



## Mahdottoman geometrian havainnollistaminen 3d-animaatioilla

Kulttuuriala  
3d-animaatio  
Opinnäytetyö  
8.6.2010

---

Svante Knuus

## TIIVISTELMÄSIVU

Koulutusohjelma Kulttuuriala	Suuntautumisvaihtoehto 3d-animaatio	
Tekijä Svante Knuus		
Työn nimi Mahdottoman geometrian havainnollistaminen 3d-animaatioilla		
Työn ohjaaja/ohjaajat Pasi Kaarto		
Työn laji Opinnäytetyö	Aika 2010	Numeroidut sivut + liitteiden sivut 28
<p>TIIVISTELMÄ</p> <p>Opinnäytetyön aiheena on Amos Andersonin taidemuseolle M.C. Escherin näyttelyä varten parityönä tehdyt 3d-mallit, sekä niitä varten tehty tausta tutkimus mahdottomista kuvista.</p> <p>Animaatioiden tarkoituksena oli havainnollistaa 3d-mallinnuksin Escherin töissä esiintyviä kuvia mahdottomista kappaleista. Kirjallisessa osiossa on tutkittu kuvien ja näkemisen teoriaa sekä erilaisia tapoja epätodellisten muotojen esittämiseen. Ne on jaettu yhdestä pisteestä näkemiseen, perspektiivikonstruktioihin ja minimaalipintoihin.</p> <p>Työssä selvisi, mihin kuvien illuusiot perustuvat ja, että 3d-grafiikan avulla voidaan luoda havainnollisia malleja vaikeaselkoisista kuvista. Opinnäytetyöni liitteenä on tehdyt animaatiot sisältävä cd-levy.</p>		
Teos/Esitys/Produktio visualisointi / animaatio		
Säilytyspaikka Metropolian kirjasto, Tikkurilan toimipiste		
Avainsanat 3D, Illuusio, Escher, mahdoton geometria		

Degree Programme in Media		Specialisation 3d-animation
Author Svante Knuus		
Title Visualization of impossible geometry with 3d animations		
Tutor(s) Pasi Kaarto		
Type of Work Bachelor´s Thesis	Date 8.6.2010	Number of pages + appendices 28
<p>The subject of this thesis was to create animations of impossible objects made for a M.C. Escher exhibition at Amos Anderson art museum in Helsinki and to do research on this subject. The modelling was done as a pair work with another student.</p> <p>The goal was to produce clarifying 3d-visualizations of impossible objects used by Escher in his artwork. The written part of the thesis deals with theories of perceiving images and different methods to present impossible forms, such as single point perception, perspective constructions and minimal surfaces. The work explains also how people usually react on these kinds of pictures and why.</p> <p>Working with this subject made me aware of different possibilities of 3d-animation as a tool to create depictive graphic models of obscure pictures and what these illusions are based on. A compact disc with all the animations is included in this thesis.</p>		
Work / Performance / Project		
Place of Storage Metropolia library, Tikkurila unit		
Keywords 3d, Illusion impossible geometry, Escher,		

## SISÄLLYS

1. JOHDANTO .....	4
2. ANIMAATIOPROJEKTIN KUVAUS JA TAVOITTEET .....	5
3. M.C. ESCHERIN ELÄMÄÄ .....	6
4. TAPOJA EPÄTODELLISTEN MUOTOJEN ESITTÄMISEEN.....	8
4.1. yhdestä pisteestä .....	10
4.2. kahdesta suunnasta - kaksi totuutta? .....	11
4.3 Penrosen kolmio – Tribar .....	13
4.4 Neckerin kuutio ja mahdoton kuutio .....	15
4. 5 Portaita ylös ja alas - mahdottomat portaat .....	17
5. KOLMIULOTTEISEN TILAN KUVAAMINEN TASOLLA .....	18
5.1 Aksonometrinen projektio.....	19
5.2 Syvyyden tavoittelua tasolla perspektiivin keinoin .....	19
5.3 Yhden pisteen perspektiivi.....	21
5.4 Kaarevat viivat ja perspektiivi .....	23
6. MINIMAALIPINNAT .....	25
8. POHDINTAA .....	28
LÄHTEET.....	29
LIITTEET	

## 1. JOHDANTO

Opinnäytetyöni kirjallinen osuus käsittelee Amos Andersonin taidemuseolle M.C. Escherin "Mahdottomia maailmoja" näyttelyä (3.3–26.6.2010) varten tekemiäni 3d-animaatioita sekä taustaa kaksiulotteisen kuvan mahdollisuuksista ja teoriasta. Museolle tehtyjen animaatioiden tehtävänä on havainnollistaa tietokoneella tehdyillä kolmiulotteisilla malleilla Escherin teoksissa käytettyjä visuaalisia harhoja ja antaa mahdollisuuden tarkastella niitä eri suunnista. Mahdottomat kuviot muuttuvat animaatioiden avulla hetkeksi mahdolliseksi ja yksi totuus vaihtuu toiseksi, joten mahdottoman voi käsittää geometris-optiseksi harhaksi tai illuusioksi. Paljon epätodellisia muotoja ja Escherin töitä tutkineen Bruno Ernstin mukaan mahdoton näiden kuvioiden yhteydessä ei ole kuitenkaan niin absoluuttista, kuin vaikka neliskulmaisen ympyrän (1991,6.) Termi voi olla harhaanjohtavakin, mutta se antaa mielestäni käsityksen teosten luonteesta. Monet Escherin teoksissa kuvatuista asioista ovat mahdottomia ainakin tässä maailmassa, kuten vaikka painovoiman vaihtelut samassa tilassa. 3d-grafiikalla luoduissa animaatioissa tämän tapaiset harhat ovat kuitenkin mahdollisia toteuttaa. Osallistuimme oppilastyöprojektiin yhdessä Suvi Kansikkaan kanssa suunnitellen, mallintaen ja animoiden. Koko projektia ohjasi yliopettaja Pasi Kaarto ja avusti lehtori Lauri Huikuri luoden Flash-pohjaisen käyttöliittymän animaatioille. Opinnäytetyöni taustoja varten vierailin Hollanissa Den Haagissa Escherin museossa ja tutkin paljon kirjallisuutta aiheeseen liittyen. Aloitan käymällä läpi projektimme tavoitteita ja työvaiheita, jonka jälkeen esittelen M. C.

Escherin ja erilaisia tapoja, johon mahdottomat kuvat perustuvat. Olen rajannut tämän osan käsittelemään tapoja, jotka esiintyvät mallintamissamme objekteissa. Ne voidaan jakaa yhdestä tietystä pisteestä näkemiseen, erilaisiin perspektiivi konstruktioihin sekä minimaalipintoihin, joita pyrin havainnollistamaan kuvien ja esimerkkien avulla.

## 2. ANIMAATIOPROJEKTIN KUVAUS JA TAVOITTEET

Helmikuun alussa 2010 saimme yhdessä Suvi Kansikkaan kanssa oppilastyönä tehtäväksemme tutustua hollantilaisen taitelija M. C. Escherin tuotantoon ja toteuttaa 3d-animaatioilla klassisia Escherin töissä esiintyviä optisia illuusioita Amos Anderssonin museossa avattavaa näyttelyä varten. Meillä oli neljä viikkoa aikaa suunnitella ja toteuttaa animaatiot ennen näyttelyn avajaisia. Pohdimme näyttelyn järjestäjien kanssa viikottaisissa tapaamisissa museolla, mikä olisi erityisesti museovierailijan näkökulmasta kiinnostavaa ja mitkä teokset olisivat mielenkiintoisia nähdä kolmiulotteisina mallinnuksina. Keskustelimme myös siitä, minkälaisen esityksen pystyisimme tuottamaan noin sadan arvioidun työtunnin aikana, mikä oli kohtalaisen ripeä aikataulu projektille. Olimme kaikki samaa mieltä siitä, ettemme lähtisi kopioimaan Escherin teoksia kaikkia yksityiskohtia myöten, vaan ennemminkin pyrimme selkeyteen, käyttömukavuuteen ja havainnollisuuteen. Otimme tavoitteeksi kuuden eri animaation tekemisen ihan senkin takia, että saisimme käyttöliittymän valikosta selkeän ja tasapainoisen. Mallinnettaviksi valitsimme töitä, jotka olivat tunnettuja, löytyivät näyttelystä ja jotka perustuivat mahdottomiin rakennelmiin, joita oli mahdollista havainnollistaa kiinnostavasti 3d-animaatioiden avulla.

Aloitimme työn mallintamalla 3ds Max-ohjelmalla yksinkertaisimpia mahdottomia kappaleita, joista teimme pieniä testi animaatioita. Ne päättyivät lopulta mukaan esitykseen omana ryhmänään. Tässä vaiheessa emme tieneet, onko tällaisten objektien mallinnus edes mahdollista. Pelko osoittautui myöhemmin kuitenkin turhaksi. Monissa yksinkertaisissa kappaleissa toistuu samat visuaaliset harhautukset, joita Escher käytti osana omia epätodellisia kuvioita sisältävissä töissään. Nopeiden animaatio kokeiluiden avulla saimme myös käsityksen siitä, millaisia animaatioista voisi tulla. Suurin osa objekteista oli mallinnettava yhdestä kuvakulmasta katsoen, koska harha perustui juuri siihen, miltä kuvio näytti tietystä pisteestä. Se, miltä malli tuli näyttämään toisesta suunnasta katsoen, oli melkein toisarvoista, mutta yllätti usein

meidätkin. Tärkeintä oli, että mallit vastaavat alkuperäismallia yhdestä kuvakulmasta katsoen ja paljastavat harhan, kun ne näytetään toisesta kuvakulmasta. Renderöimme suurimmasta osasta malleja animaation, jossa objekti pyörähdää täyden kierroksen oman akselinsa ympäri. Toinen tapa oli kierrättää kameraa objektin ympäri. Tarkoitus oli, että museo vieras pystyy hiirtä liikuttelemalla tarkastelemaan malleja eri suunnista. Mallintamien vei ylivoimaisesti suurimman osan ajasta, vaikka yritimme pitää mallit kohtalaisen yksinkertaisina ja selkeinä. Työskentelimme noin 8 tuntia päivässä koululla ja keskityimme yleensä kahteen malliin kerralla. Karkeasti laskettuna yhden kohteen mallintaminen kesti noin viikon. Jos aikaa olisi ollut enemmän, olisimme kiinnittäneet enemmän huomioita viimeistelyyn ja yksityiskohtiin. Kävimme museolla viikon välein näyttämässä työn edistymistä ja miettimässä seuraavia mallinnettavia kohteita. Jaoimme töitä mallista ja kiinnostuksesta riippuen. Haastavimpia kohteita oli Suvi Kansikkaan mallintama "Portaikko" ja työläin kenties "Toinen maailma 2". Välillä uutta mallia aloittaessamme kokeilimme mallintaa molemmat samaa kohdetta keräten ideoita ja harjoitusta, josta sitten jatkoimme yksin. Välillä emme olleet varmoja, oliko juuri meidän visiomme mallista oikea hyvän uskottavan lopputuloksen saamiseksi, mutta huomasimme eri referenssejä selaillessamme, ettei malleihin ollutkaan yleensä yhtä ainoata oikeata ratkaisua. Referenssi materiaalina käytimme kuvia Escherin töistä sekä Bruno Enrstin Escherin töitä havainnollistavia kirjoja. Löysimme myös internetistä muutamia muiden tekemiä mallinnuksia, joista sai käsityksen mitä aikaisemmin on tehty. Projektin aikataulu piti hyvin, eikä meille tullut kovaa kiirettä. Kahtena viimeisenä päivänä renderöimme kaikki animaatiot valmiiksi, joista Lauri Huikuri kokosi yhtenäisen esityksen.

### 3. M.C. ESCHERIN ELÄMÄÄ

Maurits Cornelis Escher syntyi vuonna 1898 Pohjois Hollannissa. Lapsuutensa hän vietti perheensä kanssa Arnheimissa, missä hän kävi koulua. Escher ei ollut mikään hyvä oppilas. Hän kuvaakin kouluaikojaan painajaismaiseksi, eikä koskaan saanut päästötodistusta. Piirustus oli ainoa häntä kiinnostanut aine, missä hän osoittikin jo silloin lahjakkuutta, vaikka se ei näkynytäkään koulun arvosanoissa. Escher aloitti opiskelun 1919 Haarlemin arkkitehtuuri- ja taidekoulussa, missä hänen arkkitehtuurin opiskelunsa vaihtui pian grafiikan opiskeluksi. Vuonna 1922 hallitessaan jo hyvin grafiikan tekniikat hän lopetti opiskelun ja asettui muutaman Italian matkan jälkeen Roomaan ja avioitui 1924. Italiassa poliittisen ilmapiirin kiristyttyä 1935 hän muutti

perheensä kanssa Sveitsiin, jossa he asuivat 2 vuotta. Escher ei inspiroitunut omien sanojensa mukaan yhtään Sveitsiläisestä maisemasta ja arkkitehtuurista. Se oli kuin vastakohtaa Etelä-Italialle, johon hän oli ihastunut. Tänä aikana hän teki vähemmän tunnetuksi jääneitä maisema- ja muotokuvia. Meri kiehtoi Escheriä ja hän mainitseekin yhdeksi suurimmaksi inspiraation lähteekseen Välimeren. Vuonna 1937 maalauksellisuudesta tuli Escherille sivuseikka ja hän alkoi tutkia puhtaita muotoja sekä olemassaolomme liittyviä kysymyksiä, kuten äärettömyyttä, jatkuvuutta ja matemaattisia struktuureja. Tämän jälkeiseltä ajalta ovatkin Escherin tunnetuimmat teokset. Escher matkusti vielä usean kerran Espanjaan, jossa erityisen vaikutuksen häneen teki Maurilaiset ornamentit Alhambassa, Granadassa. Ne olivat alkusysäys hänen työskentelynsä säännölliseen tason jakamisen alalla, joka edustaa myös merkittävää osaa hänen tuotannostaan. Sveitsin jälkeen Escher asui hetken Belgiassa, josta muutti toisen maailmansodan aikana takaisin Hollantiin. Siellä hän työskenteli vuosia rauhassa työhuoneessaan. Escher viihtyi hyvin omissa oloissaan. Tätä voidaan pitää hänen tuotantonsa kannalta rikkaimpana aikana. Töitä valmistuikin tasaiseen tahtiin. Tähän aikaan sijoittuu myös hänen kiinnostuksensa mahdollottomien maailmojen kuvaamiseen. Vuonna 1971 Escher muutti Pohjois Hollantiin, jossa hän kuoli vuonna 1972. (Ernst 1978, 7–13.)

Escherin töissä toistuvat paradoksit, jotka ymmärrämme todeksi, mutta joihin emme kuitenkaan usko. Escheriä kiehtoi kuvataiteilijan ainainen ongelma, eli tavat joilla kolmiulotteisia kohteita on mahdollista esittää kaksiulotteisella tasolla. Hän sekoitti töissään myös kaksi ja kolmiulotteisuutta keskenään ja leikkitteli usein päivän selvillä asioilla. Bruno Ernstin mukaan Escherille logiikka ja yhteys todellisuuteen olivat tietoisesti tavoiteltuja ja että hän selvensi kuvina asioita, joita voisi myös tulkita sanoin. Hän osasikin ilmaista kuvina monia matemaattisesti ja tieteellisesti monimutkaisia asioita, minkä takia hän on saanut aina tunnustusta tieteen puolelta. Escherin teoksista mainitaan Amos Anderssonin näyttelyn esitteessä, että ne yhdistävät tieteellisen ja taiteellisen ajattelun. Escherin monista teoksista puhutaankin järkipärisinä, joka on taidemaailmassa hiukan vältetty termi. Joidenkin taidekriitikoiden mielestä niistä ei ole myöskään löydetty taiteeseen vaadittavaa runollisuutta, vaan niitä on pidetty liian älyllisinä luokiteltavaksi korkeataiteeksi. Jotkut pitävät häntä enemmän tiedemiehenä tai matemaatikkona kuin taiteilijana. Escherillä oli numeroiden ja kirjainten hahmotusongelmia, eikä hän tämänkään takia pärjännyt koulussa tai osannut selittää matemaattisesti teostensa sisältöä. Hän pohti itse heikkoa matemaattista osaamistaan ja toteaa sen olevan kiehtovaa ja samalla sääli, kun hänen ja matematiikan aihealueet



koskevat toisiaan, menemättä toistensa päälle. Hänen asemastaan taidemaailmassa kiistellään edelleen. Escher on kuitenkin alkanut saada laajempaa hyväksyntää taidepiireissä. ( Ernst 1978, 16.)

Helsingissä Amos Anderssonin taidemuseolla olevassa näyttelyssä on esillä laaja kokoelma Escherin töitä uran eri vaiheilta. Esillä on myös suurelle yleisölle vähemmän tunnettuja muotokuvia, maisemakuvia ja asetelmia 1920–30 –luvuilta hänen uransa alkupuolelta Espanjasta ja Italiasta, mutta pääpaino on kuitenkin Escherin myöhemmissä tunnetuimmissa teoksissa. Mielestäni Helsingissä oleva kokoelma on yllättävänkin kattava verrattuna Den Haagissa Hollannissa olevaan pysyvään näyttelyyn, joka on hiukan laajempi ja esillä enemmän mielenkiintoista tausta materiaalia. Escherin teokset ovat vaikuttavia ja niitä on hienoa päästä katsomaan lähelle. Ensi reaktiona näyttelyyn mennessään voi todeta että M.C. Escher oli taidegrafiikan tekniikan mestari. Suurin osa hänen teoksistaan on litografioita ja puukaiverruksia ja niissä vaadittava tekniikka on jo itsessään vaikuttavaa ja huomionarvoista. Teokset ovat täynnä vaikeita virheettömiä yksityiskohtia ja myös hänen vedoksensa ovat liki täydellisiä. Mahdottomat kappaleet, joita olemme mallintaneet ovat vain osa teoksien aiheista, mutta joista hänet tunnetaan yleisesti parhaiten. Tekemämme animaatiot ovat esillä kahdella tietokonenäytöllä museon toisessa kerroksessa näyttelyn yhteydessä. (Amos Andersonin taidemuseo.)

#### 4. TAPOJA EPÄTODELLISTEN MUOTOJEN ESITTÄMISEEN

Kun paperilla tai muulla kuvatasolla esitetään jotakin kolmiulotteista, on kyse illuusiosta. Osaamme suhtautua siihen ja tulkita sen, koska olemme tottuneet näkemään kuvia ja luottamaan havaintoihimme. Kuvataiteilijalla on mahdollisuus esittää asioita hyvin kokeellisesti rikkomalla perinteisiä tapoja, joilla kuvia tehdään ja joilla olemme tottuneet niitä katsomaan. Escherin kuvat ovat järkiperaisiiä, ensi näkemältä monet ovat hyvinkin realistisia. Ne voisivat olla tavanomaisia representaatioita kokemastamme maailmasta, mutta sitten huomaakin, että jokin on kuvissa oudosti. Escherin kuvat ovat lumetodellisuutta, joka on ja samalla ei ole totta. Ihmisen reaktioita visuaalisiin harhoihin ja kuvan katsomistapoihin voi selittää hahmopsykologian peruskäsitteillä. Saksassa 1900–luvun alku puolella keskeisenä koulukuntana toimineen hahmopsykologian ydinkäsitteenä on se, että havaitsemme ensin kokonaisuuden, jonka sitten jäsenämme osiksi. Sen mukaan ihmisillä on

taipumus nähdä ja kuulla ennestään "tuttuja" muotoja ja ääniä. Jos nähty ärsyke näyttää ympyrältä, näemme myös ympyrän. Kolmiot, neliöt, ympyrät ja ihmiskasvot ovat ihmisille tuttuja muotoja, jotka näemme helposti. Näemme, mitä odotamme tai haluamme nähdä. Motivaatio, tarpeet sekä vahvasti myös aikaisemmat kokemukset vaikuttavat kiistatta tähän. (Vilkko-Riihelä2001, 202.)

Escher oli mestari luomaan geometris-optisia illuusioita. Hänen kuvissaan on erikoisia geometrisia kappaleita, mahdottomia kappaleiden liitoksia, perspektiivi kokeiluja, metamorfooseja sekä erilaisia tessalaatioita eli tapoja säännölliseen pinnan jakamiseen. Hän tutki omana elinaikanaan nopeasti kehittyvää tutkimusaluetta topologiaa ja sovelsi usein muiden keksimiä mahdottomia kappaleita omissa töissään sekä leikitteli niillä tästä maailmasta tuttujen arkiselta tuntuvien aiheiden kanssa. Näin hän loi kuviinsa kontrastia, jonka avulla hän pystyi haastamaan katsojaa enemmän. Suurena inspiraationa hänelle oli antaa katsojalle teoksissaan lupaava ensivaikutelma, joka kannustaisi teoksen logiikan pohtimiseen ja ratkaisun löytämisen iloon. ( Ernst 1978, 16).

Olen poiminut kolme erilaista visuaalista esitystapaa, jota tuntemalla mallintamamme Escherin teokset ja visuaaliset harhat selittyvät paremmin. Yhdestä pisteestä katsominen on kuin avaimen reiän kautta katsomista, jolloin meidän on joko uskottava näkemämme sellaisenaan tai annettava mahdollisuus sille, että näkemämme voikin olla jotain ihan muuta, mitä luulimme. Tästä syystä kerron myös siitä, mitä tapahtuu kun asian näkee toisesta kuvakulmasta. Se on animaatioidemme yksi idea. Kun ihminen näkee saman asian kahdesta suunnasta, mutta täysin eri tavalla, saa se eteensä kaksi totuutta. Möbiuksen nauha on esimerkki jatkuvuuden, äärettömyyden ja samalla minimalistisen pinnan tavoittelusta. Yksinkertainen kappale, joka kuitenkin on mietityttänyt ihmisiä 1800-luvulta lähtien. Aksonometrinen projektio on tapa esittää jotain havainnollisesti mittakaavassa, mutta ilman etäisyyttä tai syvyyttä kuten me sen koemme, mikä taas on perspektiivikuvan avulla mahdollista. Sen avulla voi esittää kaksiulotteisesti realistinen tila vaikutelma. Perspektiivikuvilla voi myös esittää hyvinkin kokeellisia näkymiä, kuten Escher on tehnyt esimerkiksi asettamalla yhdelle pakopisteelle moninkertaisen funktion "Toinen Maailma 2" teoksessaan tai taivuttamalla perspektiiviivoja saavuttaen uusia näkemisen ulottuvuuksia.

#### 4.1. yhdestä pisteestä

Kun maailmaa tarkastellaan yhdellä silmällä tarkkaan ja harkitusti valitusta pisteestä käsin, on mahdollista kuvata asioita tavalla, jolla emme ole tottuneet niitä näkemään. Kuvakulman tarkoituksellisessa valitsemisessa ei itsessään ole mitään uutta. Esimerkiksi valokuvaajat hakevat koko ajan kuvakulmaa kamerallaan nähdäkseen enemmän tai korostamalla kohteen tiettyä ominaisuutta. Harva kuvataiteilija kuitenkin pysähtyy juuri siihen kulmaan, jossa asiat näyttävät epäloogisilta tai jopa mahdottomilta ja alkaa rakentaa kuvaansa siitä. Escher teki juuri näin. Tarkasti rakennetut epäloogiset, mahdottomat liitokset ja perspektiiviharhat olivat hänelle tyypillisiä aiheita. Kuitenkin paperilla kuvattuna ne ovat täysin mahdollisia. Kyseessä on piirros, joka parhaimmassakin tapauksessa vain jäljittelee todellisuutta. Tosin onhan piirroskin itsessään todellista, mutta mahdottoman tuntuisen siitä tekee se, kun ihminen hahmottaa näkemäänsä kolmiulotteisena. Hahmopsykologian mukaan, kun näemme näitä, niin sanottuja mahdottomia kuvioita oletamme ne heti kolmiulotteisiksi, jos ja kun aivot saavat tarpeeksi vihjeitä syvyydestä. Näköjärjestelmämme alkaa viestittää tietoa kaksiulotteisesta kuvasta, mutta aivot eivät hyväksy tätä, jolloin syntyy mahdottoman tuntuinen vaikutelma. Meidän kuvaamistapaamme tuntemattomalle tällaiset kuvat voivat tuntua täysin mahdolliselta. Kuvantulkinta virheet syntyvät yleensä, joko tottumattomuudesta kuvalliseen viestintään tai siitä, että kuvilla tarkoituksellisesti sekoitetaan tapoja, jolla olemme oppineet niitä näkemään. (Vilkkö-Riihelä 2001,303.)

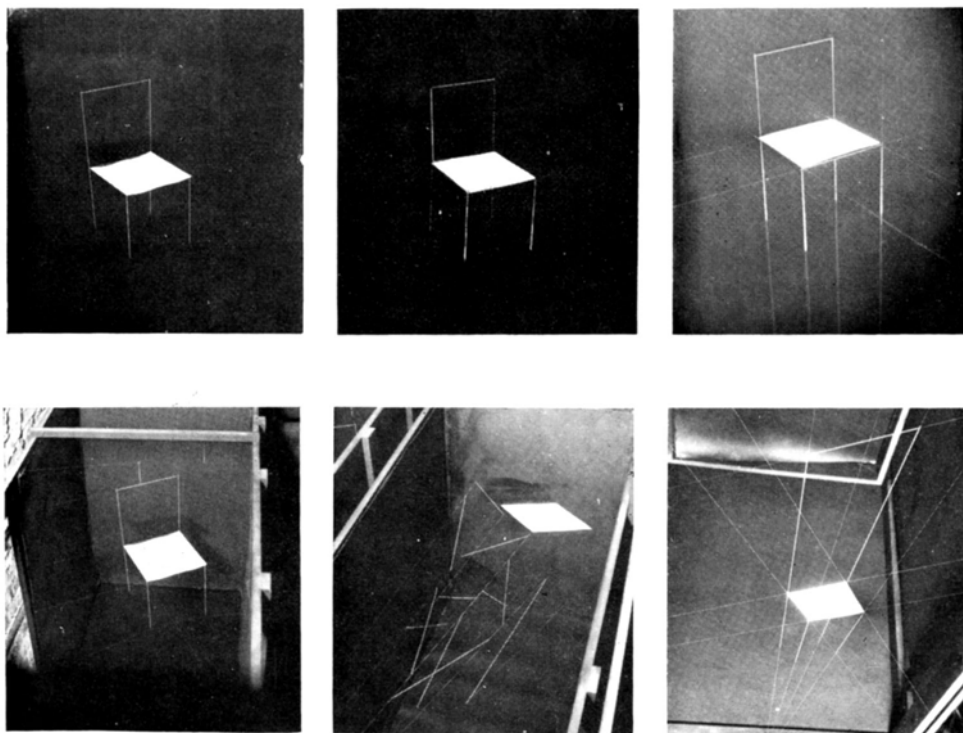
Mahdottoman näköinen kuva voi olla mahdollista rakentaa myös oikeistakin esineistä. Silloin kuva tulisi rakentaa tarkasti yhdellä silmällä katsoen tietystä pisteestä käsin. Pienikin liike voi muuttaa radikaalisti kuvan järjestystä, mikä selviää hyvin animaatioistamme. Monet asiat voivat tuntua oudoilta tai jopa mahdottomilta, jos näemme ne vain yhdestä näkökulmasta. Voimme alkaa pitää tätä yhtä näkökulmaa totuutena. Todellisuus voi näyttää mahdottomalta, vaikka voisimme tarkastella sitä monesta eri suunnasta. Asia ei ole aivan yksinkertainen.

Kun kolmiulotteista kohdetta halutaan kuvata realistisen näköisesti, on mahdotonta saada kohteesta sellaista kuvaa, joka näyttäisi kaiken. On aina valittava tietty kuvakulma, joka tarkoittaa, että kohdetta katsotaan yhdestä pisteestä. Jos kohde on liikuteltava, niin sitä voi liikuttaa tai sitten voimme itse liikkua ja etsiä sopivaa kuvakulmaa. Kuvat, oli kyseessä sitten valokuva, maalaus tai piirros, ovat litteitä ja

kaksiulotteisia. Kuitenkin jos katsomme kaksiulotteista representaatiota esittävästä kohteesta paperilla, ymmärrämme sen yleensä kolmiulotteisena (Vilkko-Riihelä 2001,303). Jos tähän tuttuun kohteeseen lisätään kontrastiksi, jotain mikä ei näytä mahdolliselta, ei kuva olekaan enää ihan itsestään selvä. Escher on käyttänyt tätä tapaa hyväkseen luodessaan tunnettuja mahdottomia kuviaan (muun muassa "*Belvedere*", "*Vesiputous*", "*Portaita ylös ja alas*"), joissa kaikissa on sama idea; ne näyttävät ensin ehjiltä, kompakteilta rakennelmilta, mutta sitten katsoja huomaakin niissä jotain outoa, jotain mikä näyttää järjenvastaiselta. Jos voisimme katsoa kuvattua kohdetta edes hiukan eri pisteestä, saisimme ehkä käsityksen siitä, mitä kuvassa oikeasti on, mutta Escher on taltioinut juuri tämän kuvakulman erittäin harkiten. Kuvissa harhautetaan katsojaa tavoilla jotka pohjautuvat tunnettuihin optisiin harhoihin, kuten Penrosen kolmioon ja Neckerin kuutioon; objekteihin jotka toimivat ainoastaan yhdestä pisteestä kuvattuina. Escherin rakentamat harhat eivät kuitenkaan läheskään aina ole itsestään selviä. Hän on tarkoituksellisesti rakentanut kuvansa niin, ettei katsoja aluksi huomaa kuvissa mitään outoa.

#### 4.2. kahdesta suunnasta - kaksi totuutta?

Adelbert Ames Jr. tutki illuusoiden kokemista tieteellisillä kokeilla. Yksi hänen kiinnostavia ja samalla onnistuneimpia testejiään oli koe (kuva1), jossa oli kolme eri koppia, joissa jokaisessa oli yhdelle silmälle tarkoitettu tirkistelyaukko, joiden kautta katsottiin kopeissa näkyvää esinettä. Joka kerralla eri reiästä katsottuna esine näytti tavalliselta tuoilta. Mutta kun kiersi seinän ja katsoi objekteja eri kulmasta, saattoi havaita, että vain yksi niistä muistutti enää tuolia. Oikealla oleva oli venytetty tunnistamattomaksi ja näytti tuoilta vain reiästä katsottuna. Keskellä oleva tuoli oli muuttunut vielä radikaalimmin. Se oli pirstaloitunut täysin siksakiksi, emmekä oikein voisi tunnistaa sitä miksikään olemassa olevaksi esineeksi. Tuolin istuimelta näyttänyt valkoinen neliökin on vain maalattu taustaan. Vasemmalla oleva esine näyttää yhä samalta tuoilta, katsoimme sitä mistä suunnasta tahansa. Huomaamme, että yksi kolmesta katsomistamme esineistä on tuoli, kaksi muuta ovat vain illuusioita. Kiinnostavaa on se, kuinka vahva illuusio onkaan. Se pitää meidät otteessaan, vaikka tempu on jo paljastettu. E. H Gombrichin mukaan kyse on siitä, ettemme yksinkertaisesti pysty kuvittelemaan näitä muita muotoja miksikään tunnistettavaksi esineeksi. Tunnistamme tuolin, mutta emme siksakkia, siksi näemme aina tuolin.



*Kuva 1. Amesin tirkistysreikä koe. Ylärivissä olevat tuolit on kuvattu reiän kautta. Alarivissä nähdään sama kohde eri näkökulmasta. (E.H Gombrich, 1960.211)*

Päätelmä jonka tirkistelyreikäkokeesta voi tehdä on, että minkä me näemme ei automaattisesti paljasta meille, mitä "siellä" oikeasti on. Sitä me voimme vain arvailla ja se perustuu vahvasti meidän omiin odotuksiimme. (E.H Gombrich, 1960.211.)

Hahmopsykologian mukaan havainnoissamme on aina mukana entinen tieto, oppiminen, muistikuvat, tunteet ja arvostuksemme kohteet. Meidän on vaikea osata odottaa näkemältämme jotain sellaista, mitä emme tunnista (Vilko- Riihelä 2001, 303). Amesin testi paljastaa piirteitä kuvanlukutaidostamme ja tavastamme järkeistää kuvia päässämme. Kumpikin tapa nähdä kuva on oikein. Kyse on vain kuvakulmasta, tottumuksistamme ja siitä kuinka ymmärrämme näkemäämme. (E.H Gombrich, 1960.211.)

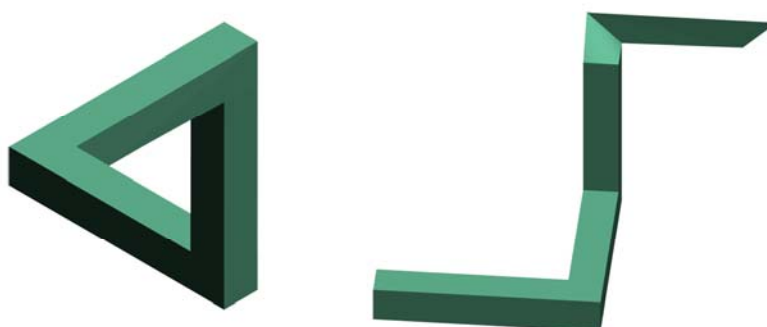
Uskoisin, että tekemämme animaatiot aiheuttavat katsojissa samanlaisen yllättyneen reaktion. Luulen myös ettei kukaan arvaisi, miltä kaikki mallintamamme kappaleet näyttäisivät eri näkökulmasta. On kuitenkin muistettava, että niihin on tarjolla useita erilaisia ratkaisuja, eikä niitä ole välttämättä koskaan tarkoitettukaan esitettäväksi näin. Voimme puhua joidenkin mallinnuksien kohdalla enemmänkin tulkinnoista.

#### 4.3 Penrosen kolmio – Tribar

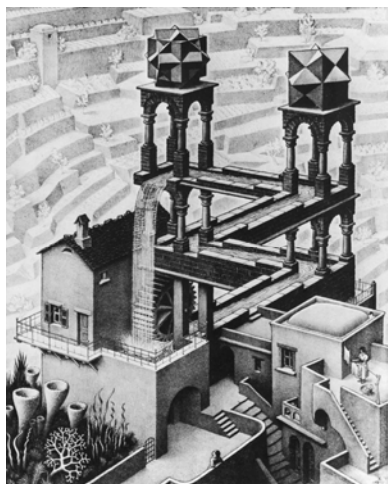
Penrosen kolmio on alun perin ruotsalaisen taiteilija Oscar Reutersvärdin vuonna 1934 keksimä muoto, kun hän piirsi yhdeksän kuutiota mahdottomassa tilayhteydessä (Kuva2). Vuonna 1958 sen yleisesti tunnetuksi tekemän matemaatikko Roger Penrosen mukaan tätä voi kutsua mahdottomaksi muodoksi puhtaimmillaan. Hän nimitti objektia myös tribariksi (kuva3). Penrosen kolmio esiintyy sekä piirroksena, että fyysisenä objektina jolloin se näyttää kiinteältä kolmiolta ainoastaan yhdestä tietystä kulmasta katsottuna. Tämän kolmion kulmien yhteenlaskettu summa on 260 astetta ja se on mahdoton, koska palkkien yhdistyminen on ristiriidassa niiden suuntautumisen kanssa. Jos piirretyn Penrosen kolmion sivuja aletaan seurata esimerkiksi viivalla, muodostuu siitä takaisin aloituspisteeseen päästessään kolmisilmukainen Möbiuksen nauha. M.C.Escher käytti penrosen kolmiota inspiraationaan esimerkiksi litografiassaan *”Vesiputous”* (kuva4), jossa se toistuu kolmesti. Penrosen kolmiolla voidaan siis viitata, sekä kaksiulotteiseen piirrokseen, että rakennelmaan, joka on tehty sen pohjalta. (Ernst 1991, 14-15).



kuva 2. Mallinnettu Oscar Reutersvärdin 9 kuution kuvio kahdesta eri suunnasta katsottuna.



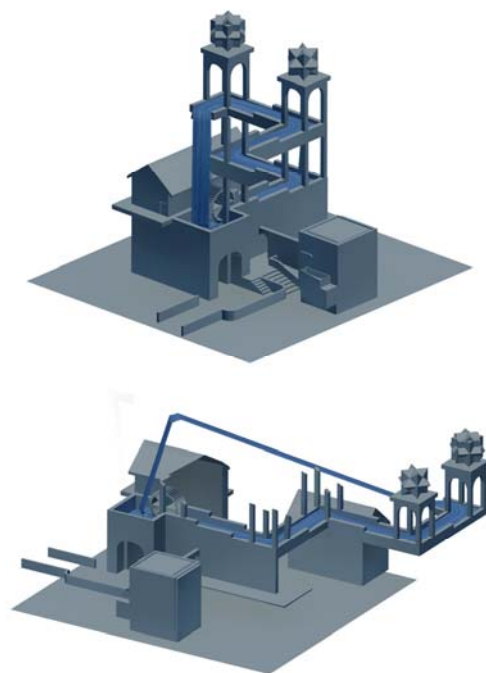
kuva 3. Mallinnettu Penrosen kolmio kahdesta suunnasta katsottuna.



*kuva 4. (Escher 2000, 114)*

(Kuva4) Escherin litografia "Vesiputous" (1961). perustuu kolmeen mahdottomaan kolmen palkin rakennelmaan. Vesi kiertää loputtomasti tässä mahdottomassa rakennelmassa. Tornien päällä olevat polyhedrat Escher sijoitti kuvaan koristeeksi vain koska piti niistä niin paljon(Escher1986,79.)

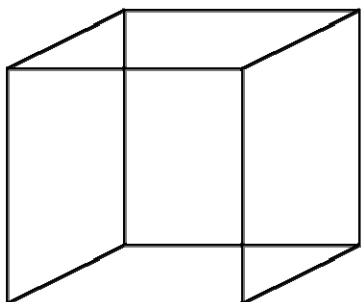
Mallinnettu vesiputous(kuva5). Kuvan tornit ovat todellisuudessa samankorkuiset, vaikka vasemman puoleinen torni näyttääkin olevan kerrosta korkeammalla. Alemmassa kuvassa voi nähdä kuinka vesivana nousee ylöspäin vesiputouksen kohdalla, jotta se näyttäisi valuvan tornista alas. Animaatiot on renderöity ortografisella kameralla.



*kuva 5. Mallinnettu vesiputous kahdesta eri kuvakulmasta.*

#### 4.4 Neckerin kuutio ja mahdoton kuutio

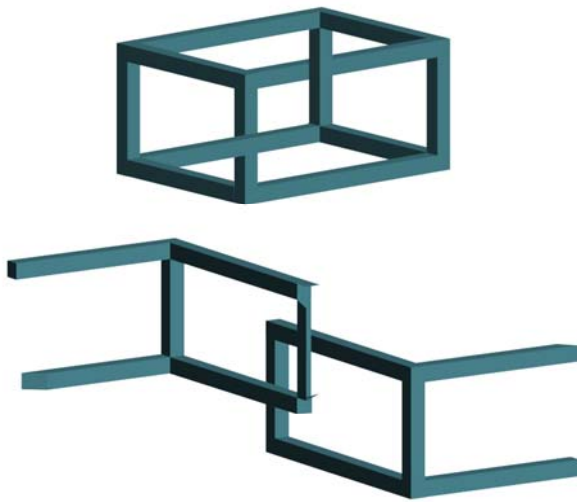
Sveitsiläinen kristallografi Louis Albert Necker keksi Neckerin kuution (kuva6)vuonna 1932. Kaksitoista viivainen piirustus näyttää katsojasta kolmiulotteiselta kuutiolta. Kuvassa voi nähdä kolmiulotteisen kuution kahdella eri tavalla, koska kyseessä on kaksiselitteinen, niin sanottu dualistinen kuvio. Silmä muodostaa tästä vuoronperään kaksi erilaista kolmiulotteista kuviota. Kuvaa käytetään yleisesti esimerkiksi tieto-opin ja hahmopsykologian tutkimuksissa tutkittaessa ihmisen kykyä nähdä sama todellisuus eri tavoin. (wikipedia, neckerin kuutio)



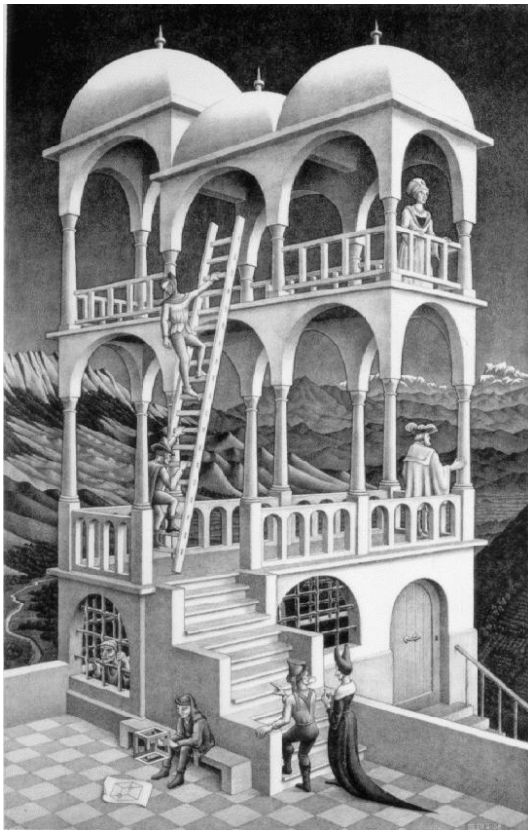
*kuva 6. Neckerin kuution voi nähdä kahdella tavalla.*

Mahdoton kuutio (Kuva7) on kolmiulotteinen versio Neckerin kuutiosta. (wikipedia, neckerin kuutio) Myös tässä kuboidiksi kutsutussa kuutiossa sen epäloogisen näköiset liitokset ja kielletyt päällekkäisyydet esitetään yleensä samasta kuvakulmasta kuin Neckerin kuutio, mikä tekee siitä mahdottoman näköisen kiinteän kuution, vaikka se ei sitä olekaan. Mahdottoman kuution voi koota ainakin kahdella erilaisella tavalla, joista ensimmäinen tapa koostuu kahdesta erillisestä osasta ja toinen ristiin menevistä palkeista, kuten mallinnetussa "Belvedere" rakennelmassa (kuva9).



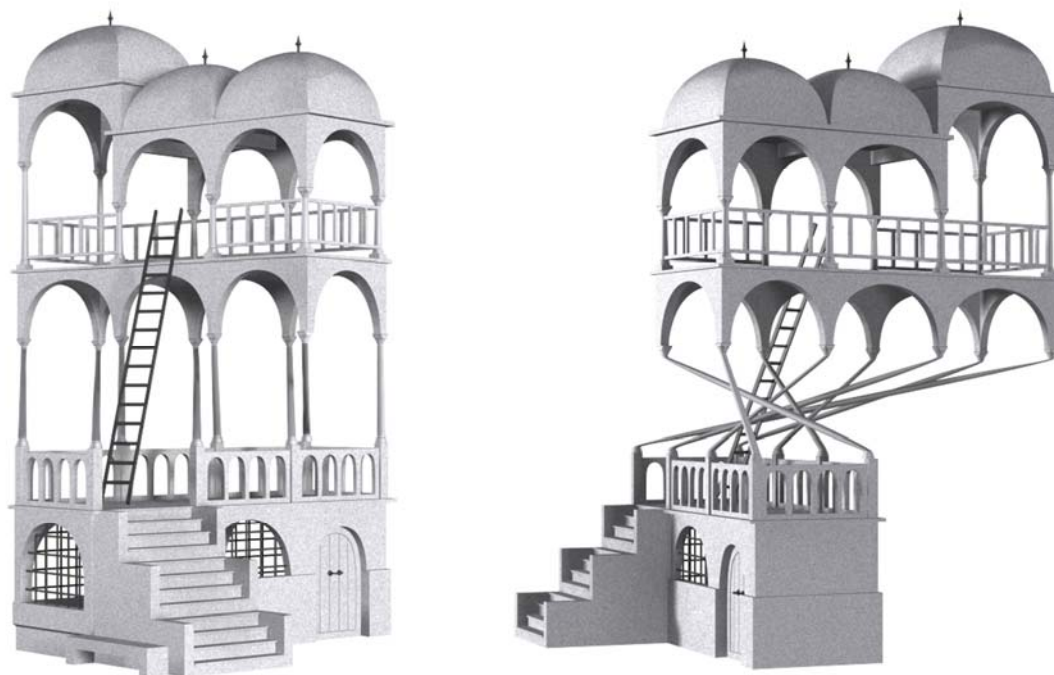


*Kuva 7. Mahdoton kuutio mallinnettuna tri. Cochranin mallin mukaan nimeltään "Hullu rimalaatikko". Malli koostuu kahdesta erillisestä osasta, jotka näyttävät kuutiolta ainoastaan tietystä pisteestä katsottuna.*



*Kuva 8, Belvedere –Escher 1958. (Escher 2000, 142)*

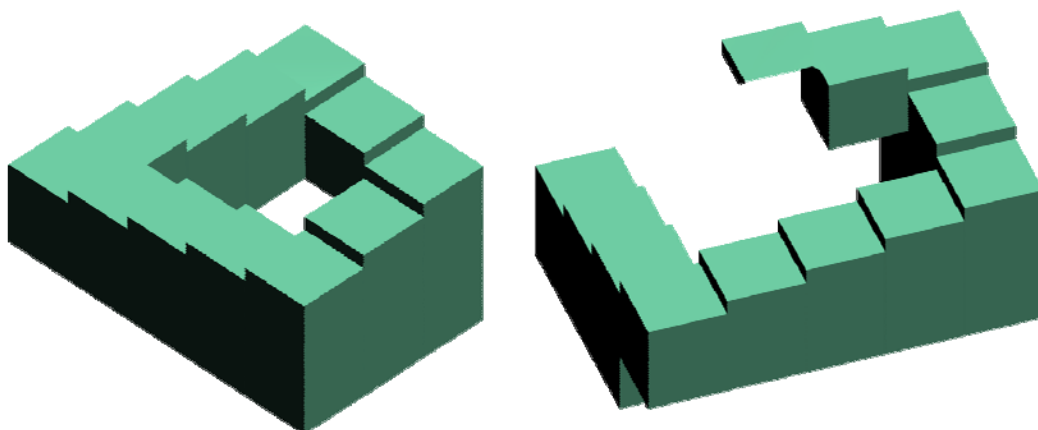
Belvedere (kuva8) teoksen yksi pääaihe on mahdoton kuutio, joka esiintyy portaiden alla olevan mietteliään miehen kädessä sekä itse paviljongin rakenteessa. Rakennelman etualan pylväät näyttävät tukevan rakennelman takaosaa. Tikapuut korostavat mahdotonta vaikutelmaa. Ainoastaan reunimmaiseta pylväät näyttävät normaaleilta.



*Kuva 9, Suvi Kansikkaan 3-mallinnus. Mahdoton rakennelma voisi ehkä sittenkin olla mahdollinen rakentaa.*

#### 4. 5 Portaita ylös ja alas - mahdottomat portaat

Mahdottomat portaat ovat isän Lionel ja pojan Roger Penrosen keksintö vuonna 1958. Portaita katsoessa voi päättää seuraako niitä päättymättömästi alas tai ylöspäin. Ongelmaksi muodostuu vain se, että ne eivät johda minnekään. Nämä portaavat on mahdollista rakentaa myös oikeasti (kuva10), mutta ne eivät muodosta yhteneväistä suljettua portaikkoa, vaan näyttävät siltä ainoastaan yhdestä tietystä kulmasta katsottuna.



*Kuva 10. Mahdottomat portaavat mallinnettuna. Vasen kuva näyttää kiinteältä portaikolta. Harha paljastuu toisesta kuvakulmasta.*

Escher teki oma tulkinnan mahdottomista portaista teoksessaan "portaita ylös ja alas"(Kuva11)



Kuva 11. Escher "Portaita ylös ja alas" 1960, litografia.(Escher 2000, 146)

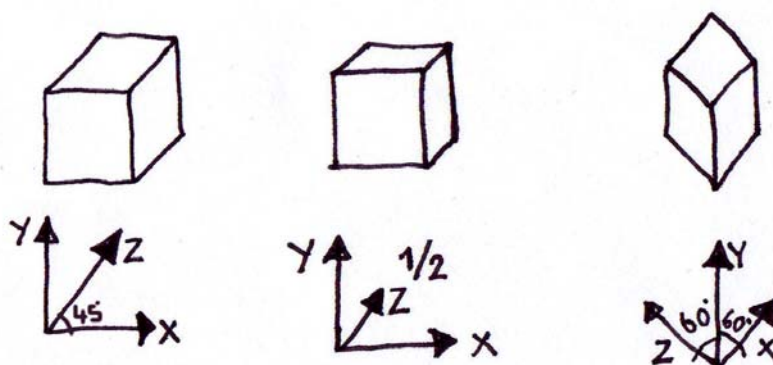
## 5. KOLMIULOTTEISEN TILAN KUVAAMINEN TASOLLA

Tasolla esitetyssä kuvassa on kaksi ulottuvuutta; korkeus ja leveys. Kolmas ulottuvuus eli syvyys on illuusio.(wikipedia.) Ennen valokuvausta maalaustaide oli yksi harvoista tavoista jäljentää todellisuutta. Kuvataiteilijalle tuotti yleensä ongelmia tilavaikutelman kuvaaminen litteälle tasolle, tavalla kuten silmä sen näkee. Keskiajalla syvyyttä kuvattiin esimerkiksi sijoittamalla objekteja vain toistensa eteen. Ennen kuin perspektiivioppi keksittiin renessanssin aikana, oli yleinen tapa käyttää myös niin sanottua arvoperspektiiviä, missä keskeisimmät tai arvokkaimmat henkilöt esitettiin kuvassa suurempina. Nykyään kolmiulotteisuutta esitetään yleensä perspektiivillä tai aksonometrisellä projektiolla (Smith 19956)

## 5.1 Aksonometrinen projektio

Aksonometrisessä projektiossa kuvan ortonogaalit eli kuvatason kanssa syvyysuuntaiset viivat kulkevat viistosti yhdensuuntaisina, eivätkä itse viivat tai niiden kuvan ulkopuolelle kuviteltavat jatkeet kohtaa samassa pisteessä. Myös suorien väliset suhteet säilyvät. Viivojen kaltevuus aste riippuu aksonometrian tyypistä.

Aksonometriassa kohde kuvataan yleensä yläviistosta niin, että kohteesta näkee kolme sivua. Aksonometrinen projektio eroaa perspektiivikuvasta sillä, ettei siinä ole pakopisteitä, eikä perspektiivi lyhennyksiä, joka pienentää kohteen kokoa etäisyyden mukaan. Aksonometrinen projektio (kuva12) voidaan jakaa kavaljeeriperspektiiviin ja sotilasperspektiiviin. Ortonogaaliprojektioita käytetään erityisesti ja kaava- ja havainnekuviissa, koska se on yksiselitteinen ja siitä on helppo selvittää kohteen mittasuhteet toisin kuin perspektiivi kuvasta. (Smith 1995, 10)

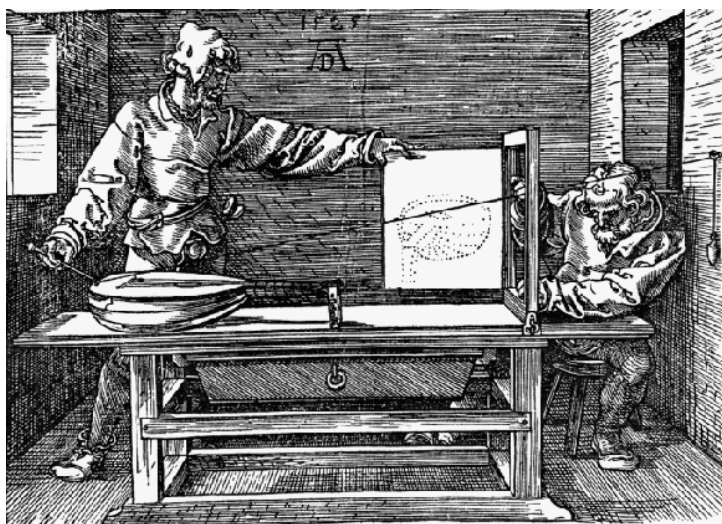


Kuva 12. Yleisimpiä aksonometrisia projektioita. Kuvassa vasemmalta katsoen: aksonometrinen projektio, kavaljeeri- ja sotilasperspektiivi. Kavaljeeri perspektiivissä kuvan ortonogaalit esitetään puolet todellista mitta lyhyempinä.

## 5.2 Syvyyden tavoittelua tasolla perspektiivin keinoin

Jotta kolmiulotteinen näkymä saadaan kuvattua realistisesti paperille tai kankaalle käytetään perspektiivioppia. Keskeisperspektiivijärjestelmää käytti varhaisrenessanssin aikaan arkkitehti Filippo Brunelleschi (1377–1446). Hän kehitti tätä viivaperspektiivijärjestelmää tekemällä tarkkoja havaintoja ja mittauksia. Toinen perspektiivin luoja pidetty Leon Battista Alberti esitti ensimmäisen kirjallisen

perspektiivi järjestelmän, joka perustui perspektiiviruudukon käyttöön. Siinä taiteilija ruudutti kohteen pohjakuvan ja siirsivät kohteen ääriviivat vastaavanlaiseen perspektiivisesti lyhennettyyn ruudukkoon. Korkeudet saatiin käyttämällä usein pystysuuntaista ruudukkoa vaakatasoisen ruudukon kanssa rinnakkain. Perspektiivin geometrisen periaatteen havainnollisti ensimmäisenä kuvataiteilija Albrecht Durer (kuva13) vuonna (1471–1528). Siinä taiteilijalla oli edessään lasilevy, johon hän päättään liikuttamatta jäljensi piste pisteeltä kaksiulotteisesti kolmiulotteisen havaintonsa maalauksen kohteesta, joka oli lasilevyn takana. (Smith 1995, 10).



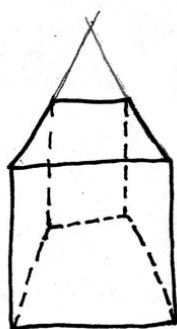
*Kuva 13. Durerin puupiirros (n.1527), jossa hän havainnollistaa perspektiivi menetelmää. (www.site-andoh.com)*

Perspektiivin käyttäminen maalauksissa kehittyi paljon renessanssin aikaan, jolloin italialaiset ja ranskalaiset taidemaalarit halusivat jäljentää todellisuutta mahdollisimman realistisesti. Heidän pyrkimyksenä oli orjallisesti jäljentää kohde niin tarkasti yhdestä pisteestä, että näkisimme kuvassa saman, kuin katsoessamme kuvassa esitettyä kohdetta. Vaikuttavimpina pyrkimyksiä kolmiulotteisen maailman suggerointiin löytyy Keski- etelä Euroopan barokkikirkkojen kattomaalauksista, joissa maalaus, kolmiulotteinen kuvanveisto ja arkkitehtuuri sulautuvat melkein huomaamattomasti yhteen. Perspektiivin tuoma realistinen murros hallitsi maalaustaidetta valokuvauksen keksimiseen asti. (Ijäs, 2009)

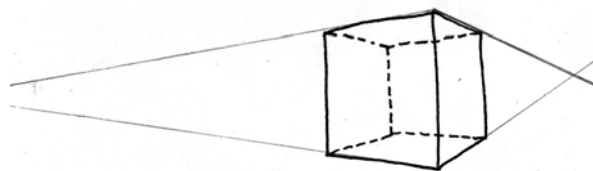
Perspektiivi perustuu siihen, miten katsojan yksi silmä havaitsee kohteen. Sitä käytettäessä kaksiulotteiselle pinnalle annetaan kolmas ulottuvuus, joka luo kuvaan illuusion syvyydestä tai etäisyydestä. Perspektiivin kuvaamisessa käytetään yhtä tai useampaa horisontista löytyvää kuvitteellista pakopistettä, mihin katsojasta pois päin kulkevat linjat yhtyvät. Pakopisteet voivat löytyä myös kuva-alan ulkopuolelta.

### 5.3 Yhden pisteen perspektiivi

Keskeisperspektiivi eli yhden pisteen perspektiivi (kuva14) on yksinkertaisin viivaperspektiivi konstruktio ja perustuu ajatukseen jossa kauempana olevat kohteet näyttävät pienemmiltä ja lähempänä olevat isommilta ja että kaikki kuvan ortonogaalit näyttävät yhtyvän horisonttiviivalla sijaitsevassa pakopisteessä eli pisteessä jossa katsojasta poispäin menevät viivat yhtyvät. Perspektiivi on illuusio, joka syntyy tietystä paikasta yhdellä silmällä katsottuna (Ijäs 2009). Tyypillisenä esimerkkinä yhden pakopisteen perspektiivistä on rautatiekiskot, jotka näyttävät yhdistyvän horisonttiin katsottaessa. Filippo Brunelleschi teki ensimmäiset keskeisperspektiiviä käyttäneet teokset vuonna 1425. (Smith 1995, 71).

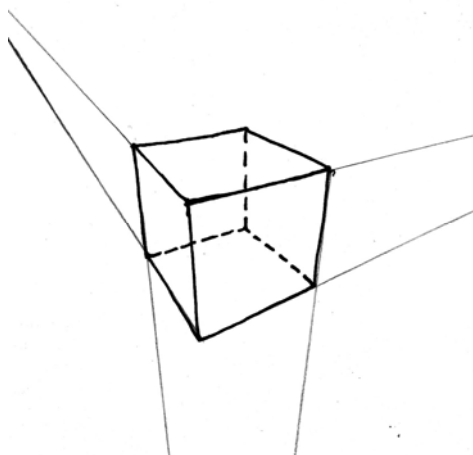


*Kuva 14. Yhden pakopisteen perspektiivi.*



*Kuva 15. Kahden pakopisteen perspektiivi.*

Kahden pakopisteen perspektiiviä käytetään kun kohde on kulmittain suhteessa katsojaan. Kahden pakopisteen perspektiiviprojektiossa (Kuva15) kuvan pystysärmät ovat kuvatason mukaiset, mutta kuvan ortonogaalit yhdistyvät horisontissa kahteen eri pakopisteeseen. (Smith 1995, 70).



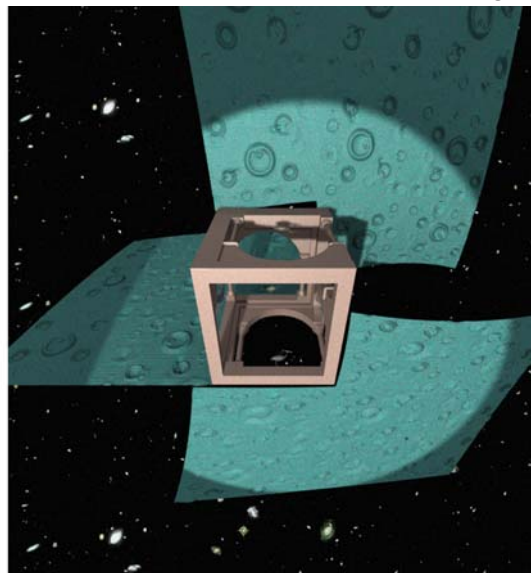
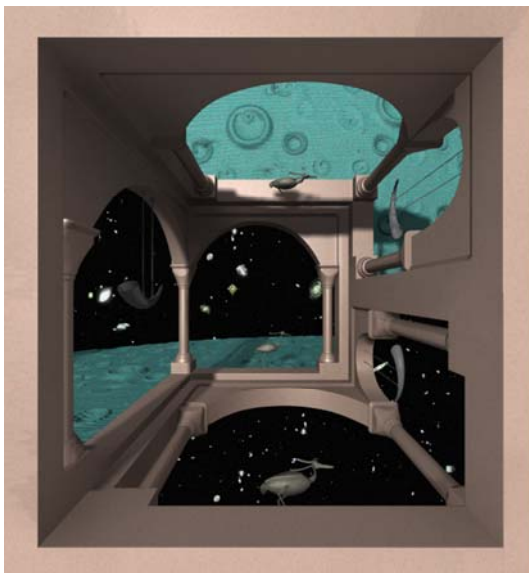
*Kuva 16. Kolmen pakopisteen perspektiivi, jossa pakopisteet sijaitsevat kuvan ulkopuolella. Kolme pakopistettä käytetään kun kohdetta halutaan kuvata yläviistosta.*

Kolmen pakopisteen perspektiiviprojektiossa (kuva16) kuvataso on kalteva katsojaan nähden ja näin kuvan korkeus-, pituus ja syvyysakselin mukaiset linjat yhdistyvät kolmeen eri pakopisteeseen. (Smith 1995, 70).

*"Toinen Maailma"* (kuvat17,18) on nelivärinen puupiirros, jossa Escher on leikitellyt kuvan ainoalla perspektiivin pakopisteellä ja antanut sille kolminkertaisen funktion. Samassa pakopisteessä on yhdistetty nadiiri, horisontti ja zeniitti. Bruno Ernstin (1978,46) mukaan Escher on onnistunut tässä luomalla rakennukseen kolme paria samanlaisia ikkunoita, joista jokaiselle pakopiste merkitsee eri asiaa. Painovoima vaihtelee, mutta rakennelma muodostaa kuitenkin ehjän kokonaisuuden. (Escher 1986,73).



Kuva 17. Escher *"Toinen Maailma"* (1947) puukaiverrus. (Escher 1986, 135)



*Kuva 18. Toinen maailma 2 mallinnettuna. Kuun pinnat näkyvät turkooseina tasoina. Tämän animaation tavoitteena on näyttää katsojalle rakennelma kulissien takaa.*

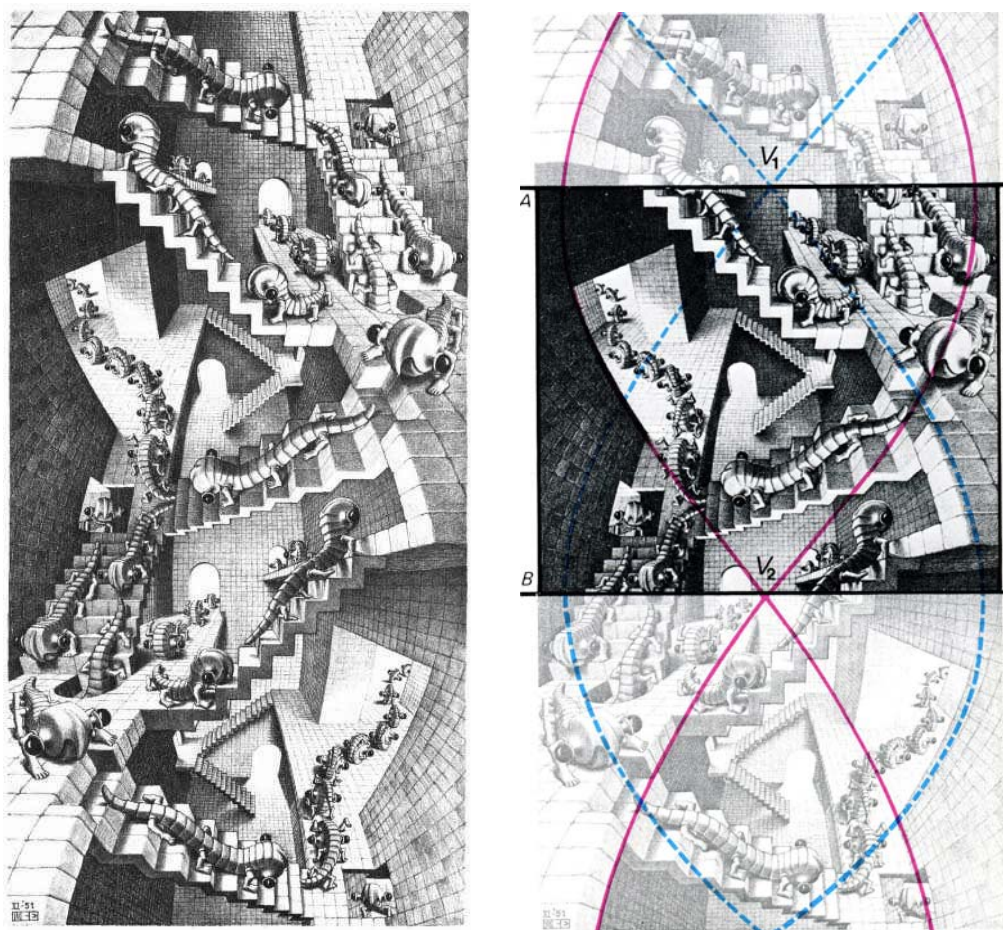
#### 5.4 Kaarevat viivat ja perspektiivi

Leonardo da Vinci kehitti perspektiivi oppia kiinnittäen ensimmäisenä huomioita viivaperspektiivin säännöttömyyksiin ja paneutuen siihen, mitä perspektiivi on suhteessa meidän tapaamme kokea ja nähdä maailma. Hän havaitsi, että perspektiivi linjat eivät ole suorita vaan kaarevia. Tämä perustuu Erwin Panofskyn mukaan siihen, että ihminen ja silmät ovat jatkuvassa liikkeessä ja näin näkökentän kaikki linjat ovat aina hieman kaartuvia. Myös silmän verkkokalvo on hiukan pyöreä (Ijäs 2009.)

Escherin ratkaisua kuvata tilan etäisyyksiä kaarevilla viivoilla voi selittää tavalla, jolla hän katsoi kohdettaan. Hän ei tyytynyt aina pitämään päätään paikoillaan ja kuvaamaan kohdetta vain yhdestä tietystä katsomispisteestä, mihin moni hänen teoksistaan perustuu, vaan hän käänteli päätään, jolloin myös kuvan suhteet muuttuivat. Esimerkiksi keskeisperspektiivin perustana toimiva yksi kiinteä katsomispiste ja suorien viivojen katoaminen pakopisteisiin ei oikein sovi yleiseen havainnointiin, jossa pää ja silmä liikkuvat ja näin myös katsomispiste vaihtuu koko ajan. Keskeisperspektiivin mukaan maailman havainnointi olisi kuin avaimen reiän läpi tirkistelyä. Tämä aiheuttaa sen, että viivat näyttävät kaareutuvan. Viivojen kaareutumista voi havainnollistaa vaikka katsomalla ulos pilvenpiirtäjän ikkunasta vastakkaisella puolella katua olevaa toista pilvenpiirtäjää ensin ylöspäin sitten suoraan eteenpäin ja lopuksi alaspäin. Kohteena oleva rakennus näyttää kapenevan ylöspäin katsottaessa ylhäällä zeniitissä olevaan pakopisteeseen ja alaspäin katsottaessa taas



alaspäin nadiiriin. Kun nämä kaksi katseen ääripäätä yhdistetään kuvaksi, näyttää katsomisen kohteena oleva rakennus keskeltä pullistuneelta. Tällöin kuvassa sekä nadiiri, että zenitti toimii pakopisteenä. Tätä katseen liikettä on helppo havainnoida videokameralla, mutta kuvataiteilijan on, joko valittava yksi pysähtynyt hetki tai tehtävä kompromissi, jossa kuvaa ei esitetä vain yhdestä katsomispisteestä, vaan monesta samanaikaisesti. Escher esitti nämä eri katsomiskulmat yhdessä kuvassa, jolloin ratkaisuna oli käyttää kaarevia linjoja katseen ääripäiden välillä. (Escher 1989, 132–134).

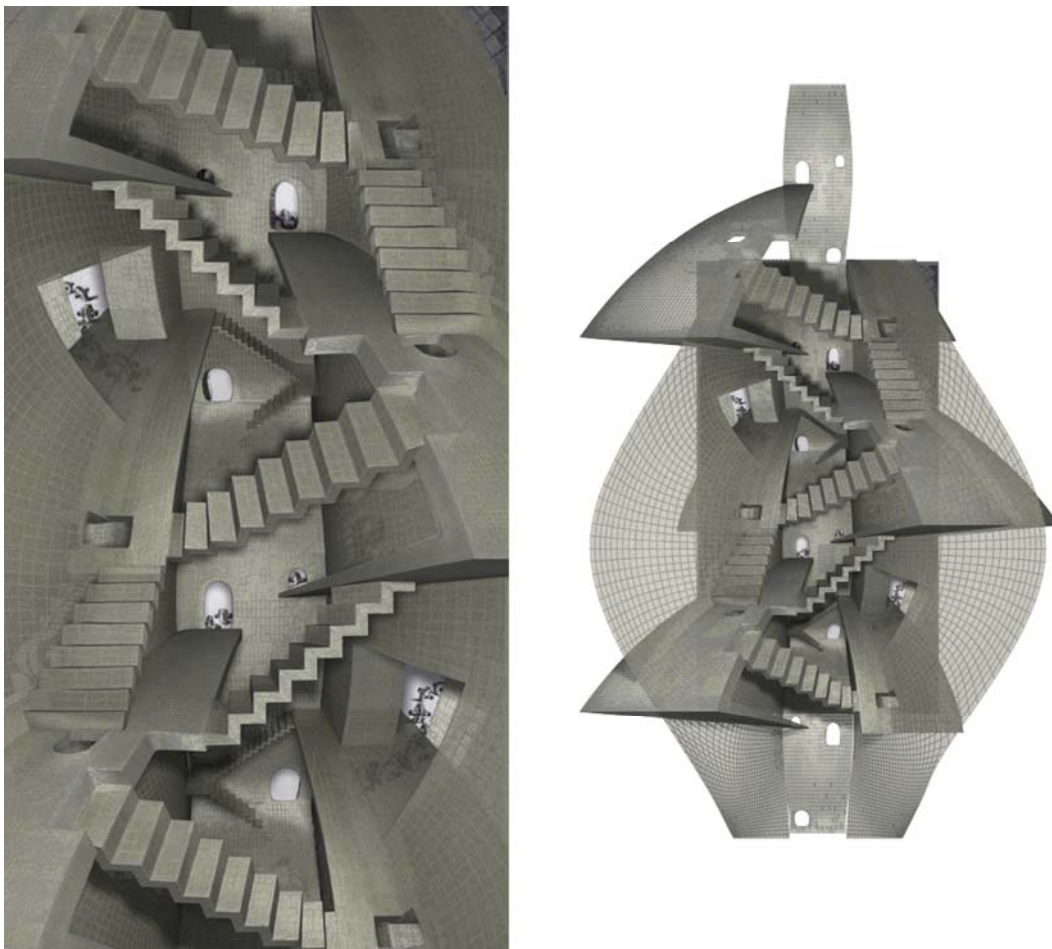


Kuva 19. Escher "portaikko" (1951) litografia. ((Ernst, 1978, 57).

Kuva 20. oik. Havainne kuva Portaikosta. Sininen ja punainen viiva ovat perspektiivi viivoja. Kuvassa A:n ja B:n välille sisältyy kuvan kaikki oleelliset elementit. V1 ja V2 ovat pakopisteitä. (Escherin taikapeili, 1987)

Escherin litografia "Portaikko" (kuva19) perustuu perspektiivi piirustukseen, joka on projisoitu sylinterin pinnalle. Avattuna sylinteri aiheuttaa perspektiiviviivojen kaareutumisen ja ristikkäin menemisen (kuva20). Melkein koko yläpuoli kuvassa on liukuheijastus alapuolesta, jonka takia kuvaa voisi jatkaa loputtomasti ylös tai alaspäin.

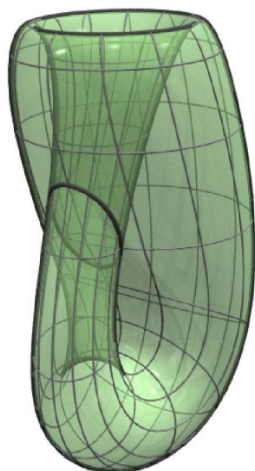
Kuvassa on kaksi pakopistettä. Muureilla kuvassa on erilainen merkitys jokaiselle portaissa luikertelevalle eläimelle. Joillekin ne ovat seiniä, kun taas toisille lattiaa. (Ernst, 1978, 57). Alla (kuva21) 3d-mallinnus portaikosta.



*Kuva 21. Suvi Kansikkaan mallinnus Escherin portaikosta.*

## 6. MINIMAALIPINNAT

Minimaalipinta voidaan käsittää kaikkein ekonomisimmalla tavalla yhdistää renkaita tai linjoja kolmiulotteisessa avaruudessa. Tämä tarkoittaa että annetuilla raja-arvoilla minimaalipintaa ei voi muuttaa lisäämättä pinnan kokoa. Kaikkein selkeimpänä minimaalipintana voi pitää saippuakuplaa. Fyysisen version minimaalipinnasta voi tehdä helposti kastamalla rautalangasta tehdyn tai vaikka samppanjapullon korkista otetun rautalankakehikon saippuaveteen. Siitä syntyvä saippuapinta on näiden rautalankakehysten rajaama minimaalipinta. Minimaalipinnat voidaan lukea neljänteen ulottuvuuteen kuuluvaksi ryhmäksi. Neljäs ulottuvuus on kuin kolmas ulottuvuus toiselle. (Miqel 2009)

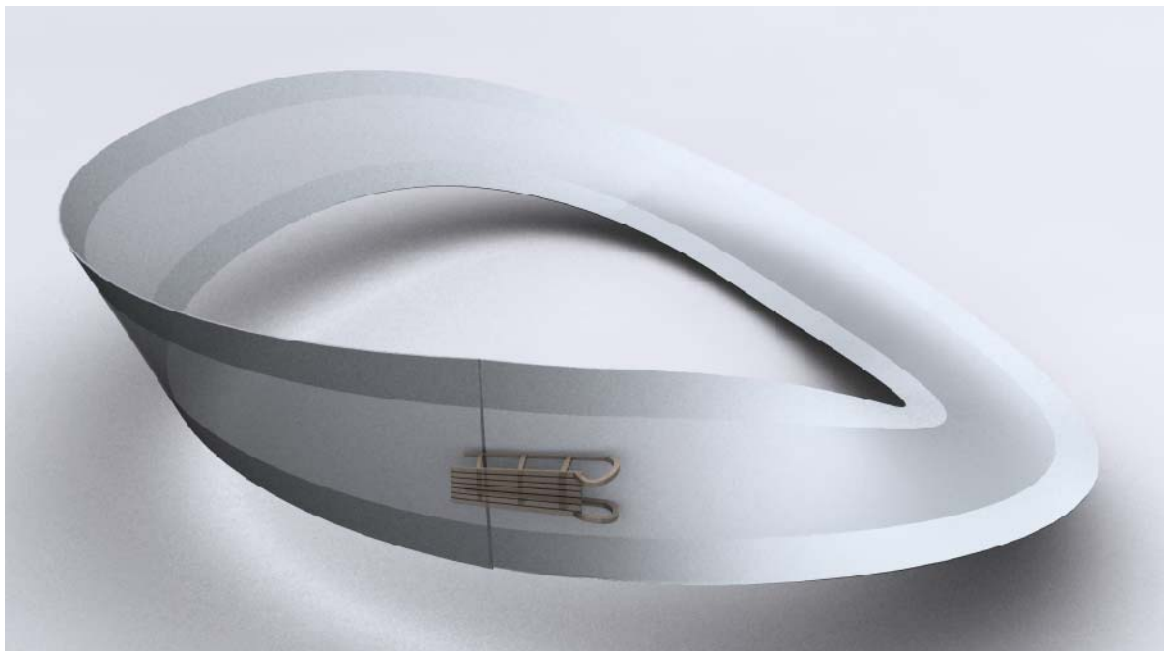


*Kuva 22. Malli Kleinin pullosta (www.lanacs.ac.uk)*

Möbiuksen nauha on sulkeutunut puolikierteinen nauha, jossa on vain yksi reuna ja yksi pinta. Se on yksinkertaisin versio tämän tyyppisestä esineestä. Esimerkiksi puoli kierrosta kiertynyt kiinni oleva vyö muodostaa möbiuksen nauhan. Vyön reunaa sormella seuraamalla huomaa kahden kierroksen jälkeen palanneensa samaan kohtaan kuin mistä aloitti, koskettaen kuitenkin kaikkea mikä vyössä on reunaa. Nimensä Möbiuksen nauha on saanut Augustus Ferninand Möbiuksen (1790-1868) mukaan, joka esitti nauhalla konstruktoiden topologisia erikoisuuksia. Nauhalle on erikoista se, että jos sen halkaisee pituus suunnassa kahtia, pysyy se silti koossa kokonaisena kappaleena, eikä hajoa kahdeksi renkaaksi, vaan ainoastaan nauhan leveys puolittuu ja pituus kaksinkertaistuu. Erikoista nauhassa on myös se, että sen pinta ei ole niin sanotusti suunnistuva, eli että sillä ei ole sisä- tai ulkopuolta. Möbiuksen nauhassa pinta, joka vaikuttaa olevan sisäpinta jatkuu keskeytymättömästi ulkopintana ilman erillistä rajaa (Ernst 1978,99.) Neliulotteinen versio Möbiuksen nauhasta Kleinin pullo (kuva22). Neliulotteista Kleinin pulloa ei oikeasti voi olla olemassa meidän kolmiulotteisessa maailmassamme, mutta sen projektio voidaan rakentaa. (wikipedia – klein bottle)



*Kuva 22. Escher "Möbius 2" 1963 Puukaiverrus. Escher teki monia töitä, jossa käytti teemaana päättymätöntä Möbiuksen nauhaa. (Escher 2000, 185)*



*Kuva 23. Mallinnus Möbiuksen nauhasta. Kelkka pyörii ympäri nauhaa ja ohittaa aina kahden kierroksen välein saman kohdan.*

## 8. POHDINTAA

Kuvat kertovat paljon. Ne voivat olla meille kuin todellisuus tai, jotain jonka emme usko olevan edes mahdollista. Todellisuuden ja epätodellisen raja on häilyvä. Voiko maalauksen luoma illuusio todellisuudesta kuitenkin olla yhtä aito, kuin kokemamme todellisuus? Olemme ehkä hukkuneet jo kuvien tulvaan ja on ehkäpä naiiviakin olettaa maalaukselta, että se esittäisi juuri sitä, miten me jonkin asian näemme. Kuva voi olla paljon enemmän, kuin voisimme vain nähdä. Se voi olla myös jotain mitä koemme. Näkemisen ja laajemmin taiteen kautta saadut tuntemukset voivat olla ennen kokemattomia, hyvin abstrakteja ja vaikeita selittää. Järjellisen ja tunteellisen tulkinnan raja on hämärä. Mahdottomat geometriset kuvat pysyvät sellaisina, vaikka taikatemppu olisikin jo paljastettu. Tutkittuani mahdottomien kuvien taustoja tiedostan kuitenkin katsovani niitä eri tavalla. Uskon myös, että olemme saattaneet rikkoa myytin joidenkin objektien mahdottomuudesta, mallintamalla niistä kolmiulotteiset versiot.

Tekemämme multimediaesitys on päässyt hyvin esille. Näyttely Amos Andersonin taidemuseossa on osoittautunut erittäin suosituksi ja kerännyt paljon kävijöitä perinteisten taidemuseo vieraiden ulkopuolelta, kuten lapsia ja matematiikasta sekä tieteistä kiinnostuneita. Taidemuseon johtajan Kai Kartion mukaan myös tekemämme animaatiot ovat olleet hyvin suosittuja kävijöiden keskuudessa. Olen itse saanut seurata vierestä kuinka lapset ja vanhukset ovat osanneet käyttää valikkoa ja pyöritelleet animaatioitamme innostuneesti. Luulenkin, että olemme onnistuneet tavoitteissamme toteuttamaan samalla havainnollistavan, kiinnostavan ja käyttäjäystävällisen esityksen. Tekemämme animaatiot visualisoivat tietyn ajatuspolun, joka johdattaa katsojan näkemään näiden epätodellisten ilmiöiden taakse.

## LÄHTEET

## Kirjat

Escher, M.C. 1989, Escher on Escher Exploring the Infinte ,Harry N Abrams,

INC, New York

The Fourth Dimension: A Guided Tour of the Higher Universes, Tekijät Rudy von Bitter Rucker,  
David Povilaitis

Ernst, Bruno M. C. Escherin taikapeili, 1978, Taco, West Germany

Ernst Bruno, Seikkailu epätodellisten kuvioiden maailmassa, 1991, Taschen, Amsterdam

Smith Ray, Perspektiivin perusteet, 1995, Dorling Kindersley Limited, Lontoo

Vilkko-Riihelä Anneli, Psykyke Psykologian käsikirja, 2001, WSOY, Porvoo

Amos Andersonin taidemuseon "Mahdottomia maailmoja" -näyttelyn tiedote

Escher, M.C. The Magic of M.C. Escher, 2000, Harry N Brahms, Germany

## verkkosivut (lähteet tarkastettu 3.6.2010)

<[http://www.miqel.com/fractals\\_math\\_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html](http://www.miqel.com/fractals_math_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html)>

<[http://www.lancs.ac.uk/depts/spc/ugAdmissions/images/klein\\_bottle.jpg](http://www.lancs.ac.uk/depts/spc/ugAdmissions/images/klein_bottle.jpg)>

<[http://en.wikipedia.org/wiki/Perspective\\_\(graphical\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_(graphical))>

<[http://www.rakennustaiteenseura.fi/taiteentutkija/2004-3/3\\_hyvonen/index.html](http://www.rakennustaiteenseura.fi/taiteentutkija/2004-3/3_hyvonen/index.html)>

<[http://en.wikipedia.org/wiki/Oscar\\_Reutersv%C3%A4rd](http://en.wikipedia.org/wiki/Oscar_Reutersv%C3%A4rd)" \o "Oscar Reutersvärd>

<[http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose\\_triangle](http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_triangle)>

<[http://www.mikkoijas.com/Mikko\\_Ijas/Blog/Entries/2009/10/22\\_Picasson\\_mielta\\_kiihottavat\\_kuvat.html](http://www.mikkoijas.com/Mikko_Ijas/Blog/Entries/2009/10/22_Picasson_mielta_kiihottavat_kuvat.html)>

<[http://www.miqel.com/fractals\\_math\\_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html](http://www.miqel.com/fractals_math_patterns/visual-math-minimal-surfaces.html)>

<[http://www.lancs.ac.uk/depts/spc/ugAdmissions/images/klein\\_bottle.jpg](http://www.lancs.ac.uk/depts/spc/ugAdmissions/images/klein_bottle.jpg)>

<<http://www.site-andoh.com/DurerPerspective1.gif>>

## Muut lähteet

Amos Andersonin taidemuseon "Mahdottomia maailmoja" -näyttelyn tiedote

## LIITTEET

cd-levy