Meri Kiema

# Matematiikka musiikin oppimisen ja ymmärtämisen välineenä

Metropolia Ammattikorkeakoulu
Musiikkipedagogi
Musiikki
Opinnäytetyö
13.5.2016

| | |
|---|---|
| Tekijä<br>Otsikko<br><br>Sivumäärä<br>Aika | Meri Kiema<br>Matematiikka musiikin oppimisen ja ymmärtämisen välineenä<br><br>30 sivua<br>13.5.2016 |
| Tutkinto | Musiikkipedagogi |
| Koulutusohjelma | Musiikin koulutusohjelma |
| Suuntautumisvaihtoehto | Laulun opettaja |
| Ohjaajat | Kai Lindberg, MuT<br>Markus Utrio, MuM |




Opinnäytetyöni aiheena on matematiikka musiikin oppimisen ja ymmärtämisen välineenä. Työn tavoite on ollut tutkia matematiikan ja musiikin välisiä yhtymäkohtia. Työn toinen tavoite on ollut laatia tuntisuunnitelma matematiikkaa ja musiikkia yhdistävästä oppitunnista ja toteuttaa se yhtenäisessä peruskoulussa. Opinnäytetyön tekijä on järjestänyt oppitunnin työsuhteessaan Järvenpään yhteiskoulussa keväällä 2016. Matematiikkaa ja musiikkia integroiva tunti toteutettiin 6. luokka-asteella.

Työn toisessa luvussa perehdytään matematiikan ja musiikin välisiin yhteyksiin ja niiden historialliseen taustaan. Matemaattiset käsitteet ovat erottamaton osa musiikkia ja ideat näiden aineiden välillä ovat historian aikana kulkeneet molempiin suuntiin. Toisessa luvussa käsitellään intervallien muodostumista instrumenttikokeilujen avulla. Luvussa esitellään antiikin aikana vaikuttanut Pythagoras, joka teki kokeita eri instrumenteilla. Hän oivalsi, kuinka musiikin perusintervallit muodostuvat kokonaislukusuhteista.

Kolmannessa luvussa käsitellään musiikin asteikkojärjestelmän kehitystä. Lisäksi perehdytään yläsävelsarjoihin matematiikan avulla. Musiikin intervallit ilmaistaan luvuilla ja niiden yläsävelsarjaan pohjautuvat suhteet suhdelukujen avulla. Lisäksi tässä luvussa vertaillaan diatonisen ja pythagoralaisen sävelasteikon eroja.

Musiikin sisään on upotettuna valtava määrä erilaisia matemaattisia ideoita, joita voi hyödyntää aineiden luonnollisissa yhtymäkohdissa. *Tällaisia liitoskohtia ovat esimerkiksi murtoluvut, suhdeluvut, logaritmit ja lukujen monikerrat.* Viimeisessä luvussa esitellään tuntisuunnitelma oppitunnista nimeltään ”Musiikkia ilmasta ja vedestä.” Samassa luvussa kerrotaan myös suunnitelman toteutuksesta, oppilailta saadusta palautteesta ja pohdintaan oppitunnin onnistumista palautteen perusteella.




| | |
|---|---|
| Avainsanat | matematiikka, musiikki, aineintegraatio, Pythagoras |

| | |
|---|---|
| Author<br>Title<br><br>Number of Pages<br>Date | Meri Kiema<br>Mathematics as a Tool of Understanding and Learning Music<br><br>30 pages<br>13 May 2016 |
| Degree | Bachelor of Music Pedagogy |
| Degree Programme | Music |
| Specialisation option | Voice |
| Instructors | Kai Lindberg, MuT<br>Markus Utrio, MuM |

The topic of my thesis is mathematics as a tool of understanding and learning music. The first goal was to identify similarities between mathematics and music. The second one was to design a lesson that combines mathematics and music and to implement it in elementary school. I taught the lesson at Järvenpää Elementary School in spring 2016 as part of my teaching duties. The lesson that integrated mathematics and music was carried out with 6th grade students.

I examine the connection between mathematics and music and the historical background of both subjects. Mathematical concepts are an inseparable part of music and the ideas have travelled both ways between these two subjects. I also describe the discovery of consonant intervals through various instrument development experiments in Antiquity. I introduce Pythagoras, who was influential during Antiquity and performed numerous experiments with different instruments. He deduced that the basic intervals of music are formed of relations between integers.

I also describe the development of the musical scale system and examine the overtone series with mathematics. Musical intervals are represented by numbers and their overtone relations by ratios. Additionally, this chapter compares the differences between diatonic and Pythagorean scales.

Music is embedded with a vast amount of mathematical ideas that can be utilized in the learning process, for example, fractions, ratios, logarithms and number multiples. Finally, I introduce a lesson plan entitled “Music from Air and Water” and report on the implementation of the lesson and feedback from the students as well as evaluate the implementation based on the feedback.

| Keywords | Mathematics, Music, Subject Integration, Pythagoras |
|---|---|

**Sisällys**

# 1 Johdanto

Musiikinteoriaa voidaan kuvailla kauniiksi ja laaja-alaiseksi aihepiiriksi, johon kuuluu luontevana osana perustavanlaatuisia matemaattisia ideoita. *Pythagoras* oli antiikin filosofi, joka loi perusteet sekä matemaattiselle ajattelulle että musiikinteorialle. Hän keksi lukujen merkityksen musiikissa havaitsemalla, että sävelkorkeus on suhteessa soivan kielen pituuteen. Antiikin Kreikan kirjoituksissa matematiikka sisälsi neljä eri osa-aluetta, joista yksi oli musiikki. Opinnäytetyöni toisessa luvussa nostan esille sellaisia tieteentekijöitä, jotka ovat vaikuttaneet molempien aineiden kehittymiseen. Toinen näistä oli *Jean-Phillippe Rameau*, ranskalainen säveltäjä, joka rakensi musiikillisen merkityksen positiivisten kokonaislukujen jonolle. Hän osoitti, että tämä jono liittyy äänen yläsävelsarjasta saatujen osavärähtelyjen taajuuksien jonoon.

Matematiikka tuo syvemmän ulottuvuuden musiikin lainalaisuuksien ymmärtämiseen. Mielestäni matematiikka tarjoaa loistavan apuvälineen esimerkiksi asteikkojärjestelmän synnyn ymmärtämiseen. Pythagoras löysi erilaisten instrumenttikokeilujen avulla konsonoivat perusintervallit; oktaavin, kvintin ja kvartin. Opinnäytetyöni kolmannessa luvussa käsittelen, kuinka diatoninen, pythagoralainen ja tasavireinen sävelasteikko saivat niiden avulla alkunsa.

Kolmannessa luvussa keskityn *musiikinteoriaan matemaattisesta näkökulmasta*, joten osa aihepiireistä sopii sellaisille oppilaille, joilla on jonkin verran musiikillista taustaa. Matemaattisten menetelmien avulla on mahdollista selittää täsmällisesti ja osoittaa, että esimerkiksi konsonansseina pidetyt intervallit muodostuvat yksinkertaisista lukusuhteista. Musiikin ymmärtämisen syveneminen motivoi myös niitä oppilaita, jotka pohtivat musiikin lainalaisuuksia. ”Vain matematiikan tarjoamien keinojen avulla musiikilliset ideani ovat järjestäytyneet ja valo on syrjäyttänyt synkkyyden...” kirjoitti J. Ph. Rameau eräässä harmoniaopin kirjassaan vuonna 1722.

Pythagoraan ajoista alkaen musiikki ja matematiikka ovat kuuluneet läheisesti yhteen. Joitakin matemaattisia ideoita on syntynyt musiikintutkimuksen ohessa ja ne ovat hahmottuneet täsmälliseksi matematiikaksi myöhemmin. Esimerkiksi intervallien suhdelukujen yhteydessä on huomattavissa, että sävelasteikko on logaritminen. Kun lasketaan kaksi intervallia yhteen, saadaan oikea intervallisuhde kertolaskulla. Samoin jos toisesta intervallista vähennetään toinen, niin suhdeluku saadaan jakolaskulla. Musiikinteoriassa logaritmit olivat käytössä intuitiivisella tasolla ennen kuin niille määriteltiin täsmällinen muoto.

Matematiikkaa ja musiikkia yhdistää abstrakti ajattelutapa ja niiden tarkoituksenmukaiset merkkijärjestelmät. Musiikin symbolikieli on jatkuvasti kehittynyt nykypäiviin saakka uusien sävellysteknisten merkitysten lisääntyessä. Matemaattisista symboleista osa on myös musiikin käytössä, kuten luvut. Niiden avulla ilmaistaan intervallien nimet ja suhteet, rytmit, ajalliset kestot ja tempot ym. notaation liittyvät merkitykset.

Matematiikan ja musiikin yhdistämistä tukevat useat oppimista edistävät näkökohdat. Oppiaineille yhteiset käsitteet ja taidot voidaan opettaa integraation avulla, kuten mallien tunnistaminen, soveltaminen ja kuvaileminen tai objektien ominaisuuksien vertaileminen ja järjestäminen. Matemaattista ajattelukykyä voidaan vahvistaa jo varhaiskasvatuksesta alkaen. Rytmiharjoitukset tarjoavat laajan kirjon erilaisten matemaattisten käsitteiden kokemiseen konkreettisella tavalla ja havainnollistamiseen. Musiikki myös lisää oppituntien kokemuksellisuutta, ja oppiminen helpottuu henkilökohtaisen tekemisen kautta. Oppilaat, joiden vahvuudet ovat muualla kuin matemaattis-loogisella alueella, hyötyvät opetuksen integraatiosta. Heidän aktivoimisekseen sopivat musiikin tehtävien sisään upotetut matemaattiset ongelmat.

Musiikin sisään on upotettuna valtava määrä erilaisia matemaattisia ideoita, joita voi hyödyntää aineiden luonnollisissa yhtymäkohdissa. *Tällaisia liitoskohtia ovat esimerkiksi murtoluvut, suhdeluvut, logaritmit ja lukujen monikerrat.* Musiikin intervallit ilmaistaan luvuilla ja niiden yläsävelsarjaan pohjautuvat suhteet suhdelukujen avulla. Matemaattisten mallien löytäminen musiikista ja molempiin oppiaineisiin sisältyvien käsitteiden oppiminen voi tuoda iloa oppimiseen ja herättää innostusta.

## 2 Matematiikan ja musiikin välisestä yhteydestä

Matematiikan ja musiikin väliset yhteydet löytyvät tutustumalla musiikinteorian taustalla oleviin teoreettisiin kysymyksiin ja näiden aineiden väliseen historialliseen liitokseen. Aion opinnäytetyössäni tuoda esille musiikin ja matematiikan yhtymäkohtia ja aloitan esittelemällä aineiden välistä historiaa. Viittaan tässä luvussa pääosin Athanase Papadopoulosin artikkeliin *Mathematics and music theory: From Pythagoras to Rameau,* ellei tekstissä toisin mainita.

Musiikinteoriaan kuuluu luontevana osana perustavanlaatuisia matemaattisia ideoita. Osan näistä musiikkiin sisältyvistä matemaattisista löydöksistä ovat esitelleet matematiikot ja osan musiikkitieteilijät, joilla ei ollut matemaattista erikoisosaamista. Esimerkiksi Pythagoras ja J. Ph. Rameau olivat kumpikin vaikuttavia musiikinteoreetikkoja, vaikka edellinen tunnetaankin yleisesti matemaatikkona ja jälkimmäinen säveltäjä. He työskentelivät musiikinteorian parissa ja kehittivät sitä matematiikkaan liittyvien ajatusmallien avulla. Aion esitellä edellä mainittujen henkilöiden aikaansaannoksia ja niissä ilmeneviä musiikille ja matematiikalle yhteisiä ideoita. Sitä ennen käsittelen aineiden välistä historiaa alkaen Antiikin Kreikasta.

Antiikin aikana Pythagoras, Platon ja Aristoteles sekä heidän koulukuntansa pitivät musiikkia matematiikan osa-alueena. Kreikankieliset matemaattiset kirjoitukset, jotka sijoittuvat ajanlaskun alkupuolelle, ovat sisältäneet yleensä neljä matematiikan osa-aluetta: lukuteorian, geometrian, musiikin ja astrologian. Jakoa nimitettiin latinankielisellä nimellä *quadrivium*, joka tarkoittaa ”neljää tietä” tai ”neljää tapaa”. Tätä neljän aineen kokonaisuutta opetettiin Euroopan yliopistoissa keskiajan loppuun noin 1500-luvulle saakka. Renessanssin aikana tapahtui muutos, joka erotti musiikkitieteen itsenäiseksi tutkimusalueeksi, samalla kuitenkin säilyttäen vahvan siteen matematiikkaan.

Täysrenessanssin aikana termi ”muusikko” viittasi musiikinteoreetikkoon ennemmin kuin musiikin esittäjään. Tutkimus ja opettaminen olivat ammatteina huomattavasti arvostetumpia kuin musiikin säveltämien tai esittäminen. Muutamat kuuluisat matemaatikot kuten Pythagoras myös esittivät ja sävelsivät musiikkia. Seuraava katkelma sisältää ranskalaisen musiikkitieteilijän J. Ph. Rameau’n ajatuksia musiikista teoksessa *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturales* (1722):

> La musique est une science qui doit avoir des règles certaines; ces règles doivent être tirées d'un principe évident, et ce principe ne peut guère nous être connu sans le secours des mathématiques. Aussi dois-je avouer que, nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumiére y a succédé à une certaine obscurité dont je ne m'apercevais pas auparavant.

> Musiikki on tiede, jolla täytyy olla määrätyt säännöt. Nämä säännöt tulee johtaa periaatteesta, joka voidaan todistaa, ja tätä periaatetta ei voida ymmärtää ilman matematiikan tarjoamia apukeinoja. Minun täytyy tunnustaa, että huolimatta kaikesta kokemuksesta, jonka olen omaksunut harjoittamalla musiikkia jo varsin pitkän ajan, siitä huolimatta vain matematiikan tarjoamien keinojen avulla ideani ovat järjestäytyneet ja valo on syrjäyttänyt tietyn hämäryyden, josta en ollut aiemmin tietoinen.

## 2.1 Pythagoraan instrumenttikokeiluja konsonoivilla sävelsuhteilla

Antiikin Kreikan aikana Pythagoraan on tiedetty pohtineen konsonoivien musiikin intervallien yksinkertaisia lukusuhteita ja niiden yhteyksiä neljään ensimmäiseen lukuun. Lisäksi Papadopoulosin artikkelin mukaan Pythagoras on miettinyt, onko mahdollista keksiä kuulonvaraisesti kahden äänen välille yhteys, joka olisi säännönmukainen ja erehtymätön. Intervallien ja kokonaislukusuhteiden välinen yhteys kuuluukin Pythagoraan merkittävimpiin musiikillisiin löydöksiin.

Pythagoraasta kerrotaan tarinaa, kuinka hän oivalsi perusintervallien muodostuvan neljästä ensimmäisestä kokonaisluvusta. Tarinan mukaan Pythagoras kulki läpi sepänpajan ja kuuli erilaisten vasaroiden ääniä niiden osuessa alasimeen. Sepän lyödessä alasinta syntyi ääni, jonka korkeus ei muuttunut osuman paikan tai lyönnin voimakkuuden mukaan. Sen sijaan äänen korkeus riippui vasaran painosta. Hän pani merkille, että pienikokoisella vasaralla syntyi korkeampi ääni kuin sitä suuremmalla vasaralla. Lisäksi Pythagoras havaitsi, että kahden erikokoisen vasaran osuessa yhtäaikaisesti alasimeen syntyi kaksi eri ääntä. Näiden äänten välinen intervalli riippui vasaroiden painojen suhteesta. Erityisesti hän kiinnitti huomionsa niiden suhteisiin, kun nämä osuivat alasimeen aiheuttaen äänen, joka kuulosti sopusointuiselta. Tällaisia intervallisuhteita on alettu kutsua konsonansseiksi, ja niihin kuuluivat antiikin kreikkalaisessa musiikissa ainakin oktaavi ja kvintti ja useissa yhteyksissä myös kvartti. Kyseisiä intervalleja vastasivat vasarat, joiden painojen suhteet olivat noin (2:1), (3:2) ja (4:3). Näin Pythagoras päätteli, että oktaavia vastasi suhdeluku (2:1), kvinttiä suhdeluku (3:2) ja kvarttia suhdeluku (4:3).

Pythagoras toisti kokeet useilla instrumenteilla kuten kielisoittimilla, pilleillä ja puhaltimilla. Kaikki tulokset vahvistivat hänen havaintonsa löydettyjen kokonaislukusuhteiden ja musiikin intervallien välisestä yhtenevyydestä. Instrumenttikokeilujen lisäksi Pythagoras toteutti kokeen maljoilla, jotka sisälsivät nestettä vaihtelevia määriä. Hän kilautti ne soimaan yhtäaikaisesti pareittain ja vertasi maljojen nestemäärien suhdetta niiden tuottamaan harmoniaan. Konsonoivia intervalleja saivat aikaan sellaiset maljat, joiden nestemäärien suhteet muodostuivat neljän ensimmäisen kokonaisluvun avulla. Kun kahden maljan nestemäärien lukusuhteet olivat (2:1), (3:2) ja (4:3), soivat ne oktaavissa, kvintissä ja kvartissa. Lopulta useiden kokeiden ansiosta Pythagoras sai varmuuden siitä, että käytetyimmät musiikin intervallit voitiin esittää muuttumattomien kokonaislukusuhteiden avulla. (Papadopoulos, 2002)

Tutkitaan Pythagoraan kielisoittimella suorittamaa koetilannetta täsmällisemmin. Kokeessa soittimen kieli on jännitetty tiukasti molemmista päistä kiinni alustaan. Kieli on asetettu niin, että se on vaakasuoralla tasolla, ja sen pituus on jaettu kahteentoista yhtä suureen askelväliin. Kieli voidaan näpätä värähtelemään koko pituudeltaan, ja tästä syntyy ääni, jota kutsutaan perusääneksi. Syntyvän äänen korkeus riippuu mm. kielen pituudesta ja paksuudesta. Kun kieli painetaan pohjaan puolesta välistä koko kielen pituutta eli kuudennen askelvälin kohdalta ja näpätään se soimaan, syntyvä ääni on oktaavia korkeampi kuin perusääni. Askelvälien perusteella saadaan kokeessa kielen suhdeluvuksi (12:6) = (2:1). Nyt oktaavi voidaan samastaa lukusuhteeksi (2:1).

Seuraavaksi kieli jännitetään siten, että se painetaan pohjaan neljännen askelvälin kohdalta eli kolmasosalta koko pituutta, ja näpätään kieli värähtelemään. Muodostuva ääni soi oktaavia ja kvinttiä korkeammalta kuin perusääni. Tämän intervallin nimi on duodesiimi eli 12. intervalli, joka syntyy oktaavin ja kvintin yhteenlaskettuna summana. Askelvälien perusteella saadaan lukusuhde (12:4) = (3:1). Näin duodesiimi voidaan samastaa lukusuhteeksi (3:1). Sitten tutkitaan, mikä intervalli syntyy, kun kieli painetaan pohjaan kolmannen askelvälin kohdalta eli neljäsosan mitalta koko kielen pituutta ja näpätään se soimaan. Nyt muodostuva ääni on kahta oktaavia korkeampi kuin perusääni. Askelvälien perusteella saadaan suhdeluvuksi (12:3) = (4:1) ja kaksoisoktaavi-intervalli voidaan samastaa lukusuhteeksi (4:1). Kielisoittimella toteutetussa kokeessa saatiin näin ollen kolme konsonanssissa soivaa intervallia eli oktaavi, duodesiimi ja kaksoisoktaavi ja niitä vastaavat suhdeluvut (2:1), (3:1) ja (4:1).

Edellä löydettyjen intervallisuhteiden lisäksi saadaan neljän ensimmäisen kokonaisluvun avulla suhteet (3:2) ja (4:3). Molemmissa lukusuhteissa osoittaja on yhtä suurempi kuin nimittäjä. Tämän perusteella voidaan johtaa intervallisuhteita kuvaava esitys $(n+1)/n$, missä $n$ on luonnollinen luku. Etsitään puuttuvat intervallisuhteet kielisoittimen asteikolta, jossa kielen pituus on jaettu kahteentoista samanmittaiseen askelväliin. Kvintti-intervalli alkaa soida, kun kieli painetaan pohjaan kahdeksannen askelvälin kohdalta. Askelvälien perusteella suhdeluku on (12:8) = (3:2) ja näin ollen kvintti samastetaan lukusuhteeksi (3:2). Kvartti syntyy, kun yhdeksännen askelvälin kohdalta näpätään kieli soimaan. Tätä vastaava lukusuhde on (12:9) = (4:3) ja kvartti samastetaan lukusuhteeksi (4:3). (Assayag & Feichtinger & Rodrigues, 2002)

Konsonoivat intervallit mielletään kuulonvaraisesti yhteensulautuviksi ja miellyttäviksi. Pythagoraan mukaan kaksi erikorkuista säveltä muodostaa harmonian, jos niiden välisen intervallin lukusuhde on yksinkertainen. Neljän ensimmäisen kokonaisluvun avulla saadaan intervallit, joista oktaavia ja kvinttiä pidettiin konsonoivina antiikin aikana. Musiikin kauneuden katsottiin perustuvan näihin sointuviin intervalleihin. (Kurkela, 1998)

# 3 Asteikko järjestelmien kehittymisestä

Klassisen musiikin sävellykset perustuvat sävelasteikkojen käyttöön. Tasavireisen sävelasteikon hyväksymisen jälkeen länsimaissa ovat olleet käytössä kaksi pääasiallista asteikkoa: duuri- ja molliasteikko. Asteikot muodostavat tietynlaisia alueita, suljettuja rakenteita musiikin sisällä. Klassisen musiikin sävellykset perustuvat asteikkojen käyttöön. Tässä luvussa nostan esille muutamia asteikkojärjestelmiä, jotka ovat kehittyneet tiettyjen yläsävelsarjan mukaisten sävelsuhteiden perusteella. Luvussa diatoninen sävelasteikko esittelen 7-sävelisen asteikon syntymisen kantasävelten ja pohjasävelten välisten suhteiden perustuessa yläsävelsarjaan. Pythagoralainen asteikko taas muodostuu kolmen perusintervallin, oktaavin, kvintin ja kvartin, suhteiden mukaisesti.

## 3.1 Yläsävelten vaikutus sointiin

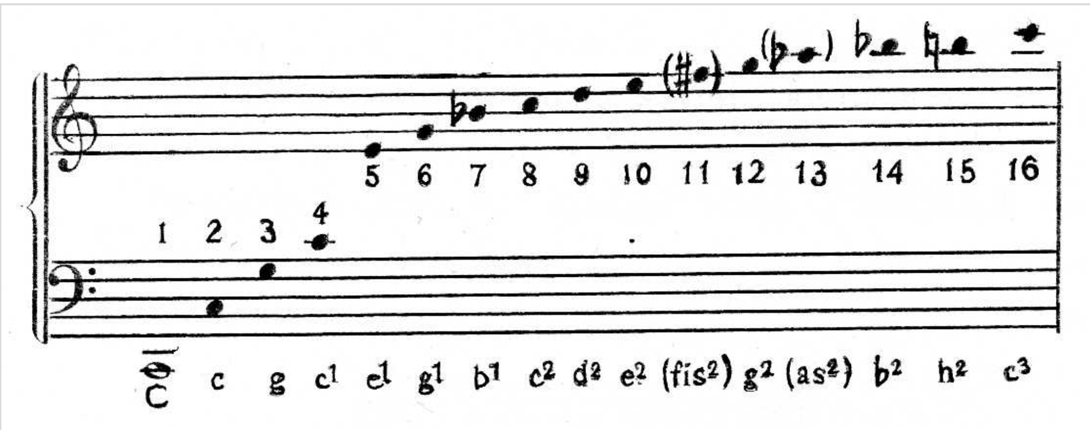
Yläsävelten laatu ja voimakkuus vaikuttavat sävelten sointiin. Ääniaaltojen erilainen muoto saa aikaan erilaista sointia. Aallon muodon erilaisuus johtuu siitä, miten voimakkaasti eri yläsävelet soivat ja kuinka leveiksi niistä aiheutuvat osa-aallot muodostuvat. Säännöllisissä tilanteissa yläsävelten ääni heikkenee tasaisesti, ja syntynyt yläsävelsarja loittonee pohjasävelestä, kuten edellä on todettu. Soittimen tai äänielinten rakenteet vaikuttavat kuitenkin paljon yläsävelsarjan muodostumiseen ja saavat aikaan monenlaista epäsäännöllisyyttä syntyvien aaltojen muotoon. Sointivärien erilaisuus riippuu siitä, mitkä yläsävelet vahvistuvat ja mitkä soivat heikommin. Osa yläsävelistä sulautuu pohjasäveleen paremmin ja osa ristiriitaisemmin, joten edellisten vahvistuminen lisää soinnin kirkkautta ja mehevyyttä, ja jälkimmäinen taas tuottaa sameutta ja räikeyttä.

Esimerkiksi lauluäänissä on suurta eroa. Toiset äänet eivät sovi yhteen yhtä hyvin kuin toiset, vaikka kukin laulaja esittäisi osansa täysin puhtaasti. Joskus kuorolaulussa yksi laulaja erottuu muusta joukosta, mikä johtuu yläsävelsarjan erilaisesta sointisävyistä.

## 3.2 Yläsävelten suhtautuminen pohjasäveleen

Tässä luvussa sävelet ryhmitellään tonaalisesti sen mukaan, kuinka ne suhtautuvat perussäveleen. *Ilmari Krohnin* kirjoittaman *Musiikinteorian oppijakso II:n sävelopin* kirjan mukaan samaan säveljärjestelmään kuuluvat sävelet jaetaan kahteen pääryhmään: kantasäveliin ja johtosäveliin. Edelliset liittyvät pohjasäveleen itsenäisesti ja kannattavat sävelkulun melodista linjaa luonnollisella tavalla. Johtosävelet taas ovat aina epäitsenäisemmässä asemassa ja ovat riippuvaisia johonkin muuhun säveleen kuin perussävelen suuntaan. Niiden esiintyminen melodiassa herättää huomiota ja tekee sävelkulun suhteet mielenkiintoiseksi ja vaihtelevaksi. (Krohn, 1916)

Tutkitaan kanta- ja johtosävelen suhteita yläsävelsarjan avulla. Taajuuden matemaattiset suhteet havainnollistavat myös itse sävelten tonaalisia suhteita. Kuten edellisessä luvussa Pythagoraan soitinkokeilujen perusteella on ilmennyt, että yksinkertaisimmat lukusuhteet viittaavat konsonoiviin intervalleihin, myös yläsävelten suhtautuminen pohjasäveleen perustuu tähän johtopäätökseen. Tarkastellaan esimerkiksi suuren oktaavialan C-sävelen yläsävelsarjaa ja merkitään kunkin nuotin kohdalle sitä edustava taajuuden luku. Suhdelukujen ymmärtämiseksi riittää sarjan ulottuminen 16. yläsäveleen asti.




Kuvio 1. Suuren oktaavialan C-sävelen yläsävelsarja

Kuvan pohjasävel, suuren oktaavialan C-sävel, on varsinainen ääni, jonka sävelkorkeuden kuulemme. Ääni muodostuu eri komponenteista; perustaajuudesta ja sitä korkeammista harmonisista taajuuksista, joita kutsutaan yläsäveliksi. Perustaajuutta ja äänen korkeampia taajuuksia kutsutaan joissakin yhteyksissä myös nimellä *harmoniset*, joka pohjautuu sanan englanninkieliseen vastineeseen "harmonic". Merkitään pohjasävelen taajuutta kirjaimella *n*. Tällöin ääneen liittyvä komponentti *mn* on nimeltään *m. harmoninen*. Yläsävelet taas alkavat perussävelen jälkeen, jolloin ensimmäinen yläsävel on sarjassa oktaavia ylempänä kuin perussävel. Harmoninen siis viittaa koko yläsävelsarjan sävelten taajuuksien lukuun, kun taas yläsävelet lasketaan sarjan toisesta äänestä alkaen. Esimerkiksi jos *m* = 3, saadaan sarjan 3. harmoninen ja 2. yläsävel. (Benson, 2008)

Seuraavaan taulukkoon on sijoitettu yksinkertaisimmassa suhteessa pohjasäveleen suhtautuvat harmoniset. Taulukon suluissa oleva ensimmäinen luku ilmaisee harmonisen paikan yläsävelsarjassa.

Taulukko 1. Yläsävelsarjan yksinkertaisimmat sävelsuhteet

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| c (2) | g (3) | | | |
| $c^1$ ($4 = 2 \cdot 2$) | $g^1$ ($6 = 2 \cdot 3$) | $e^1$ (5) | | |
| $c^2$ ($8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$) | $g^2$ ($12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$) | $e^2$ ($10 = 2 \cdot 5$) | $d^2$ ($9 = 3 \cdot 3$) | $h^2$ ($15 = 3 \cdot 5$) |
| $c^3$ ($16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$) | | | | |

Taulukosta voidaan todeta, että samoihin oktaavialoihin liittyvät samannimiset sävelet ovat taulukossa ensimmäisessä sarakkeessa ja ne sulautuvat parhaiten yhteen tonaalisessa mielessä. Yhtä oktaavialaa korkeamman sävelen taajuus saadaan kertomalla matalamman oktaavialan sävelen taajuus luvulla 2. Kun suuren oktaavialan C:n taajuus on n, on pienen c:n 2n, $c^1$:n 4n, $c^2$:n 8n ja $c^3$:n 16n. Samoin havaitaan, kun pienen g:n taajuus on 3n, niin $g^1$:n on 6n ja $g^2$:n on 12n. Ja samalla tavalla koska $e^1$:n taajuus on 5n, niin $e^2$:n on 10n. Kaikki edellä mainitut harmoniset, jotka sijaitsevat myös taulukon kolmessa ensimmäisessä sarakkeessa suhtautuvat pohjasäveleen tonaalisesti kantasävelinä.

## 3.3 Puolisävelaskeleet

Antiikin Kreikan musiikissa oli käytössä muutamia ominaisuuksiltaan erilaisia puolisävelaskelia. Tunnetuimmat niistä olivat *diatoninen puolisävelaskel* ja *pythagoralainen puolisävelaskel*, joita vastaavat suhdeluvut olivat (16:15) ja (256:243). Voidaan olettaa, että yhdistämällä kaksi samansuuruista puolisävelaskelta ts. soittamalla kaksi yhtä suurta puolisävelaskelta peräjälkeen, päästään kokosävelaskeleen päähän. Näin ei kuitenkaan tapahtunut antiikin aikaisessa musiikissa yhdenkään käytössä olleen puolisävelaskeleen kohdalla. Pythagoralaisten keskuudessa kokosävelaskeleen mittainen intervalli määriteltiin kvintin ja kvartin väliin jäävän sävelsuhteen erona. Kvintin ja kvartin suhdeluvut ovat (3:2) ja (4:3). Niiden välille jäävä intervalli saadaan osamääränä (3:2)/(4:3) = (9:8). (Papadopoulos, 2002)

Kuinka kokosävelaskeleesta, jonka suhdeluku on (9:8), saadaan puolisävelaskel? Numeerinen ratkaisu olisi irrationaaliluku, eli neliöjuuri $\sqrt{(9:8)}$. Pythagoralaisten keskuudessa irrationaalilukuja ei hyväksytty, vaikka niiden olemassaolosta oltiin tietoisia. Ne olivat vastaan heidän filosofiaansa, joka perustui yksinkertaisten positiivisten kokonaislukujen ominaisuuksien tunnustamiselle. Irrationaaliluku tarkoittaakin heidän ajattelutapansa mukaisesti järjenvastaista, luonnotonta lukua. Pythagoralaisen maailmankatsomuksen mukaan irrationaalilukujen olemassaolo pyrittiin pitämään salassa. (Papadopoulos, 2002)

Antiikinaikaisessa musiikissa käytössä olleiden diatonisen ja pythagoralaisen puolisävelaskeleen sekä numeerisesti ratkaistun puolisävelaskeleen arvot ovat:

Kvintin ja kvartin väliin jäävästä kokosävelaskeleesta laskettu puolisävelaskeleen likiarvo $\sqrt{(9/8)} = 1{,}060660...$
Diatonisen sävelaskeleen likiarvo 16/15 = 1,066666...
Pythagoralaisen sävelaskeleen likiarvo 256/243 = 1,094017...

Verrataan tasavireisen ja pythagoralaisen puolisävelaskeleen suhdetta:
$\sqrt[12]{(2)} / (256/243) = 1{,}005662$
Verrataan tasavireisen ja diatonisen puolisävelaskeleen suhdetta:
$(16/15) / \sqrt[12]{(2)} = 1{,}006799$

Tasavireinen ja pythagoralainen puolisävelaskeleen suhde on laskutoimitusten mukaan pienempi kuin tasavireisen ja diatonisen puolisävelaskeleen suhde. Tasavireinen on siis lähempänä pythagoralaista puolisävelaskelta kuin vastaavaa diatonista.

Diatoninen ja pythagoralainen puolisävelaskel olivat antiikin musiikin käytössä, sillä ne sopivat sovittuun asteikkojärjestelmään ja olivat hyväksyttäviä kuulonvaraisesti tulkittuna tässä yhteydessä. Toisaalta antiikin musiikintieteilijät olivat kiinnostuneita erityisesti muotoa (n + 1)/n olevista lukusuhteista, joissa osoittajan ja nimittäjän kaikki alkutekijät ovat lukuja 2, 3 ja 5. Myös pythagoralaisella lukusymbolismilla on yhteys tämän murtoluvun avulla saataviin lukusuhteisiin. Seuraavat intervallit hyväksyttiin antiikinaikaisessa musiikissa.

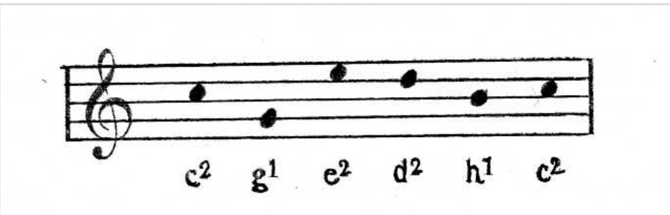
2:1 oktaavi
3:2 kvintti
4:3 kvartti
5:4 duuriterssi
6:5 molliterssi
9:8 suuri sekunti
10:9 pieni sekunti
16:15 diatoninen puolisävelaskel
256:243 pythagoralainen puolisävelaskel
(Papadopoulos, 2002)

## 3.4 Diatoninen sävelasteikko

Taulukon 1 ensimmäisessä sarakkeessa ovat suuren C:n samaan oktaavialaan kuuluvat korkeammat c-sävelet. Oktaavialan ero ei tuo mitään uutta sävelsuhteiden väliseen muutokseen, joten jätetään huomioimatta Taulukon 1 kaikki kahdella jaolliset luvut. Tällöin jäljelle jäävät seuraavat yläsävelsarjan sävelet:

C (1), g (3), $e^1$ (5), $d^2$ ($9 = 3 \cdot 3$), $h^2$ ($15 = 3 \cdot 5$).

Nyt suhdelukuina esiintyvät luvut 3 ja 5 ja näiden kerrannaiset 9 ja 15. Sijoitetaan jäljelle jääneet sävelet sellaisiin oktaavialoihin, että ne ovat mahdollisimman lähekkäin.



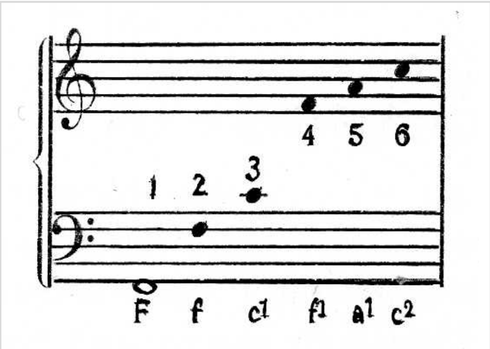

Kuvio 2. Viisi eri yläsävelsarjan nuottia

Jos näitä säveliä sovitetaan eri tavoin yhteen, huomataan, että g ja e soivat sopusointuisesti perussävelen c kanssa. Saadaan kolmisointuja, joissa c-sävel on pohjasävelenä. Toisaalta taas d ja h eivät tue c-sävelen sointia, eikä niistä muodostu näin ollen kolmisointua. Tämä on huomattavissa myös suhdelukujen eroavaisuudessa. Kun g:n ja e:n suhdeluvut ovat yksinkertaisesti 3 ja 5, niin taas d:n ja h:n ovat monimutkaisemmat 3 · 3 = 9 ja 3 · 5 = 15. Näiden jälkimmäisten sävelten tonaalinen vaikutus on selvästi erilainen verrattuna g- ja e-sävelten tonaaliseen sopeutuvuuteen. Ryhmittelemällä näitä säveliä huomataan, että d ja h suhtautuvat säveleen g samoin kuin g ja e pohjasävel c:hen. Näin saadaan järjestelemällä 5 säveltä kahdeksi vastakkaiseksi ryhmäksi. Toisessa ryhmässä johtavana sävelenä on c (c e g) ja toisessa on g (g h d). Näiden ryhmien yhdysside on sävel g. (Krohn, 1916)

Tutkitaan muita jäljelle jääneitä yläsävelsarjan suhdelukuja.

7, 11, 13, 17, 19, 21 (=3 · 7), 23, 25 (=5 · 5), 27 (= 3 · 3 · 3), 29, 31, 33 (= 3 · 11),
35 (=5 · 7), 37, 39 (=3 · 13) jne.

Luvuista yksikään ei sovellu kantasäveleksi pohjasävel c:lle, ja ne muuttuvat yhä monimutkaisemmiksi verrattuna edellä saatuihin lukuihin. Johtosäveliä niistä saadaan vain valikoimalla. Kuitenkin kantasävelien määrää voidaan lisätä toisen sävelen yläsävelsarjan avulla, jossa c ei esiinny pohjasävelenä. Tämän sarjan pohjasävel on f, jossa c esiintyy lähimpänä itsenäisenä yläsävelenä.




Kuvio 3. Suuren oktaavialan f-sävelen yläsävelsarja

Kuvion 3 yläsävelsarjassa esiintyy kaksi säveltä f ja a, jotka suhtautuvat c:hen samoin kuin kantasävelten ensimmäisessä ryhmässä sävelet c ja e suhtautuivat säveleen g. Sävelten suhdeluvut olisivat yksinkertaiset, jos ne kohdistuisivat varsinaiseen pohjasäveleensä: f (1), c (3) ja a (5). Kun sävelten f ja a suhdeluvut kohdistetaan c:hen, saadaan luvut: c (1), f (4:3) ja a (5:3). Näin syntyy vielä kolmas kantasävelryhmä, jossa pohjasävelenä on f, jonka yhdistää ensin saatuun kantasävelryhmään (c, e, g) c-sävel.

Todetaan, että toisella ja kolmannella kantasävelryhmällä ei ole suoranaista yhdyssäveltä. Ne ovat toistensa vastakohtia. Saadaan kolme ryhmää, joista kaksi on vastakkaisia (ryhmät 3 ja 2) ja yksi muodostaa näitä yhdistävän ryhmän (ryhmä 1).

Taulukko 2. Kantasävelryhmät

| 3. ryhmä | 1. ryhmä | 2. ryhmä |
|---|---|---|
| f a c | c e g | g h d |

Keskusryhmän johtava sävel on perussävel c. Muissa ryhmissä on johtoasema niillä sävelillä, joiden suhdeluvut ovat mahdollisimman yksinkertaiset suhteessa perussäveleen. Tällaisia säveliä ovat toisen ryhmä g ja kolmannen f, joiden suhdeluvut ovat g (3/1 tai 3/2) ja f (1/3 tai 3/4). Suhdeluvut saadaan sen perusteella, verrataanko säveltä alapuoliseen vai yläpuoliseen c-säveleen. Koska taulukon ryhmiin sisältyy kaksi yhteistä säveltä (c ja g), saadaan kantasäveliä yhteensä seitsemän. Asteittain sijoitettuna samaan oktaavialaan saadaan 7-sävelinen asteikko, joka muodostaa melodisen sävelkulun perussävelistön.


Kuvio 4. Diatoninen sävelasteikko

Asteikkoa kutsutaan diatoniseksi sävelasteikoksi (Kreikankielinen *dia* = kautta, *tonos* = sävel). Nimi viittaa siihen, että sävelet seuraavat toisiaan jatkuvana sarjana, "kautta kaikkien sävelten" niin, ettei sävelten väliin jää aukkoja. Nimitys voi olla harhaanjohtava, sillä kaikkia säveltasoja ei käydä erikseen läpi oktaavin alalla olevassa asteikossa. Kantasävelistä muodostuva kokonaisuus on siten täysinäinen. (Krohn, 1916)

Tarkastellaan diatonisen sävelasteikon säveliä havainnollistaen niitä suhdeluvuilla, jotka saadaan yläsävelsarjoista Kuvioiden 1 ja 3 avulla. Kaikki kantasävelet on siirretty yhtenäiseksi diatoniseksi asteikoksi samaan oktaavialaan. Kantasävelten suhtautuminen perussävel c:hen ilmenee seuraavasta taulukosta. (Krohn, 1916)

Taulukko 3. Diatoninen sävelasteikko

| Sävel | c | d | e | f | g | a | h | $c^1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Suhde | 1 | 9/8 | 5/4 | 4/3 | 3/2 | 5/3 | 15/8 | 2 |

Tarkastellaan asteikon peräkkäisten kantasävelten suhteita. Ne saadaan selville, kun perussäveleen kohdistuva suhdeluku jaetaan pienemmällä. Tilannetta havainnollistaa taulukko 4, jossa on laskettu sävelaskelten väliset suhteet.

Taulukko 4. Diatonisen asteikon sävelaskelten suhteet

| Sävelten välinen intervalli | Laskutoimitus | Suhdeluku |
|---|---|---|
| c-d | (9/8) : 1 = 9/8 | 9/8 |
| d-e | (5/4) : (9/8) = 10/9 | 10/9 |
| e-f | (4/3) : (5/4) = 16/15 | 16/15 |
| f-g | (3/2) : (4/3) = 9/8 | 9/8 |
| g-a | (5/3) : (3/2) = 10/9 | 10/9 |
| a-h | (15/8) : (5/3) = 9/8 | 9/8 |
| h-c | 2 : (15/8) = 16/15 | 16/15 |

Tästä havaitaan, että diatonisessa kantasävelasteikossa on kolmenlaisia sävelaskelia. Asteikon puolisävelaskelten suhdeluku on (16:15). Kokosävelaskeleita taas on kahdenlaisia: vahva (9:8) ja heikko (10:9) kokosävelaskel. Pianolla näiden eroa ei voi kuulla, koska kokosävelaskeleet on tasoitettu samanmittaisiksi. Hyväkorvainen lauluja tai viulisti kyllä tekee eron asteikon erilaisten sävelaskelten välillä. (Krohn, 1916)

## 3.5 Pythagoralainen sävelasteikko

Klassinen kreikkalainen musiikki perustui tiettyjen intervallisuhteiden konsonoivuuteen ja hienovaraisen herkkään asteikkojärjestelmään. Asteikon sisältämät intervallit ilmaistiin yksinkertaisilla murtolukusuhteilla. Tässä luvussa käsittelen pythagoralaisen asteikon muodostumista konsonoiviin intervalleihin perustuen. (Papadopoulos, 2002)

Pythagoras oivalsi instrumenttikokeilujen perusteella puhtaan kvintti-intervallin vastaavan lukusuhdetta (3:2), joka on erityisesti konsonanssi. Tämän perusteella hän päätteli, että hyväksyttävän asteikon voi luoda ainoastaan lukusuhteiden (2:1) ja (3:2) avulla.

Pythagoralaisen koulukunnan mukainen sävelasteikko on rakennettu edellisten suhteiden mukaan. Kuitenkin Antiikin kreikkalaisessa sävelasteikossa käytettiin muitakin intervallisuhteita, jotka ilmaistiin kokonaislukujen alkupään yksinkertaisina lukusuhteina. Esimerkiksi kvartti sisältyi tähän asteikkoon. (Benson, 2008)

Asteikon ensimmäinen sävel kiinnitetään c:ksi, joka saadaan f:n kvinttinä. Perussävelen suhde asteikon viimeiseen säveleen on oktaavi eli (2:1). Kvinttiä vastaava murtoluku korotetaan toiseen potenssiin ja saadaan murtoluku $(3:2)^2$ = (9:4). Tämä luku vastaa nooni-intervallia sävelestä c. Nooni-intervalli jaetaan oktaavia vastaavalla murtoluvulla, eli intervallista vähennetään oktaavi, jolloin saadaan (9:4)/(2:1) = (9:8). Tämä intervalli on sekuntia suurempi kuin c-sävel ja se nimetään asteikon toiseksi säveleksi eli d:ksi. Etsitään taas seuraava asteikon sävel kvinttiä vastaavan suhdeluvun avulla ja korotetaan se nyt kolmanteen. Saadaan murtoluku $(3:2)^3$ = (27:8) = (3:1). Tämä intervalli on duodesiimi eli oktaavi + kvintti. Kun tästä intervallista vähennetään oktaavi, saadaan suhdeluvuksi (27:8)/(2:1) = (27:16). Saatu intervalli on asteikon kuudes sävel ja se nimetään a:ksi. Vastaavalla tavalla saadaan asteikon kolmas sävel e. Näin ollen kvinttiä vastaava suhdeluku korotetaan neljänteen potenssiin $(3:2)^4$ = (81:16) ja vähennetään siitä kaksoisoktaavi eli saadaan (81:16)/(4:1) = (81:64). Samoin asteikon seitsemäs sävel h saadaan laskutoimituksella $(3:2)^5$ = (243:32) ja vähennetään tästä luvusta kaksoisoktaavi (243:32)/(4:1) = (243:128). Näin pythagoralaisen asteikon sävelet on saatu asettamalla kvinttien jono järjestykseen f-c-g-d-a-e-h. (Benson, 2008)

Taulukko 5. Pythagoralaisen asteikon suhdeluvut:

| Sävel | c | d | e | f | g | a | h | $c^1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Suhde | 1 | 9/8 | 81/64 | 4/3 | 3/2 | 27/16 | 243/128 | 2 |

Oktaavin, kvintin ja kvartin tuli sisältyä pythagoralaiseen sävelasteikkoon ja näin tapahtuikin yllä olevan taulukon 5 perusteella. Tarkastellaan asteikon peräkkäisten sävelten suhteita. Saadaan taulukko 6, jossa on laskettu sävelaskelten väliset suhteet.

Taulukko 6. Pythagoralaisen asteikon sävelaskelten suhteet

| Sävelten välinen intervalli | Laskutoimitus | Suhdeluku |
|---|---|---|
| c-d | (9/8) : 1 = 9/8 | 9/8 |
| d-e | (81/64) : (9/8) = 9/8 | 9/8 |
| e-f | (4/3) : (81/64) = 256/243 | 256/243 |
| f-g | (3/2) : (4/3) = 9/8 | 9/8 |
| g-a | (27/16) : (3/2) = 9/8 | 9/8 |
| a-h | (243/128) : (27/16) = 9/8 | 9/8 |
| h-c | 2 : (243/128) = 256/243 | 256/243 |

Taulukosta 6 nähdään, että pythagoralainen sävelasteikko sisältää vain kahdenlaisia sävelaskelia, ns. vahvan kokoaskeleen (9:8) ja puolisävelaskeleen (256:243), joka taas on suppeampi kuin diatonisen asteikon vastaava. Luvussa 3.3 määriteltiin kvintin ja kvartin välille muodostuva sävelien suhde ja suhdeluvuksi saatiin (9:8). Tämä vaatimus toteutuu pythagoralaisessa asteikossa. Tasavireisessä asteikkojärjestelmässä käytetty puolisävelaskel on luvun 2 kahdestoista juuri eli $^{12}\sqrt{(2)}$, ja diatonisen vastaava suhdeluku on (16:15). Verrataan näiden puolisävelaskelten suuruuksia.

Pythagoralainen 256/243 = 1,053487...
Tasavireinen $^{12}\sqrt{(2)}$ = 1,059463...
Diatoninen 16/15 = 1,066666...

Huomataan, että tasavireisen puolisävelaskelen lukuarvo on lähempänä pythagoralaisen asteikon puolisävelaskelta kuin diatonisen. (Papadopoulos, 2002)

### 3.5.1 Pythagoraan komma

Pythagoralainen asteikkojärjestelmä perustuu siihen, että asteikon kokosäveltä vastaava suhdeluku on (9:8) ja puolisäveltä vastaava suhdeluku on (256:243), joka voidaan esittää muodossa:

$256/243 = 2^8/3^5$

Korotetaan yhtälön oikea puoli toiseen potenssiin, jolloin muodostuva intervalli on kokosävelaskel. Verrataan sen arvoa varsinaisen asteikon kokosävelaskeleen suhdelukuun:

$(2^8 / 3^5)^2 = 2^{16} / 3^{10} = 65536/59049 = 1,109857...$
$9/8 = 3^2 / 2^3 = 1,125$

Saadut numeeriset arvot vastaavat toisiaan yhden desimaalin tarkkuudella.

Pythagoralainen asteikkojärjestelmä perustuu siihen, että virityksen tasossa tulee ns. *Pythagoraan komman* verran eroa tietyissä tilanteissa verrattuna puhtaaseen viritykseen. Tämä ilmenee esimerkiksi sävelten korkeustason erona, jos noustaan jostakin sävelestä suhdelukujen mukaisesti 12 kvintin päähän ja laskeudutaan tästä sävelestä 7 oktaavia alaspäin. Sävel on hieman korkeampi kuin lähtösävel, mikä johtuu siitä, että kvintin suhdelukuun sisältyvien 2- ja 3-lukujen potenssit eivät koskaan satu samoihin lukuihin. Havainnollistetaan tilannetta vertaamalla kokosävelaskelen ja puolisävelaskelen toisen potenssin suhdelukuja.

$(256/243)^2 \approx 9/8$ eli
$2^{16} / 3^{10} \approx 3^2 / 2^3$, josta saadaan
$3^{12} \approx 2^{19}$ eli $531441 \approx 524288$.

Sävelsuhde on pythagoraan komma ja se on noin 1/9 kokosävelaskeleesta. (Benson, 2008)

### 3.6 Tasavireinen sävelasteikko

Länsimaisessa musiikkikulttuurissa renessanssin jälkeen sävelletty klassinen musiikki on hyödyntänyt hyvin rajoitettua määrää erilaisia asteikoita. Kun tasavireisyys hyväksyttiin yleisesti Euroopassa 1700-luvulla, ryhdyttiin musiikissa käyttämään vain kahta pääasiallista asteikkoa: duuri- ja molliasteikkoa. Tasavireisen asteikon periaate on jakaa oktaavi kahteentoista yhtä suureen intervalliin. Näin kaikki puolisävelaskeleet ja siten kokosävelaskeleet ovat yhtä suuria intervalleja. Asteikon pienin yksikkö on puolisävelaskel, joka on samansuuruinen intervalli jokaisessa sävelasteikon kohdassa. Esimerkiksi piano on viritetty tasavireiseksi, joten mitkä tahansa kaksi duuriasteikkoa (tai molliasteikkoa) ovat toistensa muunnoksia sävelkorkeuden suhteen. Tämä mahdollistaa musiikin transponoinnin eri sävellajien välillä ilman että sävelten sävelsuhteet muuttuvat siirryttäessä sävellajista toiseen. Näin sävelten intervallisuhteet pysyvät samoina kuin alkuperäisessä sävellajissa, ja vain sävellyksen sävelkorkeus muuttuu.

Tasavireinen asteikko muodostuu 12 yhtä suuresta tasavireisestä puolisävelaskeleesta, jonka arvo on luvun kaksi kahdestoista juuri eli $\sqrt[12]{2}$.

## 3.7 Logaritmit musiikissa

Musiikin intervallien suhteisiin pohjautuva matematiikka liittyy luonnollisella tavalla logaritmeihin, kun tutkitaan soittimen kielen pituuden ja taajuuden välistä suhdetta. Äänen taajuus ja soittimen kielen pituuden välinen suhde on kääntäen verrannollinen. Tarkastellaan esimerkkiä viulun kielen avulla. Oletetaan, että viulisti haluaa tuottaa oktaavia korkeamman äänen verrattuna perusääneen, joka soi vapaalla kielellä. Tällöin viulisti painaa kielen otelautaan täsmälleen keskeltä kielen koko pituutta. Jos kielen pituus puolitetaan, tuotetun äänen sävelkorkeus nousee oktaavilla. Tällöin äänen taajuus kaksinkertaistuu ja kielen pituus taas pienenee puoleen. Oletetaan lisäksi, että viulisti haluaa tuottaa tästä äänestä oktaavia korkeamman äänen. Taas kielen pituus puolittuu jo puolitetusta kielen pituudesta puoleen, silloin koko pituudesta neljäsosaan ja äänen taajuus nelinkertaistuu verrattuna vapaalla kielellä tuotettuun ääneen.

Tarkastellaan viulistin soittaman sävelen taajuuden muuttumista siirryttäessä oktaaveissa korkeammalle tai matalammalle. Oletetaan, että viulisti soittaa yksiviivaista a-säveltä (tässä perussävel), joka nykyisin viritetään taajuudelle 440 Hz. Silloin kaksiviivaisen a-sävelen eli oktaavia korkeamman äänen taajuus on $2 \cdot 440$ Hz = 880 Hz ja edelleen kolmiviivaisen a-sävelen taajuus $2^2 \cdot 440$ Hz = 1760 Hz jne. Vastaavasti oktaavia matalampi eli pienen oktaavin a-sävelen taajuus on $2^{-1} \cdot 440$ Hz = 220 Hz ja edelleen suuren oktaavin a-sävelen taajuus on $2^{-2} \cdot 440$ Hz = 110 Hz. Siirtyminen oktaaveissa ylemmäs tai alemmas tarkoittaa taajuuden muuttumista $2^n$ -kertaiseksi.

Taulukko 7. Taajuuden ja kielen pituuden suhde

| Oktaavi | Taajuus | Kielen pituus |
|---|---|---|
| 0 | f | a |
| 1 | $2^{1}f$ | $2^{-1}a$ |
| 2 | $2^{2}f$ | $2^{-2}a$ |
| 3 | $2^{3}f$ | $2^{-3}a$ |
| 4 | $2^{4}f$ | $2^{-4}a$ |

Oktaavi on taajuusalue, jossa taajuus kaksinkertaistuu ja korva samaistaa oktaavin päässä olevat äänet. Taulukossa 7 on esitetty taajuuden muuttuminen siirryttäessä oktaavista toiseen. Taulukon taajuus f on jokin taajuus oktaavissa 0. Jos kaksi säveltä ovat *n* oktaavin etäisyydellä toisistaan, niiden taajuuksien suhde on $2^{n}$, missä n on kokonaisluku.

Kahden äänen välille jäävä ero eli intervalli voidaan määritellä taajuuden avulla. Tällöin äänenkorkeus ilmaistaan taajuuden 2-kantaisena logaritmina. Oktaavien välinen muutos on siis logaritminen.

Olkoon a positiivinen reaaliluku ja n kokonaisluku. *Luvun a 2-kantainen logaritmi* on luku n, eli

$n = \log_2(a)$, jos ja vain jos $2^n = a$ (1)

Yhtälö (1) vastaa kysymykseen: Kuinka paljon taajuus moninkertaistuu siirryttäessä n oktaavin päähän mistä tahansa sävelkorkeudesta. Luku a ilmaisee monikerran suuruuden.

# 4 Musiikin ja matematiikan integraatio kokeilu peruskoulussa

Työskentelen tällä hetkellä peruskoulussa matematiikan, fysiikan ja kemian opettajana Metropolia opintojeni loppuvaiheessa. Olen tehnyt aiemman Pro Gradu – työni ”Matematiikan ja musiikin integroiminen peruskoulussa” valmistuttuani yliopistosta vuonna 2011. Sen aihepiiri kutsui jatkamaan ja kokeilemaan käytännössä matematiikan ja musiikin yhdistämistä oppitunnilla.

Opetan tällä hetkellä Yhtenäisessä peruskoulussa, jossa on 1.-9.-luokat kahdessa eri koulurakennuksessa. Viimeisen lukuvuoden aikana olen saanut opettaa aineenopettajana myös 6. luokkaa ensimmäistä kertaa työurani aikana. Aiemmin olen opettanut ainoastaan yläkoulun puolella. Minulla on erinomainen mahdollisuus kokeilla musiikin ja matematiikan yhdistämisestä työni ohessa.

Aion suunnitella matematiikkaa ja musiikkia yhdistävän tunnin 6.-luokalle. Heidän kanssaan työskentely on vaatinut uusien taitojen ja toimintatapojen työstämistä. Ryhmässä on 25 oppilasta. Matematiikka oppiaineena vaatii usein keskittymistä ja taitojen harjoittelua rauhallisesti työskennellen. Ryhmässä on useita, joilla on vaikeuksia palauttaa mieleen kertotauluja. Samoin peruslaskutaitoihin kuuluva yhteen- ja vähennyslasku tuottavat muutamille haasteita. Tällaiset peruslaskutaidoissa ilmenevät vaikeudet tai hitaus voivat ennustaa oppimisvaikeuksia matematiikassa. Voisiko kertotauluja oppia laulaen tai palauttaa mieleen helpommin sävelen avulla? Toiset oppilaat tarvitsevat kertotauluihin konkreettisen välineen kuten omat sormet. Sormien avulla oppilas laskee esimerkiksi kertotaulun $4 \cdot 3 = 12$ sormia apuna käyttäen $4 + 4 + 4 = 12$.

”Tulevaisuuden koulu on yhä enemmän yhdessä tekemällä oppimista ja toiminnallisuutta” kirjoittaa Jarno Paalasmaa teoksessaan Aktivoi oppilaasi (Opetus 2000). Yhä useammalla oppilaalla on vaikeuksia keskittyä pitkäjaksoisesti yhteen asiaan, istua paikoillaan ja tehdä tehtäviä. Opettajan on noudatettava opetussuunnitelmien ohjeistusta ja opettaa siinä määritellyt oppisisällöt. Konkreettisuus ja tekemällä oppiminen helpottavat monien oppilaiden oppimista, koska tekemällä jotakin itse, oppilas ei voi välttyä oppimiselta. (Salakari, 2007) Jos oppilas löytää esimerkiksi murtoluvut ja niiden lukusuhteet musiikin intervallien suhteina, se voi motivoida murtolukujen laskutekniseen harjoitteluun. Murtoluvut konkretisoituvat musiikissa ja syy opiskella niitä voi vahvistua, kun ymmärtää, että kahden sävelen välisen intervallin voi ilmaista murtolukuna. Oppilas voi innostua myös harjoittelemaan laskutoimituksia tunnilla paremmin, jos musiikki tuo hänelle konkreettisemman lähestymistavan aihepiiriin.

Suhteet, murtoluvut ja prosentit ilmaisevat matemaattisia suhteita kokonaisuuden ja sen osien välillä. Eräissä vanhoissa kulttuureissa, erityisesti Egyptissä, murtoluvut olivat oleellinen osa aritmetiikkaa. Monet suureiden väliset suhteet, kuten kaasujen fysikaalisia ominaisuuksia koskevat lait ja virtapiirilait, ovat tärkeitä luonnontieteissä ja teknologiassa. Prosentit puolestaan ovat jatkuvasti kaupan, hallinnon ja pankkien käytössä. Matemaattisia taitoja kuten murtolukuja ja prosentteja oppilaat tulevat tarvitsemaan tulevissa ammateissaan. Seuraavassa luvussa esittelen muutaman konkreettisen tavan havainnollistaa murtolukuja musiikin intervallien avulla.

## 4.1 Tuntisuunnitelma matematiikkaa ja musiikkia integroivalle tunnille

Oppilaiden motivointia aiheeseen:
Opettaja kertoo tarinan Pythagoras-nimisestä henkilöstä

Kreikkalainen matemaatikko ja filosofi Pythagoras (noin 500 eKr.) perusti koulukunnan, joka tutki filosofiaa ja matematiikkaa. Heidän koulukuntansa tutki lukuja, jotka voidaan esittää murtolukuina tai kahden luvun suhteina. Tämän koulukunnan mukaan luvut voivat selittää maailmankaikkeuden luonteen. Ajatus sai pythagoralaiset tutkimaan suhteita fysikaalisessa maailmassa. Eräs tärkeimmistä keksinnöistä koski värähteleviä kieliä. He havaitsivat, että kielillä, joiden pituuksien suhde oli 1:2:3:4, voitiin tuottaa ”konsonoivat intervallit” (nuottiparit jotka ovat miellyttäviä korvalle).

Pythagoraasta kerrotaan tarinaa, kuinka hän oivalsi perusintervallien muodostuvan neljästä ensimmäisestä kokonaisluvusta. Tarinan mukaan Pythagoras kulki läpi sepänpajan ja kuuli erilaisten vasaroiden ääniä niiden osuessa alasimeen. Sepän lyödessä alasinta syntyi ääni, jonka korkeus ei muuttunut osuman paikan tai lyönnin voimakkuuden mukaan. Sen sijaan äänen korkeus riippui vasaran painosta. Hän pani merkille, että pienikokoisella vasaralla syntyi korkeampi ääni kuin sitä suuremmalla vasaralla. Lisäksi Pythagoras havaitsi, että kahden erikokoisen vasaran osuessa yhtäaikaisesti alasimeen syntyi kaksi eri ääntä. Näiden äänten välinen intervalli riippui vasaroiden painojen suhteesta. Erityisesti hän kiinnitti huomionsa niiden suhteisiin, kun nämä osuivat alasimeen aiheuttaen äänen, joka kuulosti sopusointuiselta. Tällaisia intervallisuhteita on alettu kutsua konsonansseiksi, ja niihin kuuluivat antiikin kreikkalaisessa musiikissa ainakin oktaavi ja kvintti ja useissa yhteyksissä myös kvartti. Kyseisiä intervalleja vastasivat vasarat, joiden painojen suhteet olivat noin (2:1), (3:2) ja (4:3). Näin Pythagoras päätteli, että oktaavia vastasi suhdeluku (2:1), kvinttiä suhdeluku (3:2) ja kvarttia suhdeluku (4:3).

Pythagoras toisti kokeet useilla instrumenteilla kuten kielisoittimilla, pilleillä ja puhaltimilla. Kaikki tulokset vahvistivat hänen havaintonsa löydettyjen kokonaislukusuhteiden ja musiikin intervallien välisestä yhtenevyydestä. Instrumenttikokeilujen lisäksi Pythagoras toteutti kokeen maljoilla, jotka sisälsivät nestettä vaihtelevia määriä. Hän kilautti ne soimaan yhtäaikaisesti pareittain ja vertasi maljojen nestemäärien suhdetta niiden tuottamaan harmoniaan. Konsonoivia intervalleja saivat aikaan sellaiset maljat, joiden nestemäärien suhteet muodostuivat neljän ensimmäisen kokonaisluvun avulla. Kun kahden maljan nestemäärien lukusuhteet olivat (2:1), (3:2) ja (4:3), soivat ne oktaavissa, kvintissä ja kvartissa. Lopulta useiden kokeiden ansiosta Pythagoras sai varmuuden siitä, että käytetyimmät musiikin intervallit voitiin esittää muuttumattomien kokonaislukusuhteiden avulla. (Papadopoulos, 2002)

Tunnin kokeellinen työ 1: **Musiikkia ilmasta ja vedestä**

Tarvikkeet: viivain, vettä, elintarvikevärejä, teippiä, sakset, 5 koeputkea / ryhmä
Johdanto tehtävään:

Suhteet ovat yleisiä musiikissa: esimerkiksi jokaisen sävellajin oktaavissa on sävelkorkeuksien välillä samat määrätyt suhteet. Seuraavassa kokeellisessa tehtävässä täytetään koeputkia vedellä niin, että veden ja ilman suhteet koeputkissa vaihtelevat. Huomaat, että syntyy erikorkuisia säveliä, kun puhallat eri koeputkiin.

1. Mittaa koeputken korkeus viivaimella. Jaa tämä mitta viiteen osaan. Merkitse yhteen koeputkeen teipillä kohta 1/5. Merkitse muihin koeputkiin kohdat 2/5, 3/5, 4/5 ja 5/5.
2. Opettaja on sekoittanut valmiiksi erivärisiä nesteitä astioihin. Täytä koeputket erivärisillä nesteillä merkkeihin saakka. Nesteiden pinta näkyy paremmin, kun neste on värillistä.
3. Voit nyt soittaa sävelen koeputkilla puhaltamalla kevyesti kuten huiluun puhallettaisiin. Kuuntele eri ääniä, jotka syntyvät ilman ja veden eri määrien yhdistelmistä.

4. Lisätehtävä musiikkia tunteville: Ota kahdeksan koeputkea ja viritä putkiin sävelasteikko vesimäärää muuttamalla. Koeta soittaa sen jälkeen laulua ”Satu meni saunaan.”

   (Vorderman, 1997)

Tunnin kokeellinen työ 2: **Soitin**

Johdanto: Kielisoittimissa sävelten väliset suhteet voidaan ilmaista kielen pituuksien murto-osina. Tehtävänä on rakentaa yksinkertainen kielisoitin ja tutkia sen avulla syntyvän äänen ja kielen pituuden välistä suhdetta.

Tarvikkeet: askarteluveitsi, harppi, 1 pitkä ja kaksi lyhyttä kynää, sakset, teippiä, kumilenkki, haaraliittimiä, pitkä laatikko

1. Piirrä harpin tai pyöreän esineen avulla suuri ympyrä lähelle laatikon toista päätä. Leikkaa ympyrä auki askarteluveitsellä, pyydä opettajan apua tarvittaessa. Kiinnitä teipillä lyhyt kynä laatikon kumpaankin päähän, 4 cm reunasta.
2. Pujota haaraliitin kannen alle molempiin päihin. Solmi katkaistun kumilenkin toinen pää liittimeen, venytä kuminauhaa kynän yli laatikon toiseen päähän ”kieleksi”. Sido se toiseen liittimeen, niin että kieli pingottuu laatikon yli.
3. Näppäile kieltä soittimesi kaikuaukon kohdalta. Tämä saa ilman laatikossa värähtelemään ja alkuperäinen ääni vahvistuu. Kielisoittimissa kieliä voidaan soittaa joko jousella (viulu) tai lyödä (piano). Kuuntele säveltä.
4. Työnnä pitkä kynä kielen alle niin, että noin neljäsosa kielestä jää kaikuaukon puolelle. Näppäile kieltä uudelleen ja kuuntele syntyvää säveltä. Huomaatko eron?
5. Siirrä kynä keskelle laatikkoa ja näppäile kieltä. Kuulet, että sävel on matalampi, sävelkorkeus on pudonnut oktaavin.

   (Vorderman, 1997)

## 4.2 Tuntisuunnitelman toteutus ja arviointi

Toteutin tuntisuunnitelman ensimmäisen osan **Musiikkia ilmasta ja vedestä** 5. huhtikuuta 2016 kuudesluokkalaisten jakotunnilla. Tällöin ryhmä on jaettu puoliksi ja toinen ryhmä tulee ensin ja toisella tunnilla toinen puoli ryhmää. Molemmat ryhmät suorittivat siis saman tunnin. Pidin saman teemantunnin kolmannen kerran kemian erityisopetusryhmälleni seuraavana päivänä 6. huhtikuuta 2016. Molemmat tunnit sujuivat hyvin.

Valmistin tuntia varten PowerPoint esityksen otsikolla Matematiikkaa ja musiikkia. Puhuin suhteista, kuinka ne kuvaavat kahden luvun välistä suhteellista kokoa – kuinka monta kertaa toinen on suurempi kuin toinen. Kahden luvun suhde voidaan laskea jakamalla ne keskenään. Lukusuhteita esiintyy monissa eri yhteyksissä matematiikan lisäksi. Kuva auringonkukasta johdatteli siihen, kuinka auringonkukan terälehtien spiraalit noudattavat matemaattista lukujonoa, joka on nimetty italialaisen matemaatikon Fibonaccin mukaan, Fibonaccin lukujonoksi. Murtolukuja on taas käytetty jo vanhoissa kulttuureissa oleellisena osana aritmetiikkaa. Suhteet, murtoluvut ja prosentit ilmaisevat matemaattisia suhteita kokonaisuuden ja sen osien välillä. Suureiden väliset suhteet ovat tärkeitä luonnontieteissä ja teknologiassa. Prosentit ovat kaupan, hallinnon ja pankkien käytössä jokapäiväisessä elämässä.

Sitten näytin kuvan Casa d’Oro Palazzo -nimisestä rakennuksesta Venetsian Canal Granden varrella, jonka julkisivu on silmälle erityisen miellyttävä ja sen symmetriset kuviot vaikuttavat sopusointuisilta. Rakennuksen suunnittelussa onkin käytetty hyväksi suhteita, jotka saavat rakennuksen näyttämään erityisen symmetriseltä ja kauniilta. Samalla tavoin musiikista voidaan löytää kokonaislukusuhteita. Ajatellaan jotakin kielisoitinta, kuten kitaraa. Jos näpätään soimaan kaksi ääntä yhtä aikaa, joiden kielien pituuksien suhde on 1:2, huomataan, että syntyvät sävelet soivat oktaavin päässä toisistaan. Musiikissa lukusuhteet liittyvät intervallien välisiin suhteisiin. Intervallien avulla ilmoitetaan kahden sävelen välisestä korkeuserosta. Samalla tavalla voidaan löytää niin sanotut konsonoivat eli sopusointuisesti soivat muut intervallit kuten kvartti ja kvintti.

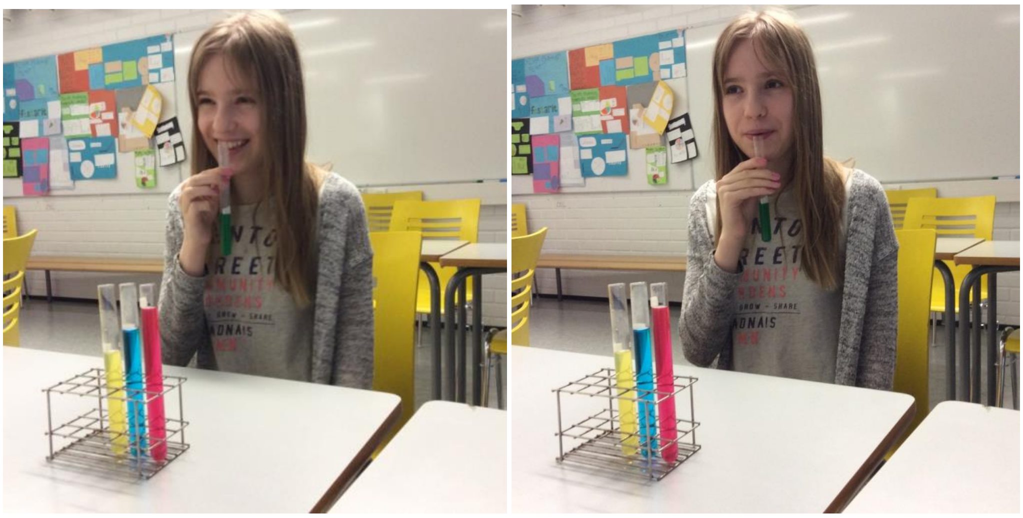
Valmistauduin tuntiini sekoittamalla keittopulloihin elintarvikeväriä sisältäviä erivärisiä liuoksia. Koulustamme löytyi yhteensä neljää eri väriä: sinistä, punaista, keltaista ja vihreää elintarvikeväriä. Jokaista ryhmää varten valitsin ja puhdistin huolellisesti viisi koeputkea ja koeputkitelineen. Sitten kokosin muita tarvikkeita: pipettejä keittopulloihin, viivaimia, teippiä, saksia ja hain musiikkiluokasta muutaman kielisoittimen.

Ensimmäinen puoli 6.-luokkalaisista työskenteli innostuneesti. Autoin oppilaita erityisesti koeputken pituuden osiin jakamisessa ja mittaamisessa. Koeputki piti jakaa viiteen yhtä suureen osaan. Koeputken koko pituus oli 16 senttimetriä. Koeputkeen piti merkata teipillä tarkasti kohdat 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 ja 5/5. Tällöin mitasta 5/5 olisi syntynyt tilanne, jossa koko koeputki olisi ollut täynnä nestettä. Korjasin ohjetta niin, että koeputken pituudesta vähennetään yksi senttimetri ja jaetaan loppuosa eli 15 senttimetriä viiteen yhtä suureen osaan. Tällöin mittaaminenkin helpottui, koska 15:5 = 3 senttimetriä ja näin ollen saatiin jako osumaan senttimetreissä tasan.

Kuvio 5. Elintarvikeväreillä sekoitetut nesteet koeputkissa.

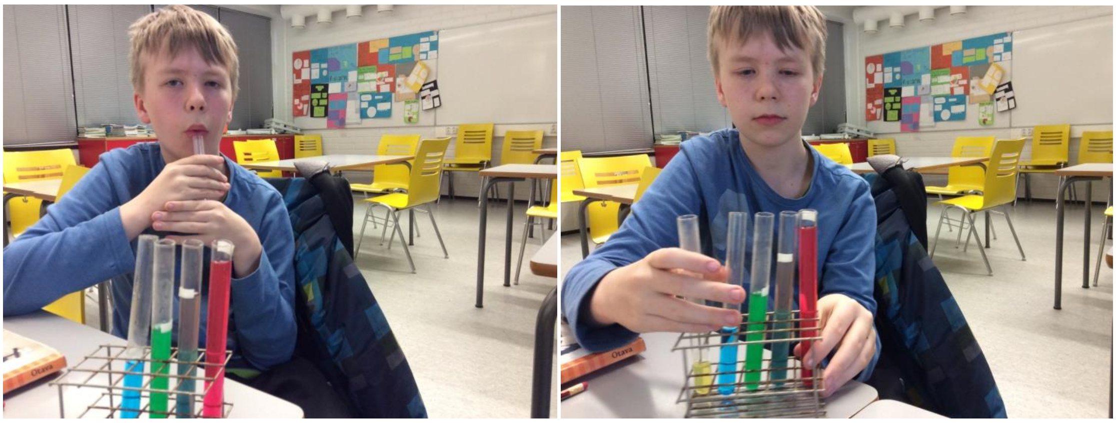
Oppilaat joutuivat pohtimaan suhteita jakaessaan koeputken vesirajoja ohjeen mukaisesti. He keksivät nopeasti, että 1/5 on kolme senttimetriä, 2/5 on 6 senttimetriä, 3/5 on 9 senttimetriä, 4/5 on 12 senttimetriä ja viimeinen 5/5 on 15 senttimetriä. Joku ryhmä suoritti mittaukset yhteen samaan koeputkeen, eivätkä he siis ymmärtäneet, että täytetään viisi eri koeputkea tietyin vesimäärin. Tässäkin ohjeistin heitä sitten uudestaan ja he suorittivat mittaukset uudelleen muihin koeputkiin.

Monet oppilaista käyttivät pipettiä ensimmäistä kertaa, joten sen käytössä sain neuvoa useita oppilaista. Elintarvikevärin roiskumista pulpetille tai vaatteille piti varoa ja käyttäytyä siis rauhallisesti nesteitä lisättäessä. Onneksi käytössä oli terveydelle vaaratonta elintarvikeväriä ja vesijohtovettä eli vettä kraanasta. Kun viisi koeputkea oli täytetty, oppilaat saivat kokeilla puhaltamista koeputken suuaukkoon. Tässäkin opastin heitä puhaltamaan kuten huiluun: tiivistämään huulien suuaukkoa ja asettamaan koeputki leukaan kiinni.



Kuvio 6. 6. luokan oppilas puhaltamassa koeputkeen.

Kun oppilaat pääsivät puhaltamaan koeputkiin, luokka täyttyi erilaisista suhisevista ja vislaavista ”pillien” äänistä. Koeputkeen puhallettu ääni muistutti etäisesti panhuilun ääntä. Toiset saivat hyvin voimakkaita ääniä varsinkin 1/5 ja 2/5 nestettä sisältävistä koeputkista. Vasta tunnin aikana huomasin, että koeputkea, jossa oli korkein nestemäärä, oli vaikea soittaa. Tämä johtui siitä, että koeputkessa oli nestettä 5/5 eli 15 senttimetriä koko putken pituudesta eli 16 senttimetristä. Tällöin ilmapatsaalle jäi hyvin vähän värähtelypituutta ja vesi usein roiskui yli koeputken suun ja tuli huulille. Ohjeistin oppilaita puhaltamaan tähän koeputkeen hyvin varovasti, ja kuuntelemaan suhisevan äänen korkeutta pillimäisen vislaavan äänen sijaan. Suhisevastakin äänestä pystyi erottamaan muodostuvan äänen korkeuden ja vertaamaan sitä muiden koeputkien ääniin.



Kuvio 7. Oppilas soittamassa koeputkia.

Tunnilla oli lisätehtävä nopeille ja musiikkia enemmän tunteville oppilaille. Ohjeena oli virittää viiteen koeputkeen sävelasteikko kvintin välille ja soittaan sen jälkeen laulu ”Satu meni saunaan.” Yksi tyttöryhmä suoritti tehtävän hienosti ja sain sen videoitua talteen. Ehkä viritys olisi voinut olla hieman parempi, mutta ruokailu kutsui oppilaita ja tunti oli lopussa, joten he halusivat siirtyä syömään tunnilta.


Kuvio 8. Oppilaat virittivät koeputkensa ”Satu meni saunaan sopiviksi.”

## 4.3 Palaute oppilailta

Annoin seuraavalla tunnilla oppilaille palautelomakkeen, jossa esitin kysymyksiä tunnista. Sain yhteensä 21 vastausta. Esitin seuraavat kysymykset:

1. Mitä pidit tunnin sisällöstä?
2. Opitko uusia asioita?
3. Oliko kokeellinen osio mielenkiintoinen?
4. Haluaisitko lisää tällaista opetusta, jossa tekemällä opitaan?
5. Kuvaile kokemustasi tunnista.

Ensimmäiseen kysymykseen jokainen oppilas vastasi myönteisellä tavalla kuten, että ”oli kiva tunti”, ”oli hauskaa”, ”ihan kivaa”, ”tosi kivaa”, ”tosi mielenkiintoista” ja ”ihan okei.” Yksi vastaaja kirjoitti, että ”oli kivaa, koska ei tarvinnut tehdä kirjan tehtäviä”. Kaksi vastasi, että toinen tämän tyyppinen tunti olisi kiva. Yksi vastasi, että” oli kiva, kun sai tehdä itse”.

Toisessa kysymyksessä kysyttiin, oliko oppilas mielestään oppinut jotakin uutta. Sain 11 kyllä vastausta ja 10 ei vastausta. Yhdessä vastauksessa oppilas kertoi, että ”Opin rakentamaan säveliä vesimäärää muuttamalla”. Yksi kirjoitti oppineensa soittamaan putkiloita eri äänillä. Yksi kertoi oppineensa miten musiikkia voi yhdistää matematiikkaan. Kaksi oppilasta mainitsi, että tunnilla käsitellyt asiat olivat tuttuja ennestään.

Kolmannessa kysymyksessä kysyttiin kokeellisen osion mielenkiintoisuudesta. Osa vastasi kyllä ja perusteli vastaustaan, osan mielestä ei ollut mielenkiintoinen ja neljässä paperissa ei osattu vastata kysymykseen. Suurin osa piti kokeellisuudesta, sillä myönteisesti vastanneita tuli 14. Kolme oppilasta taas ei pitänyt kokeellisuudesta. Kokeellisuudesta mainittiin, että ”se oli tunnin paras osa” ja ”se oli erilaista kuin normaalisti” ja ”oli mielenkiintoista, koska tuollaista ei ole ollut ennen”. Yksi oppilas mainitsi, että ”ne pipettimet (pipetit) olivat kivoja” ja toinen että ”oli hauskaa siirtää nesteitä.” Sitten sain vastauksen, jossa kerrottiin kokeellisen osion olevan mielenkiintoinen, koska ”en ole ikinä ennen kokeillut sellaista” ja toinen perusteli mielenkiintoiseksi ” koska pidän kemiasta.”

Neljännessä kysymyksessä kysyttiin haluaisiko oppilas lisää kokeellisia oppitunteja. Vastauksista 15 oli myönteisiä, 3 ei halua ja 3 ehkä haluaa lisää kokeellisuutta matematiikan tunteihin. Kielteisistä vastauksista yksi kirjoitti, ettei halua kokeellisuutta juuri matematiikan tunneille. Lisäksi yhdessä vastauksessa oppilas perusteli negatiivista kantaansa sillä, ettei opi hyvin tekemällä. Myönteisiä vastauksia perusteltiin seuraavasti: ”Kyllä, koska toiminta oli kivaa/mukavaa/kiinnostavaa.”

Viidennessä kysymyksessä pyydettiin kuvailemaan kokemusta tunnista. Vastauksien mukaan 7 oppilasta kertoi lyhyesti pitäneensä tunnista kuten ”ihan kiva tunti”, ”erittäin mukava”, ”mielenkiintoinen”, ”kiva” ja ”hauskaa.” Sitten 8 oppilasta vastasi lauseella myöntävästi, kuten ”Oli kivaa puhaltaa ja mittailla”, ”Oli enemmän tekemistä kuin laskutehtävissä”, ”Oli hauskaa laittaa niitä värejä ja puhaltaa niihin”, ”Tosi kivaa ja opin paljon uutta musiikista ja matematiikasta”, ”Oli hyvä kokemus”, ”Tunnilla oli hauskaa, kun sai leikkiä ja puhallella niihin putkiin.” Neljässä lomakkeessa ei osattu vastata kysymykseen. Yhdessä kieltävässä vastauksessa mainittiin, että ”Ei mennyt kovin hyvin, koska sain huomautuksen. Tunnin arvosana on 5-.” Ja toisessa kielteisessä annettiin arvosana 7.

## 4.4 Pohdintaa

Matematiikkaa ja musiikkia integroiva oppitunti onnistui hyvin ja suurin osa välittömästä palautteesta oli positiivista. Oppilaat kommentoivat tuntia hauskaksi, mielenkiintoiseksi ja kivaksi, ja yksi oppilas kertoi tunnin päätteeksi, kuinka monta eri oppiainetta tunnissa yhdistyi. Hän mainitsi muun muassa kemian, matematiikan, historian, liikunnan ja musiikin. Lyhyt keskustelu oppilaan kanssa oli erittäin mielenkiintoinen ja opettajaa inspiroiva, koska juuri tähän aineiden väliseen integraation tunnissa pyrittiin uuden opetussuunnitelman hengessä.

Tunnin valmistamiseen ja suunnitteluun kului aikaa huomattavasti enemmän kuin yleensä tuntien suunnitteluun on mahdollista käyttää. Tunnin järjestäminen ja suunnittelu oli kuitenkin hyvin antoisaa ja motivoivaa ammatillisesta näkökulmasta katsottuna, koska juuri tällaista kokeellisuutta ja tekemällä oppimista aion toteuttaa tulevaisuudessa ja panostaa siihen. Tunnin suunnittelutyöstä on jatkoa ajatellen suurta hyötyä, koska matematiikkaa ja musiikkia integroivan tunnin voi toteuttaa eri vuosikursseilla ja uusilla tulevilla ryhmillä. Jokaisen matematiikan tunnin ei silti tarvitse sisältää kokeellisuutta tai olla muuten erikoinen. Laskutehtävien tekeminen opettajan esittämien esimerkkien pohjalta on myös hyvää ja tavoitteellista oppimista.

Eräs oppilas toivoi palautteessaan, että matematiikan tunneilla lasketaan mieluummin kuin käytetään kokeellista työskentelytapaa. Kokemukseni mukaan oppilaat ovat hyvin tottuneita opettajajohtoiseen työskentelytapaan ja kirjan tehtävien tekemiseen, jolloin uudenlainen opetusmenetelmä tuntuu haastavalta ja vieraalta. Toiset oppilaat uskovatkin oppivansa matematiikkaa parhaiten juuri kirjan tehtäviä tekemällä. Kuitenkin tämä joukko oppilaita on vähemmistössä ja suurin osa oppilaista motivoituu tekemisen kautta myös laskutehtävien harjoitteluun.

Palautteen perusteella tunnin kokeellista osiota pidettiin mielenkiintoisena ja hauskana, koska se oli tavallisuudesta poikkeavaa ja uutta monille. Vastaavanlainen kokeellisuus yhdistetään usein kemian tunteihin. Oppilaista valtaosa toivoi kokeellisuutta ja tekemällä oppimista lisää oppituntien sisältöihin. Opettajalta toiminnallisten töiden tai kokeellisuuden järjestäminen vaatii enemmän työtä, tavaroiden siirtelyä ja etukäteen suunnittelua. ”Jos opetus voidaan järjestää niin, että oppiminen tapahtuu erilaisten käytännön tehtävien tai tekemisen kautta, oppiminen on tehokkaampaa ja samassa ajassa opitaan enemmän.” kirjoittaa Salakari teoksessaan Taitojen opetus. (2007) Koska Salakarin tutkimustuloksiin viitaten oppilas oppii enemmän ja lyhyemmässä ajassa itse tekemällä, niin tällaiseen työskentelymetodiin kannattaa panostaa.

Matematiikkaa ja musiikkia integroivan tunnin suunnittelutyö kehitti ammattiosaamistani. Rohkaistuin hyödyntämään musiikin alan osaamistani matematiikan ja kemian opetuksessa. Pidin tunnin myös kemian erityisryhmälle samalla viikolla, joten sain kokemusta kahdesta erilaisesta ryhmästä ja kahden tunnin pitämisestä. Suunnittelin tunnin 6. luokkalaisille oppilaille, joten työtäni voivat hyödyntää erityisesti peruskoulun opettajat suunnitellessaan oppiainerajat ylittäviä oppisisältöjä ja -kokonaisuuksia. Aion työssäni hyödyntää tuntisuunnitelmaani ja kokeilla muitakin tapoja yhdistää musiikillista osaamistani matematiikan opetukseen ja oppilaiden motivoimiseen.

## Lähteet


Assayag, G., & Feichtinger, H., G., & Rodrigues, J., F. (2002). Mathematics and music.

A diderot mathematical forum.

Benson, D. (2008). Music: A Mathematical Offering. Cambridge University Press.

Papadopoulos, A. (2002). Mathematics and music theory: From Pythagoras to Rameau.

*The mathematical intelligencer, 24(1),* 65-73. Springer-Verlag New York.

Krohn, I. (1916). Musiikin teorian oppijakso II. Säveloppi (melodiikka). WSOY. Porvoo.

Kurkela, V. (1998). Harmonia ja sointuajattelu länsimaisessa musiikissa. <http://www.uta.fi/mute/harmonia2.pdf>

Paalasmaa, J. (2000). Aktivoi oppilaasi. PS-kustannus.

Salakari, H. (2007). Taitojen opetus. Copyright Eduskills Consulting. Saarijärvi.

Vorderman, C. (1996). Kiehtova matematiikka. WSOY