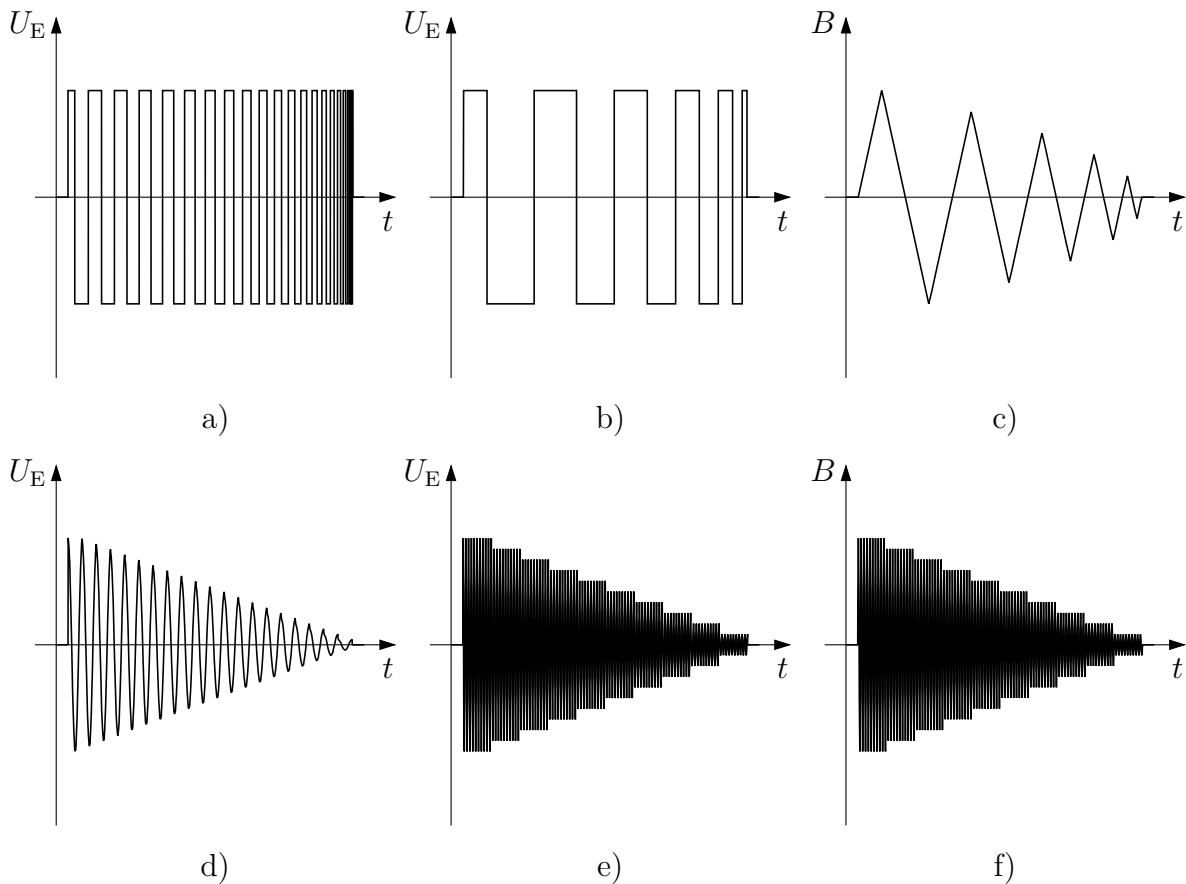


Bild 3.10: Schematische Darstellung der verwendeten Signalformen zur Entmagnetisierung und Charakterisierung eines Magnetkernmaterials

- a) Zeitverlauf von U_E während der Entmagnetisierungsphase bei Messungen zur Analyse der ratenunabhängigen Magnetisierungsprozesse
- b) Zeitverlauf von U_E zur Analyse der ratenunabhängigen Magnetisierung
- c) Zeitverlauf von B zur Analyse der ratenunabhängigen Magnetisierung
- d) Zeitverlauf von U_E während der Entmagnetisierungsphase bei Messungen zur Analyse der ratenabhängigen Magnetisierungsprozesse
- e) Zeitverlauf von U_E zur Analyse der ratenabhängigen Magnetisierung
- f) Zeitverlauf von B zur Analyse der ratenabhängigen Magnetisierung

förmig. Während sich der Scheitelwert bei dem Entmagnetisierungssignal über zahlreiche Perioden hinweg gleichmäßig in kleinen Schritten der Null annähert, besitzt er bei dem Charakterisierungssignal zehn signifikant unterschiedliche Abstufungen. Dabei erfolgt die Aussteuerung des Kernmaterials mit zehn Signalperioden je Amplitudenstufe und nur die jeweils letzte vollständige Periode wird zur Identifikation der Modellparameter für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten herangezogen. Dadurch lässt sich der schädliche Einfluss der nach Amplitudenstufenwechseln auftretenden Einschwingvorgänge auf die Qualität der Messdaten reduzieren. Da die Flussdichte $B(t)$ proportional zum Integral der Spannung $U_E(t)$ ist, bewirkt die Anregung mit einem kosinusförmigen Spannungssignal

eine sich mit der Zeit sinusförmig verändernde Flussdichte. Der zum Spannungsverlauf in Bild 3.10e gehörende Flussdichteverlauf ist in Bild 3.10f aufgezeigt. Diese Signalform eignet sich besonders gut zur Charakterisierung der ratenabhängigen Magnetisierungsvorgänge, weil damit in einfacher Weise eine Messdatenbasis mit selektiven Frequenzstützpunkten und Amplitudenstufen erstellt werden kann. In der $B(H)$ -Darstellung führt ein solcher Feldverlauf zu insgesamt 100 zusammenhängenden Hysteresekurven, die sich auf 10 Amplitudenstufen mit jeweils 10 Schleifen aufteilen.

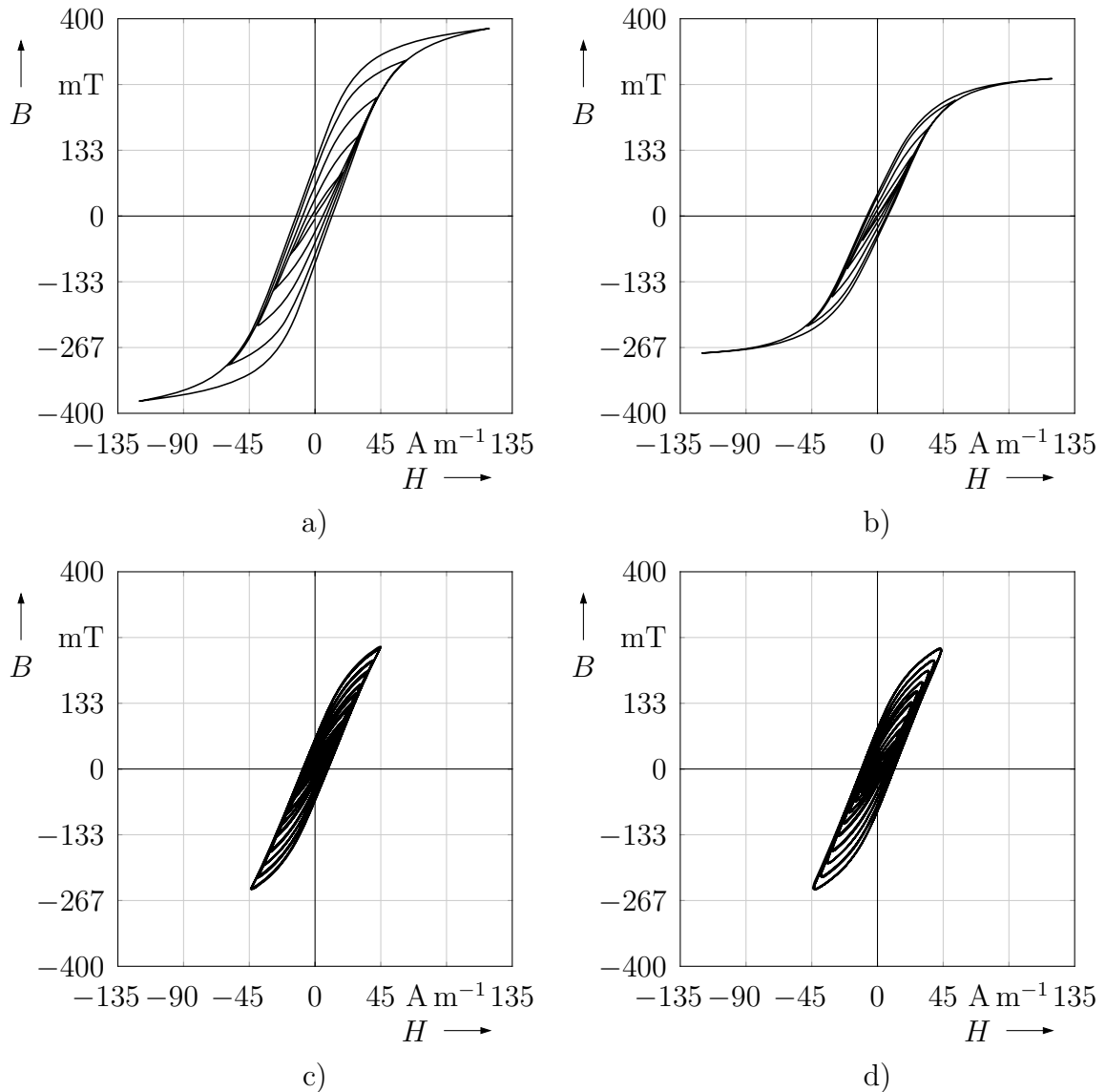


Bild 3.11: Gemessene Hysteresekurven des MnZn-Ferrits 3C94

- a) Ratenunabhängige Hysterese bei $f = 100$ Hz (Grundwelle) und $\vartheta = 20$ °C
- b) Ratenunabhängige Hysterese bei $f = 100$ Hz (Grundwelle) und $\vartheta = 120$ °C
- c) Hysteresekurven bei $f = 10$ kHz und $\vartheta = 20$ °C
- d) Hysteresekurven bei $f = 50$ kHz und $\vartheta = 20$ °C

Die magnetische Charakterisierung von Ferromagnetika mithilfe des Messsystems soll anhand von zwei weichmagnetischen Werkstoffen demonstriert werden, die sich hinsichtlich ihres Magnetisierungsverhaltens besonders unterscheiden. Dazu sind für beide Materialien eine Auswahl von gemessenen Hysteresekurven bei verschiedenen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturstufen aufgezeigt. Es handelt sich zum einen um den gesinterten oxidischen Werkstoff MnZn-Ferrit des Typs 3C94 von der Firma Ferroxcube und zum anderen um das metallisch nanokristalline Bandmaterial Nanoperm LM von der Firma Magnetec.

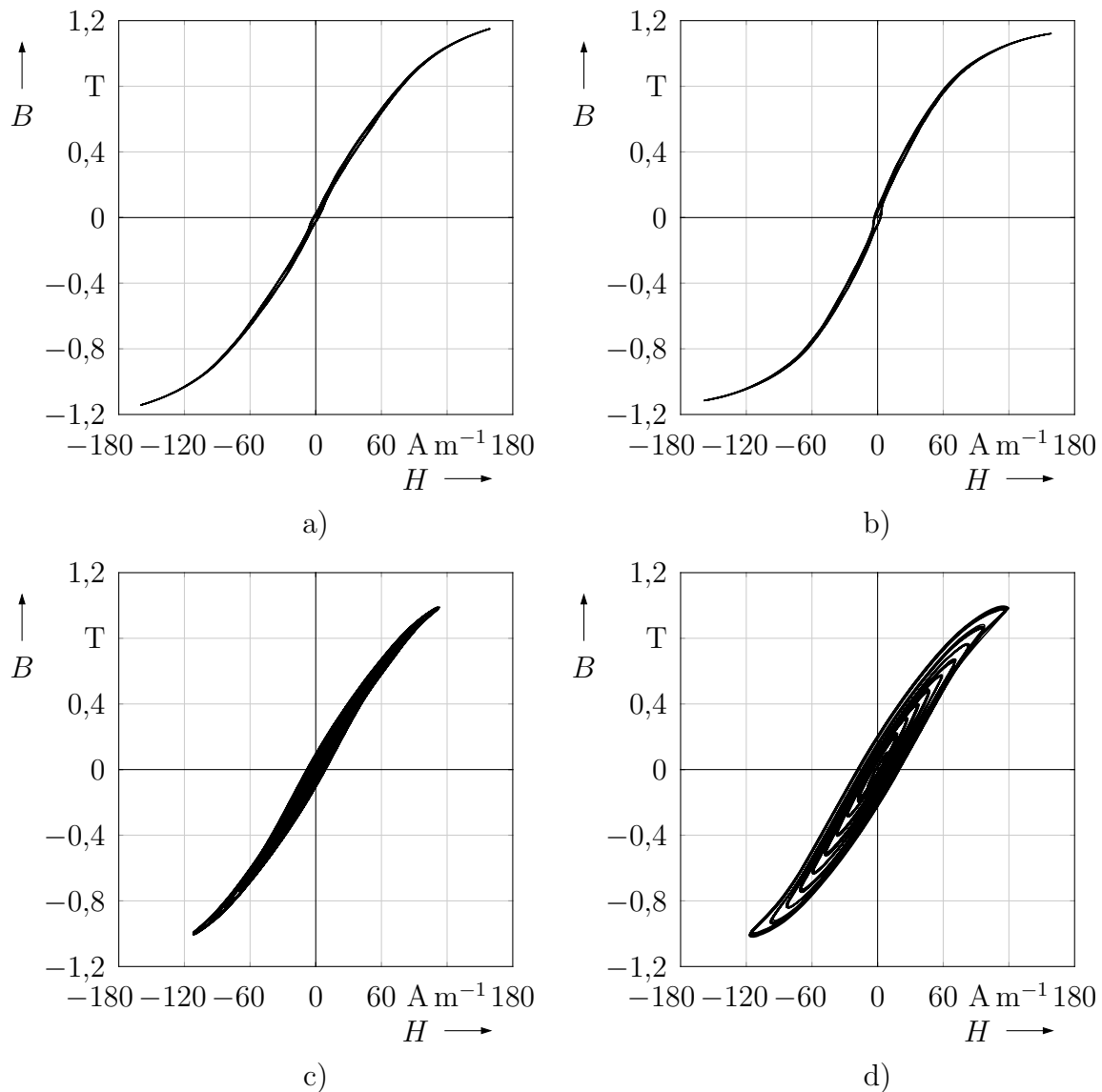


Bild 3.12: Gemessene Hysteresekurven der nanokristallinen Legierung Nanoperm LM
a) Ratenunabhängige Hysterese bei $f = 100 \text{ Hz}$ (Grundwelle) und $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
b) Ratenunabhängige Hysterese bei $f = 100 \text{ Hz}$ (Grundwelle) und $\vartheta = 120 \text{ }^\circ\text{C}$
c) Hysteresekurven bei $f = 10 \text{ kHz}$ und $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
d) Hysteresekurven bei $f = 50 \text{ kHz}$ und $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Die Bilder 3.11a und 3.11b stellen das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten des Ferrits bei unterschiedlichen Temperaturen dar. Dafür wurde das Signal gemäß der Abbildung 3.10c mit einer Grundwellenfrequenz von $f = 100$ Hz genutzt. Es zeigt sich, dass die Hysteresekurve bei der Temperatur $\vartheta = 120$ °C für gleiche maximale Amplitudenbeträge des H -Feldes deutlich schmaler als bei $\vartheta = 20$ °C ist. Des Weiteren verläuft sie aufgrund einer geringfügig verminderten magnetischen Permeabilität etwas flacher und die magnetische Sättigung des Materials beginnt bereits bei wesentlich kleineren Beträgen von B . In den Bildern 3.11c und 3.11d ist der Einfluss ratenabhängiger Effekte auf den $B(H)$ -Zusammenhang desselben Werkstoffes bei einer konstanten Temperatur von $\vartheta = 20$ °C aufgezeigt. Hierfür wurde der in der Abbildung 3.10f gezeichnete Verlauf des B -Feldes unter Vorgabe der Frequenzen $f = 10$ kHz und $f = 50$ kHz verwendet. Der direkte Vergleich lässt erkennen, wie eine höhere Signalfrequenz bei betragsmäßig gleichen Maximalamplituden der magnetischen Flussdichte zu einer Aufweitung der Hystereseschleifen führt. Da für die Messungen in diesem Frequenzbereich das gesteuerte Messprinzip zur Anwendung kommt, ist die betragsmäßige Maximalamplitude von B so gewählt, dass sie unterhalb des Bereiches der magnetischen Sättigung liegt. Anderenfalls würde das infolge eines sättigenden Magnetkernmaterials stark nichtlineare Klemmenverhalten der induktiven Komponente die präzise messtechnische Analyse unnötig erschweren, denn für die Identifikation der Modellparameter zur Beschreibung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens ist eine Aussteuerung bis in den Sättigungsbereich ohnehin nicht so entscheidend.

In den Bildern 3.12a und 3.12b sind die mit einer Grundwellenfrequenz von 100 Hz gemessenen $B(H)$ -Kurven dargestellt, die das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten des nanokristallinen Materials für die Temperaturen 20 °C beziehungsweise 120 °C beschreiben. Der Zusammenhang zwischen B und H weist unter diesen Bedingungen nahezu keine Hysterese auf. Bei 120 °C verläuft die Magnetisierungskurve aufgrund einer geringfügig gesteigerten Permeabilität ein wenig steiler als bei 20 °C und der Bereich der magnetischen Sättigung zeichnet sich im Falle der höheren Temperatur schon bei kleineren betragsmäßigen Flussdichteamplituden ab. Die Bilder 3.12c und 3.12d bringen den Einfluss ratenabhängiger Magnetisierungseffekte anhand von Hysteresekurven zum Ausdruck, denen die Frequenzen 10 kHz und 50 kHz sowie eine Temperatur von 20 °C zugrunde liegen. Hier lässt sich schon bei der unteren Frequenzstufe eine gegenüber dem ratenunabhängigen $B(H)$ -Zusammenhang aufgeweitete Hysteresekurve erkennen. Der Vergleich mit der Magnetisierungskurve für 50 kHz verdeutlicht dies noch stärker.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Ferrit im Vergleich zum nanokristallinen Material eine wesentlich geringere magnetische Permeabilität besitzt, eine deutlich ausgeprägtere ratenunabhängige magnetische Hysterese aufweist und schon bei viel kleineren Flussdichteamplituden sättigt. Diese magnetische Sättigungsgrenze verschiebt sich innerhalb des hier betrachteten Temperaturbereiches sowohl beim Ferrit als auch beim nanokristallinen Stoff zu hohen Temperaturen hin in die Richtung betragsmäßig kleinerer Flussdichteamplituden. Dahingegen verhalten sich die magnetischen Permeabilitäten der Stoffe in Abhängigkeit der Temperatur zueinander gegenläufig. Die ratenabhängige Aufweitung der Hysteresekurven ist bei dem Ferrit im Vergleich zum nanokristallinen Material für den untersuchten Frequenzbereich verhältnismäßig gering.

4 Operatorbasierte Modellierung des ferromagnetischen Materialverhaltens

Das zentrale Thema dieses Kapitels ist die Bildung operatorbasierter Modelle zur präzisen Beschreibung des Übertragungsverhaltens ferromagnetischer Kernmaterialien. Dazu werden unter Verwendung von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren in Verbindung mit dem Verlustseparationsprinzip nach Bertotti Zeitbereichsmodelle hergeleitet, die das von Sättigungs- und Hystereseeffekten geprägte ratenunabhängige und ratenabhängige Magnetisierungsverhalten der Ferromagnetika sehr genau und zugleich über einen weiten Gültigkeitsbereich hinweg wiedergeben können. Darüber hinaus beinhaltet das Kapitel Methoden zur Berechnung der Kernverluste sowie die exemplarische Kopplung der Kernmodelle mit einfachen Wicklungsmodellen. Im ersten Teil des Kapitels wird zunächst erläutert, wie und unter welchen Bedingungen sich das klassische Preisach-Modell zur phänomenologischen Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens eines ferromagnetischen Systems einsetzen lässt. Der zweite Abschnitt geht zu Beginn auf die Vor- und Nachteile dieses Ansatzes ein und begründet dadurch die Motivation für die Verwendung eines alternativen Modells auf der Grundlage des sogenannten Prandtl-Ishlinskii-Typs, das eine Unterklasse des klassischen Preisach-Modells darstellt. Es folgt das Aufzeigen der zwischen beiden Ansätzen bestehenden Verbindung sowie eine Erläuterung ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Neben dem Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell zur Berücksichtigung von ratenunabhängigen Hystereseeffekten wird zudem das Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell zur Modellierung von Sättigungseffekten eingeführt und darauf aufbauend erfolgt die Kombination beider Teilmodelle zur Modellierung der im Großsignalübertragungsverhalten von ferromagnetischen Materialien simultan auftretenden Hystereseeffekte und Sättigungseffekte. Von zentraler Bedeutung sind dabei die analytischen Transformationsbeziehungen zur Invertierung der Teil- und Gesamtmodelle sowie der Prozess der Modellparameteridentifikation. Bis hierhin basieren die Ausführungen im Wesentlichen auf den Vorarbeiten [Kuh01] und [Kuh08]. Im dritten Teil werden Modellansätze angegeben, mit denen sich die Gültigkeits- und Anwendungsbereiche der ratenunabhängigen Kernmodelle erweitern lassen. So bildet die sogenannte Moving-Erweiterung einen zusätzlichen Freiheitsgrad bei der Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens, wodurch insbesondere bei hochpermeablen Ferromagnetika eine gesteigerte Genauigkeit zu erzielen ist. Die Integration der ratenunabhängigen Kernmodelle in den Verlustseparationsansatz nach Bertotti ermöglicht zudem ein Einbeziehen der ratenabhängigen Effekte und in der Kombination mit einem Schalenmodell kann auch die Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen abgebildet werden. Die Einführung temperaturabhängiger Modellparameter erlaubt schließlich eine Berücksichtigung des Temperatureinflusses. Der vierte Teil des Kapitels zeigt Methoden zur Kernverlustberechnung auf. In diesem Zu-

sammenhang wird auch ein neuartiges Dissipationsmodell vorgestellt, mit dem sich die dissipativen und die reaktiven Komponenten der ratenunabhängigen Momentanleistung voneinander separieren und somit für beliebige Signalformen explizit bestimmen lassen. Die speziell hierzu präsentierten und zur Anwendung kommenden Ansätze gehen aus einer Kooperation hervor, die im Zuge dieser Arbeit zusammen mit P. Krejčí von der Akademie der Wissenschaften in Prag entstanden ist [KK13, KK14]. Sie sind bisher noch unveröffentlicht. Im fünften Teil wird durch die Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen beispielgebend ein Systemmodell für die Modellierung des elektromagnetischen Verhaltens einer induktiven Komponente gebildet und somit zugleich die robuste und effiziente Integrierbarkeit der Modelle in übergeordnete Systeme verdeutlicht.

4.1 Klassischer Preisach-Ansatz als Ausgangspunkt für die Modellbildung

In diesem Abschnitt wird in zusammenfassender Weise dargelegt, auf welcher Grundlage sich das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten von Ferromagnetika mit dem klassischen Preisach-Ansatz modellieren lässt. Die Erläuterung der physikalischen Wirkzusammenhänge und deren Verbindung zum Preisach-Modell basiert im Wesentlichen auf den Ausführungen in [Ber98]. Die Details zum Operatorenkalkül, dem Preisach-Gedächtnis sowie den spezifischen Eigenschaften des Preisach-Modells entstammen den Ausarbeitungen [Kuh01] und [Kuh08].

Ein Magnetisierungsvorgang entspricht für gewöhnlich einer Sequenz von Barkhausen-Sprüngen. Weder die Prozesse, die deren stochastisches Auftreten kontrollieren, noch solche, die bestimmen, wie die am System verrichtete Arbeit während einer Sprungsequenz in gespeicherte und dissipierte Energie aufgeteilt wird, lassen sich zur Zeit im Detail abbilden. Eine Möglichkeit, um dennoch eine hinreichend allgemeingültige, genaue und effiziente Beschreibung des ratenunabhängigen magnetischen Materialverhaltens zu erhalten, stellt die Verwendung eines statistischen Ansatzes dar. Der entscheidende Vorteil besteht dann gerade darin, dass nicht sämtliche beteiligten Effekte und Strukturen vollständig bekannt sein müssen. Vielmehr steht das insgesamt daraus resultierende Verhalten im Mittelpunkt. Ein bestimmter Systemzustand entspricht bei dieser Betrachtungsweise nicht einer einzigen Domänenstruktur, sondern mehrerer möglicher Domänenkonfigurationen, die sich zwar in ihren Details unterscheiden, aber bezüglich ihrer gemittelten Eigenschaften statistisch äquivalent sind.

Der Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen ist die aus der statistischen Physik bekannte Boltzmann-Gibbs-Verteilung, die in Bezug auf den vorliegenden Kontext das Folgende besagt: Befindet sich ein System im thermodynamischen Gleichgewicht, so ist bereits im Voraus bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit $p_B(G_i)$, mit der das System bei der absoluten Temperatur T einen beliebigen Zustand i einnimmt, durch seine Energie G_i mit dem korrespondierenden Boltzmann-Gewicht $\exp(-G_i/k_B T)$ bestimmt wird. Dabei

beschreibt k_B die Boltzmann-Konstante. Die daraus resultierende Beziehung

$$p_B(G_i) \propto e^{-\frac{G_i}{k_B T}} \quad (4.1)$$

gilt unabhängig davon, wie komplex die Energielandschaft von G tatsächlich ist.

In ferromagnetischen Materialien dominieren jedoch Metastabilität und ratenunabhängige Hysterese mit der Folge, dass im Allgemeinen kein thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit für das Einnehmen bestimmter energetischer Zustände ist in diesem Fall abhängig vom Feldverlauf in der Vergangenheit und von der Gestalt der Energielandschaft. Die Boltzmann-Statistik ist somit nicht direkt anwendbar und bis heute existiert keine hinreichend allgemeingültige Theorie, die äquivalente Aussagen auch für Systeme im Nichtgleichgewicht ermöglicht. Der Grundgedanke von Gleichung (4.1), nämlich die Verwendung einer energieabhängigen Wahrscheinlichkeitsfunktion zur Vorhersage von Systemzuständen, bildet aber das Fundament für die nachfolgenden Zusammenhänge.

Gemäß den vorausgehenden Ausführungen entspricht jeder Barkhausen-Sprung einem irreversiblen Übergang des magnetischen Systems in einen stabilen Zustand geringerer Energie. Aus dieser Überlegung heraus müssen dabei grundsätzlich zwei charakteristische Energierterme involviert sein. Das ist einerseits ΔF als die Änderung der freien Energie vom Anfangs- zum Endzustand und andererseits ΔE als die während des Sprungs in Form von Wärme dissipierte Energie. Letztere hat ihre Ursache in lokalen Wirbelströmen, die sich infolge der Bewegungen der Domänenwände in deren unmittelbarer Nähe ausbilden. Aufgrund der sehr geringen räumlichen Ausdehnung und der sprungartigen Übergänge sind die zugehörigen Zeitkonstanten so klein, dass diese Effekte für die meisten technischen Anwendungen als ratenunabhängig angesehen werden können. Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten von Barkhausen-Sprüngen mit bestimmten Beträgen für die Energien ΔF und ΔE materialspezifisch ist und daher eine inhärente Eigenschaft des magnetischen Systems darstellt. Sie soll unabhängig von der Signalform durch eine Funktion $p(\Delta E, \Delta F)$ angegeben werden können und damit die Vorhersage von Systemzuständen ermöglichen. F. Preisach hat im Jahr 1935 die Theorie vorgeschlagen, ein komplexes ferromagnetisches System phänomenologisch durch die Überlagerung mehrerer bistabiler Systeme zu beschreiben, deren elementare Hystereseschleifen sich in ihren charakteristischen Parametern wie der Breite h_c und der Vormagnetisierung h_u unterscheiden [Pre35]. Die Bilder 4.1 und 4.2 verdeutlichen, wie sich die energetische Interpretation der Magnetisierungsprozesse mit der phänomenologischen Beschreibung vereinen lässt. Die Darstellungen sind die modellbasierten Gegenstücke zu den Abbildungen 2.8 und 2.9.

Bild 4.1a zeigt das einfachste Energieprofil, das eine Barkhausen-Instabilität zu repräsentieren vermag. Das zugehörige bistabile System wird als Preisach-Einheit bezeichnet. Seine freie Energie G_P ist in Analogie zu Gleichung (2.11) durch

$$G_P(m; H) = F_P(m) - \mu_0 H m \quad (4.2)$$

linear an das magnetische Feld H gekoppelt. Die Größe F_P beschreibt die Helmholtzsche freie Energie der Preisach-Einheit. Das Phänomen der thermischen Relaxation wird

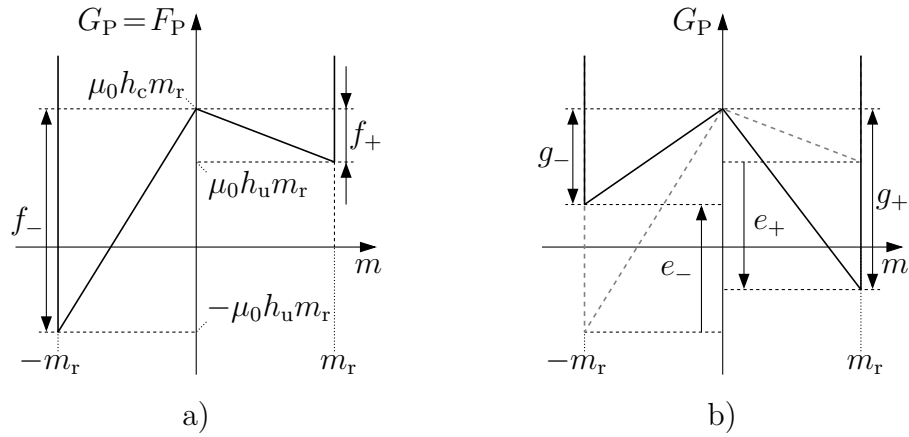


Bild 4.1: Profile der freien Energie einer Preisach-Einheit in Anlehnung an [Ber98]
a) $H = 0$ b) $H > 0$

vernachlässigt, sodass die Temperatur T an dieser Stelle nicht mehr mit eingeht. Zunächst existiert keine äußere Feldstärke H , weshalb der rechte Term von Gleichung (4.2) verschwindet und $G_P = F_P$ gilt. Im Vergleich zur feldfreien Situation in Abbildung 2.8 fällt die Asymmetrie des Energieverlaufs auf. Sie ist das Ergebnis einer vormagnetisierten Preisach-Einheit mit $h_u \neq 0$. Die Energieminima sind durch $\pm \mu_0 h_u m_r$ bestimmt und die Stabilitätsgrenze liegt bei $\mu_0 h_c m_r$. Folglich unterscheiden sich die jeweils aufzubringenden Energiebeträge f_+ und f_- , die das System von einem stabilen Zustand in den anderen wechseln lassen. Sie ergeben sich zu

$$f_+ = \mu_0 m_r (h_c - h_u) \quad (4.3)$$

und

$$f_- = \mu_0 m_r (h_c + h_u). \quad (4.4)$$

Abbildung 4.1b stellt den Einfluss eines äußeren Feldes auf die energetischen Verhältnisse für den Fall $H > 0$ dar. Der daraus entstehende Energiebeitrag ergibt nach dem zweiten Term der rechten Seite von Gleichung (4.2) für ein positives Remanenzmoment m_r den negativen Betrag $e_+ = -\mu_0 H m_r$ und für ein negatives Moment $-m_r$ den positiven Wert $e_- = \mu_0 H m_r$. Die energetischen Abstände der Minima zur Stabilitätsgrenze sind durch g_+ und g_- gekennzeichnet. Sie verändern sich mit linearer Abhängigkeit von H gegensinnig zueinander und gehorchen den Beziehungen

$$g_+ = \mu_0 m_r (h_c - h_u + H) \quad (4.5)$$

und

$$g_- = \mu_0 m_r (h_c + h_u - H). \quad (4.6)$$

Die besondere Konstellation, bei der das Energieprofil genau ein Minimum und einen Sattelpunkt aufweist, tritt auf, wenn einer der Klammerausdrücke in den Gleichungen (4.5) und (4.6) zu null wird, weil das externe Feld H die Bedingung

$$H = h_u - h_c \quad (4.7)$$

oder

$$H = h_u + h_c \quad (4.8)$$

erfüllt. Die charakteristischen Grenzen zur Systeminstabilität lassen sich daher mit dem Aufwärtsschwellwert α und dem Abwärtsschwellwert β zu

$$\alpha = h_u + h_c \quad (4.9)$$

und

$$\beta = h_u - h_c \quad (4.10)$$

definieren. Die Abbildung 4.2 zeigt den zugehörigen $m(H)$ -Zusammenhang als das magnetische Ausgangs-Eingangs-Verhalten der Preisach-Einheit.

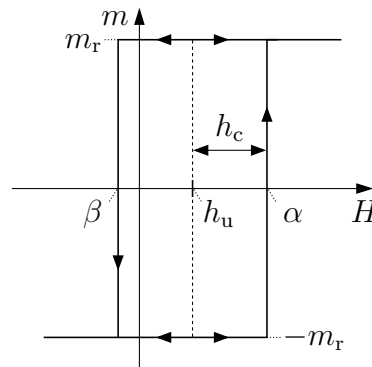


Bild 4.2: Ausgangs-Eingangs-Verhalten einer Preisach-Einheit [Ber98]

Anhand der Energieverläufe in Bild 4.1 wird deutlich, dass sich $G_P(m; H)$ während eines Barkhausen-Sprunges um $\Delta G_P = -2\mu_0 h_c m_r$ verringert. Dieser Betrag beschreibt den dissipativen Anteil. Die Änderung der Helmholtzschen freien Energie $F_P(m)$ geht aus der Differenz von f_+ und f_- hervor und beträgt in Abhängigkeit des Anfangszustandes entweder $\Delta F_P = +2\mu_0 h_u m_r$ oder $\Delta F_P = -2\mu_0 h_u m_r$. Sie repräsentiert die Entwicklung der im System gespeicherten Energie. Damit bilden ΔG_P und ΔF_P äquivalente Ausdrücke zu ΔE und ΔF , wobei der entscheidende Informationsgehalt den energieproportionalen Größen h_c und h_u innewohnt. Die allgemeine Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\Delta E, \Delta F)$ lässt sich daher durch $p(h_c, h_u)$ präzisieren und wird dann als Preisachdichte, Verteilungsfunktion oder auch Gewichtsfunktion bezeichnet. Sie stellt das Bindeglied zwischen den energetischen Zusammenhängen auf mikromagnetischer Ebene und dem daraus resultierenden phänomenologischen Verhalten auf der makroskopischen Ebene dar.

Die hysteresebehaftete Nichtlinearität aus Abbildung 4.2 entspricht dem Übertragungsverhalten eines Relayoperators, dessen Ausgangsgröße sich durch

$$m_r(h_c, h_u) = \text{sgn}(m_r(h_c, h_u)) |m_r(h_c, h_u)| \quad (4.11)$$

ausdrücken lässt. Darin bestimmt $|m_r(h_c, h_u)|$ seinen betragsmäßigen Ausgangswert. Der Term $\text{sgn}(m_r(h_c, h_u))$ stellt den Zustand dieses elementaren Hystereseoperators dar, kann

entweder den Wert -1 oder $+1$ annehmen und ist im Folgenden durch $z_R(h_c, h_u)$ gegeben. Er hängt vom aktuellen Eingangssignal sowie der Vorgeschichte ab und bringt damit das lokale Gedächtnis zum Ausdruck. Eine äquivalente Formulierung für Gleichung (4.11) ist folglich

$$m_r(h_c, h_u) = z_R(h_c, h_u) |m_r(h_c, h_u)|. \quad (4.12)$$

Wird nun ein ferromagnetisches System durch die Superposition mehrerer Preisach-Einheiten mit unterschiedlichen Schwellen und Momenten modelliert, bildet die Summe ihrer Beiträge das vom System ausgehende Gesamtmoment m . Jeder der Preisach-Einheiten lässt sich ein entsprechender Relayoperator zuordnen. Aus der damit verbundenen Überlagerung dieser Elementaroperatoren mit lokalem Gedächtnis geht ein komplexes Gedächtnis hervor, dessen Struktur und Entwicklung mit Hilfe der sogenannten Preisach-Ebene anschaulich darstellbar ist. Sie beschreibt gemäß Abbildung 4.3 eine durch die h_u - und h_c -Koordinatenachsen aufgespannte Halbebene, in der dem Zustand eines jeden Relayoperators ein Punkt mit den zugehörigen Koordinaten für h_u und h_c zugeteilt werden kann. Beispielgebend dafür steht der Punkt mit den Koordinaten (h_{c0}, h_{u0}) für den Zustand $z_R(h_{c0}, h_{u0})$ eines Operators mit den spezifischen Schwellwerten $h_{u0} \pm h_{c0}$.

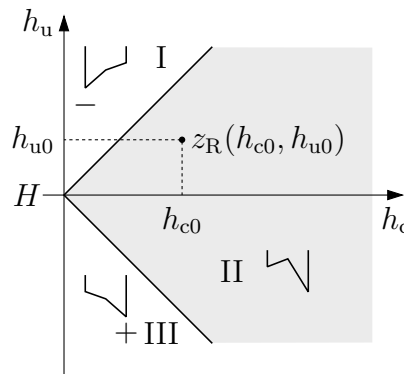


Bild 4.3: Preisach-Ebene mit gekennzeichneten Bereichen zur Unterscheidung der Relayoperatoren nach ihren energetisch möglichen Zuständen, angelehnt an [Ber98]

Die Preisach-Ebene lässt sich in drei Bereiche unterteilen, die durch die Geraden $h_u = h_c + H$ und $h_u = -h_c + H$ voneinander abgegrenzt sind. Die beiden linearen Funktionen schließen einen rechten Winkel ein und schneiden einander auf der Ordinatenachse in Abhängigkeit des äußeren Feldes H im Punkt $(0, H)$. Ihre Definitionen basieren auf den Gleichungen (4.7) und (4.8). Daher markieren sie die feldgebundenen Grenzen, bei denen die Energieprofile der den Relayoperatoren zugeordneten Preisach-Einheiten gleichzeitig ein Minimum und einen Sattelpunkt aufzeigen. Das führt zu einer Gebietsaufteilung, die die Relayoperatoren nach den energetisch möglichen Zuständen ihrer Preisach-Einheiten unterscheidet. Alle Operatoren in Bereich I befinden sich demzufolge in ihrem negativen Zustand. Im grau gekennzeichneten Bereich II gibt es für jede Preisach-Einheit zwei potentielle Zustände. Welcher von beiden jeweils eingenommen wird, hängt von der magnetischen Vorgeschichte ab. Der Bereich III umfasst ausschließlich Elementaroperatoren, die sich in ihrem positiven Zustand befinden. In der Darstellung besitzt die Feldamplitude

den Wert $H = 0$, sodass der Schnittpunkt beider Begrenzungsgeraden im Koordinatensprung liegt. Steigt die Feldamplitude zu positiven Werten hin an, verschiebt sich dieser Schnittpunkt und damit der gesamte Bereich II entlang der positiven Richtung der Ordinatenachse. Punkte, über die sich die obere Begrenzungsgerade hinwegbewegt und die dadurch von dem Bereich I in den Bereich II wechseln, repräsentieren Relayoperatoren, für die der Abwärtsschwellwert β in diesem Moment durch den Eingangswert H überschritten wird. Dieser Vorgang geht mit der Ausbildung eines zweiten Minimums in den Energieprofilen der zugehörigen Preisach-Einheiten einher, welches dort dem positiven Moment $+m_r$ zugeordnet ist. Punkte, die von der unteren Begrenzungsgerade überstrichen werden und die damit vom Bereich II in den Bereich III übergehen, beschreiben Relayoperatoren, für die der aktuelle Eingangswert H den Aufwärtsschwellwert α gerade überschreitet. In diesem Fall verschwindet das dem negativen Moment $-m_r$ zugeordnete Minimum in den Energieprofilen der jeweiligen Preisach-Einheiten. Wurde ein solches noch unmittelbar zuvor von einem bistabilen System eingenommen, resultiert daraus ein Barkhausen-Sprung. Das bedeutet, dass die entsprechenden Relayoperatoren, die sich zuvor in ihrem negativen Zustand befanden, nun in ihren positiven Zustand übergehen. Für den Fall einer abnehmenden Feldamplitude gelten vergleichbare Verhältnisse. Der Bereich II verschiebt sich dann entlang der negativen Richtung der Ordinatenachse und Barkhausen-Sprünge ereignen sich, wenn die obere Begrenzungsgerade Punkte überstreicht, deren zugehörige Relayoperatoren dabei vom zuvor positiven Zustand in den negativen Zustand wechseln.

Ein ferromagnetisches System werde durch N Preisach-Einheiten beschrieben, deren zugeordnete Relayoperatoren sich bezüglich ihrer Aufwärts- und Abwärtsschwellwerte $h_u + h_c$ und $h_u - h_c$ sowie ihrer Remanenzmomente m_r in zufälliger Weise unterscheiden und damit die stochastische Natur des Barkhausen-Effektes widerspiegeln. Es sei $n(h_c, h_u)dh_u dh_c$ die Anzahl an Operatoren, die in dem infinitesimalen Flächenstück $dh_u dh_c$ der Preisach-Ebene durch Punkte repräsentiert werden, sodass

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n(h_c, h_u) dh_u dh_c = N \quad (4.13)$$

gilt. Unter Einbeziehung von Gleichung (4.12) resultiert das magnetische Gesamtmoment aus der Aufsummierung aller Einzelbeiträge zu

$$m = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |m_r(h_c, h_u)| n(h_c, h_u) z_R(h_c, h_u) dh_u dh_c. \quad (4.14)$$

Darin beschreibt der Term $m_r(h_c, h_u)n(h_c, h_u)$ nun ein mit der Operatordichte $n(h_c, h_u)$ gewichtetes Moment $m_r(h_c, h_u)$. Durch seine Normierung mit dem maximalen Gesamtmoment $N\langle m_r \rangle$, das dem Produkt aus der Anzahl aller Operatoren N und dem durchschnittlichen Moment einer Preisach-Einheit $\langle m_r \rangle$ mit

$$\langle m_r \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |m_r(h_c, h_u)| n(h_c, h_u) dh_u dh_c \quad (4.15)$$

entspricht, erhält man einen adäquaten Ausdruck für die Verteilungsfunktion $p(h_c, h_u)$ zu

$$p(h_c, h_u) = \frac{|m_r(h_c, h_u)|n(h_c, h_u)}{N\langle m_r \rangle}. \quad (4.16)$$

Sie ordnet jedem Punkt in der Preisach-Ebene einen relativen Momentenbeitrag zu, was mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten von Barkhausen-Sprüngen mit bestimmten energetischen Eigenschaften korreliert. Daher ergibt die Integration über den ersten und vierten Quadranten

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(h_c, h_u) dh_u dh_c = 1. \quad (4.17)$$

Aufgrund der systemischen Sichtweise ist es zweckmäßiger, auf der Basis von Beziehung (2.3) die durchschnittliche Magnetisierung M anstelle des Momentes m heranzuziehen. Die maximal mögliche Magnetisierung wird als Sättigungsmagnetisierung M_S bezeichnet und ist das auf das Materialvolumen V bezogene maximale Gesamtmoment $N\langle m_r \rangle$ nach

$$M_S = \frac{N\langle m_r \rangle}{V}. \quad (4.18)$$

Mit den Gleichungen (4.14), (4.16) und (4.18) erhält man die allgemeine Darstellung des Preisach-Modells, mit der sich die durchschnittliche Magnetisierung $M(t)$ des Systems unter dem Einfluss eines zeitabhängigen Feldes $H(t)$ zu

$$M(t) = M_S \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(h_c, h_u) z_R(h_c, h_u, t) dh_u dh_c \quad (4.19)$$

angeben lässt. Die das Material charakterisierende Information ist somit gänzlich in der üblicherweise messtechnisch zu bestimmenden Verteilungsfunktion $p(h_c, h_u)$ enthalten. Die für ferromagnetische Substanzen typische Abhängigkeit der aktuellen Magnetisierung vom Magnetfeldverlauf in der Vergangenheit drückt sich durch die gedächtnisbildenden Zustände $z_R(h_c, h_u, t)$ aus.

Es ist zweckmäßig, für diesen Zusammenhang die Operatorschreibweise zu verwenden. Dann bildet die Feldstärke $H(t)$ die Eingangsgröße und die Magnetisierung $M(t)$ die Ausgangsgröße des sogenannten Preisach-Hystereseeoperators P und es gilt die Beziehung

$$M(t) = P[H](t) \quad (4.20)$$

mit

$$P[H](t) := M_S \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(h_c, h_u) z_R(h_c, h_u, t) dh_u dh_c \quad (4.21)$$

und

$$z_{\text{R}}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}}, t) = \text{R}_{h_{\text{c}}h_{\text{u}}}[H, z_{\text{R}0}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}})](t). \quad (4.22)$$

Darin beschreibt der Ausdruck $\text{R}_{h_{\text{c}}h_{\text{u}}}[H, z_{\text{R}0}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}})](t)$ allgemein einen Relayoperator mit den charakteristischen Parametern h_{c} und h_{u} sowie dem Anfangszustand $z_{\text{R}0}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}})$ unter dem Einfluss einer zeitabhängigen Eingangsgröße H . Die zeitliche Entwicklung seines binären Ausgangssignalwertes $z_{\text{R}}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}}, t)$, im Nachstehenden vereinfacht durch $z_{\text{R}}(t)$ ausgedrückt, wird für ein stückweise monotones Eingangssignal anhand der Gleichung

$$z_{\text{R}}(t) = \begin{cases} +1 & ; H(t) \geq h_{\text{u}} + h_{\text{c}} \\ -1 & ; H(t) \leq h_{\text{u}} - h_{\text{c}} \\ z_{\text{R}}(t_i) & ; h_{\text{u}} - h_{\text{c}} < H(t) < h_{\text{u}} + h_{\text{c}} ; t_i \leq t \leq t_{i+1} ; 1 \leq i \leq N_t - 1 \\ z_{\text{R}0} & ; h_{\text{u}} - h_{\text{c}} < H(t) < h_{\text{u}} + h_{\text{c}} ; t_i \leq t \leq t_{i+1} ; i = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

definiert. In diesem Zusammenhang beschreibt das zeitliche Intervall $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ eine von insgesamt N_t Monotoniepartitionen des Eingangssignals $H(t)$. Diese resultieren aus einer Unterteilung des betrachteten Gesamtzeitraums $t_0 \leq t \leq t_{N_t}$ in der Art, dass das Eingangssignal H in jedem Teilintervall $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ mit $0 \leq i \leq N_t - 1$ monoton ist. Die allgemeine Ausgangs-Eingangs-Trajektorie dieses unstetigen Hystereseeoperators zeigt das Bild 4.4.

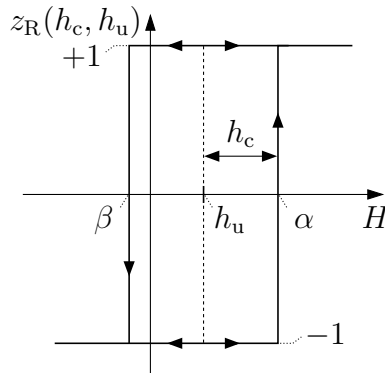


Bild 4.4: Ausgangs-Eingangs-Verhalten eines Relayoperators in Anlehnung an [Kuh08]

Die Darstellung des Preisach-Modells durch eine mit $p(h_{\text{c}}, h_{\text{u}})$ gewichtete Integration über jeden einzelnen der Relayoperatorenausgänge $z_{\text{R}}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}}, t)$ weist eine starke Redundanz auf, weil nicht alle Relayoperatoren unabhängig voneinander schalten können. Dies liegt darin begründet, dass infolge eines zeitabhängigen Eingangssignals in der Regel Operatoren mit einer schmalen Hystereseschleife ihren Zustand vor Operatoren mit einer breiten Hystereseschleife wechseln. Der überwiegende Teil aller mathematisch möglichen Gedächtniskonfigurationen kann deshalb niemals entstehen. Durch eine alternative Formulierung des Preisach-Ansatzes lässt sich diese Redundanz jedoch beseitigen. Zu diesem Zweck werden zunächst alle Relayoperatoren des Preisach-Modells in die beiden Mengen

$$A_+(t) = \{(h_{\text{c}}, h_{\text{u}}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid \text{R}_{h_{\text{c}}h_{\text{u}}}[H, z_{\text{R}0}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}})](t) = +1\} \quad (4.24)$$

und

$$A_-(t) = \{(h_c, h_u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid R_{h_c h_u}[H, z_{R0}(h_c, h_u)](t) = -1\} \quad (4.25)$$

unterteilt. Sowohl $A_+(t)$ als auch $A_-(t)$ sollen zusammenhängende Mengen sein, die sich durch eine Trennungslinie mit der Funktion $z_H(h_c, t)$ voneinander abgrenzen. Auf dieser Annahme basierend, veranschaulicht Abbildung 4.5 die zeitliche Entwicklung des komplexen Preisach-Gedächtnisses für ein allgemeines Zeitsignal. Zum Zeitpunkt t_0 sei das Material in der Art entmagnetisiert, dass alle Operatoren oberhalb der h_c -Achse ihren negativen Zustand einnehmen und die unterhalb davon liegenden sich in ihrem positiven Zustand befinden. Die Trennungslinie zwischen den Mengen $A_+(t_0)$ und $A_-(t_0)$ fällt dann mit der h_c -Achse zusammen, sodass für ihren Anfangszustand $z_{H0}(h_c) = 0$ gilt. Diese spezielle Ausgangskonfiguration lässt sich mit guter Näherung erzeugen, indem das Material beziehungsweise der Preisach-Hystereseeoperator mit einem Feldstärke-signal angesteuert wird, dessen Amplituden um die Nulllage oszillieren und mit voranschreitender Zeit von hinreichend großen betragsmäßigen Werten in kleinen Schritten bis auf null hin abnehmen.

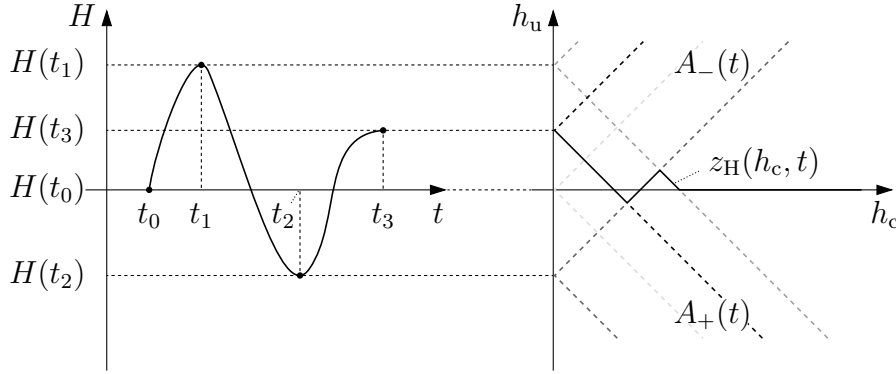


Bild 4.5: Entwicklung des komplexen Preisachgedächtnisses infolge eines zeitlich veränderlichen Eingangssignals in Anlehnung an [Kuh08]

Infolge des zeitabhängigen Signals auf der linken Seite der Abbildung verschieben sich die beiden Begrenzungsgeraden $h_u = -h_c + H(t)$ und $h_u = h_c + H(t)$ in der rechts dargestellten Preisach-Ebene gemäß ihrer linearen Abhängigkeit von der Amplitude $H(t)$ gemeinsam entlang der h_u -Achse. Die gestrichelten Linien markieren ihre Positionen zum Anfangszeitpunkt t_0 , in den Momenten der Signalextrrema bei t_1 und t_2 sowie zum Endzeitpunkt t_3 . Die Zeitpunkte t_0, t_1, t_2 und t_3 kennzeichnen damit die Monotonieintervallgrenzen des Eingangssignals. Im Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ steigt die Feldstärke $H(t)$ monoton vom Wert $H(t_0) = 0$ bis auf den Maximalwert $H(t_1)$ an. Von den Relayoperatoren, die sich zum Zeitpunkt t_0 in ihrem negativen Zustand befinden, wechseln sukzessive diejenigen in den positiven Zustand, deren Aufwärtsschwellwerte α durch das Eingangssignal $H(t)$ erreicht werden. Die zeitabhängige Trennungslinie in der Preisach-Ebene setzt sich somit aus einem Abschnitt der unteren Begrenzungsgerade $h_u = -h_c + H(t)$ und dem verbleibenden Geradenstück des Anfangszustandes $z_{H0}(h_c) = 0$ zusammen. Sie wird durch die Gleichung

$$z_H(h_c, t) = \max\{-h_c + H(t), z_H(h_c, t_0)\} \quad ; \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.26)$$

mit

$$z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_0) = z_{\text{H}0}(h_{\text{c}}) \quad (4.27)$$

beschrieben. Innerhalb des Intervalls $t_1 \leq t \leq t_2$ fällt die Amplitude monoton vom Maximalwert $H(t_1)$ bis auf den Minimalwert $H(t_2)$ ab. Von den Relayoperatoren, die zur Zeit t_1 den positiven Zustand eingenommen haben, gehen dabei nach und nach alle diejenigen in den negativen Zustand über, deren Abwärtsschwellwerte β das Eingangssignal $H(t)$ unterschreitet. Die Trennungslinie besteht nun aus einem Teil der oberen Begrenzungsgerade $h_{\text{u}} = h_{\text{c}} + H(t)$ und dem Rest der zusammengesetzten Trennungslinie $z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_1)$. Da die Amplitude $H(t_2)$ auch betragsmäßig kleiner als $H(t_1)$ ist, verbleibt ein Teil des im Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ aus $h_{\text{u}} = -h_{\text{c}} + H(t)$ gebildeten Geradenstückes erhalten. Dadurch entsteht ein Eckpunkt in der Trennungslinie, deren zeitliche Entwicklung nun durch

$$z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t) = \min\{h_{\text{c}} + H(t), z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_1)\} \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (4.28)$$

gegeben ist. Innerhalb des Bereichs $t_2 \leq t \leq t_3$ steigt die Amplitude erneut monoton an, bis sie einen Wert $H(t_3)$ mit $|H(t_3)| < |H(t_2)|$ erreicht. Dadurch bildet sich eine weitere Ecke in der Trennungslinie heraus. Die Gestalt von $z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_3)$ ist mithilfe der durchgezogenen Linie gekennzeichnet.

Die Kombination der Gleichung (4.26) für ein monoton steigendes Eingangssignal und der Gleichung (4.28) für ein monoton fallendes Eingangssignal führt auf die Beziehung

$$z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t) = \max\{-h_{\text{c}} + H(t), \min\{h_{\text{c}} + H(t), z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_i)\}\} \quad ; \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (4.29)$$

und ermöglicht die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Trennungslinie innerhalb jedes Monotonieintervalls $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Für eine beliebige Signalform des Eingangssignals mit N_t Monotonieintervallen gilt deshalb die verallgemeinerte Gleichung

$$z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t) = \max\{-h_{\text{c}} + H(t), \min\{h_{\text{c}} + H(t), z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_i)\}\} \quad (4.30)$$

mit

$$t_i < t \leq t_{i+1} \quad ; \quad 0 \leq i \leq N_t - 1$$

und

$$z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t_0) = \max\{-h_{\text{c}} + H(t), \min\{h_{\text{c}} + H(t), z_{\text{H}0}(h_{\text{c}})\}\}. \quad (4.31)$$

Somit ist die zeitliche Entwicklung aller Operatorenzustände $z_{\text{R}}(h_{\text{c}}, h_{\text{u}})$ für einen beliebigen Verlauf von $H(t)$ vollständig und redundanzfrei durch die zeitabhängige Trennungslinie $z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t)$ beschreibbar. Ihre Gestalt wird durch das aktuelle Eingangssignal und seine Extremwerte in der Vergangenheit sowie den Anfangszustand bestimmt. Dabei ist die Information über die vergangenen Maxima und Minima des Eingangssignals in den Eckpunkten von $z_{\text{H}}(h_{\text{c}}, t)$ gespeichert. Die Änderungsgeschwindigkeit von $H(t)$ hat indes keinen Einfluss auf den Vorgang der Gedächtnisbildung, weil das Übertragungsverhalten der elementaren Hystereseoperatoren ratenunabhängig ist. Das korrespondiert mit der Ratenunabhängigkeit des Barkhausen-Effektes und den damit verbundenen realen Hystereseerscheinungen.

Auf der Basis der geometrischen Interpretation mit den beiden zusammenhängenden Mengen $A_+(t)$ und $A_-(t)$ lässt sich das Preisach-Modell durch die Gleichung

$$P[H](t) = M_S \left[\iint_{A_+(t)} p(h_c, h_u) dh_u dh_c - \iint_{A_-(t)} p(h_c, h_u) dh_u dh_c \right] \quad (4.32)$$

ausdrücken. Mit der Trennungslinie $z_H(h_c, t)$ als Integrationsgrenze erhält man daraus schließlich die alternative Darstellung, die ohne eine Integration über jeden einzelnen der Relayoperatorenzustände auskommt, und es gilt

$$P[H](t) = M_S \left[\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{z_H(h_c, t)} p(h_c, h_u) dh_u dh_c - \int_0^{+\infty} \int_{z_H(h_c, t)}^{+\infty} p(h_c, h_u) dh_u dh_c \right]. \quad (4.33)$$

Ein hysteresebehaftetes System ist durch den Preisach-Hystereseoperator beschreibbar, wenn es mit ihm zwei bestimmte Eigenschaften teilt. Die nach [May91] als notwendig und hinreichend geltenden Merkmale tragen die Bezeichnungen Auslöscheigenschaft und Kongruenzeigenschaft.

Die Auslöscheigenschaft bringt den charakteristischen Vergessensmechanismus des komplexen Preisach-Gedächtnisses zum Ausdruck. Demnach können einzelne oder mehrere Eckpunkte in der Trennungslinie gelöscht werden und mit ihnen auch die Informationen über die entsprechenden Minima und Maxima des Eingangssignals aus der Vorgeschichte, wenn das zeitlich später auftretende Eingangssignal genügend große positive beziehungsweise negative Amplituden aufweist. Ein Gedankenexperiment anhand von Abbildung 4.5 demonstriert dieses Verhalten. Wenn etwa die Amplitude $H(t_3)$ zum Zeitpunkt t_3 einen größeren Wert als die Amplitude des Maximums $H(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 annähme, so würde die für steigende Signale maßgebliche untere Begrenzungsgerade $h_u = -h_c + H(t)$ während des Monotonieintervalls $t_2 \leq t \leq t_3$ den im Intervall $t_0 \leq t \leq t_2$ gebildeten Eckpunkt der Trennungslinie überstreichen und folglich zum Zeitpunkt t_3 oberhalb seiner einstigen Lage verlaufen. Die Trennungslinie bestünde dann wieder nur noch aus einem Abschnitt dieser unteren Begrenzungsgerade und dem verbleibenden Geradenstück des Anfangszustandes $z_{H0}(h_c) = 0$. Dadurch wären die Informationen über die Extremwerte des Eingangssignals zu den Zeiten t_1 und t_2 nachhaltig aus dem Gedächtnis gelöscht.

Während die Auslöscheigenschaft die Zustandsabbildung und damit das Gedächtnis des Preisach-Hystereseoperators charakterisiert, trifft die Kongruenzeigenschaft Aussagen über seine Ausgangsabbildung. Oszilliert das Eingangssignal zwischen einem bestimmten Minimum und Maximum, so überstreicht die Trennungslinie in der Preisach-Ebene unabhängig vom Zustand des Gedächtnisses immer dieselbe Fläche. Demzufolge müssen auch die dadurch erzeugten Änderungen des Ausgangssignals stets identisch sein. Die magnetische Vorgeschichte, die in dem vom oszillierenden Eingangssignal unbeeinflussten Teil der Trennungslinie gespeichert ist, bestimmt lediglich die Größe eines konstanten Offsets im Ausgangssignal. In der Ausgangs-Eingangs-Darstellung des Preisach-Hystereseoperators

führt ein solches Eingangssignal deshalb zur Bildung geschlossener Hystereseschleifen, die unabhängig von der magnetischen Vorgeschichte stets dieselbe Form aufweisen. Die Eingangssignalamplituden vorhergehender Zeitabschnitte wirken sich über das Gedächtnis allein auf die vertikale Position dieser kongruenten Schleifen aus. Abbildung 4.6 zeigt dies beispielhaft für zwei Paare von kongruenten inneren Schleifen, wobei sich der Unterschied in der magnetischen Vorgeschichte durch die äußere Hystereseschleife ausdrückt.

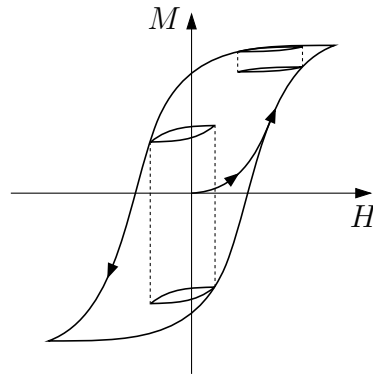


Bild 4.6: Darstellung der Kongruenzeigenschaft des Preisach-Hystereseeoperators am Beispiel einer $M(H)$ -Trajektorie in Anlehnung an [Kuh08]

Die Auslöscheigenschaft und die Kongruenzeigenschaft legitimieren die Verwendung des Preisach-Modells zur Beschreibung des ferromagnetischen Materialverhaltens. Ihre Präsenz impliziert aber noch weitreichendere Aussagen. So sind beide Merkmale die makroskopischen Kennzeichen für die Existenz einer $p(\Delta E, \Delta F)$ -Verteilung [Ber98]. Weist ein magnetisches System beide Eigenschaften auf, so begründet dies ganz allgemein die Verwendung einer solchen energieabhängigen Wahrscheinlichkeitsfunktion als Ansatz für die Modellbildung.

4.2 Prandtl-Ishlinskii-Ansatz zur Beschreibung ratenunabhängiger Hysterese

Das Preisach-Modell wird wegen seines komplexen Gedächtnisses und der Fähigkeit, auch Sättigungseffekte und Asymmetrien abbilden zu können, häufig für die Modellierung des phänomenologischen Materialverhaltens von Ferromagnetika eingesetzt. Ein wesentlicher Nachteil besteht aber darin, dass sich seine Inverse bis auf wenige Spezialfälle nur auf numerischem Weg aus dem Hysteresemodell bestimmen lässt und im Allgemeinen keinen Preisach-Hystereseeoperator darstellt. Wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigt, erfordert jedoch die Berücksichtigung der ratenunabhängigen Hysterese im Zusammenhang mit dem Verlustseparationsansatz ein Modell für die inverse Beziehung $H(B)$. Aus diesem Grund ist das klassische Preisach-Modell zunächst inkompatibel zum Verlustseparationsansatz. Basierend auf den Ausführungen in [Kuh01] und [Kuh08] soll nun ein alternatives Hysteresemodell mit Preisach-Gedächtnis hergeleitet werden, dessen Inverse

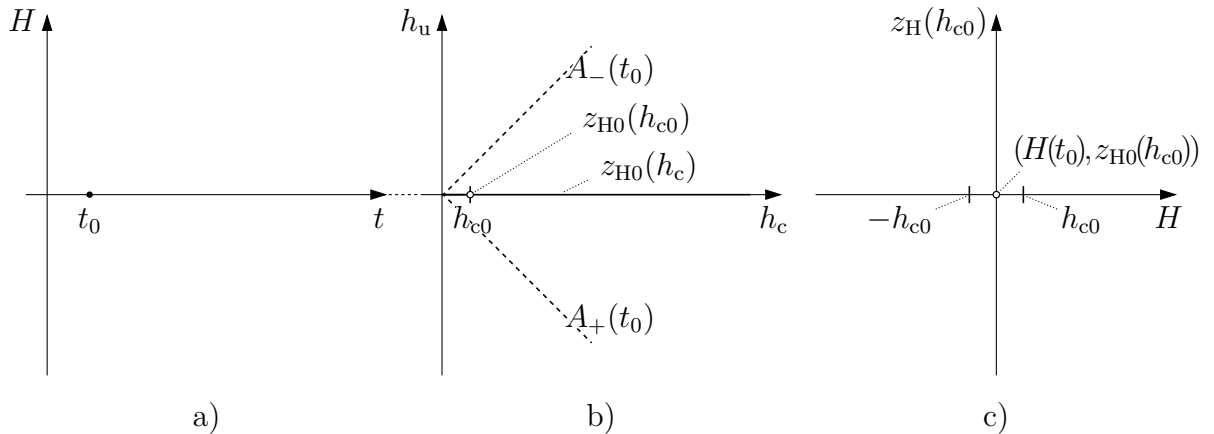
sich analytisch bestimmen lässt. Zu diesem Zweck stellt Bild 4.7 analog zum in Abbildung 4.5 diskutierten Fall noch einmal die zeitliche Entwicklung des komplexen Preisachgedächtnisses in der Preisach-Ebene infolge eines identischen zeitabhängigen Eingangssignals und für dieselben Anfangsbedingungen dar. Der Vorgang der Gedächtnisbildung wurde bereits zuvor ausführlich diskutiert und steht an dieser Stelle nicht im Vordergrund. Vielmehr geht es nun darum, die Abhängigkeit aufzuzeigen, die zwischen einem Punkt $z_H(h_{c0}, t)$ der Trennungslinie $z_H(h_c, t)$ und der magnetischen Feldstärke $H(t)$ als Eingangssignal besteht. Deshalb ist für den Anfangszeitpunkt t_0 und jedes der drei Monotonieintervalle von $H(t)$ außerdem der Verlauf der $z_H(h_{c0})$ - H -Trajektorie angegeben.

Die Bilder 4.7a-c beschreiben die Verhältnisse zum Zeitpunkt $t = t_0$. Die Amplitude der magnetischen Feldstärke $H(t_0)$ nimmt dann den Wert 0 an, weshalb die zeitabhängige Trennungslinie $z_H(h_c, t_0) = z_{H0}(h_c)$ mit dem Anfangszustand $z_{H0}(h_c) = 0$ vollständig auf der h_c -Achse der Preisach-Ebene verläuft. In der $z_H(h_{c0})$ - H -Ebene liegt der Punkt $(H(t_0), z_{H0}(h_{c0}))$ somit im Ursprung des Koordinatensystems.

Die Auswirkungen des im Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ bis auf den Wert $H(t_1)$ monoton ansteigenden Eingangssignals sind in den Bildern 4.7d-f wiedergegeben. Da sich die Trennungslinie nach den Gleichungen (4.26) und (4.27) aus $z_H(h_c, t) = \max\{-h_c + H(t), z_{H0}(h_c)\}$ ergibt, verbleibt der Punkt $z_H(h_{c0}, t)$ zunächst auf der h_c -Achse, bis die Feldstärke den Schwellwert $H = h_{c0}$ erreicht. Danach steigt auch der Funktionswert von $z_H(h_{c0}, t)$ linear mit dem Eingangssignal an. In der $z_H(h_{c0})$ - H -Ebene wird die daraus resultierende Trajektorie durch $z_H(h_{c0}, t) = \max\{-h_{c0} + H(t), z_{H0}(h_{c0})\}$ beschrieben.

Wie die Abbildungen 4.7g-i zeigen, gelten analoge Beziehungen auch für das zeitliche Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$, in dem die magnetische Feldstärke ausgehend von $H(t_1)$ monoton auf einen Wert $H(t_2)$ abfällt. Während die Trennungslinie nach Gleichung (4.28) durch $z_H(h_c, t) = \min\{h_c + H(t), z_H(h_c, t_1)\}$ definiert ist, ergibt sich die $z_H(h_{c0})$ - H -Trajektorie aus $z_H(h_{c0}, t) = \min\{h_{c0} + H(t), z_H(h_{c0}, t_1)\}$.

Die Bilder 4.7j-l stellen die Zusammenhänge im Zeitabschnitt $t_2 \leq t \leq t_3$ dar. Für das von $H(t_2)$ aus erneut monoton ansteigende Eingangssignal gelten, abgesehen von den sich unterscheidenden Anfangszuständen, dieselben Gleichungen zur Beschreibung von $z_H(h_c, t)$



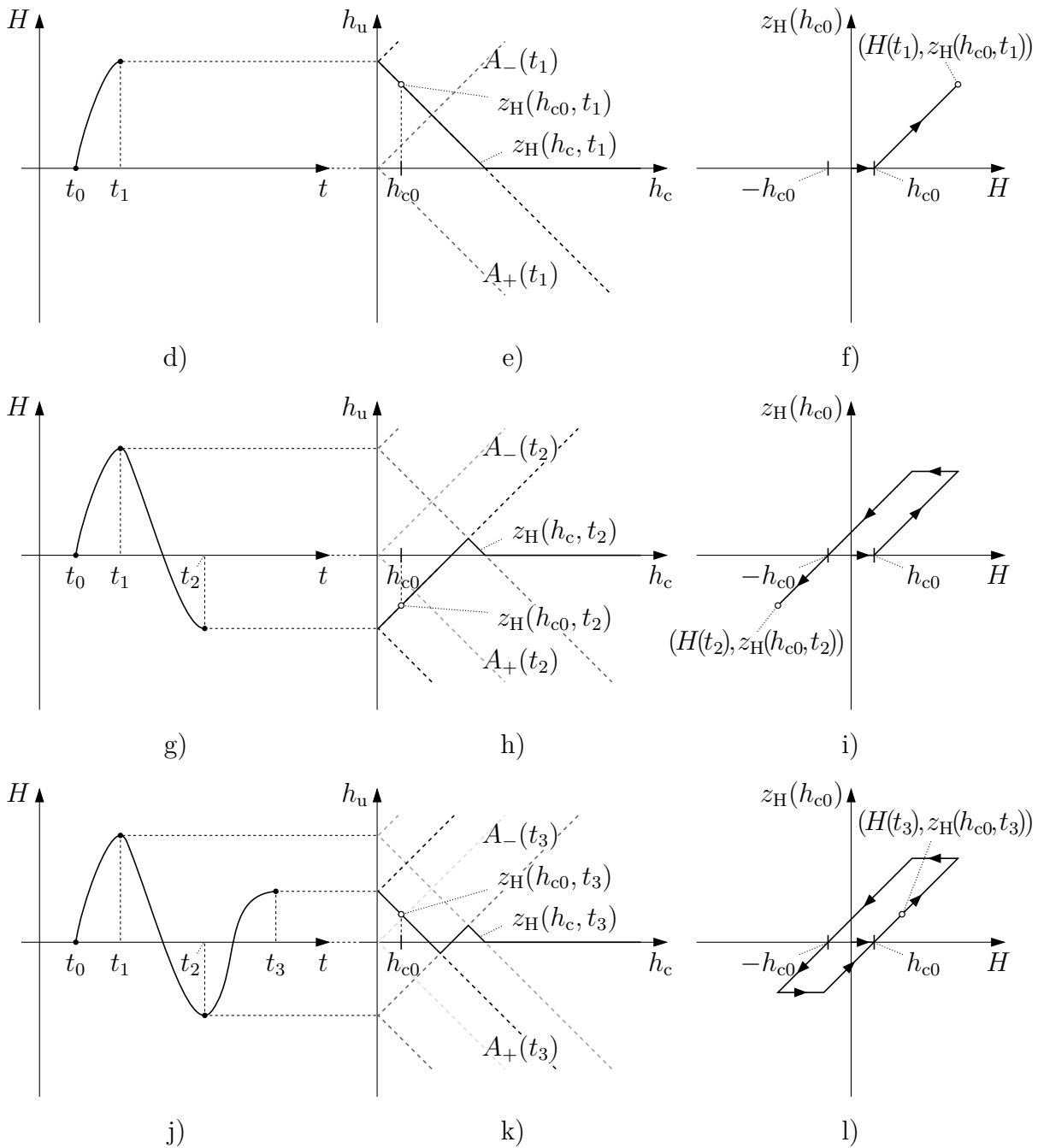


Bild 4.7: Zeitliche Entwicklung des komplexen Preisachgedächtnisses und Beschreibung eines Punktes der Trennungslinie als zeitabhängige Trajektorie in der $z_H(h_{c0})$ - H -Ebene in Anlehnung an [Kuh08]

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------|---|
| a) $H(t)$ für $t = t_0$ | b) $z_H(h_c, t_0)$ | c) $z_H(h_{c0}, H)$ für $t = t_0$ |
| d) $H(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ | e) $z_H(h_c, t_1)$ | f) $z_H(h_{c0}, H)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ |
| g) $H(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_2$ | h) $z_H(h_c, t_2)$ | i) $z_H(h_{c0}, H)$ für $t_0 \leq t \leq t_2$ |
| j) $H(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_3$ | k) $z_H(h_c, t_3)$ | l) $z_H(h_{c0}, H)$ für $t_0 \leq t \leq t_3$ |

und $z_{\text{H}}(h_{c0}, t)$, die auch für das Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ zur Anwendung kommen. Der Punkt $(H(t_3), z_{\text{H}0}(h_{c0}))$ liegt deshalb auf dem während des ersten Zeitintervalls durch $-h_{c0} + H(t)$ gebildeten, steigenden Zweig.

Es lässt sich schlussfolgern, dass die zwischen dem Punkt $z_{\text{H}}(h_{c0}, t)$ der Trennungslinie und dem Eingangssignal $H(t)$ bestehende Abhängigkeit dem Übertragungsverhalten eines gewöhnlichen Playoperators mit dem charakteristischen Schwellwert h_{c0} entspricht. In der Abbildung 4.8 ist die allgemeine Ausgangs-Eingangs-Trajektorie dieses hysteresebehafteten Übertragungsgliedes für einen allgemeinen Schwellwert h_c dargestellt. Die zeitliche Entwicklung seines Ausgangssignals infolge eines stückweise monotonen Eingangssignals gehorcht dann den Beziehungen (4.30) und (4.31). Dafür soll die Operatorschreibweise verwendet werden, sodass H_{h_c} den Playoperator repräsentiert und der Zusammenhang

$$z_{\text{H}}(h_c, t) = \text{H}_{h_c}[H, z_{\text{H}0}(h_c)](t) \quad (4.34)$$

gilt. Die Tatsache, dass sich der zeitliche Verlauf der Trennungslinie $z_{\text{H}}(h_c, t)$ mit Hilfe von Playoperatoren beschreiben lässt, impliziert zudem, dass das Preisachgedächtnis alternativ zum zweidimensionalen Kontinuum von Relayoperatoren auch durch ein eindimensionales Kontinuum von gewöhnlichen Playoperatoren gebildet werden kann.

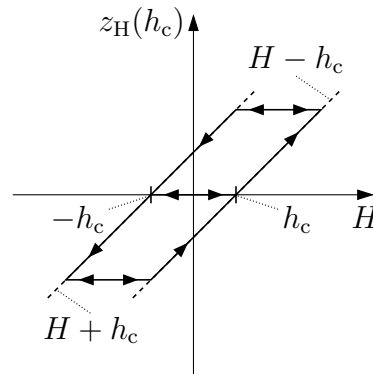


Bild 4.8: Ausgangs-Eingangs-Verhalten eines gewöhnlichen Playoperators in Anlehnung an [Kuh08]

Dieser Sachverhalt ist auch aus der Definition des Preisach-Hystereseoperators nach Gleichung (4.33) ableitbar. Durch eine Umformulierung des Ausdrucks erhält man gemäß

$$\begin{aligned} P[H](t) = & M_S \int_0^{+\infty} \left(2 \int_0^{z_{\text{H}}(h_c, t)} p(h_c, h_u) dh_u \right) dh_c \\ & + M_S \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^0 p(h_c, h_u) dh_u - \int_0^{+\infty} p(h_c, h_u) dh_u \right) dh_c \end{aligned}$$

eine Auftrennung in einen von $z_{\text{H}}(h_c, t)$ abhängigen Anteil und einen weiteren, der davon

unabhängig ist. Mit

$$p_H(h_c, z_H(h_c, t)) = 2 \int_0^{z_H(h_c, t)} p(h_c, h_u) dh_u \quad (4.35)$$

und

$$P_{\text{off}} = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^0 p(h_c, h_u) dh_u - \int_0^{+\infty} p(h_c, h_u) dh_u \right) dh_c \quad (4.36)$$

kann man auch schreiben

$$P[H](t) = M_S \left[\int_0^{+\infty} p_H(h_c, z_H(h_c, t)) dh_c + P_{\text{off}} \right]. \quad (4.37)$$

Gleichung (4.37) besagt nun, dass sich das Preisach-Modell alternativ zur gewichteten linearen Überlagerung von unendlich vielen Relayoperatoren entsprechend der Gleichungen (4.21) und (4.22) auch durch eine nichtlineare Überlagerung von unendlich vielen Playoperatoren zuzüglich eines zeitunabhängigen Offsets P_{off} ausdrücken lässt. Letzterer verschwindet für den Fall eines zur h_c -Achse symmetrischen Verlaufs der Gewichtsfunktion $p(h_c, h_u)$ automatisch oder kann im anderen Fall durch eine nachträgliche lineare Koordinatenverschiebung des Ausgangssignals Berücksichtigung finden. Die vom Offset befreite Darstellung lautet demnach

$$P[H](t) = M_S \int_0^{+\infty} p_H(h_c, z_H(h_c, t)) dh_c \quad (4.38)$$

mit

$$z_H(h_c, t) = H_{h_c}[H, z_{H0}(h_c)](t). \quad (4.39)$$

Darin zeigt sich die zuvor beschriebene Eindimensionalität des Kontinuums von Elementaroperatoren dadurch, dass die Variable h_u in den Gleichungen (4.38) und (4.39) nicht mehr vorkommt. Die Variable h_c stellt bei dieser Interpretation den Schwellwert des gewöhnlichen Playoperators dar und entspricht dem halben Abstand des Aufwärtsschwellwertes α und des Abwärtsschwellwertes β des Relayoperators. Für den speziellen Fall einer gewichteten linearen Superposition von unendlich vielen Playoperatoren mit unterschiedlichen Schwellwerten h_c erhält man daraus schließlich einen Hystereseoperator H zu

$$H[H](t) = M_S \int_0^{+\infty} p_H(h_c) z_H(h_c, t) dh_c \quad (4.40)$$

mit

$$z_H(h_c, t) = H_{h_c}[H, z_{H0}(h_c)](t), \quad (4.41)$$

dessen Inverse sich analytisch bestimmen lässt und strukturinvariant gegenüber dem Vorwärtsmodell ist. Er wird als Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator bezeichnet, bildet eine Unterklasse der Hystereseoperatoren mit Preisachgedächtnis und besitzt ebenfalls die Auslöscheneigenschaft. Weil er aus der linearen Überlagerung von gewöhnlichen Playoperatoren hervorgeht, tritt an die Stelle der Kongruenzeigenschaft die restriktivere Masing-Eigenschaft. Danach sind nicht nur innere Hystereseschleifen in vertikaler Anordnung kongruent zueinander, wenn das sie erzeugende Eingangssignal zwischen einem bestimmten Minimum und Maximum schwankt. Vielmehr besitzen, unabhängig von der spezifischen Vorgeschichte, sämtliche inneren Schleifen dieselbe Form, insofern sie aus oszillierenden Eingangsamplituden mit betragsmäßig identischen Differenzen zwischen den jeweiligen Minimal- und Maximalwerten resultieren. Zudem weist jede geschlossene Schleife grundsätzlich eine zu ihrem Schwerpunkt punktsymmetrische Gestalt auf. Die mit der Masing-Eigenschaft einhergehenden Einschränkungen der Prandtl-Ishlinskii-Methode gegenüber dem klassischen Preisach-Ansatz bestehen folglich in dem fehlenden Vermögen, Sättigungseffekte und Asymmetrien abbilden zu können. Das bewirkt in der Regel vor allem zu höheren Eingangsamplituden hin eine zunehmend größere Diskrepanz zwischen dem realen und dem mittels des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperators modellierten Verhalten ferromagnetischer Materialien. Abbildung 4.9 verdeutlicht die Masing-Eigenschaft anhand einer äußeren Hystereseurve mit vier kongruenten inneren Schleifen, die jeweils unterschiedliche Vorgeschichten besitzen und paarweise innerhalb von zwei verschiedenen Amplitudenbereichen des Eingangssignals liegen.

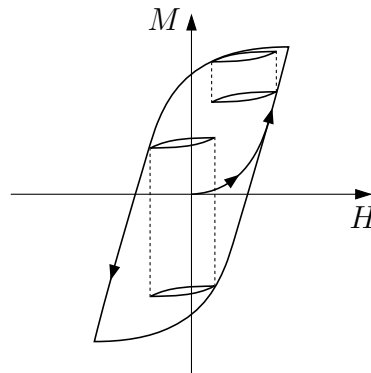


Bild 4.9: Darstellung der Masing-Eigenschaft des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperators am Beispiel einer $M(H)$ -Trajektorie in Anlehnung an [Kuh08]

Der vorstehende Abschnitt hat die Verbindung zwischen dem Preisach-Modell und dem Prandtl-Ishlinskii-Modell dargelegt und deren Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede herausgestellt. Demnach ist der Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator zwar kompatibel zum Verlustseparationsprinzip, jedoch machen seine beschriebenen Defizite zusätzliche Maßnahmen zur Verbesserung der Modellgenauigkeit erforderlich. Ansätze zur Lösung dieses Problems werden im weiteren Verlauf des Kapitels vorgestellt.

4.2.1 Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell

Ein zentraler Gegenstand dieses Unterkapitels ist das Aufzeigen des zwischen dem Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator und seiner Inversen bestehenden Zusammenhangs. Dabei soll insbesondere die Frage beantwortet werden, wie und unter welchen Bedingungen die analytische Invertierung zu realisieren ist. Im Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit erfolgt zudem der Übergang von schwellwertkontinuierlichen zu schwellwertdiskreten Formulierungen des Hysterese Modells. Mit dem Ziel einer vereinfachten Darstellung lassen sich diese dann zusammen mit den zugehörigen Nebenbedingungen und Transformationsbeziehungen zur Modellinvertierung anhand einer kompakten vektoriellen Schreibweise angeben. Darüber hinaus wird aus demselben Grund von nun an eine von physikalischen Größen losgelöste Gestalt des Hysterese Modells bevorzugt. Für weiterführende Informationen zu den in diesem Unterkapitel betrachteten Zusammenhängen, insbesondere zur Herleitung der Transformationsbedingungen und -beziehungen, sei auf die Fachliteratur [Kuh01] und [Kuh08] verwiesen.

Ausgehend von den Gleichungen (4.40) und (4.41) ergibt sich die rein mathematische Beschreibung des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperators mit dem allgemeinen zeitabhängigen Eingangssignal $x(t)$, der symmetrischen Schwellwertvariable $r_H \in \mathbb{R}^+$, der Gewichtsfunktion $w_H(r_H)$ und einem zusätzlichen Term $w_{H0}x(t)$ zur Berücksichtigung von reversiblen Anteilen im Übertragungsverhalten von H zu

$$H[x](t) := w_{H0}x(t) + \int_0^{+\infty} w_H(r_H)z_H(r_H, t) dr_H \quad (4.42)$$

mit

$$z_H(r_H, t) = H_{r_H}[x, z_{H0}(r_H)](t). \quad (4.43)$$

Seine exakte Inverse H^{-1} wird sinngemäß auch als Kompensator bezeichnet, denn die Verkettung gemäß

$$H^{-1}[H[x]] = x \quad (4.44)$$

führt zur vollständigen Kompensation der Hysteresecharakteristik. Es sei $y(t)$ ein allgemeines zeitabhängiges Eingangssignal von H^{-1} . Mit der Schwellwertvariable r'_H , der Gewichtsfunktion $w'_H(r'_H)$, dem reversiblen Anteil $w'_{H0}y(t)$ und dem Gedächtniszustand $z'_H(r'_H, t)$ entspricht der zum Vorwärtsmodell strukturinvariante Prandtl-Ishlinskii-Hysterese kompensator dann der Beziehung

$$H^{-1}[y](t) := w'_{H0}y(t) + \int_0^{+\infty} w'_H(r'_H)z'_H(r'_H, t) dr'_H \quad (4.45)$$

mit

$$z'_H(r'_H, t) = H_{r'_H}[y, z'_{H0}(r'_H)](t). \quad (4.46)$$

Für die Anwendung in der Praxis sind die schwellwertkontinuierlichen Modelle aus Rechenzeitgründen ungeeignet. Hier wird man stattdessen endlichdimensionale, schwellwertdiskrete Approximationen bevorzugen. Sie lassen sich erzeugen, indem die kontinuierlichen Gewichtsfunktionen $w_H(r_H)$ und $w'_H(r'_H)$ durch gewichtete Überlagerungen einer endlichen Anzahl diracscher Impulsfunktionen ersetzt werden. Infolge der damit verbundenen Siebeigenschaft gehen daraus die diskretisierten Modelle hervor. Der schwellwertdiskrete Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator wird somit durch

$$H[x](t) = w_{H0}x(t) + \sum_{i=1}^m w_{Hi}z_H(r_{Hi}, t) \quad (4.47)$$

mit

$$z_H(r_{Hi}, t) = H_{r_{Hi}}[x, z_{H0}(r_{Hi})](t) \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.48)$$

beschrieben. Demnach muss der Systemzustand z_H nur noch an den diskreten Punkten r_{Hi} mit

$$0 < r_{H1} < \dots < r_{Hi} < \dots < r_{Hm} < \infty \quad (4.49)$$

berechnet werden. Analog dazu besitzt der schwellwertdiskrete Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensator die Form

$$H^{-1}[y](t) = w'_{H0}y(t) + \sum_{i=1}^m w'_{Hi}z'_H(r'_{Hi}, t) \quad (4.50)$$

mit

$$z'_H(r'_{Hi}, t) = H_{r'_{Hi}}[y, z'_{H0}(r'_{Hi})](t) \quad ; \quad i = 1 \dots m, \quad (4.51)$$

wobei für seine Schwellwerte r'_{Hi} die Bedingung

$$0 < r'_{H1} < \dots < r'_{Hi} < \dots < r'_{Hm} < \infty \quad (4.52)$$

gilt. Daraus folgt, dass ein hysteresebefahtetes Übertragungsverhalten nun anhand von stückweise linearen Kurvenstücken und einem endlichdimensionalen Gedächtnis angenähert wird. Das Bild 4.10a stellt exemplarisch eine Kennlinie des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators mit $m = 4$ äquidistant verteilten Schwellwerten dar. Wegen des zusätzlichen reversiblen Anteils, dem sich ein Schwellwert bei 0 zuordnen lässt, erhält man die Modellordnung $m + 1 = 5$. Bild 4.10b veranschaulicht das zugehörige Kompensatormodell. Durch die Verkettung der zueinander inversen Modelle in der Art, dass das Ausgangssignal des Operators das Eingangssignal des Kompensators ist, resultiert daraus die in der Abbildung 4.10c gezeigte Identität, die das Eingangssignal x auf sich selbst abbildet. In den Darstellungen 4.10a und 4.10b kennzeichnet jeweils eine gestrichelte graue Linie ihr Äquivalent in Form einer Geraden durch den Koordinatenursprung mit der Steigung eins.

Die Bestimmung des Kompensators aus dem Vorwärtsmodell erfordert die Berücksichtigung von Nebenbedingungen zur Sicherung der Invertierbarkeit und der thermodynamischen Konsistenz. Eine entsprechende inverse Formulierung kann demnach nur dann

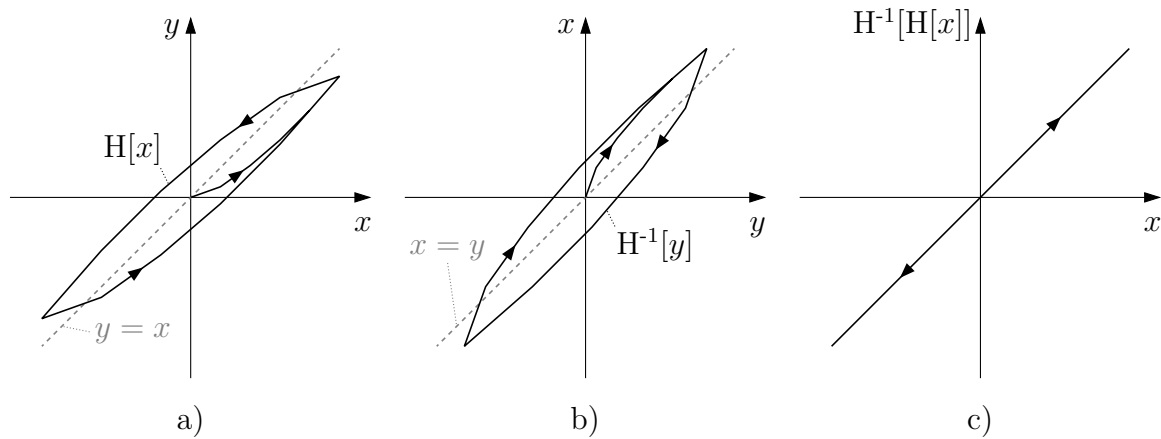


Bild 4.10: Ausgangs-Eingangs-Trajektorien eines schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators mit der Modellordnung $m + 1 = 5$, des zugehörigen Kompensators und der Verkettung beider Modelle
a) Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator H
b) zugehöriger inverser Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator H^{-1}
c) Verkettung der zueinander inversen Modelle H und H^{-1}

mittels analytischer Transformationsbeziehungen bestimmt werden, wenn die Gewichte des Hystereseeoperators die Ungleichungen

$$w_{H0} > 0 \quad , \quad w_{Hi} \geq 0 \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.53)$$

und

$$w_{H0} < \infty \quad , \quad w_{Hi} < \infty \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.54)$$

erfüllen. Die Gewichte des inversen Hystereseeoperators lassen sich dann nach

$$w'_{H0} = \frac{1}{w_{H0}} \quad (4.55)$$

und

$$w'_{Hi} = -\frac{w_{Hi}}{\left(w_{H0} + \sum_{j=1}^i w_{Hj}\right)\left(w_{H0} + \sum_{j=1}^{i-1} w_{Hj}\right)} \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.56)$$

berechnen. Seine diskreten Schwellwerte folgen aus der Transformationsgleichung

$$r'_{Hi} = w_{H0}r_{Hi} + \sum_{j=1}^i w_{Hj}(r_{Hi} - r_{Hj}) \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.57)$$

und der Anfangswert des Gedächtnisses resultiert aus

$$z'_{H0}(r'_{Hi}) = \left(w_{H0} + \sum_{j=1}^i w_{Hj}\right)z_{H0}(r_{Hi}) + \sum_{j=i+1}^m w_{Hj}z_{H0}(r_{Hj}) \quad ; \quad i = 1 \dots m. \quad (4.58)$$

Soll hingegen das Vorwärtsmodell durch eine Invertierung des Kompensators bestimmt werden, so müssen in diesem Fall die Ungleichungsnebenbedingungen

$$w'_{H0} > 0 \quad , \quad w'_{Hi} \leq 0 \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.59)$$

und

$$w'_{H0} < \infty \quad , \quad w'_{Hi} > -\infty \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.60)$$

erfüllt sein. Die Rücktransformationsbeziehungen weisen dieselbe Struktur auf wie die Hintransformationsbeziehungen gemäß den Gleichungen (4.55)-(4.58). Die Berechnung der Gewichte erfolgt daher nach den analogen Zusammenhängen

$$w_{H0} = \frac{1}{w'_{H0}} \quad (4.61)$$

und

$$w_{Hi} = - \frac{w'_{Hi}}{\left(w'_{H0} + \sum_{j=1}^i w'_{Hj} \right) \left(w'_{H0} + \sum_{j=1}^{i-1} w'_{Hj} \right)} \quad ; \quad i = 1 \dots m. \quad (4.62)$$

In vergleichbarer Weise ergeben sich die diskreten Schwellwerte nun aus

$$r_{Hi} = w'_{H0} r'_{Hi} + \sum_{j=1}^i w'_{Hj} (r'_{Hi} - r'_{Hj}) \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.63)$$

und für den Anfangszustand des Gedächtnisses gilt

$$z_{H0}(r_{Hi}) = \left(w'_{H0} + \sum_{j=1}^i w'_{Hj} \right) z'_{H0}(r'_{Hi}) + \sum_{j=i+1}^m w'_{Hj} z'_{H0}(r'_{Hj}) \quad ; \quad i = 1 \dots m. \quad (4.64)$$

Zugunsten einer kompakteren Darstellung des schwellwertdiskreten Hystereseeoperators und -kompensators soll eine vektorielle Schreibweise eingeführt werden. Dabei sind die Gewichte des Vorwärtsmodells zu dem Gewichtevektor

$$\mathbf{w}_H^T = \left(w_{H0} \quad w_{H1} \quad \dots \quad w_{Hm} \right) ,$$

seine Schwellwerte zu dem Schwellwertevektor

$$\mathbf{r}_H^T = \left(0 \quad r_{H1} \quad \dots \quad r_{Hm} \right) ,$$

seine initialen Gedächtniszustände zu dem Vektor

$$\mathbf{z}_{H0}^T = \left(0 \quad z_{H0}(r_{H1}) \quad \dots \quad z_{H0}(r_{Hm}) \right)$$

und die zugehörigen Playoperatoren zu dem Vektor

$$\mathbf{H}_{r_H}^T[x, \mathbf{z}_{H0}](t) = \left(x(t) \quad H_{r_{H1}}[x, z_{H0}(r_{H1})](t) \quad \dots \quad H_{r_{Hm}}[x, z_{H0}(r_{Hm})](t) \right)$$

zusammengefasst. Die jeweils ersten Vektorenkomponenten stehen für die reversiblen Anteile im Übertragungsverhalten. Diese Notation erlaubt es nun, den schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator anhand des Skalarproduktes

$$\mathbf{H}[x](t) = \mathbf{w}_H^T \cdot \mathbf{H}_{r_H}[x, \mathbf{z}_{H0}](t) \quad (4.65)$$

auszudrücken. Die linearen Ungleichungsnebenbedingungen (4.53), die unter der Annahme endlicher Gewichte nach (4.54) die Invertierbarkeit von \mathbf{H} sowie die Wahrung der thermodynamischen Konsistenz sicherstellen, lassen sich in vektorieller Form durch

$$\mathbf{U}_H \cdot \mathbf{w}_H - \mathbf{u}_H \geq \mathbf{o} \quad (4.66)$$

mit der Matrix \mathbf{U}_H und dem Vektor \mathbf{u}_H gemäß

$$\mathbf{U}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_H = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

angeben. Darin beschreibt \mathbf{o} den Nullvektor und ε einen Designparameter, dessen Wert vom Anwender entsprechend der Rechengenauigkeit zu wählen ist und der es erlaubt, die strikte Ungleichung in (4.53) durch eine schwache Ungleichung zu ersetzen.

Die Vektordarstellung in Bezug auf das schwellwertdiskrete Kompensatormodell und dessen Invertierungsbedingungen ist gleichartig beschaffen. So sind die ihm zugeordneten Gewichte zu dem Gewichtevektor

$$\mathbf{w}'_H = \begin{pmatrix} w'_{H0} & w'_{H1} & \cdots & w'_{Hm} \end{pmatrix},$$

seine Schwellwerte zu dem Schwellwertevektor

$$\mathbf{r}'_H = \begin{pmatrix} 0 & r'_{H1} & \cdots & r'_{Hm} \end{pmatrix},$$

seine initialen Gedächtniszustände zu dem Vektor

$$\mathbf{z}'_{H0} = \begin{pmatrix} 0 & z'_{H0}(r'_{H1}) & \cdots & z'_{H0}(r'_{Hm}) \end{pmatrix}$$

und die zugehörigen Playoperatoren zu dem Vektor

$$\mathbf{H}'_{r'_H}[y, \mathbf{z}'_{H0}](t) = \begin{pmatrix} y(t) & \mathbf{H}'_{r'_{H1}}[y, z'_{H0}(r'_{H1})](t) & \cdots & \mathbf{H}'_{r'_{Hm}}[y, z'_{H0}(r'_{Hm})](t) \end{pmatrix}$$

zusammengefasst. Damit lässt sich der schwellwertdiskrete inverse Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator durch das Skalarprodukt

$$\mathbf{H}^{-1}[y](t) = \mathbf{w}'_H{}^T \cdot \mathbf{H}'_{r'_H}[y, \mathbf{z}'_{H0}](t) \quad (4.67)$$

ausdrücken. Die linearen Ungleichungsnebenbedingungen (4.59), die unter der Voraussetzung endlicher Gewichte gemäß (4.60) die Invertierbarkeit von H^{-1} und die Wahrung der thermodynamischen Konsistenz garantieren, werden in vektorieller Schreibweise durch

$$\mathbf{U}'_{\text{H}} \cdot \mathbf{w}'_{\text{H}} - \mathbf{u}_{\text{H}} \geq \mathbf{o} \quad (4.68)$$

beschrieben. Dabei besitzt die Matrix \mathbf{U}'_{H} die Gestalt

$$\mathbf{U}'_{\text{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich lassen sich die Hintransformationsgleichungen bezüglich der Gewichte, Schwellwerte und des Gedächtniszustandes gemäß (4.55)-(4.58) in verkürzter vektorieller Notation durch

$$\mathbf{w}'_{\text{H}} = \mathbf{\Lambda}_{\text{H}}(\mathbf{w}_{\text{H}}), \quad (4.69)$$

$$\mathbf{r}'_{\text{H}} = \mathbf{\Xi}_{\text{H}}(\mathbf{r}_{\text{H}}, \mathbf{w}_{\text{H}}), \quad (4.70)$$

$$\mathbf{z}'_{\text{H}0} = \mathbf{\Pi}_{\text{H}}(\mathbf{w}_{\text{H}}, \mathbf{z}_{\text{H}0}) \quad (4.71)$$

und die entsprechenden Rücktransformationsgleichungen laut (4.61)-(4.64) durch die kompakte Vektordarstellung

$$\mathbf{w}_{\text{H}} = \mathbf{\Lambda}_{\text{H}}(\mathbf{w}'_{\text{H}}), \quad (4.72)$$

$$\mathbf{r}_{\text{H}} = \mathbf{\Xi}_{\text{H}}(\mathbf{r}'_{\text{H}}, \mathbf{w}'_{\text{H}}), \quad (4.73)$$

$$\mathbf{z}_{\text{H}0} = \mathbf{\Pi}_{\text{H}}(\mathbf{w}'_{\text{H}}, \mathbf{z}'_{\text{H}0}) \quad (4.74)$$

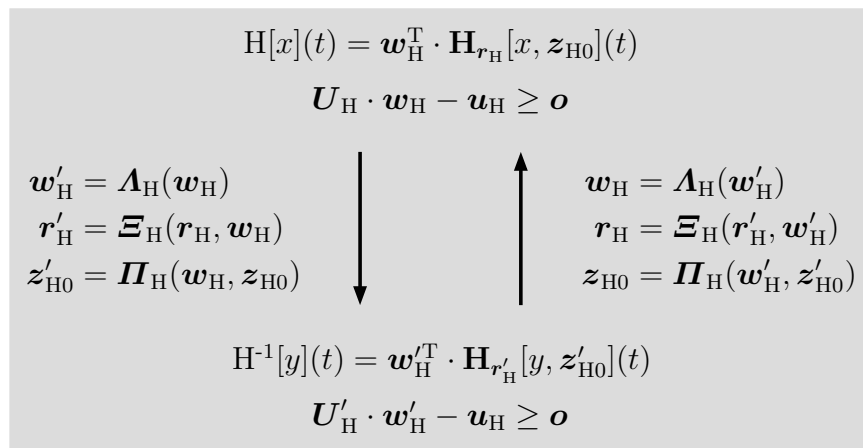


Bild 4.11: Zusammenhang zwischen einem invertierbaren, schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator H und dem dazu inversen Modell H^{-1} in vektorieller Darstellung [Kuh01]

ausdrücken. In der Abbildung 4.11 ist der Zusammenhang zwischen dem schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator und dem zugehörigen Kompensatormodell mit den jeweiligen Ungleichungsnebenbedingungen sowie den Transformationsbeziehungen in vektorieller Schreibweise zusammenfassend aufgezeigt. Die Strukturinvarianz, als eine wesentliche Eigenschaft des Prandtl-Ishlinskii-Modells, wird dabei besonders deutlich.

4.2.2 Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell

Dieses Unterkapitel behandelt das Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell, mit dem sich die Nachteile, die das Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell gegenüber dem Preisach-Modell besitzt, hinreichend ausgleichen lassen, ohne dass dabei seine Vorteile gegenstandslos werden. Auch dieser Ansatz basiert auf der gewichteten linearen Superposition von einfachen Elementaroperatoren mit unterschiedlichen Schwellwerten und erlaubt unter der Einhaltung von Nebenbedingungen die Bildung einer strukturinvarianten Inversen mittels analytischer Transformationsbeziehungen. Analog zum Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell erfolgt im Hinblick auf die praktische Anwendbarkeit für dieses Modell ebenfalls der Übergang von einer schwellwertkontinuierlichen zu einer schwellwertdiskreten Formulierung. Mit dem Ziel einer vereinfachten Darstellung wird das Superpositionsmodell im Folgenden außerdem ohne direkten Bezug zu physikalischen Größen behandelt und seine diskretisierte Variante gemeinsam mit den zugehörigen Nebenbedingungen und Transformationsvorschriften zur Modellinvertierung in eine kompakte vektorielle Schreibweise überführt. Für detailliertere Informationen zu den Inhalten dieses Unterkapitels, insbesondere zur Herleitung der Transformationsbedingungen und -beziehungen, empfiehlt sich die Fachliteratur [Kuh01] und [Kuh08].

Das Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell ermöglicht anhand von stückweise linearen Funktionen die approximative Nachbildung stetiger und streng monotoner eindeutiger Kennlinien, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen. Sein Übertragungsverhalten ist daher gedächtnislos. Der zugrunde liegende Elementaroperator wird als einseitiger Totzoneoperator bezeichnet und lässt sich mit dem allgemeinen Eingangssignal $x(t)$ und seinem charakteristischen Schwellwert $s_H \in \mathbb{R}$ durch

$$S_{s_H}[x](t) := S(x(t), s_H) \quad (4.75)$$

definieren. Darin entspricht S der einseitigen Totzonefunktion, die in Abhängigkeit von s_H der Abbildung

$$S(x(t), s_H) = \begin{cases} \max\{x(t) - s_H, 0\} & ; s_H > 0 \\ 0 & ; s_H = 0 \\ \min\{x(t) - s_H, 0\} & ; s_H < 0 \end{cases} \quad (4.76)$$

gehört. Die Ausgangs-Eingangs-Trajektorien des einseitigen Totzoneoperators für $s_H > 0$, $s_H = 0$ und $s_H < 0$ sind in Bild 4.12 dargestellt.

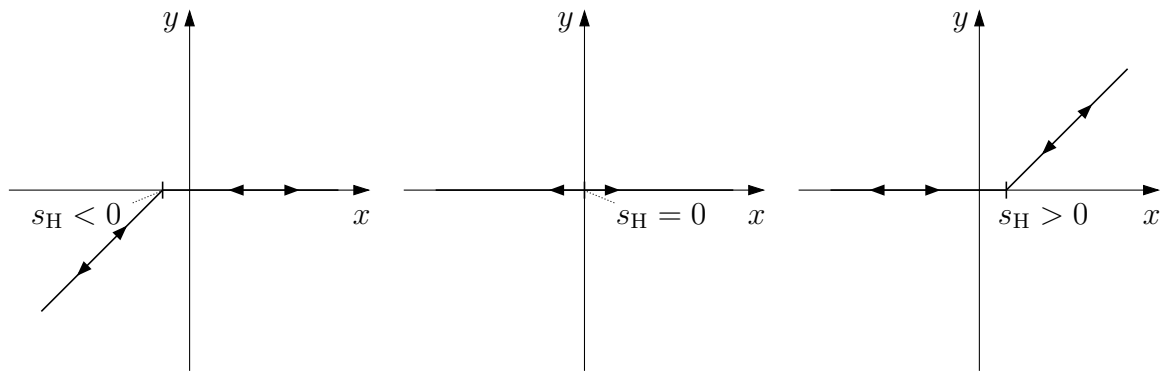


Bild 4.12: Ausgangs-Eingangs-Verhalten des einseitigen Totzoneoperators für verschiedene Schwellwerte in Anlehnung an [Kuh01]

Der Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator geht nun aus der Überlagerung unendlich vieler, mittels der Gewichtsfunktion $v_H(s_H)$ gewichteter, einseitiger Totzoneoperatoren zusätzlich des durch v_{H0} gewichteten Eingangssignals $x(t)$ hervor. Dabei besitzt jeder Elementaroperator einen unterschiedlichen Schwellwert. Die zugehörige Definitionsgleichung lautet

$$S[x](t) := v_{H0}x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} v_H(s_H) S_{s_H}[x](t) ds_H. \quad (4.77)$$

Das dazu exakt inverse Modell S^{-1} kompensiert die nichtlineare Charakteristik des Vorwärtsmodells bei der Verkettung gemäß

$$S^{-1}[S[x]] = x \quad (4.78)$$

vollständig, sodass das resultierende Übertragungsverhalten der Identität entspricht. Es sei $y(t)$ ein allgemeines zeitabhängiges Eingangssignal von S^{-1} . Mit der Schwellwertvariable s'_H , der Gewichtsfunktion $v'_H(s'_H)$, dem einseitigen Totzoneoperator $S_{s'_H}[y](t)$ und der durch die Gewichtung des Eingangssignals gebildeten additiven Komponente $v'_{H0}y(t)$ erhält man die zum Vorwärtsmodell strukturinvariante Darstellung des inversen Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators dann zu

$$S^{-1}[y](t) := v'_{H0}y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} v'_H(s'_H) S_{s'_H}[y](t) ds'_H. \quad (4.79)$$

Für die praktische Anwendung eignen sich die schwellwertkontinuierlichen Modelle aus Rechenzeitgründen nicht. Hier sind ihre endlichdimensionalen, schwellwertdiskreten Approximationen zu favorisieren. Sie lassen sich erzeugen, indem die kontinuierlichen Gewichtsfunktionen $v_H(s_H)$ und $v'_H(s'_H)$ durch gewichtete lineare Überlagerungen endlich vieler diracscher Impulsfunktionen ersetzt werden, denn die damit einhergehende Siebeigenschaft bewirkt die Diskretisierung der Modelle. Hiernach resultiert der schwellwertdiskrete

Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator zu

$$S[x](t) = v_{H0}x(t) + \sum_{i=-l}^{-1} v_{Hi} S_{s_{Hi}}[x](t) + \sum_{i=1}^l v_{Hi} S_{s_{Hi}}[x](t). \quad (4.80)$$

Seine Schwellwerte gehorchen den Nebenbedingungen

$$-\infty < s_{H-l} < \dots < s_{Hi} < \dots < s_{H-1} < 0 \quad (4.81)$$

und

$$0 < s_{H1} < \dots < s_{Hi} < \dots < s_{Hl} < \infty. \quad (4.82)$$

Gilt darüber hinaus für die Gewichte die Ungleichung

$$-\infty < v_{Hi} < \infty \quad ; \quad i = -l \dots l, \quad (4.83)$$

so ist die ihn definierende stückweise lineare Funktion stetig. Das zu ihm exakt inverse Modell S^{-1} besitzt die Gestalt

$$S^{-1}[y](t) = v'_{H0}y(t) + \sum_{i=-l}^{-1} v'_{Hi} S_{s'_{Hi}}[y](t) + \sum_{i=1}^l v'_{Hi} S_{s'_{Hi}}[y](t) \quad (4.84)$$

und es gelten die Schwellwertnebenbedingungen

$$-\infty < s'_{H-l} < \dots < s'_{Hi} < \dots < s'_{H-1} < 0 \quad (4.85)$$

sowie

$$0 < s'_{H1} < \dots < s'_{Hi} < \dots < s'_{Hl} < \infty. \quad (4.86)$$

Die Stetigkeit der zugehörigen stückweise linearen Funktion resultiert nun aus der Einhaltung der Nebenbedingungen

$$-\infty < v'_{Hi} < \infty \quad ; \quad i = -l \dots l. \quad (4.87)$$

In der Abbildung 4.13a ist die Modellierung einer gedächtnislosen Nichtlinearität anhand eines schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators mit $2l = 8$ äquidistant verteilten Schwellwerten qualitativ beschrieben. Inklusiv des additiven Anteils $v_{H0}x(t)$ zur Nachbildung eines von null verschiedenen Anstiegs im Koordinatenursprung resultiert daraus die Modellordnung $2l + 1 = 9$. Das Bild 4.13b zeigt den dazu exakt inversen Superpositionsoperator. Die Verkettung des Vorwärts- und des Rückwärtsmodells gemäß der Gleichung (4.78) bewirkt die vollständige Kompensation der nichtlinearen Übertragungscharakteristika, sodass das resultierende Ausgangs-Eingangs-Verhalten der in der Darstellung 4.13c gezeichneten Identitätsgerade entspricht. In den Bildern 4.13a und 4.13b ist sie als Referenz jeweils durch eine gestrichelte graue Linie angedeutet.

Die Existenz einer zum Vorwärtsmodell inversen Formulierung ist gegeben, wenn die stückweise lineare Funktion, die es abbildet, in ihrem Verlauf streng monoton ist. Das trifft zu, wenn die Gewichte von S den Ungleichungsnebenbedingungen

$$\sum_{j=i}^0 v_{Hj} > 0 \quad ; \quad i = -l \dots -1 \quad (4.88)$$

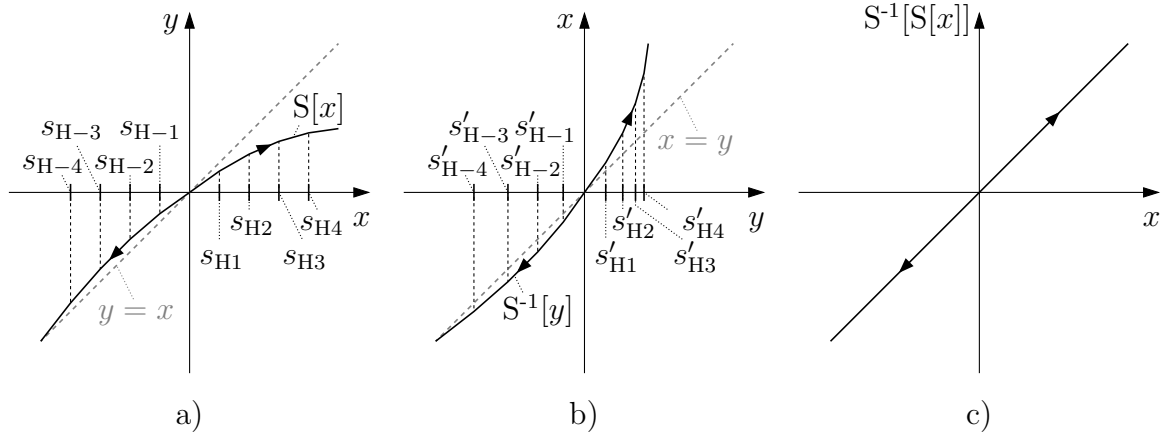


Bild 4.13: Ausgangs-Eingangs-Trajektorien eines schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators mit der Modellordnung $2l + 1 = 9$, des zugehörigen Kompensators und der Verkettung beider Modelle

- Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator S
- zugehöriger inverser Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator S^{-1}
- Verkettung der zueinander inversen Modelle S und S^{-1}

und

$$\sum_{j=0}^i v_{Hj} > 0 \quad ; \quad i = 0 \dots l \quad (4.89)$$

genügen. Die Gewichte des inversen Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators lassen sich dann mithilfe der expliziten Transformationsbeziehungen

$$v'_{H0} = \frac{1}{v_{H0}}, \quad (4.90)$$

$$v'_{Hi} = -\frac{v_{Hi}}{\left(v_{H0} + \sum_{j=i}^{-1} v_{Hj}\right) \left(v_{H0} + \sum_{j=i+1}^{-1} v_{Hj}\right)} \quad ; \quad i = -l \dots -1 \quad (4.91)$$

und

$$v'_{Hi} = -\frac{v_{Hi}}{\left(v_{H0} + \sum_{j=1}^i v_{Hj}\right) \left(v_{H0} + \sum_{j=1}^{i-1} v_{Hj}\right)} \quad ; \quad i = 1 \dots l \quad (4.92)$$

bestimmen. Seine diskreten Schwellwerte resultieren aus der Anwendung der Berechnungsvorschriften

$$s'_{Hi} = v_{H0}s_{Hi} + \sum_{j=i}^{-1} v_{Hj}(s_{Hi} - s_{Hj}) \quad ; \quad i = -l \dots -1 \quad (4.93)$$

und

$$s'_{Hi} = v_{H0}s_{Hi} + \sum_{j=1}^i v_{Hj}(s_{Hi} - s_{Hj}) \quad ; \quad i = 1 \dots l. \quad (4.94)$$

Ist im umgekehrten Fall das Vorwärtsmodell durch eine Invertierung des Rückwärtsmodells zu bestimmen, dann erfordert dies das Einhalten der Ungleichungsnebenbedingungen

$$\sum_{j=i}^0 v'_{Hj} > 0 \quad ; \quad i = -l \dots -1 \quad (4.95)$$

und

$$\sum_{j=0}^i v'_{Hj} > 0 \quad ; \quad i = 0 \dots l \quad (4.96)$$

zur Sicherung der Invertierbarkeit von S^{-1} . Die Rücktransformationsbeziehungen besitzen dieselbe Struktur wie die Hintransformationsbeziehungen (4.90)-(4.94). Folglich können die Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators nach

$$v_{H0} = \frac{1}{v'_{H0}}, \quad (4.97)$$

$$v_{Hi} = -\frac{v'_{Hi}}{\left(v'_{H0} + \sum_{j=i}^{-1} v'_{Hj}\right)\left(v'_{H0} + \sum_{j=i+1}^{-1} v'_{Hj}\right)} \quad ; \quad i = -l \dots -1 \quad (4.98)$$

sowie

$$v_{Hi} = -\frac{v'_{Hi}}{\left(v'_{H0} + \sum_{j=1}^i v'_{Hj}\right)\left(v'_{H0} + \sum_{j=1}^{i-1} v'_{Hj}\right)} \quad ; \quad i = 1 \dots l \quad (4.99)$$

berechnet werden und seine diskreten Schwellwerte ergeben sich aus

$$s_{Hi} = v'_{H0} s'_{Hi} + \sum_{j=i}^{-1} v'_{Hj} (s'_{Hi} - s'_{Hj}) \quad ; \quad i = -l \dots -1 \quad (4.100)$$

beziehungsweise

$$s_{Hi} = v'_{H0} s'_{Hi} + \sum_{j=1}^i v'_{Hj} (s'_{Hi} - s'_{Hj}) \quad ; \quad i = 1 \dots l. \quad (4.101)$$

Zum Zweck einer vereinfachten Darstellung des schwellwertdiskreten Superpositionsoperators und seiner Inversen soll nun der Übergang zu einer vektoriellen Schreibweise erfolgen. Die Gewichte des Vorwärtsmodells lassen sich durch den Gewichtevektor

$$\mathbf{v}_H^T = \left(v_{H-l} \quad \dots \quad v_{H-1} \quad v_{H0} \quad v_{H1} \quad \dots \quad v_{Hl} \right),$$

seine Schwellwerte durch den Schwellwertvektor

$$\mathbf{s}_H^T = \left(s_{H-l} \quad \dots \quad s_{H-1} \quad 0 \quad s_{H1} \quad \dots \quad s_{Hl} \right)$$

und die einseitigen Totzoneoperatoren durch den Vektor

$$\mathbf{S}_{s_H}^T[x](t) = \left(S_{s_{H-l}}[x](t) \quad \dots \quad S_{s_{H-1}}[x](t) \quad x(t) \quad S_{s_{H1}}[x](t) \quad \dots \quad S_{s_{Hl}}[x](t) \right)$$

ausdrücken. Damit ist es möglich, den schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator auch als das Skalarprodukt

$$S[x](t) = \mathbf{v}_H^T \cdot \mathbf{S}_{s_H}[x](t) \quad (4.102)$$

anzugeben. Die Nebenbedingungen (4.88) und (4.89) zur Sicherung seiner Invertierbarkeit entsprechen in vektorieller Form der linearen Ungleichung

$$\mathbf{U}_S \cdot \mathbf{v}_H - \mathbf{u}_S \geq \mathbf{o} \quad (4.103)$$

mit der Matrix \mathbf{U}_S und dem Vektor \mathbf{u}_S gemäß

$$\mathbf{U}_S = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Der Übergang zur Vektordarstellung des inversen schwellwertdiskreten Superpositionsoperators erfolgt in gleicher Weise. Daher werden auch seine Gewichte zu dem Gewichtevektor

$$\mathbf{v}_H^T = \left(v'_{H-l} \quad \cdots \quad v'_{H-1} \quad v'_{H0} \quad v'_{H1} \quad \cdots \quad v'_{Hl} \right),$$

seine Schwellwerte zu dem Schwellwertevektor

$$\mathbf{s}_H^T = \left(s'_{H-l} \quad \cdots \quad s'_{H-1} \quad 0 \quad s'_{H1} \quad \cdots \quad s'_{Hl} \right)$$

und die zugehörigen einseitigen Totzoneoperatoren zu dem Vektor

$$\mathbf{S}_{s'_H}^T[y](t) = \left(S_{s'_{H-l}}[y](t) \quad \cdots \quad S_{s'_{H-1}}[y](t) \quad y(t) \quad S_{s'_{H1}}[y](t) \quad \cdots \quad S_{s'_{Hl}}[y](t) \right)$$

zusammengefasst. Die Inverse des schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators in Vektorform ist somit durch die Skalarmultiplikation

$$S^{-1}[y](t) = \mathbf{v}_H^T \cdot \mathbf{S}_{s'_H}[y](t) \quad (4.104)$$

gegeben und die Nebenbedingungen (4.95) sowie (4.96) zur Sicherstellung der Existenz einer zu S^{-1} inversen Formulierung entsprechen der linearen Ungleichung

$$\mathbf{U}_S \cdot \mathbf{v}'_H - \mathbf{u}_S \geq \mathbf{o}. \quad (4.105)$$

Mit den Gewichtevektoren \mathbf{v}_H und \mathbf{v}'_H sowie den Schwellwertevektoren \mathbf{s}_H und \mathbf{s}'_H können nun die zugehörigen Hintransformationsgleichungen (4.90)-(4.94) in der verkürzten vektoriellen Notation

$$\mathbf{v}'_H = \mathbf{A}_S(\mathbf{v}_H), \quad (4.106)$$

$$\mathbf{s}'_H = \mathbf{E}_S(\mathbf{s}_H, \mathbf{v}_H) \quad (4.107)$$

und die entsprechenden Rücktransformationsgleichungen (4.97)-(4.101) anhand der kompakten Vektorschreibweise

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{A}_S(\mathbf{v}'_H), \quad (4.108)$$

$$\mathbf{s}_H = \mathbf{\Xi}_S(\mathbf{s}'_H, \mathbf{v}'_H) \quad (4.109)$$

angegeben werden. Das Bild 4.14 stellt die zwischen dem schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator und seiner Inversen bestehende Verbindung in zusammenfassender Weise dar. Dabei zeigt sich die Strukturinvarianz als eine zentrale Eigenschaft des Prandtl-Ishlinskii-Ansatzes sowohl bei den zueinander inversen Superpositionsmodellen als auch bei den zugehörigen Ungleichungsnebenbedingungen und Transformationsbeziehungen besonders deutlich.

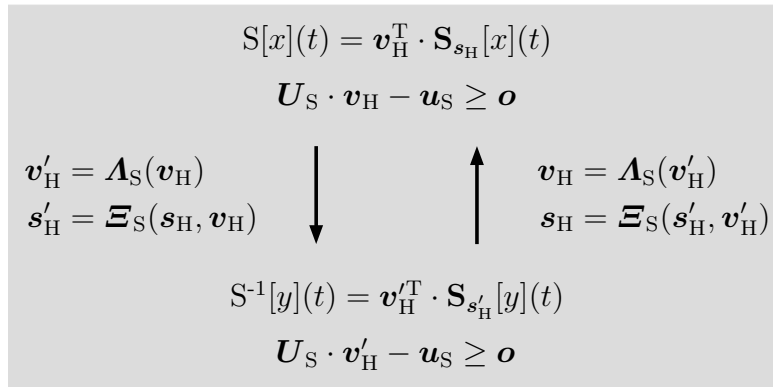


Bild 4.14: Zusammenhang zwischen einem invertierbaren, schwellwertdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator S und dem dazu inversen Modell S^{-1} in vektorieller Darstellung [Kuh01]

4.2.3 Verkettung der Prandtl-Ishlinskii-Hysterese- und Superpositionsmodelle zum Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell

Es soll nun die Frage beantwortet werden, wie sich die Nachteile, die das Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell gegenüber dem klassischen Preisach-Modell besitzt, ausgleichen lassen, ohne dass dadurch seine Vorteile verloren gehen. Der hier vorgestellte Ansatz basiert auf der Idee, das Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell mit dem Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell zu kombinieren. Die gedächtnislose Nichtlinearität S beziehungsweise S^{-1} ermöglicht so eine gezielte Verzerrung der Hysterese Kennlinie von H beziehungsweise H^{-1} , wodurch die Berücksichtigung von Sättigungseffekten und Asymmetrien im Übertragungsverhalten ferromagnetischer Materialien möglich wird. Dabei garantiert die Einhaltung von geeigneten Nebenbedingungen die Eigenschaft der analytischen Invertierbarkeit auch für das verkettete Gesamtmodell. Die Verkettung beider Teilmodelle soll in der Art erfolgen, dass der Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator S dem Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator H vorgeschaltet ist. Der daraus entstehende Hystereseoperator

$$\Gamma_{H_{SH}}[x](t) := H[S[x]](t) \quad (4.110)$$

wird als Generalisierter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator bezeichnet. Die zur Sicherung der Invertierbarkeit und der thermodynamischen Konsistenz von Γ_{HSH} einzuhaltenden Nebenbedingungen leiten sich folglich aus den Gleichungen (4.66) und (4.103) zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_S & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_H \\ \mathbf{w}_H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

ab. Darin beschreibt \mathbf{O} die Nullmatrix. Die Abbildung 4.15 demonstriert die Auswirkungen der Modellverkettung von S mit H anhand der Ausgangs-Eingangs-Charakteristiken der Teilmodelle sowie des Gesamtsystems.

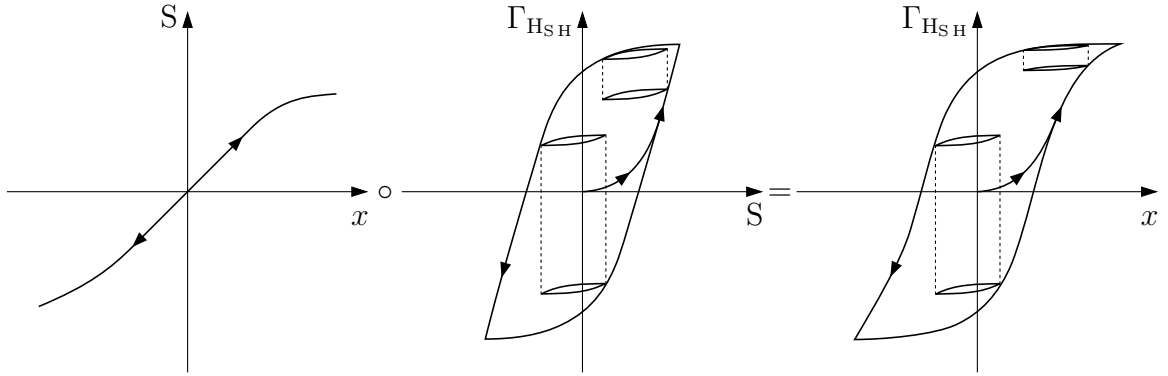


Bild 4.15: Generalisierter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator Γ_{HSH} als das Ergebnis der Verkettung eines Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators S mit einem Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator H

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Symmetrieverzerrung der Hysterese Kennlinie sich auch mittels einer Verkettung der Teilmodelle erreichen lässt, bei der die gedächtnislose Nichtlinearität dem Hystereseoperator nachgeschaltet ist. Es wird jedoch im weiteren Verlauf ersichtlich, warum diese Konstellation im Rahmen dieser Arbeit nicht zur Anwendung kommt.

Die Invertierung von Γ_{HSH} erfolgt wegen der Reihenschaltung der Teilmodelle unter Anwendung der Transformationsgleichungen (4.69)-(4.71) sowie (4.106)-(4.107) durch die Invertierung von H und S in Verbindung mit der Vertauschung der Verkettungsreihenfolge. Der Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator ist demgemäß durch

$$\Gamma_{\text{HSH}}^{-1}[y](t) := S^{-1}[H^{-1}[y]](t) \quad (4.112)$$

definiert und die zugehörigen Nebenbedingungen lauten

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_S & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}'_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_H \\ \mathbf{w}'_H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \quad (4.113)$$

Die Rücktransformation von Γ_{HSH}^{-1} zu Γ_{HSH} erfolgt äquivalent zur Hintransformation durch die Invertierung von H^{-1} und S^{-1} mithilfe der Transformationsbeziehungen (4.72)-(4.74) sowie (4.108)-(4.109) in Verbindung mit der Vertauschung der Verkettungsreihenfolge. Bild

4.16 stellt den zwischen Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} bestehenden Zusammenhang mit den zugehörigen Hin- und Rücktransformationsbeziehungen sowie den notwendigen Ungleichungsnebenbedingungen zusammenfassend dar.

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{\text{HSH}}[x](t) = \mathbf{w}_H^T \cdot \mathbf{H}_{r_H}[\mathbf{v}_H^T \cdot \mathbf{S}_{s_H}[x], z_{H0}](t) \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_S & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_H \\ \mathbf{w}_H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{w}'_H = \Lambda_H(\mathbf{w}_H) & \downarrow & \mathbf{w}_H = \Lambda_H(\mathbf{w}'_H) \\
 \mathbf{r}'_H = \Xi_H(\mathbf{r}_H, \mathbf{w}_H) & & \mathbf{r}_H = \Xi_H(\mathbf{r}'_H, \mathbf{w}'_H) \\
 \mathbf{z}'_{H0} = \Pi_H(\mathbf{w}_H, z_{H0}) & & \mathbf{z}_{H0} = \Pi_H(\mathbf{w}'_H, z'_{H0}) \\
 \\
 \mathbf{v}'_H = \Lambda_S(\mathbf{v}_H) & & \mathbf{v}_H = \Lambda_S(\mathbf{v}'_H) \\
 \mathbf{s}'_H = \Xi_S(\mathbf{s}_H, \mathbf{v}_H) & & \mathbf{s}_H = \Xi_S(\mathbf{s}'_H, \mathbf{v}'_H)
 \end{array} \\
 \\
 \Gamma_{\text{HSH}}^{-1}[y](t) = \mathbf{v}'_H^T \cdot \mathbf{S}'_{s'_H}[\mathbf{w}'_H^T \cdot \mathbf{H}_{r'_H}[y, z'_{H0}]](t) \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{U}_S & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}'_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_H \\ \mathbf{w}'_H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Bild 4.16: Zusammenhang zwischen einem invertierbaren, schwellwertdiskreten Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator Γ_{HSH} und dem dazu inversen Modell Γ_{HSH}^{-1} in vektorieller Darstellung

In der Abbildung 4.17 ist exemplarisch ein durch Γ_{HSH} approximiertes hysteresehaftetes Übertragungsverhalten und die zugehörige exakt inverse Übertragungscharakteristik von Γ_{HSH}^{-1} aufgezeigt.

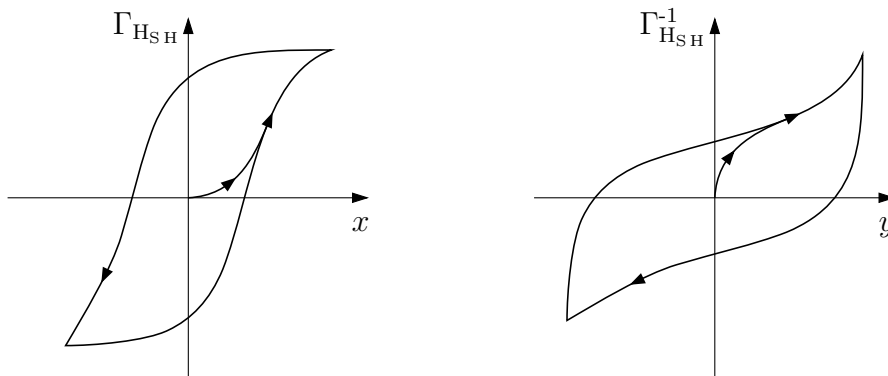


Bild 4.17: Approximation einer hysteresehafteten Nichtlinearität mit einem Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator $\Gamma_{\text{HSH}}[x]$ und die dazu inverse Übertragungscharakteristik $\Gamma_{\text{HSH}}^{-1}[y]$

Die Synthese des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells auf der Basis von Messdaten bezüglich des Ausgangs-Eingangs-Verhaltens eines realen sättigungs- und hysteresebehafteten Übertragungssystems kann anhand eines verallgemeinerten Fehlermodells nach Abbildung 4.18 erfolgen. Mit dem daraus resultierenden verallgemeinerten Fehler E_G lässt sich eine Gütefunktion V_G definieren, deren Minimierung bei geeigneten Nebenbedingungen die Bestimmung der optimalen Modellgewichte ermöglicht, sodass der durch den Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator beschreibbare Anteil des realen Übertragungsverhaltens $\Gamma_{H_{SH}}^*$ beziehungsweise seine Teilkomponenten S^* und H^* sowie die zugehörigen inversen Charakteristiken möglichst exakt approximiert werden. Die Komponente Δy in der Abbildung 4.18 repräsentiert diejenigen Anteile im gemessenen Übertragungsverhalten, die sich nicht durch den Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator abbilden lassen. Der gesamte Modellsyntheseprozess für $\Gamma_{H_{SH}}$ und $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ besteht im Wesentlichen aus drei Teilschritten.

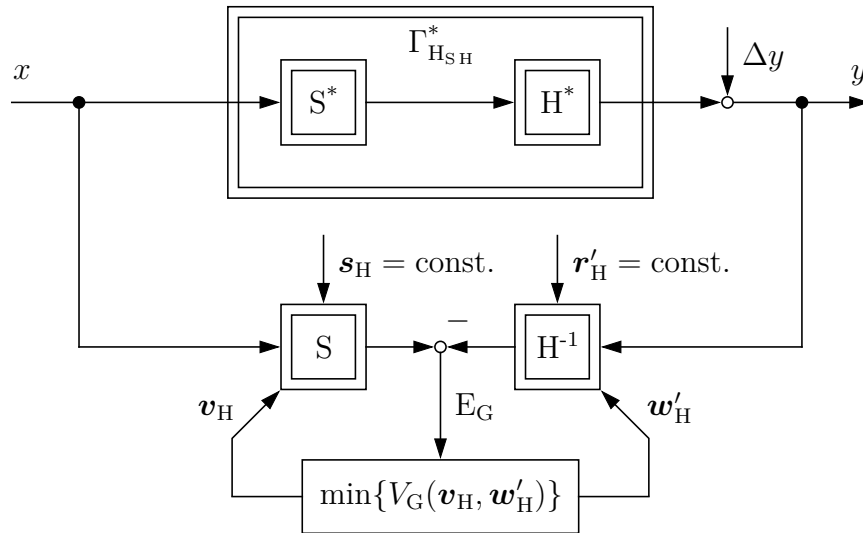


Bild 4.18: Verallgemeinertes Fehlermodell zur Identifikation der Gewichte des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells

Der erste Schritt umfasst die Festlegung geeigneter Modellordnungen l und m , die Definition der Schwellwerte s_H und r'_H sowie die Vorgabe des initialen Gedächtniszustandes z'_{H0} . Dazu wird das reale Übertragungssystem zunächst durch die Anregung mit einem Entmagnetisierungssignal in den ausgezeichneten Anfangszustand

$$z'_{H0}(r'_{Hi}) = 0 \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.114)$$

überführt und anschließend zwischen dem Anfangszeitpunkt t_0 und dem Endzeitpunkt t_E mit einem Identifikationssignal angesteuert, das anhand einer geeigneten Signalform den gesamten relevanten Amplitudenbereich überstreicht. Für den Zeitabschnitt $t_0 \leq t \leq t_E$ ist das Eingangssignal $x(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$ zu messen. Mit der Kenntnis des Minimums und des Maximums des Eingangssignals sowie des betragsmäßigen Maximums

des Ausgangssignals erfolgt dann die den auftretenden Signalamplituden angepasste, äquidistante Verteilung der Schwellwerte nach

$$s_{Hi} = \frac{-i}{l+1} \min_{t_0 \leq t \leq t_E} \{x(t)\} \quad ; \quad i = -l \dots -1, \quad (4.115)$$

$$s_{Hi} = \frac{i}{l+1} \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{x(t)\} \quad ; \quad i = 1 \dots l, \quad (4.116)$$

$$r'_{Hi} = \frac{i}{m+1} \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{|y(t)|\} \quad ; \quad i = 1 \dots m. \quad (4.117)$$

Die Bedingungen (4.52), (4.81) und (4.82) für die Reihenfolge der Schwellwerte sind damit automatisch erfüllt.

In einem zweiten Schritt werden die Gewichte \mathbf{v}_H und \mathbf{w}'_H bestimmt. Hierfür ist der verallgemeinerte Fehler

$$E_G[x, y](t, \mathbf{v}_H, \mathbf{w}'_H) = S[x](t) - H^{-1}[y](t) \quad (4.118)$$

heranzuziehen, der in vektorieller Schreibweise

$$E_G[x, y](t, \mathbf{v}_H, \mathbf{w}'_H) = \mathbf{v}_H^T \cdot \mathbf{S}_{s_H}[x](t) - \mathbf{w}'_H{}^T \cdot \mathbf{H}_{r'_H}[y, \mathbf{z}'_{H0}](t) \quad (4.119)$$

lautet und sich dann auch durch

$$E_G[x, y](t, \mathbf{v}_H, \mathbf{w}'_H) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_H^T & \mathbf{w}'_H{}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{s_H}[x](t) \\ -\mathbf{H}_{r'_H}[y, \mathbf{z}'_{H0}](t) \end{pmatrix} \quad (4.120)$$

ausdrücken lässt. Er stellt ein Maß für die Abweichung des modellierten Verhaltens vom tatsächlich gemessenen Verhalten dar, hängt linear von den Gewichten ab und nimmt im Idealfall der maximalen Übereinstimmung für jeden Zeitpunkt den Wert null an. Daher kann mit der Summe der Quadrate des verallgemeinerten Fehlers eine Gütefunktion

$$V_G(\mathbf{v}_H, \mathbf{w}'_H) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_E} E_G^2[x, y](t, \mathbf{v}_H, \mathbf{w}'_H) dt \quad (4.121)$$

definiert werden, deren Minimierung die optimalen Modellgewichte generiert. Die Lösung des Minimierungsproblems $\min\{V_G(\mathbf{v}_H, \mathbf{w}'_H)\}$ beinhaltet ein quadratisches Programm, das mit den Vektoren \mathbf{M}_G und \mathbf{w}_G gemäß

$$\mathbf{M}_G[x, y, \mathbf{z}'_{H0}](t) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{s_H}[x](t) \\ -\mathbf{H}_{r'_H}[y, \mathbf{z}'_{H0}](t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_H \\ \mathbf{w}'_H \end{pmatrix}$$

durch

$$\min\{V_G(\mathbf{w}_G)\} = \min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{w}_G^T \cdot \int_{t_0}^{t_E} \mathbf{M}_G[x, y, \mathbf{z}'_{H0}](t) \cdot \mathbf{M}_G^T[x, y, \mathbf{z}'_{H0}](t) dt \cdot \mathbf{w}_G \right\} \quad (4.122)$$

gegeben ist. Die dabei zu berücksichtigenden Ungleichungsnebenbedingungen nach (4.68) und (4.103) werden anhand der Matrix \mathbf{U}_G und des Vektors \mathbf{u}_G mit

$$\mathbf{U}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_S & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}'_H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \end{pmatrix}$$

durch

$$\mathbf{U}_G \cdot \mathbf{w}_G - \mathbf{u}_G \geq \mathbf{o} \quad (4.123)$$

vereint. Weil das Matrizenprodukt $\mathbf{M}_G \cdot \mathbf{M}_G^T$ in der Gleichung (4.122) stets positiv semidefinit ist und die Ungleichungsnebenbedingungen (4.123) linear sind, besitzt das Optimierungsproblem zur Bestimmung der Gewichte eine konvexe Natur. Somit führt die Minimierung von V_G unter der Berücksichtigung von (4.123) immer auf ein globales Minimum. Das Identifikationsproblem ist jedoch nicht eindeutig, denn diejenigen Übertragungsanteile des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators und des Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensators, die durch die Gewichtung der jeweiligen Eingangssignale mit v_{H0} beziehungsweise w'_{H0} entstehen, können sich wegen ihrer Gleichartigkeit in ihrem Einfluss kompensieren. Das führt dazu, dass es unendlich viele Kombinationen für die Werte von v_{H0} und w'_{H0} gibt, für die die Gütefunktion minimal wird und die alle dieselbe Gesamtübertragungscharakteristik zur Folge haben. Eine eindeutige Lösung lässt sich erst dann identifizieren, wenn mittels einer zusätzlichen Gleichungsnebenbedingung ein Lösungspunkt aus der konvexen Lösungsmenge herausgetrennt wird. Mit dem Einheitsvektor

$$\mathbf{e}^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

und dem Vektor

$$\mathbf{G}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$$

lässt sich eine mögliche Gleichungsnebenbedingung zu

$$\mathbf{G}_G^T \cdot \mathbf{w}_G - 1 = 0 \quad (4.124)$$

angeben. Sie legt $v_{H0} = 1$ fest und hat zur Folge, dass betragsmäßig kleine Eingangssignale durch das Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell unverändert übertragen werden. Die Anpassung des Eingangsamplitudenbereichs auf den Ausgangsamplitudenbereich des verketteten Gesamtmodells erfolgt dann durch das Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell.

Der dritte Schritt beinhaltet schließlich die Berechnung von S^{-1} und H aus den Modellen S und H^{-1} durch die Anwendung der Transformationsbeziehungen (4.106)-(4.107) sowie (4.72)-(4.74). Damit lässt sich sowohl der Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator $\Gamma_{H_{S_H}}$ als auch das zugehörige Kompensatormodell $\Gamma_{H_{S_H}}^{-1}$ bilden. Diesen abschließenden Schritt des Modellsyntheseprozesses bringen die Bilder 4.19a und 4.19b zum Ausdruck.

Das in der vorliegenden Arbeit angestrebte Zeitbereichsmodell auf der Basis des Verlustseparationsansatzes nach Gleichung (2.53) erfordert zur Berücksichtigung des ratenunabhängigen Hystereseanteils ein Modell für den inversen Zusammenhang $H(B)$. Daher ist hier das

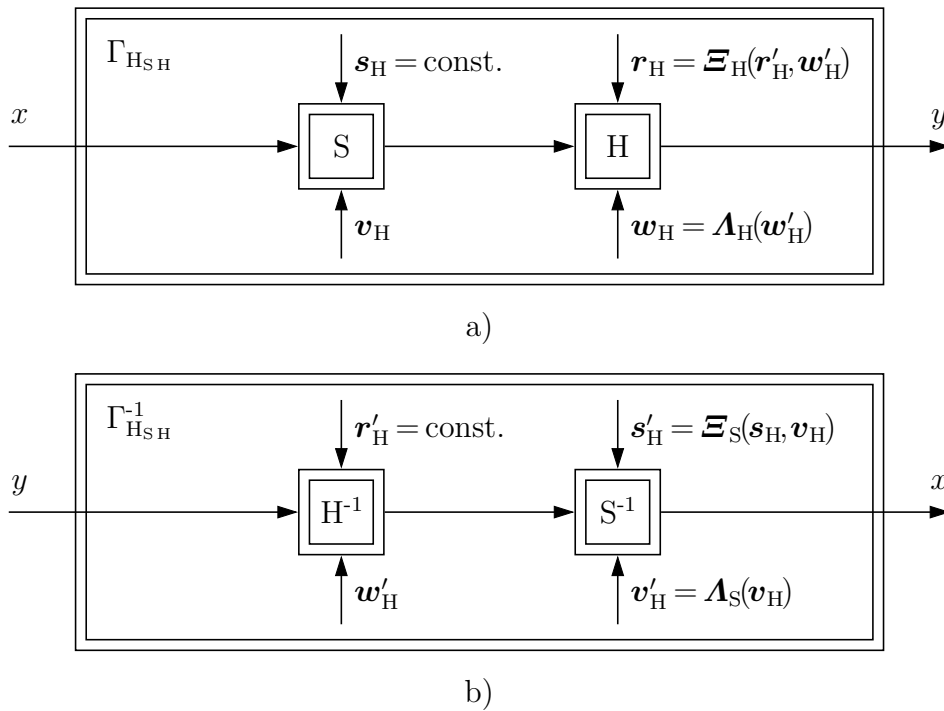


Bild 4.19: Synthese des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells
a) Generalisierter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
b) Generalisierter Prandtl-Ishlinskii-Hysterese kompensator

in der Abbildung 4.19b dargestellte Modell $\Gamma_{H_S H}^{-1}$ von übergeordnetem Interesse. Es zeigt sich, dass für die Schwellen des inversen Hystereseoperators H^{-1} die Bedingung $\mathbf{r}'_H = \text{const.}$ gilt, weil dieser mithilfe des verallgemeinerten Fehlermodells aus Abbildung 4.18 unmittelbar identifiziert wird. Eine gegenüber dem Modell $\Gamma_{H_S H}$ vertauschte Verkettungsreihenfolge der Operatoren S und H hätte zur Folge, dass mit dem zugehörigen verallgemeinerten Fehlermodell die Teilmodelle H und S^{-1} direkt identifiziert würden. Die Invertierung des Gesamtmodells erforderte in diesem Fall die Berechnung von H^{-1} mittels entsprechender Transformationsbeziehungen, wobei die Schwellwerte gemäß $\mathbf{r}'_H = \boldsymbol{\Xi}_H(\mathbf{r}_H, \mathbf{w}_H)$ von den Gewichten des Vorwärtsmodells H abhängen. Das wiederum würde zu konzeptionellen Problemen führen, wenn der Einfluss, den die Temperatur auf das betrachtete hysteresebehaftete Übertragungssystem hat, anhand von temperaturabhängigen Gewichten des Hysterese Modells Berücksichtigung findet. Denn der analytische Zusammenhang zwischen dem Hystereseoperator und seiner Inversen kann dann bei einer zeitlichen Veränderung der Temperatur verloren gehen, und zwar wenn dadurch eine Verletzung der Dilatationsbedingung

$$\frac{d}{dt}r'_{H_{i+1}}(t) - \frac{d}{dt}r'_{H_i}(t) \geq 0 \quad ; \quad i = 1 \dots m - 1 \quad (4.125)$$

eintritt [AK11]. Demnach dürfen sich die Distanzen zwischen den zeitabhängigen Schwellwerten niemals verringern. Das Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodell ist von dieser Problematik nicht betroffen. Aus diesen Gründen kommt die Konstellation, bei der der ge-

dächtislose Superpositionsoperator S dem Hystereseoperator H im verketteten Vorwärtsmodell nachgeschaltet ist, nicht zur Anwendung.

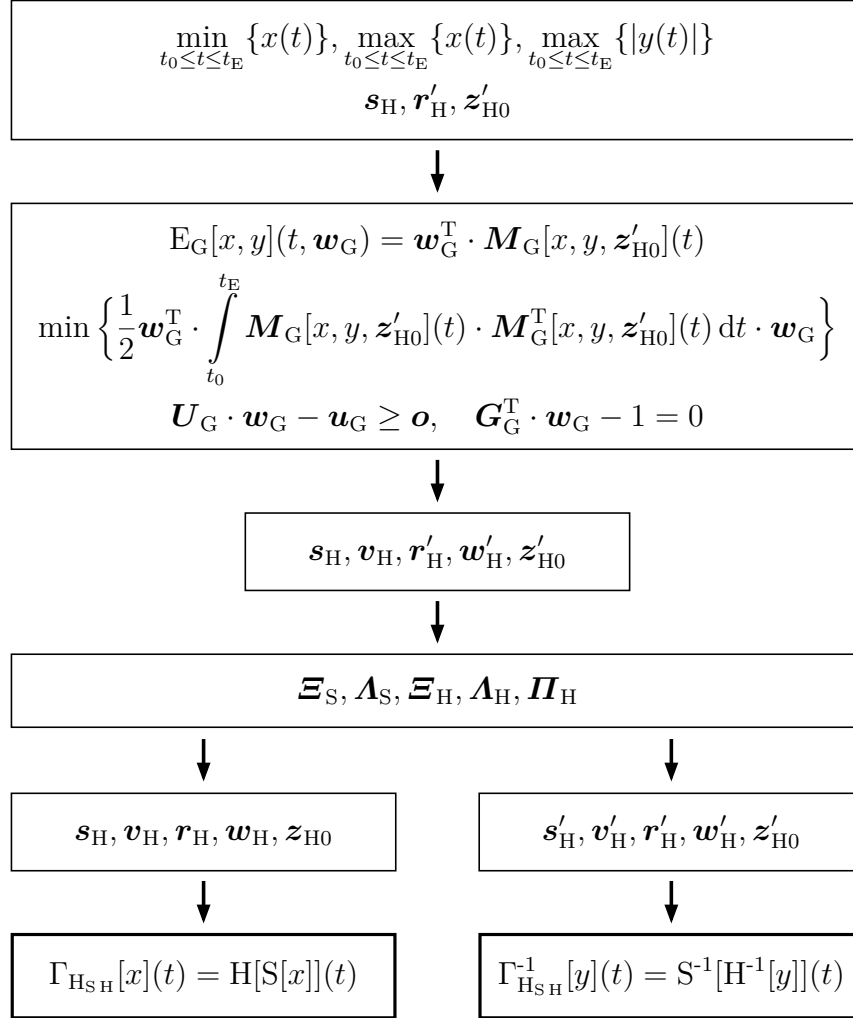


Bild 4.20: Ablaufschema zur Modellparameteridentifikation und Synthese des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensators sowie des zugehörigen Vorwärtsmodells

Die Tatsache, dass die im zweiten Schritt aus dem Identifikationsverfahren unmittelbar resultierenden Teilmodelle S und H^{-1} unter der Berücksichtigung der angegebenen Nebenbedingungen zum einen immer invertierbar sind und zum anderen grundsätzlich ein Optimum im Sinne einer minimierten Summe von Fehlerquadraten des verallgemeinerten Fehlers darstellen, macht die Modellsynthese robust gegenüber unbekanntem Fehlern in den Messdaten des realen Ausgangs-Eingangs-Übertragungsverhaltens sowie gegenüber Modellfehlern infolge nicht modellierter Effekte und unbekannter Modellordnungen. Die im dritten Schritt auszuführende Berechnung der zugehörigen Inversen S^{-1} und H zur Bildung der verketteten Gesamtmodelle Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} ist zudem mithilfe der entsprechenden analytischen Transformationsbeziehungen sehr effizient möglich. Das Syntheseverfahren

macht damit konsequent von den Vorteilen der Modelle des Prandtl-Ishlinskii-Typs Gebrauch und zeichnet sich durch eine hohe Praxistauglichkeit aus. Die Abbildung 4.20 fasst den vollständigen Modellsyntheseprozess in kompakter Darstellung zusammen.

4.2.4 Verkettung der Prandtl-Ishlinskii-Hysterese- und Superpositionsmodelle zum Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell

In diesem Unterkapitel wird ein weiteres Modell vorgestellt, das aus miteinander verketteten Teilmodellen des Prandtl-Ishlinskii-Typs besteht und in der Lage ist, ratenunabhängige Hysterese mit Sättigungseffekten und Asymmetrien abzubilden. Es unterscheidet sich vom Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell durch eine zusätzliche gedächtnislose Nichtlinearität zur Erhöhung der Modellgenauigkeit. Die Modellverkettung erfolgt in der Art, dass dem Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator H ein Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperator S_1 vorgeschaltet und ein weiterer mit der Bezeichnung S_2 nachgeschaltet ist. Der daraus resultierende Hystereseoperator

$$\Gamma_{H_S H_S}[x](t) := S_2[H[S_1[x]]](t) \quad (4.126)$$

wird Verallgemeinerter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator genannt und ist unter bestimmten Voraussetzungen ebenfalls analytisch invertierbar. Die dazu einzuhaltenden Ungleichungsnebenbedingungen, die zusätzlich die thermodynamische Konsistenz sicherstellen, lassen sich wieder aus den entsprechenden Ungleichungsnebenbedingungen für die Teilmodelle ableiten. Danach erhält man den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} U_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & U_S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{H1} \\ w_H \\ v_{H2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_S \\ u_H \\ u_S \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.127)$$

In der Abbildung 4.21 ist die Verkettung der Teilmodelle S_1 , H und S_2 zum Gesamtmodell $\Gamma_{H_S H_S}$ anhand der Einzelübertragungscharakteristiken veranschaulicht.

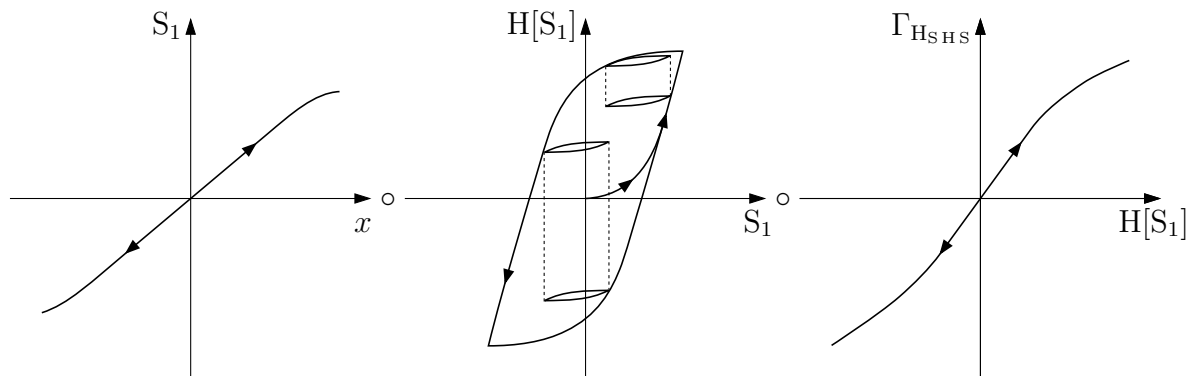


Bild 4.21: Verallgemeinerter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator $\Gamma_{H_S H_S}$ als das Ergebnis der Verkettung zweier Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperatoren S_1 und S_2 mit einem Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator H

Die Invertierung von $\Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}$ erfolgt durch die analytische Invertierung der Teilmodelle unter Anwendung der korrespondierenden Transformationsbeziehungen (4.69)-(4.71) und (4.106)-(4.107) sowie durch die zusätzliche Vertauschung ihrer Verkettungsreihenfolge. Dabei wird der im Vorwärtsmodell vorgeschaltete Superpositionsoperator S_1 im inversen Gesamtmodell zum nachgeschalteten Superpositionskompensator S_1^{-1} und der im Vorwärtsmodell nachgeschaltete Superpositionsoperator S_2 im inversen Gesamtmodell zum vorgeschalteten Superpositionskompensator S_2^{-1} . Der Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensator ist demnach durch den Zusammenhang

$$\Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}^{-1}[y](t) := S_1^{-1}[H^{-1}[S_2^{-1}[y]]](t) \quad (4.128)$$

definiert. Die zugehörigen Nebenbedingungen zur Sicherung seiner Invertierbarkeit und der thermodynamischen Konsistenz lauten

$$\begin{pmatrix} U_S & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & U'_H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & U_S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_{H1} \\ \mathbf{w}'_H \\ \mathbf{v}'_{H2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \\ \mathbf{u}_S \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}. \quad (4.129)$$

Die Rücktransformation von $\Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}^{-1}$ zu $\Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}$ erfordert in Analogie zur Hintransformation

$$\begin{array}{c} \Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}[x](t) = \mathbf{v}_{H2}^T \cdot \mathbf{S}_{s_{H2}}[\mathbf{w}_H^T \cdot \mathbf{H}_{r_H}[\mathbf{v}_{H1}^T \cdot \mathbf{S}_{s_{H1}}[x], \mathbf{z}_{H0}]](t) \\ \begin{pmatrix} U_S & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & U_H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & U_S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{H1} \\ \mathbf{w}_H \\ \mathbf{v}_{H2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \\ \mathbf{u}_S \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{w}'_H = \Lambda_H(\mathbf{w}_H) & \downarrow & \mathbf{w}_H = \Lambda_H(\mathbf{w}'_H) \\ \mathbf{r}'_H = \Xi_H(\mathbf{r}_H, \mathbf{w}_H) & & \mathbf{r}_H = \Xi_H(\mathbf{r}'_H, \mathbf{w}'_H) \\ \mathbf{z}'_{H0} = \Pi_H(\mathbf{w}_H, \mathbf{z}_{H0}) & & \mathbf{z}_{H0} = \Pi_H(\mathbf{w}'_H, \mathbf{z}'_{H0}) \\ \mathbf{v}'_{H1} = \Lambda_S(\mathbf{v}_{H1}) & & \mathbf{v}_{H1} = \Lambda_S(\mathbf{v}'_{H1}) \\ \mathbf{s}'_{H1} = \Xi_S(\mathbf{s}_{H1}, \mathbf{v}_{H1}) & & \mathbf{s}_{H1} = \Xi_S(\mathbf{s}'_{H1}, \mathbf{v}'_{H1}) \\ \mathbf{v}'_{H2} = \Lambda_S(\mathbf{v}_{H2}) & & \mathbf{v}_{H2} = \Lambda_S(\mathbf{v}'_{H2}) \\ \mathbf{s}'_{H2} = \Xi_S(\mathbf{s}_{H2}, \mathbf{v}_{H2}) & & \mathbf{s}_{H2} = \Xi_S(\mathbf{s}'_{H2}, \mathbf{v}'_{H2}) \end{array} \\ \Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}^{-1}[y](t) = \mathbf{v}'_{H1}^T \cdot \mathbf{S}_{s'_{H1}}[\mathbf{w}'_H^T \cdot \mathbf{H}_{r'_H}[\mathbf{v}'_{H2}^T \cdot \mathbf{S}_{s'_{H2}}[y], \mathbf{z}'_{H0}]](t) \\ \begin{pmatrix} U_S & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & U'_H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & U_S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_{H1} \\ \mathbf{w}'_H \\ \mathbf{v}'_{H2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \\ \mathbf{u}_S \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \end{array}$$

Bild 4.22: Zusammenhang zwischen einem invertierbaren, schwellwertdiskreten Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator $\Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}$ und dem dazu inversen Modell $\Gamma_{\text{H}_{\text{S}}\text{H}_{\text{S}}}^{-1}$ in vektorieller Darstellung

die Invertierung der Teilmodelle S_1^{-1} , H^{-1} und S_2^{-1} mithilfe der jeweiligen Transformationsbeziehungen nach (4.72)-(4.74) und (4.108)-(4.109) sowie die Vertauschung der Verkettungsreihenfolge. In der Abbildung 4.22 ist die zwischen den Modellen $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$ und $\Gamma_{H_S H_S}$ bestehende Verbindung unter Angabe der Transformationsbeziehungen sowie der erforderlichen Ungleichungsnebenbedingungen zusammenfassend dargestellt.

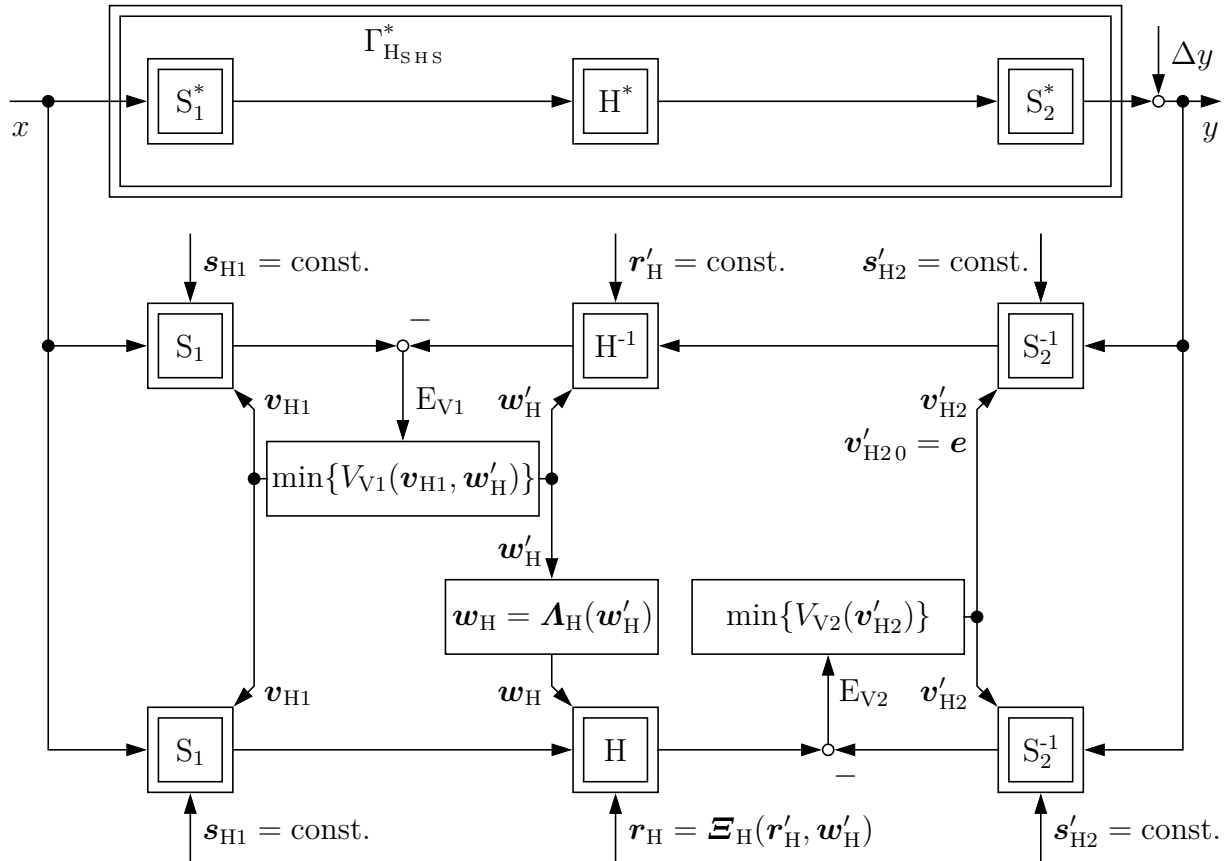


Bild 4.23: Fehlermodelle zur Identifikation der Gewichte des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells

Zur Synthese des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells auf der Grundlage von Messdaten für das Ausgangs-Eingangs-Verhalten eines realen sättigungs- und hysteresebehafteten Übertragungssystems lässt sich ein iteratives Modellparameteridentifikationsverfahren nutzen, bei dem abwechselnd ein verallgemeinertes Fehlermodell und ein Eingangsfehlermodell gemäß Abbildung 4.23 zur Anwendung kommt. Mit dem daraus resultierenden verallgemeinerten Fehler E_{V1} und dem Eingangsfehler E_{V2} können die Gütefunktionen V_{V1} und V_{V2} definiert werden. Deren wechselseitige Minimierung bei geeigneten Nebenbedingungen ermöglicht die Bestimmung der näherungsweise optimalen Modellgewichte, sodass sich der durch den Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator beschreibbare Anteil des realen Übertragungsverhaltens $\Gamma_{H_S H_S}^*$ beziehungsweise seine Teilkomponenten S_1^* , H^* und S_2^* sowie die dazu inversen Charakteristiken möglichst exakt approximieren lassen. Die Komponente Δy in der Abbildung 4.23 steht für die nicht

durch den Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator beschreibbaren Beiträge im gemessenen Übertragungsverhalten. Der gesamte Modellsyntheseprozess des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells setzt sich wie der des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells aus drei Teilschritten zusammen.

Im ersten Schritt sind die Modellordnungen l_1 , l_2 und m entsprechend den Anforderungen an die Genauigkeit und an die Rechenzeit auszuwählen, die Schwellwerte \mathbf{s}_{H1} , \mathbf{s}'_{H2} und \mathbf{r}'_H zu berechnen sowie der initiale Gedächtniszustand \mathbf{z}'_{H0} vorzugeben. Zu Beginn der ersten Iterationsschleife soll das Teilmodell S_2^{-1} die neutrale Übertragungscharakteristik einer Identität aufweisen, sodass außerdem sein initialer Gewichtvektor \mathbf{v}'_{H20} durch

$$\mathbf{v}'_{H20} = \mathbf{e} \quad (4.130)$$

festgelegt wird. Der ausgezeichnete Anfangszustand

$$z'_{H0}(r'_{Hi}) = 0 \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.131)$$

lässt sich durch die Aussteuerung des realen Systems mit einem Entmagnetisierungssignal erzielen. Im Anschluss daran erfolgt im zeitlichen Abschnitt $t_0 \leq t \leq t_E$ die Anregung mit einem geeigneten Identifikationssignal. Währenddessen ist das Eingangssignal $x(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$ zu messen. Eine den auftretenden Amplituden angepasste, äquidistante Verteilung der Schwellwerte folgt dann aus

$$s_{H1,i} = \frac{-i}{l_1 + 1} \min_{t_0 \leq t \leq t_E} \{x(t)\} \quad ; \quad i = -l_1 \dots -1, \quad (4.132)$$

$$s_{H1,i} = \frac{i}{l_1 + 1} \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{x(t)\} \quad ; \quad i = 1 \dots l_1, \quad (4.133)$$

$$s'_{H2,i} = \frac{-i}{l_2 + 1} \min_{t_0 \leq t \leq t_E} \{y(t)\} \quad ; \quad i = -l_2 \dots -1, \quad (4.134)$$

$$s'_{H2,i} = \frac{i}{l_2 + 1} \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{y(t)\} \quad ; \quad i = 1 \dots l_2, \quad (4.135)$$

$$r'_{Hi} = \frac{i}{m + 1} \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{|y(t)|\} \quad ; \quad i = 1 \dots m. \quad (4.136)$$

Im zweiten Schritt sind die Gewichte \mathbf{v}_{H1} , \mathbf{w}'_H und \mathbf{v}'_{H2} zu bestimmen. Der dazu dienende iterative Identifikationsprozess beginnt mit der Berechnung des verallgemeinerten Fehlers

$$E_{V1}[x, y](t, \mathbf{v}_{H1}, \mathbf{w}'_H) = S_1[x](t) - H^{-1}[S_2^{-1}[y]](t), \quad (4.137)$$

der in Vektorschreibweise

$$E_{V1}[x, y](t, \mathbf{v}_{H1}, \mathbf{w}'_H) = \mathbf{v}_{H1}^T \cdot \mathbf{S}_{s_{H1}}[x](t) - \mathbf{w}'_H{}^T \cdot \mathbf{H}_{r'_H}[S_2^{-1}[y], \mathbf{z}'_{H0}](t) \quad (4.138)$$

lautet und sich alternativ auch durch das Skalarprodukt

$$E_{V1}[x, y](t, \mathbf{v}_{H1}, \mathbf{w}'_H) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{H1}^T & \mathbf{w}'_H{}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{s_{H1}}[x](t) \\ -\mathbf{H}_{r'_H}[S_2^{-1}[y], \mathbf{z}'_{H0}](t) \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

angeben lässt. Damit kann die zu minimierende Gütefunktion

$$V_{V1}(\mathbf{v}_{H1}, \mathbf{w}'_H) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_E} E_{V1}^2[x, y](t, \mathbf{v}_{H1}, \mathbf{w}'_H) dt \quad (4.140)$$

definiert werden. Das Minimierungsproblem $\min\{V_{V1}(\mathbf{w}_{V1})\}$ führt mit den Vektoren \mathbf{M}_{V1} und \mathbf{w}_{V1} gemäß

$$\mathbf{M}_{V1}[x, y, \mathbf{z}'_{H0}](t) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{s_{H1}}[x](t) \\ -\mathbf{H}'_{r'_H}[S_2^{-1}[y], \mathbf{z}'_{H0}](t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{V1} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{H1} \\ \mathbf{w}'_H \end{pmatrix}$$

auf das quadratische Programm

$$\min\{V_{V1}(\mathbf{w}_{V1})\} = \min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{w}_{V1}^T \cdot \int_{t_0}^{t_E} \mathbf{M}_{V1}[x, y, \mathbf{z}'_{H0}](t) \cdot \mathbf{M}_{V1}^T[x, y, \mathbf{z}'_{H0}](t) dt \cdot \mathbf{w}_{V1} \right\}. \quad (4.141)$$

Die Ungleichungsnebenbedingungen, die die Invertierbarkeit von S_1 und H^{-1} sowie die thermodynamische Konsistenz von H^{-1} garantieren, finden mit der Matrix \mathbf{U}_{V1} und dem Vektor \mathbf{u}_{V1} gemäß

$$\mathbf{U}_{V1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_S & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{U}'_H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{V1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_H \end{pmatrix}$$

anhand der Ungleichung

$$\mathbf{U}_{V1} \cdot \mathbf{w}_{V1} - \mathbf{u}_{V1} \geq \mathbf{o} \quad (4.142)$$

Berücksichtigung. Damit das konvexe Optimierungsproblem eindeutig lösbar ist, wird mittels des Vektors

$$\mathbf{G}_{V1} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$$

die Gleichungsnebenbedingung

$$\mathbf{G}_{V1}^T \cdot \mathbf{w}_{V1} - 1 = 0 \quad (4.143)$$

zur Eliminierung des überzähligen Freiheitsgrades definiert. Man erhält zunächst diejenigen Gewichte \mathbf{v}_{H1} und \mathbf{w}'_H für die Teilmodelle S_1 und H^{-1} , die für die Verwendung des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells optimiert sind. Mit den Transformationsbeziehungen (4.72)-(4.74) ist dann das Modell H zu berechnen, sodass sich der Eingangsfehler

$$E_{V2}[x, y](t, \mathbf{v}'_{H2}) = H[S_1[x]](t) - S_2^{-1}[y](t) \quad (4.144)$$

beziehungsweise

$$E_{V2}[x, y](t, \mathbf{v}'_{H2}) = H[S_1[x]](t) - \mathbf{v}'_{H2}{}^T \cdot \mathbf{S}'_{s'_{H2}}[y](t) \quad (4.145)$$

ermitteln lässt. Die Minimierung der zugehörigen Gütefunktion

$$V_{V2}(\mathbf{v}'_{H2}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_E} E_{V2}^2[x, y](t, \mathbf{v}'_{H2}) dt \quad (4.146)$$

zur Bestimmung des Gewichtvektors \mathbf{v}'_{H2} ist mit der Lösung des quadratischen Optimierungsproblems

$$\min\{V_{V2}(\mathbf{v}'_{H2})\} = \min\left\{\int_{t_0}^{t_E} \frac{1}{2} \mathbf{v}'_{H2}{}^T \cdot \mathbf{S}_{s'_{H2}}[y](t) \cdot \mathbf{S}_{s'_{H2}}^T[y](t) \cdot \mathbf{v}'_{H2} - H[S_1[x]](t) \mathbf{v}'_{H2}{}^T \cdot \mathbf{S}_{s'_{H2}}[y](t) dt\right\} \quad (4.147)$$

verbunden. Dabei wird die Invertierbarkeit von S_2^{-1} durch die Einhaltung der Ungleichungsnebenbedingungen

$$\mathbf{U}_S \cdot \mathbf{v}'_{H2} - \mathbf{u}_S \geq \mathbf{o} \quad (4.148)$$

sichergestellt. Die Schwellwerte \mathbf{r}'_H für das Teilmodell H^{-1} sind nach Gleichung (4.136) an den Amplitudenbereich von $y(t)$ angepasst. Daher ist es zweckmäßig, wenn das Ausgangssignal von S_2^{-1} , das das Eingangssignal von H^{-1} darstellt, auch dann noch denselben Amplitudenbereich wie $y(t)$ abdeckt, wenn S_2^{-1} nicht mehr der Identität entspricht. Das ist dann gegeben, wenn die Amplituden am Ein- und Ausgang des Teilmodells S_2^{-1} trotz seiner nichtlinearen Übertragungscharakteristik für die Minimalamplitude

$$y_{\min} = \min_{t_0 \leq t \leq t_E} \{y(t)\} \quad (4.149)$$

und für die Maximalamplitude

$$y_{\max} = \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{y(t)\} \quad (4.150)$$

identisch sind, sodass $S_2^{-1}[y_{\min}] = y_{\min}$ und $S_2^{-1}[y_{\max}] = y_{\max}$ gilt. Diese Eigenschaft lässt sich mit der Matrix

$$\mathbf{G}_{V2} = \begin{pmatrix} y_{\min} - s'_{H2,-l_2} & \cdots & y_{\min} - s'_{H2,-1} & y_{\min} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & y_{\max} & y_{\max} - s'_{H2,1} & \cdots & y_{\max} - s'_{H2,l_2} \end{pmatrix}$$

und mit dem Vektor

$$\mathbf{g}_{V2} = \begin{pmatrix} y_{\min} \\ y_{\max} \end{pmatrix}$$

durch die Gleichungsnebenbedingung

$$\mathbf{G}_{V2} \cdot \mathbf{v}'_{H2} - \mathbf{g}_{V2} = \mathbf{o} \quad (4.151)$$

garantieren. Damit ist die eineindeutige nichtlineare Funktion, die das Übertragungsverhalten von S_2^{-1} in der zugehörigen Ausgangs-Eingangs-Darstellung beschreibt, an den Punkten (y_{\min}, y_{\min}) und (y_{\max}, y_{\max}) fixiert.

Die in diesem Teilschritt identifizierten Modellgewichte \mathbf{v}'_{H2} von S_2^{-1} minimieren die Gütefunktion $V_{V2}(\mathbf{v}'_{H2})$, indem sie Anteile des gemessenen Übertragungsverhaltens modellieren, welche nicht durch S_1 und H abgebildet sind. Mit dem neuen Teilmodell S_2^{-1} kann nun eine wiederholte Modellanpassung von S_1 und H^{-1} mittels des verallgemeinerten Fehlermodells

$E_{V_1}[x, y](t, \mathbf{v}'_{H_1}, \mathbf{w}'_H)$ vorgenommen werden. Das Eingangssignal von H^{-1} ist dann gegenüber $y(t)$ um einen nichtlinearen Anteil reduziert, der in der vorangegangenen Optimierung der Teilmodelle S_1 und H^{-1} ohnehin nicht durch diese berücksichtigt werden konnte. Somit hat er bei einer erneuten Optimierungsrechnung keinen störenden Einfluss mehr.

Durch die wiederholte Ausführung dieser wechselseitigen Optimierung lässt sich die Modellgenauigkeit iterativ steigern. Anders als bei der Identifikation der Teilmodelle führt dieses Vorgehen aber nicht automatisch auf ein Gesamtmodell, das ein globales Optimum darstellt. Zudem kann es in Abhängigkeit des zu modellierenden Materialverhaltens auch vorkommen, dass die Verwendung von zwei Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodellen keinen nennenswerten Vorteil bringt. Als Bewertungs- und Abbruchkriterium für die iterative Optimierung ist deshalb ein geeignetes Gütemaß zu definieren. Da im Rahmen dieser Arbeit ein Modell für den inversen Zusammenhang $H(B)$ benötigt wird, ist es von Vorteil, den Eingangsfehler $E_{V\Gamma^{-1}}$ des Kompensatormodells $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$ heranzuziehen. Das erfordert zunächst die Bestimmung von S_1^{-1} aus S_1 mithilfe der Transformationsgleichungen (4.106)-(4.107). Der Eingangsfehler ergibt sich damit aus

$$E_{V\Gamma^{-1}}[x, y](t, \mathbf{v}'_{H_1}, \mathbf{v}'_{H_2}, \mathbf{w}'_H) = S_1^{-1}[H^{-1}[S_2^{-1}[y]]](t) - x(t) \quad (4.152)$$

und in vektorieller Schreibweise aus

$$E_{V\Gamma^{-1}}[x, y](t, \mathbf{v}'_{H_1}, \mathbf{v}'_{H_2}, \mathbf{w}'_H) = \mathbf{v}'_{H_1}{}^T \cdot \mathbf{S}_{s'_{H_1}} [\mathbf{w}'_H{}^T \cdot \mathbf{H}_{r'_H} [\mathbf{v}'_{H_2}{}^T \cdot \mathbf{S}_{s'_{H_2}} [y], \mathbf{z}'_{H_0}]](t) - x(t). \quad (4.153)$$

Mit ihm kann die Funktion

$$V_{V\Gamma^{-1}}(\mathbf{v}'_{H_1}, \mathbf{v}'_{H_2}, \mathbf{w}'_H) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_E} E_{V\Gamma^{-1}}^2[x, y](t, \mathbf{v}'_{H_1}, \mathbf{v}'_{H_2}, \mathbf{w}'_H) dt \quad (4.154)$$

als ein übergeordnetes Gütemaß für die Identifikation des Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensators bestimmt werden. Ein optimal angepasstes Modell minimiert diese Gütefunktion. Da sich das Problem $\min\{V_{V\Gamma^{-1}}(\mathbf{v}'_{H_1}, \mathbf{v}'_{H_2}, \mathbf{w}'_H)\}$ aber im Allgemeinen nur näherungsweise lösen lässt und die Anzahl der dafür benötigten Iterationsdurchläufe zudem vorab unbekannt ist, empfiehlt es sich, einen Kompromiss zwischen der aufzuwendenden Rechenzeit und der geforderten Modellgenauigkeit zu wählen. Zu diesem Zweck kann ein adaptives Abbruchkriterium herangezogen werden, das die Zahl der Iterationsdurchläufe in Abhängigkeit des Minimierungsfortschritts der Gütefunktion begrenzt. Dabei ist zu beachten, dass ein lokales Minimum nicht frühzeitig zu einem Iterationsabbruch führt.

Im dritten Schritt ist zur Bildung der Gesamtmodelle nur noch S_2 aus S_2^{-1} unter Anwendung der Transformationsgleichungen (4.108)-(4.109) zu bestimmen. Die Synthese des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators $\Gamma_{H_S H_S}$ und des zugehörigen Kompensatormodells $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$ ist in den Abbildungen 4.24a und 4.24b dargestellt.

Während die Einhaltung der Dilatationsbedingung (4.125) für die Schwellen von H^{-1} im Fall des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells durch die Verkettungsreihenfolge der Teilmodelle sichergestellt ist, wird dies bei dem Verallgemeinerten Prandtl-

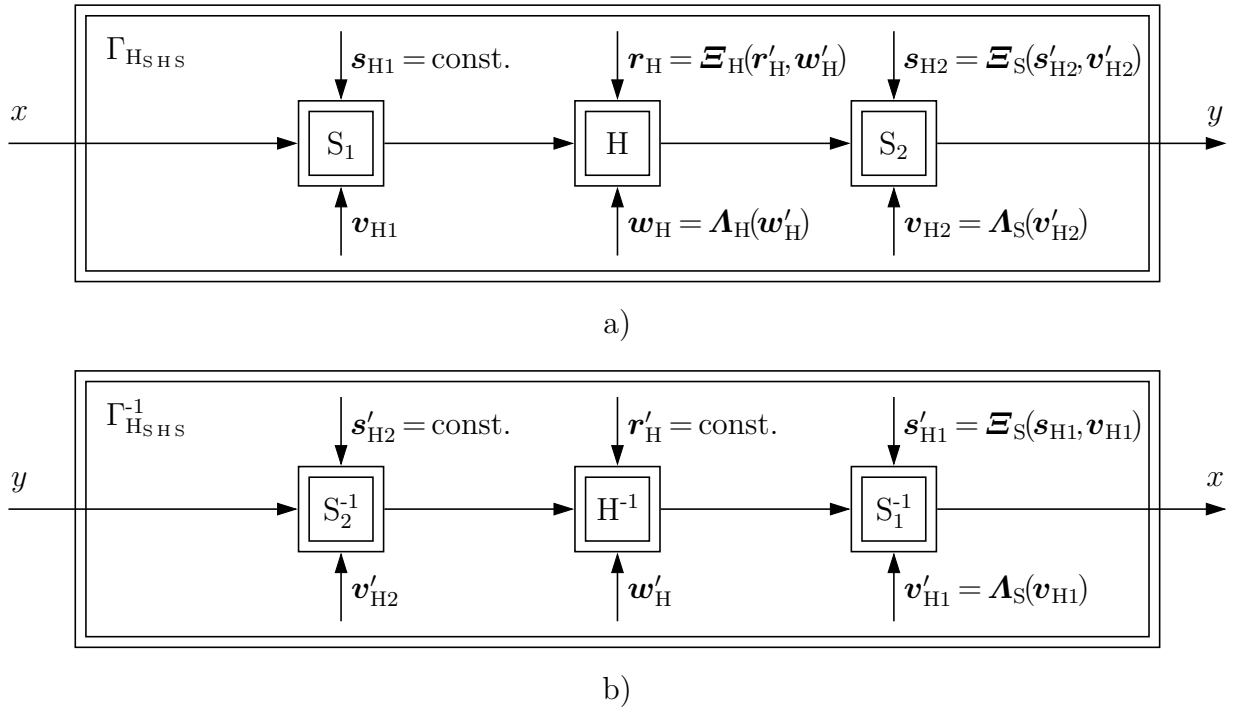
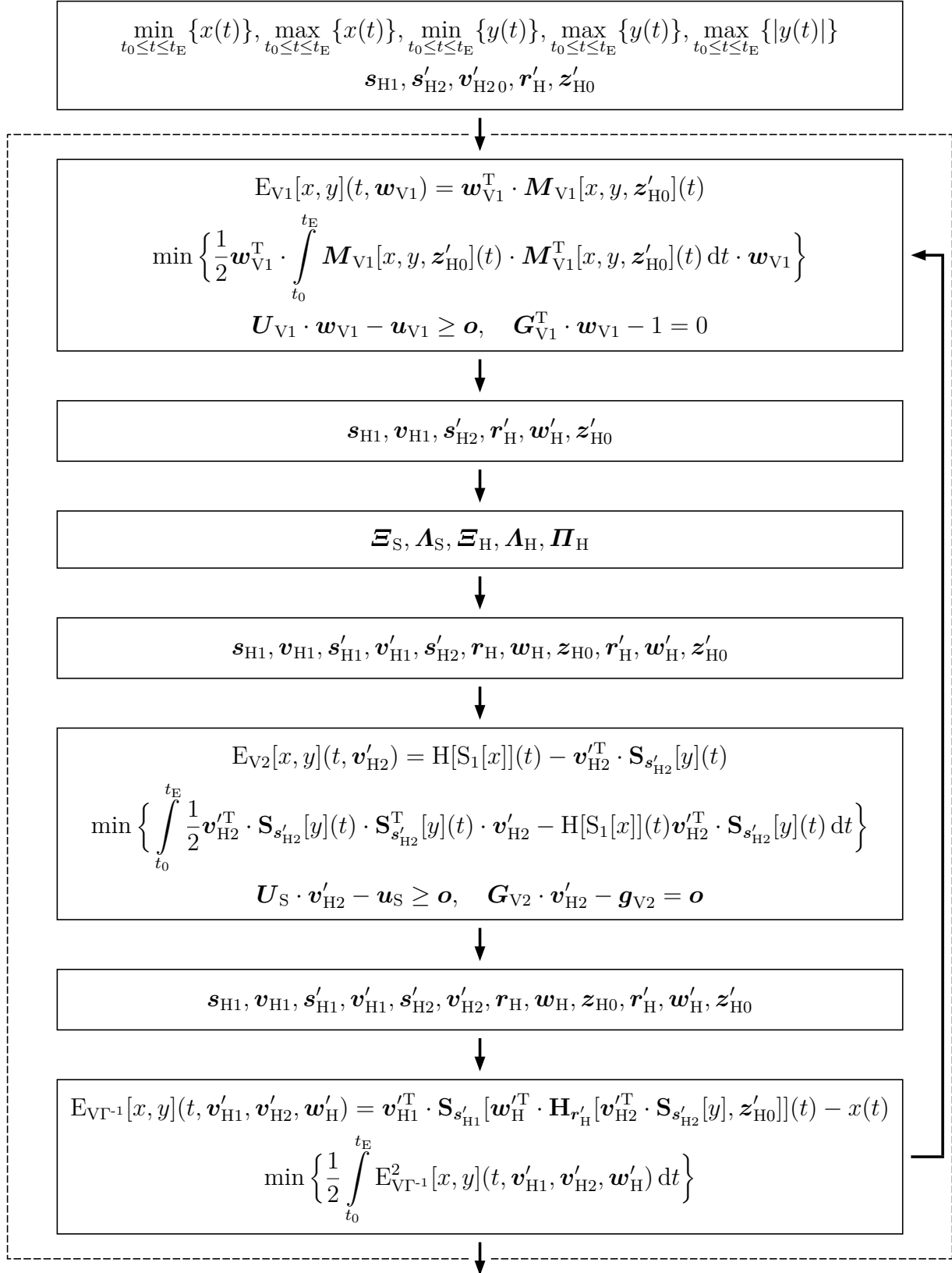


Bild 4.24: Synthese des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperators
a) Verallgemeinerter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator
b) Verallgemeinerter Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator

Ishlinskii-Hysteresemodell durch den Ablauf des Identifikationsprozesses bestimmt. Soll eine zeitlich veränderliche Temperaturabhängigkeit mit den Gewichten des Hystereseomodells berücksichtigt werden, so dient das Identifikationsverfahren nach Abbildung 4.23 wegen der direkten Identifikation von H^{-1} nur zur Synthese von $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$. Wird hingegen das Vorwärtsmodell $\Gamma_{H_{SHS}}$ benötigt, müssen mittels eines verallgemeinerten Fehlermodells stattdessen zunächst H sowie S_2^{-1} und im Anschluss anhand eines Ausgangsfeldermodells S_1 direkt identifiziert werden. Die mit jeweils unterschiedlichen Identifikationsverfahren synthetisierten Modelle $\Gamma_{H_{SHS}}$ und $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$ sind dann nicht mehr exakt, sondern nur noch näherungsweise invers zueinander.

Im Vergleich zum Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell kann das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell eine verbesserte Genauigkeit erzielen. Die Modellsynthese ist aufgrund des iterativen Vorgehens und der höheren Modellkomplexität jedoch wesentlich aufwendiger. Die zuletzt genannte Eigenschaft führt folglich auch bei der Anwendung des Hystereseomodells zu einer vergleichsweise höheren Rechenzeit. Bezüglich der Robustheit unterscheiden sich die Modelle nicht. In der Abbildung 4.25 ist der vollständige Ablauf zur Synthese von $\Gamma_{H_{SHS}}$ und $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$ auf der Basis des in Bild 4.23 aufgezeigten Identifikationsverfahrens zusammengefasst.



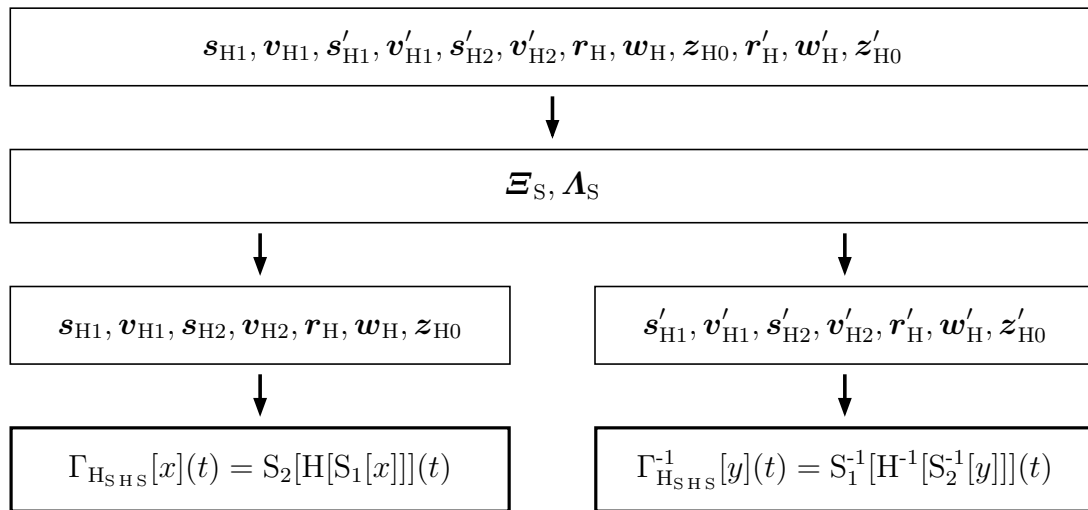


Bild 4.25: Ablaufschema zur Modellparameteridentifikation und Synthese des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese kompensators sowie des zugehörigen Vorwärtsmodells

4.3 Kernmodellerweiterungen auf der Basis des Prandtl-Ishlinskii-Ansatzes

Die Generalisierten und Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modelle sind für die Nachbildung des ratenunabhängigen hysteresebehafteten Übertragungsverhaltens von Ferromagnetika prädestiniert. Dennoch kann die Güte der Modellanpassung in Abhängigkeit des Materials variieren. Für die Anwendung in der Praxis ist eine gleichmäßig hohe Modellqualität für ein breites Spektrum von ferromagnetischen Stoffen aber besonders nützlich. Darüber hinaus ist häufig auch die Modellierung ratenabhängiger Effekte inklusive der Flussverdrängung infolge von Wirbelströmen sowie die Berücksichtigung des Temperatureinflusses auf das Magnetisierungsverhalten eines Materials erforderlich. Im Folgenden werden Modellansätze aufgezeigt, mit denen sich die Gültigkeits- und Anwendungsbereiche der Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modelle entsprechend erweitern lassen.

4.3.1 Moving-Term als zusätzlicher Freiheitsgrad

Die Hysterese Kennlinien für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten verschiedener ferromagnetischer Stoffe können sich in vielen Aspekten unterscheiden. Damit geht im Allgemeinen eine variierende maximal erzielbare Modellgenauigkeit einher, wobei das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modell naturgemäß anpassungsfähiger als das Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modell ist. Ein Ansatz, um beide Modelle im Hinblick auf verschiedenartige ferromagnetische Hysteresecharakteristika robuster zu machen, basiert auf dem sogenannten Moving-Modell, dessen Ursprung auf [Del66] zurückgeht. Bei diesem Ansatz entspricht das Eingangssignal des ratenunabhängigen Hystereseoperators,

von nun an verallgemeinernd als Γ_H bezeichnet, einer additiven Überlagerung des Eingangssignals x des realen Systems mit einem von dessen zugehörigen Ausgangssignal y abhängigen Term $k \cdot y$ gemäß

$$y(t) = \Gamma_H[x + k \cdot y](t). \quad (4.155)$$

Dabei stellt k einen konstanten Faktor dar. Demzufolge weist das Vorwärtsmodell mit Moving-Erweiterung, das im weiteren Verlauf durch Γ_{HM} bezeichnet wird, eine rückgekoppelte Struktur nach Abbildung 4.26 auf.

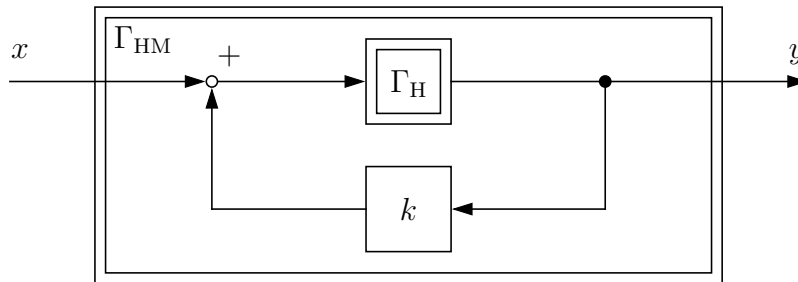


Bild 4.26: Blockdiagramm eines Hystereseeoperators Γ_H mit Moving-Erweiterung

Die zugehörige physikalische Interpretation basiert auf der Idee, dass das effektiv wirkende Magnetfeld im Material aus der Superposition des äußeren Magnetfeldes und eines dadurch hervorgerufenen, unterstützenden Molekularfeldes hervorgeht. Aus diesem Grund gilt im Allgemeinen $k > 0$. Die Abbildung 4.27 verdeutlicht, welchen Einfluss der Moving-Term $k \cdot y$ auf das durch Γ_H wiederzugebende Übertragungsverhalten hat. Darin zeigt sich, dass die zu Γ_H gehörende Hysteresekennlinie gegenüber dem originalen, durch Γ_{HM} anzunähernden Zusammenhang in Abhängigkeit des Parameters k gesichert wird. Somit bildet dieser Parameter einen zusätzlichen Modellfreiheitsgrad, mit dem sich die Anpassung der Modelle Γ_H beziehungsweise Γ_H^{-1} an das experimentell beobachtbare Materialverhalten beeinflussen lässt.

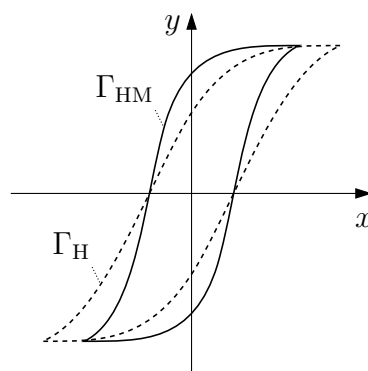


Bild 4.27: Scherung der durch Γ_H zu modellierenden Hysteresekurve infolge des Moving-Terms mit $k > 0$

Die Invertierung des Modells ergibt den Zusammenhang

$$x(t) = \Gamma_H^{-1}[y](t) - k \cdot y(t), \quad (4.156)$$

bei dem der Moving-Anteil durch eine einfache, mit k gewichtete Superposition Berücksichtigung findet. Für $k > 0$ wirkt dieser aufgrund der linearen Abhängigkeit von y in Analogie zum magnetischen System wie ein imaginärer negativer Luftspalt.

Während die Moving-Erweiterung im Vorwärtsmodell wegen der Rückkopplung des Ausgangssignals auf den Eingang des Hystereseoperators den Einsatz von Iterationsschleifen erfordert und somit zu einer signifikanten Steigerung der Rechenzeit führt, hat sie diesbezüglich im inversen Zusammenhang nahezu keinen schädlichen Einfluss, weil die Modellstruktur hier einer einfachen Parallelschaltung gemäß Abbildung 4.28 entspricht. Daher ist das Moving-Modell vor allem bei der Verwendung der zugehörigen Hysterese kompensatoren attraktiv.

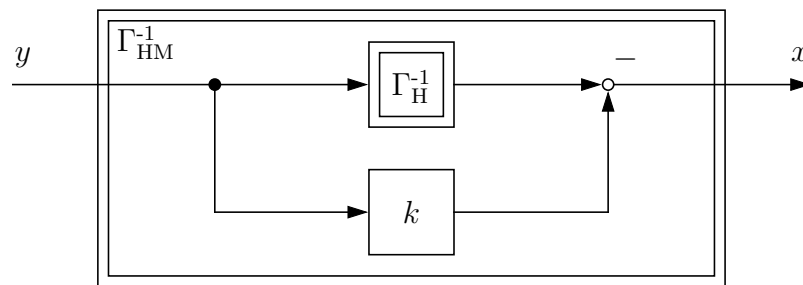


Bild 4.28: Blockdiagramm zur Moving-Term-Kompensation bei der Verwendung der Inversen Γ_H^{-1} eines Hystereseoperators mit Moving-Erweiterung gemäß $\Gamma_H[x+k \cdot y]$

Das Identifikationsverfahren zur Bestimmung des Moving-Parameters k entspricht einem iterativen Prozess. Der Vorgang beginnt mit der Wahl eines geeigneten Startwertes. Auf der Grundlage experimenteller Erfahrung lässt sich der Suchbereich für gewöhnlich gemäß $0 \leq k \leq x_{\max}/y_{\max}$ einschränken. Darin stellen x_{\max} und y_{\max} die auftretenden Maximalamplituden der gemessenen Hysteresecharakteristik des realen Systems dar. Unter Verwendung des gewählten Moving-Parameters ist anschließend ein modifiziertes Eingangssignal $x_{\text{mod}}(t)$ in der Art zu berechnen, dass nach

$$x_{\text{mod}}(t) = x(t) + k \cdot y(t) \quad (4.157)$$

zu jedem auftretenden Wert des Eingangssignals x der mit k multiplizierte zugehörige Ausgangssignalwert y addiert wird. Der $y(x_{\text{mod}})$ -Zusammenhang ist folglich gegenüber dem $y(x)$ -Zusammenhang gesichert. Auf die so modifizierten Messdaten werden dann die Modelle Γ_H beziehungsweise Γ_H^{-1} angepasst. Das Gütemaß für das jeweilige Gesamtmodell, das für Γ_{HM} durch

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_E} E_{\Gamma_{\text{HM}}}^2[x, y](t, k) dt \quad (4.158)$$

mit dem Ausgangsfehler

$$E_{\Gamma_{\text{HM}}}[x, y](t, k) = \Gamma_H[x + k \cdot y](t) - y(t) \quad (4.159)$$

beziehungsweise für Γ_{HM}^{-1} durch

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_E} E_{\Gamma_{\text{HM}}^{-1}}^2[x, y](t, k) dt \quad (4.160)$$

mit dem Eingangsfehler

$$E_{\Gamma_{\text{HM}}^{-1}}[x, y](t, k) = \Gamma_{\text{H}}^{-1}[y](t) - k \cdot y(t) - x(t) \quad (4.161)$$

bestimmt werden kann, gibt Aufschluss über die erzielte Modellqualität. Im besten Fall lässt sich diese maximieren, wenn durch die Wiederholung des Prozesses mit systematisch variierten Moving-Parametern ein optimaler Wert von k gefunden ist. In der Realität

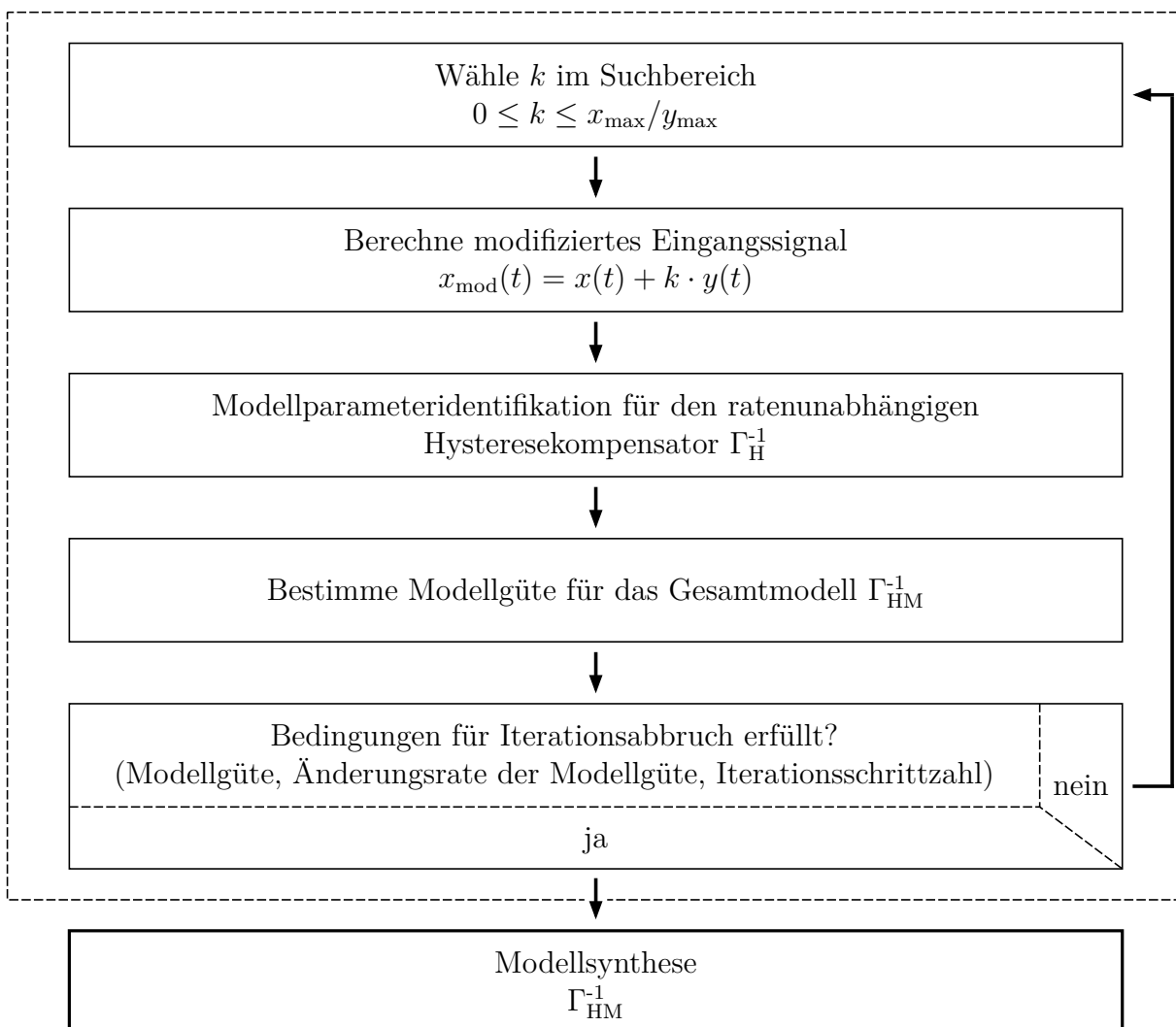


Bild 4.29: Iteratives Identifikationsverfahren zur Bestimmung des Kompensatormodells mit Moving-Erweiterung Γ_{HM}^{-1}

jedoch wird man dieses Optimum zugunsten der Rechenzeit zumeist nur näherungsweise identifizieren wollen. Geeignete Bewertungs- und Abbruchkriterien zur Kontrolle des Iterationsvorganges basieren auf dem Gütemaß des jeweiligen Gesamtmodells, der iterations-schrittabhängigen Änderungsrate dieses Gütemaßes und der Vorgabe einer maximalen Iterationszahl. Da das Hysteresemodell mit Moving-Erweiterung an seinem Äquivalent ohne Moving-Erweiterung zu messen ist, wählt man idealerweise im ersten Iterationsschritt $k = 0$. So erzeugt man eine Referenz, mit der sich beurteilen lässt, welches Potential die Moving-Erweiterung im konkreten Fall besitzt und, darauf aufbauend, ob deren Verwendung überhaupt lohnenswert ist. Die Abbildung 4.29 stellt den gesamten Identifikationsprozess für das hier benötigte Kompensatormodell Γ_{HM}^{-1} zusammenfassend dar. Der Ablauf für das Vorwärtsmodell Γ_{HM} lässt sich daraus unmittelbar ableiten.

4.3.2 Dynamisches Kernmodell auf Basis des Verlustseparationsprinzips

Eine allgemeingültigere Beschreibung des Magnetisierungsverhaltens ferromagnetischer Stoffe innerhalb eines für leistungselektronische Anwendungen benötigten Gültigkeitsbereiches erfordert die zusätzliche Berücksichtigung ratenabhängiger Effekte. Die Grundlage dafür stellt das in Kapitel 2.2 erläuterte Verlustseparationsprinzip dar. Es gilt zunächst die Annahme, dass die Flussverdrängung infolge von Wirbelströmen vernachlässigbar ist, sodass weiterhin eine über den Materialquerschnitt homogene Flussverteilung zugrunde gelegt werden kann. Während sich die Modelle für das ratenunabhängige Hystereseverhalten vorteilhaft mittels einer rein mathematischen Beschreibungsform untersuchen lassen, ist es hilfreich, deren Integration in den Verlustseparationsansatz nun mit Bezug zu physikalischen Größen vorzunehmen. Im Hinblick auf die Anwendung in der Praxis, wo wegen der besseren Handhabung vornehmlich mit integralen Feldgrößen gearbeitet wird, erfolgt die Beschreibung der Modellsynthese auf der Systemebene. Dabei sind die Zusammenhänge zwischen der magnetischen Flussdichte B und dem magnetischen Fluss Φ sowie zwischen der magnetischen Feldstärke H und der magnetischen Durchflutung Θ durch die Beziehungen (2.72) und (2.74) gegeben.

Der Ausgangspunkt für die Herleitung des dynamischen Kernmodells ist das Aufstellen einer allgemeingültigen Momentanleistungsbilanz für ein magnetisches System, in dem sich infolge einer magnetischen Durchflutung $\Theta(t)$ ein magnetischer Fluss $\Phi(t)$ entlang eines geschlossenen Pfades ausbildet. Die magnetische Momentangesamtleistung für diesen magnetischen Kreis resultiert dann aus dem Produkt $\Theta(t)\dot{\Phi}(t)$. Die das Verlustseparationsprinzip repräsentierende Gleichung (2.25) beschreibt die Möglichkeit der additiven Aufteilung der Gesamtverlustleistung in drei voneinander unabhängige Verlustleistungsterme. Dieses Schema lässt sich auch auf die Momentanleistung übertragen. Dabei sind die ratenabhängigen Momentanleistungsanteile stets vollständig dissipativ, weshalb sie die Verlustleistung infolge ratenabhängiger Effekte unmittelbar widerspiegeln. Im Gegensatz dazu beschreibt der ratenunabhängige Momentanleistungsanteil, wie Gleichung (2.27) erkennen lässt, die Summe aus dissipativen und reaktiven Leistungsbestandteilen. Ein Luftspalt, der sich im geschlossenen Pfad des magnetischen Flusses befindet, wirkt

ausschließlich reaktiv, weshalb er keinen Beitrag zur Verlustleistung, wohl aber zur Momentangesamtleistung liefert. Daher muss auch er in der Momentanleistungsbilanz mittels eines zusätzlichen eigenständigen Momentanleistungsterms Berücksichtigung finden. Das gilt auch für einen Moving-Term, wenn die Moving-Erweiterung zur Anwendung kommt. Mit den magnetischen Durchflutungen $\Theta_H(t), \Theta_A(t), \Theta_W(t), \Theta_L(t)$ und $\Theta_M(t)$, die in dieser Reihenfolge der ratenunabhängigen Hysterese, den Austauschverlusten, den klassischen Wirbelstromverlusten, dem Luftspalt und dem Moving-Term zuzuordnen sind, erhält man die unter isothermen Bedingungen für allgemein zeitabhängige Anregungen gültige Momentanleistungsbilanz zu

$$\Theta(t)\dot{\Phi}(t) = \Theta_H(t)\dot{\Phi}(t) + \Theta_A(t)\dot{\Phi}(t) + \Theta_W(t)\dot{\Phi}(t) + \Theta_L(t)\dot{\Phi}(t) + \Theta_M(t)\dot{\Phi}(t). \quad (4.162)$$

Der Zusammenhang zwischen $\Theta_H(t)$ und $\Phi(t)$ ist durch den ratenunabhängigen Hysteresekompensator gemäß

$$\Theta_H(t) = \Gamma_H^{-1}[\Phi](t) \quad (4.163)$$

gegeben. Die ratenabhängigen Anteile der magnetischen Durchflutung $\Theta(t)$ lassen sich aus Gleichung (2.53) zu

$$\Theta_A(t) = G_A(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t)) \sqrt{|\dot{\Phi}(t)|} \quad (4.164)$$

und

$$\Theta_W(t) = G_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t) \quad (4.165)$$

ableiten, wobei an die Stelle konstanter Koeffizienten, wie auf der Materialebene durch c_A und c_W gegeben, nun die von der Aussteuerung abhängigen Koeffizienten

$$G_A(\Phi(t)) = G_{0A} + G_{1A}\Phi(t)^2 \quad (4.166)$$

und

$$G_W(\Phi(t)) = G_{0W} + G_{1W}\Phi(t)^2 \quad (4.167)$$

treten. Dies geht auf experimentelle Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit zurück, die gezeigt haben, dass eine zusätzliche Berücksichtigung einer quadratischen Flussabhängigkeit eine deutlich verbesserte Anpassbarkeit des Modells an das real beobachtbare Materialverhalten ermöglicht. Die dem Luftspalt und dem Moving-Term zuzuordnenden magnetischen Durchflutungen sind linear vom magnetischen Fluss $\Phi(t)$ abhängig. Die zugehörigen Proportionalitätsfaktoren lassen sich in Analogie zu Gleichung (4.163) mithilfe von inversen magnetischen Leitwerten beschreiben, sodass

$$\Theta_L(t) = G_L^{-1}\Phi(t) \quad (4.168)$$

und

$$\Theta_M(t) = -G_M^{-1}\Phi(t) \quad (4.169)$$

die Abhängigkeiten zwischen dem Fluss $\Phi(t)$ und den Durchflutungen $\Theta_L(t)$ sowie $\Theta_M(t)$ ausdrücken. Wird für die relative Permeabilität der Luft $\mu_r = 1$ zugrunde gelegt, resultiert der Luftspaltleitwert aus

$$G_L = \frac{\mu_0 A_L}{l_L}. \quad (4.170)$$

Darin beschreiben μ_0 die magnetische Feldkonstante, A_L die effektive Querschnittsfläche des weichmagnetischen Pfades an den Grenzflächen zum Luftspalt und l_L die effektive Länge des Pfades magnetischer Feldlinien im Luftspalt. Der Leitwert zur Moving-Term-Kompensation ergibt sich mit der effektiven Länge des weichmagnetischen Pfades l_e und der zugehörigen effektiven Querschnittsfläche A_e zu

$$G_M = \frac{A_e}{kl_e}. \quad (4.171)$$

Durch das Einsetzen der abgeleiteten Beziehungen für die einzelnen Anteile der magnetischen Durchflutung in die Momentanleistungsbilanz (4.162) erhält man

$$\begin{aligned} \Theta(t)\dot{\Phi}(t) = & \left(\Gamma_H^{-1}[\Phi](t) + G_A(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t))\sqrt{|\dot{\Phi}(t)|} \right. \\ & \left. + G_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t) + G_L^{-1}\Phi(t) - G_M^{-1}\Phi(t) \right) \dot{\Phi}(t). \end{aligned} \quad (4.172)$$

Damit lässt sich die Systemgleichung in Form einer Differentialgleichung erster Ordnung gemäß

$$\begin{aligned} f_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) := & \Theta(t) - \Gamma_H^{-1}[\Phi](t) - G_A(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t))\sqrt{|\dot{\Phi}(t)|} \\ & - G_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t) - G_L^{-1}\Phi(t) + G_M^{-1}\Phi(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.173)$$

definieren. Sie wird im Folgenden auch als Kerndifferentialgleichung bezeichnet.

Zur Lösung des Nullstellenproblems $f_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) = 0$ soll hier eine Variante des numerischen Näherungsverfahrens nach Newton zur Anwendung kommen, dessen Iterationsvorschrift in Bezug auf das vorliegende Problem

$$\dot{\Phi}(t)^{(i+1)} := \dot{\Phi}(t)^{(i)} - \frac{f_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)})}{f'_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)})} \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.174)$$

lautet. Für die darin vorkommende Ableitung der Kerndifferentialgleichung gilt

$$\begin{aligned} f'_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) & := \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} f_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) \\ & = - \frac{G_A(\Phi(t))}{2\sqrt{|\dot{\Phi}(t)|}} - G_W(\Phi(t)). \end{aligned} \quad (4.175)$$

Mit der sogenannten Newton-Korrektur $\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)}$, die gerade die Lösung der Gleichung

$$f'_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)})\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)} = -f_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)}) \quad (4.176)$$

darstellt, lässt sich $\dot{\Phi}(t)^{(i+1)}$ auch durch

$$\dot{\Phi}(t)^{(i+1)} = \dot{\Phi}(t)^{(i)} + \Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)} \quad (4.177)$$

berechnen. Während der klassische Wirbelstromanteil $G_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t)$ in der Kerndifferentialgleichung das Konvergenzverhalten positiv beeinflusst, macht der Austauschanteil mit $G_A(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t))\sqrt{|\dot{\Phi}(t)|}$ zusätzliche Maßnahmen erforderlich, damit die Stabilität und die Effizienz des Newton-Verfahrens gewährleistet ist. Einerseits weist die Wurzelfunktion zu großen Werten von $|\dot{\Phi}(t)|$ hin mit $\lim_{\dot{\Phi} \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \Theta_A}{\partial \dot{\Phi}} = 0$ einen zunehmend geringeren Anstieg auf. Andererseits wird dieser zu kleinen Werten von $|\dot{\Phi}(t)|$ hin gemäß $\lim_{\dot{\Phi} \rightarrow 0\pm} \frac{\partial \Theta_A}{\partial \dot{\Phi}} = +\infty$ immer steiler. Dominiert der Austauschanteil in (4.173) den klassischen Wirbelstromanteil deutlich, begünstigt das ein langsames Konvergenzverhalten, weil die Newton-Korrekturen dann sehr groß und im anderen Fall sehr klein werden können. Ein noch bedeutenderes Problem besteht jedoch darin, dass $\frac{\partial \Theta_A}{\partial \dot{\Phi}} \Big|_0$ und folglich auch $\frac{\partial f_{\Delta\Theta}}{\partial \dot{\Phi}} \Big|_0$ nicht definiert sind, denn die Differenzierbarkeit stellt eine grundlegende Voraussetzung für die Verwendung des Newton-Verfahrens dar.

Das Auftreten sehr großer Korrekturschritte $\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)}$, die das Konvergenzverhalten unnötig verlangsamen würden, lässt sich durch die Verwendung des sogenannten gedämpften Newton-Verfahrens verhindern. Dabei dient ein mittels geeigneter Dämpfungsstrategie zu wählender Dämpfungsfaktor w_i mit $0 < w_i \leq 1$ zur Reduzierung der Newton-Korrekturen, sodass anstelle von Gleichung (4.177) die Berechnungsvorschrift

$$\dot{\Phi}(t)^{(i+1)} = \dot{\Phi}(t)^{(i)} + w_i \Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)} \quad (4.178)$$

zur Anwendung kommt. Als Entscheidungskriterium für die Wahl von w_i ist nach [DR08] und [DH08] der natürliche Monotonietest

$$|\overline{\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i+1)}}| \leq C_{w_i} |\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)}| \quad ; \quad C_{w_i} < 1 \quad (4.179)$$

heranzuziehen. Der Ausdruck $\overline{\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i+1)}}$ beschreibt die vereinfachte Newton-Korrektur, die ohne eine erneute Berechnung der Ableitung aus der Lösung der Gleichung

$$f'_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)}) \overline{\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i+1)}} = -f_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)}) + w_i \Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)} \quad (4.180)$$

hervorgeht. Nach [DH08] ist C_{w_i} durch

$$C_{w_i} = 1 - \frac{w_i}{2} \quad (4.181)$$

gegeben. Da es bei dem vorliegenden Problem immer nur eine einfache Nullstelle gibt, kann im ersten Iterationsschritt eines Iterationsvorganges grundsätzlich erst einmal mit $w_i = 1$ begonnen werden. Ist der natürliche Monotonietest (4.179) damit nicht erfüllt, wird der Wert von w_i fortlaufend halbiert, bis die Bedingung eingehalten oder ein Schwellwert $w_{\min} \ll 1$ unterschritten ist. Wenn $w_i < w_{\min}$ eintritt, ist die Iteration abzubrechen und mit einem anderen Startwert $\dot{\Phi}(t)^{(0)}$ erneut zu beginnen. Dieser Fall lässt sich hier aber auch zuverlässig durch die Verwendung eines ausreichend kleinen w_{\min} vermeiden. Wenn ein geeignetes w_i gefunden ist, kann der nächste Iterationsschritt mit

$$w_{i+1} = \min \{1, 2w_i\} \quad (4.182)$$

beginnen. Das ermöglicht es, sich der quadratischen Konvergenz des gewöhnlichen Newton-Verfahrens asymptotisch annähern zu können [DH08]. Der Ablauf ist zu wiederholen, bis laut

$$|f_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i+1)})| \leq \Delta\theta_\varepsilon \quad (4.183)$$

der Betrag des Funktionswertes $f_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i+1)})$ die durch $\Delta\theta_\varepsilon$ definierte Genauigkeitschranke erreicht oder unterschritten hat. Somit besteht das Verfahren aus zwei ineinander geschachtelten Schleifen. Die äußere Schleife gleicht dem Ablauf des gewöhnlichen Newton-Verfahrens und mit der inneren Schleife wird für jeden Iterationsschritt der Dämpfungsparameter w_i in der Art bestimmt, dass er unter Einhaltung von (4.179) immer den größtmöglichen Wert der Folge

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, w_{\min} \right\}$$

annimmt. Um generell mit möglichst wenigen Iterationen auszukommen, empfiehlt es sich, zu Beginn jedes Iterationsvorganges für einen Zeitpunkt t_j mit $t_0 < t_j \leq t_E$ als Iterationsstartwert gemäß $\dot{\Phi}(t_j)^{(0)} = \dot{\Phi}(t_{j-1})$ mit $t_{j-1} < t_j$ den unmittelbar zuvor berechneten Wert $\dot{\Phi}(t_{j-1})$ des um einen Zeitschritt zurück liegenden Zeitpunktes t_{j-1} zu verwenden. Im Fall des allerersten Iterationsvorganges ist $\dot{\Phi}(t_0)^{(0)} = 0$ eine zweckmäßige Wahl.

Nach [SK11] konvergiert das Newton-Verfahren lokal mindestens quadratisch, wenn die Funktion $f_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))$ bezüglich $\dot{\Phi}(t)$ dreimal stetig in einem Intervall differenzierbar ist, das die gesuchte Nullstelle $\dot{\Phi}(t)^*$ im Inneren enthält, und zudem $f'_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^*) \neq 0$ gilt. Gemäß den vorstehenden Ausführungen ist das nicht ohne Weiteres gegeben. Es ist also idealerweise eine modifizierte Kerndifferentialgleichung gesucht, die bei ausreichender Genauigkeit eine global dreimal stetig differenzierbare, streng monotone Funktion beschreibt. Um die Bedingungen zu erfüllen, soll die Wurzelfunktion (4.164) für kleine Werte von $\dot{\Phi}(t)$ im Intervall $-\dot{\Phi}_\varepsilon \leq \dot{\Phi}(t) \leq \dot{\Phi}_\varepsilon$ mit $\dot{\Phi}_\varepsilon \ll 1$ durch ein geeignetes Polynom approximiert werden. Hierfür eignet sich die in Anhang B hergeleitete ungerade Funktion

$$\Theta_{A_{\text{app}}}(t) = G_A(\Phi(t)) \left(-\frac{15}{128\sqrt{\dot{\Phi}_\varepsilon^{13}}}\dot{\Phi}(t)^7 + \frac{65}{128\sqrt{\dot{\Phi}_\varepsilon^9}}\dot{\Phi}(t)^5 - \frac{117}{128\sqrt{\dot{\Phi}_\varepsilon^5}}\dot{\Phi}(t)^3 + \frac{195}{128\sqrt{\dot{\Phi}_\varepsilon}}\dot{\Phi}(t) \right). \quad (4.184)$$

Die Abbildung 4.30 verdeutlicht dies, indem sie $\Theta_A(t)$ und $\Theta_{A_{\text{app}}}(t)$ sowie die jeweiligen ersten drei partiellen Ableitungen nach $\dot{\Phi}(t)$ mit den Bezeichnungen $\Theta'_A(t)$, $\Theta''_A(t)$, $\Theta'''_A(t)$ entsprechend (B.1)-(B.3) und $\Theta'_{A_{\text{app}}}(t)$, $\Theta''_{A_{\text{app}}}(t)$, $\Theta'''_{A_{\text{app}}}(t)$ entsprechend (B.5)-(B.7) mit (B.8) im Approximationsgebiet darstellt.

Die Verwendung des Polynoms zur Regularisierung der Unstetigkeiten in den Ableitungen hat noch einen weiteren Vorteil. Die damit einhergehende Endlichkeit des Anstieges von $f_{\Delta\theta}$ zu kleinen Werten von $|\dot{\Phi}(t)|$ hin löst außerdem das Problem des zuvor beschriebenen langsamen Konvergenzverhaltens, dessen Ursache im Auftreten sehr kleiner Korrekturschritte $\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)}$ in vergleichsweise großer Entfernung zur gesuchten Nullstelle $\dot{\Phi}(t)^*$ liegt. Dafür muss die Wahl der Intervallgrenzen $\pm\dot{\Phi}_\varepsilon$ aber sorgsam erfolgen. Zwar steigt die

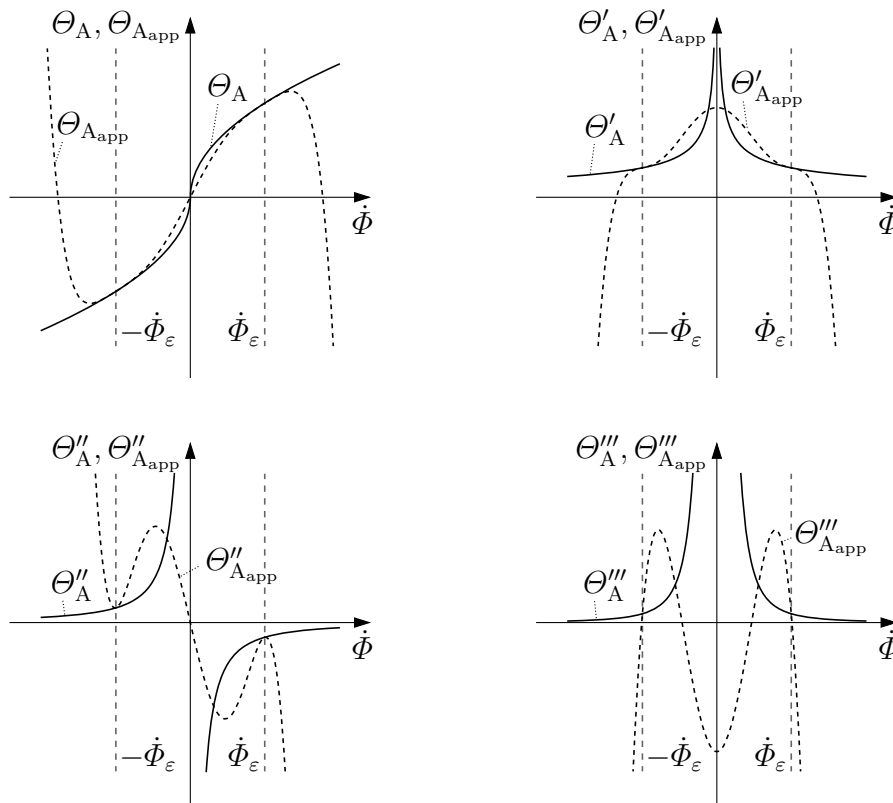


Bild 4.30: Darstellung der dreimal stetigen Differenzierbarkeit der im Intervall $[-\dot{\Phi}_\varepsilon, \dot{\Phi}_\varepsilon]$ durch $\Theta_{A,\text{app}}$ approximierten Funktion Θ_A

Genauigkeit der Approximation der Funktion $f_{\Delta\theta}$ mit einem kleiner werdenden Intervall an, doch gleichzeitig nimmt dadurch auch der Anstieg des Polynoms in der Umgebung von $\dot{\Phi}(t) = 0$ zu, was sich wiederum tendenziell kontraproduktiv auf das Konvergenzverhalten auswirkt. In der praktischen Anwendung hat sich ein Wert in der Größenordnung $\dot{\Phi}_\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$ als ein sehr guter Kompromiss erwiesen. Mit den erläuterten Maßnahmen sind die Voraussetzungen für die Stabilität und ein schnelles Konvergenzverhalten des gedämpften Newton-Verfahrens erfüllt.

Es liegt nun ein Modell zur Beschreibung des hysteresebehafteten Magnetisierungsverhaltens ferromagnetischer Materialien für allgemein zeitabhängige Signale vor, das numerisch stabil und effizient sowie als Subsystem robust in übergeordnete Modelle integrierbar ist. Dies liegt auch darin begründet, dass dessen Ein- und Ausgangsgrößen wegen des integralen Zusammenhangs in der zeitdiskreten Berechnung algebraisch voneinander entkoppelt sind, weshalb es keine algebraischen Schleifen gibt. Die Abbildung 4.31 zeigt das zugehörige Signalflussmodell und deutet darüber hinaus eine optionale Integration in einen Regelkreis mit einem Proportional-Integral-Regler an, wodurch alternativ zur magnetischen Durchflutung auch der magnetische Fluss als Eingangsgröße vorgegeben werden kann. Zur Überwachung der Gültigkeitsbereiche des Modells hinsichtlich der betragsmäßig maximal zulässigen Flussdichte und ihrer zeitlichen Änderung sind auch $B(t)$ und $\dot{B}(t)$

zu berechnen. Diese Grenzen werden durch die für die Modellparameteridentifikation zugrunde gelegte Messdatenbasis definiert. Zum Zwecke einer kompakten Darstellung gilt im Nachstehenden

$$\Theta_{AW}(t) = \Theta_A(t) + \Theta_W(t) \quad (4.185)$$

sowie

$$\Gamma_{AW}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) = G_A(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t)) \sqrt{|\dot{\Phi}(t)|} + G_W(\Phi(t)) \dot{\Phi}(t), \quad (4.186)$$

woraus folgt

$$\Theta_{AW}(t) = \Gamma_{AW}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)). \quad (4.187)$$

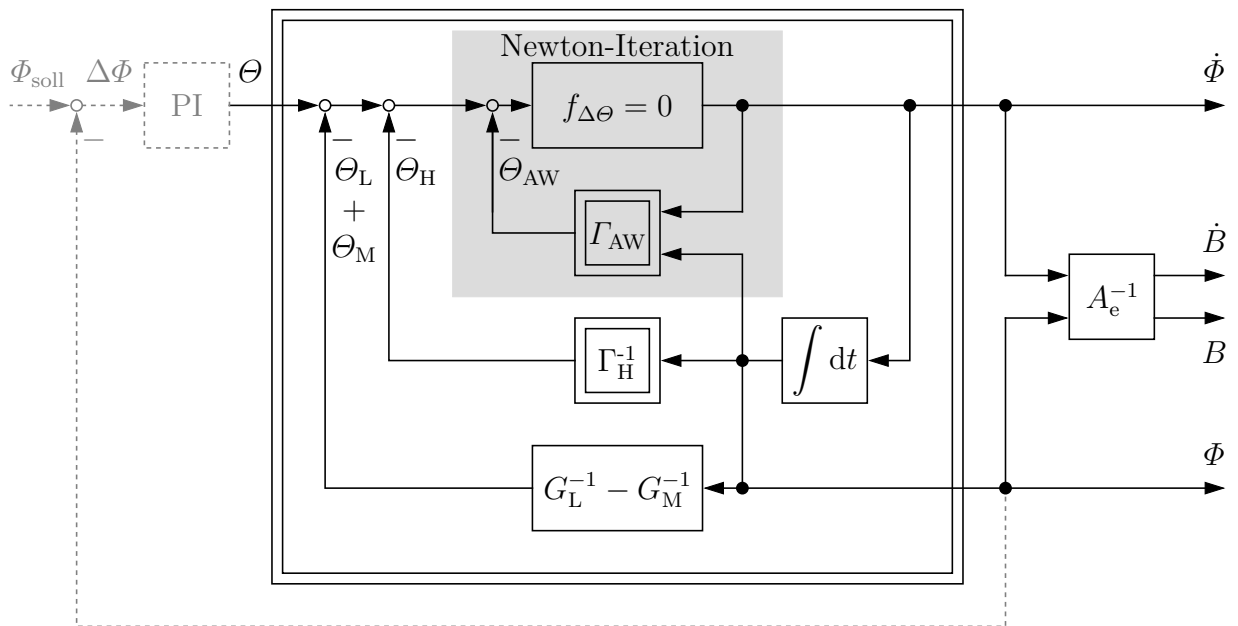


Bild 4.31: Signalfussdarstellung des dynamischen Kernmodells

Die vollständige Parametrierung des dynamischen Kernmodells, inklusive des ratenunabhängigen Teilmodells, lässt sich in vier wesentlichen Schritten realisieren. Der Identifikationsprozess findet auf der Materialebene statt, damit das abgeleitete Modell unabhängig von den spezifischen Geometrieparametern des für die Identifikation genutzten Magnetkerns ist.

Zunächst sind die Parameter des ratenunabhängigen Hysterese Modells entsprechend der zuvor beschriebenen Vorgehensweise zu identifizieren. Dies erfordert die hinreichende Aussteuerung des Materials mit einem geeigneten Signal, dessen Änderungsrate klein genug ist, damit ratenabhängige Effekte vernachlässigbar sind. Um einen möglichst großen Gültigkeitsbereich des gesuchten Materialmodells zu erzielen, sollte die Aussteuerung bis in den Sättigungsbereich erfolgen.

Im zweiten Schritt ist das Material zur Charakterisierung seines ratenabhängigen Verhaltens mittels harmonischer Signale für verschiedene Amplituden- und Frequenzstufen

über jeweils volle Perioden symmetrisch auszusteuern, sodass darauf aufbauend betriebspunktabhängige Kernverlustleistungsdichten und Kernverlustleistungsdichtekomponenten für den nachfolgenden Modellparameteridentifikationsprozess berechnet werden können. Der Amplitudenbereich liegt zweckmäßigerweise innerhalb der Grenzen, die durch die Messdatenbasis für das ratenunabhängige Hysteresemodell gegeben sind. Als untere Grenze des Frequenzbereiches empfiehlt sich eine Frequenz, bei der der ratenabhängige Verlustanteil gemessen an den Gesamtverlusten noch klein ist, sich aber bereits mit guter Qualität identifizieren lässt. Eine sinnvolle obere Grenze kann sich einerseits aus dem zu erwartenden Einsatzbereich des Materials und andererseits aus der Bedingung, dass Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen noch vernachlässigbar sein muss, ergeben. Die Datenblattangaben des Materialherstellers in Verbindung mit der Abschätzung der Eindringtiefe δ nach

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu_0 \mu_r}} \quad (4.188)$$

[Lie77] stellen in diesem Zusammenhang im Allgemeinen eine gute Hilfestellung dar. Für jede der Amplituden- und Frequenzstufen sind dann die volumenspezifischen Gesamtverlustleistungen und die volumenspezifischen Verlustleistungen infolge von ratenunabhängiger Hysterese aus den zugehörigen gemittelten Momentanleistungsdichten nach

$$p_G = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H(t) \dot{B}(t) dt \quad (4.189)$$

und

$$p_H = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_H(t) \dot{B}(t) dt \quad (4.190)$$

zu bestimmen. Darin beschreiben t_0 und t_E die Anfangs- und Endzeitpunkte einer Signalperiode, aus deren Differenz die Periodendauer T_P mit

$$T_P = t_E - t_0 \quad (4.191)$$

resultiert. Die reaktiven Leistungsbestandteile, die mit den ratenunabhängigen Hystereseffekten, mit einem Luftspalt oder mit einem Moving-Term einhergehen, heben sich aufgrund der Mittelwertbildung über exakt eine Periode auf. Da $H(t)$ und $B(t)$ die Ein- und Ausgangsgrößen bei der messtechnischen Charakterisierung darstellen, sind $\dot{B}(t)$ mithilfe der zeitlichen Ableitung von $B(t)$ und $H_H(t)$ anhand des zuvor identifizierten ratenunabhängigen Hysteresekompensators aus

$$H_H(t) = \Gamma_H^{-1}[B](t) \quad (4.192)$$

zu berechnen. Damit ist sowohl die Gesamtverlustleistungsdichte p_G als auch ihre Teilkomponente p_H für die verschiedenen Hysterese Kennlinien der Messdatenbasis ermittelt. Der jeweils verbleibende Anteil der Differenz $p_G - p_H$ kann der Summe der ratenabhängigen Verlustanteile

$$p_{AW} = p_A + p_W \quad (4.193)$$

zugeschrieben werden, sodass sich darauf aufbauend ein Optimierungsproblem zur Bestimmung der Modellparameter für das ratenabhängige Materialverhalten formulieren lässt. Die Berechnungsvorschriften der auf das Volumen bezogenen ratenabhängigen Verlustanteile infolge von Austauscheffekten und makroskopischen Wirbelströmen können in Anlehnung an die auf der Systemebene abgeleitete Momentanleistungsbilanz nach Gleichung (4.172) zu

$$p_A = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} g_A(B(t)) \operatorname{sgn}(\dot{B}(t)) \sqrt{|\dot{B}(t)|} \dot{B}(t) dt \quad (4.194)$$

und

$$p_W = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} g_W(B(t)) \dot{B}(t) \dot{B}(t) dt \quad (4.195)$$

mit

$$g_A(B(t)) = g_{0A} + g_{1A} B(t)^2 \quad (4.196)$$

und

$$g_W(B(t)) = g_{0W} + g_{1W} B(t)^2 \quad (4.197)$$

angegeben werden. Die Beziehungen zwischen den Parametern auf der Materialebene und denen auf der Systemebene sind dabei durch die Zusammenhänge (2.72) und (2.74) bestimmt. Man erhält für die Parameter des Austauschanteils die Umrechnungsvorschriften

$$G_{0A} = g_{0A} \frac{l_e}{\sqrt{A_e}}, \quad (4.198)$$

$$G_{1A} = g_{1A} \frac{l_e}{\sqrt{A_e} A_e^2} \quad (4.199)$$

und für die Parameter des Wirbelstromanteils

$$G_{0W} = g_{0W} \frac{l_e}{A_e}, \quad (4.200)$$

$$G_{1W} = g_{1W} \frac{l_e}{A_e^3}. \quad (4.201)$$

Da die Ausprägung der klassischen Wirbelströme grundsätzlich geometrieabhängig ist, dies aber durch $g_W(B(t))$ nicht explizit zum Ausdruck kommt, und um das Problem der Modellparameteridentifikation einem effizienten Verfahren zugänglich zu machen, sollen sowohl $g_A(B(t))$ als auch $g_W(B(t))$ durch alternative Formulierungen ausgedrückt werden. Ein wesentlicher Aspekt in diesem Zusammenhang besteht darin, dass beide ratenabhängigen Verlustanteile ihre Ursache in dem Wirken von Wirbelströmen besitzen und diese wiederum nach dem Ohmschen Gesetz auch unmittelbar von der elektrischen Leitfähigkeit des Materials abhängig sind. Daher wird als gemeinsamer Faktor die flussdichteabhängige elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma(B(t)) = \sigma_0 + \sigma_1 B(t)^2 \quad (4.202)$$

mit den elektrischen Leitfähigkeitsparametern σ_0 und σ_1 eingeführt. In Kombination mit dem Parameter λ zur Gewichtung des Austauschanteils und mit dem Geometriefaktor F_G zur Berücksichtigung der geometriespezifischen Ausprägung von klassischen Wirbelströmen lassen sich dann zwischen $\sigma(B(t))$ und $g_A(B(t))$ beziehungsweise zwischen $\sigma(B(t))$ und $g_W(B(t))$ die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} g_A(B(t)) &= g_{0A} + g_{1A}B(t)^2 \\ &= (\sigma_0 + \sigma_1 B(t)^2) \lambda \\ &= \sigma(B(t)) \lambda \end{aligned} \quad (4.203)$$

sowie

$$\begin{aligned} g_W(B(t)) &= g_{0W} + g_{1W}B(t)^2 \\ &= (\sigma_0 + \sigma_1 B(t)^2) F_G \\ &= \sigma(B(t)) F_G \end{aligned} \quad (4.204)$$

herstellen. Der Faktor F_G ist folglich im Rahmen der Modellparameteridentifikation entsprechend der Geometrie des für die Erstellung der Messdatenbasis genutzten Magnetkerns zu wählen und im Fall der Modellanwendung einer gegebenenfalls veränderten Kerngeometrie anzupassen. Er lässt sich für einfache Geometrieformen analytisch herleiten. Als weiterführende Literatur sei in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten von [SPLG78, Dre79a, Dre79b, Mor09] verwiesen. Häufig kann in guter Näherung ein Kreisquerschnitt gemäß Abbildung 4.32 angenommen werden. Für diesen Fall gilt

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{A_e}{8\pi} \\ &= \frac{d^2}{32}, \end{aligned} \quad (4.205)$$

worin d dem Durchmesser der flussführenden Röhre entspricht.

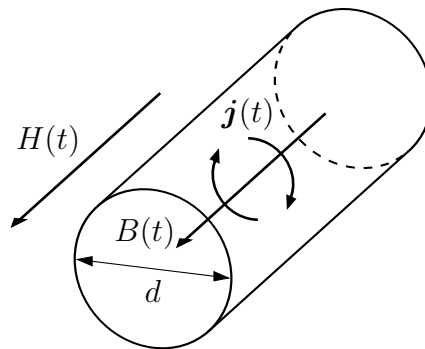


Bild 4.32: Schematische Darstellung eines Flussröhrenabschnitts mit Kreisquerschnitt

Nun stellen $\sigma(B(t))$ und λ die gesuchten Modellparameter dar. Um sie identifizieren zu können, werden zunächst zu jeder der Amplituden- und Frequenzstufen die von $\sigma(B(t))$

unabhängigen Komponenten der durch die Gleichungen (4.193)-(4.195) beschriebenen volumenspezifischen ratenabhängigen Verlustleistungen für systematisch variierte Werte von λ berechnet. Auf der Grundlage experimenteller Ergebnisse lässt sich der relevante Wertebereich gemäß $0 \sqrt{V_m} < \lambda < 1 \sqrt{V_m}$ beschränken. Die zu berechnenden Größen seien mit p_{AW^*} , p_{A^*} sowie p_{W^*} bezeichnet und lauten

$$p_{AW^*}(\lambda) = p_{A^*}(\lambda) + p_{W^*} \quad (4.206)$$

mit

$$p_{A^*}(\lambda) = \frac{\lambda}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} \operatorname{sgn}(\dot{B}(t)) \sqrt{|\dot{B}(t)|} \dot{B}(t) dt \quad (4.207)$$

und

$$p_{W^*} = \frac{F_G}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} \dot{B}(t) \dot{B}(t) dt. \quad (4.208)$$

Darüber hinaus sind für jede Amplituden- und Frequenzstufe die maximal auftretenden Flussdichteamplituden

$$B_{\max} = \max_{t_0 \leq t \leq t_E} \{B(t)\} \quad (4.209)$$

zu ermitteln. Fasst man die einzelnen volumenspezifischen Gesamtverlustleistungen, die volumenspezifischen Verlustleistungen infolge von ratenunabhängiger Hysterese, die von $\sigma(B(t))$ unabhängigen Komponenten der volumenspezifischen ratenabhängigen Verlustleistungen und die maximal auftretenden Flussdichteamplituden in Vektorschreibweise zusammen, erhält man für A Amplitudenstufen und F Frequenzstufen

$$\mathbf{p}_G^T = \left(p_{G1,1} \quad p_{G2,1} \quad \dots \quad p_{GF,1} \quad p_{G1,2} \quad p_{G2,2} \quad \dots \quad p_{GF,2} \quad \dots \quad p_{GF,A} \right),$$

$$\mathbf{p}_H^T = \left(p_{H1,1} \quad p_{H2,1} \quad \dots \quad p_{HF,1} \quad p_{H1,2} \quad p_{H2,2} \quad \dots \quad p_{HF,2} \quad \dots \quad p_{HF,A} \right),$$

$$\mathbf{p}_{AW^*}^T(\lambda) = \left(p_{AW^*1,1}(\lambda) \quad p_{AW^*2,1}(\lambda) \quad \dots \quad p_{AW^*F,1}(\lambda) \quad p_{AW^*1,2}(\lambda) \right. \\ \left. p_{AW^*2,2}(\lambda) \quad \dots \quad p_{AW^*F,2}(\lambda) \quad \dots \quad p_{AW^*F,A}(\lambda) \right),$$

$$\mathbf{B}_{\max}^T = \left(B_{\max1,1} \quad B_{\max2,1} \quad \dots \quad B_{\max F,1} \quad B_{\max1,2} \quad B_{\max2,2} \quad \dots \quad B_{\max F,2} \quad \dots \quad B_{\max F,A} \right).$$

Darauf aufbauend erfolgt im dritten Schritt die Bestimmung der Modellparameter σ_0 und σ_1 von $\sigma(B(t))$ sowie λ . Zu diesem Zweck soll der Fehler

$$\begin{aligned} E_{AW}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda) &= p_G - p_H - p_{AW} \\ &= p_G - p_H - \sigma(B) p_{AW^*}(\lambda) \\ &= p_G - p_H - \left(\sigma_0 + \sigma_1 B_{\max}^2 \right) p_{AW^*}(\lambda) \end{aligned} \quad (4.210)$$

herangezogen werden. Angewendet auf alle A Amplituden- und F Frequenzstufen einer Messdatenbasis folgt daraus

$$\mathbf{E}_{\text{AW}}^{\text{T}}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda) = \mathbf{p}_{\text{G}}^{\text{T}} - \mathbf{p}_{\text{H}}^{\text{T}} - (\sigma_0 \quad \sigma_1) \cdot \left(\mathbf{B}_{\text{max}}^{\text{T}} \circ \mathbf{B}_{\text{max}}^{\text{T}} \circ \mathbf{p}_{\text{AW}^*}^{\text{T}}(\lambda) \right), \quad (4.211)$$

wobei $\mathbf{E}_{\text{AW}}^{\text{T}}$ die Gestalt

$$\mathbf{E}_{\text{AW}}^{\text{T}} = \left(E_{\text{AW}1,1} \quad E_{\text{AW}2,1} \quad \dots \quad E_{\text{AW}F,1} \quad E_{\text{AW}1,2} \quad E_{\text{AW}2,2} \quad \dots \quad E_{\text{AW}F,2} \quad \dots \quad E_{\text{AW}F,A} \right)$$

besitzt und der Ausdruck $\mathbf{B}_{\text{max}}^{\text{T}} \circ \mathbf{B}_{\text{max}}^{\text{T}} \circ \mathbf{p}_{\text{AW}^*}^{\text{T}}(\lambda)$ die elementweise Multiplikation dieser Vektoren beschreibt. Damit lässt sich das Gütemaß

$$V_{\text{AW}}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda) = \|\mathbf{E}_{\text{AW}}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda)\|_2^2 \quad (4.212)$$

bilden. Die Minimierung dieser Größe gemäß

$$\min\{V_{\text{AW}}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda)\} = \min\left\{ \sum_{j=1}^A \sum_{i=1}^F E_{\text{AW}i,j}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda)^2 \right\} \quad (4.213)$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \lambda \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad (4.214)$$

führt auf optimale Modellparameter. Die Gleichung (4.211) zeigt aber, dass nicht alle drei gesuchten Parameter gleichzeitig optimiert werden können, weil sich die Abhängigkeit von λ nur implizit durch $\mathbf{p}_{\text{AW}^*}^{\text{T}}(\lambda)$ ausdrücken lässt. Daher sind zu jedem einzelnen der zuvor vorgegebenen λ -Werte die jeweils optimierten Werte für σ_0 und σ_1 durch die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate zu bestimmen und im Anschluss ist diejenige Parameterkombination aus σ_0 , σ_1 und λ zu wählen, für die $V_{\text{AW}}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda)$ nach (4.213) minimal wird.

Nachdem die für das Kernmodell erforderlichen Materialparameter identifiziert sind, ist im vierten Schritt noch der Geometriefaktor F_{G} entsprechend einer im Rahmen der Modell Anwendung einzusetzenden Kerngeometrie zu bestimmen. Dadurch wird die Parametrierung des ratenabhängigen Kernmodells abgeschlossen.

In der Abbildung 4.33 sind die vier wesentlichen Schritte zur Modellparameteridentifikation und zur Synthese des dynamischen Kernmodells sowie der Übergang von der Materialebene auf die Systemebene zusammenfassend dargestellt. Zur Verdeutlichung ist jeder Schritt illustriert. Die oberste Teilgrafik zeigt das inverse ratenunabhängige Materialverhalten, das für die Identifikation des Hysteresekompensators Γ_{H}^{-1} herangezogen wird. Die zweite Teilgrafik zeigt die durch ratenabhängige Effekte aufgeweitete Hysteresekurve für den inversen Zusammenhang $H(B)$, wobei die gepunktete Fläche die auf die Frequenz bezogene Gesamtverlustleistungsdichte und die grau markierte Fläche die auf die Frequenz

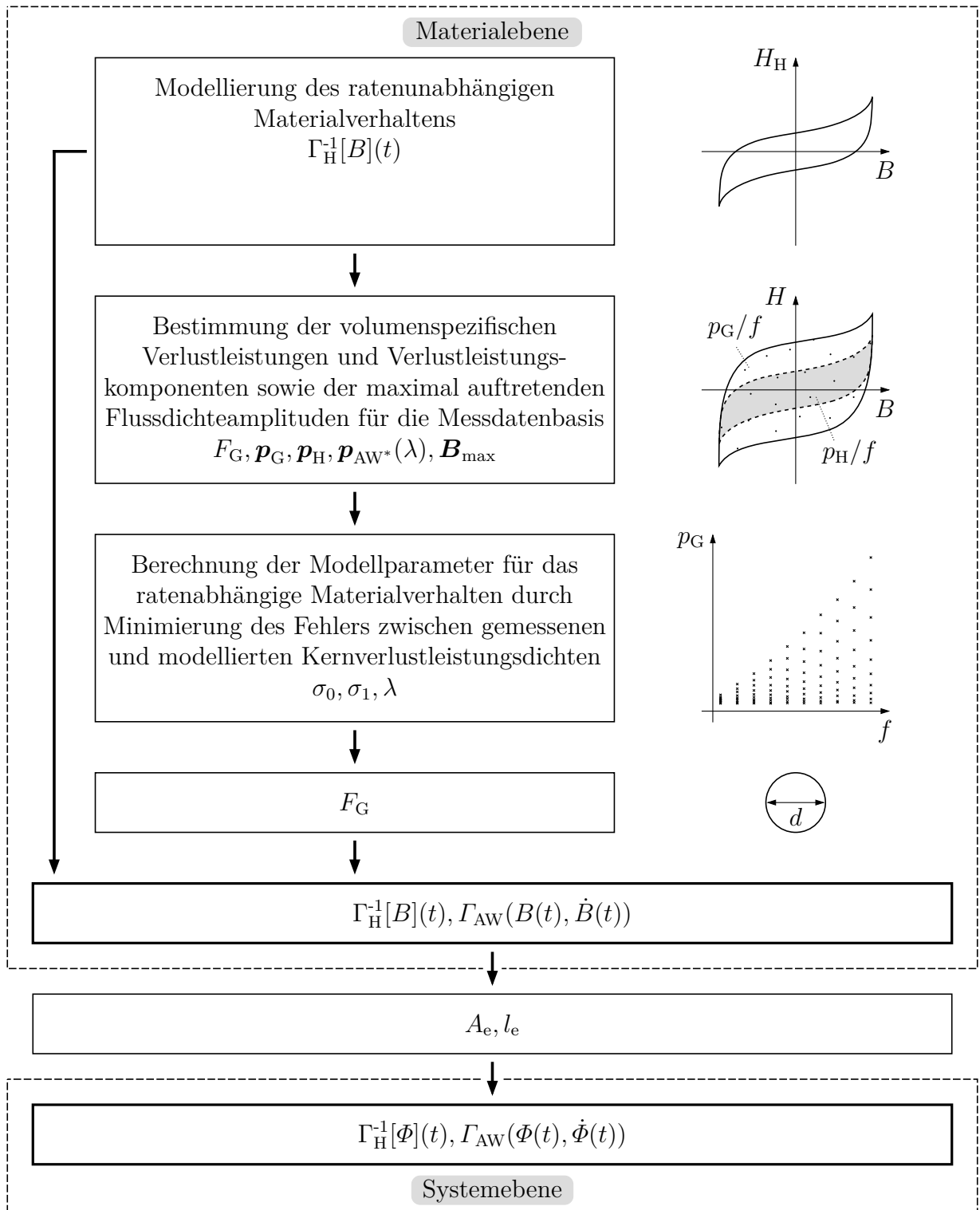


Bild 4.33: Ablaufschema zur Modellparameteridentifikation und Synthese des dynamischen Kernmodells

bezogene volumenspezifische Verlustleistung infolge ratenunabhängiger Hysterese gekennzeichnet. Die Differenz dieser Flächen entspricht somit der auf die Frequenz bezogenen Verlustleistungsdichte infolge von ratenabhängigen Effekten. Die dritte Illustration stellt das Gesamtverlustleistungsdichtekennfeld einer Messdatenbasis mit zehn Frequenzstufen und je zehn Amplitudenstufen dar. Mit den optimalen Modellparametern stimmen die gemessenen und die modellierten Gesamtverlustleistungsdichten als die Summen aus ratenunabhängigen und ratenabhängigen Verlustleistungsdichten im Sinne von $\min\{V_{AW}(\sigma_0, \sigma_1, \lambda)\}$ bestmöglich überein. In der vierten Teilgrafik wird anhand eines Kreisquerschnitts der Einfluss der Kernquerschnittsgeometrie angedeutet, der durch den Geometriefaktor F_G Berücksichtigung findet. Der Übergang von der Materialebene auf die Systemebene erfolgt schließlich mittels der effektiven Geometrieparameter A_e und l_e .

4.3.3 Berücksichtigung von Flussverdrängung

Im Zusammenhang mit der Modellierung einer induktiven Komponente kann es in Abhängigkeit des verwendeten Magnetwerkstoffes, der Magnetkerengeometrie sowie der anwendungsspezifischen Änderungsraten des magnetischen Feldes erforderlich sein, auch Flussverdrängung infolge klassischer Wirbelströme einzubeziehen, insbesondere wenn die nach (4.188) abgeschätzte Eindringtiefe dies nahelegt. Zu diesem Zweck soll das dynamische Kernmodell aus Kapitel 4.3.2 entsprechend erweitert werden.

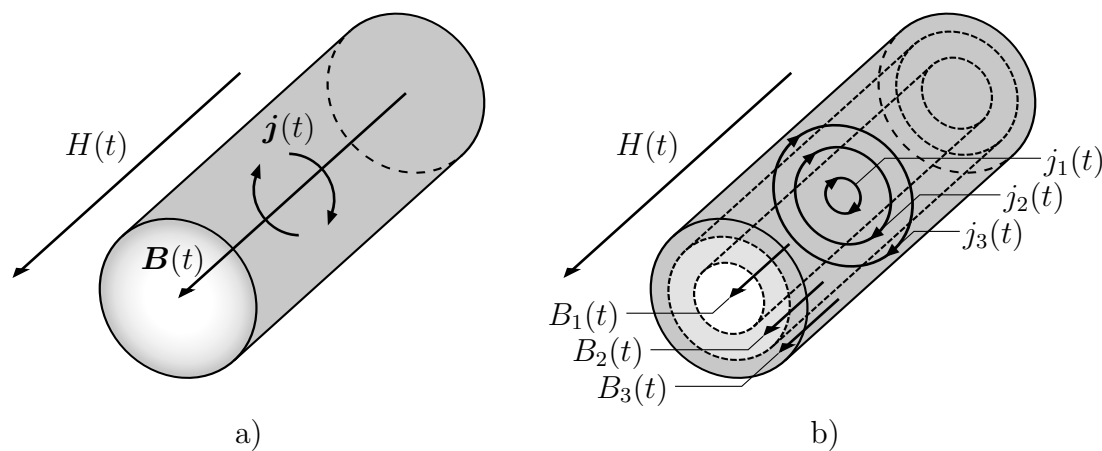


Bild 4.34: Magnetischer Skin-Effekt in einem Flussröhrenabschnitt mit Kreisquerschnitt
a) Reale Flussdichteverteilung
b) Approximation der Flussdichteverteilung mit einem Schalenmodell

Der zugrunde gelegte magnetische Leiter besitze weiterhin einen Kreisquerschnitt und sei in axialer Richtung von der magnetischen Flussdichte durchsetzt. Wie es die Abbildung 4.34a andeutet, hängt diese aber nun aufgrund der elektromagnetischen Wechselwirkung im Material vom Abstand zur Zylinderachse ab. So führt die nach dem Induktionsgesetz (2.29) durch eine zeitlich veränderliche Flussdichte $\mathbf{B}(t)$ hervorgerufene elektrische

Feldstärke $\mathbf{E}(t)$ im magnetischen Material im Zusammenhang mit dem Ohmschen Gesetz (2.30) zur Ausbildung einer zum Äußeren des Leiters hin betragsmäßig ansteigenden Wirbelstromdichte $\mathbf{j}(t)$ mit kreisförmigem Verlauf um die Zylinderachse. Diese wiederum erzeugt nach dem Durchflutungsgesetz (2.28) eine magnetische Feldstärke $\mathbf{H}(t)$, die das ursächliche Magnetfeld dämpft, wodurch der Betrag der Flussdichte im Inneren des Leiters kleiner ist als zum Leiterrand hin. Anders ausgedrückt, resultieren die klassischen Wirbelströme in einem bestimmten Abstand zur Zylinderachse aus dem jeweils eingeschlossenen magnetischen Fluss und dieser hängt zugleich auch von der Rückwirkung der weiter außen verlaufenden klassischen Wirbelströme ab.

Für die Modellierung dieser gekoppelten und sich durchdringenden magnetischen und elektrischen Kreise kommt in Anlehnung an J. B. Schwer [Sch97] ein Schalenmodell nach Abbildung 4.34b zum Einsatz. Das Vollmaterial wird dabei in konzentrische Flussröhren mit zylinderförmiger beziehungsweise hohlzylinderförmiger Gestalt unterteilt. Innerhalb jeder einzelnen Röhre sei die Flussdichte und die Wirbelstromdichte als homogen angenommen. Während Schwer eine Partitionierung mit gleichen Schalendicken verwendet, erfolgt die Aufteilung hier in der Art, dass die Querschnittsflächen der einzelnen Flussröhren betragsmäßig gleich groß sind. Ein daraus resultierender Vorteil besteht darin, dass sich die magnetischen Teilflüsse im stationären Zustand nicht unterscheiden. Im transienten Fall geben die Flussamplituden in den einzelnen Schalen somit unmittelbar Aufschluss über das Ausmaß der Flussverdrängung. Im Rahmen der Modellbildung bezüglich magnetischer Leiter, die nicht für eine Beschreibung mittels zylindrischer Flussröhren geeignet sind, kann es laut Schwer hilfreich sein, Finite-Elemente-Simulationen zur Bestimmung einer angemessenen Partitionierung heranzuziehen. An dieser Stelle sei auch auf die Monografie von T. Ströhl [Str02] hingewiesen, in der ein alternatives Schalenmodell aufgezeigt wird, das Flussröhren mit rechteckigen Querschnittsflächen verwendet.

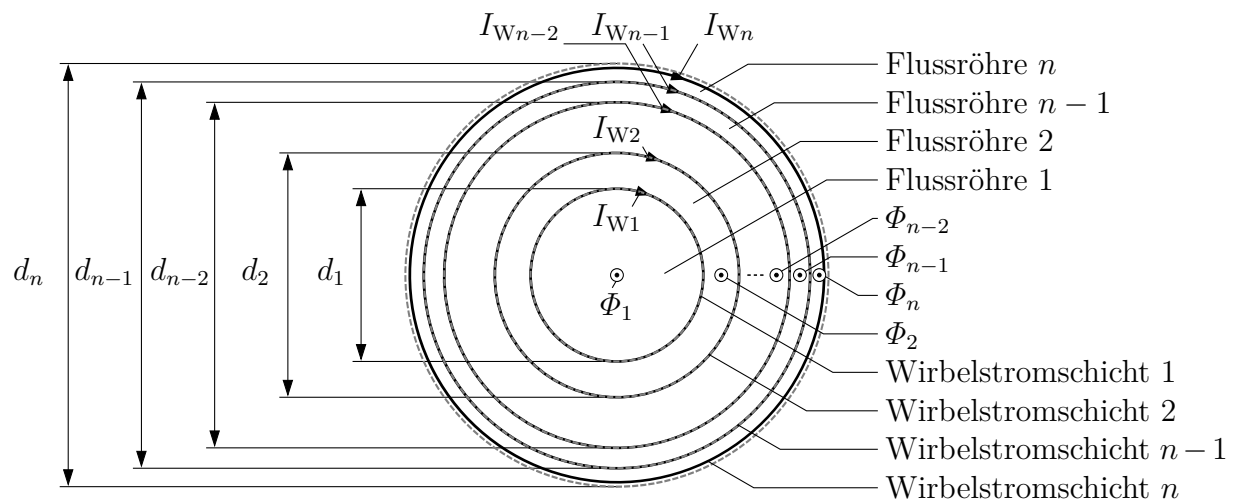


Bild 4.35: Partitionierung des Kernquerschnitts in Schalen gleichen Flächeninhaltes mit konzentrierten Wirbelstromschichten

Die Abbildung 4.35 stellt den in n betragsmäßig gleiche Teilflächen partitionierten Kern-

querschnitt für einen in n Flussröhren unterteilten magnetischen Leiter und die zugehörigen Teilflüsse $\Phi_1(t) \dots \Phi_n(t)$ sowie die entsprechenden Wirbelströme $I_{W1}(t) \dots I_{Wn}(t)$ dar. Dabei liegt nach Schweer die Annahme zugrunde, dass die einzelnen Röhren mit den Außendurchmessern $d_1 \dots d_n$ keine elektrische Leitfähigkeit mehr besitzen, sondern fiktive dünne leitende Wirbelstromschichten zwischen ihnen beziehungsweise im äußeren Randbereich der n -ten Flussröhre verlaufen, auf die die elektrische Leitfähigkeit des Vollmaterials übergeht. Somit kann man jeder Wirbelstromschicht einen bestimmten Wirbelstromleitwert zuordnen.

Das Netzwerk der gekoppelten magnetischen und elektrischen Kreise lässt sich vorteilhaft anhand eines Ersatzschaltbildes mit gekoppelten Quellen beschreiben. Das Prinzip soll zunächst mithilfe der Abbildung 4.36 am eindimensionalen ratenabhängigen Kernmodell erläutert werden. Demnach erzeugt die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $\dot{\Phi}(t)$ in dem den klassischen Wirbelströmen zugeordneten elektrischen Kreis in Abhängigkeit des Wirbelstromleitwertes $G_W(\Phi(t))$ einen Wirbelstrom

$$I_W(t) = G_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t), \tag{4.215}$$

der in Form einer magnetischen Spannung $\Theta_W(t) = I_W(t)$ eine Rückwirkung auf den magnetischen Kreis ausübt. In gleicher Weise geht mit der Quellenspannung $\text{sgn}(\dot{\Phi}(t))\sqrt{|\dot{\Phi}(t)|}$ in einem den Austauscheffekten zugeschriebenen elektrischen Kreis in Abhängigkeit des Austauschleitwertes $G_A(\Phi(t))$ ein Austauschstrom

$$I_A(t) = G_A(\Phi(t)) \text{sgn}(\dot{\Phi}(t))\sqrt{|\dot{\Phi}(t)|} \tag{4.216}$$

einher, der ebenso, einer magnetischen Spannung $\Theta_A(t) = I_A(t)$ entsprechend, auf den magnetischen Kreis rückwirkt.

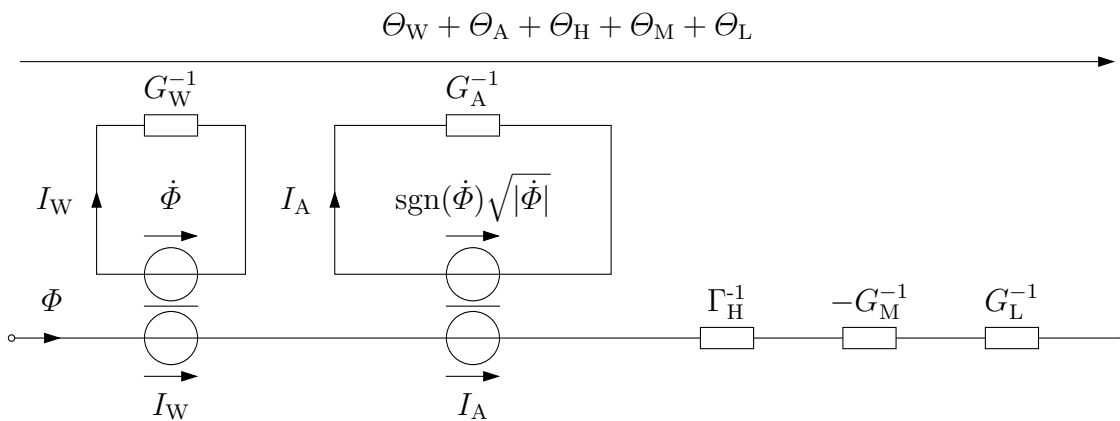


Bild 4.36: Ersatzschaltbild für das dynamische Kernmodell ohne Berücksichtigung von Flussverdrängungseffekten

Überträgt man diese Interpretation auf das Flussverdrängungsmodell mit n Schalen, resultiert daraus das in der Abbildung 4.37 angedeutete Ersatzschaltbild mit n parallelen

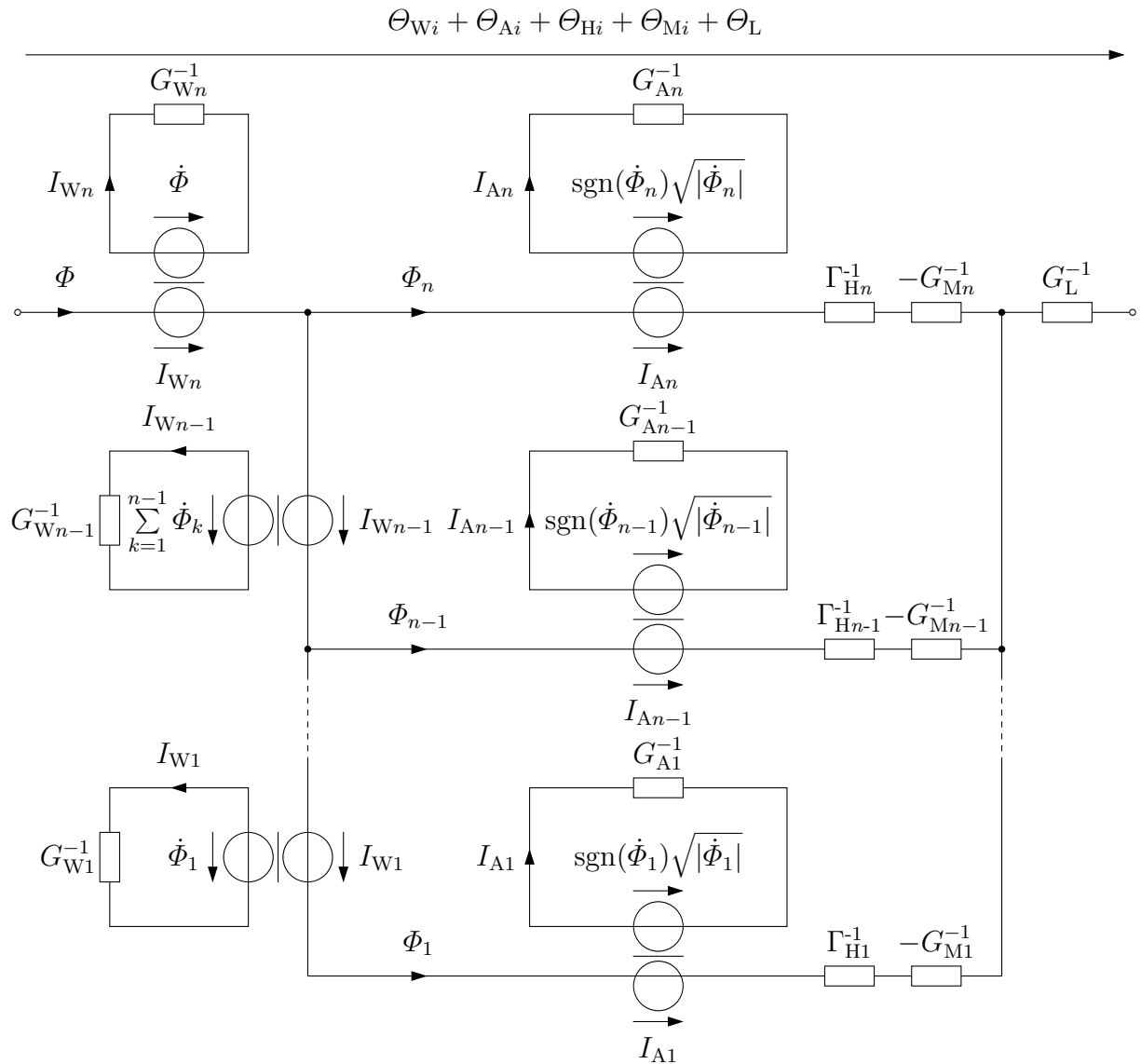


Bild 4.37: Schematisches Ersatzschaltbild für das Schalenmodell der Ordnung n

Zweigen. Dadurch teilt sich der Gesamtfluss $\Phi(t)$ gemäß der Bedingung

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(t) \quad (4.217)$$

in die Teilflüsse $\Phi_1(t) \dots \Phi_n(t)$ auf. Die Nummerierung erfolgt wie in Abbildung 4.35 vom Inneren des Leiters zu seinem Rand hin aufsteigend. In Analogie zum dynamischen Kernmodell für eine Flussröhre können jeder Flussröhre des Schalenmodells, den jeweiligen geometrischen Abmessungen entsprechend, die Leitwerte für das ratenunabhängige Hystereseverhalten, für die Moving-Term-Kompensation, für die Austauscheffekte und für die klassischen Wirbelströme zugeordnet werden. Sie lauten in dieser Reihenfolge $\Gamma_{H_i}[\Phi_i](t)$, G_{M_i} , $G_{A_i}(\Phi_i(t))$ und $G_{W_i}(\Phi_i(t))$ mit $i = 1 \dots n$. Die Austauschvorgänge sind wie die der ra-

tenunabhängigen Hysterese zugrunde liegenden Barkhausen-Sprünge ebenfalls Domänenprozesse, weshalb sie im Gegensatz zu den von der Domänenstruktur unabhängigen klassischen Wirbelströmen als lokal wirkende ratenabhängige Effekte modelliert werden. Der Leitwert zur Berücksichtigung eines Luftspaltes bleibt gegenüber dem des eindimensionalen dynamischen Modells unverändert, da sich die Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen innerhalb des Luftspaltes nicht fortsetzt. Mithin ist G_L^{-1} im Ersatzschaltbild in Serie zum Netzwerk des Schalenmodells zu schalten. Für die zugehörige magnetische Durchflutung $\Theta_L(t)$ gilt deshalb auch im Zusammenhang mit dem hier beschriebenen Modell die Gleichung (4.168). Die schalenspezifischen Anteile der magnetischen Durchflutung infolge ratenunabhängiger Hysterese

$$\Theta_{Hi}(t) = \Gamma_{Hi}^{-1}[\Phi_i](t) \quad ; \quad i = 1 \dots n, \quad (4.218)$$

zur Moving-Term-Kompensation

$$\Theta_{Mi}(t) = -G_{Mi}^{-1}\Phi_i(t) \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.219)$$

sowie infolge von Austauscheffekten

$$\Theta_{Ai}(t) = I_{Ai}(t) \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.220)$$

mit

$$I_{Ai}(t) = G_{Ai}(\Phi_i(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}_i(t)) \sqrt{|\dot{\Phi}_i(t)|} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.221)$$

werden durch die Leitwerte der jeweiligen Schalen bestimmt. Die den klassischen Wirbelströmen zuzuordnenden Durchflutungen resultieren aus

$$\Theta_{Wi}(t) = \sum_{j=i}^n I_{Wj}(t) \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.222)$$

mit

$$I_{Wi}(t) = G_{Wi}(\Phi_i(t)) \sum_{k=1}^i \dot{\Phi}_k(t) \quad ; \quad i = 1 \dots n. \quad (4.223)$$

Das zur Berücksichtigung der Flussverdrängung um ein Schalenmodell der Ordnung n erweiterte dynamische Kernmodell wird folglich durch ein System von n Gleichungen mit

$$\begin{aligned} \Theta(t) = & \Gamma_{Hi}^{-1}[\Phi_i](t) + G_{Ai}(\Phi_i(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}_i(t)) \sqrt{|\dot{\Phi}_i(t)|} \\ & + \sum_{j=i}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) \sum_{k=1}^j \dot{\Phi}_k(t) - G_{Mi}^{-1}\Phi_i(t) + G_L^{-1}\Phi(t) \quad ; \quad i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (4.224)$$

beschrieben. An die Stelle der Gleichung (4.173) tritt somit die vektorielle Kerndifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) := & \Theta(t) - \Gamma_H^{-1}[\Phi](t) - \mathbf{G}_A(\Phi(t))\Gamma_A(\dot{\Phi}(t)) \\ & - \mathbf{G}_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t) + \mathbf{G}_M^{-1}\Phi(t) - \mathbf{G}_L^{-1}\Phi(t) = \mathbf{o} \end{aligned} \quad (4.225)$$

mit dem Vektor der Systemfunktionen

$$\mathbf{f}_{\Delta\theta}^T(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) = \left(f_{\Delta\theta_1}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) \quad f_{\Delta\theta_2}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) \quad \dots \quad f_{\Delta\theta_n}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) \right),$$

dem Vektor der magnetischen Flüsse

$$\Phi^T(t) = \left(\Phi_1(t) \quad \Phi_2(t) \quad \dots \quad \Phi_n(t) \right),$$

dem Vektor der ersten zeitlichen Ableitungen dieser Flüsse

$$\dot{\Phi}^T(t) = \left(\dot{\Phi}_1(t) \quad \dot{\Phi}_2(t) \quad \dots \quad \dot{\Phi}_n(t) \right),$$

dem Vektor der Wurzelfunktionen des Austauschanteils

$$\Gamma_A^T(\dot{\Phi}(t)) = \left(\operatorname{sgn}(\dot{\Phi}_1(t))\sqrt{|\dot{\Phi}_1(t)|} \quad \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}_2(t))\sqrt{|\dot{\Phi}_2(t)|} \quad \dots \quad \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}_n(t))\sqrt{|\dot{\Phi}_n(t)|} \right)$$

und dem Vektor der magnetischen Durchflutungen

$$\Theta^T(t) = \left(\Theta(t) \quad \Theta(t) \quad \dots \quad \Theta(t) \right).$$

Des Weiteren sind die inversen magnetischen Leitwerte für das ratenunabhängige Hystereseverhalten zu dem Vektor

$$\Gamma_H^{-1T}[\Phi](t) = \left(\Gamma_{H1}^{-1}[\Phi_1](t) \quad \Gamma_{H2}^{-1}[\Phi_2](t) \quad \dots \quad \Gamma_{Hn}^{-1}[\Phi_n](t) \right),$$

die Austauschleitwerte zu der Matrix

$$\mathbf{G}_A(\Phi(t)) = \begin{pmatrix} G_{A1}(\Phi_1(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{A2}(\Phi_2(t)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G_{An}(\Phi_n(t)) \end{pmatrix},$$

die Wirbelstromleitwerte zu der Matrix

$$\mathbf{G}_W(\Phi(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) & \sum_{j=2}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) & \dots & \sum_{j=n}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) \\ \sum_{j=2}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) & \sum_{j=2}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sum_{j=n}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) \\ \sum_{j=n}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) & \dots & \sum_{j=n}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) & \sum_{j=n}^n G_{Wj}(\Phi_j(t)) \end{pmatrix},$$

die inversen Leitwerte zur Moving-Term-Kompensation zu der Matrix

$$\mathbf{G}_M^{-1} = \begin{pmatrix} G_{M1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{M2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G_{Mn}^{-1} \end{pmatrix}$$

und die inversen Leitwerte zur Berücksichtigung eines Luftspaltes zu der Matrix

$$\mathbf{G}_L^{-1} = \begin{pmatrix} G_L^{-1} & \cdots & G_L^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_L^{-1} & \cdots & G_L^{-1} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst. Der Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge ratenunabhängiger Hysterese

$$\boldsymbol{\Theta}_H^T(t) = \left(\Theta_{H1}(t) \quad \Theta_{H2}(t) \quad \cdots \quad \Theta_{Hn}(t) \right)$$

resultiert dann aus

$$\boldsymbol{\Theta}_H(t) = \boldsymbol{\Gamma}_H^{-1}[\boldsymbol{\Phi}](t), \quad (4.226)$$

der Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge von Austauscheffekten

$$\boldsymbol{\Theta}_A^T(t) = \left(\Theta_{A1}(t) \quad \Theta_{A2}(t) \quad \cdots \quad \Theta_{An}(t) \right)$$

aus

$$\boldsymbol{\Theta}_A(t) = \mathbf{G}_A(\boldsymbol{\Phi}(t))\boldsymbol{\Gamma}_A(\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)), \quad (4.227)$$

der Vektor der magnetischen Durchflutungen infolge von klassischen Wirbelströmen

$$\boldsymbol{\Theta}_W^T(t) = \left(\Theta_{W1}(t) \quad \Theta_{W2}(t) \quad \cdots \quad \Theta_{Wn}(t) \right)$$

aus

$$\boldsymbol{\Theta}_W(t) = \mathbf{G}_W(\boldsymbol{\Phi}(t))\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t), \quad (4.228)$$

der Vektor der magnetischen Durchflutungen zur Moving-Term-Kompensation

$$\boldsymbol{\Theta}_M^T(t) = \left(\Theta_{M1}(t) \quad \Theta_{M2}(t) \quad \cdots \quad \Theta_{Mn}(t) \right)$$

aus

$$\boldsymbol{\Theta}_M(t) = -\mathbf{G}_M^{-1}\boldsymbol{\Phi}(t) \quad (4.229)$$

und der Vektor der dem Luftspalt zuzuordnenden magnetischen Durchflutungen

$$\boldsymbol{\Theta}_L^T(t) = \left(\Theta_L(t) \quad \Theta_L(t) \quad \cdots \quad \Theta_L(t) \right)$$

schließlich aus

$$\boldsymbol{\Theta}_L(t) = \mathbf{G}_L^{-1}\boldsymbol{\Phi}(t). \quad (4.230)$$

Das Lösen des mehrdimensionalen Nullstellenproblems $\mathbf{f}_{\Delta\theta}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) = \mathbf{o}$ kann ebenfalls mit dem gedämpften Newton-Verfahren aus Kapitel 4.3.2 erfolgen. Anstelle der eindimensionalen Ableitung gemäß Gleichung (4.175) ist dann die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\Delta\theta}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) &:= \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}_j} f_{\Delta\theta i}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) \right)_{i=1\dots n, j=1\dots n} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}_1} f_{\Delta\theta 1}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}_n} f_{\Delta\theta 1}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}_1} f_{\Delta\theta n}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}_n} f_{\Delta\theta n}(\boldsymbol{\Phi}(t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) \end{pmatrix} \\ &= -\mathbf{G}_A(\boldsymbol{\Phi}(t))\mathbf{J}_{\Gamma_A}(\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)) - \mathbf{G}_W(\boldsymbol{\Phi}(t)) \end{aligned} \quad (4.231)$$

mit

$$\mathbf{J}_{\Gamma_A}(\dot{\Phi}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{|\dot{\Phi}_1(t)|}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{|\dot{\Phi}_2(t)|}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2\sqrt{|\dot{\Phi}_n(t)|}} \end{pmatrix}$$

heranzuziehen. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{J}_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)}) \Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)} = -\mathbf{f}_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)}) \quad (4.232)$$

bringt den Vektor der Newton-Korrekturen

$$\Delta\dot{\Phi}^T(t) = (\Delta\dot{\Phi}_1(t) \quad \Delta\dot{\Phi}_2(t) \quad \dots \quad \Delta\dot{\Phi}_n(t))$$

hervor, mit dem sich analog zum eindimensionalen Fall unter Verwendung des Dämpfungsfaktors w_i die neue Näherung

$$\dot{\Phi}(t)^{(i+1)} = \dot{\Phi}(t)^{(i)} + w_i \Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)} \quad (4.233)$$

bestimmen lässt. Dabei bleibt auch die Dämpfungsstrategie unverändert. Zum einen besteht das Entscheidungskriterium für die Wahl von w_i nach [DR08] und [DH08] weiterhin im natürlichen Monotonietest

$$\|\overline{\Delta\dot{\Phi}}(t)^{(i+1)}\|_2 \leq C_{w_i} \|\Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)}\|_2 \quad ; \quad C_{w_i} < 1 \quad (4.234)$$

mit dem Vektor der vereinfachten Newton-Korrekturen

$$\overline{\Delta\dot{\Phi}}^T(t) = (\overline{\Delta\dot{\Phi}}_1(t) \quad \overline{\Delta\dot{\Phi}}_2(t) \quad \dots \quad \overline{\Delta\dot{\Phi}}_n(t)) ,$$

der sich ohne eine zusätzliche Berechnung der Jacobi-Matrix durch das Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{J}_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)}) \overline{\Delta\dot{\Phi}}(t)^{(i+1)} = -\mathbf{f}_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i)} + w_i \Delta\dot{\Phi}(t)^{(i)}) \quad (4.235)$$

ermitteln lässt. Zum anderen werden die vom Iterationsverlauf abhängigen Werte, die die Parameter C_{w_i} und w_i annehmen, mit derselben Logik variiert. Die durch die Genauigkeitsschranke $\Delta\Theta_\varepsilon$ festgelegte Abbruchbedingung für das Iterationsverfahren lautet nun

$$\|\mathbf{f}_{\Delta\Theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^{(i+1)})\|_2 \leq \Delta\Theta_\varepsilon . \quad (4.236)$$

Mit dem Ziel, die Anzahl an Iterationen im Allgemeinen möglichst gering zu halten, empfiehlt es sich, zu Beginn jedes Iterationsvorganges für einen Zeitpunkt t_j mit $t_0 < t_j \leq t_E$ als Iterationsstartwert gemäß $\dot{\Phi}(t_j)^{(0)} = \dot{\Phi}(t_{j-1})$ mit $t_{j-1} < t_j$ den Vektor $\dot{\Phi}(t_{j-1})$ des um einen Zeitschritt zurück liegenden Zeitpunktes t_{j-1} zu verwenden. Für den allerersten Iterationsvorgang stellt $\dot{\Phi}(t_0)^{(0)} = \mathbf{o}$ eine zweckmäßige Wahl dar.

Nach [GK02] besitzt das Newton-Verfahren bei dem Lösen des mehrdimensionalen Nullstellenproblems $\mathbf{f}_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) = \mathbf{o}$ lokal eine mindestens superlineare Konvergenzrate, wenn $\mathbf{f}_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))$ stetig in einem Intervall differenzierbar ist, das die gesuchte Nullstelle $\dot{\Phi}(t)^*$ im Inneren enthält, und außerdem $\mathbf{J}_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)^*)$ regulär ist. Die stetige Differenzierbarkeit lässt sich, wie bei dem ratenabhängigen Kernmodell für eine Flussröhre, durch die polynomielle Approximation der einzelnen Wurzelfunktionen mittels der in Anhang B hergeleiteten Beziehung sicherstellen und die Regularität der Jacobi-Matrix ist den Untersuchungen in Anhang C zufolge stets gegeben. Damit sind die Voraussetzungen für die Stabilität und ein schnelles Konvergenzverhalten des mehrdimensionalen gedämpften Newton-Verfahrens erfüllt.

Die Einbeziehung der Flussverdrängung mittels des Schalenmodells ermöglicht somit eine signifikante Erweiterung des Gültigkeitsbereiches des ratenabhängigen dynamischen Kernmodells aus Kapitel 4.3.2 bei gleichzeitigem Erhalt der numerischen Stabilität sowie der Möglichkeit einer robusten Integration in ein übergeordnetes System. Die Flexibilität im Hinblick auf die Wahl der Schalenanzahl erlaubt es zudem, in einfacher Weise einen der Simulationsaufgabe angepassten Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit zu finden. Auch deshalb ist die Netzwerkmethod im Vergleich zu anderen Verfahren, wie etwa der Finite-Elemente-Methode, als besonders effizient anzusehen. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, dass die Literatur zahlreiche Möglichkeiten einer zusätzlichen Effizienzsteigerung im Hinblick auf das numerische Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme aufzeigt. Mehr Informationen zu diesem umfangreichen Themengebiet findet der Leser zum Beispiel in der Fachliteratur [DR08], [DH08] und [SK11].

Die Abbildung 4.38 stellt das Signalfussmodell des mittels Schalenmodell erweiterten dynamischen Kernmodells dar. Im Vergleich zum Signalfussmodell des ratenabhängigen Kernmodells ohne Berücksichtigung von Flussverdrängung zeigt sich der wesentliche Unterschied erwartungsgemäß in der Verwendung von mehrdimensionalen anstelle von skalaren Größen. Daher wird bei der Integration des Modells in einen Regelkreis, der eine Vorgabe des magnetischen Gesamtsollflusses $\Phi_{\text{soll}}(t)$ ermöglicht, bei der Signalführung eine Summenbildung bezüglich der Teilflüsse notwendig. Aufgrund der hier verwendeten Magnetkernpartitionierung mit konzentrischen Flussröhren, die die betragsmäßig gleichen Querschnittsflächen

$$A_i = \frac{A_e}{n} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.237)$$

besitzen, erfolgt die Umrechnung der Flüsse $\Phi(t)$ und der zugehörigen zeitlichen Ableitungen $\dot{\Phi}(t)$ in die magnetischen Flussdichten

$$\mathbf{B}^T(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) & \dots & B_n(t) \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden zeitlichen Ableitungen

$$\dot{\mathbf{B}}^T(t) = \begin{pmatrix} \dot{B}_1(t) & \dot{B}_2(t) & \dots & \dot{B}_n(t) \end{pmatrix}$$

durch die Multiplikation mit dem Faktor $\frac{n}{A_e}$. Im Sinne einer kompakten Darstellung werden die Größen

$$\Theta_{AW}(t) = \Theta_A(t) + \Theta_W(t) \quad (4.238)$$

sowie

$$\Gamma_{AW}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)) = G_A(\Phi(t))\Gamma_A(\dot{\Phi}(t)) + G_W(\Phi(t))\dot{\Phi}(t) \quad (4.239)$$

eingeführt, woraus folgt

$$\Theta_{AW}(t) = \Gamma_{AW}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t)). \quad (4.240)$$

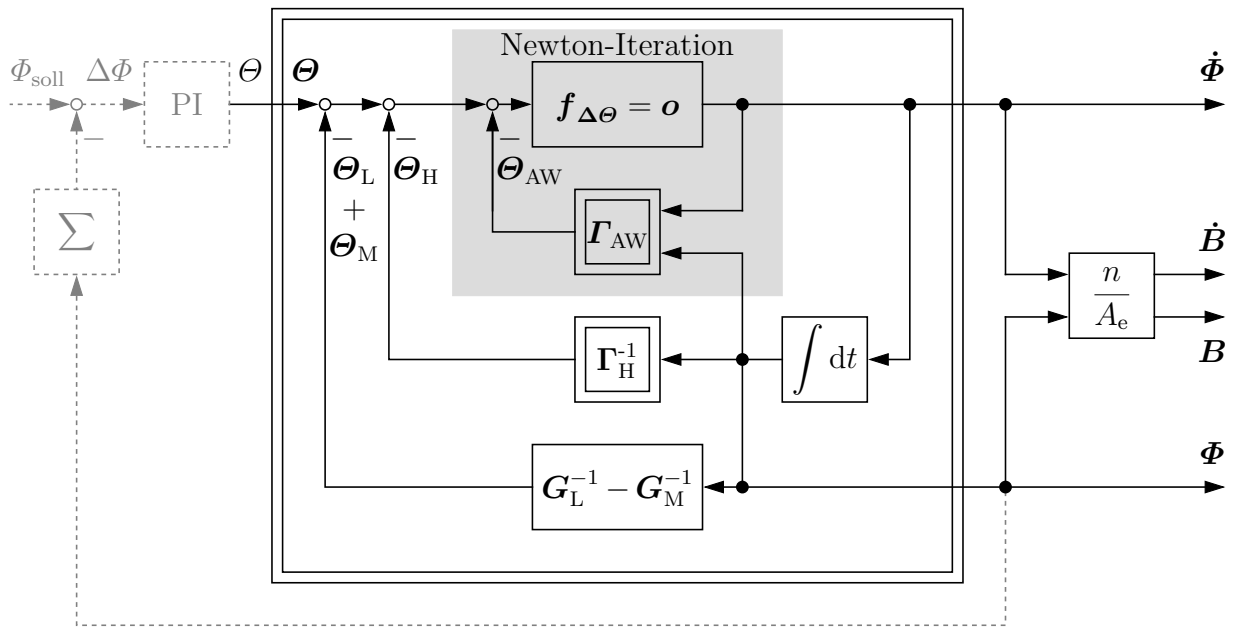


Bild 4.38: Signalflussdarstellung des dynamischen Kernmodells mit Berücksichtigung der Flussverdrängung

Bei der Parametrierung des erweiterten dynamischen Kernmodells gehen dieselben Materialparameter wie bei der Parametrierung des dynamischen Kernmodells ohne Berücksichtigung von Flussverdrängung ein, sodass die zuvor beschriebenen Charakterisierungsmethoden für das ratenunabhängige und das ratenabhängige Materialverhalten unverändert eingesetzt werden können. Die Unterschiede zeigen sich auf der Systemebene. Zum einen werden die inversen Leitwerte $\Gamma_{H1}^{-1} \dots \Gamma_{Hn}^{-1}$ für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten und $G_{M1}^{-1} \dots G_{Mn}^{-1}$ für die Moving-Term-Kompensation sowie die Austauschleitwerte $G_{A1} \dots G_{An}$ offenkundig nicht mit der Gesamtkernquerschnittsfläche A_e , sondern gemäß (4.237) mit den Querschnittsflächen $\frac{A_e}{n}$ der einzelnen Flussröhren gebildet. Zum anderen erfolgt die Bestimmung der Wirbelstromleitwerte nun auf der Grundlage fiktiver dünner Schichten, in denen sich die Wirbelströme, die eigentlich das gesamte Vollmaterial durchdringen, konzentrieren sollen. Mit den Flächeninhalten $A_{W1} \dots A_{Wn}$ der von den realen Wirbelströmen durchsetzten Teilquerschnittsflächen des magnetischen Leiters, die im Folgenden auch als Wirbelstromflächen bezeichnet werden, sowie den Weglängen der Wirbelströme $l_{W1} \dots l_{Wn}$ entlang der gedachten Wirbelstromschichten lässt sich der allgemeine

Zusammenhang

$$G_{W_i}(\Phi_i(t)) = \sigma(\Phi_i(t)) \frac{A_{W_i}}{l_{W_i}} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.241)$$

zur Berechnung der Wirbelstromleitwerte herstellen. Dabei gilt für die vom Teilfluss $\Phi_i(t)$ abhängige Leitfähigkeit

$$\sigma(\Phi_i(t)) = \sigma_0 + \sigma_1 \left(\frac{\Phi_i(t)}{A_i} \right)^2. \quad (4.242)$$

Die Abbildung 4.39 deutet die Wirbelstromflächen, ihre Begrenzungsradien $r_{W1} \dots r_{W3}$ und die Schalenradien $r_1 \dots r_3$ für ein Schalenmodell der Ordnung $n = 3$ bei einer Partitionierung mit betragsmäßig gleichen Querschnittsflächen der Flussröhren an. Sonach ergeben sich die Flächeninhalte der inneren Wirbelstromflächen bei einem Mehrschalenmodell aus

$$A_{W_i} = l_e(r_{W_{i+1}} - r_{W_i}) \quad ; \quad i = 1 \dots n - 1 \quad (4.243)$$

und der Flächeninhalt der äußersten Wirbelstromfläche, oder der einzigen, wenn ein ein-dimensionales Modell zur Anwendung kommt, aus

$$A_{W_n} = l_e(r_n - r_{W_n}). \quad (4.244)$$

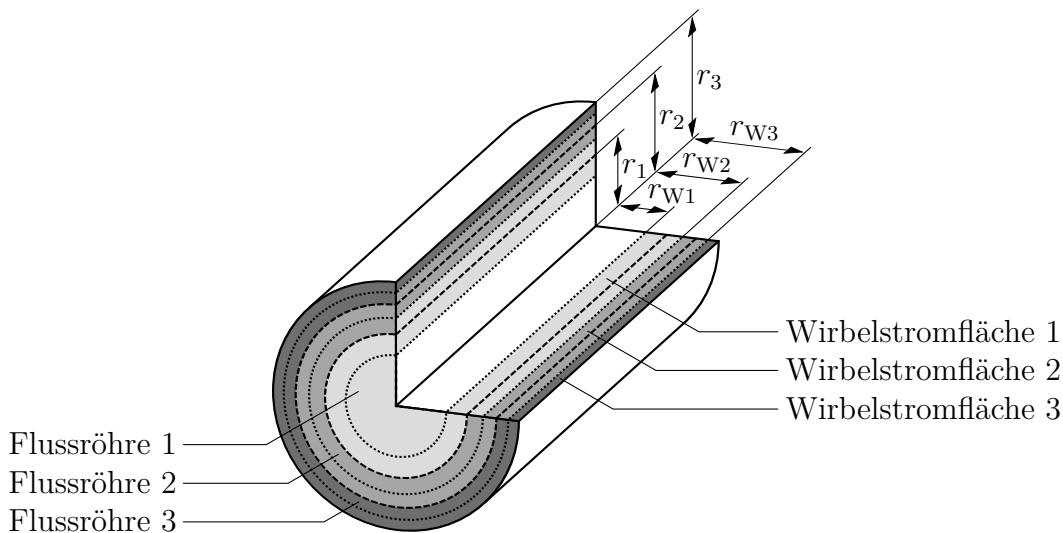


Bild 4.39: Flussröhren mit betragsmäßig gleichen Querschnittsflächen und zugehörige Wirbelstromflächen am Beispiel eines Schalenmodells dritter Ordnung

Nach Schwer werden die Wirbelstromflächen $1 \dots n - 1$ anhand der gemittelten Wanddicken der jeweils unmittelbar angrenzenden Flussröhren bestimmt, wobei eine Flächenhälfte den Außenbereich der jeweils inneren Flussröhre und die andere Flächenhälfte den Innenbereich der weiter außen liegenden Flussröhre überstreicht. Die äußerste Wirbelstromfläche ist nur halb so breit wie die anderen und erstreckt sich über den äußeren Bereich der n -ten Flussröhre. Es seien $r_{W1}^* \dots r_{Wn}^*$ die Wirbelstromflächenbegrenzungsradien und $r_1^* \dots r_n^*$ die

Schalenradien des Schwer-Modells mit der Ordnung n . Dann resultiert der erste Begrenzungsradius der innersten Wirbelstromfläche, auch wenn nur ein eindimensionales Modell eingesetzt wird, aus

$$r_{W1}^* = \frac{r_1^*}{2}. \quad (4.245)$$

Bei einem Mehrschalenmodell berechnen sich die übrigen Begrenzungsradien der Wirbelstromflächen zu

$$r_{Wi}^* = \frac{r_{i-1}^* + r_i^*}{2} \quad ; \quad i = 2 \dots n. \quad (4.246)$$

Die mittleren Weglängen der zugehörigen Wirbelströme $l_{W1}^* \dots l_{Wn}^*$ ergeben sich aus den kreisförmigen Wirbelstrompfaden, die durch die Wirbelstromflächenmitten verlaufen. Da bei einem Mehrschalenmodell somit alle Pfade außer dem äußersten mit den Schalenbegrenzungen zusammenfallen, resultieren die zugehörigen Wirbelstromweglängen aus

$$l_{Wi}^* = 2\pi r_i^* \quad ; \quad i = 1 \dots n - 1. \quad (4.247)$$

Die Länge des n -ten Wirbelstrompfades ergibt sich bei der Verwendung mehrerer Schalen zu

$$l_{Wn}^* = 2\pi \frac{3r_n^* + r_{n-1}^*}{4} \quad (4.248)$$

und für $n = 1$ zu

$$l_{Wn}^* = 2\pi \frac{3r_n^*}{4}. \quad (4.249)$$

Die Vorgehensweise von Schwer soll jedoch nicht ohne Weiteres übernommen werden, da dies bei der hier verwendeten Magnetkernpartitionierung zu einem im Vergleich zum Schwer-Modell größeren Modellfehler führt.

Der in der vorliegenden Arbeit verfolgte Ansatz basiert daher auf der Annahme, dass sich die Schalenradien des Schwer-Modells mit gleichen Schalendicken und die Schalenradien des Modells mit betragsmäßig gleichen Schalenquerschnittsflächen in derselben Weise zueinander verhalten wie die Radien beider Modelle, die die Wirbelstromflächen und -pfade definieren. Aus diesem Grund wird nach einer Transformationsbeziehung gesucht, mit der alle Schalen- und Wirbelstromflächenbegrenzungsradien sowie die Weglängen der Wirbelstrompfade des Schwer-Modells in die entsprechenden Radien und Weglängen des hier verwendeten Modells umgerechnet werden können. Die Herleitung dieses Zusammenhangs erfolgt auf der Grundlage der allgemeinen Berechnungsvorschriften für die Schalenradien beider Modelle. Während die Schalenradien des Modells nach Schwer durch

$$r_i^* = \frac{i}{n} \sqrt{\frac{A_e}{\pi}} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.250)$$

definiert sind, berechnen sie sich bei einer Schalenaufteilung mit gleichen Querschnittsflächen aus

$$r_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \sqrt{\frac{A_e}{\pi}} \quad ; \quad i = 1 \dots n. \quad (4.251)$$

Der Ansatz für die Ableitung der zwischen den Radien beider Modelle bestehenden Transformationsbeziehung

$$r_i^* = \Omega(r_i)r_i \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.252)$$

führt mit der linearen Funktion

$$\Omega(r_i) = pr_i + q \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.253)$$

unter Einbeziehung von (4.250)-(4.251) auf die Parameter $p = \sqrt{\frac{\pi}{A_e}}$ sowie $q = 0$ und dadurch auf

$$\Omega(r_i) = \sqrt{\frac{\pi}{A_e}} r_i \quad ; \quad i = 1 \dots n. \quad (4.254)$$

Die gesuchten Abbildungen zur Transformation der Schalenradien lauten demzufolge

$$r_i^* = \sqrt{\frac{\pi}{A_e}} r_i^2 \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.255)$$

und insbesondere

$$r_i = \sqrt{r_i^* \sqrt{\frac{A_e}{\pi}}} \quad ; \quad i = 1 \dots n. \quad (4.256)$$

Das impliziert zudem die Abbildungen

$$r_{Wi} = \sqrt{r_{Wi}^* \sqrt{\frac{A_e}{\pi}}} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.257)$$

zur Transformation der Wirbelstromflächenbegrenzungsradien und

$$l_{Wi} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{Wi}^*}{2\pi} \sqrt{\frac{A_e}{\pi}}} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.258)$$

zur Umrechnung der Wirbelstrompfadweglängen. Das Schalenmodell mit betragsmäßig gleichen Flussröhrenquerschnittsflächen lässt sich so bereits vollständig parametrieren.

Mit der Partitionierung des magnetischen Leiters geht jedoch ein von der Schalenanzahl abhängiger Diskretisierungsfehler einher, der umso kleiner ist, je mehr Schalen das Modell besitzt, und für den theoretischen Fall $n \rightarrow \infty$ vollständig verschwindet. Zur Steigerung der Modellgüte soll dieser Fehlereinfluss anhand eines ebenfalls von der Schalenanzahl abhängigen Korrekturfaktors verringert werden. Seine Herleitung beruht auf der Annahme, dass die Gesamtverlustleistung infolge von klassischen Wirbelströmen $P_W(t)$ als die Summe der entsprechenden Einzelverlustleistungen $P_{Wi}(t)$, gemäß Abbildung 4.37 durch

$$\begin{aligned} P_W(t) &= \sum_{i=1}^n P_{Wi}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n I_{Wi}(t) \sum_{k=1}^i \dot{\Phi}_k(t) \\ &= \sum_{i=1}^n G_{Wi}(\Phi_i(t)) \left(\sum_{k=1}^i \dot{\Phi}_k(t) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.259)$$

gegeben, unabhängig von der Anzahl der verwendeten Schalen sein muss, wenn keine Flussverdrängung vorliegt. Die zuletzt genannte Bedingung hat bei einer Partitionierung mit Flussröhren betragsmäßig gleicher Querschnittsflächen nach (4.237) zur Folge, dass sich alle Teilflüsse entsprechend

$$\Phi_i(t) = \frac{\Phi(t)}{n} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.260)$$

gleichmäßig aufteilen. Anstelle der vom Teilfluss abhängigen Leitfähigkeit nach Gleichung (4.242) kann dann gemäß

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi_i(t)) &= \sigma_0 + \sigma_1 \left(\frac{\Phi_i(t)}{A_i} \right)^2 \\ &= \sigma_0 + \sigma_1 \left(\frac{\Phi(t)}{A_e} \right)^2 \\ &= \sigma(\Phi(t)) \end{aligned} \quad (4.261)$$

auch die vom Gesamtfluss abhängige Leitfähigkeit herangezogen werden. Wegen (4.260) und (4.261) in Verbindung mit (4.241) folgt aus (4.259) die Beziehung

$$P_W(t) = \sum_{i=1}^n G_{W_i}(\Phi(t)) \left(\frac{i}{n} \dot{\Phi}(t) \right)^2 . \quad (4.262)$$

Anhand dieses Zusammenhangs kann man den Wirbelstromgesamtleitwert

$$\begin{aligned} G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n) &= \frac{P_W(t)}{\dot{\Phi}(t)^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 G_{W_i}(\Phi(t)) \end{aligned} \quad (4.263)$$

definieren. Die Verlustleistung infolge klassischer Wirbelströme $P_W(t)$ ist bei einer homogenen Flussverteilung im Material demnach genau dann unabhängig von der Schalenanzahl n , wenn dies auch auf den Wirbelstromgesamtleitwert zutrifft. Es ist daher die Aufgabe, einen Korrekturfaktor $F_K(n)$ zu identifizieren, der den Einfluss von n auf $G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n)$ mittels einer Korrekturrechnung $G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n)F_K(n)$ kompensiert. Dazu wird der konkrete zwischen $G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n)$ und n bestehende Zusammenhang benötigt. Den Überlegungen in Anhang D zufolge ist er durch

$$\begin{aligned} G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n) &= \sigma(\Phi(t)) \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \frac{2}{\sqrt{2i} (\sqrt{2i+1} + \sqrt{2i-1})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{2n} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} + \frac{2}{\sqrt{4n-1} (\sqrt{4n} + \sqrt{4n-2})} \right) \end{aligned} \quad (4.264)$$

gegeben. Folglich kann man damit in einem weiteren Schritt unter der Annahme einer gegen unendlich strebenden Anzahl von Schalen den Referenzgesamtleitwert bestimmen.

Betrachtet man im ersten Summand des Klammerausdrucks den Faktor $\frac{1}{n^2}$ im Zusammenhang mit dem Summenausdruck, so zeigt sich, dass mit $n \rightarrow \infty$ nur für große Werte von i nennenswerte Beiträge entstehen. Die Einsen in den beiden Wurzelausdrücken sind dann irrelevant und können entfallen. Der zweite und der dritte Summand im Klammerausdruck sind für ein unendlich großes n vollständig vernachlässigbar. Die Grenzwertbetrachtung führt damit zunächst auf

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_{\text{Wges}}(\Phi(t), n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\Phi(t)) \frac{l_e}{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \frac{2}{\sqrt{2i} (\sqrt{2i} + \sqrt{2i})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\Phi(t)) \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n i \right) \end{aligned} \quad (4.265)$$

und unter Zuhilfenahme der Gaußschen Summenformel

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4.266)$$

erhält man letztlich den Referenzgesamtleitwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_{\text{Wges}}(\Phi(t), n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\Phi(t)) \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{2n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \sigma(\Phi(t)) \frac{l_e}{8\pi}. \end{aligned} \quad (4.267)$$

Der Vergleich mit dem Wirbelstromleitwert des eindimensionalen Modells aus Kapitel 4.3.2 zeigt anhand von

$$\begin{aligned} G_{\text{W}}(\Phi(t)) &= G_{0\text{W}} + G_{1\text{W}} \Phi(t)^2 \\ &= g_{0\text{W}} \frac{l_e}{A_e} + g_{1\text{W}} \frac{l_e}{A_e^3} \Phi(t)^2 \\ &= \sigma_0 F_{\text{G}} \frac{l_e}{A_e} + \sigma_1 F_{\text{G}} \frac{l_e}{A_e^3} \Phi(t)^2 \\ &= \sigma(\Phi(t)) \frac{l_e}{8\pi} \end{aligned}$$

eine Übereinstimmung und damit auch die Konsistenz der im Rahmen dieser Arbeit getroffenen Annahmen zur Bildung der Wirbelstromleitwerte. Es lässt sich nun ein allgemeiner Korrekturfaktor

$$F_{\text{K}}(n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\text{Wges}}(\Phi(t), n)}{G_{\text{Wges}}(\Phi(t), n)} \quad (4.268)$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\text{K}}(n) = 1$ zur Kompensation des Diskretisierungsfehlers bei einer endlichen Anzahl von Schalen ableiten. Unter Verwendung der durch (4.264) und (4.267) gegebenen

Beziehungen resultiert er aus

$$F_K(n) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \frac{2}{\sqrt{2i} (\sqrt{2i+1} + \sqrt{2i-1})} - \frac{2}{\sqrt{2n} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} + \frac{2}{\sqrt{4n-1} (\sqrt{4n} + \sqrt{4n-2})} \right)^{-1}. \quad (4.269)$$

Damit erhält man den von der Schalenanzahl unabhängigen Wirbelstromgesamtleitwert

$$G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t)) = G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n) F_K(n). \quad (4.270)$$

Weil (4.263) auch die Beziehung

$$G_{W_{\text{ges}}}(\Phi(t), n) F_K(n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 G_{W_i}(\Phi(t)) F_K(n) \quad (4.271)$$

begründet, kann die Kalibrierung des Schalenmodells nun dadurch erfolgen, dass jeder der Wirbelstromeinzelleitwerte gemäß

$$G_{W_i}(\Phi_i(t)) = \sigma(\Phi_i(t)) \frac{A_{W_i}}{l_{W_i}} F_K(n) \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (4.272)$$

anhand einer zusätzlichen Multiplikation mit $F_K(n)$ gebildet wird.

4.3.4 Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit

Im Allgemeinen sind induktive Bauelemente in leistungselektronischen Schaltungen aufgrund von Eigenerwärmung und veränderlichen Umgebungsbedingungen schwankenden Temperaturen ausgesetzt. Da deren ferromagnetische Kernmaterialien in Bezug auf ihre magnetischen und elektrischen Eigenschaften eine signifikante Temperaturabhängigkeit aufweisen können, empfiehlt es sich, dies im Rahmen der Modellierung zu berücksichtigen. Eine wesentliche Voraussetzung ist aber weiterhin, dass die Magnetisierungsvorgänge auf Zeitskalen stattfinden, die sehr kurz gegenüber den thermischen Zeitkonstanten des betrachteten magnetischen Systems sind, sodass innerhalb einer magnetischen Periode in guter Näherung $\frac{dT}{dt} = 0$ angenommen werden kann. In der Praxis ist diese Bedingung wegen der hohen Betriebsfrequenzen im Magnetkreis und der vergleichsweise großen thermischen Zeitkonstanten der für gewöhnlich eingesetzten Magnetkerne in der Regel sehr gut erfüllt. Der Betrieb ist unter diesen Bedingungen als quasi-isotherm auf der Zeitskala des Magnetfeldes zu betrachten, weshalb die thermische Domäne in der Energiebilanz vernachlässigt werden darf und somit die Temperatur nur als Parameter eingeht.

Die Abbildung 4.40 stellt mögliche Auswirkungen des Temperatureinflusses auf die ratenunabhängigen und ratenabhängigen Magnetisierungs- und Verlustprozesse anhand von

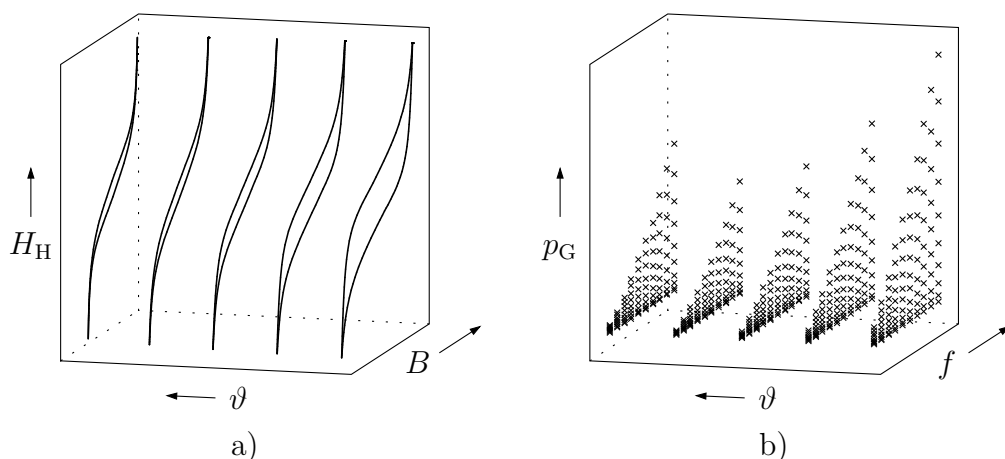


Bild 4.40: Ratenunabhängige Hysteresekurven und ratenabhängige Kernverlustleistungsdichten für fünf Temperaturstützstellen

- Ratenunabhängige Hysteresekurven bei betragsmäßig gleichen Maximalamplituden der magnetischen Erregung
- Gesamtverlustleistungsdichtekennfeld mit zehn Frequenzstufen und je zehn Amplitudenstufen pro Temperaturstützstelle

Hysteresekurven und eines Gesamtverlustleistungsdichtekennfeldes für verschiedene Temperaturstufen einer Messdatenbasis schematisch dar. Die Größe ϑ beschreibt dabei die Celsius-Temperatur. Ein solches angedeutetes Verhalten ist beispielsweise charakteristisch für Ferritmaterialien innerhalb eines Temperaturbereiches von -40°C bis 140°C .

Für eine entsprechende Erweiterung des Kernmodells werden die Gewichte der Prandtl-Ishlinskii-Teilmodelle, gegebenenfalls der Moving-Parameter k , die elektrische Leitfähigkeit des Materials σ mit σ_0 und σ_1 sowie der Parameter zur Gewichtung des Einflusses von Austauschereffekten λ als temperaturabhängig angenommen. Je nachdem, ob der Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensator Γ_{HSH}^{-1} oder der Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensator $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ zur Anwendung kommt, betrifft das die Gewichte $\mathbf{v}_H, \mathbf{v}'_H, \mathbf{w}'_H$ oder $\mathbf{v}_{\text{H1}}, \mathbf{v}'_{\text{H1}}, \mathbf{v}'_{\text{H2}}, \mathbf{w}_H, \mathbf{w}'_H$, also neben den eigentlichen Gewichten der jeweiligen Kompensatoren auch die Gewichte, die nur im Rahmen der zugehörigen Identifikationsprozesse Anwendung finden. Die Eigenschaft der Temperaturabhängigkeit überträgt sich außerdem auf die Schwellen \mathbf{s}'_H und im anderen Fall auf $\mathbf{s}'_{\text{H1}}, \mathbf{r}_H$, da diese nach den Ausführungen der Kapitel 4.2.3 und 4.2.4 aus Transformationen mit den nun temperaturabhängigen Modellgewichten \mathbf{v}_H beziehungsweise $\mathbf{v}_{\text{H1}}, \mathbf{w}'_H$ hervorgehen. Im Gegensatz dazu bleiben die für die Synthese des Modells Γ_{HSH}^{-1} benötigten Schwellenwerte $\mathbf{s}_H, \mathbf{r}'_H$ und die für die Synthese des Modells $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ erforderlichen Schwellenwerte $\mathbf{s}_{\text{H1}}, \mathbf{s}'_{\text{H2}}, \mathbf{r}'_H$ wegen der direkten Bestimmung im Identifikationsprozess unabhängig von der Temperatur. In diesem Zusammenhang sei auch noch einmal auf die Abbildungen 4.18 und 4.19b sowie 4.23 und 4.24b hingewiesen.

Stehen die jeweiligen temperaturabhängigen Modellparameter der synthetisierten Kompensatoren, also $\mathbf{s}'_H, \mathbf{v}'_H, \mathbf{w}'_H$ oder $\mathbf{s}'_{\text{H1}}, \mathbf{v}'_{\text{H1}}, \mathbf{v}'_{\text{H2}}, \mathbf{w}'_H$, gegebenenfalls der Moving-Parameter

sowie die Parameter für das ratenabhängige Materialverhalten erst einmal als Stützwerte zu mehreren Temperaturstützstellen zur Verfügung, so lässt sich der Temperatureinfluss mittels Interpolation auch zwischen den Stützpunkten effizient approximieren. Nach [Kuh08] genügt bei der Verwendung einer linearen Interpolationsformel die strenge Monotonie des Hysterese Modells in den Temperaturstützstellen, um zudem die strenge Monotonie und damit die Invertierbarkeit zwischen den Stützstellen zu gewährleisten. Die Größe $\chi(\vartheta)$ repräsentiere einen eindimensionalen und $\boldsymbol{\chi}(\vartheta)$ stehe für einen vektoriellen von der Celsius-Temperatur ϑ abhängigen Modellparameter. Mit den Q Stützstellen bildenden Temperaturstufen, die sich in aufsteigender Reihenfolge durch $\vartheta_1 \dots \vartheta_Q$ ausdrücken, kann die stückweise lineare Interpolation in Anlehnung an [Kuh08] für eindimensionale Modellparameter dann mithilfe von

$$\chi(\vartheta) = \begin{cases} \chi(\vartheta_1) & ; \vartheta < \vartheta_1 \\ \chi(\vartheta_i) + \frac{\chi(\vartheta_{i+1}) - \chi(\vartheta_i)}{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}(\vartheta - \vartheta_i) & ; \vartheta_i \leq \vartheta < \vartheta_{i+1} \\ \chi(\vartheta_Q) & ; \vartheta \geq \vartheta_Q \end{cases} \quad (4.273)$$

und für vektorielle Modellparameter anhand von

$$\boldsymbol{\chi}(\vartheta) = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}(\vartheta_1) & ; \vartheta < \vartheta_1 \\ \boldsymbol{\chi}(\vartheta_i) + \frac{\boldsymbol{\chi}(\vartheta_{i+1}) - \boldsymbol{\chi}(\vartheta_i)}{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}(\vartheta - \vartheta_i) & ; \vartheta_i \leq \vartheta < \vartheta_{i+1} \\ \boldsymbol{\chi}(\vartheta_Q) & ; \vartheta \geq \vartheta_Q \end{cases} \quad (4.274)$$

mit

$$i = 1 \dots Q - 1$$

erfolgen.

Das Vorliegen geeigneter Messdaten zu ratenunabhängigen und ratenabhängigen Hysteresekurven bei verschiedenen Temperaturen vorausgesetzt, ist die Modellparameteridentifikation des um die Temperaturabhängigkeit erweiterten Kernmodells dadurch zu erzielen, dass die Parametrierungsmethoden des temperaturunabhängigen Modells zur Erzeugung der Stützwerte auf die Daten jeder einzelnen Temperaturstützstelle der Messdatenbasis angewendet werden. Eine Ausnahme stellt dabei die Berechnung der vorzugebenden Schwellwerte der Prandtl-Ishlinskii-Teilmodelle $\boldsymbol{s}_H, \boldsymbol{r}'_H$ für die Synthese von $\Gamma_{HS_H}^{-1}$ oder $\boldsymbol{s}_{H1}, \boldsymbol{s}'_{H2}, \boldsymbol{r}'_H$ für die Synthese von $\Gamma_{HS_{HS}}^{-1}$ dar. Sie ist nur einmal für alle Temperaturstufen zusammen auszuführen. Dazu werden für die ratenunabhängigen Hysteresekurven jeder Temperaturstufe zunächst die auftretenden Minimal- sowie die Maximalamplituden der magnetischen Erregungen beziehungsweise der magnetischen Induktionen bestimmt. Davon sind dann die betragsmäßig kleinsten Extremwerte der Ein- und Ausgangssignale zur Verteilung der Schwellen heranzuziehen. Durch dieses Vorgehen ist zum einen die Einhaltung der in [AK11] behandelten Dilatationsbedingung bezüglich \boldsymbol{r}'_H gemäß (4.125) sichergestellt und zum anderen, dass während des Identifikationsprozesses über alle Temperaturstufen hinweg alle Schwellwerte von den entsprechenden Signalamplituden überstrichen werden.

4.4 Kernverlustberechnung

Die präzise Vorhersage der im Betrieb entstehenden hysteresebehafteten Kernverluste stellt ein wesentliches Element für die optimierte Auslegung induktiver Bauelemente der Leistungselektronik dar. Der zentrale Gegenstand dieses Kapitels ist daher das Aufzeigen entsprechender Berechnungsmethoden mit den zugehörigen Vor- und Nachteilen. Die Zusammenhänge werden mit den Größen auf Feldebene für ein Kernmodell mit einer flussführenden Röhre formuliert. Sie lassen sich uneingeschränkt auf die Systemebene sowie ein Mehrschalenmodell übertragen.

Während die mit den Austauscheffekten und klassischen Wirbelströmen korrespondierenden volumenspezifischen Momentanleistungsanteile $H_A(t) \frac{d}{dt} B(t)$ und $H_W(t) \frac{d}{dt} B(t)$ stets vollständig dissipativ sind und deshalb zu jedem Zeitpunkt unmittelbar die ratenabhängigen Momentanverlustkomponenten

$$p_A(t) = H_A(t) \frac{d}{dt} B(t) \geq 0 \quad (4.275)$$

sowie

$$p_W(t) = H_W(t) \frac{d}{dt} B(t) \geq 0 \quad (4.276)$$

widerspiegeln, beschreibt der auf das Volumen bezogene Momentanleistungsanteil infolge ratenunabhängiger Hysterese $H_H(t) \frac{d}{dt} B(t)$ nach Gleichung (2.27) die Summe eines dissipativen und eines reaktiven Bestandteils gemäß

$$H_H(t) \frac{d}{dt} B(t) = p_H(t) + \frac{d}{dt} F_V(t) \quad (4.277)$$

mit

$$p_H(t) \geq 0. \quad (4.278)$$

Dies hat zur Folge, dass die volumenspezifischen ratenunabhängigen Kernverluste und somit auch die volumenspezifischen Gesamtkernverluste nicht ohne Weiteres für beliebige Signalverläufe auf der Basis der zugehörigen Momentanleistungsdichten berechnet werden können. Ausschließlich bei periodischen Signalen lässt sich der Einfluss des Blindleistungsanteils $\frac{d}{dt} F_V(t)$ rechnerisch durch eine Mittelwertbildung über exakt eine Signalperiode eliminieren, sodass die mittleren volumenspezifischen Gesamtkernverluste in diesem Fall aus

$$p_G = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H(t) \frac{d}{dt} B(t) dt \quad (4.279)$$

oder (2.25) zufolge aus

$$p_G = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_H(t) \frac{d}{dt} B(t) dt + \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_A(t) \frac{d}{dt} B(t) dt + \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_W(t) \frac{d}{dt} B(t) dt \quad (4.280)$$

zu berechnen sind. Neben der Einschränkung auf periodische Signale besteht ein weiterer Nachteil dieser Berechnungsmethode in der hohen Sensitivität, die sie gegenüber Fehlern bei der zeitlichen Mittelung aufweist, wenn der reaktive Anteil groß gegenüber dem dissipativen Anteil ist. Dann können schon sehr kleine Abweichungen von der korrekten Periodendauer die Genauigkeit der so berechneten Kernverluste erheblich beeinträchtigen.

Diese Defizite lassen sich umgehen, wenn anstelle des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells das Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell mit hinreichender Qualität zur Modellierung des ratenunabhängigen Materialverhaltens eingesetzt werden kann. Denn in bisher noch nicht publizierten Abhandlungen, die im Zuge dieser Arbeit durch eine Kooperation mit P. Krejčí entstanden sind ([KK13, KK14]), wird ein Dissipationsmodell auf der Grundlage des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodells vorgestellt, das es erlaubt, die dissipative und die reaktive Komponente der ratenunabhängigen Momentanleistungsdichte voneinander entkoppelt für jeden Zeitpunkt und somit für allgemeine, auch sich nicht in regelmäßigen Abständen wiederholende Signale explizit zu bestimmen. In der Folge lassen sich die Gesamtkernverluste ebenso in jedem Zeitschritt für beliebige Zeitsignale ermitteln. Weil die nun optionale Berechnung der mittleren Kernverluste damit zudem unabhängig vom reaktiven Anteil erfolgen kann, ist sie deutlich robuster gegenüber Fehlern infolge einer begrenzten zeitlichen Auflösung. Der einzige Nachteil besteht darin, dass diese Berechnungsmethode nur in Verbindung mit dem Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell zur Anwendung kommen kann, weil ein äquivalentes Dissipationsmodell für das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell bisher nicht existiert.

Die Herleitung des Dissipationsmodells für das Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell ist thermodynamisch motiviert. Den Ausgangspunkt bilden die aus dem Energieerhaltungssatz und dem Entropiesatz hervorgehenden Zusammenhänge (2.1) und (2.4). In Analogie zu den in 2.2 angestellten Überlegungen ist nach einer Verknüpfung beider Beziehungen eine Legendre-Transformation der inneren Energie U nach der Entropie S auszuführen, sodass sich anstelle von U die Helmholtzsche freie Energie F als thermodynamisches Potential heranziehen lässt. Geht man nun auf volumenbezogene Größen über und erfolgt die Beschreibung der volumenspezifischen magnetischen Arbeit auf der Grundlage der thermodynamisch konjugierten Variablen H_H und B , resultiert daraus die Dissipationsungleichung

$$H_H(t) \frac{d}{dt} B(t) - \frac{d}{dt} F_V(t) - S_V(t) \frac{d}{dt} T(t) \geq 0. \quad (4.281)$$

Den Ausführungen in Abschnitt 4.3.4 zufolge ist in der Regel von einem quasi-isothermen Betrieb auszugehen. Das Produkt aus der volumenbezogenen Entropie S_V und der zeitlichen Ableitung der absoluten Temperatur T kann daher entfallen. Es ergibt sich die Beziehung

$$H_H(t) \frac{d}{dt} B(t) - \frac{d}{dt} F_V(t) \geq 0, \quad (4.282)$$

die die Gleichungen (2.27) und (4.277) begründet. Wird darin $B(t)$ gemäß

$$B(t) = H[S[H_H]](t) \quad (4.283)$$

als die Ausgangsgröße des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators formuliert, führt das auf

$$H_H(t) \frac{d}{dt} H[S[H_H]](t) - \frac{d}{dt} F_V(t) \geq 0. \quad (4.284)$$

Mit der Definition der Ausgangsgröße des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators

$$v(t) := S[H_H](t) \quad (4.285)$$

sowie dem zugehörigen inversen Zusammenhang

$$H_H(t) = S^{-1}[v](t) \quad (4.286)$$

kann man auch schreiben

$$S^{-1}[v](t) \frac{d}{dt} H[v](t) - \frac{d}{dt} F_V(t) \geq 0, \quad (4.287)$$

und mit der Definition des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators H nach Gleichung (4.42) erhält man in einem weiteren Schritt

$$- \frac{d}{dt} F_V(t) + S^{-1}[v](t) w_{H0} \frac{d}{dt} v(t) + S^{-1}[v](t) \int_0^\infty w_H(r_H) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) dr_H \geq 0. \quad (4.288)$$

Die Verwendung einer Nullergänzung gemäß

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} F_V(t) + S^{-1}[v](t) w_{H0} \frac{d}{dt} v(t) + \int_0^\infty w_H(r_H) S^{-1}[z_H](r_H, t) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) dr_H \\ + \int_0^\infty w_H(r_H) \left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_H, t) \right) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) dr_H \geq 0 \end{aligned} \quad (4.289)$$

führt mithilfe von

$$J(v(t)) = w_{H0} \int_0^{v(t)} S^{-1}[\xi] d\xi \quad (4.290)$$

und

$$Q(z_H(r_H, t)) = \int_0^\infty w_H(r_H) \int_0^{z_H(r_H, t)} S^{-1}[\xi] d\xi dr_H \quad (4.291)$$

wegen

$$\frac{d}{dt} J(v(t)) = \frac{d}{dv} J(v(t)) \frac{d}{dt} v(t) \quad (4.292)$$

sowie

$$\frac{d}{dt} Q(z_H(r_H, t)) = \frac{d}{dz_H} Q(z_H(r_H, t)) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) \quad (4.293)$$

schließlich auf

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(-F_V(t) + J(v(t)) + Q(z_H(r_H, t))) \\ & + \int_0^\infty w_H(r_H) \left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_H, t) \right) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) dr_H \geq 0. \end{aligned} \quad (4.294)$$

Darin beschreibt der Ausdruck $\frac{d}{dt}(J(v(t)) + Q(z_H(r_H, t)))$ die zeitliche Ableitung einer Potentialfunktion. Nun lässt sich anhand der Gleichungen (4.30) und (4.31) für die zeitliche Entwicklung des Ausgangssignals des Playoperators infolge eines stückweise monotonen Eingangssignals nachvollziehen, dass für alle möglichen Eingangssignale die Ungleichung

$$\frac{d}{dt} H_{r_H}[v, z_{H0}(r_H)](t) \left(v(t) - H_{r_H}[v, z_{H0}(r_H)](t) \right) \geq 0 \quad (4.295)$$

erfüllt ist. Da die mit den entsprechenden Nebenbedingungen geforderte streng monoton steigende Charakteristik von S^{-1} angesichts

$$\frac{d}{dv} S^{-1}[v](t) > 0 \quad (4.296)$$

und

$$\frac{d}{dz_H} S^{-1}[z_H](r_H, t) > 0 \quad (4.297)$$

die stete Vorzeichengleichheit

$$\operatorname{sgn} \left(v(t) - H_{r_H}[v, z_{H0}(r_H)](t) \right) = \operatorname{sgn} \left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_H, t) \right) \quad (4.298)$$

sichert, folgt unter Einbeziehung von (4.43) aus (4.295) auch

$$\left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_H, t) \right) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) \geq 0. \quad (4.299)$$

Zudem wird verlangt, dass die Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators die Nebenbedingung

$$w_H(r_H) > 0 \quad (4.300)$$

einhalten, weshalb auch der gesamte Integralausdruck in (4.294) der Ungleichung

$$\int_0^\infty w_H(r_H) \left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_H, t) \right) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) dr_H \geq 0 \quad (4.301)$$

gehört. Damit (4.294) stets erfüllt ist, muss $\frac{d}{dt}(-F_V(t) + J(v(t)) + Q(z_H(r_H, t)))$ gerade null sein und somit für die zeitliche Ableitung der Potentialfunktion

$$\frac{d}{dt}(J(v(t)) + Q(z_H(r_H, t))) = \frac{d}{dt} F_V(t) \quad (4.302)$$

gelten. Die Ungleichung (4.294) beschreibt also die Aufspaltung der volumenbezogenen Momentanleistung $H_H(t) \frac{d}{dt} B(t)$ in einen reaktiven Anteil mit

$$F_V(v(t), z_H(r_H, t)) = J(v(t)) + Q(z_H(r_H, t)) + C, \quad (4.303)$$

wobei C eine Integrationskonstante darstellt, sowie einen dissipativen Anteil

$$p_H(v(t), z_H(r_H, t), \frac{d}{dt} z_H(r_H, t)) = \int_0^\infty w_H(r_H) \left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_H, t) \right) \frac{d}{dt} z_H(r_H, t) dr_H \quad (4.304)$$

zur Berechnung der volumenspezifischen Verlustleistung infolge ratenunabhängiger Hysterese, der in schwellwertdiskreter Form

$$p_H(v(t), z_H(r_{H_i}, t), \frac{d}{dt} z_H(r_{H_i}, t)) = \sum_{i=1}^m w_{H_i} \left(S^{-1}[v](t) - S^{-1}[z_H](r_{H_i}, t) \right) \frac{d}{dt} z_H(r_{H_i}, t) \quad (4.305)$$

lautet. Die hergeleiteten Beziehungen gelten sowohl im Zusammenhang mit dem Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator als auch in Verbindung mit dem zugehörigen Kompensatormodell.

Die Berechnungsvorschrift für $p_H(v(t), z_H(r_{H_i}, t), \frac{d}{dt} z_H(r_{H_i}, t))$ ist darüber hinaus auch bei der Verwendung einer Moving-Erweiterung zur Anwendung geeignet, denn die damit einhergehende Transformation des Hystereseomodells mit dem Moving-Term ist verlusterhaltend. Das soll zunächst für das Vorwärtsmodell gezeigt werden. Da die nachstehenden Überlegungen auf jeden beliebigen Hystereseoperator übertragbar sind, bezeichne Γ im Folgenden einen allgemeinen Hystereseoperator und Γ_M entspreche dem zugehörigen Modell mit Moving-Erweiterung gemäß Abbildung 4.41.

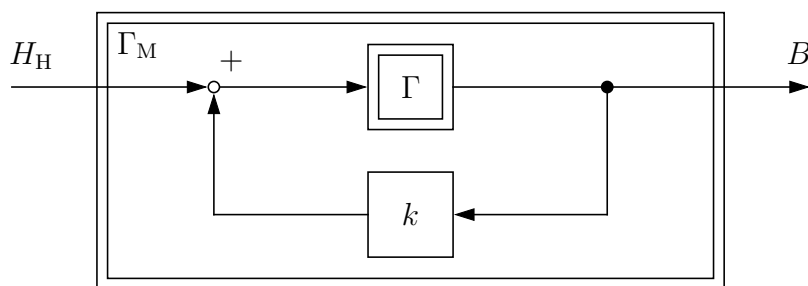


Bild 4.41: Blockdiagramm eines allgemeinen Hystereseoperators Γ mit Moving-Erweiterung

Drückt man den Zusammenhang zwischen $H_H(t)$ und $B(t)$ entsprechend

$$B(t) = \Gamma_M[H_H](t) \quad (4.306)$$

durch den allgemeinen Hystereseoperator mit Moving-Erweiterung Γ_M aus, lässt sich ausgehend von (4.282) auch schreiben

$$H_H(t) \frac{d}{dt} \Gamma_M[H_H](t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma_M}(t) \geq 0. \quad (4.307)$$

Darin ist $F_{V\Gamma_M}(t)$ die volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz in Bezug auf das Modell Γ_M . Die Verwendung von

$$\Gamma_M[H_H](t) = \Gamma[H_H + kB](t) \quad (4.308)$$

führt in einem weiteren Schritt auf

$$H_H(t) \frac{d}{dt} \Gamma[H_H + kB](t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma_M}(t) \geq 0. \quad (4.309)$$

Mit der Definition der Eingangsfunktion von Γ gemäß

$$u(t) := H_H(t) + kB(t) \quad (4.310)$$

sowie der daraus abzuleitenden Beziehung

$$H_H(t) = u(t) - kB(t) \quad (4.311)$$

gelangt man nun über

$$(u(t) - kB(t)) \frac{d}{dt} \Gamma[u](t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma_M}(t) \geq 0 \quad (4.312)$$

zu

$$u(t) \frac{d}{dt} \Gamma[u](t) - kB(t) \frac{d}{dt} \Gamma[u](t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma_M}(t) \geq 0. \quad (4.313)$$

Bei den entstandenen Termen handelt es sich zum einen um die Momentangesamtleistungsdichte bezüglich des allgemeinen Hystereseoperators $u(t) \frac{d}{dt} \Gamma[u](t)$ und zum anderen um zwei Komponenten, die der zeitlichen Ableitung einer Potentialfunktion $\frac{d}{dt} (F_{V\Gamma_M}(t) + \frac{1}{2}kB(t) \Gamma^2[u](t))$ entsprechen. Anstelle von (4.313) kann man also auch schreiben

$$u(t) \frac{d}{dt} \Gamma[u](t) - \frac{d}{dt} \left(F_{V\Gamma_M}(t) + \frac{1}{2}kB(t) \Gamma^2[u](t) \right) \geq 0. \quad (4.314)$$

Die Potentialfunktion korrespondiert daher mit der volumenspezifischen freien Energie nach Helmholtz in Bezug auf das Modell Γ . Sie soll mit $F_{V\Gamma}(t)$ bezeichnet werden. Der zwischen $F_{V\Gamma}(t)$ und $F_{V\Gamma_M}(t)$ bestehende Zusammenhang ist folglich durch

$$F_{V\Gamma_M}(t) = F_{V\Gamma}(t) - \frac{1}{2}kB(t) \Gamma^2[u](t) \quad (4.315)$$

gegeben. Das bedeutet, dass der durch den Moving-Term bedingte Anteil in $u(t) \frac{d}{dt} \Gamma[u](t)$ dem Ausdruck $\frac{1}{2}kB(t) \frac{d}{dt} \Gamma^2[u](t)$ gleichkommt und ausschließlich reaktiv wirkt. Die im Zusammenhang mit dem Hystereseoperator Γ stehende volumenbezogene Verlustleistung $p_{H\Gamma}(t)$ ist deshalb gleich der volumenbezogenen Verlustleistung $p_{H\Gamma_M}(t)$, die mit dem Modell des um den Moving-Term erweiterten Hystereseoperators Γ_M einhergeht. Es gilt die Beziehung

$$p_{H\Gamma_M}(t) = p_{H\Gamma}(t). \quad (4.316)$$

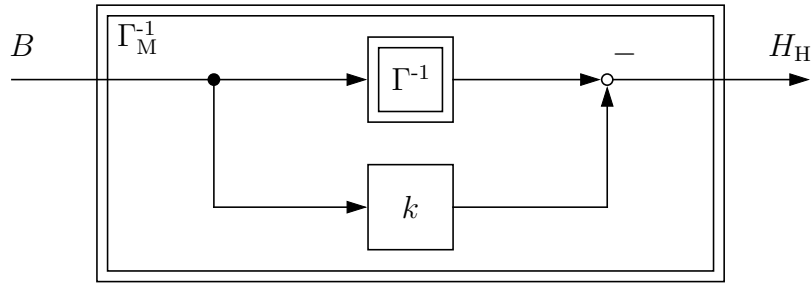


Bild 4.42: Blockdiagramm zur Moving-Term-Kompensation bei der Verwendung der Inversen Γ^{-1} eines allgemeinen Hystereseeoperators mit Moving-Erweiterung gemäß $\Gamma[H_H + kB]$

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für das Kompensatormodell nach Abbildung 4.42 anstellen. In diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen $H_H(t)$ und $B(t)$ gemäß

$$H_H(t) = \Gamma_M^{-1}[B](t) \quad (4.317)$$

durch den inversen allgemeinen Hystereseeoperator mit Moving-Erweiterung Γ_M^{-1} auszudrücken. Auf der Grundlage von (4.282) erhält man dann

$$\Gamma_M^{-1}[B](t) \frac{d}{dt} B(t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma_M^{-1}}(t) \geq 0, \quad (4.318)$$

wobei $F_{V\Gamma_M^{-1}}(t)$ die volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz bezüglich des Modells Γ_M^{-1} bezeichnet. Anschließend führt die Verwendung der Substitution

$$\Gamma_M^{-1}[B](t) = \Gamma^{-1}[B](t) - kB(t) \quad (4.319)$$

über

$$(\Gamma^{-1}[B](t) - kB(t)) \frac{d}{dt} B(t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma^{-1}}(t) \geq 0 \quad (4.320)$$

auf

$$\Gamma^{-1}[B](t) \frac{d}{dt} B(t) - kB(t) \frac{d}{dt} B(t) - \frac{d}{dt} F_{V\Gamma^{-1}}(t) \geq 0. \quad (4.321)$$

Darin beschreibt der Ausdruck $\Gamma^{-1}[B](t) \frac{d}{dt} B(t)$ die Momentangesamtleistungsdichte bezüglich des allgemeinen Hysteresekompensators Γ^{-1} und die beiden anderen Terme entsprechen der zeitlichen Ableitung einer Potentialfunktion $\frac{d}{dt}(F_{V\Gamma^{-1}}(t) + \frac{1}{2}kB(t)^2)$. Eine alternative Darstellung von (4.321) lautet demnach

$$\Gamma^{-1}[B](t) \frac{d}{dt} B(t) - \frac{d}{dt} \left(F_{V\Gamma^{-1}}(t) + \frac{1}{2}kB(t)^2 \right) \geq 0. \quad (4.322)$$

Es zeigt sich, dass die im Folgenden mit $F_{V\Gamma^{-1}}(t)$ bezeichnete Potentialfunktion die volumenspezifische freie Energie nach Helmholtz in Bezug auf das Modell Γ^{-1} wiedergibt. Zwischen $F_{V\Gamma^{-1}}(t)$ und $F_{V\Gamma_M^{-1}}(t)$ besteht dementsprechend die Relation

$$F_{V\Gamma_M^{-1}}(t) = F_{V\Gamma^{-1}}(t) - \frac{1}{2}kB(t)^2. \quad (4.323)$$

Der dem Moving-Term zuzuordnende Leistungsdichteanteil in $\Gamma^{-1}[B](t)\frac{d}{dt}B(t)$ korrespondiert folglich mit $\frac{1}{2}k\frac{d}{dt}B(t)^2$ und wirkt wie beim Vorwärtsmodell ausschließlich reaktiv. Die im Zusammenhang mit dem Hysteresekompensator Γ^{-1} stehende volumenbezogene Verlustleistung $p_{H\Gamma^{-1}}(t)$ stimmt deshalb mit jener überein, die mit dem Modell Γ_M^{-1} einhergeht. Die zuletzt Genannte erhält die Bezeichnung $p_{H\Gamma_M^{-1}}(t)$. Es gilt die Gleichung

$$p_{H\Gamma_M^{-1}}(t) = p_{H\Gamma^{-1}}(t). \quad (4.324)$$

4.5 Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen

Die Modellierung des elektromagnetischen Verhaltens einer induktiven Komponente kann nun dadurch erfolgen, dass das Kernmodell mit Modellen zur Beschreibung der Wicklungen gekoppelt wird. Dieser Abschnitt erläutert die prinzipielle Vorgehensweise exemplarisch unter Verwendung von einfachen Wicklungsmodellen. Dabei wird die in vielen Fällen gut erfüllte Annahme getroffen, dass die Wicklungen allein durch den magnetischen Hauptpfad miteinander gekoppelt sind.

In der Abbildung 4.43 ist das domänenübergreifende Ersatzschaltbild für eine allgemeine induktive Komponente mit m Primärwicklungen und n Sekundärwicklungen dargestellt. Jeder der Wicklungen ist jeweils ein elektrisches Netzwerk mit den entsprechenden felderzeugenden Primärströmen $I_{p1} \dots I_{pm}$ beziehungsweise Sekundärströmen $I_{s1} \dots I_{sn}$ sowie jeweils ein magnetisches Netzwerk zur Berücksichtigung der zugehörigen primärseitigen Streuflüsse $\Phi_{s,p1} \dots \Phi_{s,pm}$ beziehungsweise sekundärseitigen Streuflüsse $\Phi_{s,s1} \dots \Phi_{s,sn}$ zugeordnet. Diese Netzwerke sind gemeinsam mit einem weiteren elektromagnetischen Netzwerk zur Beschreibung des ferromagnetischen Kreises anhand von gekoppelten Quellen verbunden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier das Ersatzschaltbild für das eindimensionale Kernmodell gemäß Abbildung 4.36 genutzt. Es bezeichnet Φ_h den magnetischen Hauptfluss, der jede Wicklung durchsetzt. Die Größen $G_{s,p1} \dots G_{s,pm}$ und $G_{s,s1} \dots G_{s,sn}$ sind die den primärseitigen und sekundärseitigen Wicklungen zuzuordnenden Streuflussleitwerte. Weiterhin bezeichnen $U_{p1} \dots U_{pm}$ und $U_{s1} \dots U_{sn}$ die Primär- und Sekundärspannungen, $R_{Cu,p1} \dots R_{Cu,pm}$ und $R_{Cu,s1} \dots R_{Cu,sn}$ die Wicklungswiderstände der Primär- und Sekundärwicklungen sowie $N_{p1} \dots N_{pm}$ und $N_{s1} \dots N_{sn}$ die Primär- und Sekundärwindungszahlen. Die sekundärseitige Belastung wird durch die Außenwiderstände $R_{a1} \dots R_{an}$ bestimmt.

Die Systemgleichungen für die elektrischen und magnetischen Netzwerke der primärseitigen Wicklungen lassen sich damit zu

$$0 = -U_{pi}(t) + R_{Cu,pi}I_{pi}(t) + N_{pi}(\dot{\Phi}_h(t) + \dot{\Phi}_{s,pi}(t)) \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.325)$$

und

$$0 = -N_{pi}I_{pi}(t) + G_{s,pi}^{-1}\Phi_{s,pi}(t) \quad ; \quad i = 1 \dots m \quad (4.326)$$

herleiten. Durch die Kopplung beider Gleichungen erhält man die Differentialgleichungen

$$\dot{I}_{pi}(t) = -\frac{R_{Cu,pi}}{N_{pi}^2 G_{s,pi}} I_{pi}(t) + \frac{1}{N_{pi}^2 G_{s,pi}} U_{pi}(t) - \frac{1}{N_{pi} G_{s,pi}} \dot{\Phi}_h(t) \quad ; \quad i = 1 \dots m, \quad (4.327)$$

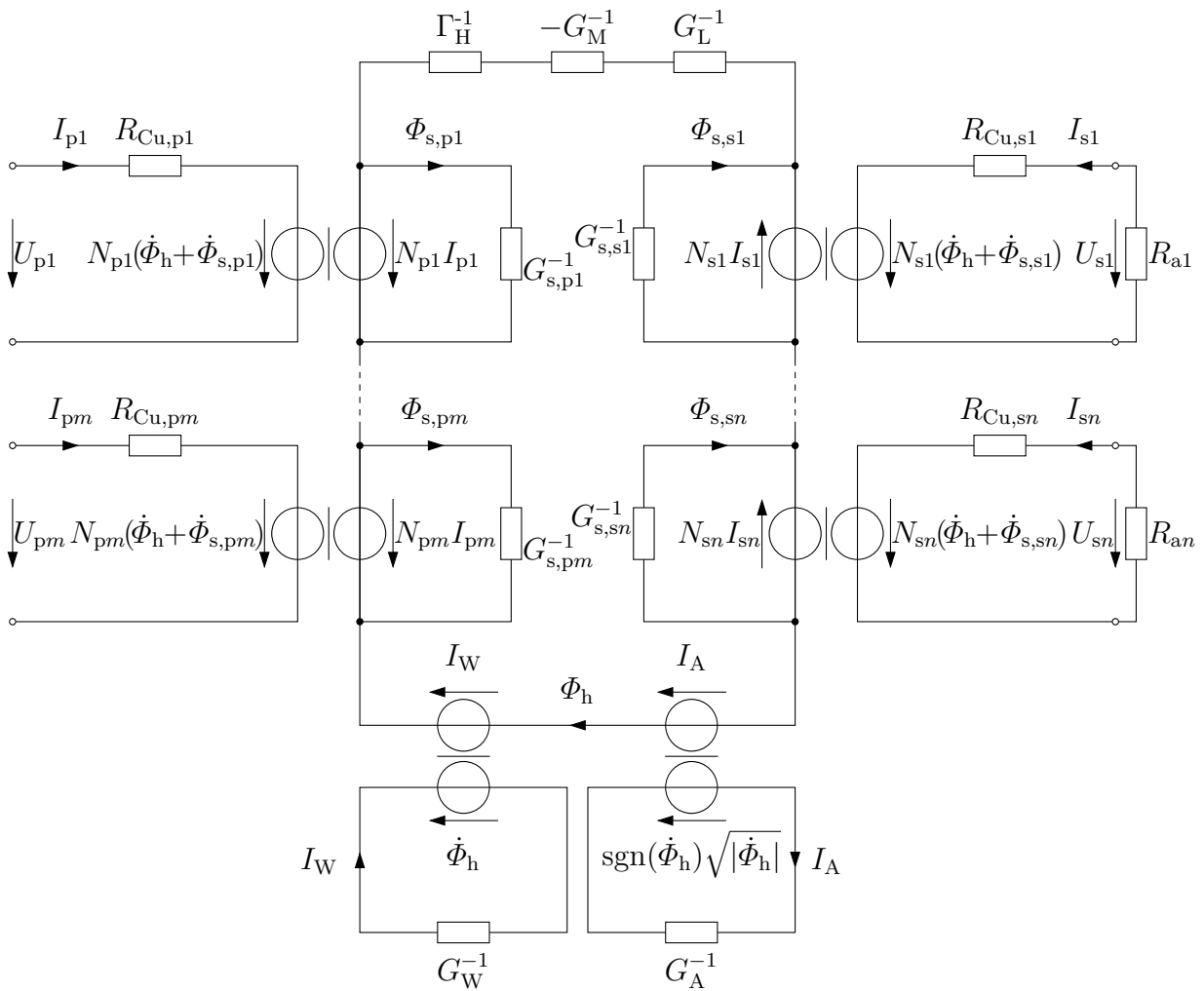


Bild 4.43: Exemplarische Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen zur Modellierung einer induktiven Komponente

die die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den primärseitigen Wicklungen und dem Magnetkreis abbilden. In Analogie dazu kann man die Systemgleichungen für die elektrischen und magnetischen Netzwerke der sekundärseitigen Wicklungen gemäß

$$0 = -U_{sj}(t) + R_{Cu,sj}I_{sj}(t) + N_{sj}(\dot{\Phi}_h(t) + \dot{\Phi}_{s,sj}(t)) \quad ; \quad j = 1 \dots n \quad (4.328)$$

und

$$0 = -N_{sj}I_{sj}(t) + G_{s,sj}^{-1}\dot{\Phi}_{s,sj}(t) \quad ; \quad j = 1 \dots n \quad (4.329)$$

formulieren. Deren Kopplung führt auf die Differentialgleichungen

$$\dot{I}_{sj}(t) = -\frac{R_{Cu,sj}}{N_{sj}^2 G_{s,sj}} I_{sj}(t) + \frac{1}{N_{sj}^2 G_{s,sj}} U_{sj}(t) - \frac{1}{N_{sj} G_{s,sj}} \dot{\Phi}_h(t) \quad ; \quad j = 1 \dots n \quad (4.330)$$

zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den sekundärseitigen Wicklungen und dem Magnetkreis. Für die über den Außenwiderständen anliegenden

Sekundärspannungen gilt außerdem

$$U_{sj}(t) = -R_{aj}I_{sj}(t) \quad ; \quad j = 1 \dots n. \quad (4.331)$$

Es ist zweckmäßig, diese Zusammenhänge in einer kompakten vektoriellen Darstellung anzugeben. Dazu werden die Koeffizientenmatrizen der Primär- und Sekundärspannungen

$$\mathbf{K}_{U_p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{p1}^2 G_{s,p1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_{p2}^2 G_{s,p2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N_{pm}^2 G_{s,pm}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{U_s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{s1}^2 G_{s,s1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_{s2}^2 G_{s,s2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N_{sn}^2 G_{s,sn}} \end{pmatrix},$$

die Koeffizientenmatrizen der Primär- und Sekundärströme

$$\mathbf{K}_{I_p} = \begin{pmatrix} \frac{R_{Cu,p1}}{N_{p1}^2 G_{s,p1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{R_{Cu,p2}}{N_{p2}^2 G_{s,p2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{R_{Cu,pm}}{N_{pm}^2 G_{s,pm}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{I_s} = \begin{pmatrix} \frac{R_{Cu,s1}}{N_{s1}^2 G_{s,s1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{R_{Cu,s2}}{N_{s2}^2 G_{s,s2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{R_{Cu,sn}}{N_{sn}^2 G_{s,sn}} \end{pmatrix}$$

und die Koeffizientenmatrizen der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse für die primärseitige und für die sekundärseitige Kopplung

$$\mathbf{K}_{\dot{\phi}_{h,p}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{p1} G_{s,p1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_{p2} G_{s,p2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N_{pm} G_{s,pm}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\dot{\phi}_{h,s}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{s1} G_{s,s1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_{s2} G_{s,s2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N_{sn} G_{s,sn}} \end{pmatrix}$$

eingeführt. Es lassen sich die Primärspannungen zu dem Vektor

$$\mathbf{U}_p^T(t) = (U_{p1}(t) \quad U_{p2}(t) \quad \dots \quad U_{pm}(t)),$$

die Sekundärspannungen zu dem Vektor

$$\mathbf{U}_s^T(t) = (U_{s1}(t) \quad U_{s2}(t) \quad \dots \quad U_{sn}(t)),$$

die Primärströme zu dem Vektor

$$\mathbf{I}_p^T(t) = (I_{p1}(t) \quad I_{p2}(t) \quad \dots \quad I_{pm}(t))$$

und die Sekundärströme zu dem Vektor

$$\mathbf{I}_s^T(t) = (I_{s1}(t) \quad I_{s2}(t) \quad \dots \quad I_{sn}(t))$$

zusammenfassen. Weiterhin ist der Vektor der zeitlichen Ableitungen der Primärströme durch

$$\dot{\mathbf{I}}_{\text{p}}^{\text{T}}(t) = \left(\dot{I}_{\text{p}1}(t) \quad \dot{I}_{\text{p}2}(t) \quad \dots \quad \dot{I}_{\text{p}m}(t) \right),$$

der Vektor der zeitlichen Ableitungen der Sekundärströme durch

$$\dot{\mathbf{I}}_{\text{s}}^{\text{T}}(t) = \left(\dot{I}_{\text{s}1}(t) \quad \dot{I}_{\text{s}2}(t) \quad \dots \quad \dot{I}_{\text{s}n}(t) \right)$$

und der Vektor der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse mit $m + n$ Einträgen durch

$$\dot{\Phi}_{\text{h}}^{\text{T}}(t) = \left(\dot{\Phi}_{\text{h}}(t) \quad \dot{\Phi}_{\text{h}}(t) \quad \dots \quad \dot{\Phi}_{\text{h}}(t) \right)$$

gegeben. Unter Verwendung der Nullmatrix \mathbf{O} kann man in einem weiteren Schritt mit

$$\mathbf{K}_U = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{U_{\text{p}}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_{U_{\text{s}}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{I_{\text{p}}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_{I_{\text{s}}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\dot{\Phi}_{\text{h}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\dot{\Phi}_{\text{h,p}}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_{\dot{\Phi}_{\text{h,s}}} \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrizen der Spannungen, der Ströme und der zeitlichen Ableitungen der magnetischen Hauptflüsse definieren. Fasst man außerdem die Vektoren der Primär- und Sekundärspannungen, der Primär- und Sekundärströme sowie der zeitlichen Ableitungen der Primär- und Sekundärströme zu

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{p}}(t) \\ \mathbf{U}_{\text{s}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\text{p}}(t) \\ \mathbf{I}_{\text{s}}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{I}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{\text{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{I}}_{\text{s}}(t) \end{pmatrix}$$

zusammen, lässt sich das Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den Wicklungen und dem Magnetkreis gemäß

$$\dot{\mathbf{I}}(t) = -\mathbf{K}_I \cdot \mathbf{I}(t) + \mathbf{K}_U \cdot \mathbf{U}(t) - \mathbf{K}_{\dot{\Phi}_{\text{h}}} \cdot \dot{\Phi}_{\text{h}}(t) \quad (4.332)$$

formulieren. Des Weiteren lautet der Zusammenhang (4.331) mit der Außenwiderstandsmatrix

$$\mathbf{R}_{\text{a}} = \begin{pmatrix} R_{\text{a}1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{\text{a}2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_{\text{a}n} \end{pmatrix}$$

in Vektorform

$$\mathbf{U}_{\text{s}}(t) = -\mathbf{R}_{\text{a}} \cdot \mathbf{I}_{\text{s}}(t). \quad (4.333)$$

In der Abbildung 4.44 ist die zum Differentialgleichungssystem (4.332) und die zur Ausgangsgleichung (4.333) zugehörige Signalflussdarstellung sowie die Kopplung mit dem Kernmodell aufgezeigt. Die primärseitig angelegten elektrischen Spannungen $\mathbf{U}_{\text{p}}(t)$ entsprechen dabei den Eingangsgrößen des allgemeinen Modells einer induktiven Komponente und die dadurch hervorgerufenen sekundärseitigen Spannungen $\mathbf{U}_{\text{s}}(t)$ sowie die primärseitigen und sekundärseitigen Ströme $\mathbf{I}_{\text{p}}(t)$ und $\mathbf{I}_{\text{s}}(t)$ bilden die elektrischen Ausgangsgrößen.

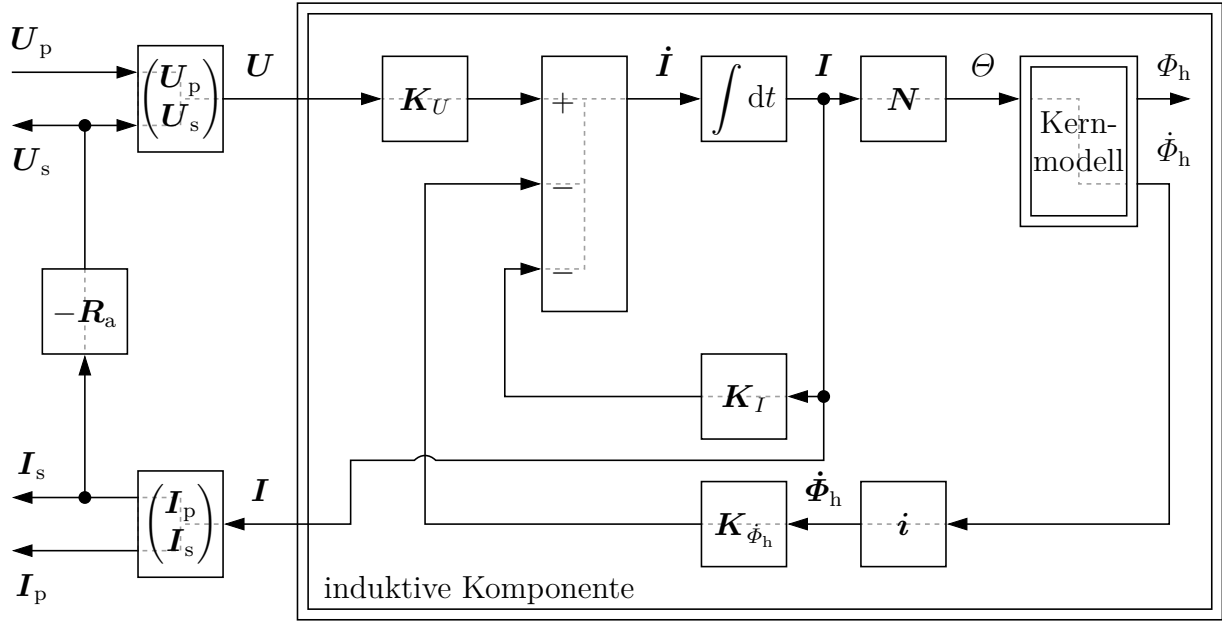


Bild 4.44: Signalflussdarstellung für die Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen zur Modellierung einer induktiven Komponente

Die magnetische Durchflutung als die Eingangsgröße des Kernmodells ergibt sich mit dem Vektor der Primärwindungszahlen

$$\mathbf{N}_p^T = (N_{p1} \ N_{p2} \ \dots \ N_{pm}) ,$$

dem Vektor der Sekundärwindungszahlen

$$\mathbf{N}_s^T = (N_{s1} \ N_{s2} \ \dots \ N_{sn})$$

und

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_s \end{pmatrix}$$

aus

$$\Theta(t) = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}(t) . \quad (4.334)$$

Anhand des in der Darstellung verwendeten Einsvektors \mathbf{i} , der $m + n$ Einträge besitzt, wird aus der skalaren Größe $\dot{\Phi}_h(t)$ der Vektor $\dot{\Phi}_h(t)$ gebildet. Die gestrichelten Linien kennzeichnen Übertragungspfade, die einen Durchgriff aufweisen. Die Integration im Kernmodell und jene im Wicklungsmodell bewirken in der zeitdiskreten Berechnung eine algebraische Entkopplung der magnetischen und elektrischen Ausgangsgrößen von den zugehörigen Eingangsgrößen, weshalb an diesen Stellen kein Durchgriff existiert. Somit gibt es keine algebraischen Schleifen. Die Modelle sind numerisch stabil und effizient sowie als Subsysteme robust in übergeordnete Systeme integrierbar.

5 Messungen und Ergebnisse

Zur Validierung der neuartigen, operatorbasierten Kernmodelle für das ferromagnetische Magnetisierungsverhalten, der zugehörigen Kernverlustberechnungsmethoden sowie des durch die Kopplung der Kern- und Wicklungsmodelle gebildeten Systemmodells zur Beschreibung einer induktiven Komponente werden im Rahmen dieses Kapitels reale Messdaten und simulierte Daten gegenübergestellt. Der erste Abschnitt behandelt die Kernmodelle für die Nachbildung der Hysterese- und Sättigungseffekte im ratenunabhängigen magnetischen Übertragungsverhalten sowie das Dissipationsmodell zur Berechnung der damit im Zusammenhang stehenden momentanen Kernverluste. Die Kernmodellerweiterungen für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten bilden den Schwerpunkt des zweiten Teils. Im letzten Abschnitt erfolgt schließlich die Validierung der gekoppelten Kern- und Wicklungsmodelle am Beispiel eines Ringkerntransformators. Bei den Untersuchungen werden die jeweiligen Eingangssignale vor der Verarbeitung durch die operatorbasierten Modelle auf ihre physikalische Dimension normiert. Den normierten Ausgangssignalen dieser Modelle werden wiederum gemäß ihrer physikalischen Interpretation die zugehörigen Dimensionen zugeordnet. Somit besitzen die operatorbasierten Modelle, ihrer phänomenologischen Natur entsprechend, die Dimension eins.

5.1 Kernmodelle und Dissipationsmodell für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten

Zunächst soll die Leistungsfähigkeit des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells und die des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells demonstriert werden. In diesem Zusammenhang ist weiterhin beispielgebend aufgezeigt, inwiefern die Genauigkeit dieser Modelle in Abhängigkeit des magnetischen Materials variieren kann und wie sie sich durch die Verwendung der Moving-Erweiterung verbessern lässt. Fehler bei der Modellierung der ratenunabhängigen Hysterese beeinträchtigen auch die Präzision der Kernmodellerweiterungen für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten, denn den Ausführungen in Kapitel 4.3.2 zufolge stellt die Bestimmung der volumenspezifischen Verlustleistung infolge ratenunabhängiger Hysterese einen wesentlichen Bestandteil bei der Modellparameteridentifikation des dynamischen Kernmodells dar. Aus diesem Grund soll hier an einem Beispiel auch quantitativ aufgezeigt werden, wie sensitiv die Berechnung dieses Verlustanteils in Bezug auf die genannten Modellierungsfehler ist. Zweckmäßigerweise erfolgt in diesem Zusammenhang zugleich die Validierung des Dissipationsmodells.

Die Abbildung 5.1 zeigt für drei Temperaturstufen zum einen die zur Modellparameteridentifikation verwendeten Messdaten, die das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten des

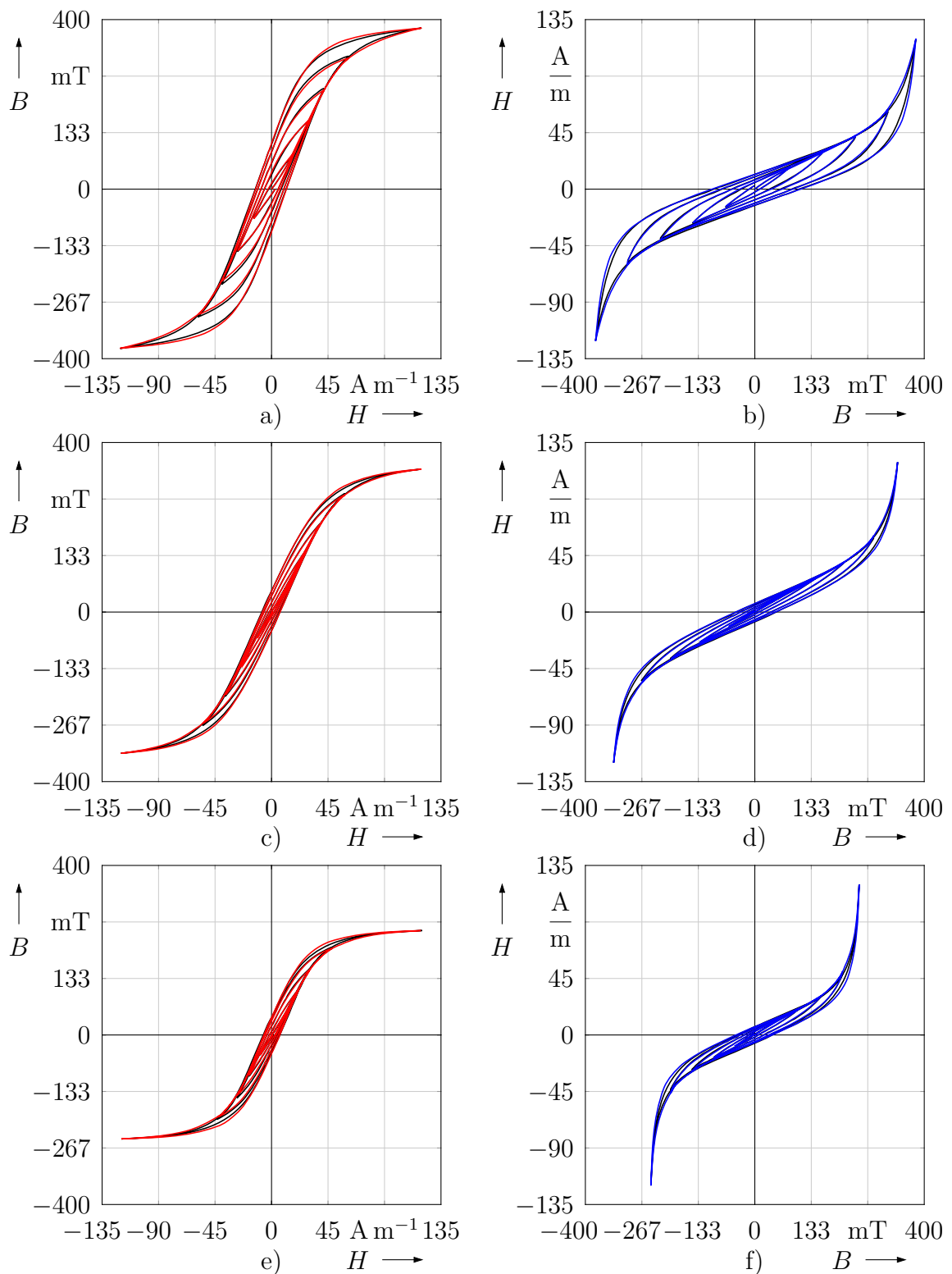


Bild 5.1: Messdaten und Trajektorien der identifizierten Modelle $\Gamma_{H_{SH}}$ und $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$

a) $\Gamma_{H_{SH}}$ für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ b) $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ c) $\Gamma_{H_{SH}}$ für $\vartheta = 80^\circ\text{C}$
d) $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ für $\vartheta = 80^\circ\text{C}$ e) $\Gamma_{H_{SH}}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$ f) $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$

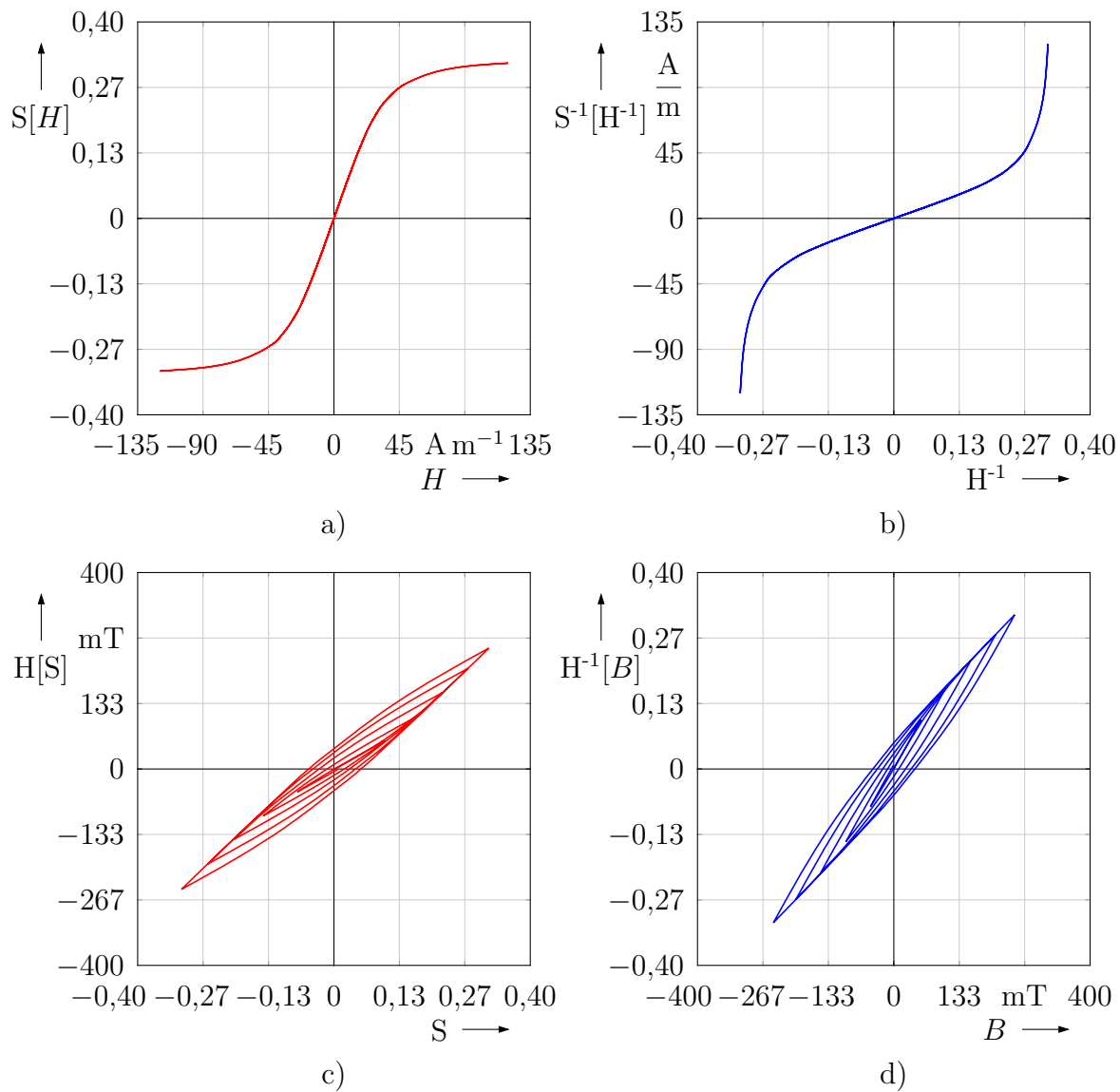


Bild 5.2: Trajektorien der identifizierten Teilmodelle von Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} für $\vartheta = 140^\circ C$
 a) Anteil von S b) Anteil von S^{-1} c) Anteil von H d) Anteil von H^{-1}

MnZn-Ferrits vom Typ 3C94 charakterisieren, und zum anderen stellt sie zum Vergleich die durch das identifizierte Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell simulierte Hysteresekennlinien dar. Der zur Materialcharakterisierung eingeprägte Zeitverlauf des B -Feldes besitzt die in der Abbildung 3.10c aufgezeigte Signalform mit einer Grundwellenfrequenz von 100 Hz. Die schwarzen Hysteresekennlinien repräsentieren die Messdaten und die bei der Vorgabe der gemessenen Zeitverläufe des H -Feldes und im anderen Fall des B -Feldes mit dem Operator Γ_{HSH} beziehungsweise mit dem Kompensator Γ_{HSH}^{-1} berechneten Kurven sind rot beziehungsweise blau eingefärbt. Die Festlegung der Modellordnungen stellt im Allgemeinen einen Kompromiss dar, da neben der Genauigkeit zu einer höheren Modellkomplexität hin auch der Rechenaufwand steigt. Die hier gewählten Modellordnungen

gen $2l + 1 = 29$ und $m + 1 = 15$ können als moderat angesehen werden. Der Vergleich der gemessenen und simulierten Hysteresekurven zeigt für die Temperaturstufen 20°C , 80°C und 140°C sowohl für das Vorwärts- als auch für das Rückwärtsmodell insgesamt eine gute Übereinstimmung.

Das Bild 5.2 verdeutlicht exemplarisch für die Temperaturstufe 140°C , wie in den Gesamtmodellen Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} die Sättigungs- und Hystereseigenschaften des ratenunabhängigen magnetischen Übertragungsverhaltens separat durch die Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodelle S und S^{-1} sowie durch die Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodelle H und H^{-1} beschrieben werden. Die Einhaltung der Gleichungsnebenbedingung (4.124) zur Forderung, dass S und folglich S^{-1} für betragsmäßig kleine Eingangssignale die Übertragungscharakteristik der Identität besitzen sollen, ist quantitativ deshalb nicht mehr zu erkennen, weil die Modelle für den Identifikationsprozess normiert wurden und hier in entnormierter Darstellung aufgezeigt sind.

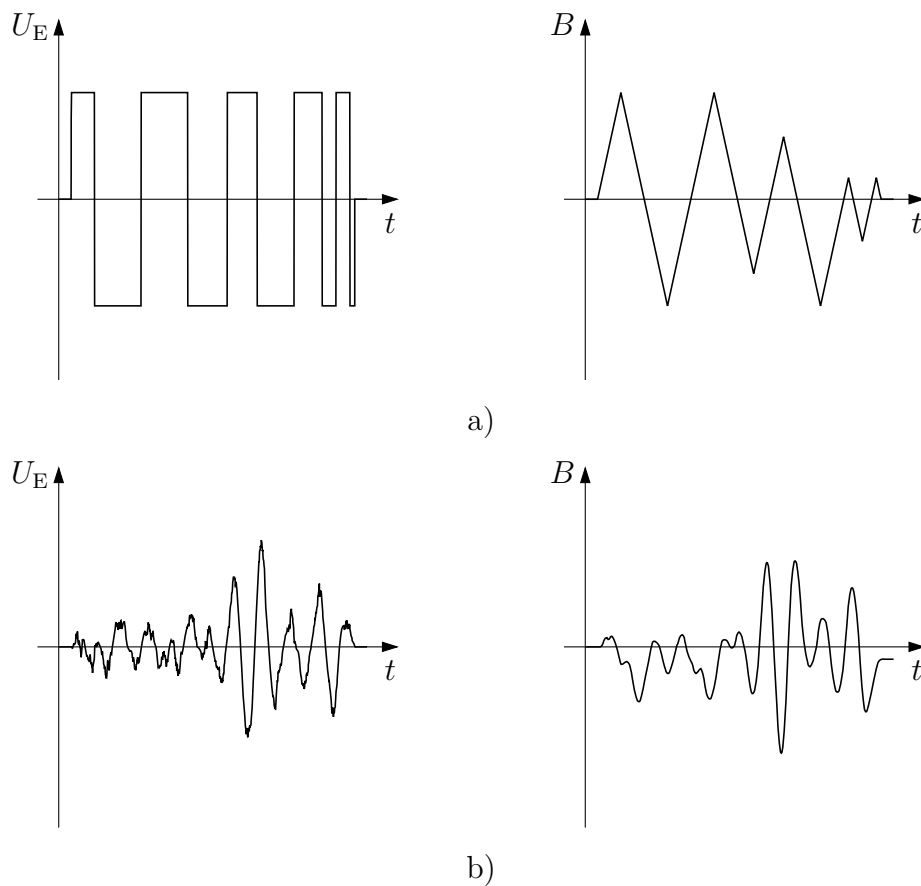


Bild 5.3: Schematische Darstellung der Zeitverläufe von U_E und der zugehörigen Zeitverläufe von B zur Validierung der Modelle für die ratenunabhängige Hysterese
a) Dreieckförmiger B -Verlauf infolge eines rechteckförmigen U_E -Verlaufs
b) Zufälliger B -Verlauf infolge eines zufälligen U_E -Verlaufs

Zur Validierung des Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells wird zum einen der dreieckförmige Flussdichteverlauf nach Abbildung 5.3a und zum anderen das Zufallssignal gemäß Abbildung 5.3b verwendet. In beiden Fällen beträgt die Grundwellenfrequenz 100 Hz. Die zugehörigen Spannungsverläufe sind ebenfalls dargestellt. In gleicher Weise wie bei den Messungen zur Charakterisierung des Materials beginnt jeder Messdurchlauf zunächst mit einem Entmagnetisierungssignal zur Erzeugung eines definierten initialen Zustandes ohne Vormagnetisierung.

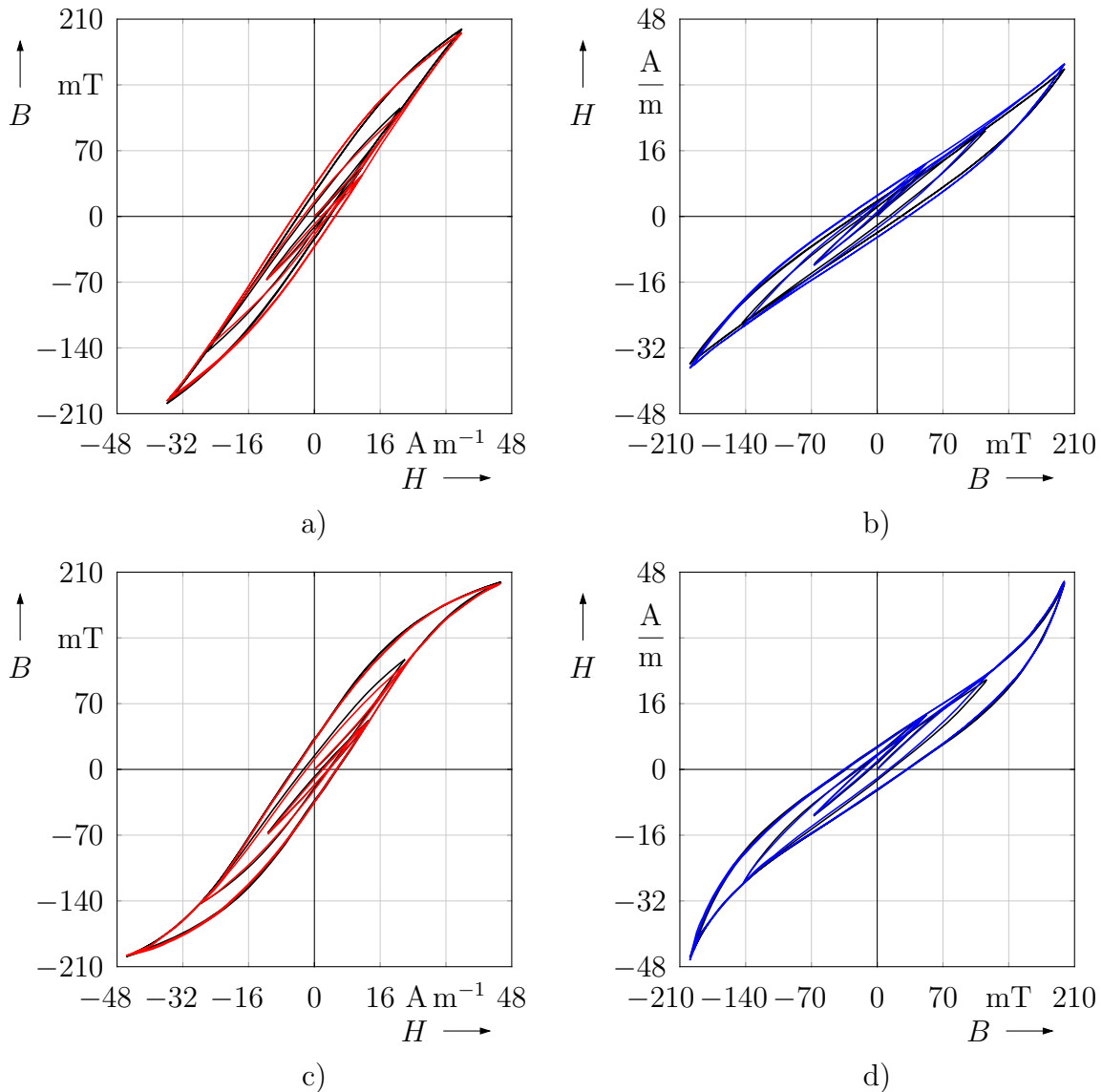


Bild 5.4: Validierung der identifizierten Modelle Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} mit einem Dreieckssignal
a) Γ_{HSH} für $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ (interpoliert) b) Γ_{HSH}^{-1} für $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ (interpoliert)
c) Γ_{HSH} für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$ d) Γ_{HSH}^{-1} für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$

Um auch die Interpolationsfähigkeit der Modelle hinsichtlich des Temperatureinflusses zu überprüfen, soll das von ihnen vorausgesagte Magnetisierungsverhalten für eine Tempe-

raturstufe mit entsprechenden Messdaten verglichen werden, die in der Mitte von zwei benachbarten der insgesamt drei Temperaturstützstellen der Messdatenbasis zur Charakterisierung des Materials liegt. Da sich in der Abbildung 5.1 deutliche Unterschiede insbesondere beim Vergleich der Messdaten für 20 °C und 80 °C zeigen, wird die Temperaturstufe 50 °C gewählt. Zudem soll die Validierung des Modells für eine Temperatur erfolgen, die keine Interpolation der Modellparameter erfordert. Zweckmäßigerweise wird hierzu die Temperaturstützstelle 140 °C herangezogen.

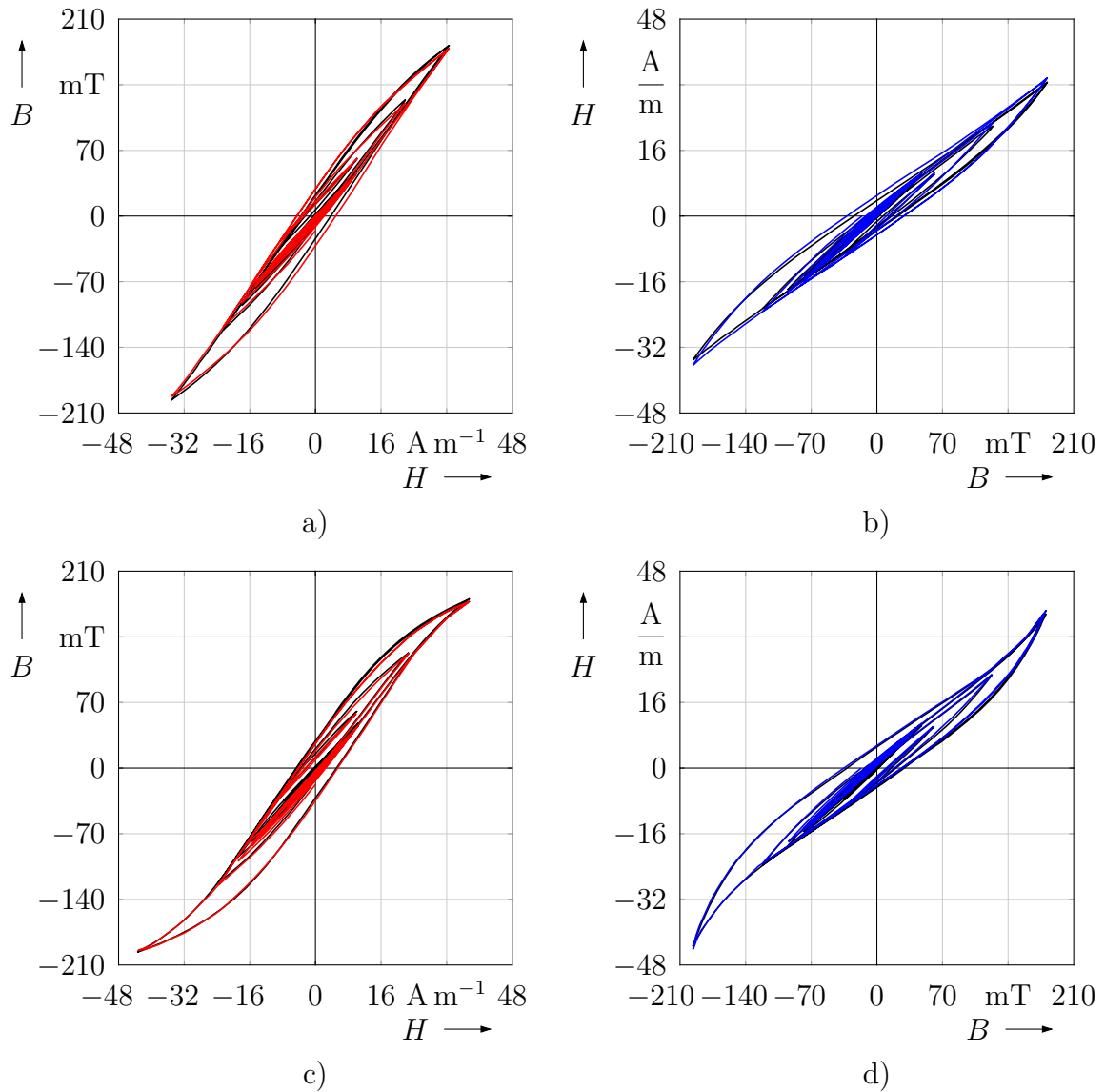


Bild 5.5: Validierung der identifizierten Modelle Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} mit einem Zufallssignal
 a) Γ_{HSH} für $\vartheta = 50\text{ °C}$ (interpoliert) b) Γ_{HSH}^{-1} für $\vartheta = 50\text{ °C}$ (interpoliert)
 c) Γ_{HSH} für $\vartheta = 140\text{ °C}$ d) Γ_{HSH}^{-1} für $\vartheta = 140\text{ °C}$

Für den dreieckförmigen Flussdichteverlauf stellt die Abbildung 5.4 die gemessenen Hysteresekurven in Schwarz und die mit den Modellen Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} ermittelten in Rot und

in Blau dar. Das mit interpolierten Modellparametern berechnete Magnetisierungsverhalten für 50 °C unterscheidet sich von den gemessenen Daten vor allem dahingehend, dass die jeweils äußere Hysteresekurve zu betragsmäßig kleinen Amplituden hin eine breitere Gestalt besitzt und einige der Umkehrpunkte nicht mit denen der realen Charakteristik zusammenfallen. Bei der Temperaturstufe 140 °C ist die Modellgenauigkeit erwartungsgemäß besser. Insgesamt stehen die modellierten und die gemessenen Hysteresekurven für beide Temperaturstufen in guter Übereinstimmung. Diese Aussagen gelten ebenso für die Ergebnisse der Modellvalidierung mit dem Zufallssignal gemäß Abbildung 5.5.

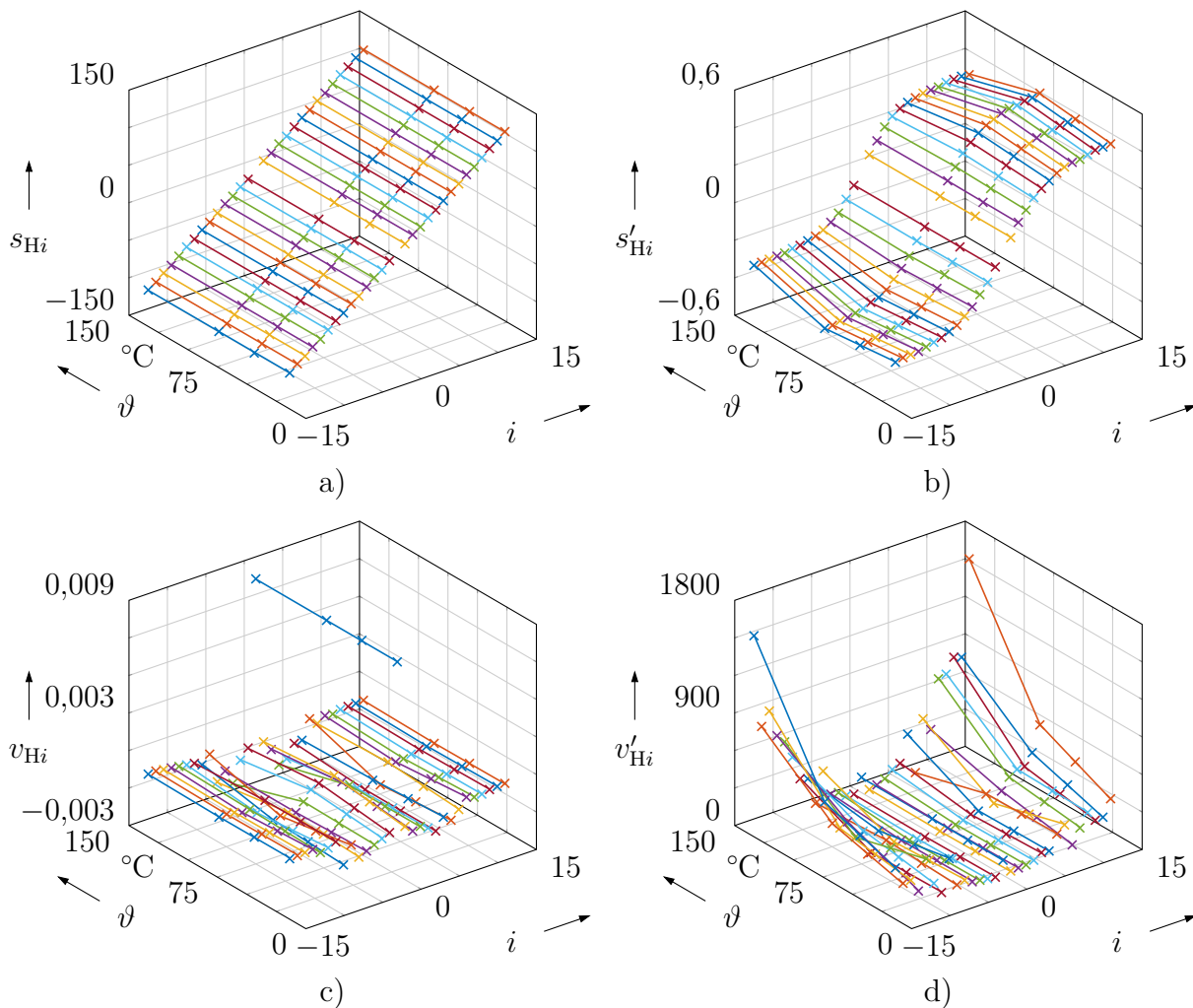


Bild 5.6: Schwellen und Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators S und des zugehörigen Kompensators S^{-1} im Modell $\Gamma_{H_{SH}}$ beziehungsweise $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$
a) Schwellen von S b) Schwellen von S^{-1} c) Gewichte von S d) Gewichte von S^{-1}

Nun lässt sich die Modellgenauigkeit im Allgemeinen durch die Verwendung einer höheren Modellordnung steigern. An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine weitere Möglichkeit aber auch darin bestehen kann, die Schwellwerte nicht wie im vorliegenden Fall äquidistant zu verteilen, sondern in einer Weise, die einer konkreten Anwendung und dem damit einher-

gehenden Arbeitsbereich angepasst ist. Dann bleibt die Modellkomplexität unverändert.

Die Abbildungen 5.6 und 5.7 stellen die identifizierten und die interpolierten Schwellen und Gewichte der Teilmodelle S , S^{-1} , H und H^{-1} von $\Gamma_{H_S H}$ sowie $\Gamma_{H_S H}^{-1}$ dar. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Stütz- und Interpolationswerte jedes Parameters durch Linien verbunden.

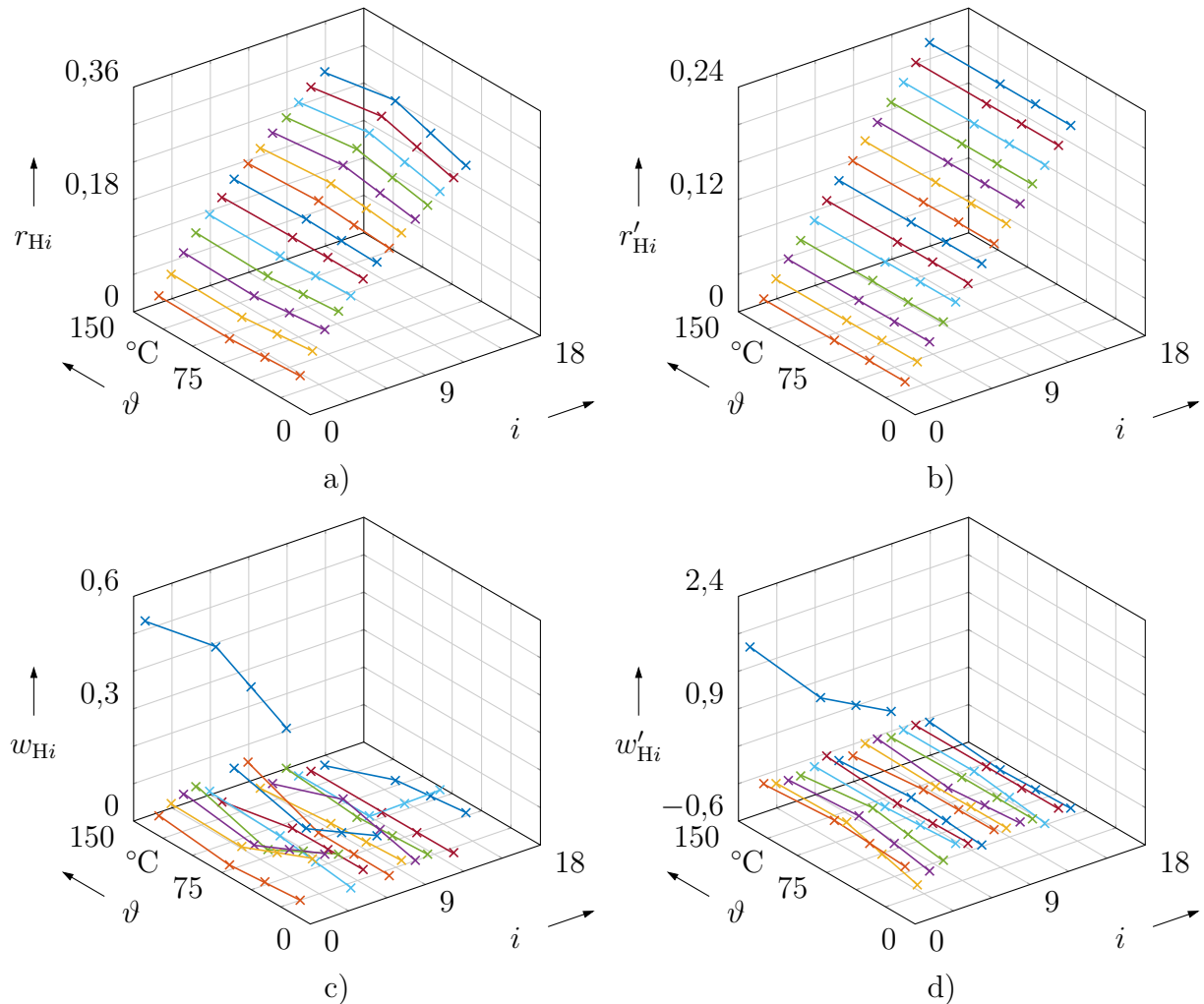


Bild 5.7: Schwellen und Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperators H und des zugehörigen Kompensators H^{-1} im Modell $\Gamma_{H_S H}$ beziehungsweise $\Gamma_{H_S H}^{-1}$
 a) Schwellen von H b) Schwellen von H^{-1} c) Gewichte von H d) Gewichte von H^{-1}

Die vorstehenden Untersuchungen sollen nun in gleicher Weise und auf der Grundlage derselben Messdatenbasis für das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell angestellt werden. In Analogie zur Abbildung 5.1 zeigt das Bild 5.8 das Resultat der Modellidentifikation anhand eines Vergleiches der mit dem Operator $\Gamma_{H_S H_S}$ beziehungsweise mit dem Kompensator $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$ simulierten Daten und der zur Modellparameteridentifikation verwendeten gemessenen Daten für drei Temperaturstufen. Die gewählten Modellordnungen sind $2l_1 + 1 = 29$, $2l_2 + 1 = 29$ und $m + 1 = 15$. Damit erzielt das Verallgemeinerte

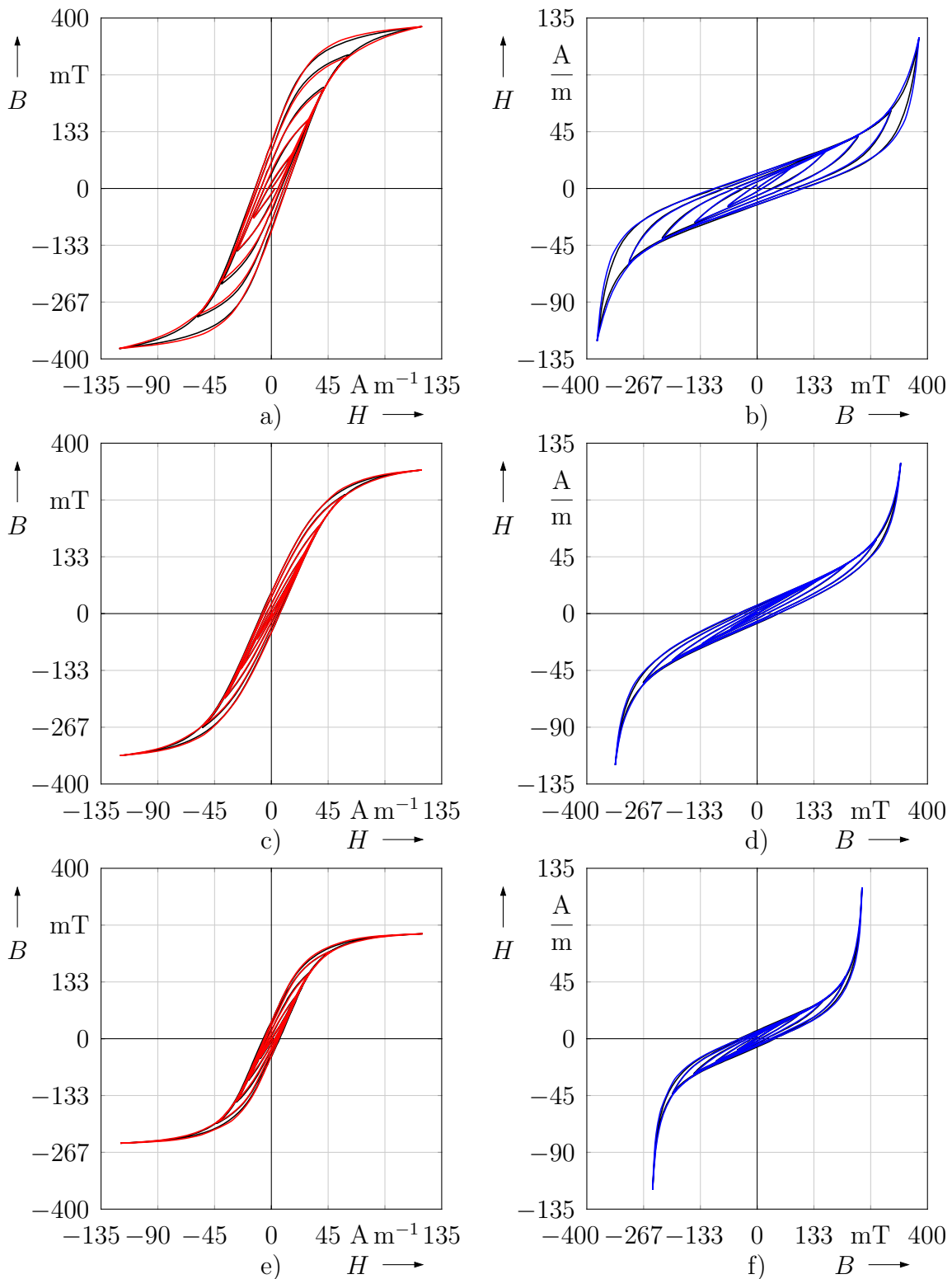


Bild 5.8: Messdaten und Trajektorien der identifizierten Modelle $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ und $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$

a) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ b) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ c) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 80^\circ\text{C}$
d) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 80^\circ\text{C}$ e) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$ f) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$

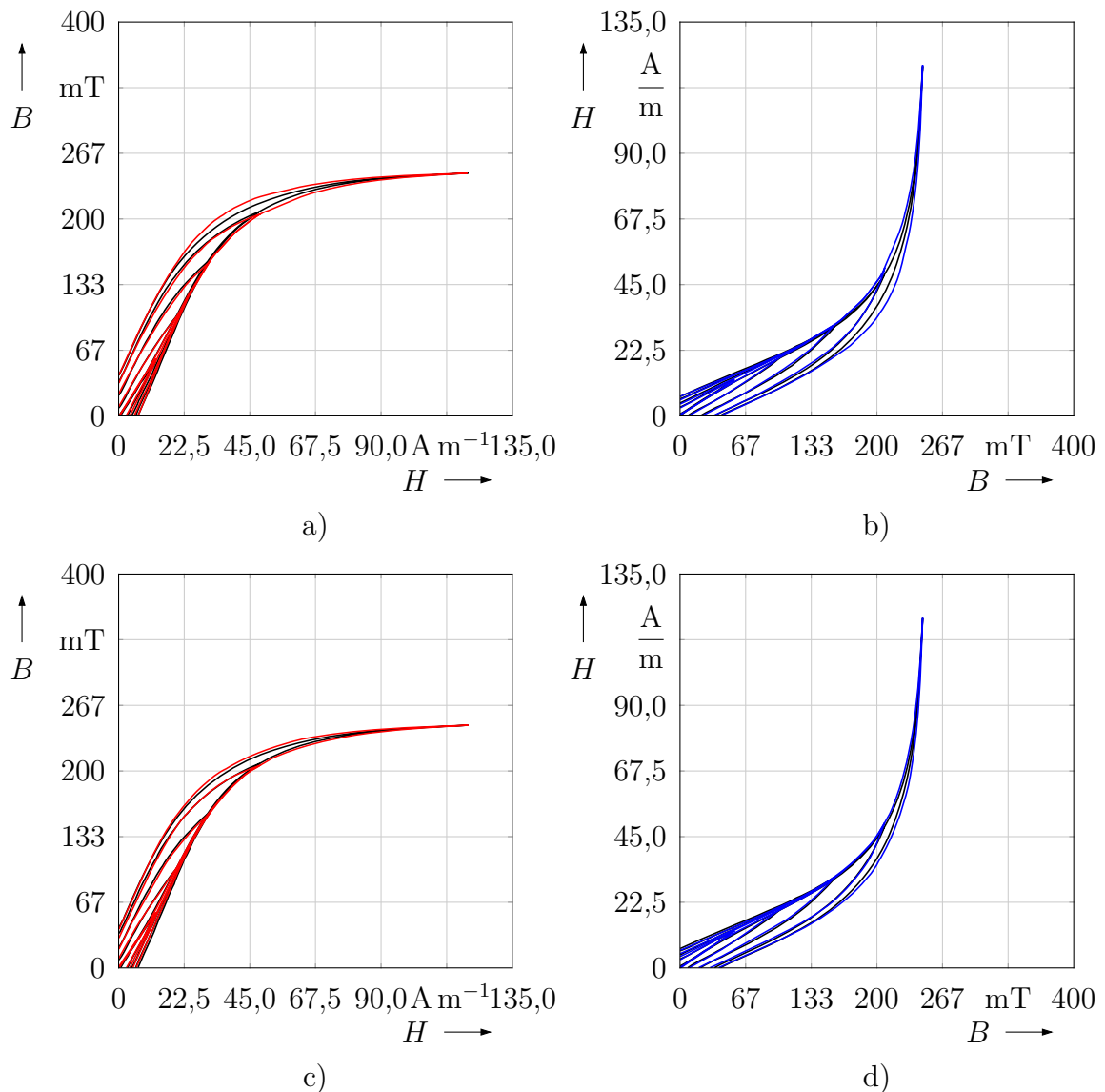


Bild 5.9: Vergleich der Modelle Γ_{HSH} und Γ_{HSH}^{-1} mit Γ_{HSHS} und $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ anhand der Ergebnisse der Modellidentifikation im ersten Quadranten der durch die B - und H -Koordinatenachsen aufgespannten Ebene für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$

a) Modell Γ_{HSH} b) Modell Γ_{HSH}^{-1} c) Modell Γ_{HSHS} d) Modell $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$

Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell für die Temperaturstufe 20°C keinen geringeren Modellfehler als das Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell, sodass es an dieser Stelle besser ist, wenn S_2 beziehungsweise S_2^{-1} keinen Beitrag zur Modellierung des Sättigungsverhaltens leisten. Das Modell weist dann ein identisches Übertragungsverhalten wie das Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell auf. Folglich stimmen die Resultate in den Bildern 5.8a und 5.8b mit denen in den Bildern 5.1a und 5.1b überein. Für die beiden anderen Temperaturstufen kann das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell hingegen bessere Ergebnisse erzielen als das Generalisierte Prandtl-Ishlinskii-

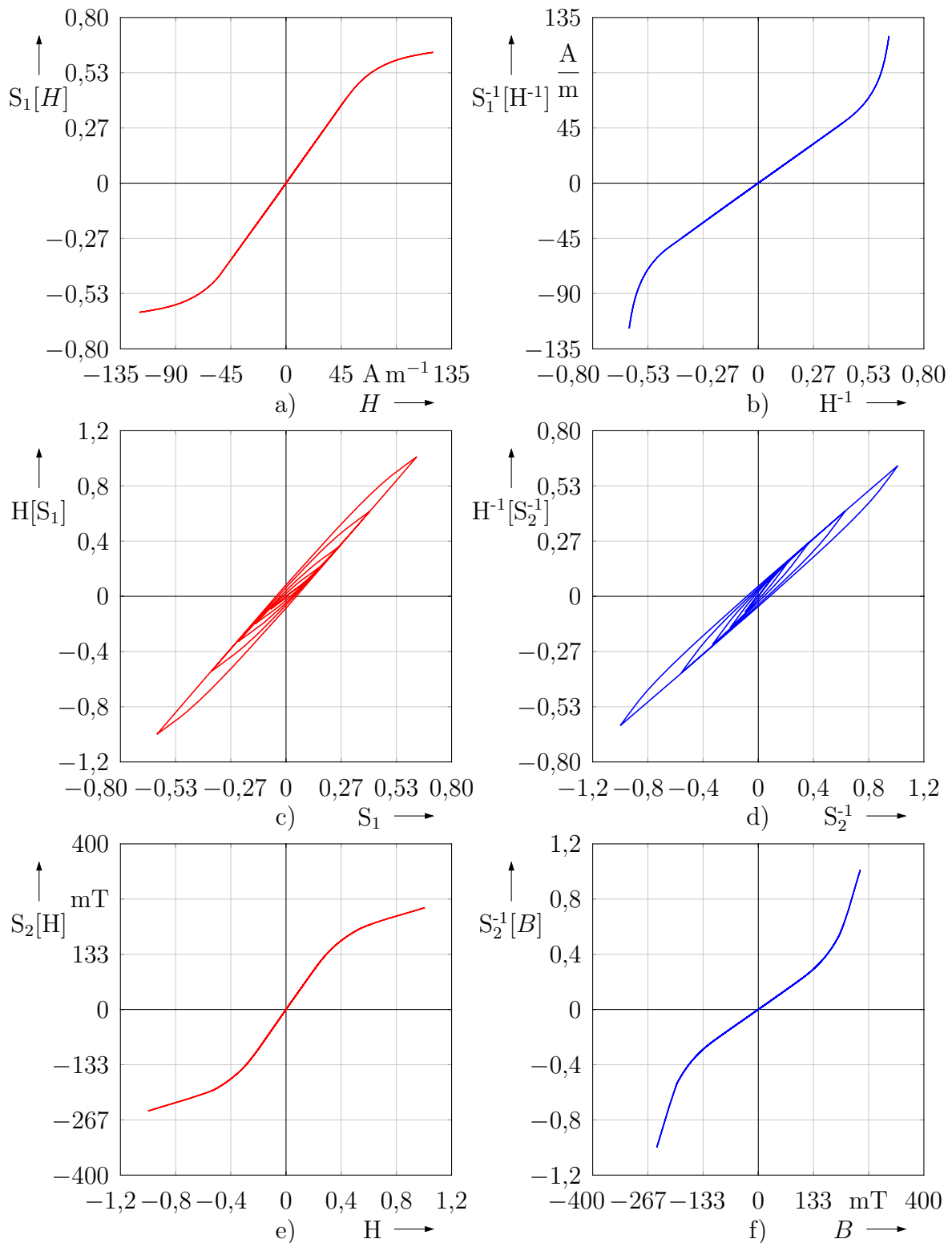


Bild 5.10: Trajektorien der identifizierten Teilmodelle von $\Gamma_{H_{SHS}}$ und $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$ für $\vartheta = 140\text{ }^\circ\text{C}$

- a) Anteil von S_1 b) Anteil von S_1^{-1} c) Anteil von H d) Anteil von H^{-1}
 e) Anteil von S_2 f) Anteil von S_2^{-1}

Hysteresemodell. Insbesondere die Übergangsbereiche zur magnetischen Sättigung werden sowohl für das Vorwärts- als auch für das Rückwärtsmodell präziser nachgebildet, obwohl das zugrunde liegende Identifikationsverfahren gemäß den Ausführungen in Kapitel 4.2.4 zur Bestimmung von $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ dient und damit nicht auch automatisch auf ein optimales Modell $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ führt. Die Identifikation von $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für 80°C erfordert hier 442 Iterationen und für 140°C bedarf es 157 Iterationen. In der Abbildung 5.9 ist der Unterschied in der Genauigkeit beider Modelle verdeutlicht, indem die Ergebnisse der Modellidentifikation bezüglich $\Gamma_{\text{H}_{\text{SH}}}$, $\Gamma_{\text{H}_{\text{SH}}}^{-1}$, $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ und $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für 140°C im jeweils ersten Quadranten der durch die B - und H -Koordinatenachsen aufgespannten Ebene vergrößert dargestellt sind.

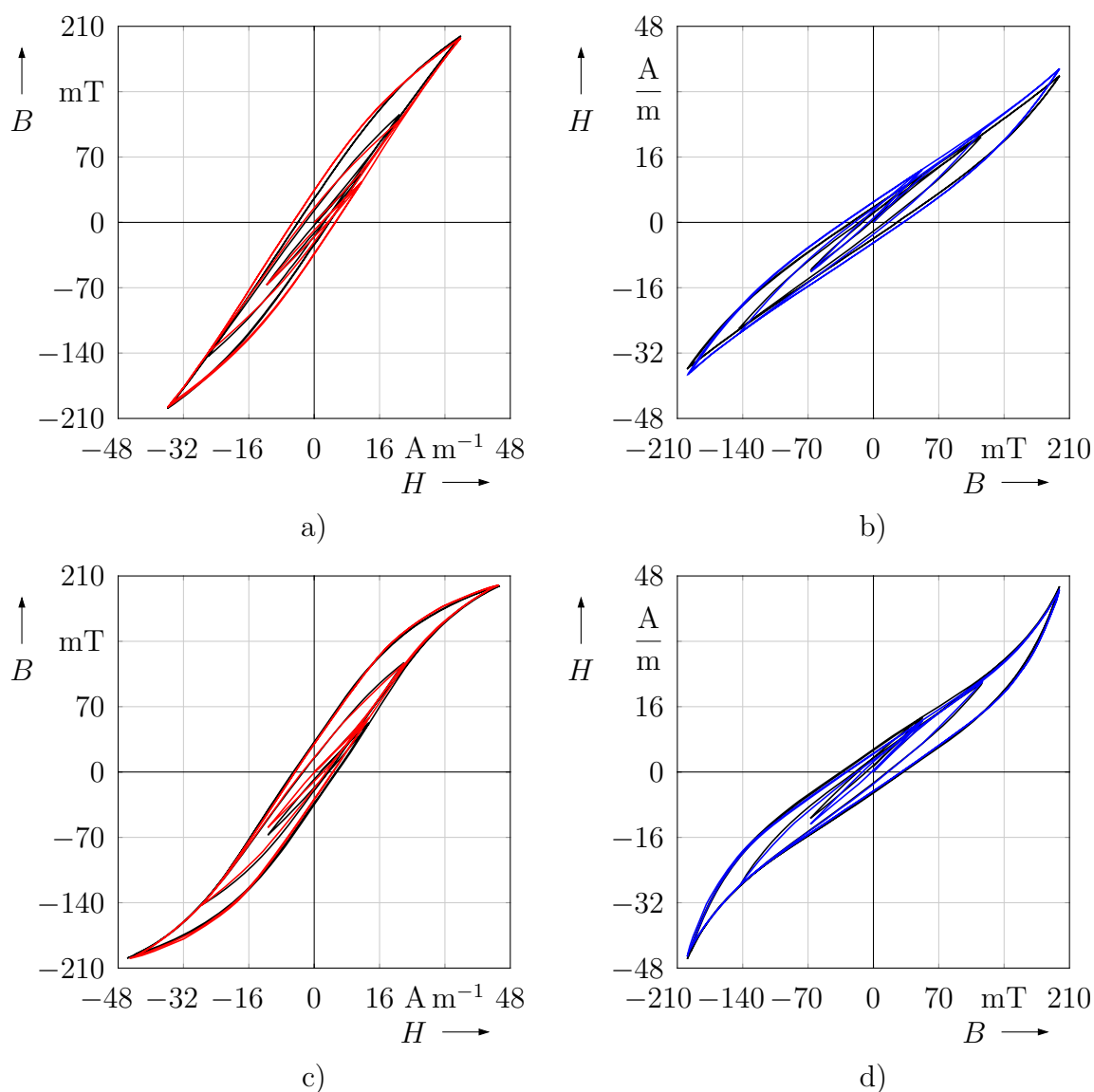


Bild 5.11: Validierung der identifizierten Modelle $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ und $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ mit einem Dreiecksignal
 a) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ (interpoliert) b) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ (interpoliert)
 c) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$ d) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$

Die Abbildung 5.10 veranschaulicht exemplarisch für die Temperaturstufe 140°C , wie in den Gesamtmodellen $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ und $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ die Sättigungs- und Hystereseigenschaften des ratenunabhängigen magnetischen Übertragungsverhaltens voneinander getrennt durch die Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsmodelle S_1 , S_1^{-1} , S_2 und S_2^{-1} sowie durch die Prandtl-Ishlinskii-Hystereseemodelle H und H^{-1} beschrieben werden.

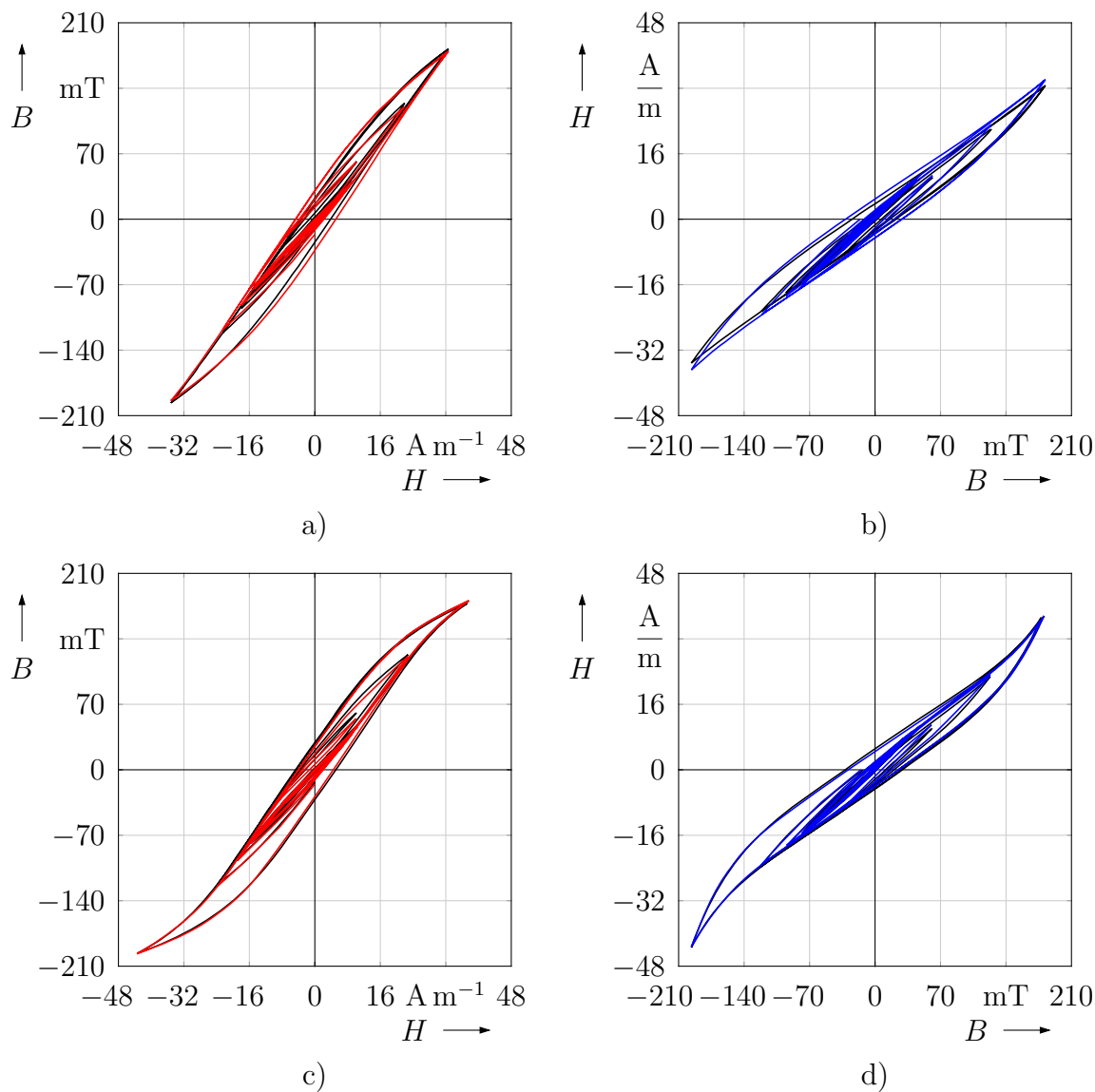


Bild 5.12: Validierung der identifizierten Modelle $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ und $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ mit einem Zufallssignal
a) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ (interpoliert) b) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 50^\circ\text{C}$ (interpoliert)
c) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$ d) $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ für $\vartheta = 140^\circ\text{C}$

Die Validierung des Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modells erfolgt in gleicher Weise und mit denselben Zeitsignalen wie beim Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysterese Modell. Für den dreieckförmigen Flussdichteverlauf zeigt die Abbildung 5.11 die gemessenen Hysteresekurven in Schwarz und die mit den Modellen $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}$ und $\Gamma_{\text{H}_{\text{SHS}}}^{-1}$ be-

rechneten Magnetisierungskennlinien sind rot und im anderen Fall blau dargestellt. Das mit interpolierten Modellparametern simulierte Magnetisierungsverhalten für 50°C unterscheidet sich hier von den gemessenen Daten insbesondere dadurch, dass die jeweils äußere Hysteresekurve zu betragsmäßig kleinen Amplituden hin eine breitere Gestalt besitzt und sich einige der Umkehrpunkte nicht präzise mit denen der realen Charakteristik decken. Für die Temperaturstufe 140°C stimmen die gemessenen und die modellierten Kurven naturgemäß besser überein. Insgesamt wird die reale Hysteresekarakteristik durch das Modell für beide Temperaturstufen gut nachgebildet, wobei sich die Genauigkeit im Vergleich zum Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell im vorliegenden Fall nicht nennenswert unterscheidet. Die Aussagen lassen sich auch auf die Ergebnisse der Modellvalidierung mit dem Zufallssignal gemäß Abbildung 5.12 übertragen.

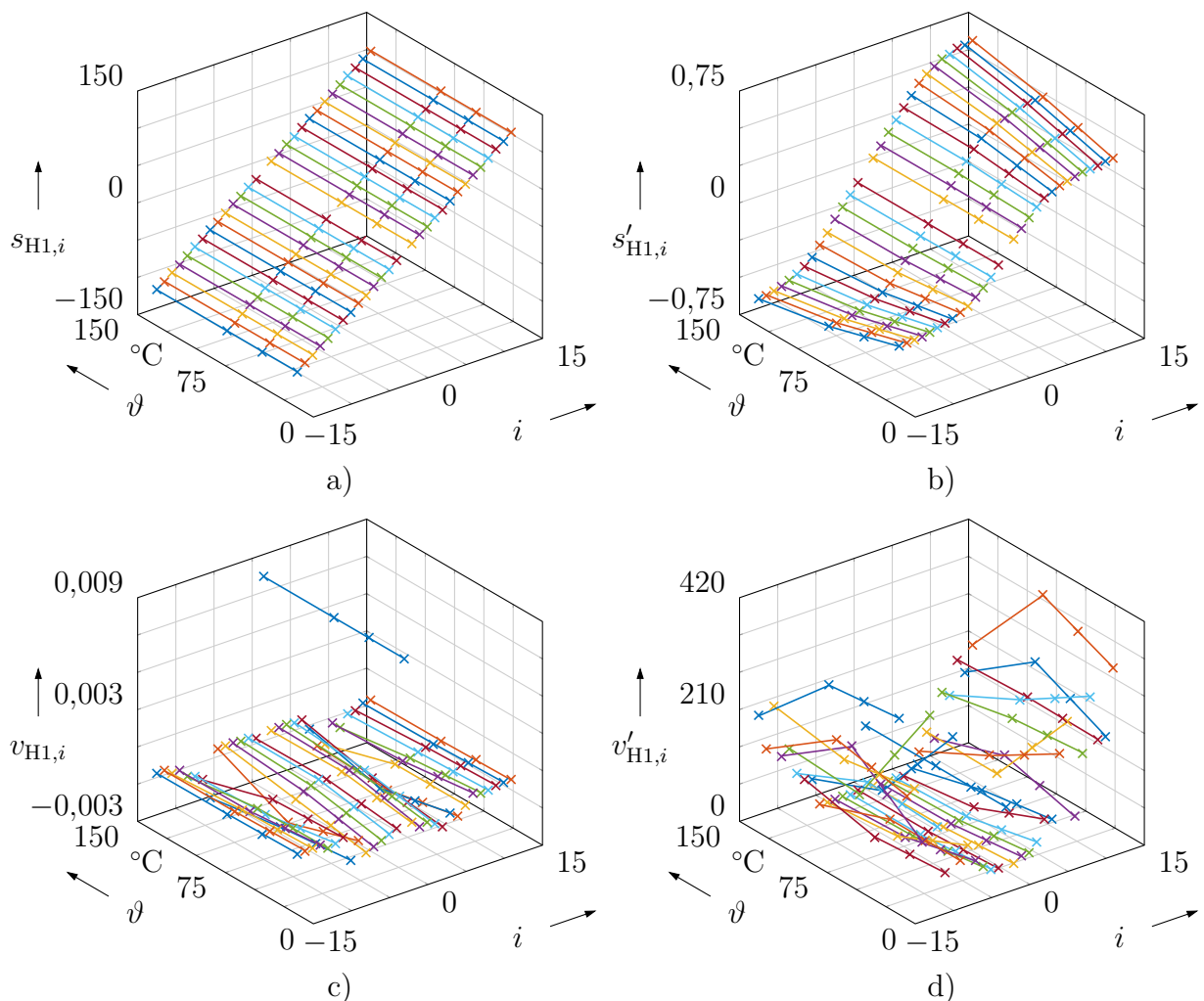


Bild 5.13: Schwellen und Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators S_1 und des zugehörigen Kompensators S_1^{-1} im Modell Γ_{HSHS} beziehungsweise $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$
a) Schwellen von S_1 b) Schwellen von S_1^{-1} c) Gewichte von S_1 d) Gewichte von S_1^{-1}

Die Abbildungen 5.13, 5.14 und 5.15 zeigen die identifizierten sowie die interpolierten

Schwellen und Gewichte der Teilmodelle S_1 , S_1^{-1} , H , H^{-1} , S_2 und S_2^{-1} von $\Gamma_{H_S H_S}$ beziehungsweise $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$. Im Interesse einer übersichtlichen Darstellung sind die Stütz- und Interpolationswerte jedes Parameters durch Linien verbunden.

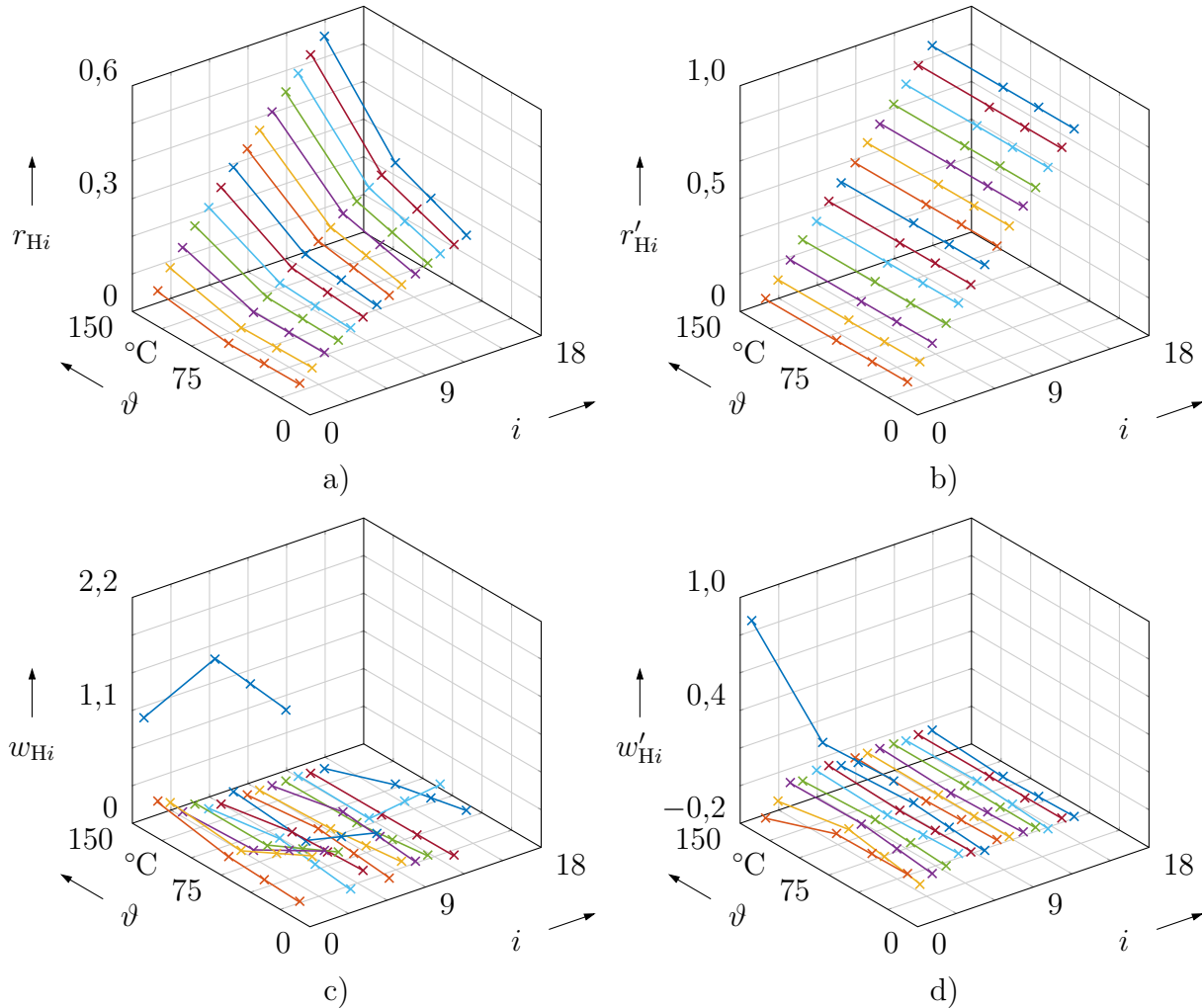


Bild 5.14: Schwellen und Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperators H und des zugehörigen Kompensators H^{-1} im Modell $\Gamma_{H_S H_S}$ beziehungsweise $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$
a) Schwellen von H b) Schwellen von H^{-1} c) Gewichte von H d) Gewichte von H^{-1}

Wesentlich deutlichere Unterschiede in der Genauigkeit als bei dem Ferritwerkstoff weisen die Generalisierten und die Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodelle bei der Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens von Somaloy 1000 3P (600 MPa) auf. Dabei handelt es sich um einen Pulververbundwerkstoff auf der Basis von hochreinem Eisenpulver von der Firma Höganäs. Die Abbildung 5.16 zeigt dazu die bei 20 °C mit einer Grundwellenfrequenz von 1 Hz gemessenen ratenunabhängigen Hysteresekurven und die entsprechenden Trajektorien der damit identifizierten Modelle $\Gamma_{H_S H}$ und $\Gamma_{H_S H}^{-1}$ sowie $\Gamma_{H_S H_S}$ und $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$. Es werden dieselben Modellordnungen wie zuvor verwendet. Während das mit dem Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell wiedergegebene

Materialverhalten über den gesamten Amplitudenbereich signifikant von dem realen abweicht, erzielt das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell befriedigende Ergebnisse für alle Amplitudenstufen außer der kleinsten.

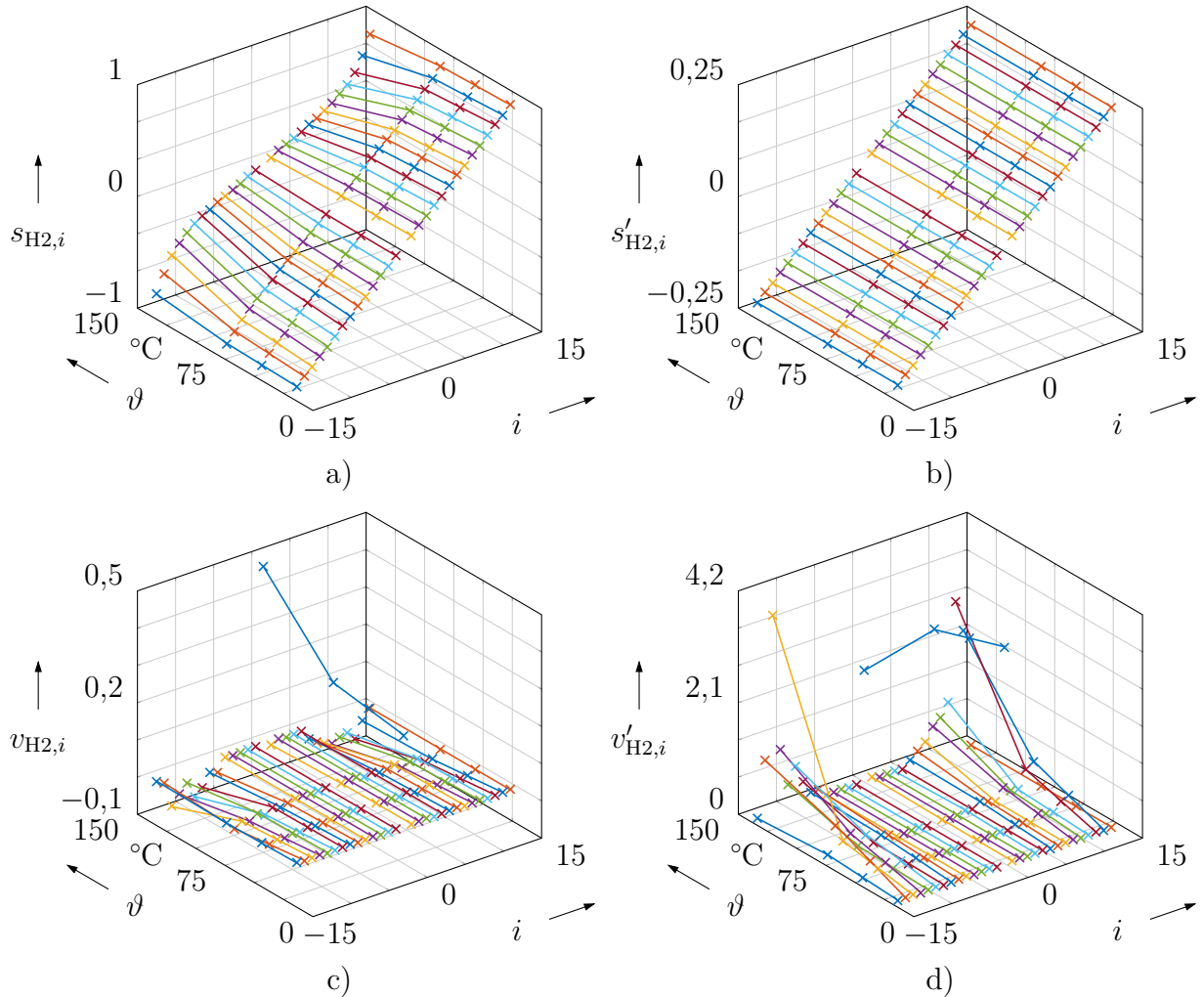


Bild 5.15: Schwellen und Gewichte des Prandtl-Ishlinskii-Superpositionsoperators S_2 und des zugehörigen Kompensators S_2^{-1} im Modell Γ_{HSHS} beziehungsweise $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$
a) Schwellen von S_2 b) Schwellen von S_2^{-1} c) Gewichte von S_2 d) Gewichte von S_2^{-1}

Durch die alleinige Erhöhung der Modellordnungen der Hysterese- und Superpositionsoperatoren beziehungsweise ihrer Inversen kann man hier keine nennenswerte Steigerung der Modellgenauigkeit mehr erzielen. Eine wesentliche Verbesserung für beide Modelle bewirkt jedoch die Verwendung der Moving-Erweiterung. Dazu veranschaulicht das Bild 5.17 das Ergebnis der Modellidentifikation für dieselbe Messdatenbasis und identische Modellordnungen, wobei nun ein Moving-Parameter mit $k = 700$ eingesetzt wird. Eine Moving-Term-Kompensation ist hier noch nicht erfolgt, sodass die Hysterese Kennlinien gegenüber dem originalen Verlauf entsprechend geschert sind. Es zeigt sich, dass sowohl das Generalisierte als auch das Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hysteresemodell über den gesamten Am-

plitudenbereich deutlich bessere Ergebnisse hervorbringt, wenn die Moving-Erweiterung zur Anwendung kommt.

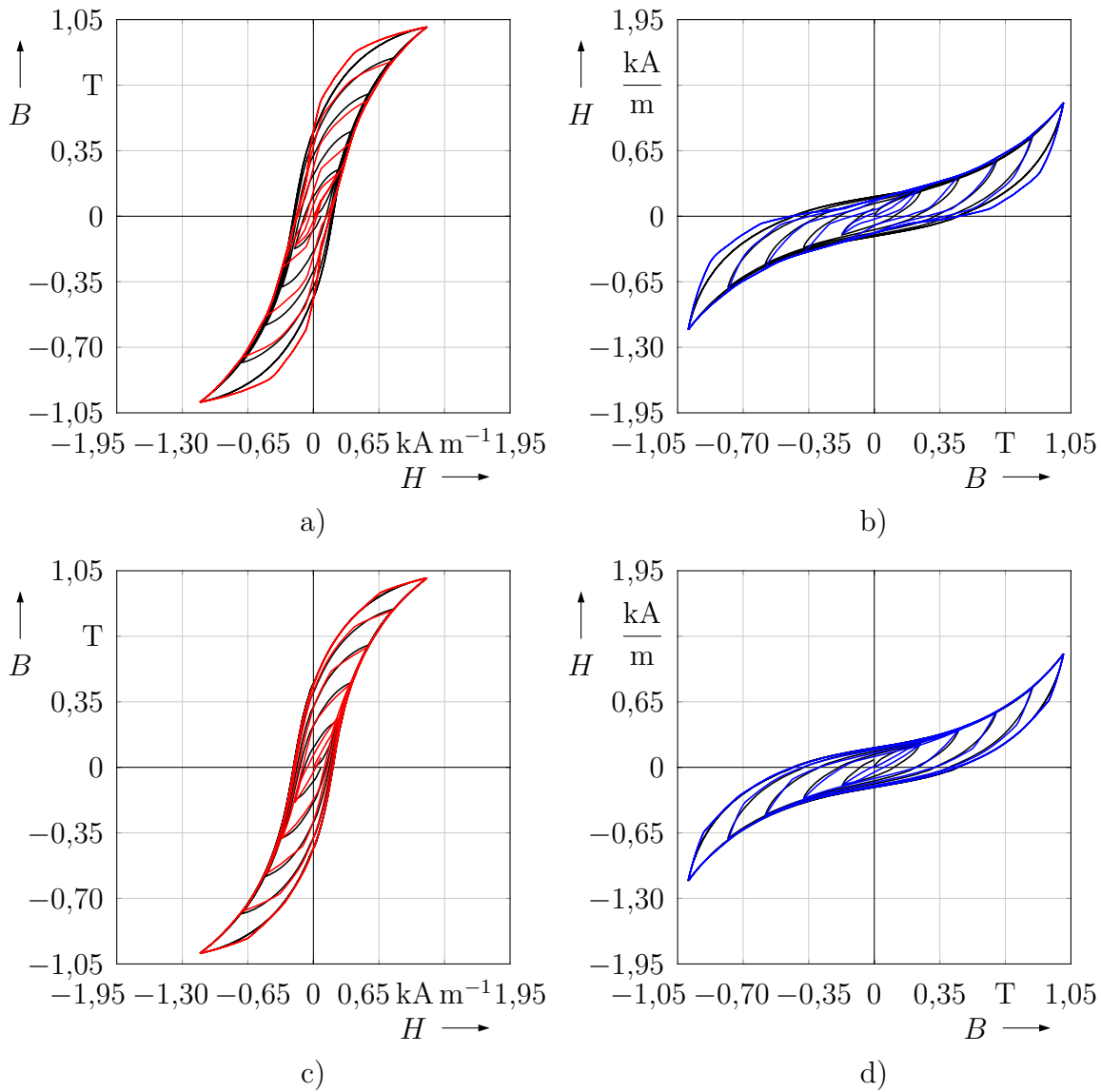


Bild 5.16: Messdaten und Trajektorien der identifizierten Modelle $\Gamma_{H_{SH}}$ und $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ sowie $\Gamma_{H_{SHS}}$ und $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$ für das Kernmaterial Somaloy 1000 3P bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$
 a) Modell $\Gamma_{H_{SH}}$ b) Modell $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ c) Modell $\Gamma_{H_{SHS}}$ d) Modell $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$

Inwiefern Fehler im modellierten ratenunabhängigen Magnetisierungsverhalten den auf dieser Grundlage berechneten zugehörigen volumenspezifischen Verlustleistungsanteil verfälschen, demonstriert das folgende Beispiel. Für diese Untersuchung wird bei einer Temperatur von 20°C gemäß der Abbildung 5.18 ein dreieckförmiger Zeitverlauf des B -Feldes mit einer Grundwellenfrequenz von 1 Hz und betragsmäßig gleichen Maximal- und Minimalamplituden mit $\pm 1\text{ T}$ im Somaloy-Material eingepreßt. Das Signal besteht aus zwei Perioden, wodurch bei vorausgegangener Entmagnetisierung des Materials zwei Hysteresekurven in

der durch die B - und H -Koordinatenachsen aufgespannten Ebene entstehen, von denen aufgrund der Neukurve lediglich die zweite punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Für die Untersuchung des Einflusses der Modellqualität auf die berechneten ratenunabhängigen Ummagnetisierungsverluste soll daher nur die zweite Signalperiode herangezogen werden. Aus diesem Grund ist die erste Periode des Signals gestrichelt dargestellt.

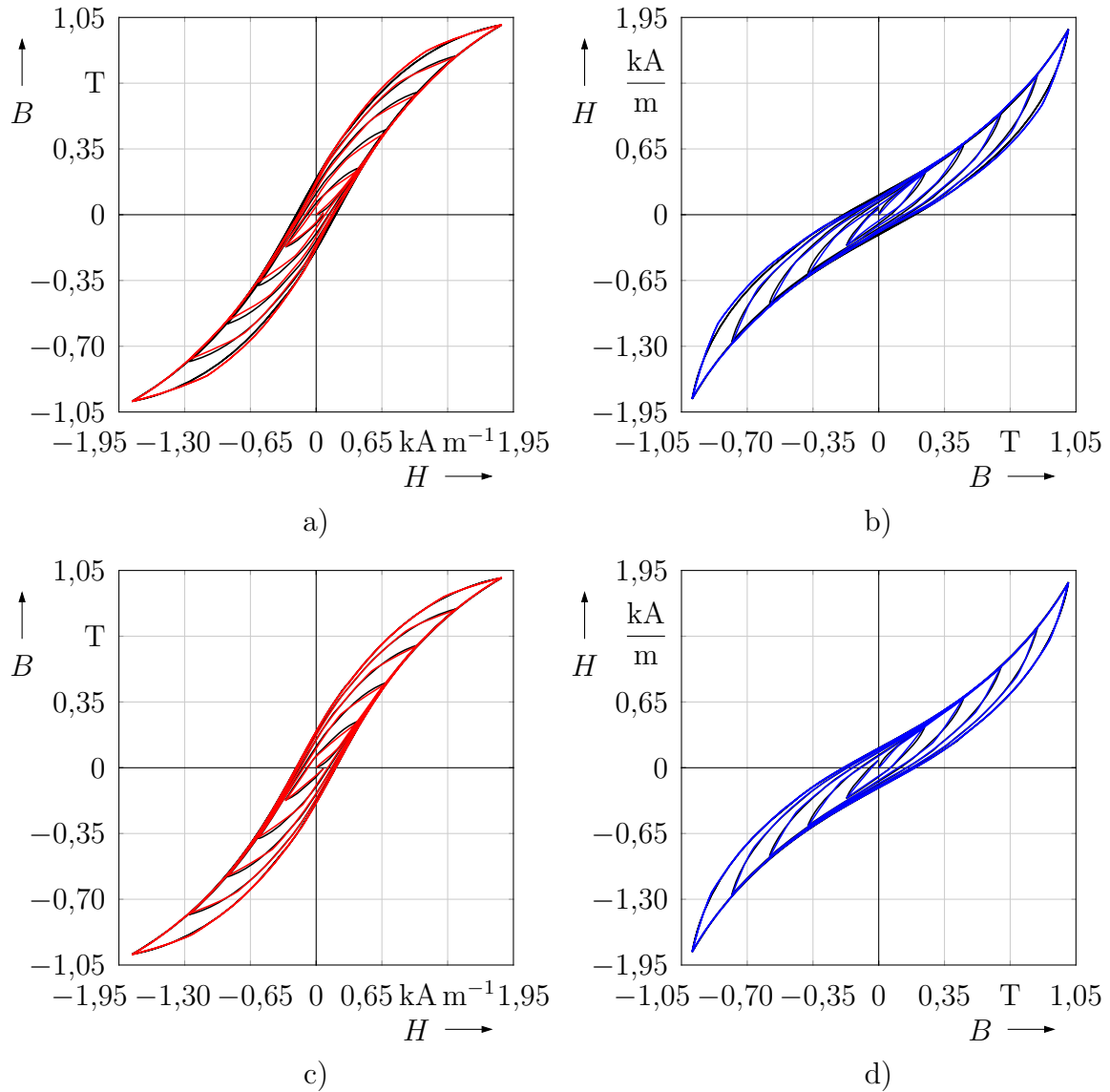


Bild 5.17: Messdaten und Trajektorien der identifizierten Modelle $\Gamma_{H_{SH}}$ und $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ sowie $\Gamma_{H_{SHS}}$ und $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$ für das Kernmaterial Somaloy 1000 3P bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ unter Verwendung der Moving-Erweiterung mit $k = 700$

a) Modell $\Gamma_{H_{SH}}$ b) Modell $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ c) Modell $\Gamma_{H_{SHS}}$ d) Modell $\Gamma_{H_{SHS}}^{-1}$

Derselbe Flussdichteverlauf wird dann als Eingangssignal für den gemäß Bild 5.16b identifizierten Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekomparator $\Gamma_{H_{SH}}^{-1}$ ohne Moving-Erweiterung und im anderen Fall für den gemäß Bild 5.17b identifizierten Hysteresekom-

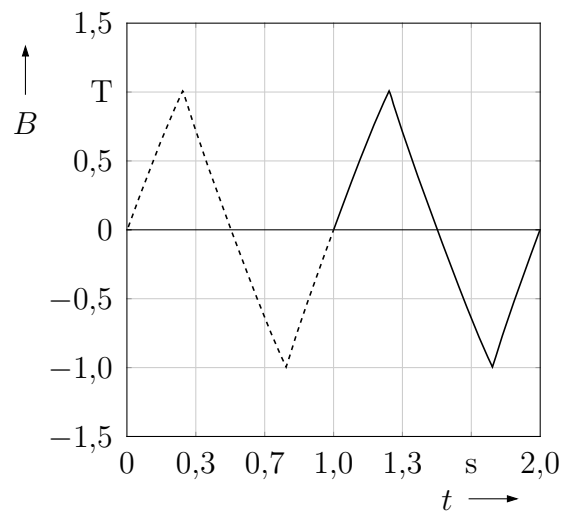


Bild 5.18: Eingepprägter Zeitverlauf von B zur Erzeugung einer zum Koordinatenursprung punktsymmetrischen Hysteresekurve bei einer Grundwellenfrequenz von 1 Hz

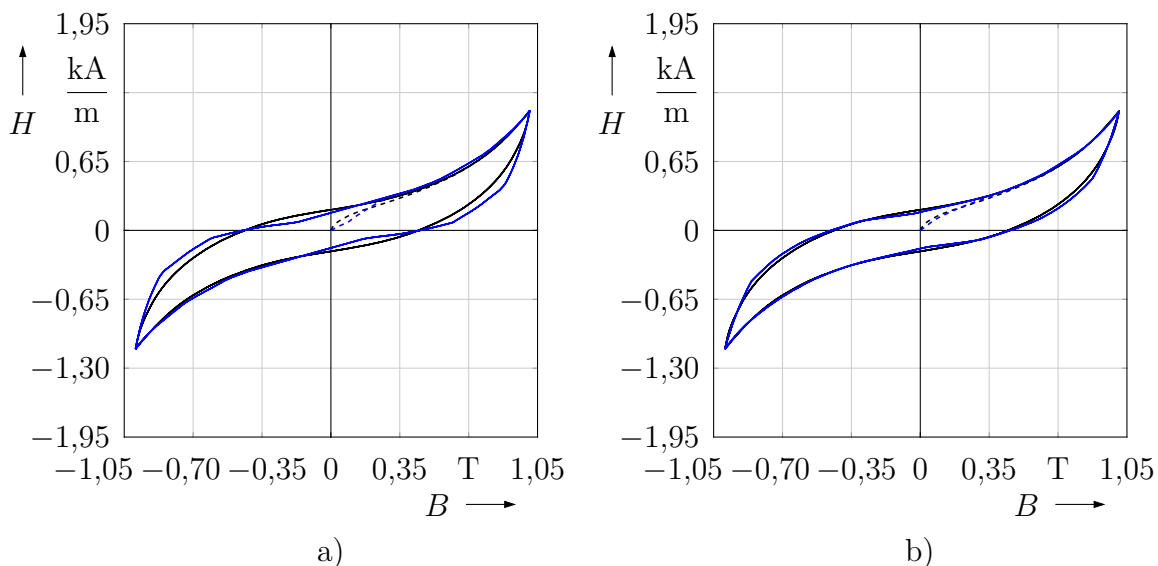


Bild 5.19: Messdaten und Trajektorien des identifizierten Modells Γ_{HSH}^{-1} ohne und mit Moving-Erweiterung für das Kernmaterial Somaloy 1000 3P bei einer Grundwellenfrequenz von 1 Hz und $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ zur Untersuchung des Einflusses der Modellgenauigkeit auf die berechneten ratenunabhängigen Kernverluste
 a) Modell Γ_{HSH}^{-1} ohne Moving-Erweiterung b) Modell Γ_{HSH}^{-1} mit $k = 700$

pensator mit Moving-Erweiterung vorgegeben. Die Abbildung 5.19 stellt die gemessenen und die modellierten Hysteresekurven gegenüber. Erstere sind schwarz und letztere sind blau gekennzeichnet. Dabei ist im Bild 5.19b der Moving-Term und folglich die im Identifikationsprozess entstehende Scherung der Hysteresekurve entsprechend Abbildung 4.42 kompensiert. Die gestrichelten Kurvenabschnitte kennzeichnen jeweils die Zugehörigkeit

zur ersten Signalperiode des Eingangssignals.

Das Bild 5.20 veranschaulicht für das um den Moving-Term erweiterte Modell Γ_{HSH}^{-1} den Zeitverlauf der auf das Volumen bezogenen ratenunabhängigen Momentanleistung als die Summe aus dissipativen und reaktiven Komponenten gemäß $H_{\text{H}}(t) \frac{d}{dt} B(t) = p_{\text{H}}(t) + \frac{d}{dt} F_{\text{V}}(t)$ sowie den mit dem Dissipationsmodell ermittelten Zeitverlauf des volumenspezifischen Verlustleistungsanteils $p_{\text{H}}(t)$. Auch hier gehören die gestrichelten Abschnitte zur ersten Signalperiode des Eingangssignals.

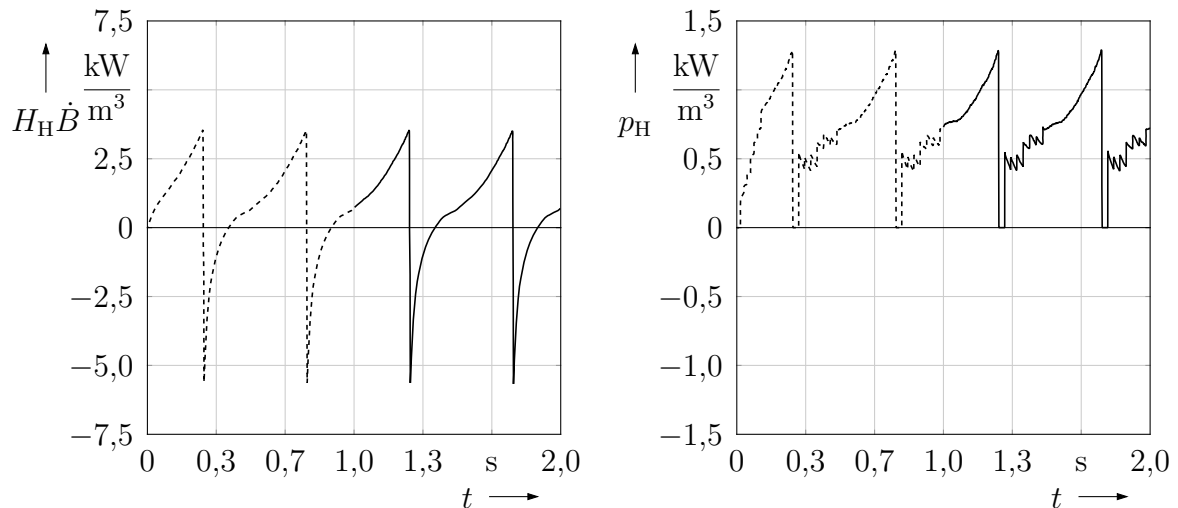


Bild 5.20: Anhand des Modells Γ_{HSH}^{-1} mit Moving-Erweiterung simulierter zeitlicher Verlauf von $H_{\text{H}}(t) \frac{d}{dt} B(t)$ und $p_{\text{H}}(t)$ für symmetrische Aussteuerung des Kernmaterials Somaloy 1000 3P mit einem Dreiecksignal bei einer Grundwellenfrequenz von 1 Hz und einer Maximalamplitude von $B_{\text{max}} = 1 \text{ T}$ für $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Die Mittelwertbildung über die der zweiten Signalperiode zugeordneten Zeitabschnitte führt konsequenterweise in beiden Fällen auf dieselbe mittlere volumenspezifische ratenunabhängige Verlustleistung in Höhe von 723 W m^{-3} . Mit dem Generalisierten Prandtl-Ishlinskii-Hysteresekompensator ohne Moving-Erweiterung erhält man 772 W m^{-3} und auf der Grundlage der gemessenen Magnetisierungskurve ergibt sich der Referenzwert 703 W m^{-3} . Demzufolge beträgt der relative Fehler für das Modell ohne Moving-Erweiterung 9,8 % und für das Modell mit Moving-Erweiterung 2,8 %. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass sich die mittleren auf das Volumen bezogenen ratenunabhängigen Verluste unter Verwendung der Datenblattangaben des Herstellers auf 750 W m^{-3} beziffern [Hög16]. Eine mögliche Ursache für den Unterschied zwischen der Herstellerangabe und dem hier ermittelten Wert kann gegebenenfalls darin bestehen, dass die messtechnische Materialcharakterisierung bei voneinander abweichenden Temperaturen erfolgt ist, da die laut dem Datenblatt vom Hersteller zugrunde gelegte Norm [IEC03] hierzu lediglich den Temperaturbereich $23 \text{ }^\circ\text{C} \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$ vorgibt.

Es lässt sich festhalten, dass die Verwendung der Moving-Erweiterung die Qualität der Modelle für das ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten bei sonst gleicher Modellordnung

nennenswert steigern kann. Dies ermöglicht weiterhin eine deutlich präzisere Simulation der ratenunabhängigen Kernverluste, was sich auch vorteilhaft auf eine darauf aufbauende Modellparameteridentifikation für das dynamische Kernmodell auswirkt. Zudem wird hier das Dissipationsmodell dadurch bestätigt, dass die Berechnung des mittleren ratenunabhängigen Verlustanteils durch die Mittelwertbildung bezüglich der mit dem Dissipationsmodell explizit bestimmten Momentanverluste auf dasselbe Ergebnis führt wie dessen Berechnung durch die Mittelwertbildung auf der Basis der volumenspezifischen ratenunabhängigen Momentanleistung als die Summe aus dissipativen und reaktiven Bestandteilen.

5.2 Kernmodellerweiterungen für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten

Im Rahmen dieses Abschnittes erfolgt die Validierung des dynamischen Kernmodells. Dazu werden in einem ersten Schritt am Beispiel eines Ringkerns aus MnZn-Ferrit des Typs 3C94 mit dem Außendurchmesser $d_a = 29$ mm, dem Innendurchmesser $d_i = 19$ mm und der Höhe $h = 15$ mm gemessene sowie berechnete Zeitsignale und mittlere Kernverlustleistungsdichten gegenübergestellt, bei denen die ratenabhängigen Magnetisierungsprozesse einen signifikanten Einfluss besitzen. In einem zweiten Schritt kommt erweiternd das in dieser Arbeit vorgestellte Netzwerkmodell zur Berücksichtigung von Flussverdrängungseffekten infolge von klassischen Wirbelströmen zur Anwendung. Anhand einer Vorbetrachtung wird es zunächst losgelöst vom ratenunabhängigen Hysteresemodell und dem Verlustseparationsansatz auf der Grundlage zweier theoretischer Beispiele nach Schweer [Sch97] eingehend mit dem von ihm eingesetzten Netzwerkmodell verglichen. Im Anschluss daran erfolgt die Validierung des gesamten im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten mehrschaligen dynamischen Kernmodells an einem realen Beispiel unter Verwendung eines aus Somaloy 1000 3P (600 MPa) gefertigten Ringkerns mit den Dimensionen $d_a = 50$ mm, $d_i = 40$ mm und $h = 5$ mm. Bei diesem Material tritt die Feldverdrängung im Vergleich zum MnZn-Ferrit 3C94 schon bei wesentlich kleineren Frequenzen auf, denn gemäß dem zugehörigen Datenblatt besitzt es innerhalb des Temperaturbereiches von $23\text{ °C} \pm 5\text{ °C}$ typischerweise eine elektrische Leitfähigkeit von $\sigma = 18,18 \cdot 10^3 \text{ S m}^{-1}$ und eine maximale relative magnetische Permeabilität von $\mu_{\max} = 900$ [Hög16]. Demnach lässt sich die Eindringtiefe unter der Annahme einer linearen Magnetisierungskennlinie bei sinusförmigem Zeitverlauf der magnetischen Feldstärke mit der Frequenz $f = 5$ kHz nach Gleichung (4.188) zu $\delta = 1,8$ mm abschätzen. Im Gegensatz dazu ergibt sich eine vergleichbare Eindringtiefe bei MnZn-Ferrit 3C94 mit den typischen Datenblattwerten $\sigma = 0,2 \text{ S m}^{-1}$ und $\mu_{\max} = 4700$ erst bei der Frequenz $f = 85$ MHz [Fer13]. Im Zusammenhang mit der Validierung des Gesamtkernmodells am Beispiel des Somaloy-Ringkerns werden außerdem zwei weitere Modellkonstellationen für einen Vergleich der Ergebnisse herangezogen. Dabei kommt in einem Fall anstelle des in dieser Arbeit vorgestellten Schalenmodells jenes von Schweer zur Anwendung und im anderen Fall ersetzt ein linearer $H(B)$ -Zusammenhang das auf den Prandtl-Ishlinskii-Ansätzen beruhende ratenunabhängige Hysteresemodell.

Die Abbildung 5.21 stellt das bei einer Grundwellenfrequenz von 100 Hz und zehn äquidistanten Temperaturstufen im Bereich $-40\text{ °C} \leq \vartheta \leq 140\text{ °C}$ gemessene quasi-ratenunabhängige Magnetisierungsverhalten des MnZn-Ferrits vom Typ 3C94 in Schwarz sowie die Trajektorien des damit identifizierten Modells $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ in Blau dar. Die Modellordnungen sind $2l_1 + 1 = 29$, $2l_2 + 1 = 29$ und $m + 1 = 15$. Der Einsatz der Moving-Erweiterung ist hier nicht erforderlich, denn es zeigt sich, dass auch ohne sie über den gesamten Amplituden- und Temperaturbereich eine sehr gute Genauigkeit erzielt wird.

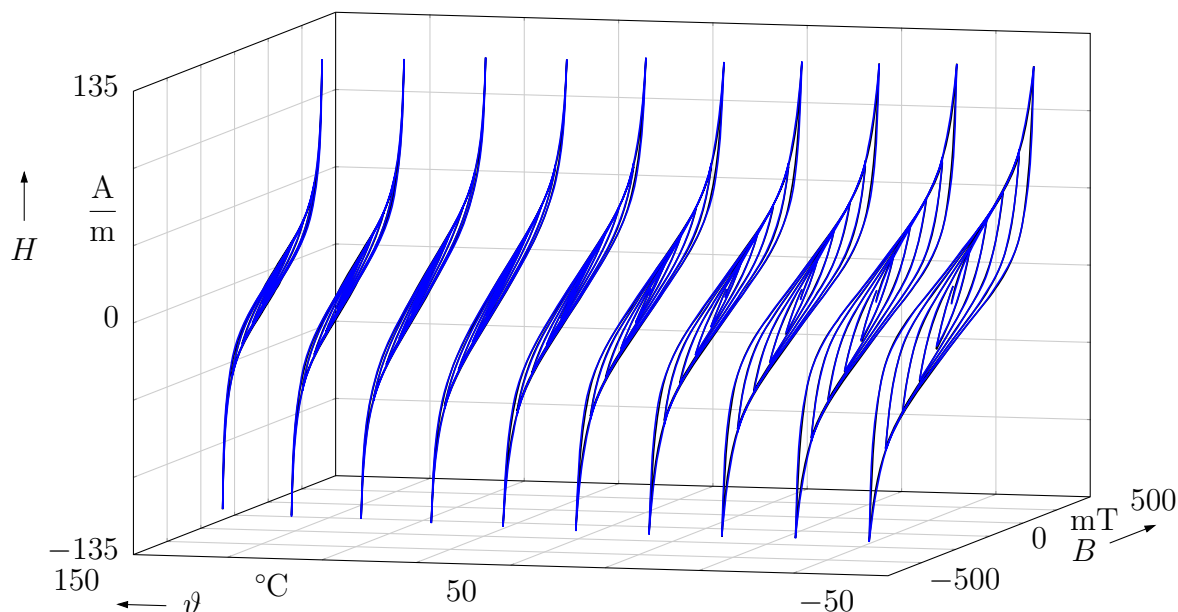


Bild 5.21: Gemessenes ratenunabhängiges Magnetisierungsverhalten des MnZn-Ferrits vom Typ 3C94 und Trajektorien des damit identifizierten Modells $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ für zehn äquidistante Temperaturstufen im Bereich $-40\text{ °C} \leq \vartheta \leq 140\text{ °C}$

Die Charakterisierung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens für dieselben Temperaturstufen erfolgt mittels der in der Abbildung 3.10f dargestellten Signalform des B -Feldes mit $B_{\text{max}} = 250\text{ mT}$ anhand von fünf äquidistanten Frequenzstufen im Bereich $10\text{ kHz} \leq f \leq 50\text{ kHz}$. Das Bild 5.22 demonstriert die Messergebnisse für die Temperatur 20 °C . Dabei lässt sich die ratenabhängige Aufweitung der Hysteresekurven zu steigenden Frequenzen hin deutlich erkennen.

Nach [Dre79a, Dre79b] kann man den Geometriefaktor für den gegebenen Ringkern mit rechteckiger Querschnittsfläche zu

$$F_G = \frac{1}{3} \pi \frac{d_a - d_i}{h} \left[1 - \frac{96}{\pi^5} \frac{d_a - d_i}{h} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-5} \tanh\left(\frac{\pi h k}{d_a - d_i}\right) \right] \frac{A_e}{8\pi} \quad (5.1)$$

$$\approx 0,55 \frac{A_e}{8\pi}$$

bestimmen. Die damit identifizierten temperaturabhängigen Parameter für die Kernmodellerweiterung zur Beschreibung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens führt

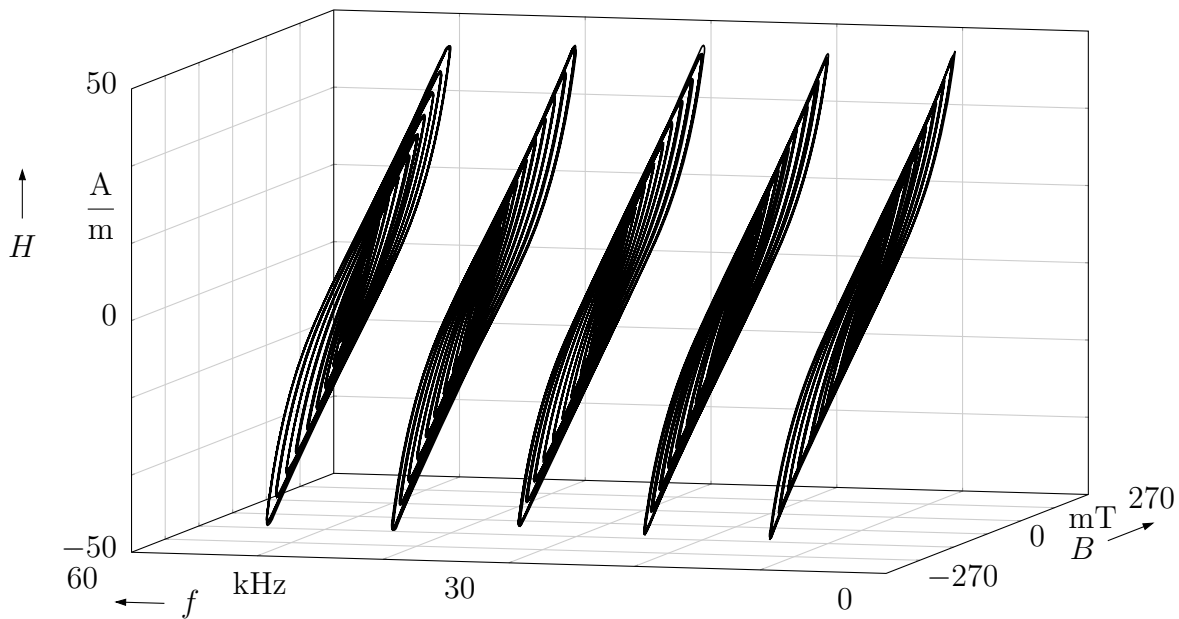


Bild 5.22: Gemessene Magnetisierungskurven des Ferritkerns vom Materialtyp MnZn 3C94 für fünf äquidistante Frequenzstufen im Bereich $10 \text{ kHz} \leq f \leq 50 \text{ kHz}$ und für die Temperatur $\vartheta = 20^\circ \text{C}$

ϑ	σ_0 in S m^{-1}	σ_1 in $\text{S m}^{-1} \text{T}^{-2}$	λ in $\sqrt{\text{Vm}}$
-40°C	24,0	27,5	$0,1 \cdot 10^{-3}$
-20°C	23,5	48,7	$0,1 \cdot 10^{-3}$
0°C	23,1	57,3	$0,1 \cdot 10^{-3}$
20°C	21,5	89,6	$0,4 \cdot 10^{-3}$
40°C	21,0	113,9	$1,0 \cdot 10^{-3}$
60°C	19,0	180,4	$1,7 \cdot 10^{-3}$
80°C	18,4	204,7	$2,3 \cdot 10^{-3}$
100°C	29,1	116,7	$2,9 \cdot 10^{-3}$
120°C	40,7	25,2	$3,5 \cdot 10^{-3}$
140°C	44,1	4,0	$4,2 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 5.1: Identifizierte temperaturabhängige Parameter für die Kernmodellerweiterung zur Beschreibung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens am Beispiel von MnZn 3C94

die Tabelle 5.1 auf. Demzufolge sind die Werte der elektrischen Leitfähigkeit, wie für MnZn-Ferrite typisch, eher klein und steigen zu höheren Temperaturen hin an. Im gesamten Temperaturbereich ist sie dennoch wesentlich größer als vom Hersteller angegeben. Dies kann zum einen darauf zurückzuführen sein, dass der Hersteller diese Größe rein elektrisch bestimmt, also ohne eine Aussteuerung des Kernmaterials mit einem magnetischen Wechselfeld, wohingegen hier eine bei der Ummagnetisierung im Klein- und Großsignalbereich

effektiv wirksame elektrische Leitfähigkeit ermittelt wird. Zum anderen geht aus der Literatur hervor, dass die Herstellerangaben in diesem Zusammenhang für gewöhnlich eher als Richtwerte mit relativ großem Toleranzbereich zu verstehen sind [Sta09, Alb17]. Den Werten von λ entsprechend ist der Einfluss von Austauschwirkungen im unteren Temperaturbereich vernachlässigbar. Er steigt zwar mit zunehmender Temperatur an, geht jedoch nicht über eine schwache Ausprägung hinaus.

Das Bild 5.23a stellt das gemessene und zur Modellparameteridentifikation herangezogene Kernverlustleistungsdichtekennfeld sowie das im Anschluss mit dem dynamischen Kernmodell berechnete Kernverlustleistungsdichtekennfeld vergleichend gegenüber. Es zeigt sich für den gesamten Amplituden-, Temperatur- und Frequenzbereich eine sehr gute Übereinstimmung. Die Abbildung 5.23b illustriert die zugehörige modellierte Aufteilung der Kernverlustleistungsdichtekomponenten. Es lässt sich deutlich erkennen, wie der Anteil der Wirbelstromverluste an den Gesamtverlusten zu hohen Frequenzen und zu hohen Temperaturen hin stark ansteigt. Im unteren Temperaturbereich bestimmen die ratenunabhängigen Hystereseverluste das Gesamtverlustverhalten über alle Frequenzstufen hinweg nahezu allein. Weiterhin wird die ausnahmslos sehr geringe Ausprägung des Austauschverlustanteils ersichtlich.

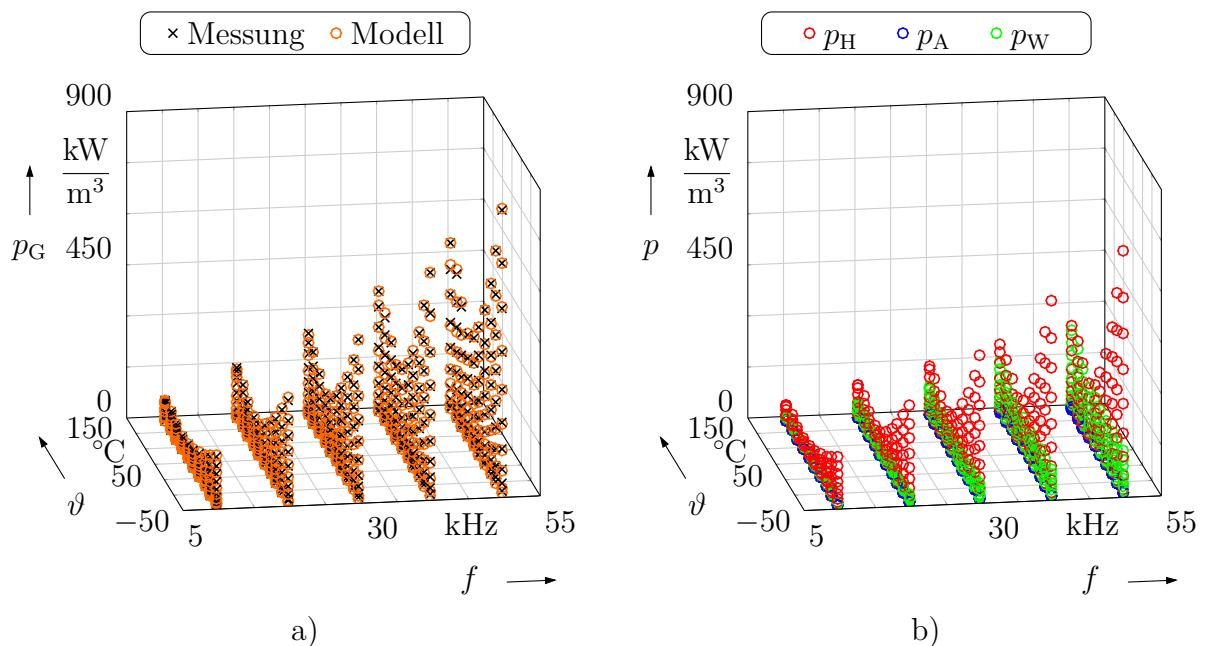


Bild 5.23: Charakterisierung und Modellierung des ratenabhängigen Kernverlustverhaltens für den Ferritkern vom Materialtyp MnZn 3C94 im Temperaturbereich $-40^{\circ}\text{C} \leq \vartheta \leq 140^{\circ}\text{C}$

- a) Gemessene und modellierte Gesamtkernverlustleistungsdichtekennfelder
 b) Modellierte Aufteilung der Kernverlustleistungsdichtekomponenten

Die für die Validierung des dynamischen Kernmodells im Temperaturbereich $-40^{\circ}\text{C} \leq \vartheta \leq 140^{\circ}\text{C}$ bei Wiederholraten von 10 kHz und 50 kHz genutzten quasistationären Zeitverläufe

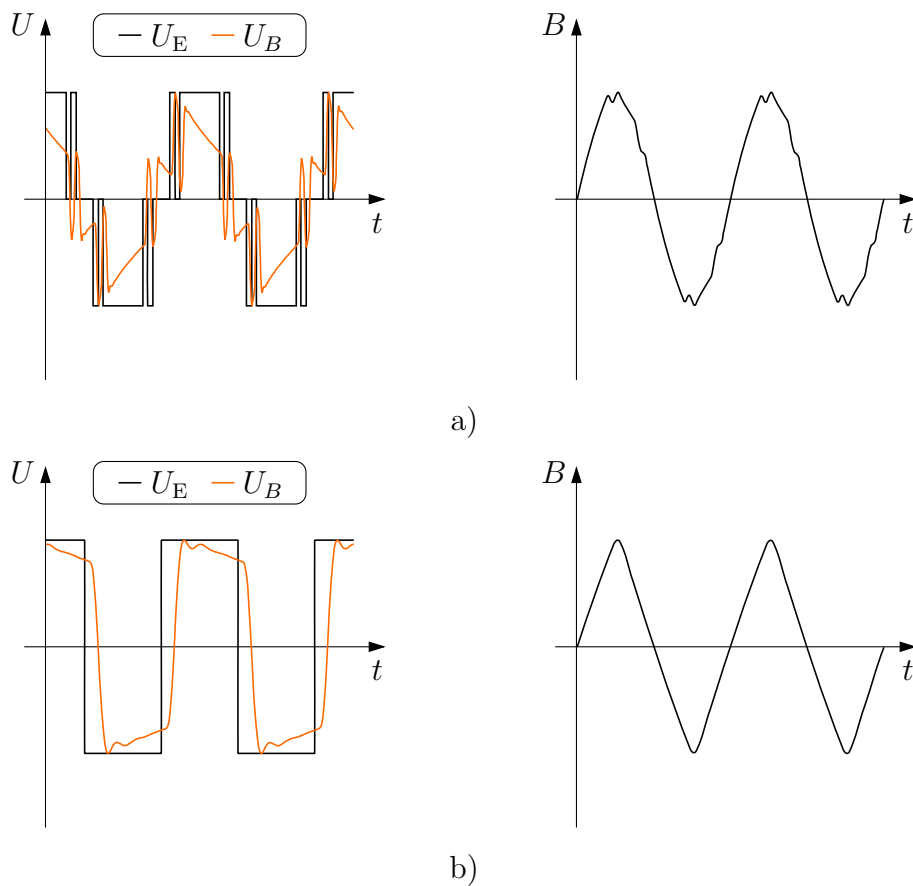


Bild 5.24: Schematische Darstellung der Zeitverläufe von U_E , der bei Verwendung des gesteuerten Messprinzips daraus resultierenden Verläufe von U_B (normiert) sowie der zugehörigen Zeitverläufe von B zur Validierung des dynamischen Kernmodells am Beispiel des Ferritkerns vom Materialtyp MnZn 3C94 bei magnetischen Aussteuerungen mit $B_{\max} = 200 \text{ mT}$

a) Erstes Validierungssignal bei einer Wiederholrate von 10 kHz

b) Zweites Validierungssignal bei einer Wiederholrate von 50 kHz

der Spannungs- und daraus resultierenden Flussdichtesignale zur symmetrischen Aussteuerung des Kernmaterials mit maximalen Flussdichteamplituden von $B_{\max} = 200 \text{ mT}$ werden in den Bildern 5.24a und 5.24b über eine Länge von zwei Signalperioden angedeutet. In beiden Fällen weisen die Signalformen von U_E sehr steile Flanken und ausgeprägte Plateaus auf. Aus diesem Grund und weil hier das rein gesteuerte Messprinzip nach Abbildung 3.5 zur Anwendung kommt, führt die Dynamik des Messkreises zu nennenswerten Unterschieden zwischen der Signalform der mit dem Funktionsgenerator vorgegebenen Spannung U_E und der daraus resultierenden Signalform der zur Sekundärspannung proportionalen Spannung U_B . Deshalb werden hier auch die sich tatsächlich ergebenden Zeitverläufe von U_B qualitativ veranschaulicht, wobei U_E und U_B im Interesse einer besseren Vergleichbarkeit auf denselben Amplitudenbereich normiert sind. Die die Eingangssignale des dynamischen Kernmodells bildenden und hier qualitativ aufgezeigten Zeitverläufe von B korrespondie-

ren folglich mit denen von U_B . In den Abbildungen 5.25a und 5.25b sind die dazugehörigen gemessenen sowie die mit dem Modell berechneten zeitabhängigen magnetischen Feldstärken am Beispiel der Temperaturstufe $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ dargestellt. Demzufolge erzielt das Modell in beiden Fällen eine hohe Genauigkeit.

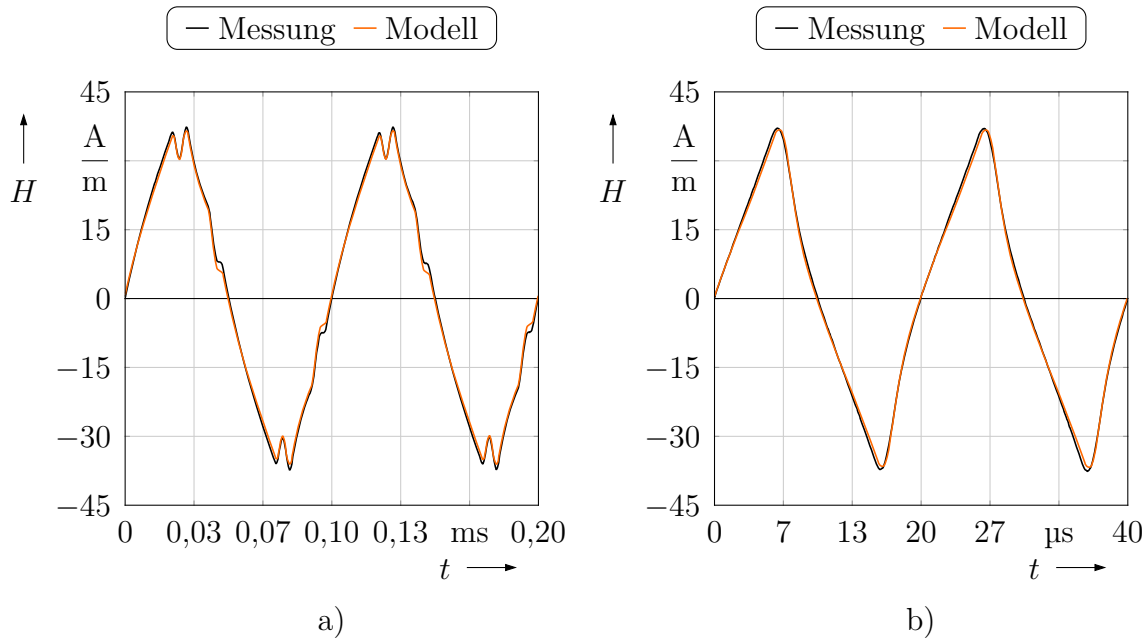


Bild 5.25: Gemessene und berechnete Zeitverläufe der magnetischen Feldstärke bei Aussteuerung des Ferritkerns vom Materialtyp MnZn 3C94 mit unterschiedlichen Testsignalen am Beispiel der Temperaturstufe $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

- a) Verwendung des 10-kHz-Testsignals gemäß Bild 5.24a mit $B_{\max} = 200\text{ mT}$
- b) Verwendung des 50-kHz-Testsignals gemäß Bild 5.24b mit $B_{\max} = 200\text{ mT}$

Mit den Bildern 5.26a-d werden darüber hinaus die für die jeweiligen Testsignale bei sieben gleichmäßig verteilten Temperaturstufen im Bereich von -40°C bis 140°C gemessenen und mit dem Modell berechneten Gesamtkernverlustleistungsdichten sowie die zugehörigen modellierten Aufteilungen der Kernverlustleistungsdichtekomponenten angegeben. Dabei treten auch Temperaturstützstellen auf, die nicht Bestandteil der Messdatenbasis zur Modellparameteridentifikation sind, wodurch sich zugleich die diesbezügliche Interpolationsfähigkeit des Modells prüfen lässt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Werte der berechneten Verlustleistungsdichten durch Linien miteinander verbunden. Für beide Validierungssignale liefert das Modell über den gesamten Temperaturbereich gute bis sehr gute Ergebnisse. Der betragsmäßig maximale relative Fehler tritt im Fall des 10-kHz-Testsignals bei der Temperaturstufe 110°C auf und beziffert sich zu $7,2\%$. Nach Abbildung 5.26b wird das Gesamtverlustverhalten bei dieser Aussteuerung über den ganzen Temperaturbereich hinweg hauptsächlich durch die ratenunabhängigen Hystereseverluste bestimmt. Im Fall des 50-kHz-Testsignals nimmt der relative Modellfehler den betragsmäßig größten Wert mit $4,7\%$ bei der Temperaturstufe 80°C an. Die Abbildung 5.26d zeigt, dass die ratenunabhängigen Hystereseverluste und die Verluste infolge von klassischen Wirbelströmen nun

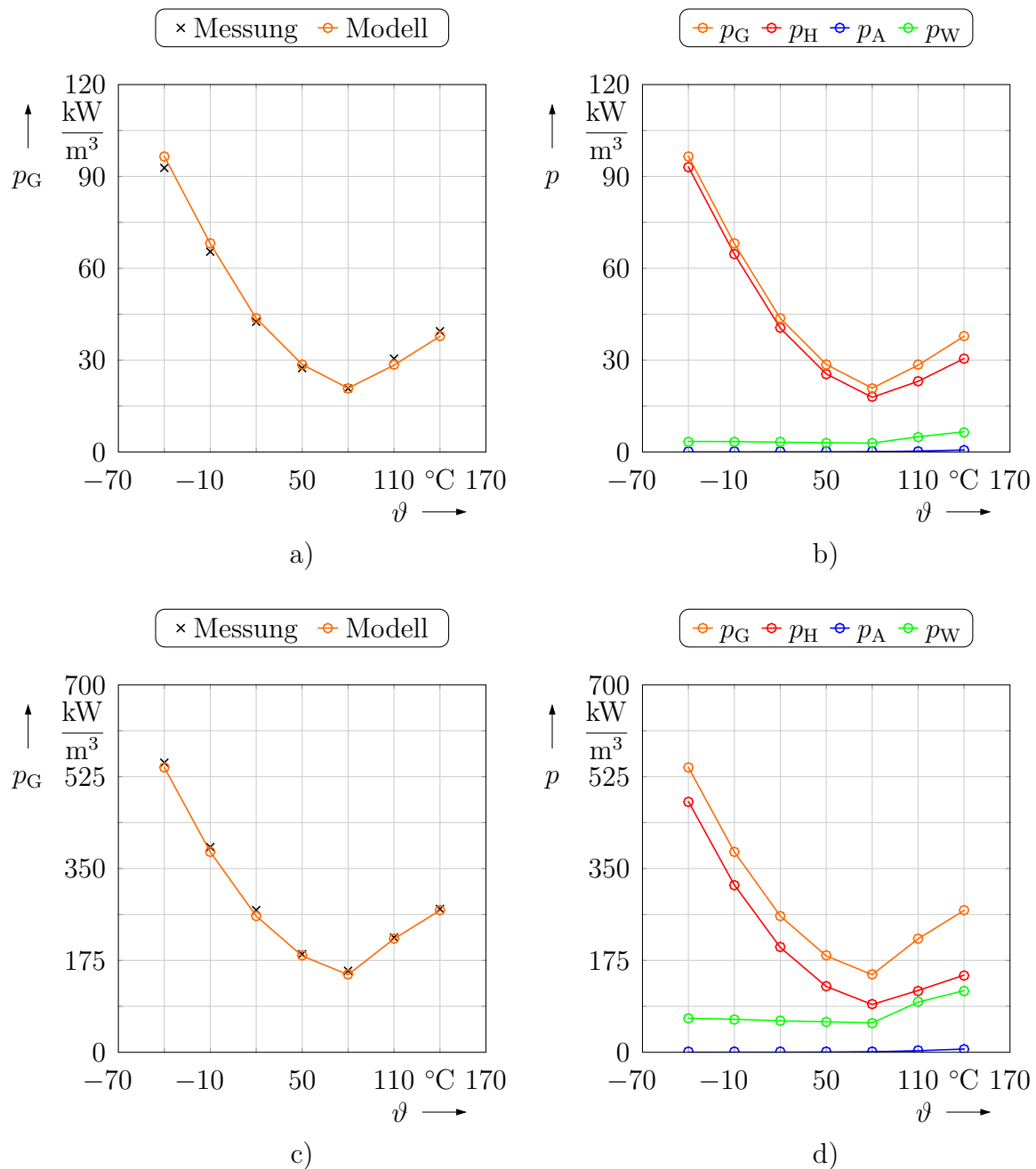


Bild 5.26: Gemessene und berechnete Gesamtkernverlustleistungsdichten sowie die modellierte zugehörige Aufteilung der Kernverlustleistungsdichteanteile bei Aussteuerung des Ferritkerns vom Materialtyp MnZn 3C94 mit den Testsignalen nach Bild 5.24 für verschiedene Temperaturen und $B_{\max} = 200 \text{ mT}$

- Gesamtkernverlustleistungsdichten für das 10-kHz-Testsignal in Bild 5.24a
- Kernverlustleistungsdichteanteile für das 10-kHz-Testsignal in Bild 5.24a
- Gesamtkernverlustleistungsdichten für das 50-kHz-Testsignal in Bild 5.24b
- Kernverlustleistungsdichteanteile für das 50-kHz-Testsignal in Bild 5.24b

ab einer Temperatur von ungefähr 80 °C annähernd zu gleichen Teilen die Gesamtverluste ausmachen. Unterhalb davon dominieren die ratenunabhängigen Hystereseverluste deutlich. Die Austauschverluste sind erwartungsgemäß in beiden Fällen der Kernaussteuerung ab etwa 80 °C sehr schwach ausgeprägt und darunter vernachlässigbar.

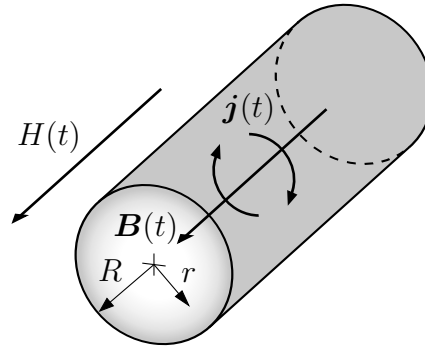


Bild 5.27: Zur Bestimmung der Induktionsverteilung im massiven Eisenzylinder

Aufbauend auf den vorangegangenen Erkenntnissen erfolgt im weiteren Verlauf die Validierung des erweiterten dynamischen Kernmodells, das auch die Berücksichtigung der Flussverdrängungseffekte infolge von klassischen Wirbelströmen gestattet. In Vorbereitung darauf soll vorab unabhängig vom Modell für die ratenunabhängige Hysterese sowie dem Verlustseparationsansatz das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Schalenmodell mit jenem von Schweer verglichen werden. Dazu dienen zwei von ihm bereits für die Untersuchungen zu seinem Modell herangezogenen theoretischen Beispiele, bei denen die Induktionsverteilung in langen, von einem nichtmagnetischen Material umgebenen, massiven Eisenzylindern mit linearem Magnetisierungsverhalten für zeitlich sinusförmige Induktionsverläufe berechnet wird. Das Bild 5.27 zeigt eine entsprechende Illustration eines Zylinderabschnittes mit dem laufenden Radius r und dem Zylinderradius R . Unter diesen Randbedingungen lässt sich die Problemstellung auch analytisch auf der Grundlage der Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung gemäß

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{H}}{dr} - j\omega\sigma\mu_0\mu_r \underline{H} = 0 \quad (5.2)$$

untersuchen, sodass damit exakte Referenzdaten für die Bewertung der Schalenmodelle zur Verfügung stehen [Dav90, Sch97]. Der angegebenen Literatur zufolge führt das Lösen dieser Gleichung auf

$$\frac{\underline{H}(r)}{\underline{H}(R)} = \frac{\text{ber}\left(\sqrt{2}\frac{r}{\delta}\right) + j \text{bei}\left(\sqrt{2}\frac{r}{\delta}\right)}{\text{ber}\left(\sqrt{2}\frac{R}{\delta}\right) + j \text{bei}\left(\sqrt{2}\frac{R}{\delta}\right)} \quad (5.3)$$

mit den Hilfsfunktionen

$$\text{ber}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{(0,5x)^{2k}}{(2k)!} \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

und

$$\text{bei}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{(0,5x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^2 \right]. \quad (5.5)$$

Darin ist δ die nach Gleichung (4.188) zu berechnende Eindringtiefe. Aufgrund des vorausgesetzten direkt proportionalen Zusammenhangs zwischen \underline{H} und \underline{B} wird dadurch zugleich die normierte Amplitudenverteilung $\frac{|\underline{B}(r)|}{|\underline{B}(R)|}$ und die Phasenlage der magnetischen Induktion $\arg(\underline{B}(r))$ bestimmt.

Die Tabelle 5.2 stellt für beide Beispiele die Simulationsparameter und die anhand der Gleichung (4.188) ermittelten Werte von δ dar. Es werden einzig die relative magnetische Permeabilität μ_r sowie Betrag und Phasenlage der eingepprägten Gesamtinduktion \underline{B} variiert. Letztere ist jeweils so gewählt, dass am Zylinderrand $\underline{B}(R) = 1 \text{ T} \cdot e^{j0^\circ}$ gilt. Aufgrund der vergleichsweise hohen elektrischen Leitfähigkeit des Eisens kommt es hier schon bei kleinen Frequenzen zu stark ausgeprägten Feldverdrängungseffekten. So beträgt die nach (4.188) berechnete Eindringtiefe in Bezug auf den Zylinderradius R für das Beispiel 1 $\delta = 0,5R$ und für das Beispiel 2 lediglich noch $\delta \approx 0,3R$.

	f in Hz	\underline{B} in mT	σ in S m^{-1}	μ_r	R in mm	δ in mm
Beispiel 1	50	$651,36 \cdot e^{-j34,54^\circ}$	$1,705 \cdot 10^6$	742,8	4,00	2,00
Beispiel 2	50	$409,57 \cdot e^{-j39,94^\circ}$	$1,705 \cdot 10^6$	1901,6	4,00	1,25

Tabelle 5.2: Parameter zur Simulation der Induktionsverteilung im massiven Eisenzyylinder und damit abgeschätzte Eindringtiefe an zwei Beispielen nach [Sch97]

Die Abbildungen 5.28 und 5.29 zeigen für beide Beispiele die Beträge $\frac{|\underline{B}(r)|}{|\underline{B}(R)|}$ und mit $\varphi = \arg(\underline{B}(r))$ die Phasenwinkel der Induktion in Abhängigkeit des Radius r , bezogen auf die jeweiligen Größen am Zylinderrand. Dabei werden die anhand der Schalenmodelle nach Schweer und Salomon für eine unterschiedliche Schalenanzahl n berechneten Werte mit denen nach der exakten Lösung verglichen. Die Bilder bestätigen in beiden Fällen eine durch die klassischen Wirbelströme bewirkte signifikante Schwächung der Induktion im Zylinderinneren sowie ihr Nacheilen gegenüber dem Feld am Zylinderrand. Die Ummagnetisierung erfolgt also zeitlich nacheinander von außen nach innen und dieser Effekt weist eine umso stärkere Ausprägung auf, je kleiner die Eindringtiefe ist. Es fällt auf, dass der Wert von δ für das Beispiel 1 keine gute Approximation der wahren Eindringtiefe darstellt, denn selbst der bei $r = 0$ auftretende minimale Scheitelwert der magnetischen Flussdichte liegt noch deutlich oberhalb von dem $1/e$ -Fachen der maximalen Amplitude am Zylinderrand. Die Ursache dafür ist die große Diskrepanz zwischen den in diesem Fall vorliegenden Verhältnissen und der zur Herleitung der Beziehung (4.188) getroffenen Annahme eines Leiters mit ebener Oberfläche und einer Dicke, die sehr viel größer als die Eindringtiefe ist. Der mit dieser Gleichung bestimmte Wert von δ entspricht bei kreisförmigen Querschnitten folglich umso genauer der wahren Eindringtiefe, je kleiner δ im Vergleich zu R ist. Für

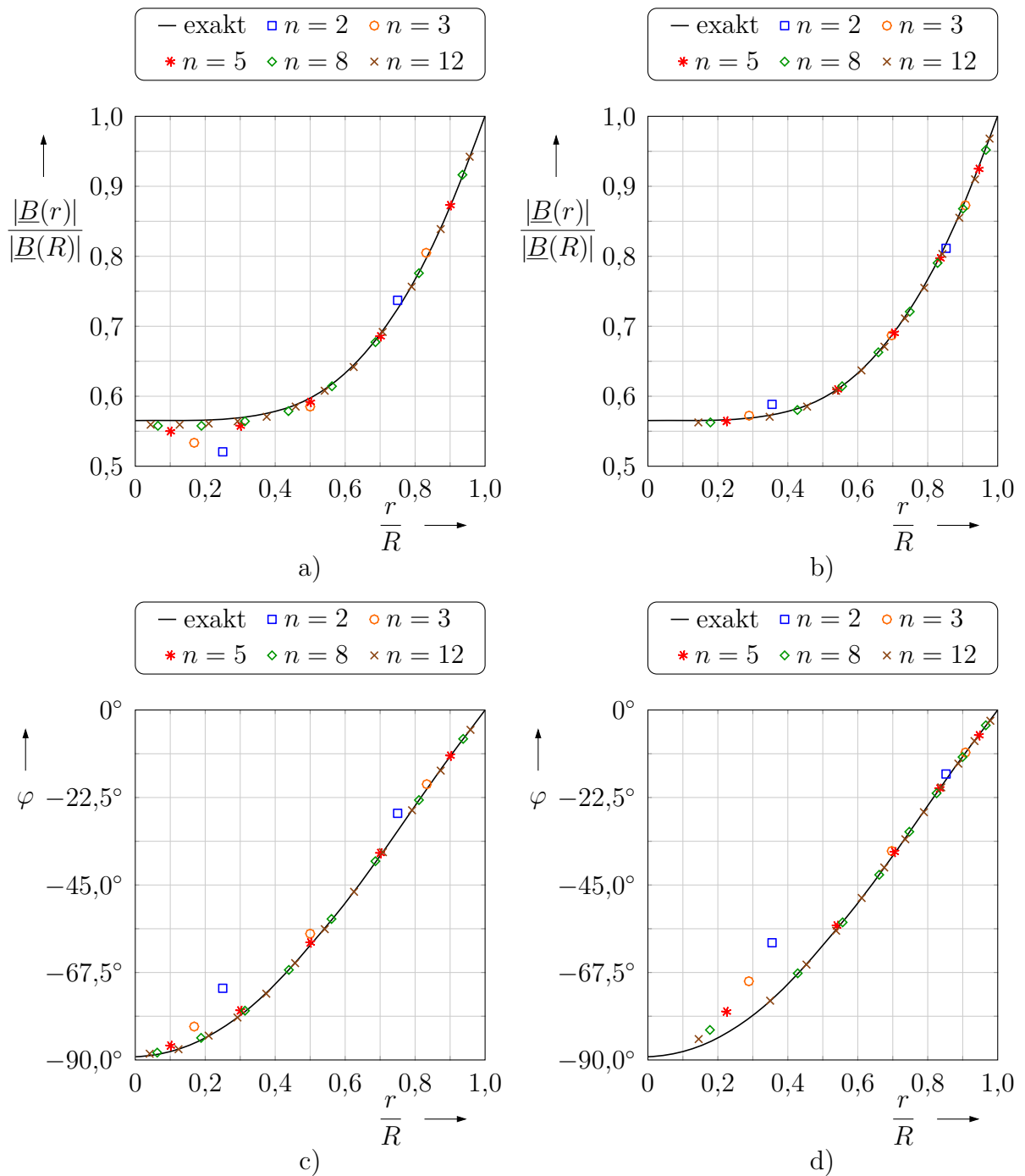


Bild 5.28: Anhand der Schalenmodelle nach Schwer und Salomon simulierte Beträge und Phasenlagen der Induktion im massiven Eisenzyylinder mit linearer Magnetisierungskennlinie für das Beispiel 1, angelehnt an [Sch97]

- Beträge der Induktion gemäß Schalenmodell nach Schwer
- Beträge der Induktion gemäß Schalenmodell nach Salomon
- Phasenlagen der Induktion gemäß Schalenmodell nach Schwer
- Phasenlagen der Induktion gemäß Schalenmodell nach Salomon

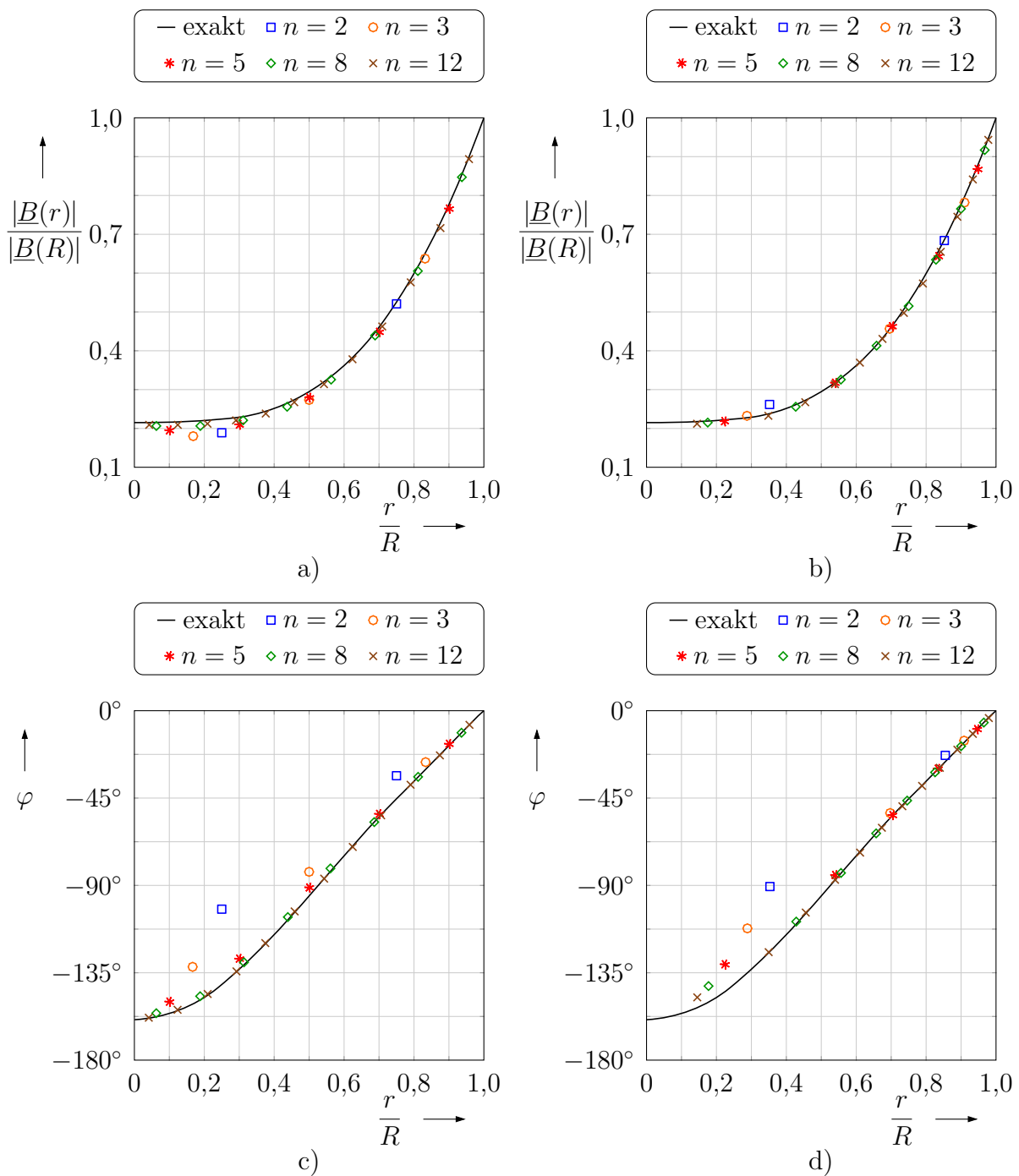


Bild 5.29: Anhand der Schalenmodelle nach Schwer und Salomon simulierte Beträge und Phasenlagen der Induktion im massiven Eisenzyylinder mit linearer Magnetisierungskennlinie für das Beispiel 2, angelehnt an [Sch97]

- Beträge der Induktion gemäß Schalenmodell nach Schwer
- Beträge der Induktion gemäß Schalenmodell nach Salomon
- Phasenlagen der Induktion gemäß Schalenmodell nach Schwer
- Phasenlagen der Induktion gemäß Schalenmodell nach Salomon

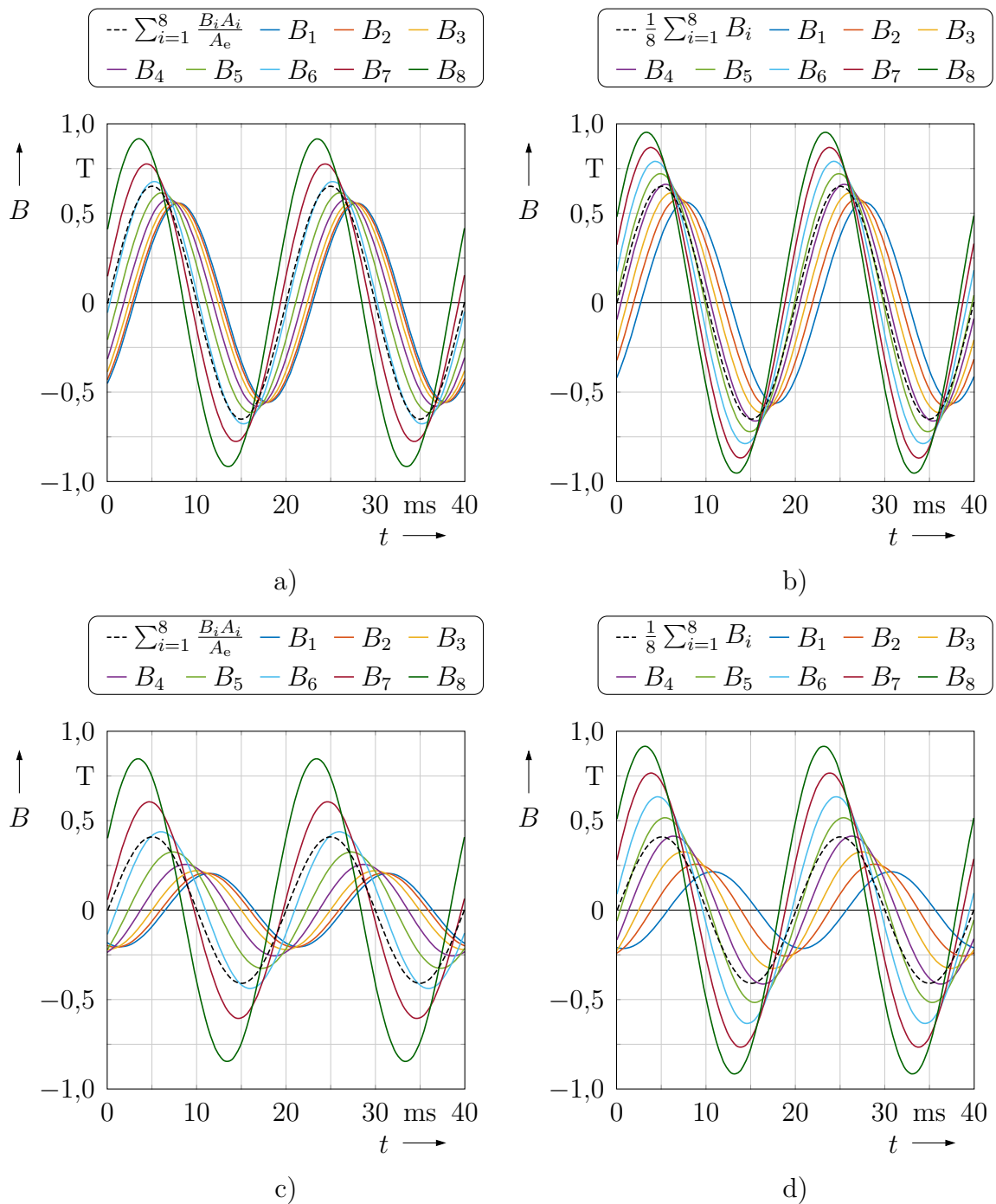


Bild 5.30: Anhand der Schalenmodelle nach Schwer und Salomon mit $n = 8$ simulierte Zeitverläufe zur Induktionsverteilung im massiven Eisenzyylinder mit linearer Magnetisierungskennlinie

- Induktionsverteilung für das Beispiel 1 gemäß Schalenmodell nach Schwer
- Induktionsverteilung für das Beispiel 1 gemäß Schalenmodell nach Salomon
- Induktionsverteilung für das Beispiel 2 gemäß Schalenmodell nach Schwer
- Induktionsverteilung für das Beispiel 2 gemäß Schalenmodell nach Salomon

das Beispiel 2 stimmen die geschätzte $1/e$ -Eindringtiefe mit $0,31R$ und die tatsächliche mit $0,39R$ bereits näherungsweise überein.

Die anhand der Modelle berechneten Zahlenwerte der auf die Schalenmitten bezogenen Amplituden und Phasenlagen nähern die exakte Lösung erwartungsgemäß mit steigenden Modellordnungen immer besser an. In den Bildern 5.28b-d und 5.29b-d zeigen sich die größten Unterschiede in den Bereichen, wo die Funktionsgraphen der exakten Lösungen die größten positiven Krümmungen aufweisen. Die approximierten Werte liegen dabei oberhalb der Referenzverläufe, was vor dem Hintergrund einer mit den Schalenmodellen einhergehenden abschnittsweisen Durchschnittsbildung der Flussdichteverteilung plausibel ist. Die mit dem Wirbelstromersatzschaltbild nach Schweer berechneten Induktionsverteilungen zeigen hingegen gemäß den Bildern 5.28a und 5.29a nahe der Zylinderachse die größten Abweichungen. Hier liegen die approximierten Werte unterhalb der Referenzverläufe und unterschreiten auch die kleinsten auftretenden Werte der exakten Lösung. In der Folge besitzt das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Schalenmodell ein besseres Konvergenzverhalten als das von Schweer verwendete.

In Ergänzung zu den Darstellungen 5.28 und 5.29 illustrieren die Bilder 5.30a-d für beide Beispiele und Schalenmodelle die mit der Modellordnung $n = 8$ simulierten Zeitverläufe der sich in den einzelnen Schalen ausbildenden magnetischen Flussdichten. Die gestrichelten schwarzen Kurven kennzeichnen zudem die vorgegebene Gesamtinduktion $B(t)$. Aufbauend auf den Beziehungen (2.72) und (4.217) ist der Zusammenhang zwischen ihr und den schalenspezifischen Induktionen $B_1(t) \dots B_n(t)$ bei einem Schalenmodell mit n Schalen im Allgemeinen durch ein gewichtetes arithmetisches Mittel gegeben, wobei die Teilflächen $A_1 \dots A_n$ der Gesamtkernquerschnittsfläche A_e die Gewichte darstellen. Dementsprechend gilt die Beziehung

$$B(t) = \frac{1}{A_e} \sum_{i=1}^n B_i(t) A_i. \quad (5.6)$$

Wird ein Schalenmodell verwendet, das den magnetischen Pfad in Flussröhren mit betragsmäßig gleichen Querschnittsflächen entsprechend Gleichung (4.237) unterteilt, lässt sich der Zusammenhang zwischen der Gesamtinduktion und den schalenbezogenen Induktionen vereinfacht durch das ungewichtete arithmetische Mittel angeben. Es gilt dann

$$B(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(t). \quad (5.7)$$

Nachdem nun das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Schalenmodell für sich validiert ist, soll in einem nächsten Schritt die Leistungsfähigkeit des gesamten erweiterten ratenabhängigen Kernmodells an einem realen Beispiel unter Verwendung des aus dem Material Somaloy 1000 3P gefertigten Ringkerns aufgezeigt werden. Die Bilder 5.31a und 5.31b illustrieren den zur Charakterisierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens mit einer Grundwellenfrequenz von 1 Hz und mit $B_{\max} = 1$ T eingepprägten Zeitverlauf von B , die zugehörigen für die Temperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ gemessenen Hysteresekurven in Schwarz sowie die Trajektorien des damit identifizierten inversen Verallgemeinerten

Prandtl-Ishlinskii-Hystereseeoperator $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ in Blau. Bei dem Modell kommt die Moving-Erweiterung mit dem Moving-Parameter $k = 700$ zur Anwendung. Die Modellordnungen sind mit $2l_1 + 1 = 39$, $2l_2 + 1 = 39$ und $m + 1 = 45$ großzügig gewählt, sodass auch gegebenenfalls sehr kleine Unterschiede zwischen den magnetischen Aussteuerungen der einzelnen Schalen Berücksichtigung finden können. Um der damit einhergehenden gesteigerten Anpassungsfähigkeit des Modells im Identifikationsprozess besser gerecht zu werden, besitzt das hier eingesetzte Charakterisierungssignal im Vergleich zu dem bisher verwendeten nach Abbildung 3.10c doppelt so viele Amplitudenstufen. Die zugehörigen gemessenen und mit dem Modell wiedergegebenen Hysteresekurven stehen in sehr guter Übereinstimmung.

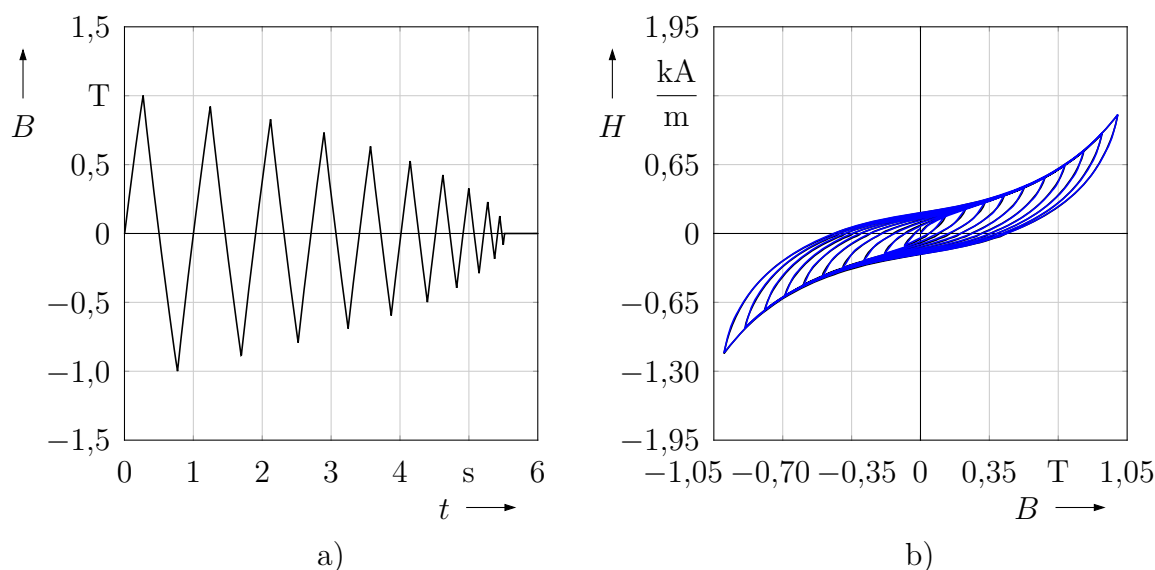


Bild 5.31: Charakterisierung und Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens von Somaloy 1000 3P für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

- a) Zeitverlauf von B zur Charakterisierung der ratenunabhängigen Hysterese
 b) Messdaten und Trajektorien des identifizierten Modells $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ mit $k = 700$

Zur Charakterisierung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens bei 20°C wird der Magnetkern anhand der Signalform des B -Feldes nach Abbildung 3.10f bei den Frequenzstufen 100 Hz, 200 Hz und 300 Hz mit $B_{\text{max}} = 800$ mT angesteuert. Das Bild 5.32 stellt die gemessenen Hysteresekurven dar. Innerhalb dieses Frequenzbereiches prägen die ratenabhängigen Effekte das Kernverlustverhalten schon nennenswert, die magnetische Flussdichte ist aber noch in guter Näherung homogen über den Kernquerschnitt verteilt. Dessen quadratische Gestalt wird hier durch einen Kreisquerschnitt approximiert, sodass der in der Gleichung (4.205) angegebene Geometriefaktor $F_G = \frac{A_e}{8\pi}$ zur Anwendung kommt. Die Tabelle 5.3 beinhaltet die damit identifizierten Parameter für die Kernmodellerweiterung zur Beschreibung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens. Auch in diesem Fall liegt der Wert der ermittelten elektrischen Leitfähigkeit oberhalb von dem, den der Hersteller angibt. Der Einfluss von Austauschwirkungen ist vernachlässigbar.

Die Abbildung 5.33a veranschaulicht das gemessene und zur Modellparameteridentifikation herangezogene Kernverlustleistungsdichtekennfeld sowie das mit dem parametrierten

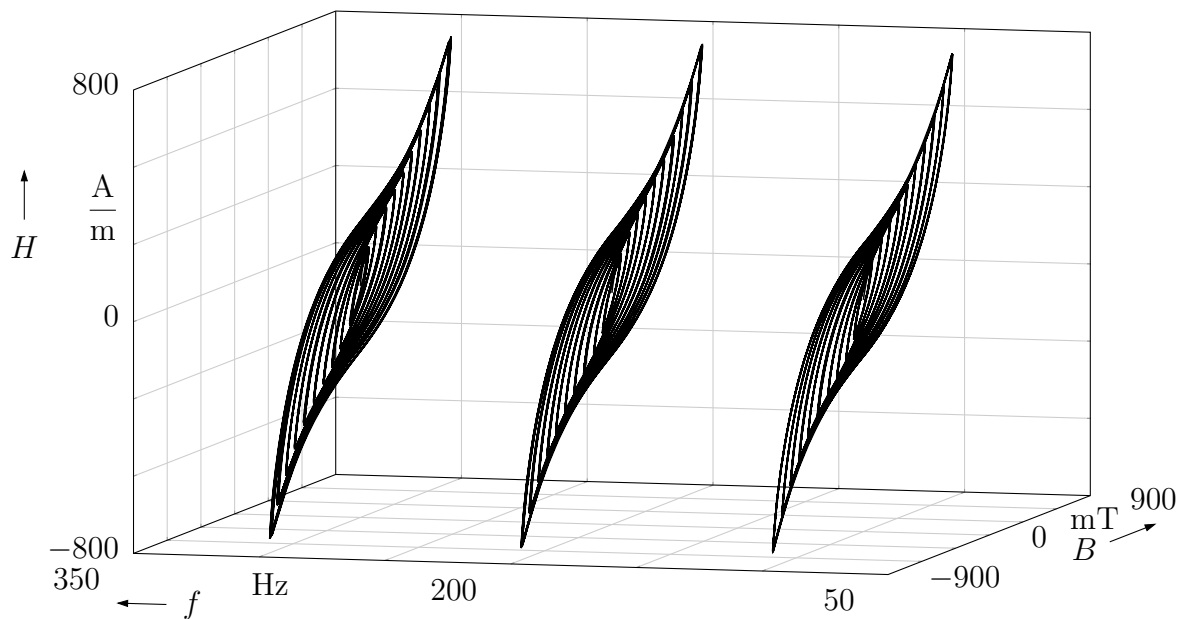


Bild 5.32: Gemessene Magnetisierungskurven des Magnetkerns vom Materialtyp Somaloy 1000 3P für die Frequenzstufen 100 Hz, 200 Hz und 300 Hz bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

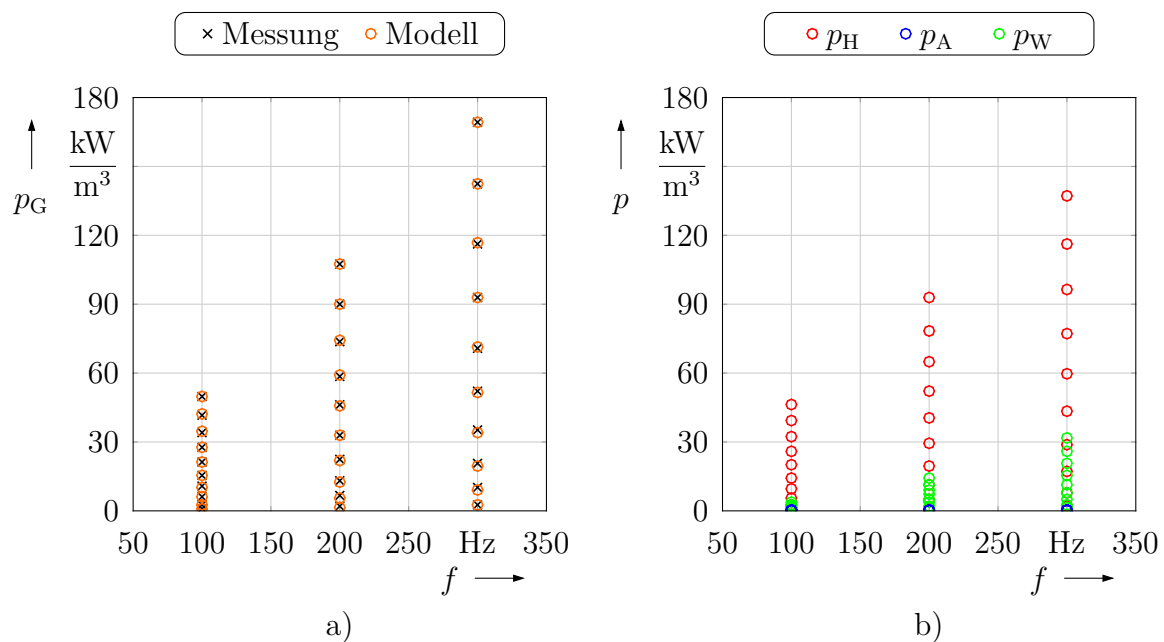


Bild 5.33: Charakterisierung und Modellierung des ratenabhängigen Kernverlustverhaltens für den Magnetkern vom Materialtyp Somaloy 1000 3P bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$
a) Gemessene und modellierte Gesamtkernverlustleistungsdichtekennfelder
b) Modellierte Aufteilung der Kernverlustleistungsdichtekomponenten

dynamischen Kernmodell berechnete. Demnach liegt für den gesamten Amplituden- und Frequenzbereich eine sehr gute Übereinstimmung vor. Die zugehörige modellierte Aufteilung der Kernverlustleistungsdichtekomponenten gibt das Bild 5.33b an. Daran wird ersichtlich, wie der den klassischen Wirbelströmen zuzuschreibende Anteil an den Gesamtverlusten mit steigender Frequenz an Bedeutung gewinnt. In diesem Frequenzbereich bleiben die ratenunabhängigen Hystereseverluste aber mit deutlichem Abstand der dominante Verlustanteil.

ϑ	σ_0 in S m^{-1}	σ_1 in $\text{S m}^{-1} \text{T}^{-2}$	λ in $\sqrt{\text{V m}}$
20°C	$28,28 \cdot 10^3$	0	$0,1 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 5.3: Identifizierte Parameter für die Kernmodellerweiterung zur Beschreibung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens am Beispiel von Somaloy 1000 3P bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Die Validierung des dynamischen Kernmodells inklusive der Kernmodellerweiterung zur Berücksichtigung der Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen erfolgt mithilfe der im Bild 5.34 über eine Länge von zwei Signalperioden angedeuteten quasistationären Zeitverläufe der Spannungs- und daraus resultierenden Flussdichtesignale. So werden bei einer Magnetkerntemperatur von $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ für die Frequenzstufen 300 Hz, 1 kHz, 2 kHz und 5 kHz zeitlich sinusförmige Gesamtinduktionen mit $B_{\text{max}} \approx 500 \text{ mT}$ eingepreßt.

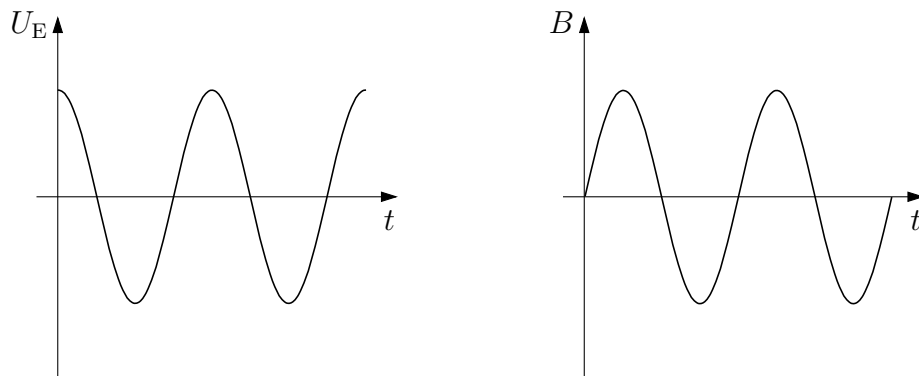


Bild 5.34: Schematische Darstellung des Zeitverlaufs von U_E und des zugehörigen Zeitverlaufs von B zur Validierung der Kernmodellerweiterungen für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten mit Berücksichtigung der Flussverdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen

Die Bilder 5.35a-d stellen die gemessenen Zeitverläufe der Gesamtinduktionen und jeweils die berechneten Einzelinduktionen für eine modellierte Magnetkernpartitionierung mit fünf Flussröhren dar. Der Zusammenhang zwischen der Gesamtinduktion und den zugehörigen flussröhrenbezogenen Induktionen ist dabei durch (5.7) gegeben. Das Bild 5.35a zeigt die Verhältnisse für 300 Hz, was der höchsten Frequenzstufe der Messdatenbasis zur Identifikation der ratenabhängigen Modellparameter entspricht. Hier gibt es erwartungsgemäß

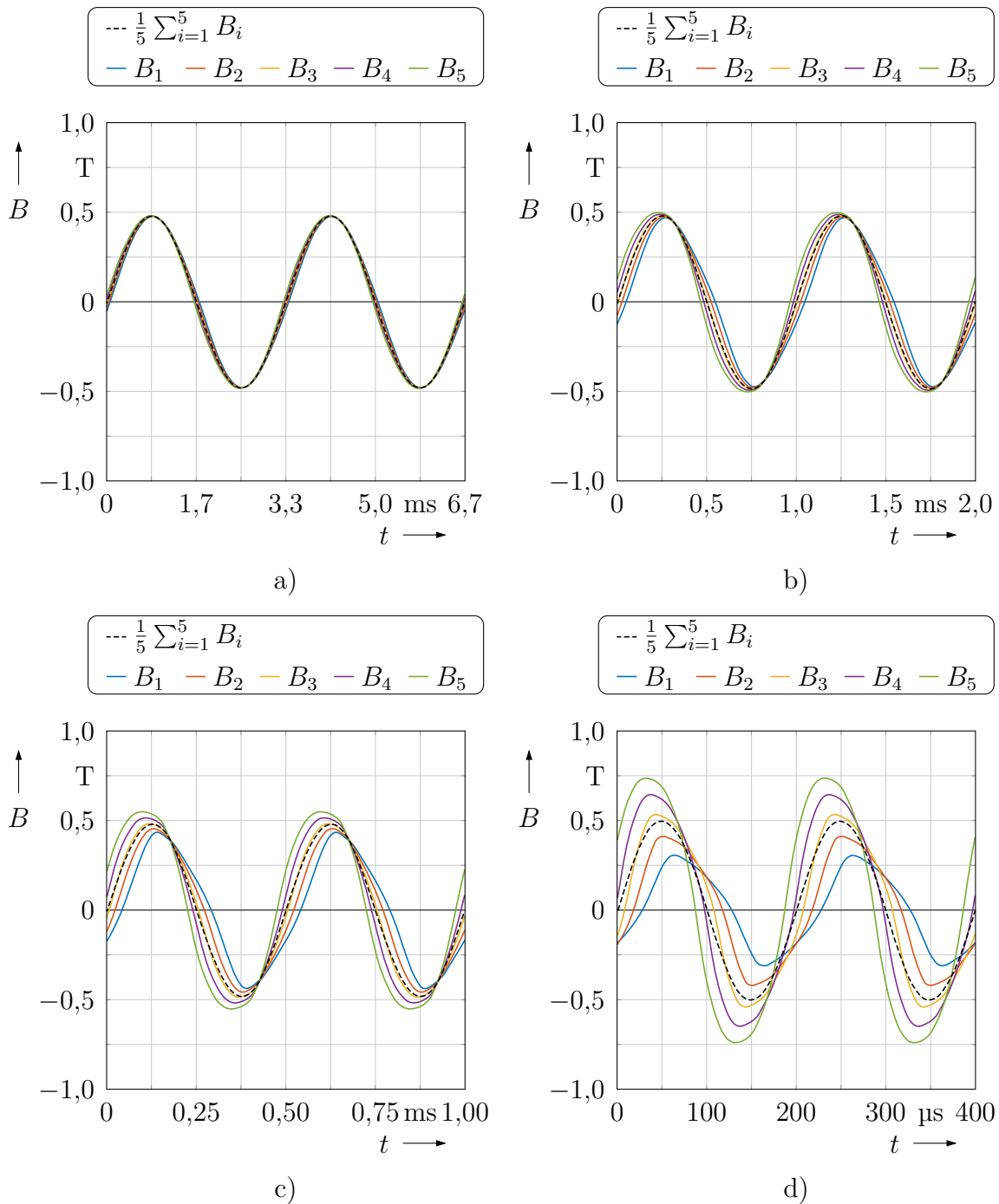


Bild 5.35: Simulierte Zeitverläufe zur Induktionsverteilung im Somaloy 1000 3P Ringkern bei Vorgabe einer sinusförmigen Gesamtinduktion mit $B_{\max} \approx 500$ mT für verschiedene Frequenzen und $\vartheta = 20^\circ\text{C}$
a) $f = 300$ Hz b) $f = 1$ kHz c) $f = 2$ kHz d) $f = 5$ kHz

nahezu keinen Unterschied zwischen den zeitlichen Verläufen der einzelnen Flussdichten. Bei 1 kHz hingegen erkennt man den Einfluss der klassischen Wirbelströme gemäß Bild 5.35b an den unterschiedlichen Phasenlagen und Spitzenwerten der Flussdichteverläufe bereits deutlich. Dies geht mit Verzerrungen der sinusförmigen Kurvenform einher, was sich insbesondere an der Flussdichte $B_1(t)$ im innersten Bereich des Kerns abzeichnet. Die Bilder 5.35c und 5.35d verdeutlichen anhand der Verhältnisse für die Frequenzstufen 2 kHz und 5 kHz, wie sich diese Effekte mit steigender Frequenz weiter verstärken. Im letzteren Fall beträgt die maximale Flussdichteamplitude im innersten Bereich des Kerns nur noch 307 mT und im Randbereich 738 mT. Der betragsmäßige Phasenunterschied liegt bei 73° . An dieser Stelle sei ergänzend angemerkt, dass sich die auftretenden Maximalamplituden im Inneren des Kerns bei gleichbleibender Signalfrequenz umso weniger von denen am Rand unterscheiden, je stärker das Kernmaterial bis in den Sättigungsbereich ausgesteuert wird, denn dann verringert sich die Permeabilität, wodurch wiederum die Eindringtiefe steigt. Das führt also zu einem tieferen Eindringen des magnetischen Feldes in das Kerninnere. Demnach sind die Induktionsamplituden im Inneren und am Rand des Magnetkerns bei starker magnetischer Sättigung weitgehend gleich. Der Einfluss der Wirbelströme lässt sich dann vor allem noch anhand der zeitlich nacheinander von außen nach innen verlaufenden Ummagnetisierung feststellen [Sch97].

Im Rahmen der Validierung soll auch ein Vergleich mit zwei anderen Modellkonstellationen erfolgen, bei denen einzelne Teilmodelle des in der vorliegenden Arbeit entwickelten Gesamtkernmodells durch andere Ansätze substituiert werden. Im ersten Fall kommt anstelle des Schalenmodells nach Salomon jenes von Schweer als Kernmodellerweiterung zur Berücksichtigung der Flussverdrängung zur Anwendung. Dabei wird weiterhin von demselben identifizierten inversen Verallgemeinerten Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ zur Modellierung der ratenunabhängigen Hysterese Gebrauch gemacht und die identifizierten Parameter für das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten bleiben ebenfalls unverändert. Letzteres trifft auch im zweiten Fall zu, wenn das Schalenmodell nach Salomon verwendet wird, aber nun, einer konstanten Permeabilität entsprechend, ein linearer $H(B)$ -Zusammenhang das komplexe ratenunabhängige Hysteresemodell ersetzt. Dazu zeigt das Bild 5.36 die gemessenen Kurven, die die ratenunabhängige Hysterese von Somaloy 1000 3P für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ charakterisieren, und eine durch den Koordinatenursprung verlaufende lineare Kennlinie, die dieses Verhalten bei der Verwendung der Modellordnungen $2l_1 + 1 = 1$, $2l_2 + 1 = 1$ und $m + 1 = 1$ gemäß Kapitel 4.2.4 im Sinne einer minimierten Gütefunktion entsprechend $\min\{V_{\text{VT}^{-1}}(\mathbf{v}'_{\text{H1}}, \mathbf{v}'_{\text{H2}}, \mathbf{w}'_{\text{H}})\}$ bestmöglich approximiert.

Die Bilder 5.37a-d veranschaulichen die gemessenen, die für $n = 1$, $n = 3$ und $n = 5$ mit dem unveränderten Gesamtkernmodell nach Salomon berechneten sowie die mit den beiden anderen vorstehend beschriebenen Modellkonstellationen für $n = 5$ ermittelten Zeitverläufe der magnetischen Randfeldstärke, die bei der Einprägung der Gesamtinduktionen für die unterschiedlichen Frequenzen entstehen. Bei 300 Hz stimmen gemäß Bild 5.37a die mit dem originalen Modell nach Salomon für die verschiedenen Modellordnungen simulierten Zeitverläufe und jener, der anhand der modifizierten Variante mit dem Schweer-Schalenmodell berechnet ist, sehr gut mit den Messdaten überein. Die Modellkonstellation, die eine lineare Magnetisierungskennlinie zugrunde legt, erzielt vergleichsweise schlechte Ergebnisse. Man

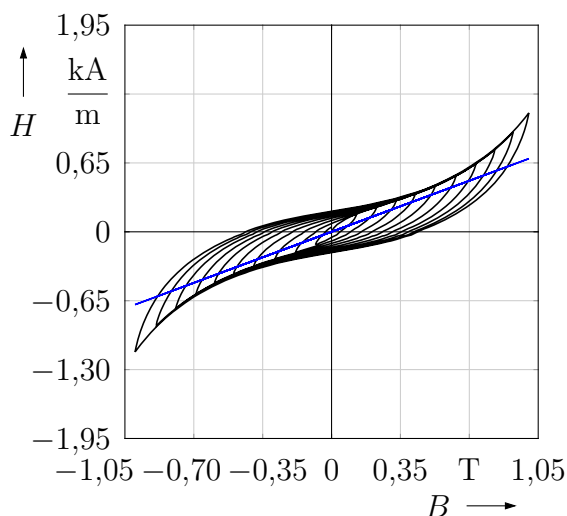


Bild 5.36: Stark vereinfachte Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens von Somaloy 1000 3P für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ mithilfe einer linearen Magnetisierungskennlinie

kann deutlich erkennen, dass das fehlende Vermögen zur Berücksichtigung des nichtlinearen magnetischen Verhaltens zu großen Unterschieden zwischen der gemessenen und der simulierten Kurvenform führt. Darüber hinaus bedingt die Nichtbeachtung der ratenunabhängigen Hysterese eine fehlerhafte Phasenlage. Diese Aussagen sind im Wesentlichen auch auf die Abbildung 5.37b übertragbar, die die Verhältnisse für die Frequenz 1 kHz wiedergibt. Hier fällt bei genauer Betrachtung zudem bereits der qualitative Fehler auf, der mit der Vernachlässigung der Flussverdrängung im Zusammenhang mit der Verwendung der Modellordnung $n = 1$ einhergeht, denn der zugehörige simulierte Zeitverlauf weicht geringfügig von dem gemessenen ab, während für $n = 3$ und $n = 5$ eine bessere Übereinstimmung gegeben ist. Wie das Bild 5.37c es zeigt, ist dieser Fehler bei 2 kHz naturgemäß noch ausgeprägter. Die Mehrschalenmodelle mit komplexem Hysteresemodell geben auch hier die Kurvenform und die Phasenlage der gemessenen magnetischen Randfeldstärke mit guter Genauigkeit wieder, wobei die berechneten betragsmäßigen Maximalamplituden etwas zu groß sind. Bei 5 kHz stehen die mit diesen Modellen simulierten Zeitverläufe hinsichtlich ihrer Gestalt und Phase immer noch in guter Übereinstimmung mit den Messdaten. Die Unterschiede in den betragsmäßigen Maximalamplituden sind jedoch nun wesentlich größer. Für den Fall $n = 1$ und für das Modell mit linearer Magnetisierungskennlinie gibt es erhebliche Abweichungen zwischen den simulierten und den gemessenen Zeitverläufen, insbesondere im Hinblick auf die die Verluste widerspiegelnden Phasenlagen. Der Vergleich der mit dem unveränderten Gesamtkernmodell für $n = 3$ und $n = 5$ berechneten Zeitverläufe lässt bei dieser Frequenz erstmals geringe Unterschiede erkennen. Das deutet darauf hin, dass die mit der Modellordnung $n = 3$ berechnete Lösung noch nennenswert von der sich für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ergebenden Lösung abweicht. Bei der nachfolgenden Betrachtung der damit im Zusammenhang stehenden Kernverluste wird dieser Aspekt noch deutlicher.

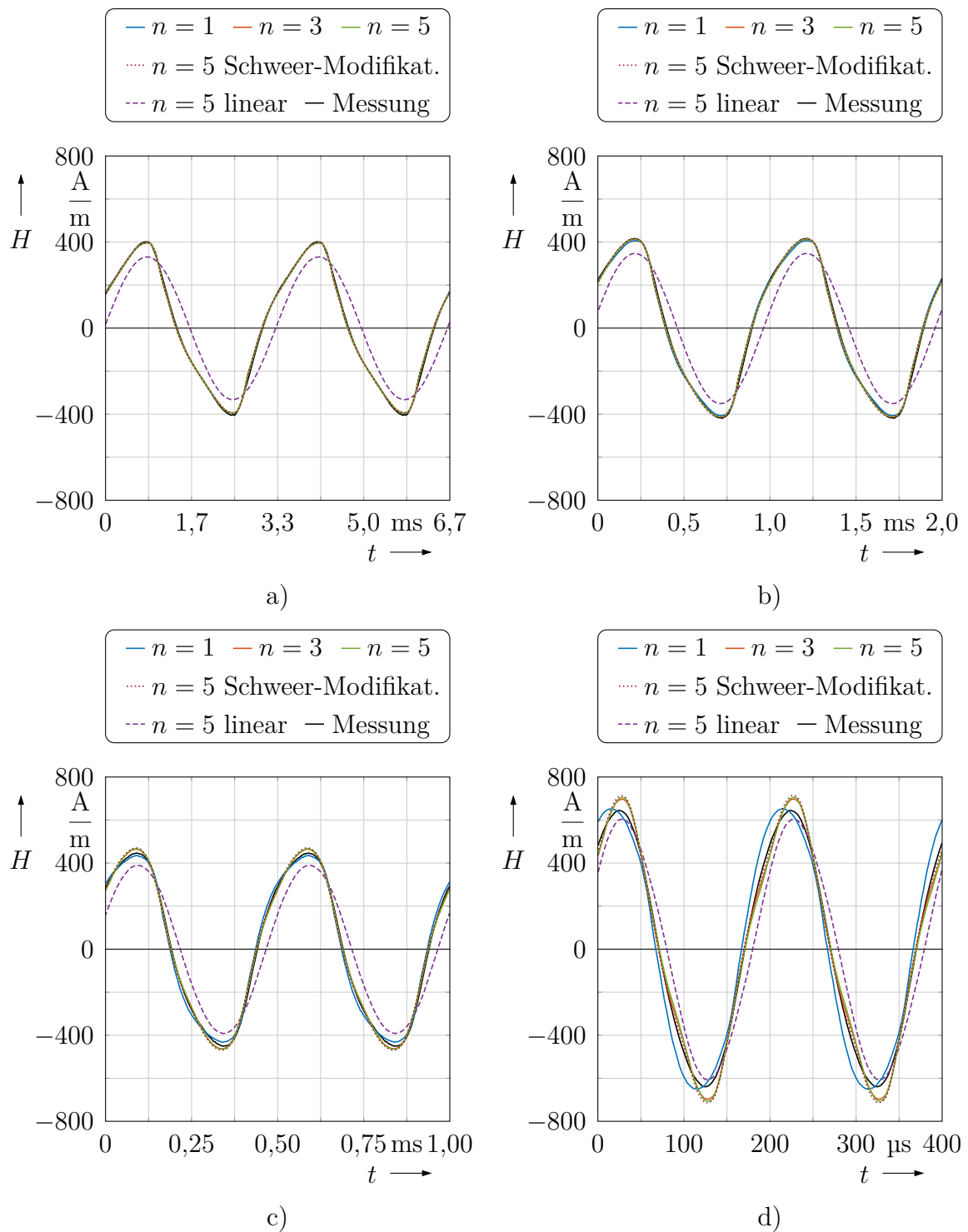


Bild 5.37: Gemessene sowie mit unterschiedlichen Modellen und Modellordnungen berechnete Zeitverläufe der magnetischen Randfeldstärke zur Aussteuerung des Somaloy 1000 3P Ringkerns unter Vorgabe einer sinusförmigen Gesamtinduktion mit $B_{\max} \approx 500$ mT für verschiedene Frequenzen und $\vartheta = 20^\circ\text{C}$
 a) $f = 300$ Hz b) $f = 1$ kHz c) $f = 2$ kHz d) $f = 5$ kHz

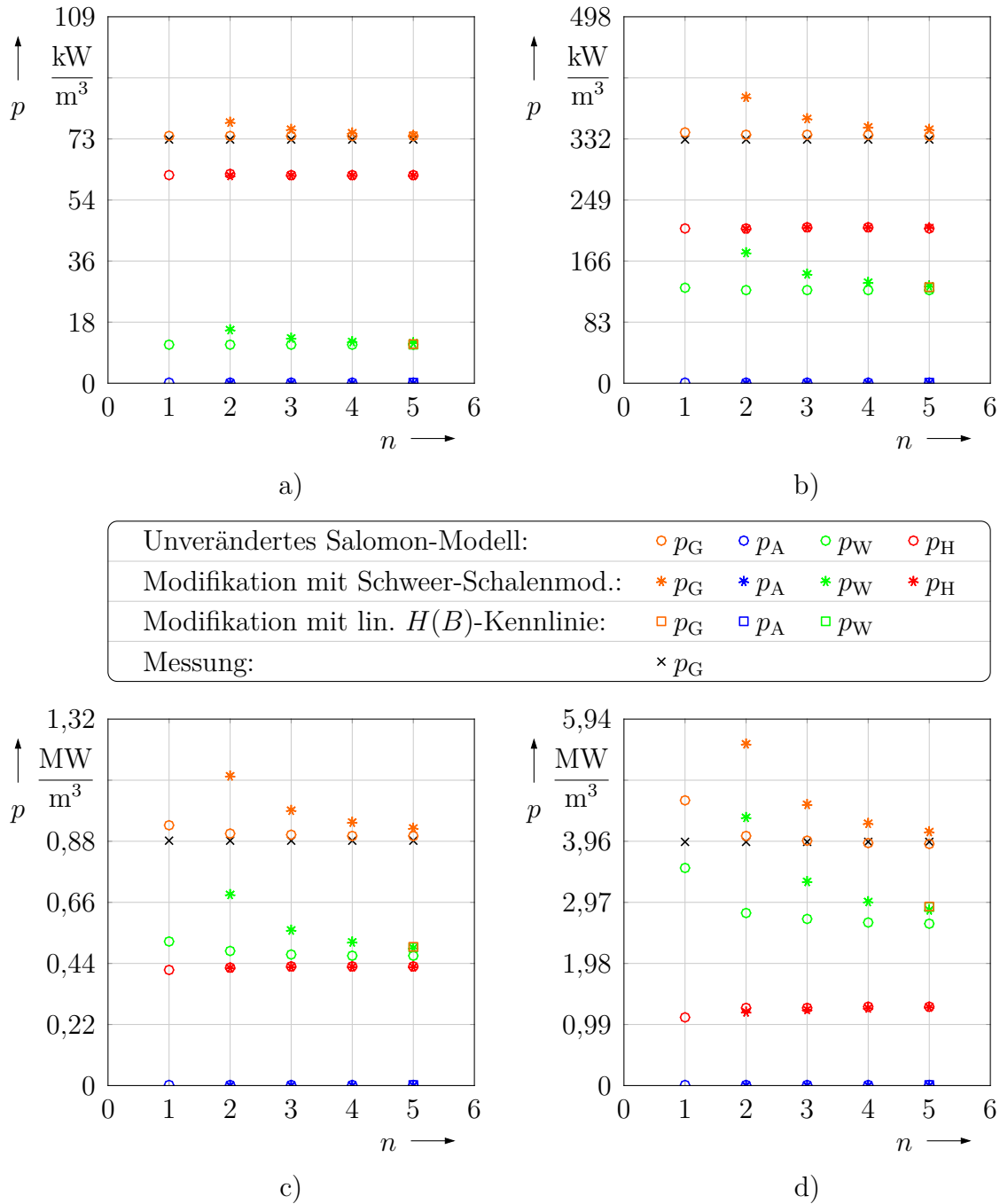


Bild 5.38: Gemessene und mit unterschiedlichen Modellen und Modellordnungen berechnete Gesamtkernverlustleistungsdichten sowie die modellierten zugehörigen Aufteilungen der Kernverlustleistungsdichtekomponenten bei Aussteuerung des Somaloy 1000 3P Ringkerns unter Vorgabe einer sinusförmigen Gesamtinduktion mit $B_{\max} \approx 500 \text{ mT}$ für verschiedene Frequenzen und $\vartheta = 20^\circ\text{C}$
 a) $f = 300 \text{ Hz}$ b) $f = 1 \text{ kHz}$ c) $f = 2 \text{ kHz}$ d) $f = 5 \text{ kHz}$

Die Bilder 5.38a-d stellen die gemessenen und die mit den unterschiedlichen Modellen und Modellordnungen berechneten Gesamtkernverlustleistungsdichten sowie die modellierten zugehörigen Aufteilungen der Kernverlustleistungsdichtekomponenten dar, die mit den gemessenen und berechneten Zeitsignalen in den Bildern 5.35 und 5.37 einhergehen. Dazu sind die mit dem Gesamtkernmodell nach Salomon ermittelten Ergebnisse für die Modellordnungen $n = 1 \dots 5$ aufgezeigt. Eine höhere Modellordnung wird hier nicht benötigt, da die berechneten Werte der Kernverlustleistungsdichten auch im Fall der größten betrachteten Frequenzstufe ausreichend nahe an den Werten liegen, die sich für $n \rightarrow \infty$ einstellen. Diese Ergebnisse werden für $n = 2 \dots 5$ mit denen des modifizierten Salomon-Modells verglichen, bei dem das Schalenmodell nach Schweer zur Berücksichtigung der Flussverdrängung zur Anwendung kommt. Für $n = 5$ erfolgt darüber hinaus eine Gegenüberstellung mit den Resultaten, die sich anhand der Modellvariante mit einer linearen Kennlinie für den ratenunabhängigen $H(B)$ -Zusammenhang ergeben. In Ergänzung dazu gibt die Tabelle 5.4 die genauen Werte der gemessenen und anhand der verschiedenen Modelle mit $n = 5$ berechneten Gesamtkernverlustleistungsdichten sowie die zugehörigen relativen Fehler für alle vier Frequenzstufen an.

f	Messung	Unverändertes Salomon-Modell		Modifikation mit Schweer-Schalenmod.		Modifikation mit lin. $H(B)$ -Kennlinie	
	p_G in kW m^{-3}	p_G in kW m^{-3}	Fehler in %	p_G in kW m^{-3}	Fehler in %	p_G in kW m^{-3}	Fehler in %
0,3 kHz	72,47	73,39	1,3	74,12	2,3	11,58	-84,0
1,0 kHz	330,36	334,67	1,3	345,01	4,4	128,34	-61,2
2,0 kHz	881,39	897,68	1,8	930,05	5,5	499,36	-43,3
5,0 kHz	3954,69	3908,24	-1,2	4125,39	4,3	2894,36	-26,8

Tabelle 5.4: Vergleich der Modellfehler in Bezug auf die berechneten Gesamtkernverlustleistungsdichten für die Modellordnung $n = 5$

Gemäß Abbildung 5.38a überwiegen bei der Frequenz 300 Hz die ratenunabhängigen Hystereseverluste die Verluste infolge von klassischen Wirbelströmen stark. Der Austauschverlustanteil ist bei dieser sowie den anderen betrachteten Frequenzstufen vernachlässigbar und lediglich der Vollständigkeit halber gekennzeichnet. Das in dieser Arbeit entwickelte Gesamtkernmodell erzielt mit einem Fehler von 1,3 % bezüglich p_G eine gleichbleibend hohe Genauigkeit für $n = 1 \dots 5$. Im Fall der Modellkonstellation, bei der das Schalenmodell nach Schweer zur Anwendung kommt, stellt sich ein weitgehend konvergierter Zustand ab $n = 5$ mit einem Fehler von 2,3 % ein. Die Anwendung der Modellvariante ohne ein komplexes Hysteresemodell führt aufgrund der damit verbundenen Vernachlässigung der sehr dominanten ratenunabhängigen Hystereseverluste zu einem Modellfehler von -84,0 %. Das Bild 5.38b zeigt die Verhältnisse für 1 kHz. Der Verlustanteil p_H überwiegt noch immer den Anteil p_W . Das nicht modifizierte Gesamtkernmodell erreicht ab $n = 2$ den konvergierten Zustand. Der Fehler beträgt 1,3 % für $n = 5$. Bei der Modellkonstellation mit dem Schalen-

modell nach Schweer beziffert sich der Fehler mit derselben Modellordnung zu 4,4 %, wobei der konvergierte Zustand noch nicht erreicht ist. Der mit dem Modell mit linearer Magnetisierungskennlinie berechnete Wert von p_G weicht um $-61,2\%$ vom gemessenen Wert ab. Bei 2 kHz bilden die Verlustleistungsdichtekomponenten p_H und p_W nach Bild 5.38c in etwa zu gleichen Anteilen die auf das Volumen bezogene Gesamtverlustleistung. Der mit dem Gesamtkernmodell ermittelte Zahlenwert von p_G ist für $n \geq 4$ nahezu unabhängig von der Schalenanzahl und weicht um 1,8 % von den Messdaten ab. Unter Verwendung des Schweer-Schalenmodells ergibt sich bei $n = 5$ ein Fehler von 5,5 % und im Fall des Modells mit linearer Magnetisierungskennlinie $-43,3\%$. Das Bild 5.38d illustriert die Ergebnisse für 5 kHz. Bei dieser Frequenz bilden die Verluste infolge von klassischen Wirbelströmen mit großem Abstand den dominanten Anteil an den Gesamtverlusten. Das unveränderte Gesamtkernmodell erreicht den konvergierten Zustand mit der Modellordnung $n = 5$. Der damit im Zusammenhang stehende Modellfehler beträgt $-1,2\%$. Die Berechnungen von p_G anhand der Modellvarianten mit dem Schweer-Schalenmodell und mit dem linearen ratenunabhängigen $H(B)$ -Zusammenhang für $n = 5$ führen in dieser Reihenfolge auf die relativen Fehler 4,3 % und $-26,8\%$.

Die Gesamtkernverlustleistungsdichte kann unter den Bedingungen einer sinusförmigen magnetischen Aussteuerung mit $B_{\max} \leq 1,5$ T und $f \leq 2$ kHz bei $\vartheta = (23 \pm 5)^\circ\text{C}$ auch anhand der Datenblattangaben des Materialherstellers bestimmt werden [Hög16]. Und zwar führt er zu diesem Zweck ein empirisches Frequenzbereichsmodell auf, das dem Zusammenhang

$$p_G = \rho \left(K_h f B_{\max}^{1,75} + K_{\text{ep}} f^2 B_{\max}^2 + K_{\text{eb}} \sigma d^2 f^2 B_{\max}^2 \right) \quad (5.8)$$

gehört. Es entstammt der Publikation von Z. Ye [Ye14], der zunächst vom Ansatz der Verlustseparation gemäß Gleichung (2.25) ausgeht und dann den Anteil der Wirbelstromverluste nochmals in zwei sich additiv überlagernde Teilkomponenten zerlegt. Dabei soll der mit dem Koeffizienten K_{ep} einhergehende Term die Verluste zum Ausdruck bringen, die ihre Ursache in lokalen Wirbelströmen auf Partikelebene besitzen, und der mit dem Koeffizienten K_{eb} im Zusammenhang stehende Term widerspiegelt die Verluste infolge von klassischen Wirbelströmen auf der makroskopischen Ebene. Der zur Frequenz proportionale Term mit dem Koeffizienten K_h ist den ratenunabhängigen Hystereseverlusten zugeordnet. Im Zuge der Untersuchung verschiedener Somaloy-Materialien gelangt auch Ye zu der Erkenntnis, dass der Austauschverlustanteil bei diesen Werkstoffen vernachlässigbar ist, weshalb er in der Gleichung (5.8) nicht mehr vorkommt. Die vom Hersteller angegebenen Koeffizienten zur Gewichtung der Verlustanteile, die Dichte ρ sowie die elektrische Leitfähigkeit σ von Somaloy 1000 3P (600 MPa) stellt die Tabelle 5.5 dar. Dem Parameter d in der Gleichung (5.8) ist der Betrag der kleinsten Abmessung des Kernquerschnittes zuzuordnen. Im vorliegenden Fall handelt es sich um einen quadratischen Querschnitt und es gilt $d = 5 \cdot 10^{-3}$ m. Unter der Voraussetzung, dass ρ in kg m^{-3} , σ in S m^{-1} , d in m, f in Hz und B_{\max} in T angegeben werden, erhält man p_G in W m^{-3} . Die Maximalamplituden der bei den verschiedenen Frequenzen beaufschlagten magnetischen Gesamtinduktion variieren zwischen 480 mT und 500 mT. Aus diesem Grund wird bei der Berechnung der Verlustleistungsdichtekennlinie nach der Beziehung (5.8) ein Wert von $B_{\max} = 490$ mT angenommen.

K_h	K_{ep}	K_{eb}	ρ in kg m^{-3}	σ in S m^{-1}
$101,00 \cdot 10^{-3}$	$32,00 \cdot 10^{-6}$	$74,87 \cdot 10^{-6}$	$7,42 \cdot 10^3$	$18,18 \cdot 10^3$

Tabelle 5.5: Vom Hersteller für die Bedingungen $\vartheta = (23 \pm 5)^\circ\text{C}$, $B_{\max} \leq 1,5 \text{ T}$ und $f \leq 2 \text{ kHz}$ angegebene Parameter zur Berechnung der Gesamtkernverlustleistungsdichte bei sinusförmiger magnetischer Aussteuerung des Somaloy 1000 3P Ringkerns

Die mit den Zeitsignalen in den Bildern 5.35 und 5.37 einhergehenden gemessenen sowie mit dem Gesamtkernmodell für verschiedene n berechneten Gesamtkernverlustleistungsdichten werden in den Bildern 5.39a-d für einen Vergleich zusammen mit der anhand der Datenblattangaben ermittelten Verlustleistungsdichtekennlinie $p_G(f)$ aufgezeigt. In Ergänzung dazu sind außerdem die modellierten zugehörigen Aufteilungen der Kernverlustleistungsdichtekomponenten markiert. Da das Verlustmodell nach Gleichung (5.8) gemäß den zuvor genannten Einschränkungen nur bis 2 kHz vom Materialhersteller verifiziert ist, wird die damit berechnete Kennlinie oberhalb dieser Frequenz zur Kenntlichmachung des Extrapolationsbereiches gestrichelt gezeichnet. Die Erläuterungen zu Bild 5.38 gehen bereits ausführlich auf die gemessenen und mit dem Gesamtkernmodell berechneten Verlustleistungsdichten beziehungsweise auf die Aufteilung der Verlustleistungsdichtekomponenten ein. Demnach liegt eine hohe Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den mit dem Gesamtkernmodell ermittelten Werten von p_G vor. Der hier angestellte Vergleich mit den auf den Herstellerangaben basierenden Daten bestätigt die Richtigkeit dieser Resultate. Darüber hinaus bringt die Darstellung in Ergänzung zu Bild 5.38 auf eine andere Weise besonders deutlich zum Ausdruck, wie die Verluste mit steigender Frequenz stark zunehmen und wie sich die Wahl von n in Abhängigkeit der Frequenz auf die berechneten Verluste auswirkt.

Als Fazit zu diesem Unterkapitel lässt sich festhalten, dass mit den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Kernmodellerweiterungen zur Berücksichtigung des ratenabhängigen Materialverhaltens im Zusammenhang mit dem ratenunabhängigen Kernmodell nach der Prandtl-Ishlinskii-Methode ein präzises Zeitbereichsmodell für allgemeine Signalformen und einen großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich zur Verfügung steht. Das damit wiedergegebene Verlustverhalten der hier eingesetzten ferromagnetischen Materialien weicht mit relativen Fehlern im zumeist unteren einstelligen Prozentbereich nur geringfügig von dem gemessenen ab. Anhand von theoretischen und praktischen Vergleichen des Schalenmodells nach Schwer mit dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten Schalenmodell als Kernmodellerweiterung zur Berücksichtigung der ratenabhängigen Flussverdrängung zeigt letzteres ein wesentlich besseres Konvergenzverhalten. So lässt sich damit insbesondere für kleine n unter Verwendung einer kleineren Modellordnung eine vergleichbare oder sogar deutlich höhere Genauigkeit als mit dem Schwer-Ansatz erzielen. Die Validierung des Gesamtkernmodells am Beispiel eines Somaloy 1000 3P Ringkerns bestätigt zudem eine ausgeprägte Fähigkeit zur Extrapolation über den Frequenzbereich der Messdatenbasis hinaus, und zwar auch dann, wenn der zusätzliche Effekt der Fluss-

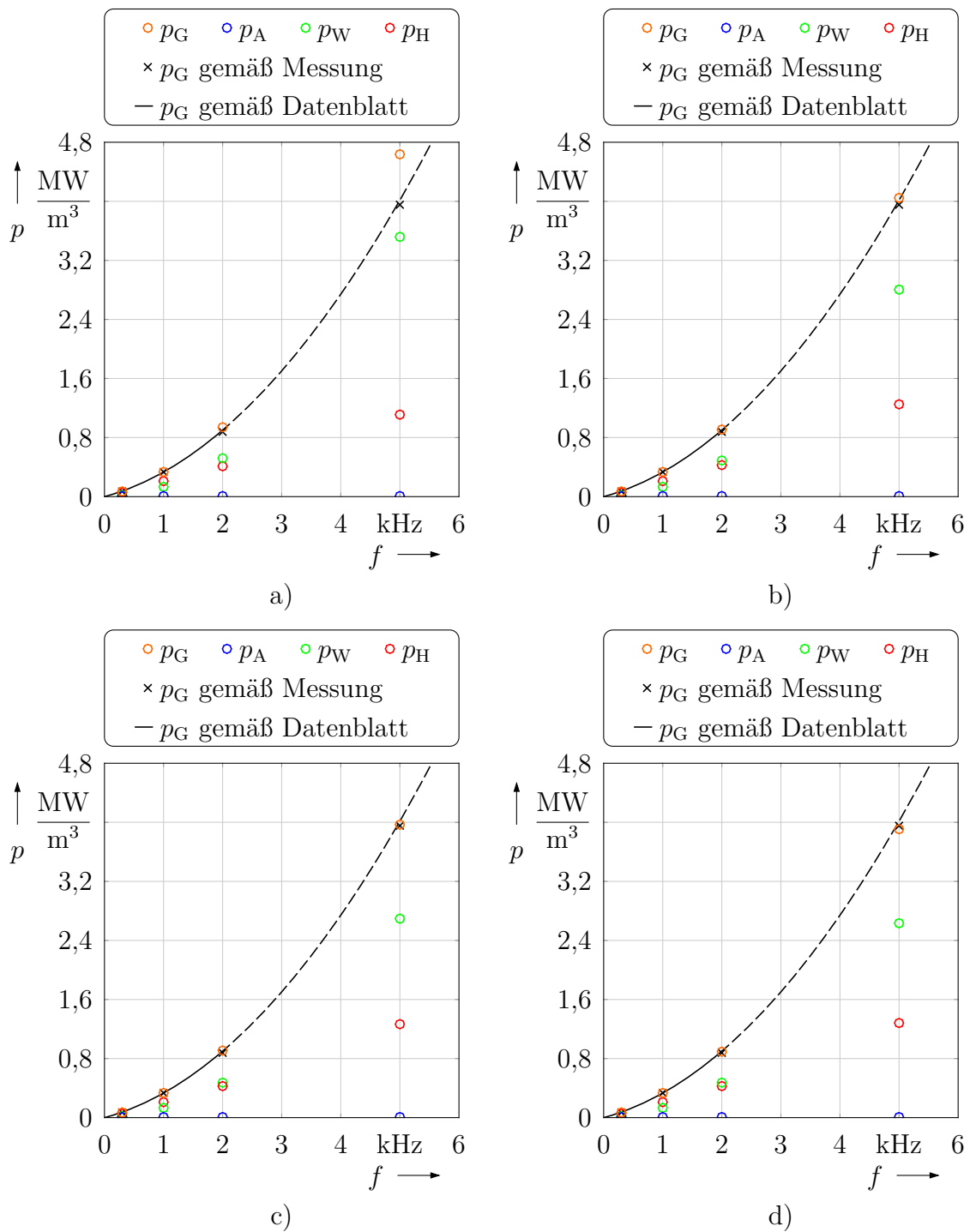


Bild 5.39: Gemessene und mit dem Gesamtkernmodell sowie mit den Datenblattangaben berechnete Gesamtkernverlustleistungsdichten, ergänzt durch die Darstellung der modellierten Kernverlustleistungsdichtekomponenten, bei Aussteuerung des Somaloy 1000 3P Ringkerns unter Vorgabe einer sinusförmigen Gesamtinduktion mit $B_{\max} \approx 500 \text{ mT}$ für verschiedene Frequenzen und $\vartheta = 20^\circ \text{C}$
 a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$ d) $n = 5$

verdrängung infolge von klassischen Wirbelströmen auftritt. Im konkreten Fall beträgt die größte Frequenz der Messdatenbasis 300 Hz. Bis etwa 2 kHz weisen die mit dem Modell berechneten Zeitverläufe der magnetischen Größen und die daraus abgeleiteten Ummagnetisierungsverluste eine sehr hohe Genauigkeit auf. Bei 5 kHz lassen sich deutliche Amplitudenunterschiede zwischen den gemessenen und den simulierten Zeitverläufen der magnetischen Feldstärke erkennen, während die Phasenlagen noch nahezu identisch sind. Die messtechnisch und simulativ ermittelten mittleren Kernverluste weichen in der Folge nur unwesentlich voneinander ab. Vor diesem Hintergrund beträgt die Extrapolationsfähigkeit des Modells bezüglich der Frequenz für sich ähnlich verhaltende ferromagnetische Materialien und vergleichbare Ausgangsbedingungen ungefähr eine Größenordnung. Bei den Untersuchungen wird im Rahmen einer Nebenbetrachtung außerdem die Bedeutung des komplexen Hysteresemodells am Beispiel des Somaloy 1000 3P Ringkerns herausgestellt, indem zum Zweck eines Vergleiches auch ersatzweise eine lineare Magnetisierungskennlinie zur Beschreibung des ratenunabhängigen $H(B)$ -Zusammenhangs zur Anwendung kommt. Als Resultat daraus entstehen bei der Berechnung der Ummagnetisierungsverluste sowie der Zeitverläufe der magnetischen Feldstärke Fehler in einem Ausmaß, das einer zweckmäßigen Anwendung des Gesamtkernmodells gewichtig entgegensteht.

5.3 Gekoppeltes Gesamtmodell einer induktiven Komponente

Der zentrale Gegenstand der Ausführungen in den Abschnitten 5.1 und 5.2 ist die Validierung der verschiedenen Ansätze für die Modellierung des Magnetisierungs- und Verlustverhaltens ferromagnetischer Kernmaterialien. Darauf aufbauend soll nun im Rahmen dieses Unterkapitels exemplarisch die Gültigkeit eines aus der Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen hervorgehenden Gesamtsystemmodells zur Beschreibung einer induktiven Komponente festgestellt werden. Im konkreten Fall erfolgt die Validierung am Beispiel eines Transformators anhand einer Gegenüberstellung gemessener und berechneter Daten für vier verschiedene Belastungsfälle.

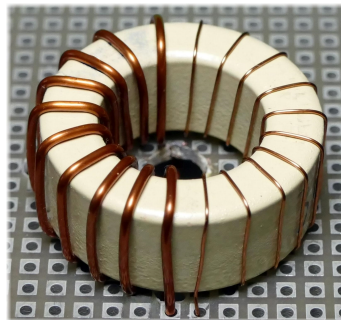


Bild 5.40: Ringkerntransformator zur Validierung des gekoppelten Gesamtmodells

Zu diesem Zweck kommt der im Bild 5.40 dargestellte Ringkerntransformator zur Anwendung, der eine Primärwicklung mit der Windungszahl $N_p = 10$ und eine Sekundärwicklung mit der Windungszahl $N_s = 10$ aufweist. Die Durchmesser der Wicklungsdrähte betragen

primärseitig 0,8 mm und sekundärseitig 0,3 mm. Die zugehörigen ohmschen Wicklungswiderstände beziffern sich bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ zu $R_{\text{Cu,p}} = 48\text{ m}\Omega$ und $R_{\text{Cu,s}} = 176\text{ m}\Omega$. Sie sind messtechnisch an den Anschluss- beziehungsweise Messpunkten für die Primärspannung U_p und die Sekundärspannung U_s ermittelt. Der aus MnZn-Ferrit 3C94 gefertigte Magnetkern besitzt den Außendurchmesser $d_a = 25\text{ mm}$, den Innendurchmesser $d_i = 15\text{ mm}$ und die Höhe $h = 10\text{ mm}$.

Das Bild 5.41 zeigt die zur Modellvalidierung herangezogene prinzipielle Versuchsanordnung. Demzufolge wird an der Sekundärseite des Transformators ein ohmscher Lastwiderstand R_a angeschlossen. Er nimmt in unterschiedlichen Versuchen in guter Näherung die Werte $20\text{ k}\Omega$, $2\text{ k}\Omega$, $200\ \Omega$ und $20\ \Omega$ an. Der zeitliche Verlauf der Primärspannung U_p ist dabei jeweils vorgegeben. Der Vergleich der übrigen sich dafür einstellenden gemessenen primär- und sekundärseitigen Klemmengrößen I_p , U_s und I_s sowie der mittleren am Transformator primärseitig eingespeisten Leistung P_p mit den jeweiligen anhand des Gesamtmodells berechneten Größen gibt dann Aufschluss über die Qualität desselben. Den Ausführungen in Abschnitt 4.5 entsprechend finden auch die den Primär- und Sekundärwicklungen zuzuordnenden magnetischen Streuflüsse $\Phi_{s,p}$ und $\Phi_{s,s}$ Berücksichtigung. Sie sind im Bild 5.41 neben dem gemeinsamen magnetischen Hauptfluss Φ_h ebenfalls angedeutet.

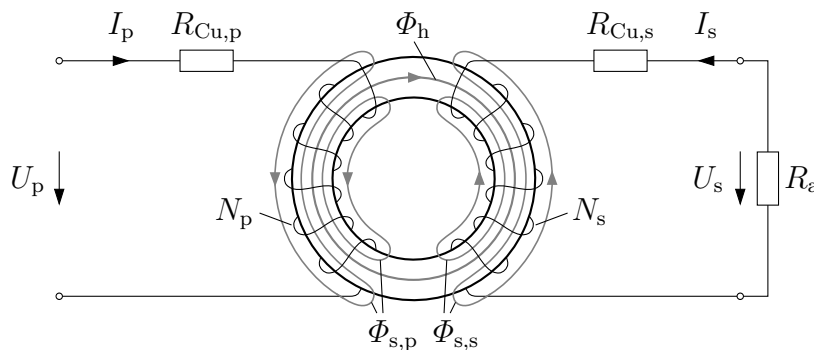


Bild 5.41: Zur Validierung des gekoppelten Gesamtmodells am Beispiel eines Ringkerntransformators mit ohmscher Last

Ein erster wesentlicher Schritt zur Bestimmung der primär- und sekundärseitigen Streuflussleitwerte $G_{s,p}$ und $G_{s,s}$ besteht in der Konstruktion eines virtuellen dreidimensionalen Modells des Ringkerntransformators. Auf dessen Grundlage lässt sich mithilfe der Finite-Elemente-Methode die räumliche Verteilung des magnetischen Feldes simulieren. Dem Kernmaterial ist dabei eine lineare Magnetisierungskennlinie zugrunde gelegt, die durch die im Datenblatt des Herstellers angegebene maximale relative magnetische Permeabilität $\mu_{\text{max}} = 4700$ definiert wird [Fer13]. Mit dem Ziel der Reduzierung des Modellierungsaufwandes und der Rechenzeit ist es zweckmäßig, das Modell dahingehend zu vereinfachen, dass gemäß Abbildung 5.42a jede Wicklung nur eine Windung aufweist. Es gilt also $N_p = N_s = 1$. In einem ersten Simulationslauf soll die Sekundärwicklung zunächst stromlos sein. Das Einprägen eines konstanten Stromes I_p durch die Primärwicklung ruft dann eine allein von ihr ausgehende magnetische Durchflutung $\Theta = I_p$ hervor und in der

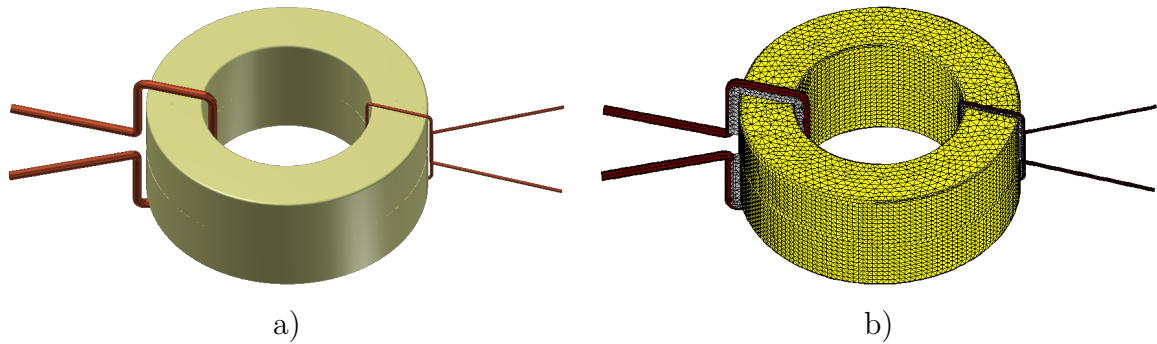


Bild 5.42: Vereinfachtes Transformatormodell zur Bestimmung der Streuflussleitwerte mithilfe der Finite-Elemente-Methode
 a) Dreidimensionales Modell b) Finite-Elemente-Netz

Folge einen magnetischen Hauptfluss Φ_h , der beide Wicklungen durchsetzt, sowie einen Streufluss $\Phi_{s,p}$, der nur die primärseitige Wicklung durchdringt. Letzterer lässt sich demzufolge bestimmen, indem der von der Sekundärwicklung umschlossene Fluss von jenem Fluss subtrahiert wird, den die Primärwicklung umfasst. Wie bei genauer Betrachtung des Bildes 5.42b auffällt, sind zu diesem Zweck den Bereichen zwischen den Wicklungsdrähten und dem Magnetkern eigene Finite-Elemente-Netz-Zonen zugewiesen. Der primärseitige Streuflussleitwert resultiert dann aus

$$G_{s,p} = \frac{\Phi_{s,p}}{I_p}. \quad (5.9)$$

Zur Berechnung von $G_{s,s}$ wird in einem zweiten Simulationslauf in der Sekundärwicklung ein Strom I_s eingepreßt, während die Primärwicklung stromlos ist. Dann kann $\Phi_{s,s}$ in vergleichbarer Weise wie zuvor $\Phi_{s,p}$ ermittelt werden. Den sekundärseitigen Streuflussleitwert erhält man somit nach

$$G_{s,s} = \frac{\Phi_{s,s}}{I_s}. \quad (5.10)$$

Eine alternative Vorgehensweise bei der simulativen Bestimmung von $G_{s,p}$ und $G_{s,s}$ besteht darin, in beide modellierten Wicklungen betragsmäßig gleiche konstante Ströme in der Weise einzuprägen, dass die daraus insgesamt resultierende magnetische Durchflutung zu null wird. Dann bildet sich im Kern auch kein magnetischer Hauptfluss Φ_h aus. Die magnetischen Flüsse, die die von den beiden Wicklungen jeweils umfassten Flächen durchsetzen, sind unter diesen Umständen allein $\Phi_{s,p}$ und $\Phi_{s,s}$ zuzuordnen. In der Folge lassen sich die Streuflussleitwerte wieder mithilfe der Beziehungen (5.9) und (5.10) berechnen.

Die reale räumliche Anordnung der Windungen und insbesondere die Abstände zwischen den Wicklungsdrähten und dem Kern können im vorliegenden Fall nur näherungsweise mit dem Modell berücksichtigt werden, weil der hier verwendete Transformator manuell bewickelt ist und daher geringe geometrische Unregelmäßigkeiten aufweist. Aus diesem Grund empfiehlt sich im Rahmen eines weiteren Schrittes eine Nachjustierung von $G_{s,p}$ und $G_{s,s}$ anhand eines Vergleiches des gemessenen und des simulierten Klemmen-

verhaltens des Transformators. Im vorliegenden Fall wird angenommen, dass die Abstände zwischen dem Primärwicklungsdraht und dem Kern 0,5 mm sowie zwischen dem Sekundärwicklungsdraht und dem Kern 0,25 mm betragen. Das Ergebnis der Simulation ist $G_{s,p} = 55,3 \cdot 10^{-9} \text{ V s A}^{-1}$ und $G_{s,s} = 63,5 \cdot 10^{-9} \text{ V s A}^{-1}$. Die Nachjustierung führt zu einer Halbierung dieser Werte, weil dies unabhängig vom Arbeitspunkt des Transformators bessere Ergebnisse hervorbringt. Die Finite-Elemente-Analyse liefert hier also zunächst einmal nur einen Anhaltspunkt für die Dimensionierung von $G_{s,p}$ und $G_{s,s}$. Dennoch ist dies ein wichtiger Schritt, denn ohne eine fundierte initiale Schätzung der Streuflussleitwerte gestaltet sich deren Identifikation im Allgemeinen schwierig. In der Tabelle 5.6 sind alle für das Gesamtsystemmodell verwendeten Wicklungsparameter angegeben.

N_p	N_s	$R_{Cu,p}$ in Ω	$R_{Cu,s}$ in Ω	$G_{s,p}$ in V s A^{-1}	$G_{s,s}$ in V s A^{-1}
10	10	$48 \cdot 10^{-3}$	$176 \cdot 10^{-3}$	$27,6 \cdot 10^{-9}$	$31,8 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 5.6: Wicklungsparameter des Ringkerntransformators für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Als ratenunabhängiges Kernmodell wird der inverse Verallgemeinerte Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperator $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$ mit den Modellordnungen $2l_1+1 = 29$, $2l_2+1 = 29$ und $m+1 = 15$ eingesetzt, wobei die Verwendung der Moving-Erweiterung nicht erforderlich ist. Die Charakterisierung des ratenunabhängigen Zusammenhangs zwischen B und H erfolgt mit der Signalform nach Bild 3.10c bei einer Grundwellenfrequenz von 100 Hz und für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$. In der Abbildung 5.43 sind die gemessenen Hysteresekurven in Schwarz sowie die Trajektorien des damit identifizierten Modells $\Gamma_{H_S H_S}^{-1}$ in Blau dargestellt. Es zeigt sich über den gesamten Aussteuerbereich eine hohe Übereinstimmung. Ergänzend ist an dieser Stelle zu erwähnen, dass das gemessene ratenunabhängige Hystereseverhalten erwartungsgemäß nur geringfügig von dem des größeren Kerns abweicht, der aus dem gleichen Material gefertigt ist und im Rahmen der Untersuchungen gemäß Abschnitt 5.2 eingesetzt wird. Ursächlich für den bestehenden Unterschied können Material-, Geometrie- und Prozessschwankungen sein. Beispielsweise gibt der Hersteller für die Amplitudenpermeabilität μ_a einen Toleranzbereich von $\pm 25\%$ an [Fer13]. Eine weitere Ursache liegt aber auch in der geometriebedingten inhomogenen Verteilung des magnetischen Feldes entlang des Ringkernquerschnittes. So verhält sich der Betrag der magnetischen Feldstärke nach Gleichung (2.58) zwischen den Innen- und Außenradien des Kerns proportional zu dem Faktor $\frac{1}{r}$. Der Einfluss dieses Effektes ist folglich umso größer, je stärker das Verhältnis $\frac{r_a}{r_i}$ von eins abweicht. Aus diesem Grund sollte die Materialcharakterisierung im Allgemeinen vorzugsweise an dünnen Ringkernen erfolgen. Ist ein auf dieser Grundlage parametrisiertes Kernmodell dann zur Simulation des magnetischen Verhaltens eines Magnetkerns einzusetzen, bei dem das von ihm geführte Magnetfeld aufgrund seiner Bauform entlang des Querschnittes in einer nicht vernachlässigbaren Ausprägung inhomogen verläuft, so lässt sich dies etwa durch eine modellbasierte räumliche Partitionierung der Kerengeometrie gemäß [LD15] berücksichtigen. Demnach würde zum Beispiel ein Ringkern gedanklich in so viele konzentrische Teilringe unterteilt werden, dass für deren jeweilige Innen- und Außenradien die Bedingung $r_i \approx r_a$ hinreichend gut erfüllt ist. Diese Art der Magnetkernpartitionierung ist jedoch inkompati-

bel zum Schalenmodell für die Berücksichtigung der Flussverdrängung infolge klassischer Wirbelströme.

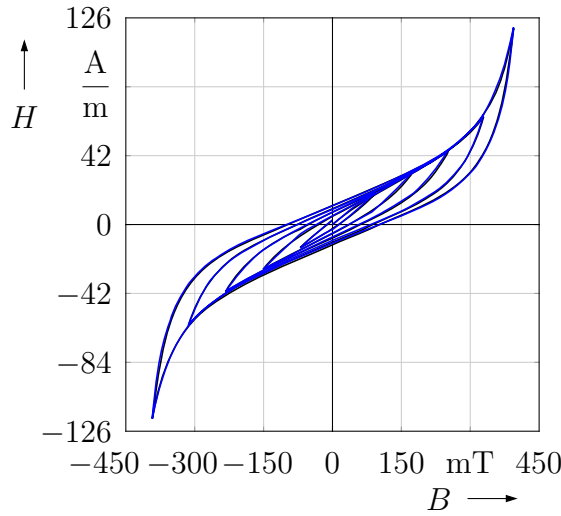


Bild 5.43: Gemessenes ratenunabhängiges Magnetisierungsverhalten des Transformator-kerns vom Materialtyp MnZn-Ferrit 3C94 und Trajektorien des damit identi-fizierten Modells $\Gamma_{\text{HSHS}}^{-1}$ für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Das ratenabhängige Magnetisierungsverhalten des Transformator-kerns für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ wird mittels der in der Abbildung 3.10f dargestellten Signalform des B -Feldes mit $B_{\text{max}} = 250\text{ mT}$ anhand von fünf äquidistanten Frequenzstufen im Bereich $10\text{ kHz} \leq f \leq 50\text{ kHz}$ analysiert. Nach Gleichung (5.1) ergibt sich der Geometriefaktor für den gegebenen Ring-kern mit rechteckiger Querschnittsfläche zu $F_G \approx 0,72 \frac{\text{Ae}}{\text{8}\pi}$. Die Tabelle 5.7 führt die damit identifizierten Parameter zur Charakterisierung des ratenabhängigen Magnetisierungsverhaltens auf.

ϑ	σ_0 in S m^{-1}	σ_1 in $\text{S m}^{-1} \text{T}^{-2}$	λ in $\sqrt{\text{Vm}}$
20°C	18,0	244,8	$0,1 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 5.7: Identifizierte Parameter zur Charakterisierung des ratenabhängigen Magne-tisierungsverhaltens des Transformator-kerns vom Materialtyp MnZn-Ferrit 3C94 für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Im Zusammenhang mit der Validierung des durch die gekoppelten Kern- und Wicklungsmodelle gebildeten Transformator-modells für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ wird eine periodische Primärspannung U_p vorgegeben, die einen rechteckförmigen Zeitverlauf mit einer Grundwellenfrequenz von 50 kHz und mit einer betragsmäßig maximalen Amplitude von ungefähr 45 V aufweist. In den Abbildungen 5.44a und 5.44b sind zur Verdeutlichung der damit einhergehenden magnetischen Aussteuerung des Transformator-kerns die dabei durchlaufenen Hysteresekurven für den eingeschwungenen Zustand in der B - H -Ebene und in der Φ - Θ -Ebene angegeben. Sie basieren auf den Daten für den Belastungsfall $R_a \approx 20\text{ k}\Omega$. Wie sich

im Folgenden zeigt, variiert das Regelverhalten des hier eingesetzten Leistungsverstärkers in Abhängigkeit des Lastwiderstandes geringfügig, und somit auch die Kurvenform der tatsächlich eingepprägten Primärspannung. Dies beeinflusst wiederum in geringem Maße die magnetische Aussteuerung des Kerns und in der Folge die damit einhergehenden Um-magnetisierungsverluste. So steigen die Kernverluste trotz gleichbleibender Scheitelwerte von $U_p(t)$ mit einem abnehmenden Lastwiderstandswert an.

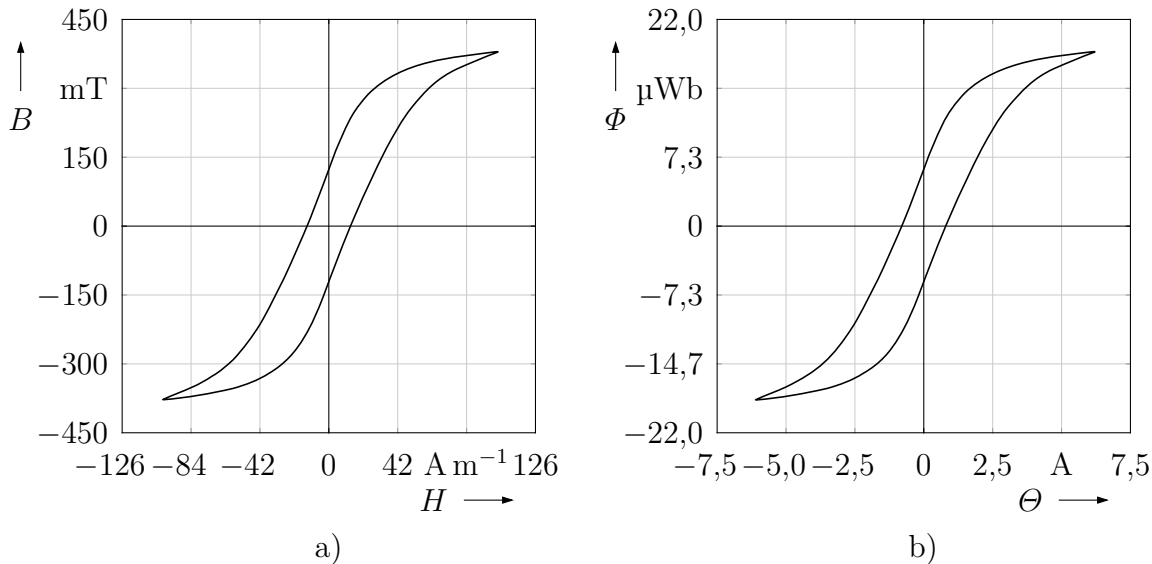


Bild 5.44: Hysteresekurve des Transformator-kerns vom Materialtyp MnZn-Ferrit 3C94 bei Vorgabe einer rechteckförmigen Primärspannung mit dem Scheitelwert $\hat{U}_p \approx 45 \text{ V}$ und einer Wiederholrate von 50 kHz im Fall $R_a \approx 20 \text{ k}\Omega$ für $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
 a) $B(H)$ -Zusammenhang b) $\Phi(\Theta)$ -Zusammenhang

Die Bilder 5.45-5.48 illustrieren den zeitlichen Verlauf der Primärspannung im eingeschwungenen Zustand sowie die daraus resultierenden Mess- und Simulationsergebnisse für die zuvor beschriebenen vier Fälle, bei denen der Transformator mit einem jeweils unterschiedlich bemessenen ohmschen Widerstand R_a belastet wird. Da Flussverdrängungseffekte hier vernachlässigbar sind, kommt kein Mehrschalenmodell zur Anwendung. Neben den Zeitverläufen der elektrischen Klemmengrößen U_p , U_s , I_p und I_s sowie der integralen magnetischen Feldgrößen $\Phi_{s,p}$, $\Phi_{s,s}$, Θ und Φ_h sind auch die durchschnittliche Gesamtkernverlustleistung P_G , die zugehörigen Kernverlustleistungskomponenten P_H , P_A und P_W , die mittlere an den ohmschen Wicklungs- und Lastwiderständen entstehende Verlustleistung P_Ω sowie die mittlere primärseitig eingespeiste Leistung P_p für quasistationäre Bedingungen aufgezeigt. Letztere kann nach

$$P_p = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} U_p(t) I_p(t) dt \quad (5.11)$$

aus den primärseitigen Klemmengrößen berechnet werden, und weil sie die Verluste der

magnetischen und der elektrischen Domänen zusammenfasst, gilt außerdem

$$P_p = P_G + P_\Omega. \quad (5.12)$$

In Analogie zu Gleichung (4.279) erhält man die mittlere Gesamtkernverlustleistung unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.72) und (2.74) sowie mit $\Phi = \Phi_h$ aus

$$\begin{aligned} P_G &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H(t) l_e \dot{B}(t) A_e dt \\ &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} \Theta(t) \dot{\Phi}_h(t) dt. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Aufgrund des Verlustseparationsprinzips gilt in Anlehnung an Gleichung (2.25) zudem die Beziehung

$$P_G = P_H + P_A + P_W \quad (5.14)$$

mit der mittleren Verlustleistung infolge ratenunabhängiger Hysterese

$$\begin{aligned} P_H &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_H(t) l_e \dot{B}(t) A_e dt \\ &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} \Theta_H(t) \dot{\Phi}_h(t) dt, \end{aligned} \quad (5.15)$$

der mittleren Verlustleistung aufgrund von Austauscheffekten

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_A(t) l_e \dot{B}(t) A_e dt \\ &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} \Theta_A(t) \dot{\Phi}_h(t) dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

sowie der mittleren Verlustleistung aufgrund von klassischen Wirbelströmen

$$\begin{aligned} P_W &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} H_W(t) l_e \dot{B}(t) A_e dt \\ &= \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} \Theta_W(t) \dot{\Phi}_h(t) dt. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die an den ohmschen Widerständen der Wicklungen und am Lastwiderstand entstehende mittlere Verlustleistung ist gegeben durch

$$P_{\Omega} = \frac{1}{T_P} \int_{t_0}^{t_E} I_p(t)^2 R_{Cu,p} + I_s(t)^2 (R_{Cu,s} + R_a) dt. \quad (5.18)$$

Das Bild 5.45 zeigt die Verhältnisse für $R_a \approx 20 \text{ k}\Omega$. Infolge der eingepprägten rechteckförmigen Primärspannung entsteht im Kern ein dreieckförmiger Flussverlauf. Der Transformator wird in diesem Fall bei einem verschwindend geringen Sekundärstrom nahezu im Leerlauf betrieben. Daher ist die Sättigungseigenschaft des Kernmaterials am Verlauf des Primärstromes ebenso deutlich wie am Verlauf der magnetischen Durchflutung zu erkennen. Die primärseitigen und sekundärseitigen Streuflüsse sind proportional zu den zugehörigen Strömen, wobei der Scheitelwert von $\Phi_{s,p}(t)$ 0,9 % des Scheitelwertes von $\Phi_h(t)$ entspricht. Die mittlere primärseitig eingespeiste Leistung wird im Wesentlichen durch die Ummagnetisierungsverluste bestimmt, die sich bei diesem Material und der vorliegenden Signalfrequenz aus den ratenunabhängigen Hystereseverlusten und den Verlusten infolge von klassischen Wirbelströmen zusammensetzen. Der zuerst genannte Verlustanteil dominiert hier deutlich. Insgesamt ist eine sehr hohe Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den simulierten Zeitbereichs- und Verlustgrößen gegeben. So weicht die mit dem Modell berechnete mittlere primärseitig eingespeiste Leistung P_p um lediglich $-0,4\%$ von dem gemessenen Wert ab.

Die Abbildung 5.46 stellt die Resultate für den Fall $R_a \approx 2 \text{ k}\Omega$ dar. Es liegt eine geringe Belastung des Transformators vor. Die gesteigerten Stromamplituden sind vor allem an ihrer Wirkung hinsichtlich der an den Wicklungen und dem Lastwiderstand entstehenden Verlustleistung zu erkennen. Demnach verzeichnet P_{Ω} einen deutlichen Anstieg, wenngleich der damit einhergehende Anteil an den insgesamt auftretenden Verlusten P_p nach wie vor verhältnismäßig klein ist. Bei genauer Betrachtung lässt sich im Vergleich zum Leerlauffall außerdem schon eine geringfügige Erhöhung der Kernverluste feststellen. Dies ist auf die leicht veränderte Kurvenform der Primärspannung infolge des bereits beschriebenen lastabhängigen Regelverhaltens des Leistungsverstärkers zurückzuführen. Der Modellfehler in Bezug auf P_p beziffert sich zu $0,4\%$.

Wenn an der Sekundärseite des Transformators ein Lastwiderstand mit $R_a \approx 200 \Omega$ angeschlossen wird, so bildet sich gemäß der Abbildung 5.47 ein nennenswerter Sekundärstrom aus, was in der Folge auch den zeitlichen Verlauf des Primärstromes deutlich beeinflusst. Analog dazu verhält es sich mit der Ausprägung der Streuflüsse. Die an den Wicklungen und am Lastwiderstand entstehenden Verluste P_{Ω} sind nun bereits mehr als doppelt so hoch wie die Kernverluste P_G . Der auf der Grundlage des Modells berechnete Wert von P_p unterscheidet sich um $-0,2\%$ von dem gemessenen.

Das Bild 5.48 gibt schließlich die Verhältnisse für den Fall $R_a \approx 20 \Omega$ an. Aufgrund der gesteigerten Belastung des Transformators zeichnet sich eine deutliche Phasenverschiebung zwischen der Primär- und der Sekundärspannung ab. Die Scheitelwerte des Primär- und

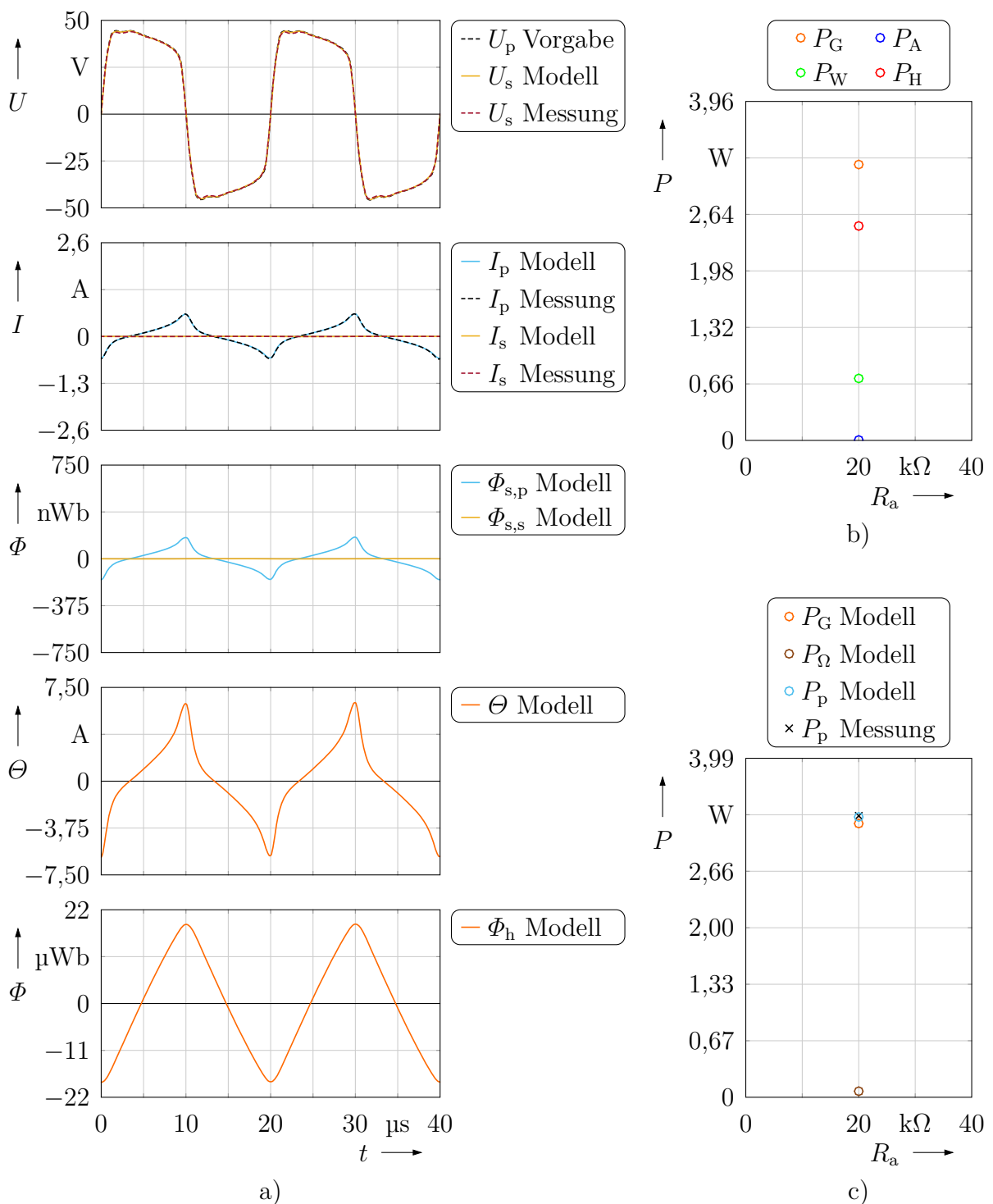


Bild 5.45: Gemessene und mit dem gekoppelten Gesamtmodell berechnete Zeitverläufe und Verlustleistungen für den Transformator bei $R_a \approx 20$ k Ω und $\vartheta = 20$ $^{\circ}\text{C}$

- Zeitverläufe elektrischer und magnetischer Größen
- Berechnete Kernverlustleistung und Kernverlustleistungskomponenten
- Gesamtverlustleistung und Verlustleistungskomponenten

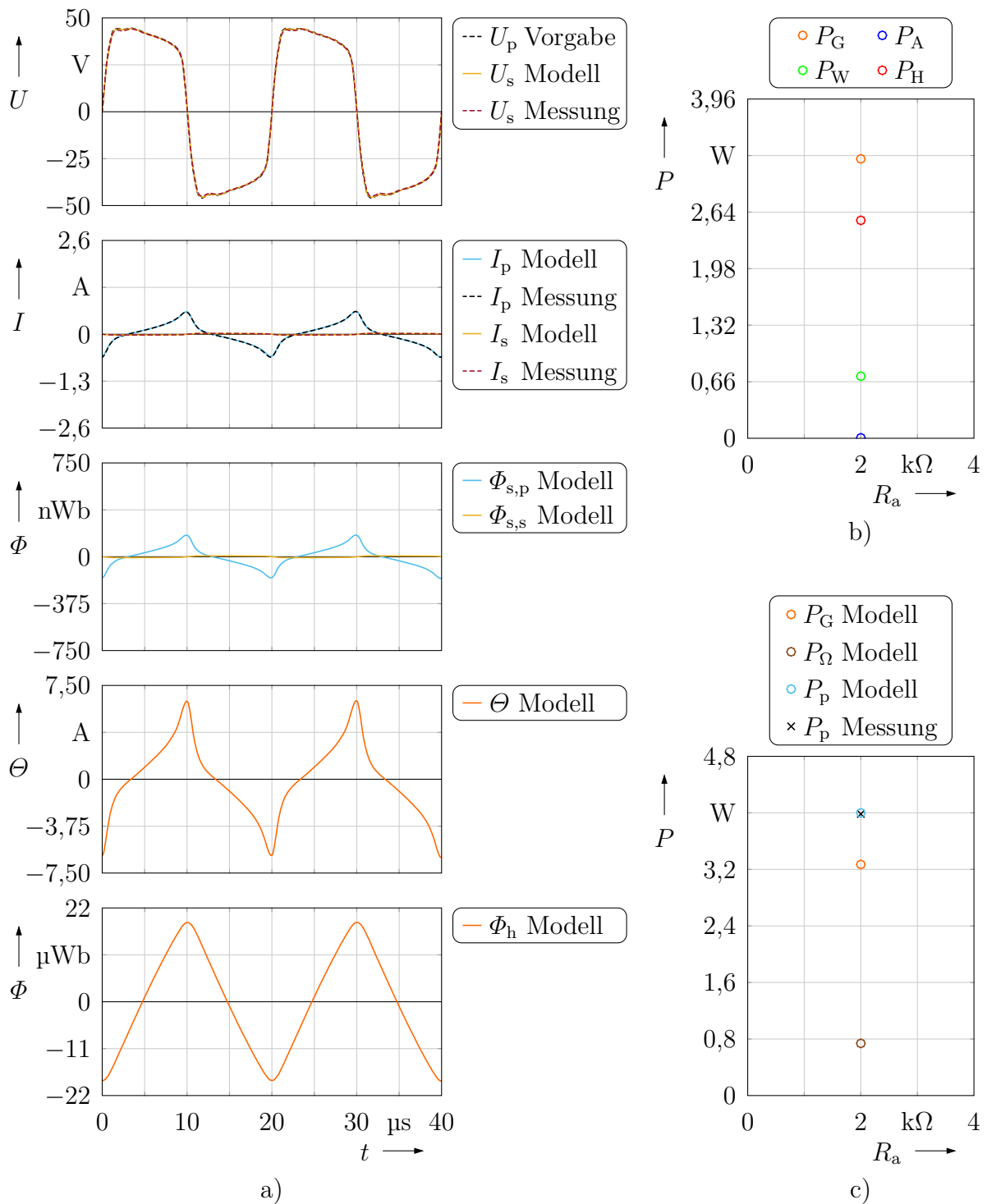


Bild 5.46: Gemessene und mit dem gekoppelten Gesamtmodell berechnete Zeitverläufe und Verlustleistungen für den Transformator bei $R_a \approx 2 \text{ k}\Omega$ und $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

- a) Zeitverläufe elektrischer und magnetischer Größen
- b) Berechnete Kernverlustleistung und Kernverlustleistungskomponenten
- c) Gesamtverlustleistung und Verlustleistungskomponenten

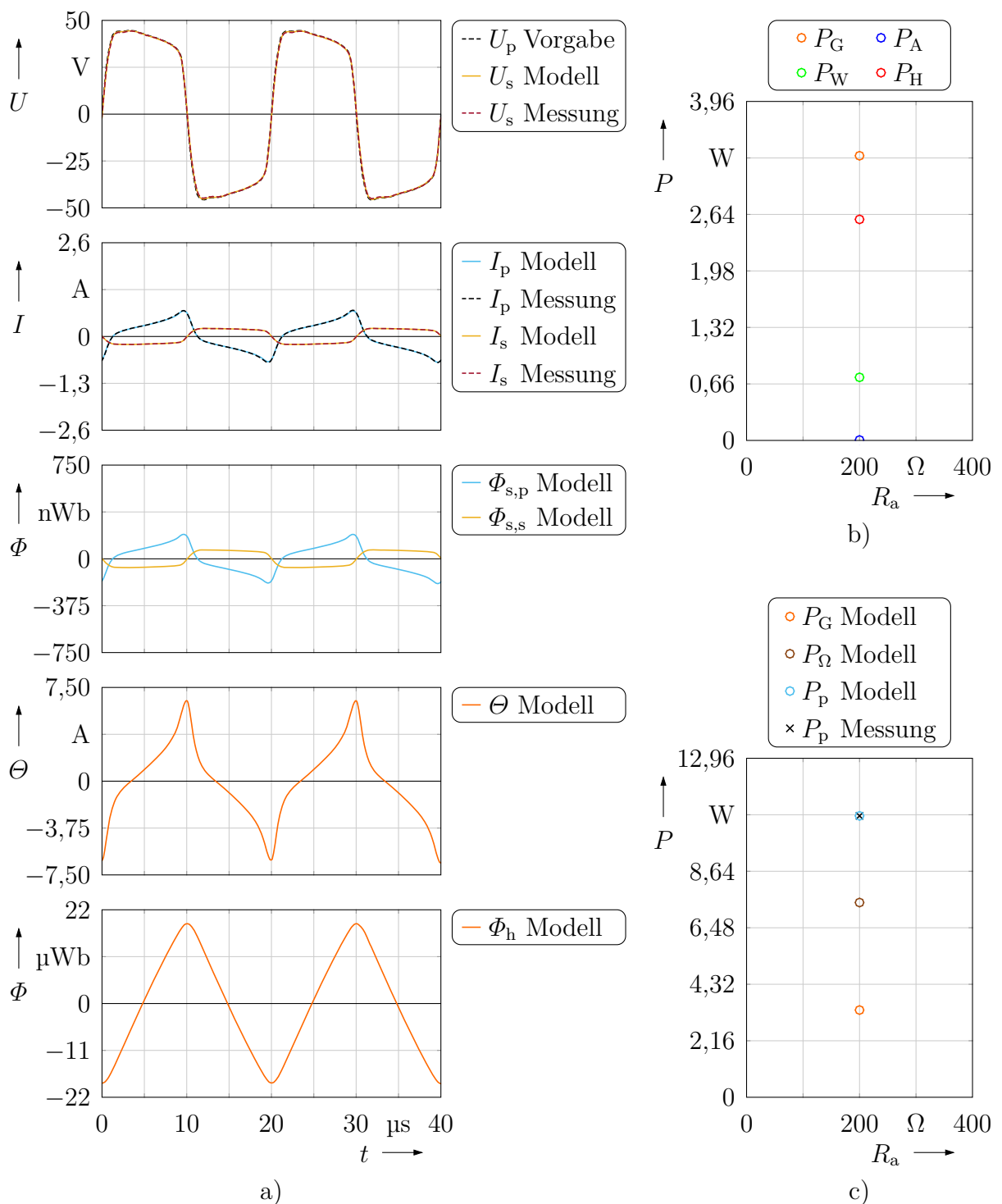


Bild 5.47: Gemessene und mit dem gekoppelten Gesamtmodell berechnete Zeitverläufe und Verlustleistungen für den Transformator bei $R_a \approx 200 \Omega$ und $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

- Zeitverläufe elektrischer und magnetischer Größen
- Berechnete Kernverlustleistung und Kernverlustleistungskomponenten
- Gesamtverlustleistung und Verlustleistungskomponenten

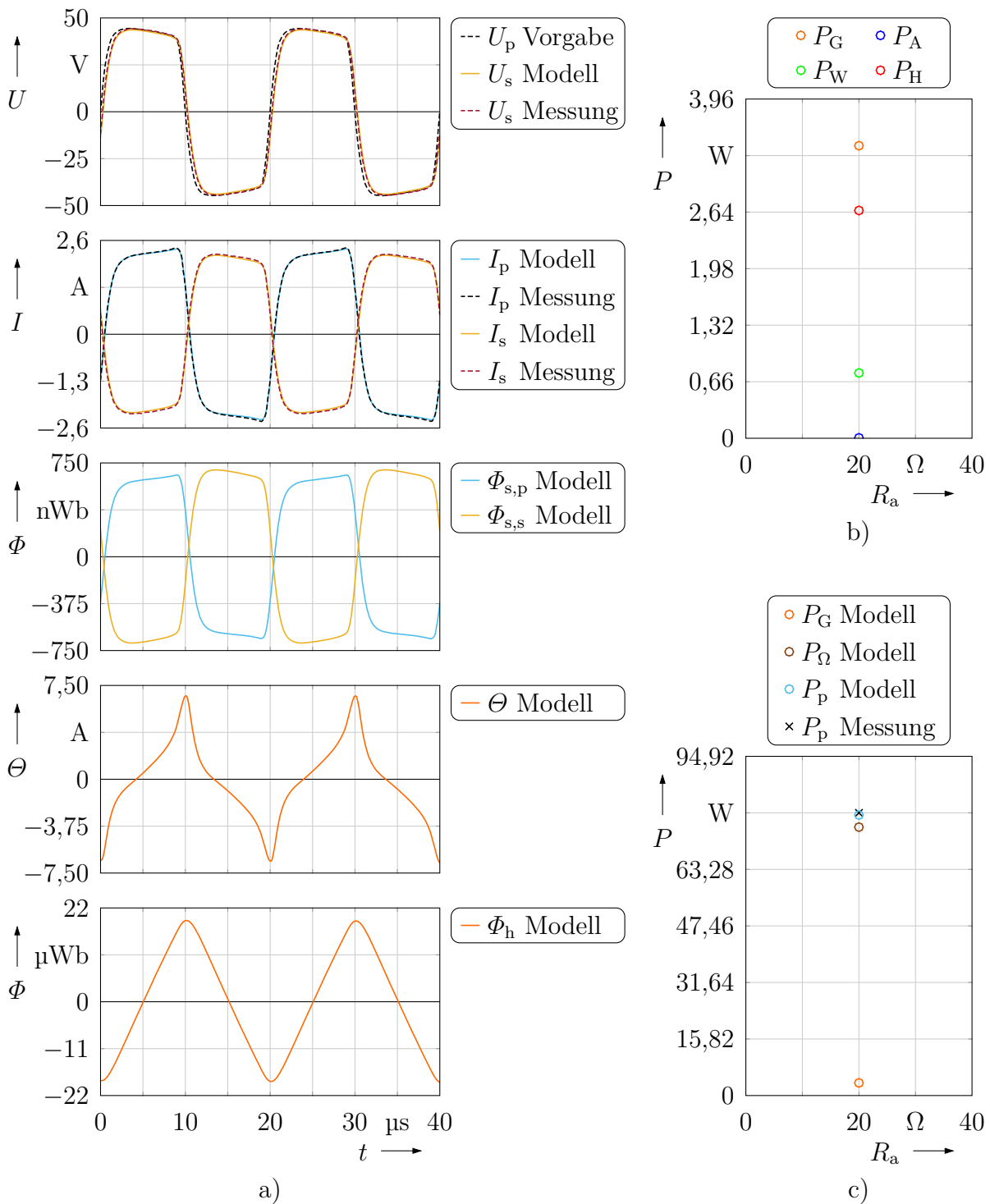


Bild 5.48: Gemessene und mit dem gekoppelten Gesamtmodell berechnete Zeitverläufe und Verlustleistungen für den Transformator bei $R_a \approx 20 \Omega$ und $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

- Zeitverläufe elektrischer und magnetischer Größen
- Berechnete Kernverlustleistung und Kernverlustleistungskomponenten
- Gesamtverlustleistung und Verlustleistungskomponenten

des Sekundärstroms unterscheiden sich kaum noch. Auch die zugehörigen Kurvenformen sind sehr ähnlich, weil der Primärstromverlauf jetzt wesentlich stärker durch die ohmsche Charakteristik des Lastwiderstandes als durch die nichtlineare Sättigungscharakteristik des Kernmaterials bestimmt wird. Die Scheitelwerte von $\Phi_{s,p}(t)$ und $\Phi_{s,s}(t)$ entsprechen nun 3,5% beziehungsweise 3,7% des Scheitelwertes von $\Phi_h(t)$. Die mittlere primärseitig eingespeiste Leistung wird fast vollständig am Lastwiderstand umgesetzt. Sowohl hinsichtlich der Zeitverläufe der elektrischen Klemmengrößen als auch in Bezug auf die Gesamtverlustleistung liegt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den berechneten Daten vor. So weicht der mit dem Modell ermittelte Wert von P_p um nur $-0,8\%$ von dem Referenzwert ab.

Die Tabelle 5.8 stellt die mit dem Modell berechneten Verlustwerte von P_G , P_Ω und P_p sowie die messtechnisch ermittelten Werte von P_p einschließlich der zugehörigen Modellfehler für die unterschiedlichen Belastungen des Transformators zusammenfassend dar. Dabei sind auch die unter Zuhilfenahme eines Präzisionsmultimeters bestimmten Werte der verwendeten Lastwiderstände angegeben.

R_a	P_G (Modell) in W	P_Ω (Modell) in W	P_p (Modell) in W	P_p (Messung) in W	Fehler bez. P_p in %
20,062 k Ω	3,23	0,08	3,30	3,32	-0,4
2,0092 k Ω	3,26	0,74	4,00	3,98	0,4
0,2010 k Ω	3,33	7,43	10,76	10,78	-0,2
0,0201 k Ω	3,42	75,03	78,45	79,10	-0,8

Tabelle 5.8: Verlustleistungen und Modellfehler bei verschiedenen Lastwiderständen

Die im Rahmen der Validierung am Beispiel des Ringkerntransformators erhaltenen Ergebnisse bestätigen durchweg eine hohe Modellgüte. Somit ist exemplarisch gezeigt, wie sich durch die Kopplung des Kernmodells mit geeigneten Wicklungsmodellen ein Gesamtsystemmodell für eine induktive Komponente bilden lässt, das für beliebige Signalformen des Eingangssignals die Zeitverläufe der daraus resultierenden elektrischen und magnetischen Torgrößen sowie die damit einhergehenden Verluste präzise vorhersagen kann.

Für den vorstehend betrachteten Anwendungsfall sind die herangezogenen einfachen Wicklungsmodelle hinreichend genau. Wird zusätzlich die Berücksichtigung ratenabhängiger Vorgänge bei der Modellierung der Wicklungen notwendig, wenn zum Beispiel Stromverdrängungseffekte einen nennenswerten Einfluss haben, so erfordert dies im Allgemeinen wesentlich komplexere Wicklungsmodelle, denn insbesondere die entsprechenden Zeitbereichsansätze sind dann für gewöhnlich nicht trivial. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll dieses Themengebiet jedoch nicht näher behandelt werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Induktive Komponenten werden in der Leistungselektronik als Spulen für die Zwischenspeicherung und als Transformatoren für die Übertragung von Energie eingesetzt. Ihre Herstellung ist im Allgemeinen vergleichsweise aufwendig und das Volumen groß. Hinzu kommt die Schwierigkeit einer geeigneten thermischen Kopplung, die in manchen Fällen einer komplizierten und kostspieligen Konstruktion bedarf. Diese Bauelemente beeinflussen somit bei nahezu jeder leistungselektronischen Schaltung in hohem Maße die auslegungsrelevanten Zielgrößen und müssen deshalb treffsicher dimensioniert werden können. Das verlangt nach Modellen, die in der Lage sind, das Klemmen- und Verlustverhalten von induktiven Komponenten für allgemeine Signalformen über einen großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich vollständig zu beschreiben. Dabei sind zahlreiche physikalische Effekte sowohl in der elektrischen als auch in der magnetischen Domäne zu berücksichtigen. Für die Modellierung einer Wicklung stehen zum einen für einige Anwendungsfälle schnelle analytische Lösungen zur Verfügung und zum anderen kann die ortsauflösende, aber zeitintensivere Finite-Elemente-Methode herangezogen werden. Die Prozesse im Kernmaterial sind vor allem durch eine Überlagerung von nichtlinearem Verhalten infolge von Sättigungseffekten und nichtlinearem gedächtnisbehafteten Verhalten aufgrund von Hystereseeffekten gekennzeichnet. Die den Hystereseeffekten zugrunde liegenden physikalischen Wirkzusammenhänge weisen eine komplexe Natur auf und lassen sich bisher weder mit analytischen Beziehungen noch mit der Finite-Elemente-Methode in praktikabler Rechenzeit handhaben. Die heutigen Anforderungen an die Leistungselektronik machen jedoch eine Berücksichtigung dieser Phänomene notwendig, weil ihre Auswirkungen wegen der immer stärkeren Beanspruchung der verwendeten magnetischen Materialien infolge hoher Taktraten und Feldamplituden bis zur Sättigungsgrenze nicht mehr vernachlässigbar sind.

Einen wesentlichen Beitrag zur Modellierung des Magnetisierungsverhaltens von ferromagnetischen Materialien leistet das gegen Ende des 20. Jahrhunderts vorgestellte, physikalisch motivierte Prinzip der Verlustseparation, das die Domänenstruktur des magnetischen Materials und die damit verbundenen Domänenprozesse unter Einbeziehung statistischer Methoden berücksichtigt. Danach werden drei Verlustarten unterschieden, deren jeweilige Ursachen auf ratenunabhängige Hystereseffekte sowie ratenabhängige Austausch- und klassische Wirbelströme zurückzuführen sind. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Erkenntnis, dass die einzelnen Verlustmechanismen während eines Magnetisierungsvorganges auf verschiedenen Zeit- und Längenskalen wirken, sich deshalb gegenseitig nicht beeinflussen und folglich als voneinander entkoppelt betrachtet werden können. Diese Feststellung führt schließlich zu einer signalformunabhängigen Zeitbereichsformulierung für die Berechnung der Gesamtverluste aus der additiven Überlagerung der Einzelverlustanteile.

Die Berücksichtigung des ratenunabhängigen Verlustanteils erfolgt zunächst stellvertretend mit einem allgemeinen zeitabhängigen Verlustterm. Er ist durch die Integration eines geeigneten Hysterese Modells zur Beschreibung des ratenunabhängigen Verzweungsverhaltens zwischen der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte zu konkretisieren.

Die seit Mitte der 1990er bis heute erschienenen Arbeiten zur Modellierung der ratenunabhängigen Hysterese basieren im Wesentlichen auf dem klassischen Preisach-Modell und seinen zahlreichen erweiterten Varianten. Dieser Modelltyp nutzt das Prinzip der gewichteten additiven Überlagerung von einfachen hysteresebehafteten Schwellwertschaltern zur Nachbildung des realen Hystereseverhaltens. Durch sein komplexes Gedächtnis ist das Preisach-Modell in der Lage, die Phänomenologie von Domänenwandbewegungen auf der mikroskopischen Längenskala korrekt wiederzugeben und damit konsistente Unterschleifen zu erzeugen. Es trägt aber gleichzeitig auch zu einem deutlichen Anstieg der Modellkomplexität bei, was die praktische Anwendbarkeit reduziert. Der prinzipielle Nachteil des Preisach-Modells besteht aber vor allem darin, dass seine Inverse bis auf wenige Spezialfälle nur auf numerischem Weg aus dem Hysteresemodell ermittelt werden kann und im Allgemeinen kein Preisach-Hystereseoperator ist. Die Berücksichtigung der ratenunabhängigen Hysterese im Zusammenhang mit dem Verlustseparationsansatz erfordert jedoch ein Modell für die inverse Beziehung $H(B)$. Aufgrund dieser Tatsache sind Ansätze mit dem klassischen Preisach-Modell zunächst inkompatibel zum Verlustseparationsansatz und führen so zu sehr diffizilen mathematischen Differentialgleichungsmodellen zur Berechnung nichtlinearer, verlustbehafteter Induktivitäten.

Nun sind insbesondere in den letzten zwanzig Jahren sehr große Fortschritte bei der Modellierung komplexer Hysterese Phänomene gemacht worden, die den Aspekt der analytischen Invertierbarkeit der Hysterese Modelle von vornherein bei der Modellsynthese mit berücksichtigen. Für diese Aufgabe eignet sich vor allem die Klasse der Prandtl-Ishlinskii-Operatoren. Sie stellt eine Unterklasse von Preisach-Operatoren dar, bei der die Inverse, sofern sie existiert, gegenüber dem zugehörigen und analytisch darstellbaren Vorwärtsmodell strukturinvariant ist und deshalb ebenfalls eine analytische Darstellung besitzt, die direkt zur Modellbildung verwendet werden kann. Ein wesentlicher Nachteil der Prandtl-Ishlinskii-Hystereseoperatoren besteht aber darin, dass sie nicht in der Lage sind, Sättigungsphänomene nachzubilden. Aus diesem Grund wurde diese Klasse von Hysterese Modellen durch einen Zusatz so modifiziert, dass Sättigungsphänomene berücksichtigt und gleichzeitig die Inversen dazu analytisch formuliert werden können. Ein weiterer wesentlicher Vorteil der modifizierten Prandtl-Ishlinskii-Operatoren gegenüber den Preisach-Operatoren besteht zudem darin, dass sie deutlich weniger Parameter besitzen und daher einfacher zu parametrieren sind sowie eine effizientere Berechnung erlauben. Damit sind sie besser für den Einsatz in der Praxis geeignet.

Der zentrale Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung eines neuartigen, numerisch stabilen und effizienten Systemmodells im Zeitbereich zur präzisen Modellierung des Magnetisierungs- und Verlustverhaltens ferromagnetischer Kernmaterialien in induktiven Bauelementen der Leistungselektronik für allgemeine Signalformen sowie für einen großen

Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich. Der gewählte Ansatz zur Beschreibung der ratenunabhängigen Hysterese sowie des Sättigungsverhaltens basiert auf der operatorbasierten Prandtl-Ishlinskii-Methode. Mithilfe der sogenannten Moving-Erweiterung lässt sich dem Modell noch ein zusätzlicher Freiheitsgrad verleihen, der in manchen Fällen eine gesteigerte Genauigkeit bei der Modellierung des ratenunabhängigen Magnetisierungsverhaltens ermöglicht. Das resultierende Teilmodell wird in den zugehörigen Verlustterm des Verlustseparationsansatzes nach Bertotti integriert, um daraus ein dynamisches Kernmodell in Form einer nichtlinearen Operatordifferentialgleichung erster Ordnung für die effiziente Nachbildung des gedächtnisbehafteten ratenabhängigen Verhaltens abzuleiten. Zur Vergrößerung des Gültigkeitsbereiches wird dieser Zusammenhang mit einem Schalenmodell verknüpft, wodurch sich auch eine inhomogene Flussdichteverteilung im Kernmaterial als Folge von dynamischen Flussverdrängungseffekten simulieren lässt. Außerdem werden die Modelle um die Temperaturabhängigkeit erweitert. Das Ergebnis der Modellbildung ist dann ein System von nichtlinearen Operatordifferentialgleichungen, das eine definierte Struktur aufweist und von vorerst unbekanntem Parametern abhängt. Für deren Identifikation wird ein praxistaugliches Verfahren angegeben, das effizient und robust gegenüber Fehlern in den Messdaten ist. Zudem stellt es anhand von geeigneten Nebenbedingungen im Parametrierungsprozess die thermodynamische Konsistenz und die Invertierbarkeit der auf dem Prandtl-Ishlinskii-Ansatz basierenden Modelle sicher. Mit dem parametrisierten Kernmodell lässt sich das magnetische Verhalten eines Kernmaterials für beliebige zeitabhängige Signalformen wiedergeben. Das stellt die Grundlage für die modellbasierte Kernverlustberechnung dar, die eine Unterscheidung der einzelnen Verlustarten gestattet und bei der Verwendung einer bestimmten Modellstruktur auch für beliebige Signalformen ohne zeitliche Periodizität gilt. Zur exemplarischen Entwicklung eines Systemmodells für die Beschreibung einer allgemeinen induktiven Komponente erfolgt in einem letzten Schritt die Kopplung des Kernmodells mit einfachen Wicklungsmodellen unter Berücksichtigung der geometrieabhängigen Streuflüsse.

Abschließend werden die operatorbasierten Kernmodelle, die zugehörigen Verlustberechnungsmethoden und das aus der Kopplung der Kern- und Wicklungsmodelle hervorgehende Systemmodell zur Beschreibung einer induktiven Komponente anhand von Simulations- und Messdaten validiert. Dabei zeigt sich, dass die neuartigen, numerisch stabilen und effizienten Ansätze das reale Magnetisierungs- und Verlustverhalten von ferromagnetischen Materialien für allgemeine Signalformen sowie für einen großen Amplituden-, Frequenz- und Temperaturbereich mit hoher Qualität abbilden können. Zudem lassen sich die Modelle robust als Subsysteme in übergeordnete Systeme integrieren, auch weil ihre Ein- und Ausgangsgrößen aufgrund des integralen Zusammenhangs in der zeitdiskreten Berechnung algebraisch voneinander entkoppelt sind, weshalb es keine algebraischen Schleifen gibt.

Der phänomenologische Charakter der Prandtl-Ishlinskii-Methode und die physikalische Begründung des Verlustseparationsprinzips ermöglichen eine Übertragbarkeit der in dieser Arbeit beschriebenen Kernmodelle auf andere Anwendungen, bei denen die Ummagnetisierung ferromagnetischer Materialien wesentlich ist. Das magnetische Feld soll sich aber weiterhin in guter Näherung, zumindest abschnittsweise, durch eine skalare Größe beschreiben lassen. Ein entsprechendes weiteres Anwendungsgebiet stellt zum Beispiel die Simulation

von elektromagnetisch betätigten Ventilen dar. Inwiefern sich die Forschungsergebnisse auch auf Problemstellungen übertragen lassen, bei denen eine Richtungsabhängigkeit des Magnetfeldes berücksichtigt werden muss, ist Gegenstand zukünftiger Forschungsbemühungen.

Literaturverzeichnis

- [ACS98] ANDREI, P. ; CALTUN, O. ; STANCU, A.: Differential phenomenological models for the magnetization processes in soft MnZn ferrites. In: *IEEE Transactions on Magnetism* 34 (1998), Nr. 1, S. 231–241
- [AK11] AL JANAIDEH, M. ; KREJČI, P.: An inversion formula for a Prandtl-Ishlinskii operator with time dependent thresholds. In: *Physica B: Condensed Matter* 406 (2011), Nr. 8, S. 1528–1532
- [Alb17] ALBACH, M.: *Induktivitäten in der Leistungselektronik*. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2017
- [ASC05] ANDREI, P. ; STANCU, A. ; CALTUN, O.: Modeling and simulation of electrical circuits with hysteresis inductors by using a dynamic Preisach model. In: *Preisach Memorial Book*. Budapest : Akadémiai Kiadó, 2005, S. 187–197
- [BCC00] BOTTAUSCIO, O. ; CHIAMPI, M. ; CHIARABAGLIO, D.: Iron losses in soft magnetic materials under periodic non-sinusoidal supply conditions. In: *Physica B: Condensed Matter* 275 (2000), Nr. 1-3, S. 191–196
- [Ben75] BENDER, D.: *Werkstoffkunde Elektroberufe*. Leipzig : VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1975
- [Ber83] BERTOTTI, G.: Space-time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Theory. In: *Journal of Applied Physics* 54 (1983), Nr. 9, S. 5293–5305
- [Ber84] BERTOTTI, G.: Space-time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Applications. In: *Journal of Applied Physics* 55 (1984), Nr. 12, S. 4339–4355
- [Ber85] BERTOTTI, G.: Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. In: *Journal of Applied Physics* 57 (1985), Nr. 6, S. 2110–2126
- [Ber88] BERTOTTI, G.: General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. In: *IEEE Transactions on Magnetism* 24 (1988), Nr. 1, S. 621–630
- [Ber98] BERTOTTI, G.: *Hysteresis in magnetism*. San Diego : Academic Press, 1998
- [Bis76] BISHOP, J. E. L.: The influence of a random domain size distribution on the eddy-current contribution to hysteresis in transformer steel. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 9 (1976), S. 1367–1377

- [BMB02] BERNARD, Y. ; MENDES, E. ; BOUILLAULT, F.: Dynamic hysteresis modeling based on Preisach model. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38 (2002), Nr. 2, S. 885–888
- [BMSV97] BOBBIO, S. ; MILANO, G. ; SERPICO, C. ; VISONE, C.: Models of magnetic hysteresis based on Play and Stop hysterons. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 33 (1997), Nr. 6, S. 4417–4426
- [BS96] BROKATE, M. ; SPREKELS, J.: *Hysteresis and Phase Transitions*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1996
- [CH87] COLEMAN, B. D. ; HODGDON, M. L.: On a class of constitutive relations for ferromagnetic hysteresis. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 99 (1987), Nr. 4, S. 375–396
- [Che09] CHEN, K.: Iron-loss simulation of laminated steels based on expanded generalized Steinmetz equation. In: *Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference*. Wuhan : IEEE, 2009, S. 1–3
- [Coe10] COEY, J. M. D.: *Magnetism and Magnetic Materials*. Cambridge : Cambridge University Press, 2010
- [Dav90] DAVIES, E. J.: *IEE Power Engineering Series*. Bd. 11: *Conduction and Induction Heating*. London : Peter Peregrinus Ltd., 1990
- [Del66] DELLA TORRE, E.: Effect of interaction on the magnetization of single domain particles. In: *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 14 (1966), Nr. 2, S. 86–92
- [Del99] DELLA TORRE, E.: *Magnetic Hysteresis*. New York : IEEE Press, 1999
- [DH08] DEUFLHARD, P. ; HOHMANN, A.: *Numerische Mathematik*. Bd. 1. Berlin, New York : De Gruyter, 2008
- [DR08] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008
- [Dre79a] DRESNER, L.: *Eddy current heating of irregularly shaped plates by slow ramped fields*. Oak Ridge : Oak Ridge National Laboratory, 1979
- [Dre79b] DRESNER, L.: Eddy current heating of irregularly shaped plates by slow ramped fields. In: *Proceedings of the 8th Symposium on Engineering Problems of Fusion Research* Bd. 1. San Francisco : IEEE, 1979, S. 89–93
- [Duh97] DUHEM, P.: Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik I: Die dauernden Änderungen der Systeme, welche von einer einzigen normalen Veränderlichen abhängen. In: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 22 (1897), S. 543–589
- [EM01] ERICKSON, R. W. ; MAKSIMOVIĆ, D.: *Fundamentals of Power Electronics*. New York : Kluwer Academic Publishers, 2001

- [Fer13] FERROXCUBE: *Soft Ferrites and Accessories*. Taipeh, 2013. – Produktkatalog
- [FN90] FIORILLO, F. ; NOVIKOV, A.: An improved approach to power losses in magnetic laminations under nonsinusoidal induction waveform. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 26 (1990), Nr. 5, S. 2904–2910
- [GB05] GLET, U. ; BAUMBACH, J.: Ein neuartiges Verfahren zur Messung magnetischer Bauteile und Magnetaktoren. In: *50. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*. Ilmenau : TU Ilmenau, 2005, S. 1–15
- [GK02] GEIGER, C. ; KANZOW, C.: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2002
- [GM14] GROSS, R. ; MARX, A.: *Festkörperphysik*. Berlin, Boston : De Gruyter Oldenbourg, 2014
- [HM86] HAHN, L. ; MUNKE, I.: *Werkstoffkunde für die Elektrotechnik und Elektronik*. Berlin : VEB Verlag Technik, 1986
- [Hod88a] HODGDON, M. L.: Applications of a theory of ferromagnetic hysteresis. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 24 (1988), Nr. 1, S. 218–221
- [Hod88b] HODGDON, M. L.: Mathematical theory and calculations of magnetic hysteresis curves. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 24 (1988), Nr. 6, S. 3120–3122
- [Hög16] HÖGANÄS: *Somaloy Material Data*. Höganäs, 2016. – Produktkatalog
- [HR13] HILZINGER, R. ; RODEWALD, W.: *Magnetic Materials*. Erlangen : Publicis Publishing, 2013
- [IEC03] Norm IEC 60404-6:2003-06 Juni 2003. *Magnetic materials - Part 6: Methods of measurement of the magnetic properties of magnetically soft metallic and powder materials at frequencies in the range 20 Hz to 200 kHz by the use of ring specimens*
- [Ish44] ISHLINSKIĬ, A. Y.: Some applications of statistical methods to describing deformations of bodies. In: *Izvestiia Akademii nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk* 9 (1944), S. 583–590
- [JA86] JILES, D. C. ; ATHERTON, D. L.: Theory of ferromagnetic hysteresis. In: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 61 (1986), Nr. 1-2, S. 48–60
- [Jil92] JILES, D. C.: A self consistent generalized model for the calculation of minor loop excursions in the theory of hysteresis. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 28 (1992), Nr. 5, S. 2602–2604
- [Jor24] JORDAN, H.: Die ferromagnetischen Konstanten für schwache Wechselfelder. In: *Elektrische Nachrichtentechnik* 1 (1924), S. 7–29

- [JTD92] JILES, D. C. ; THOELKE, J. B. ; DEVINE, M. K.: Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 28 (1992), Nr. 1, S. 27–35
- [KK13] KREJČI, P. ; KUHNEN, K.: *Admissible thermodynamic potentials and dissipation operators for hysteresis models with Preisach memory*. 2013. – Workshop at the Mathematical Academy of Science, Prague, Czech Republic
- [KK14] KREJČI, P. ; KUHNEN, K.: *Rate-independent dissipation in power electronic circuits*. 2014. – Workshop at the Mathematical Academy of Science, Prague, Czech Republic
- [Kle94] KLEINEBERG, T.: *Modellierung nichtlinearer induktiver Bauelemente der Leistungselektronik*. Chemnitz, Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Dissertation, 1994
- [Koh96] KOHLRAUSCH, F.: *Praktische Physik*. Bd. 2. Stuttgart : Teubner Verlag, 1996
- [KP89] KRASNOSEL'SKII, M. A. ; POKROVSKII, A. V.: *Systems with Hysteresis*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo : Springer-Verlag, 1989
- [Kre96] KREJČI, P.: *Gakuto International Series: Mathematical sciences and applications*. Bd. 8: *Hysteresis, Convexity and Dissipation in Hyperbolic Equations*. Tokyo : Gakkotoscho, 1996
- [Kuh01] KUHNEN, K.: *Inverse Steuerung piezoelektrischer Aktoren mit Hysterese-, Kriech- und Superpositionsoperatoren*. Aachen : Shaker Verlag, 2001
- [Kuh03] KUHNEN, K.: Modeling, Identification and Compensation of complex hysteretic Nonlinearities - A modified Prandtl-Ishlinskii Approach. In: *European Journal of Control* 9 (2003), Nr. 4, S. 407–418
- [Kuh08] KUHNEN, K.: *Kompensation komplexer gedächtnisbehafteter Nichtlinearitäten in Systemen mit aktiven Materialien*. Aachen : Shaker Verlag, 2008
- [LAS01] LI, J. ; ABDALLAH, T. ; SULLIVAN, C. R.: Improved calculation of core loss with nonsinusoidal waveforms. In: *Conference Record of the 36th IEEE Industry Applications Society Annual Meeting* Bd. 4. Chicago : IEEE, 2001, S. 2203–2210
- [LD15] LUO, M. ; DUJIĆ, D.: Permeance based modelling of the core corners considering magnetic material nonlinearity. In: *IECON 2015 - 41st Annual Conference of the IEEE*. Yokohama : IEEE, 2015, S. 950–955
- [Lie77] LIESE, M.: Verfahren zur Berechnung von Wirbelströmen in massivem Eisen. In: *Archiv für Elektrotechnik* 59 (1977), Nr. 2, S. 75–85

- [LZF⁺04] LIN, D. ; ZHOU, P. ; FU, W. N. ; BADICS, Z. ; CENDES, Z. J.: A dynamic core loss model for soft ferromagnetic and power ferrite materials in transient finite element analysis. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 40 (2004), Nr. 2, S. 1318–1321
- [May91] MAYERGOYZ, I. D.: *Mathematical Models of Hysteresis*. New York : Springer-Verlag, 1991
- [MBKE12] MÜHLETHALER, J. ; BIELA, J. ; KOLAR, J. W. ; ECKLEBE, A.: Improved core-loss calculation for magnetic components employed in power electronic systems. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 27 (2012), Nr. 2, S. 964–973
- [McL04] MCLYMAN, W. T.: *Transformer and Inductor Design Handbook*. New York, Basel : Marcel Dekker Inc, 2004
- [MLL⁺11] MU, M. ; LEE, F. C. ; LI, Q. ; GILHAM, D. ; NGO, K. D. T.: A high frequency core loss measurement method for arbitrary excitations. In: *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*. Fort Worth : IEEE, 2011, S. 157–162
- [Mor09] MORITZ, G.: Eddy currents in accelerator magnets. In: *2009 CAS-CERN Accelerator School: Specialised course on Magnets*. Brügge : CERN, 2009, S. 103–140
- [MS06] MICHALOWSKY, L. ; SCHNEIDER, J.: *Magnettechnik*. Essen : Vulkan-Verlag, 2006
- [Mul93] MULDER, S. A.: Fit formulae for power loss in ferrites and their use in transformer design. In: *Proceedings of the European Power Conversion and Intelligent Motion Conference PCIM*. Nürnberg : ZM Communications, 1993, S. 345–359
- [PB58] PRY, R. H. ; BEAN, C. P.: Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain model. In: *Journal of Applied Physics* 29 (1958), Nr. 3, S. 532–533
- [Pin15] PINNE, J.: *Optimierung von PV-Wechselrichtern im Netzparallelbetrieb mithilfe analytischer Verhaltens- und Verlustleistungsmodelle*. Kassel : Kassel University Press, 2015
- [Pra28] PRANDTL, L.: Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928), Nr. 2, S. 85–106
- [Pre35] PREISACH, F.: Über die magnetische Nachwirkung. In: *Zeitschrift für Physik* 94 (1935), Nr. 5-6, S. 277–302

- [RBD01] REINERT, J. ; BROCKMEYER, A. ; DE DONCKER, R. W. A. A.: Calculation of losses in ferro- and ferrimagnetic materials based on the modified Steinmetz equation. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 37 (2001), Nr. 4, S. 1055–1060
- [Sch97] SCHWEER, J. B.: *Berechnung kleiner Wechselstrom-Ventilmagnete mit massivem Eisenkreis*. Hannover, Universität Hannover, Fachbereich Elektrotechnik, Dissertation, 1997
- [She06] SHEN, W.: *Design of high-density transformers for high-frequency high-power converters*. Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute and State University, Electrical and Computer Engineering, Dissertation, 2006
- [SK11] SCHWARZ, H. R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2011
- [SPLG78] SIKORA, R. ; PURCZYNSKI, J. ; LIPINSKI, W. ; GRAMZ, M.: Use of variational methods to the eddy currents calculation in thin conducting plates. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 14 (1978), Nr. 5, S. 383–385
- [Sta09] STADLER, A.: *Messtechnische Bestimmung und Simulation der Kernverluste in weichmagnetischen Materialien*. Erlangen, Universität Erlangen-Nürnberg, Technische Fakultät, Dissertation, 2009
- [Ste92] STEINMETZ, C. P.: On the law of hysteresis. In: *AIEE Transactions* 9 (1892), S. 3–64
- [Str02] STRÖHLA, T.: *Ein Beitrag zur Simulation und zum Entwurf von elektromagnetischen Systemen mit Hilfe der Netzwerkmethod*. Ilmenau, Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, Dissertation, 2002
- [TS02] TIETZE, U. ; SCHENK, C.: *Halbleiter-Schaltungstechnik*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2002
- [Vis94] VISINTIN, A.: *Differential Models of Hysteresis*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1994
- [VSAT02] VENKATACHALAM, K. ; SULLIVAN, C. R. ; ABDALLAH, T. ; TACCA, H.: Accurate prediction of ferrite core loss with nonsinusoidal waveforms using only Steinmetz parameters. In: *IEEE Workshop on Computers in Power Electronics Proceedings*. Mayaguez : IEEE, 2002, S. 36–41
- [VVG04] VAN DEN BOSSCHE, A. ; VALCHEV, V. C. ; GEORGIEV, G. B.: Measurement and loss model of ferrites with non-sinusoidal waveforms. In: *Proceedings of the 35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference* Bd. 6. Aachen : IEEE, 2004, S. 4814–4818

- [VVV05] VAN DEN BOSSCHE, A. ; VAN DE SYPE, D. M. ; VALCHEV, V. C.: Ferrite loss measurement and models in half bridge and full bridge waveforms. In: *Proceedings of the 36th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*. Recife : IEEE, 2005, S. 1535–1539
- [WD67] WIJN, H. P. J. ; DULLENKOPF, P.: *Werkstoffe der Elektrotechnik*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1967
- [WSK50] WILLIAMS, H. J. ; SHOCKLEY, W. ; KITTEL, C.: Studies of the propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary. In: *Physical Review* 80 (1950), Nr. 6, S. 1090–1094
- [Ye14] YE, Z.: Modelling and Experimental Analysis of Core Losses of SMC Components. In: *Advances in Powder Metallurgy and Particulate Materials - 2014*. Princeton : Metal Powder Industries Federation, 2014, S. 1641–1648
- [Zhu94] ZHU, J. G.: *Numerical modelling of magnetic materials for computer aided design of electromagnetic devices*. Sydney, University of Technology, Faculty of Engineering, Dissertation, 1994

Anhang A

Spannungsübertragungsfunktionen zur Regelkreis-Analyse und -Synthese

Zur simulativen Untersuchung und Auslegung des in der Abbildung 3.4 im Kapitel 3.2 beschriebenen geregelten Messkreises kommen die nachstehenden Spannungsübertragungsfunktionen der einzelnen Regelkreisglieder zur Anwendung.

Der Leistungsverstärker sowie jeder der Operationsverstärker werden durch ein proportionales Übertragungsverhalten mit Verzögerung erster Ordnung modelliert. Demzufolge lautet die Spannungsübertragungsfunktion des Leistungsverstärkers

$$H_V(s) = \frac{K_V}{1 + T_V s}, \quad (\text{A.1})$$

wobei K_V den Verstärkungsfaktor beschreibt und T_V der Zeitkonstante entspricht. Zwischen ihr und der Grenzkreisfrequenz ω_V des Übertragungsgliedes besteht der Zusammenhang

$$T_V = \frac{1}{\omega_V} \quad (\text{A.2})$$

und in Abhängigkeit der Grenzfrequenz f_V lautet die Beziehung

$$T_V = \frac{1}{2\pi f_V}. \quad (\text{A.3})$$

In Analogie dazu lässt sich die Spannungsübertragungsfunktion eines Operationsverstärkers zu

$$H_{OV}(s) = \frac{K_{OV}}{1 + T_{OV} s} \quad (\text{A.4})$$

angeben. Dabei ist K_{OV} der zugehörige Verstärkungsfaktor und T_{OV} die entsprechende Zeitkonstante, deren Abhängigkeit von der Grenzkreisfrequenz ω_{OV} durch

$$T_{OV} = \frac{1}{\omega_{OV}} \quad (\text{A.5})$$

und von der Grenzfrequenz f_{OV} durch

$$T_{OV} = \frac{1}{2\pi f_{OV}} \quad (\text{A.6})$$

definiert ist.

Zur Beschreibung der aktiven Übertragungsglieder des Messkreises, deren Funktionsweise auf gegengekoppelten Operationsverstärkern basiert, ist zweckmäßigerweise die im Bild A.1 gezeigte regelungstechnische Interpretation und Darstellung gewählt. Die Größen U_E und U_A repräsentieren allgemein die Eingangs- und die Ausgangsspannungen eines Übertragungsgliedes. Es beschreibt $H_{OV}(s)$ die Spannungsübertragungsfunktion eines Operationsverstärkers nach Gleichung (A.4). Der Zählerterm $Z(s)$ entspricht im regelungstechnischen Modell eines gegengekoppelten Operationsverstärkers einem Übertragungsglied zur Führungsgrößenformung und der Nennerterm $N(s)$ ist einem Übertragungsglied im Rückkopplungszweig zuzuordnen. Beide Terme werden vollständig durch die jeweilige äußere Beschaltung eines Operationsverstärkers bestimmt.

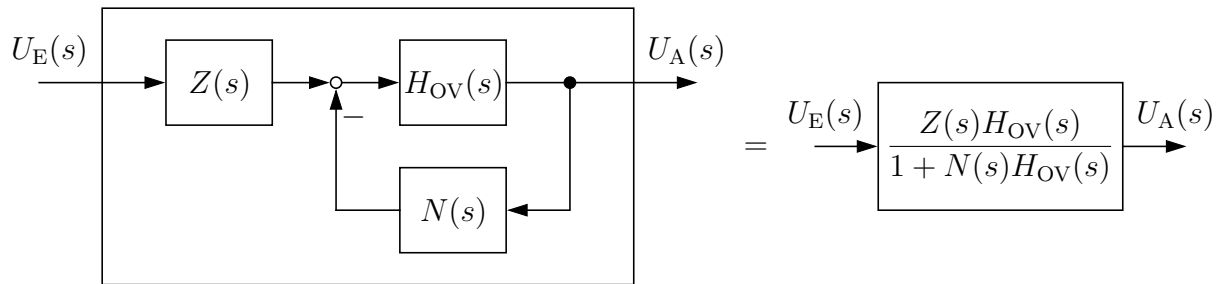


Bild A.1: Allgemeines regelungstechnisches Modell eines gegengekoppelten Operationsverstärkers und die zugehörige Übertragungsfunktion in Anlehnung an [TS02]

Nach diesem Schema ergibt sich die Übertragungsfunktion des Subtrahierers zu

$$H_S(s) = \frac{Z_S(s)H_{OV}(s)}{1 + N_S(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.7})$$

mit

$$Z_S(s) = \frac{R_{S2}}{R_{S1} + R_{S2}} \quad (\text{A.8})$$

und

$$N_S(s) = \frac{R_{S1}}{R_{S1} + R_{S2}}. \quad (\text{A.9})$$

Für den Proportional-Anteil des Reglers gilt

$$H_P(s) = \frac{Z_P(s)H_{OV}(s)}{1 + N_P(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.10})$$

mit

$$Z_P(s) = \frac{-R_{P2}}{R_{P1} + R_{P2}} \quad (\text{A.11})$$

und

$$N_P(s) = \frac{R_{P1}}{R_{P1} + R_{P2}}, \quad (\text{A.12})$$

für den Integral-Anteil erhält man

$$H_I(s) = \frac{Z_I(s)H_{OV}(s)}{1 + N_I(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.13})$$

mit

$$Z_I(s) = \frac{-R_{I2}}{R_{I1}R_{I2}C_1s + R_{I1} + R_{I2}} \quad (\text{A.14})$$

sowie

$$N_I(s) = \frac{R_{I1}R_{I2}C_1s + R_{I1}}{R_{I1}R_{I2}C_1s + R_{I1} + R_{I2}} \quad (\text{A.15})$$

und der Differential-Anteil wird durch

$$H_D(s) = \frac{Z_D(s)H_{OV}(s)}{1 + N_D(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.16})$$

mit

$$Z_D(s) = \frac{-R_{D2}C_Ds}{(R_{D1} + R_{D2})C_Ds + 1} \quad (\text{A.17})$$

und

$$N_D(s) = \frac{R_{D1}C_Ds + 1}{(R_{D1} + R_{D2})C_Ds + 1} \quad (\text{A.18})$$

beschrieben. Die Übertragungsfunktion des Kompensationsgliedes besitzt erwartungsgemäß dieselbe Struktur wie die des Integral-Anteils $H_I(s)$ und lautet demnach

$$H_K(s) = \frac{Z_K(s)H_{OV}(s)}{1 + N_K(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.19})$$

mit

$$Z_K(s) = \frac{-R_{K2}}{R_{K1}R_{K2}C_Ks + R_{K1} + R_{K2}} \quad (\text{A.20})$$

und

$$N_K(s) = \frac{R_{K1}R_{K2}C_Ks + R_{K1}}{R_{K1}R_{K2}C_Ks + R_{K1} + R_{K2}}. \quad (\text{A.21})$$

Der nichtinvertierende Messverstärker zur Bestimmung des H -Feldes ist kein Übertragungsglied des Regelkreises. Aus Gründen der Vollständigkeit wird die zugehörige Übertragungsfunktion dennoch angegeben. Sie lautet

$$H_H(s) = \frac{Z_H(s)H_{OV}(s)}{1 + N_H(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.22})$$

mit

$$Z_H(s) = 1 \quad (\text{A.23})$$

und

$$N_H(s) = \frac{R_{H2}}{R_{H1} + R_{H2}}. \quad (\text{A.24})$$

Vergleichbar dazu kann das Übertragungsverhalten des Messverstärkers zur Bestimmung des B -Feldes anhand von

$$H_B(s) = \frac{Z_B(s)H_{OV}(s)}{1 + N_B(s)H_{OV}(s)} \quad (\text{A.25})$$

mit

$$Z_B(s) = 1 \quad (\text{A.26})$$

und

$$N_B(s) = \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} \quad (\text{A.27})$$

modelliert werden. Die Systemfunktion des Spannungsteilers lautet

$$H_T(s) = \frac{R_{T2}}{R_{T1} + R_{T2}}. \quad (\text{A.28})$$

Das zur Herleitung der Transformator-Spannungsübertragungsfunktion $H_m(s)$ dienende Gleichungssystem lässt sich mithilfe des domänenübergreifenden Ersatzschaltbildes in Bild 3.6 unter Anwendung der Kirchhoffschen Regeln zu

$$0 = -U_1(t) + I_1(t)R_{Cu1} + N_1(\dot{\Phi}_h(t) + \dot{\Phi}_{s1}(t)) \quad (\text{A.29})$$

$$0 = -U_2(t) + I_2(t)R_{Cu2} + N_2(\dot{\Phi}_h(t) + \dot{\Phi}_{s2}(t)) \quad (\text{A.30})$$

$$0 = -N_1 I_1(t) + \Phi_h(t)R_m - N_2 I_2(t) \quad (\text{A.31})$$

$$0 = -N_1 I_1(t) + \Phi_{s1}(t)R_{s1} \quad (\text{A.32})$$

$$0 = -N_2 I_2(t) + \Phi_{s2}(t)R_{s2} \quad (\text{A.33})$$

$$0 = -U_2(t) - I_2(t)R_a \quad (\text{A.34})$$

bestimmen. Daraus resultiert

$$H_m(s) = \frac{Z_m s}{N_{m1} s^2 + N_{m2} s + N_{m3}} \quad (\text{A.35})$$

mit

$$Z_m = N_1 N_2 R_a R_{s1} R_{s2}, \quad (\text{A.36})$$

$$N_{m1} = N_1^2 N_2^2 (R_m + R_{s1} + R_{s2}), \quad (\text{A.37})$$

$$N_{m2} = (R_a R_m + R_a R_{s1} + R_m R_{Cu2} + R_{s1} R_{Cu2})(N_1^2 R_{s2}) + (R_m + R_{s2})(N_2^2 R_{s1} R_{Cu1}), \quad (\text{A.38})$$

$$N_{m3} = R_m R_{s1} R_{s2} R_{Cu1} (R_a + R_{Cu2}). \quad (\text{A.39})$$

Aus Gründen der Praktikabilität findet der Einfluss des Vorwiderstandes R_v und des Messwiderstandes R_M im Regelkreismodell Berücksichtigung, indem die zugehörigen Widerstandswerte dem des Wicklungswiderstandes R_{Cu1} hinzuaddiert werden.

Anhang B

Polynomielle Approximation der Wurzelfunktion

Die in Kapitel 4.3.2 geforderte dreifach stetige Differenzierbarkeit von (4.173) nach $\dot{\Phi}(t)$ verlangt die Approximation der darin vorkommenden Wurzelfunktion des Austauschanteils (4.164) mit einer geeigneten Funktion $\Theta_{\text{Aapp}}(t)$ in einem Intervall $-\dot{\Phi}_\varepsilon \leq \dot{\Phi}(t) \leq \dot{\Phi}_\varepsilon$. Das beinhaltet die Übereinstimmung der Funktionswerte der ungeraden Originalfunktion

$$\Theta_{\text{A}}(t) = G_{\text{A}}(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t)) |\dot{\Phi}(t)|^{\frac{1}{2}}$$

und ihrer ersten drei partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \Theta'_{\text{A}}(t) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \Theta_{\text{A}}(t) \\ &= \frac{1}{2} G_{\text{A}}(\Phi(t)) |\dot{\Phi}(t)|^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \Theta''_{\text{A}}(t) &= \frac{\partial^2}{\partial \dot{\Phi}^2} \Theta_{\text{A}}(t) \\ &= -\frac{1}{4} G_{\text{A}}(\Phi(t)) \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t)) |\dot{\Phi}(t)|^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

sowie

$$\begin{aligned} \Theta'''_{\text{A}}(t) &= \frac{\partial^3}{\partial \dot{\Phi}^3} \Theta_{\text{A}}(t) \\ &= \frac{3}{8} G_{\text{A}}(\Phi(t)) |\dot{\Phi}(t)|^{-\frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

mit den Funktionswerten der Näherungsfunktion $\Theta_{\text{Aapp}}(t)$ und ihrer ersten drei partiellen Ableitungen nach $\dot{\Phi}(t)$ an den Übergangsstellen $\dot{\Phi}(t) = \pm \dot{\Phi}_\varepsilon$. Dies führt also auf vier Gleichungsbedingungen, mit denen vier Parameter zu bestimmen sind. Zur Erfüllung aller Anforderungen soll eine ungerade Polynomfunktion siebten Grades gemäß

$$\Theta_{\text{Aapp}}(t) = G_{\text{A}}(\Phi(t)) \left(m\dot{\Phi}(t)^7 + n\dot{\Phi}(t)^5 + p\dot{\Phi}(t)^3 + q\dot{\Phi}(t) \right) \quad (\text{B.4})$$

mit den ersten drei partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \Theta'_{\text{Aapp}}(t) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \Theta_{\text{Aapp}}(t) \\ &= G_{\text{A}}(\Phi(t)) \left(7m\dot{\Phi}(t)^6 + 5n\dot{\Phi}(t)^4 + 3p\dot{\Phi}(t)^2 + q \right), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \Theta''_{\text{Aapp}}(t) &= \frac{\partial^2}{\partial \dot{\Phi}^2} \Theta_{\text{Aapp}}(t) \\ &= G_{\text{A}}(\Phi(t)) \left(42m\dot{\Phi}(t)^5 + 20n\dot{\Phi}(t)^3 + 6p\dot{\Phi}(t) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

sowie

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{Aapp}}'''(t) &= \frac{\partial^3}{\partial \dot{\Phi}^3} \Theta_{\text{Aapp}}(t) \\ &= G_A(\Phi(t)) (210m\dot{\Phi}(t)^4 + 60n\dot{\Phi}(t)^2 + 6p)\end{aligned}\tag{B.7}$$

als Näherungsfunktion eingesetzt werden. Damit lässt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}m\dot{\Phi}(t)^7 + n\dot{\Phi}(t)^5 + p\dot{\Phi}(t)^3 + q\dot{\Phi}(t) &= \operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t))|\dot{\Phi}(t)|^{\frac{1}{2}} \\ 7m\dot{\Phi}(t)^6 + 5n\dot{\Phi}(t)^4 + 3p\dot{\Phi}(t)^2 + q &= \frac{1}{2}|\dot{\Phi}(t)|^{-\frac{1}{2}} \\ 42m\dot{\Phi}(t)^5 + 20n\dot{\Phi}(t)^3 + 6p\dot{\Phi}(t) &= -\frac{1}{4}\operatorname{sgn}(\dot{\Phi}(t))|\dot{\Phi}(t)|^{-\frac{3}{2}} \\ 210m\dot{\Phi}(t)^4 + 60n\dot{\Phi}(t)^2 + 6p &= \frac{3}{8}|\dot{\Phi}(t)|^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

zur Bestimmung der Parameter m, n, p und q aufstellen. Mit der Forderung nach Gleichheit der Funktionswerte bei $\dot{\Phi}(t) = \pm\dot{\Phi}_\varepsilon$ erhält man schließlich

$$m = -\frac{15}{128}\dot{\Phi}_\varepsilon^{-\frac{13}{2}}, \quad n = \frac{65}{128}\dot{\Phi}_\varepsilon^{-\frac{9}{2}}, \quad p = -\frac{117}{128}\dot{\Phi}_\varepsilon^{-\frac{5}{2}} \quad \text{und} \quad q = \frac{195}{128}\dot{\Phi}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.\tag{B.8}$$

Anhang C

Beweis zur Regularität der Jacobi-Matrix

Die Anwendung des Newton-Verfahrens zur Lösung des mehrdimensionalen Nullstellenproblems (4.225) in Kapitel 4.3.3 verlangt, dass $\mathbf{J}_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))$ stets regulär ist. Da es sich hier grundsätzlich um eine quadratische Jacobi-Matrix handelt, stellt ihre Determinante ein geeignetes Kriterium zur Überprüfung dieser Bedingung dar. So ist die stete Regularität gezeigt, wenn

$$|\mathbf{J}_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))| \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

für beliebige Werte von $\Phi(t)$ und $\dot{\Phi}(t)$ gilt. Im Folgenden seien die dem Austauschanteil zuzuordnenden Komponenten in der Jacobi-Matrix, die bei der Verwendung von n Flussröhren die Dimension $n \times n$ besitzt, durch

$$G_{Ai}^*(\Phi_i(t), \dot{\Phi}_i(t)) = \frac{G_{Ai}(\Phi_i(t))}{2\sqrt{|\dot{\Phi}_i(t)|}} \quad ; \quad i = 1 \dots n \quad (\text{C.2})$$

gegeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier eine verkürzte Schreibweise entsprechend $G_{Ai}^*(\Phi_i(t), \dot{\Phi}_i(t)) = G_{Ai}^*$ und $G_{Wj}(\Phi_j(t)) = G_{Wj}$ bevorzugt. Damit lässt sich $\mathbf{J}_{\Delta\theta}(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))$ durch die kompakte Darstellung

$$\mathbf{J}_{\Delta\theta} = - \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n G_{Wj} + G_{A1}^* & \sum_{j=2}^n G_{Wj} & \cdots & \sum_{j=n}^n G_{Wj} \\ \sum_{j=2}^n G_{Wj} & \sum_{j=2}^n G_{Wj} + G_{A2}^* & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sum_{j=n}^n G_{Wj} \\ \sum_{j=n}^n G_{Wj} & \cdots & \sum_{j=n}^n G_{Wj} & \sum_{j=n}^n G_{Wj} + G_{An}^* \end{pmatrix}$$

ausdrücken. Die Anwendung elementarer Zeilenumformungen, mit denen von den Zeilen 1 bis $n - 1$ jeweils die unmittelbar nachfolgende Zeile subtrahiert wird, führt auf die vereinfachte Gestalt

$$\mathbf{J}_{\Delta\theta} = - \begin{pmatrix} G_{W1} + G_{A1}^* & -G_{A2}^* & 0 & \cdots & 0 \\ G_{W2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & G_{Wi} + G_{Ai}^* & \ddots & 0 \\ G_{Wn-1} & \ddots & \ddots & \ddots & -G_{An}^* \\ G_{Wn} & G_{Wn} & \cdots & G_{Wn} & G_{Wn} + G_{An}^* \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Determinante lässt sich dann allgemein und besonders vorteilhaft mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes rekursiv bestimmen. Demzufolge lautet die Berechnungsvorschrift für die erste Entwicklung nach einer Zeile

$$|\mathbf{J}_{\Delta\theta}| = \sum_{s=1}^n (-1)^{z+s} j_{\Delta\theta zs} |\mathbf{J}_{\Delta\theta zs}|. \quad (\text{C.3})$$

Dabei repräsentiert $j_{\Delta\theta zs}$ den Eintrag in der Zeile z und der Spalte s der Matrix $\mathbf{J}_{\Delta\theta}$. Der Ausdruck $\mathbf{J}_{\Delta\theta zs}$ beschreibt die Untermatrix von $\mathbf{J}_{\Delta\theta}$ mit der Dimension $(n-1) \times (n-1)$, die durch das Streichen der Zeile z und der Spalte s entsteht. Die gegebenenfalls gebildeten Unterdeterminanten können analog dazu entwickelt werden, bis sich die Determinante allein durch additiv und multiplikativ verknüpfte Skalare ausdrückt.

Zweckmäßigerweise erfolgt die gedankliche Entwicklung der Determinante hier nach der ersten Zeile. Das ergibt zunächst

$$|\mathbf{J}_{\Delta\theta}| = -(G_{W1} + G_{A1}^*) \begin{vmatrix} G_{W2} + G_{A2}^* & -G_{A3}^* & 0 & \cdots & 0 \\ G_{W3} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & G_{Wi} + G_{Ai}^* & \ddots & 0 \\ G_{Wn-1} & \ddots & \ddots & \ddots & -G_{An}^* \\ G_{Wn} & G_{Wn} & \cdots & G_{Wn} & G_{Wn} + G_{An}^* \end{vmatrix} - G_{A2}^* \begin{vmatrix} G_{W2} & -G_{A3}^* & 0 & \cdots & 0 \\ G_{W3} & G_{W3} + G_{A3}^* & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ G_{Wn-1} & \ddots & \ddots & \ddots & -G_{An}^* \\ G_{Wn} & G_{Wn} & \cdots & G_{Wn} & G_{Wn} + G_{An}^* \end{vmatrix}.$$

Die Gestalt von $\mathbf{J}_{\Delta\theta}$ bewirkt demnach, dass auch die jeweils ersten Zeilen der entstehenden Unterdeterminanten nur Einträge in der ersten und zweiten Spalte besitzen, wobei die zugehörigen Vorzeichen ebenfalls unverändert sind. Der Vorgang kann also in gleicher Weise für die noch verbleibenden Entwicklungen fortgesetzt werden, bis schließlich nur noch die Determinanten von Untermatrizen der Dimension 2×2 gemäß

$$\begin{vmatrix} G_{Wn-1} + G_{An-1}^* & -G_{An}^* \\ G_{Wn} & G_{Wn} + G_{An}^* \end{vmatrix} = (G_{Wn-1} + G_{An-1}^*)(G_{Wn} + G_{An}^*) + G_{An}^* G_{Wn}$$

und

$$\begin{vmatrix} G_{Wn-1} & -G_{An}^* \\ G_{Wn} & G_{Wn} + G_{An}^* \end{vmatrix} = G_{Wn-1}(G_{Wn} + G_{An}^*) + G_{An}^* G_{Wn}$$

zu bilden sind.

In einer weiteren Betrachtung lassen sich mithilfe der Gleichungen (4.166), (4.198), (4.199), (4.203), (4.241), (4.242) und (C.2) die Beziehungen

$$G_{A_i}^* = \left(\sigma_0 + \sigma_1 \left(\frac{\Phi_i(t)}{A_i} \right)^2 \right) \frac{\lambda_e}{2\sqrt{|\dot{\Phi}_i(t)|A_i}} \quad ; \quad i = 1 \dots n$$

sowie

$$G_{W_i} = \left(\sigma_0 + \sigma_1 \left(\frac{\Phi_i(t)}{A_i} \right)^2 \right) \frac{A_{W_i}}{l_{W_i}} \quad ; \quad i = 1 \dots n$$

angeben. Wegen der Nebenbedingungen (4.214) gilt stets $\sigma_0 > 0$, $\sigma_1 \geq 0$ und $\lambda > 0$. Zudem liefert die Wurzelfunktion von $G_{A_i}^*$ beziehungsweise im Bereich $-\dot{\Phi}_\varepsilon \leq \dot{\Phi}_i(t) \leq \dot{\Phi}_\varepsilon$ ihre Approximation analog zu $\Theta'_A(t)$ und $\Theta'_{A_{\text{app}}}(t)$ in Abbildung 4.30 ausschließlich positive Werte. Somit sind sowohl $G_{A_i}^*$ als auch G_{W_i} mit $i = 1 \dots n$ stets größer als null. Aus diesem Grund und weil hier alle aus der Determinantenentwicklung hervorgehenden Terme identische Vorzeichen besitzen, können sich keine von ihnen gegenseitig kompensieren. Folglich wird die Determinante niemals verschwinden, weshalb die Bedingung (C.1) für beliebige Werte von $\Phi(t)$ und $\dot{\Phi}(t)$ erfüllt ist.

Anhang D

Wirbelstromgesamtleitwert als Funktion der Schalenanzahl

Die Bestimmung des Korrekturfaktors zur Kompensation des Diskretisierungsfehlers bei der Verwendung einer endlichen Schalenanzahl n im Zusammenhang mit dem Schalenmodell mit betragsmäßig gleichen Flussröhrenquerschnittsflächen nach Kapitel 4.3.3 erfordert die Kenntnis des zwischen dem Wirbelstromgesamtleitwert $G_{\text{Wges}}(\Phi(t), n)$ und n bestehenden analytischen Zusammenhangs. Den Ausgangspunkt für dessen Herleitung stellt die Gleichung (4.263) dar, die sich anhand der verkürzten Schreibweisen $G_{\text{Wges}}(\Phi(t), n) = G_{\text{Wges}}(n)$ und $G_{\text{Wi}}(\Phi(t)) = G_{\text{Wi}}$ zu

$$G_{\text{Wges}}(n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 G_{\text{Wi}}$$

angeben lässt. Es ist zweckmäßig, die Summenformel zunächst entsprechend

$$G_{\text{Wges}}(n) = \frac{1}{n^2} G_{\text{W1}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} i^2 G_{\text{Wi}} + G_{\text{Wn}} \quad (\text{D.1})$$

aufzuspalten. Unter Verwendung von (4.241) und (4.261) sowie der vereinfachten Schreibweise $\sigma(\Phi(t)) = \sigma$ folgt

$$G_{\text{Wges}}(n) = \frac{1}{n^2} \sigma \frac{A_{\text{W1}}}{l_{\text{W1}}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} i^2 \sigma \frac{A_{\text{Wi}}}{l_{\text{Wi}}} + \sigma \frac{A_{\text{Wn}}}{l_{\text{Wn}}}. \quad (\text{D.2})$$

Anhand der Beziehungen (4.243)-(4.244) und (4.258) zur Bestimmung der Wirbelstromflächen $A_{\text{W1}} \dots A_{\text{Wn}}$ und der Wirbelstromweglängen $l_{\text{W1}} \dots l_{\text{Wn}}$ resultiert daraus

$$G_{\text{Wges}}(n) = \sigma \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \frac{r_{\text{W2}} - r_{\text{W1}}}{\sqrt{\frac{l_{\text{W1}}^*}{2\pi}} \sqrt{\frac{A_e}{\pi}}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} i^2 \frac{r_{\text{Wi+1}} - r_{\text{Wi}}}{\sqrt{\frac{l_{\text{Wi}}^*}{2\pi}} \sqrt{\frac{A_e}{\pi}}} + \frac{r_n - r_{\text{Wn}}}{\sqrt{\frac{l_{\text{Wn}}^*}{2\pi}} \sqrt{\frac{A_e}{\pi}}} \right) \quad (\text{D.3})$$

und mit den Formeln (4.251) und (4.257) für den Schalenradius r_n und die Wirbelstromflächenbegrenzungsradien $r_{\text{W1}} \dots r_{\text{Wn}}$ erhält man

$$G_{\text{Wges}}(n) = \sigma \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\sqrt{r_{\text{W2}}^*} - \sqrt{r_{\text{W1}}^*}}{\sqrt{\frac{l_{\text{W1}}^*}{2\pi}}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} i^2 \frac{\sqrt{r_{\text{Wi+1}}^*} - \sqrt{r_{\text{Wi}}^*}}{\sqrt{\frac{l_{\text{Wi}}^*}{2\pi}}} + \frac{\sqrt{\frac{A_e}{\pi}} - \sqrt{r_{\text{Wn}}^*}}{\sqrt{\frac{l_{\text{Wn}}^*}{2\pi}}} \right). \quad (\text{D.4})$$

Das Einbeziehen von (4.245)-(4.248) zur Berechnung der Wirbelstromflächenbegrenzungsradien $r_{W1}^* \dots r_{Wn}^*$ und der Wirbelstromweglängen $l_{W1}^* \dots l_{Wn}^*$ des Schwer-Modells ergibt dann

$$G_{Wges}(n) = \sigma \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\sqrt{r_1^* + r_2^*} - \sqrt{r_1^*}}{\sqrt{2r_1^*}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} i^2 \frac{\sqrt{r_i^* + r_{i+1}^*} - \sqrt{r_{i-1}^* + r_i^*}}{\sqrt{2r_i^*}} + \frac{2\sqrt[4]{\frac{A_e}{\pi}} - \sqrt{2}\sqrt{r_{n-1}^* + r_n^*}}{\sqrt{3r_n^* + r_{n-1}^*}} \right). \quad (D.5)$$

Mit der Gleichung (4.250) zur Bestimmung der Schwer-Schalenradien $r_1^* \dots r_n^*$ resultiert daraus schließlich der gesuchte funktionale Zusammenhang zwischen $G_{Wges}(n)$ und n zu

$$\begin{aligned} G_{Wges}(n) &= \sigma \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n-1} i^2 \frac{\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}}{\sqrt{2i}} + \frac{\sqrt{4n} - \sqrt{4n-2}}{\sqrt{4n-1}} \right) \\ &= \sigma \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \frac{\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}}{\sqrt{2i}} - \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n}} + \frac{\sqrt{4n} - \sqrt{4n-2}}{\sqrt{4n-1}} \right) \quad (D.6) \\ &= \sigma \frac{l_e}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \frac{2}{\sqrt{2i} (\sqrt{2i+1} + \sqrt{2i-1})} - \frac{2}{\sqrt{2n} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} + \frac{2}{\sqrt{4n-1} (\sqrt{4n} + \sqrt{4n-2})} \right). \end{aligned}$$