



Title	Realization of biquadratic impedances with at most four elements
Author(s)	Wang, K; Chen, MZ
Citation	The 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), Taiyuan, China, 23-25 May 2012. In The 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC) Proceedings, 2012, p. 2888-2893
Issued Date	2012
URL	http://hdl.handle.net/10722/160287
Rights	Chinese Control and Decision Conference Proceedings. Copyright © I E E E.

双二次阻抗函数的低复杂度实现问题

王镛¹, 陈志强^{1,2}

1. 南京理工大学自动化学院, 南京

2. 香港大学机械工程系, 香港

E-mail: mzcqchen@hku.hk

摘要: 考虑双二次函数用最多四个元件来实现的问题. 首先根据网络的拓扑性质得到能用最多三个元件来实现的充分必要条件. 再结合一些必要条件找出可以覆盖其它情形的网络, 并将这些网络归纳至若干四分域中. 最后, 通过研究每个四分域中一个网络的实现条件, 推出可用元件数不多于四个的网络来实现的充分必要条件.

关键词: 惯容, 无源网络综合, 双二次阻抗函数, 优化

Realization of biquadratic impedances with at most four elements

Kai Wang¹ and Michael Z. Q. Chen^{1,2}

1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing

2. Department of Mechanical Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong

E-mail: mzcqchen@hku.hk

Abstract: This paper considers the realizability problem of biquadratic impedances with at most four elements. To solve the problem, the necessary and sufficient realizability condition for no more than three elements is obtained by some topological properties derived previously. Furthermore, the constraints on the possible realizations are used to find out the networks which can cover all the cases, and they are classified as several quartets. Finally, investigating one of the networks in each quartet yields the necessary and sufficient condition for a network to be realized with at most four elements.

Key Words: Inerter, Passive Network Synthesis, Biquadratic Impedance, Optimization

1 引言(Introduction)

几年前, 文 [7, 23] 提出了名为惯容 (inertor) 的无源机械元件并说明其可在无源机械控制中具有很好的应用. 此元件的动力学方程为 $F = b(\dot{v}_1 - \dot{v}_2)$, 其中 F 为两端受力, v_1 及 v_2 为两端点的速度, b 为惯容量; 文 [19, 23] 对其具体物理构造进行了介绍. 近年来, 将惯容应用于车辆悬挂 [20, 24, 28]、摩托车转向控制 [8, 9] 及减震 [23] 等领域的研究已取得了长足的进展. 另外, 惯容的定义完善了电路网络与机械网络之间的类比关系 [6, 23]: 若力类比于电流, 速度类比于电压, 那么阻尼器、弹簧、惯容及杠杆便分别类比于电阻、电感、电容及变压器. 这样, 便可以通过无源网络综合的理论及方法来设计机械网络, 使得机械网络设计变得理论化及系统化. 另外, 由于在机械网络中应尽量避免杠杆的使用 [6, 23], 因此仅含电阻 (阻尼器)、电容 (惯容) 及电感 (弹簧) 的无源网络综合问题最具研究价值; 并受空间、重量及体积等因素的影响, 需要所得到的网络含有尽可能少的元件. 由 Bott

及 Duffin 提出的实现方法 [2] 可以看出, 任意正实函数均可由仅含有限个电阻、电容及电感的网络实现; 反之亦然. 但因存在着大量的元件冗余, 故实用性较差. 尽管在文 [2] 之后又出现了大量的研究成果, 例如, Seshu 等学者将图论的方法引入到了网络综合之中 [21, 22]; Anderson 等学者则通过状态空间的方法来研究无源网络综合问题 [1], 但无源网络综合的最简实现问题始终没能得到解决 [6]. 近几年, 惯容的引入使得无源网络综合理论再次引起了人们的兴趣, 并有了一系列新的成果 [3, 4, 5, 6, 14]. Chen 和 Smith 在文 [5] 中推出了常见的低阶实有理函数满足正实性的条件, 在文 [6] 中则给出了任意正实导纳函数能够实现为一个惯容、一个阻尼器及任意多个弹簧的充分必要条件.

本文主要考虑双二次阻抗函数的实现这一经典问题, 文 [11, 14, 15, 16, 17, 25, 26, 27] 曾相继对其进行过研究. 最近, Chen 和 Smith 在文 [4] 中利用元件提取的方法证明了由 1 个电感 (弹簧)、1 个电容 (惯容) 及任意多个电阻 (阻尼器) 所组成的网络的导纳函数一定可化为双二次形式, 并给出了系数所应满足的

通讯作者: 陈志强.

条件. Jiang 和 Smith 通过定义 regular 的概念将低复杂度的双二次实现进行了很好的归纳^[14]. 但是, 可用最多 4 个元件实现的充分必要条件并没有给出. 尽管文 [15] 罗列出了所有可能的网络情形(不多于 5 个元件), 从而一定涵盖了所有不多于 4 个元件的网络. 然而, 此方法过于繁琐且推广性较差. 本文试图通过一种较为系统及简便的方法得到可用最多 4 个元件来实现的充分必要条件.

本文的组织结构如下: 第 2 节为问题描述, 并给出了双二次阻抗函数的一般形式及其为正实函数的充分必要条件. 第 3 节给出了本文的主要结论及其证明. 第 4 节为本文总结.

2 问题描述(Problem Formulation)

考虑一般形式的双二次阻抗函数

$$Z(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{Ds^2 + Es + F}, \quad (1)$$

其中 $A, B, C, D, E, F \geq 0$. 其为正实函数的充分必要条件为 $(\sqrt{AF} - \sqrt{CD})^2 \leq BE$ ^[5].

文 [14] 指出, 对于正实的双二次阻抗函数 (1), 如果至少一个系数为 0, 那么其一定可用最多 4 个元件来实现, 相应的网络通过 Foster Preamble 很容易得到. 因此, 为研究双二次阻抗函数不多于 4 个元件的实现问题, 仅需讨论 $A, B, C, D, E, F > 0$. 若令 $K := (AF - CD)^2 - (AE - BD)(BF - CE)$, 那么函数 (1) 存在公因式的充分必要条件为 $K = 0$ ^[10]. 本文试图用较为简单及通用的方法找出足以覆盖所需条件的网络. 并利用文 [14] 中的四分域概念, 将网络进行分类. 从而, 通过对每个四分域中一种网络的研究, 来得到双二次阻抗函数 (1) 可用最多 4 个元件来实现的充分必要条件, 同时也得到了可最多用 3 个元件来实现的充分必要条件. 本文的网络的元件值有限且为正.

3 主要结论(Main Results)

对于一端口网络 N , 其两个端点可分别记为 a 及 a' , 相应的图记为 G . 割集 (a, a') 可将 G 分为子图 G_1 及 G_2 , 它们分别包含端点 a 及 a' ^[22]. 路与割集的具体定义可参见文 [22]. 根据已有的一些结论可推出能够实现阻抗函数 (1) 的网络所具有的拓扑性质.

引理 1. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$. 若 $Z(s)$ 可实现为一端口网络 N , 两端点分别记为 a 及 a' , 则 N 一定不存在由一类电抗元件所组成的路 (a, a') 及割集 (a, a') .

证明. 假设存在由一类电抗元件所组成的路 (a, a') 或割集 (a, a') . 由文 [21] 可知, 网络 N 的阻抗函数一定在 $s = 0$ 或 $s = \infty$ 处存在零、极点. 从而, 如果函数可表示为双二次 (1) 的形式, 那么必存在为 0 的系数, 与已知条件矛盾. \square

如下结论考虑了更为一般的拓扑性质.

引理 2. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$. 那么 $Z(s)$ 一定无法实现为具有图 1 所示结构的网络.

证明. 由文 [14] 可知, 对于图 1(a) 所示的网络, 其阻抗函数的所有极点均在虚轴 $s = j\omega$ 或 $s = \infty$ 上. 显然, 如果此函数为双二次 (1) 的形式, 那么必存在为 0 的系数. 同样, 图 1(b) 的阻抗函数的所有零点均在虚轴 $s = j\omega$ 或 $s = \infty$ 上. 显然, 如果为双二次 (1) 的形式, 那么必存在为 0 的系数. \square

根据前面两个引理, 可解决不多于 3 个元件的实现问题, 其结论如下:

引理 3. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 那么 $Z(s)$ 可用最多 3 个元件来实现的充分必要条件为 $K = 0$.

证明. 充分性. 若 $K = 0$, 那么 (1) 一定可以简化为双线性的形式, 即 $Z(s) = (a_0s + a_1)/(d_0s + d_1)$, 其中 $a_0, a_1, d_0, d_1 > 0$. 通过 Foster Preamble, $Z(s)$ 一定可实现为一个电阻, 或图 2 所示网络.

必要性. 仅需讨论图 3 中的拓扑结构, 其它结构一定与之对偶. 对于图 3(a), 其唯一的支路仅可能为电阻. 否则将产生 L 或 C 割集 (a, a') , 从而根据引理 1, 其一定无法实现系数均为正的双二次阻抗函数 (1). 对于图 3(b), 图 3(c) 及图 3(d) 而言, 排除总能等价于更少数元件的情形, 否则便会重复讨论. 再根据引理 1 及引理 2 可知, 满足条件的网络一定不具有图 3(b) 及图 3(c) 所示的拓扑结构; 图 3(d) 的支路 1 仅可能为电阻, 支路 2 及支路 3 中有 1 个电阻及 1 个电抗元件. 从而可得图 2(a) 及图 2(c) 所示网络. 最后根据对偶性得到图 2(b) 及图 2(d) 所示网络. 故 $Z(s)$ 一定为一个电阻或图 2 中至少一种网络的阻抗函数. 经计算, 几种网络的阻抗函数均可表示为双线性的形式, 从而一定满足 $K = 0$. \square

为了简化讨论, 可以假设 $K \neq 0$. 从而网络至少含 4 个元件. 下面, 先给出在此假设下的网络的其它一些限制条件.

引理 4. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 若 $Z(s)$ 能够实现为四元件网络 N , 则在网络 N 中一定不存在相同类型的元件进行串并联.

证明. 如果存在相同类型的元件进行串并联, 那么 N 一定可等效为不多于 3 个元件的网络. 从而, 根据引理 3 可知 $K = 0$. \square

若对可能的电抗元件数进行限定, 可得如下结论.

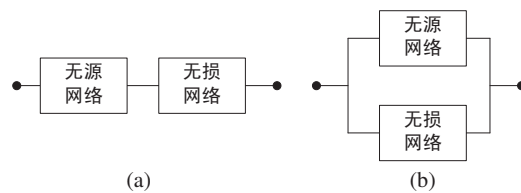


图 1: 引理 2 中所讨论的网络结构.

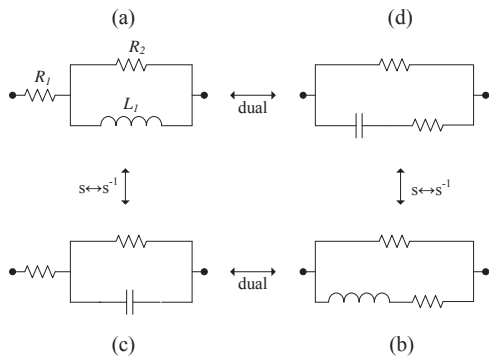


图 2: 引理 3 中所讨论网络的一个四分域.

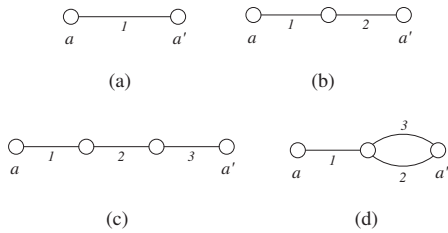


图 3: 不超过三个元件网络的拓扑结构(一半)

引理 5. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 如果 $Z(s)$ 可实现为四元件网络, 那么此网络中电抗元件的数量一定为 2 个或 3 个.

证明. 假设电抗元件的数量不超过 1 个, 那么由文 [1] 可知, $Z(s)$ 的次数一定不超过 1, 从而一定可化为双线性的形式, 这与 $K \neq 0$ 相矛盾. 进一步, 假设网络含有 4 个电抗元件, 即网络是无损的, 那么 $Z(s)$ 的所有极点均在虚轴或 $s = \infty$ 上 [13]. 从而, 与所有的系数均为正相矛盾. \square

定理 1. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 则 $Z(s)$ 可实现为四元件网络的充分必要条件为 $Z(s)$ 是图 4, 图 5, 及图 6 中至少一个网络的阻抗函数.

证明. 必要性. 考虑系数均为正且满足 $K \neq 0$ 的双二次阻抗函数 (1). 仅需考虑图 7 所示的几种拓扑结构,

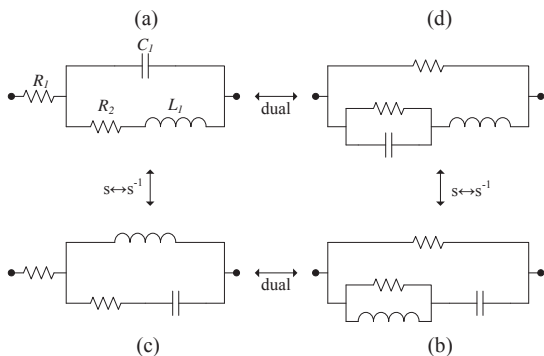


图 4: 定理 1 中提到的第一个四分域.

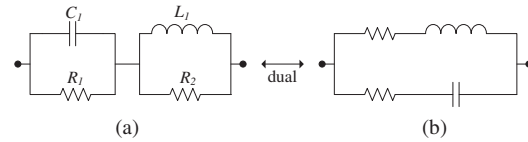


图 5: 定理 1 中提到的第二个四分域(存在重合).

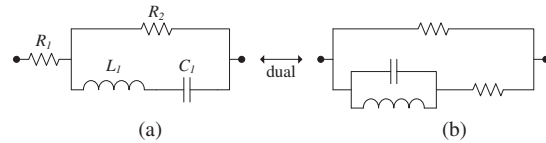


图 6: 定理 1 中提到的第三个四分域(存在重合).

其它可根据对偶性得到. 由于网络中仅有电阻、电容及电感三类元件, 从而图 7(a) 中一定存在同类元件进行串联, 根据引理 4, 以图 7(a) 为结构的任何网络均无法实现双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$ 且 $K \neq 0$, 故将其排除. 对于图 7(b), 显然支路 1 及支路 2 均为割集 (a, a') , 由引理 1 可知, 支路 1 及支路 2 只能为电阻. 从而, 根据引理 4 将其排除. 同样, 根据引理 1 可知, 图 7(c) 及图 7(d) 的支路 1 一定为电阻. 由引理 2 可知, 支路 2, 3, 4 不可能全为电抗元件. 再结合引理 5, 确定其电抗数为 2. 根据引理 1 及引理 4 可知, 图 7(c) 的两个电抗元件一定不同类, 否则便存在同类元件串联或由一类电抗元件组成的割集 (a, a') . 故仅可能为图 4(a,c) 及图 6(a) 所示网络, 再根据对偶性得到图 4 及图 6 所示的四分域. 对于图 7(d), 由引理 4 可知, 两个电抗元件也一定不同类. 从而, 仅可能为图 8(b) 所示网络, 从而得到图 8 所示的四分域. 对于图 7(e), 由引理 2 及引理 4 可知, 左右两个子图各自存在且仅有一个电阻. 再由引理 1 可知, 两个电抗一定不同类, 否则便存在一条 L 路 (a, a') 或 C 路 (a, a') . 从而, 仅可能为图 5(a) 所示网络, 其对应的四分域如图 5 所示. 另外, 根据 [14, 18] 可知, 图 6 与图 8 所示四分域中的网络互为等价. 从而, $Z(s)$ 一定为图 4, 图 5, 及图 6 中至少一个网络的阻抗函数.

充分性. 可以验证, 通过选取合适的元件值, 图 4, 图 5, 及图 6 中所示网络均可以实现双二次阻抗函数, 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. \square

若求得这三个四分域中所有网络实现的充分必要条件, 那么便可得到最终的实现条件. 尽管这些网络的实现条件在 [15] 中已被列举出, 但并没有给出推导过程. 注意到, 对于每个四分域, 仅需研究其中一个网络, 再根据对偶性及 $s \leftrightarrow s^{-1}$ 便可得到整个四分域中所有网络的实现条件. 首先考虑图 4(a) 所示网络.

定理 2. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 那么 $Z(s)$ 可以实现为图 4(a) 所示网络的充分必要条件为

$$AF < CD, \quad (2)$$

$$AE^2 + CD^2 = ADF + BDE. \quad (3)$$

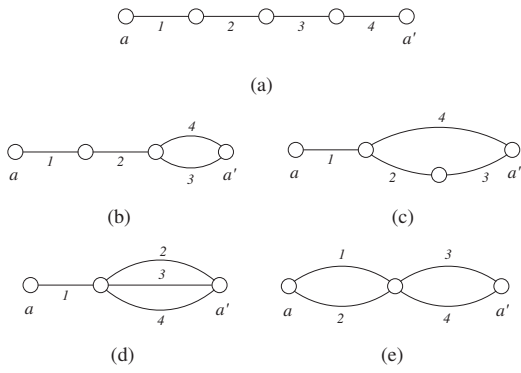


图 7: 四元件网络的拓扑结构(一半)

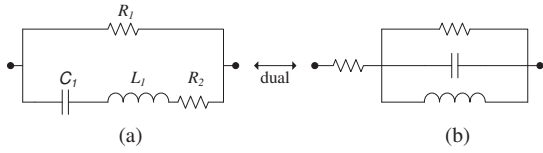


图 8: 与图 6 相等价的四分域.

若此条件满足, 那么每个元件的元件值可表示为

$$R_1 = \frac{A}{D}, \quad (4)$$

$$R_2 = \frac{CD - AF}{DF}, \quad (5)$$

$$L_1 = \frac{CD - AF}{EF} = \frac{BD - AE}{DF}, \quad (6)$$

$$C_1 = \frac{DE}{CD - AF}. \quad (7)$$

证明. 必要性. 图 4(a) 的阻抗函数可表示为

$$Z(s) = \frac{R_1 C_1 L_1 s^2 + (R_1 R_2 C_1 + L_1)s + (R_1 + R_2)}{C_1 L_1 s^2 + R_2 C_1 s + 1}. \quad (8)$$

已知图 4(a) 可以实现双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 那么

$$R_1 C_1 L_1 = kA, \quad (9)$$

$$R_1 R_2 C_1 + L_1 = kB, \quad (10)$$

$$R_1 + R_2 = kC, \quad (11)$$

$$C_1 L_1 = kD, \quad (12)$$

$$R_2 C_1 = kE, \quad (13)$$

$$1 = kF, \quad (14)$$

其中 $k > 0$. 显然, (14) 式可等价于

$$k = \frac{1}{F}. \quad (15)$$

由 (9) 式及 (12) 式可知 R_1 满足 (4) 式. 将 (15) 式及 (4) 式代入至 (11) 式, 可知 R_2 满足 (5) 式, 从而条件 (2) 一定成立. 再将 (15) 式及 (5) 式代入至 (13) 式, 可知 C_1 满足 (7) 式. 最后, 结合 (9) 式及 (10) 式可知 L_1 满足 (6) 式, 从而条件 (3) 一定满足.

充分性. 考虑满足给定条件的双二次阻抗函数. 令图 4(a) 所示网络的元件值 R_1, R_2, L_1 , 及 C_1 分别取 (4), (5), (6) 及 (7), k 取 (15). 显然, 元件值均为正, 且条件 (9) 至 (14) 一定成立. 从而, (8) 与 (1) 一定相等, 即满足条件的双二次函数一定可实现为图 4(a) 所示网络, 且元件值可表示为 (4), (5), (6) 及 (7) 式. \square

接着, 考虑图 5(a) 所示网络的实现条件.

定理 3. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 那么 $Z(s)$ 可以实现为图 5(a) 所示网络的充分必要条件为

$$(AF + CD)^2 - BE(AF + CD) + B^2 DF = 0. \quad (16)$$

若此条件满足, 那么每个元件的元件值可表示为

$$R_1 = \frac{C}{F}, \quad (17)$$

$$R_2 = \frac{A}{D}, \quad (18)$$

$$L_1 = \frac{AB}{AF + CD}, \quad (19)$$

$$C_1 = \frac{AF + CD}{BC}. \quad (20)$$

证明. 必要性. 图 5(a) 的阻抗函数可表示为

$$Z(s) = \frac{R_1 R_2 L_1 C_1 s^2 + L_1 (R_1 + R_2)s + R_1 R_2}{R_1 L_1 C_1 s^2 + (L_1 + R_1 R_2 C_1)s + R_2}. \quad (21)$$

则

$$R_1 R_2 L_1 C_1 = kA, \quad (22)$$

$$L_1 (R_1 + R_2) = kB, \quad (23)$$

$$R_1 R_2 = kC, \quad (24)$$

$$R_1 L_1 C_1 = kD, \quad (25)$$

$$L_1 + R_1 R_2 C_1 = kE, \quad (26)$$

$$R_2 = kF, \quad (27)$$

其中 $k > 0$. 由 (24) 式及 (27) 式, 可知 R_1 满足 (17). 根据 (17) 式及 (27) 式, 可知 (23) 式等价于

$$L_1 = \frac{kB}{R_1 + R_2} = \frac{kBF}{C + kF^2}. \quad (28)$$

于是, 代入至 (25) 式可得

$$C_1 = \frac{kD}{R_1 L_1} = \frac{D(C + kF^2)}{BC}. \quad (29)$$

再将 (17), (27), (28), 及 (29) 式代入至 (22) 式, 解得

$$k = \frac{A}{DF}. \quad (30)$$

最后, 将上式分别代入至 (27), (28), (29), 及 (26) 式, 可知 R_2, L_1 , 及 C_1 分别满足 (18), (19), 及 (20) 式, 且条件 (16) 成立.

充分性. 考虑满足给定条件的双二次阻抗函数. 令图 5(a) 所示网络的元件值 R_1, R_2, L_1 , 及 C_1 分别取 (17), (18), (19), 及 (20) 式; 令 k 满足 (30) 式. 显然, 所有的元件值均为正. 由于满足条件 (16), 经计算可知 (22) 至 (27) 式一定成立. 因此, (21) 式与 (1) 式相等, 即满足条件的双二次函数一定可实现为图 5(a) 所示网络, 且元件值可表示为 (17), (18), (19) 及 (20) 式. \square

最后, 考虑图 6(a) 所示网络的实现条件.

定理 4. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$, 且 $K \neq 0$. 那么 $Z(s)$ 可以实现为图 6(a) 所示网络的充分必要条件为

$$AF = CD, \quad (31)$$

$$BF < CE. \quad (32)$$

若此条件满足, 那么每个元件的元件值可表示为

$$R_1 = \frac{B}{E}, \quad (33)$$

$$R_2 = \frac{CE - BF}{EF}, \quad (34)$$

$$L_1 = \frac{A(CE - BF)}{CE^2}, \quad (35)$$

$$C_1 = \frac{E^2}{CE - BF}. \quad (36)$$

证明. 必要性. 图 6(a) 的阻抗函数为

$$Z(s) = \frac{L_1 C_1 (R_1 + R_2) s^2 + R_1 R_2 C_1 s + (R_1 + R_2)}{L_1 C_1 s^2 + R_2 C_1 s + 1}. \quad (37)$$

则

$$L_1 C_1 (R_1 + R_2) = kA, \quad (38)$$

$$R_1 R_2 C_1 = kB, \quad (39)$$

$$R_1 + R_2 = kC, \quad (40)$$

$$L_1 C_1 = kD, \quad (41)$$

$$R_2 C_1 = kE, \quad (42)$$

$$1 = kF, \quad (43)$$

其中 $k > 0$. 显然, (43) 式等价于

$$k = \frac{1}{F}. \quad (44)$$

由 (38) 式及 (40) 式, 可得

$$L_1 C_1 = \frac{A}{C}. \quad (45)$$

结合 (41) 式, 有 $k = A/(CD)$, 从而

$$k = \frac{1}{F} = \frac{A}{CD}. \quad (46)$$

继而, 条件 (31) 一定成立. 因为 (44) 式成立, 故 (39), (40), 及 (42) 式分别等价于

$$R_1 R_2 C_1 = \frac{B}{F}, \quad R_1 + R_2 = \frac{C}{F}, \quad R_2 C_1 = \frac{E}{F}.$$

表 1: 双二次阻抗函数 (1) 实现为图 4, 图 5, 及图 6 中网络的充分必要条件. (第二列为每个网络在文 [15] 中的相应编号.)

网络	[15]	能够实现双二次阻抗函数的充分必要条件
图 4(a)	87	$AF < CD, AE^2 + CD^2 = ADF + BDE$
图 4(b)	88	$AF < CD, FB^2 + DC^2 = ACF + BCE$
图 4(c)	63	$CD < AF, CE^2 + AF^2 = CDF + BEF$
图 4(d)	62	$CD < AF, DB^2 + FA^2 = ACD + ABE$
图 5(a)	96	$(AF + CD)^2 + B^2 DF = BE(AF + CD)$
图 5(b)	97	$(AF + CD)^2 + E^2 AC = BE(AF + CD)$
图 6(a)	71	$AF = CD, BF < CE$
图 6(b)	74	$AF = CD, CE < BF$

由上面三个等式, 可解得 R_1, R_2 , 及 C_1 . 它们分别可表示为 (33), (34), 及 (36) 式. 因此, 条件 (32) 一定成立. 最后, 根据 (45), 可知 L_1 满足 (35) 式.

充分性. 考虑满足给定条件的双二次阻抗函数. 令图 6(a) 所示网络的元件值 R_1, R_2, L_1 , 及 C_1 分别取 (33), (34), (35), 及 (36) 式; k 取 (44). 由于条件 (32) 成立, 故所有的元件值均为正. 又由于满足条件 (31), 从而 (38) 至 (43) 式一定成立. 因此, (37) 式与 (1) 式相等, 即满足条件的双二次阻抗函数一定可实现为图 6(a) 所示网络, 且元件值可表示为 (33), (34), (35), 及 (36) 式. \square

根据对偶性, 图 4(d) 所示网络可实现 $Z(s)$ 的充分必要条件是 $Z^{-1}(s)$ 可实现为图 4(a). 因此, 其实现条件可以由定理 2 的条件通过系数变换: $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E$, 及 $C \leftrightarrow F$ 得到. 图 4(c) 中的网络可实现 $Z(s)$ 的充分必要条件是图 4(a) 可实现 $Z(s^{-1})$. 因此, 其实现条件可以由定理 2 的条件通过系数变换: $A \leftrightarrow C$ 及 $D \leftrightarrow F$ 得到. 同理, 可得其它四分域中网络的实现条件, 如表 1 所示, 其中第二列为每个网络在文 [15] 中的相应编号. 进而, 可得如下定理.

定理 5. 考虑双二次阻抗函数 (1), 其中 $A, B, C, D, E, F > 0$. 那么 $Z(s)$ 可以用最多 4 个元件来实现的充分必要条件为至少如下一个条件成立:

(a) $K = 0$;

(b) $AF = CD$;

(c) $AF < CD$, 且满足 $AE^2 + CD^2 = ADF + BDE$ 或 $FB^2 + DC^2 = ACF + BCE$;

(d) $AF > CD$, 且满足 $CE^2 + AF^2 = CDF + BEF$ 或 $DB^2 + FA^2 = ACD + ABE$;

(e) $(AF + CD)^2 + B^2 DF = BE(AF + CD)$ 或 $(AF + CD)^2 + E^2 AC = BE(AF + CD)$.

证明. 必要性. 如果 $Z(s)$ 可用最多 3 个元件实现, 那么根据引理 3, 可知 $K = 0$, 即满足条件 (a). 如果 $Z(s)$ 只能实现为四元件网络, 则 $K \neq 0$. 再根据定理 1, $Z(s)$ 可实现为图 4, 图 5, 及图 6 中至少一种网络. 每种网络的实现条件如表 1 所示. 由图 6 所示网络的实现条件可得条件 (b). 图 4(a,b) 所示网络的实现条件得到条件 (c). 由图 4(c,d) 所示网络的实现条件可得条件 (d). 由图 5 所示网络的实现条件得到条件 (e).

充分性. 若条件 (a) 成立, 则由引理 3, $Z(s)$ 一定可用最多 3 个元件实现. 若条件 (b) 成立, 则其一定可实现为图 6, 或满足 $K = 0$. 同样地, 根据表 1 可知, 如果条件 (c), (d), 及 (e) 分别成立, 则 $Z(s)$ 分别可实现为图 4(a,b), 图 4(c,d), 及图 5 所示网络. \square

4 总结(Conclusion)

本文研究了双二次阻抗函数可用最多四个元件来实现的问题. 首先, 通过网络的拓扑性质得到可用最多三个元件来实现的充分必要条件. 从而, 其它情形的四元件网络一定无法简化为更少的元件. 通过一系列对电抗数及网络拓扑结构的限定, 找出了足以覆盖其它情形的网络, 并将它们归纳为三个四分域. 接着, 通过研究每个四分域中的一种网络来得到其它所有网络的实现条件. 最终, 结合最多三个元件的情形, 确定出可用最多四个元件实现的充分必要条件, 并给出了相应的覆盖网络. 此结论可作为能否简化五元件网络的判据, 使得双二次阻抗函数能够用尽可能少的元件来实现. 相比于 Ladenheim 的工作, 本文用了更为系统的方法重新进行了讨论, 使计算更为简便, 且此方法更具推广性. 因此, 本文的工作对无源网络综合的最简实现问题的研究有着一定的推进作用.

致谢(Acknowledgments)

本文的工作部分由国家自然科学基金61004093与“973计划”2012CB720200资助。

参考文献

[1] B.D.O. Anderson and S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach*, Prentice Hall, 1973.

[2] R. Bott and R.J. Duffin, Impedance Synthesis Without Use of Transformers, *Journal of Applied Physics*, vol. 20, 816, 1949.

[3] M.Z.Q. Chen, A Note on PIN Polynomials and PRIN Rational Functions, *IEEE Trans. on Circuits and Systems II-Express Briefs*, vol. 55, no. 5, 462–463, 2008.

[4] M.Z.Q. Chen and M.C. Smith, Electrical and Mechanical Passive Network Synthesis, in *Recent Advances in Learning and Control*, New York: Springer-Verlag, vol. 371, 35–50, 2008.

[5] M.Z.Q. Chen and M.C. Smith, A Note on Tests for Positive-real Functions, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, no. 2, 390–393, 2009.

[6] M.Z.Q. Chen and M.C. Smith, Restricted Complexity Network Realizations for Passive Mechanical Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, no. 10, 2290–2301, 2009.

[7] M.Z.Q. Chen, C. Papageorgiou, F. Scheibe, F.C. Wang, and M.C. Smith, The Missing Mechanical Circuit Element, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 9, no. 1, 10–26, 2009.

[8] S. Evangelou, D.J.N. Limebeer, R.S. Sharp, and M.C. Smith, Control of Motorcycle Steering Instabilities, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 26, no. 5, 78–88, 2006.

[9] S. Evangelou, D.J.N. Limebeer, R.S. Sharp, and M.C. Smith, Mechanical Steering Compensators for High-performance

Motorcycles, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 74, no. 2, 332–346, 2007.

[10] R.M. Foster, Academic and Theoretical Aspects of Circuit Theory, *Proc. IRE*, vol. 50, no. 5, 866–871, 1962.

[11] R.M. Foster, Biquadratic Impedances Realizable by a Generalization of the Five-element Minimum-resistance Bridges, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 10, no. 3, 363–367, 1963.

[12] R.M. Foster and E.L. Ladenheim, A Class of Biquadratic Impedances, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 10, no. 2, 262–265, 1963.

[13] E.A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks*, John Wiley & Sons, 1957.

[14] J.Z. Jiang, Passive electrical and mechanical network synthesis, Ph.D dissertation, *University of Cambridge*, Cambridge, U.K., April 2010.

[15] E.L. Ladenheim, A Synthesis of Biquadratic Impedances, Master's thesis, Polytechnic Inst. of Brooklyn, N.Y., 1948.

[16] E.L. Ladenheim, A Special Biquadratic Structure, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 10, no. 3, 455–456, 1963.

[17] E.L. Ladenheim, Three-reactive Five-element Biquadratic Structures, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 11, no. 1, 88–97, 1964.

[18] P.M. Lin, A Theorem on Equivalent One-port Networks, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 12, no. 4, 619–621, 1965.

[19] C. Papageorgiou and M.C. Smith, Laboratory Experimental Testing of Inerters, in *Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, 3351–3356, Seville, Spain, December 12-15, 2005.

[20] C. Papageorgiou and M.C. Smith, Positive Real Synthesis Using Matrix Inequalities for Mechanical Networks: Application to Vehicle Suspension, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 3, 423–435, 2006.

[21] S. Seshu, Minimal Realizations of the Biquadratic Minimum Function, *IRE Trans. on Circuit Theory*, vol. 6, no. 4, 345–350, 1959.

[22] S. Seshu and M.B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley, 1961.

[23] M.C. Smith, Synthesis of Mechanical Networks: the Inerter, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 47, no. 10, 1648–1662, 2002.

[24] M.C. Smith and F.C. Wang, Performance Benefits in Passive Vehicle Suspensions Employing Inerters, *Vehicle System Dynamics*, vol. 42, no. 4, 235–257, 2004.

[25] C.G. Vasiliu, Three-reactive Five-element Structures, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 16, no. 1, 99, 1969.

[26] C.G. Vasiliu, Series-parallel Six-element Synthesis of the Biquadratic Impedances, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 17, no. 1, 115–121, 1970.

[27] C.G. Vasiliu, Four-reactive Six-element Biquadratic Structures, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 19, no. 5, 530–531, 1972.

[28] F.C. Wang and M.K. Liao, The Lateral Stability of Train Suspension Systems Employing Inerters, *Vehicle System Dynamics*, vol. 48, no. 5, 619–643, 2010.