Grupos de Homotopía de Orden Superior

(Higher Homotopy Groups)

ANDREA FERNÁNDEZ GARCÍA

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Octubre - 2020

No todo lo que puede ser contado, cuenta;
y no todo lo que cuenta, puede ser contado.

ALBERT EINSTEIN.

Agradecimientos

Me gustaría comenzar agradeciéndole a mi director Fernando Etayo, por su dedicación, esfuerzo e infinita paciencia. Mi interés por esta rama comenzó con un mapa del mundo y la mínima distancia entre México y España. Me siento muy afortunada de que alguien a quien admiro haya podido dirigir mi Trabajo.

Gracias a mi familia, en especial a mis padres, por acompañarme y saber estar ahí siempre. Desde que tomé la decisión de que quería estudiar Matemáticas hasta la presentación de mi Trabajo de Fin de Grado me han apoyado incondicionalmente. A Mario, por confiar siempre en mi y ser un pilar tan importante de puertas para afuera.

Gracias a los dos "cerebritos" que han compartido clase conmigo. Me habéis ayudado mucho y siempre os estaré muy agradecida por ello. Gracias a mis amigos, a los de verdad. Habéis hecho que este viaje sea más agradable. En la cafetería, casas rurales y fines de semana en Santander no lo hemos pasado nada mal.

Gracias, de corazón.

Resumen: El grupo fundamental o primer grupo de homotopía permite distinguir espacios topológicos en numerosos casos. Sin embargo, existen familias de espacios no homeomorfos entre sí con igual grupo fundamental. Para cada número natural n, el grupo de homotopía de orden n de un espacio topológico X se define a partir de las clases de homotopía de aplicaciones de la esfera de dimensión n en X. Se obtiene así una familia de grupos que permiten distinguir mejor los espacios topológicos. En este Trabajo se pretenden mostrar las principales propiedades de esta construcción, haciendo énfasis en el cálculo de grupos de homotopía de esferas de cualquier dimensión. Para ello se hará uso de herramientas como el *Teorema de suspensión de Freudenthal*, la *fibración de Hopf* y la *Teoría del grado*, entre otros.

Palabras clave: Topología Algebraica, homotopía, grupos de homotopía de esferas, grupo fundamental, fibración de Hopf, suspensión de Freudenthal, grado topológico, conjetura de Poincarè, Teorema de Hurewicz.

Abstract: The fundamental group or the first homotopy group allows us to distinguish topological spaces in numerous cases. However, there exist families of spaces which are not homeomorphic to each other with the same fundamental group. For each natural n, the nth homotopy group of a topological space X is defined as homotopy classes of continuous maps from the n-sphere onto X. In this way we obtain a family of groups that allows us to distinguish topological spaces in a wider collection of cases. In this dissertation we pretend to be intended to show the main properties of this construction, focusing on computing homotopy groups of spheres of any dimension. For that purpose we shall make use of different mathematical tools like the *Freudenthal suspension theorem*, the *Hopf fibration* and the *Degree Theory*, among other results.

Keywords: Algebraic Topology, homotopy, homotopy groups of spheres, fundamental group, Hopf fibration, Freudenthal suspension, topological degree, Poincarè conjecture, Hurewicz Theorem.

Índice

Introducción

El objeto de estudio de esta Memoria es la Topología Algebraica, más concretamente, el cálculo de los grupos de homotopía de orden superior. Esto está íntimamente relacionado con uno de los problemas más clásicos y a la vez complicados de la Topología: *La clasificación de espacios topológicos*. Aunque centraremos nuestros esfuerzos en el caso de las esferas de cualquier dimensión, se tiene de manera general una relación funtorial entre la categoría de espacios topológicos y la de grupos, la cual permite distinguir los primeros siempre y cuando posean al menos un grupo de homotopía no isomorfo.
Con la intención de que el lector vaya familiarizándose con el objetivo del presente Trabajo, introduciremos ahora en forma de la siguiente tabla (extraída del Capítulo 4 de [3]) algunos de los resultados que iremos desglosando a lo largo de esta Memoria.

$\pi_i(S^n)$

$n \downarrow$ \ $i \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

Figura 1: Grupos de homotopía de orden superior de esferas.

Pese a que la noción en origen es sencilla, el cálculo de grupos de homotopía de un espacio es en realidad una tarea compleja. Incluso para el simple caso de la esfera $\mathbb{S}^2$ se desconocen muchos de sus grupos de homotopía, lo cual es indicativo de la dificultad que encierra el tema en el caso general.

La primera persona en introducir la noción de grupo de homotopía fue Camille Jordan a finales del siglo XIX, quien lo hizo de una manera preliminar sin hacer uso del lenguaje de la Teoría de grupos. No fue hasta Henri Poincaré cuando se adoptó un enfoque más riguroso en su conjunto de artículos de 1895, *Analysis situs*, donde también se introdujeron los conceptos de homología y de grupo fundamental $\pi_1(X)$. En vista de que este grupo resultó ser una herramienta provechosa para la clasificación de espacios topológicos, surgió la extensión de esta idea al caso general, materializada en 1932 por el matemático Eduard Čech. Este, propuso una definición para los grupos de homotopía de orden superior empleando aplicaciones cuyos dominios eran esferas de dimensión n. Su propuesta fue rechazada debido a que los grupos $\pi_n(X)$ eran abelianos para $n \geq 2$, y esta propiedad no generalizaba la definición del grupo fundamental, puesto que este no es abeliano. A Witold Hurewicz se le atribuye la introducción de grupos homotópicos gracias al conocido Teorema que lleva su nombre: el Teorema de Hurewicz, que como veremos al final de este Trabajo, establece una relación entre los grupos de homotopía y de homología.
Centrándonos en el cálculo de grupos de homotopía de esferas, el concepto de estabilidad es un método significativo a la hora de calcular el valor de diversos grupos de homotopía, ya que localiza propiedades que son independientes de las dimensiones y que, de forma general, son válidos para dimensiones grandes.
El primer resultado lo dió Hans Freudenthal con el Teorema de suspensión publicado en 1937, que establece una relación entre los grupos de esferas de distinta dimensión. En 1953, George W. Whitehead demostró que existe un rango metaestable para los grupos de esferas homotópicas, y Jean-Pierre Serre utilizó sucesiones espectrales para mostrar que la mayoría de estos grupos son finitos, siendo $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ y $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n})$ las únicas excepciones.
El objetivo del presente Trabajo Fin de Grado es profundizar en el concepto de grupo de homotopía de orden superior, que presentaremos de tres formas equivalentes, partiendo del grupo fundamental estudiado en el Grado, y mostrar sus principales propiedades. Trataremos, además, de ilustrar con ejemplos significativos los conceptos y resultados que vayan apareciendo en la Memoria. Desglosamos a continuación los resultados principales tratados en cada una de las secciones en las que se encuentra dividida.

En el Capítulo 1 presentaremos la definición de grupo fundamental, seguida de una idea muy intuitiva de lo que los grupos de homotopía de orden n representan. Estos conceptos irán acompañados de algunos ejemplos cuya misión es asentar todas las nociones básicas que vayamos introduciendo a lo largo de este Capítulo. Terminaremos con una presentación de la Teoría del grado topológico que nos será útil para recordar que el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al conjunto de enteros $\mathbb{Z}$.

En el Capítulo 2 introduciremos en primer lugar, de tres modos equivalentes, la noción de grupo de homotopía de orden superior. A continuación mostraremos un resultado altamente sorprendente: la propiedad de que son conmutativos para órdenes estrictamente mayores que el primero. En la Sección 2.3 recopilaremos una serie de resultados para finalmente probar el Teorema que muestra que dados dos espacios topológicos homotópicamente equivalentes, entonces todos sus grupos de homotopía son isomorfos. Concluiremos este Capítulo con una colección de ejemplos concretos en los que aplicaremos los conceptos previamente introducidos.

El objetivo del Capítulo 3 es tratar el caso particular de los grupos de homotopía de esferas. Para ello, distribuiremos el cálculo de estos grupos en tres grandes bloques:

- $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ con $k < n$,
- $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ con $k = n$,
- $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ con $k > n$.

Para el primero nos apoyaremos en resultados vistos en capítulos anteriores. Los grupos del segundo bloque se obtienen haciendo uso de la Teoría del grado, y para el tercero emplearemos herramientas como la fibración de Hopf, el Teorema de suspensión de Freudenthal, etc. Estos últimos son sin duda los más difíciles de obtener.

Finalmente, en el Capítulo 4 recopilaremos en forma de conclusiones las ideas más importantes que se han querido reflejar en esta Memoria, y dedicaremos la Sección 4.2 a tratar una serie de resultados en forma de ejemplos, cuya demostración excede los propósitos de este trabajo pero resultan muy interesantes de comentar.

Capítulo 1

Motivación

El objetivo de este Capítulo es introducir algunos conceptos básicos sobre la homotopía de lazos que nos servirán de base para construir la teoría que desarrollaremos a lo largo de este Trabajo.
Seguidamente, trataremos de manera intuitiva algunos ejemplos básicos de grupos de homotopía de orden superior con el objetivo de motivar al lector.
Finalmente, daremos por concluido este Capítulo introduciendo la noción de grado de Brouwer, ya que será de utilidad a lo largo del Trabajo. Esta noción es equivalente a la de grado topológico, con la que quizá el lector esté mas familiarizado, sin embargo para los objetivos de este texto la primera resulta ser más intuitiva.

1.1 Primeras nociones sobre la homotopía de lazos

En este primer apartado realizaremos un breve repaso de las nociones básicas de Topología Algebraica, por lo que muchas de las definiciones podrán encontrarse siguiendo unos apuntes de nivel de Grado.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico, $p \in X$ y denotemos $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, con la topología usual.
Un *lazo* de base p en X es una aplicación continua $\alpha : I \to X$ que satisface $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

Para poder dotar a los grupos de homotopía de estructura de grupo es necesario definir la siguiente operación.

Definición 1.1.2. Sean $\alpha, \beta : I \to X$ dos lazos de bases p y q, respectivamente, en un espacio topológico X. Si $p = q$, se puede definir un nuevo lazo $\alpha * \beta : I \to X$ de manera que para todo $t \in I$

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La operación $*$ recibe el nombre de *concatenación* o *producto de lazos.*

Definición 1.1.3. Sean $\alpha, \beta : I \to X$ dos lazos de base p en X. Diremos que α es *homótopo* a β *relativo al punto* p, y lo denotaremos por $\alpha \sim_p \beta$, si existe una aplicación continua $H : I \times I \to X$ tal que

$$H(s,0) = \beta(s), \quad H(s,1) = \alpha(s), \quad H(0,t) = H(1,t) = p, \qquad \text{para todo } s,t \in I.$$

La aplicación H recibe el nombre de *homotopía de lazos* entre α y β.

Una manera intuitiva de ver que dos lazos α y β de base p son homótopos es que podemos deformar continuamente el uno en el otro manteniendo fijo el punto base p.

Observación 1.1.4. La relación $\sim_p$ es de equivalencia.
Esta propiedad es de fácil demostración, por lo que no la probaremos en el Trabajo.

Definición 1.1.5. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Denotamos por $\pi_1(X,p)$ al conjunto de clases de equivalencia $[\alpha]$ de lazos en X de base p, con la relación $\sim_p$.

Dados $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(X,p)$, se define el producto de clases $[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta]$, donde $*$ es el producto de lazos. Esta operación, como bien comentamos al principio, dota a $\pi_1(X,p)$ de estructura de grupo, siendo la clase del lazo constante $[c_p]$ el elemento neutro y la clase $[\overline{\alpha}]$ el elemento inverso, donde $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ es el *lazo inverso* de α.
El grupo $\pi_1(X,p)$ recibe el nombre de *grupo fundamental de X en el punto p*. Si X es conexo por caminos resulta que $\pi_1(X,p)$ y $\pi_1(X,q)$ son grupos isomorfos para todo par de puntos $p, q \in X$, por lo tanto en este tipo de espacios denotaremos, por brevedad, al grupo fundamental como $\pi_1(X)$, sin especificar el punto base.

Definición 1.1.6. Un espacio topológico X es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y además su grupo fundamental es trivial, esto es, $\pi_1(X) = \{e\}$.

Definición 1.1.7. Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Diremos que f es *homótopa a g relativa a A*, y lo denotaremos por $f \sim_A g$, si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que

$$\begin{aligned} &H(x,0) = f(x) \text{ para todo } x \in X, \\ &H(x,1) = g(x) \text{ para todo } x \in X, \\ &H(a,t) = f(a) = g(a) \text{ para todo a} \in A,\ t \in I. \end{aligned}$$

Si $A = \emptyset$, diremos que f es *homótopa a g* y lo denotaremos por $f \sim g$.
Se dice que una aplicación f es *nulhomótopa* si es homótopa a una aplicación constante $c : X \to Y$, definida como $c(x) = y_0$ para todo $x \in X$.

La homotopía de lazos es un caso particular de la homotopía de aplicaciones, tomando $A = \{0,1\}$. Hasta ahora hemos presentado los lazos como aplicaciones continuas del intervalo I en un espacio topológico X cualquiera, imponiendo la condición de que la imagen de ambos extremos del intervalo coincida, pero veremos que esta no es la única manera de definirlos, sino que podremos trabajar de forma equivalente con funciones continuas cuyo dominio sea la circunferencia unidad, $f : \mathbb{S}^1 \to X$ donde $f(s_0) = p$, siendo s_0 un punto cualquiera de $\mathbb{S}^1$. Si nos fijamos en Figura 1.1, y tomamos $s_0 = (1, 0)$, la condición $f(1, 0) = p$ es equivalente a la que aparece en la definición de lazo. Basta tener en cuenta que si partimos de $\mathbb{S}^1$, ya tenemos que la imagen de ambos extremos de I será la misma.

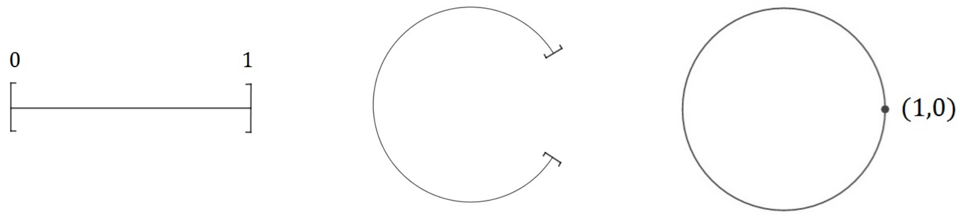

Figura 1.1: Identificación de los extremos del intervalo I.

Si identificamos los extremos del intervalo $[0, 1]$ obtenemos una superficie que es topológicamente equivalente a la circunferencia $\mathbb{S}^1$, y veremos que esta identificación nos ayudará en algunos aspectos a comprender de una manera más sencilla cómo definir grupos de homotopía de mayor orden.
Esta operación podemos trasladarla a una dimensión más, como observamos en la Figura 1.2.

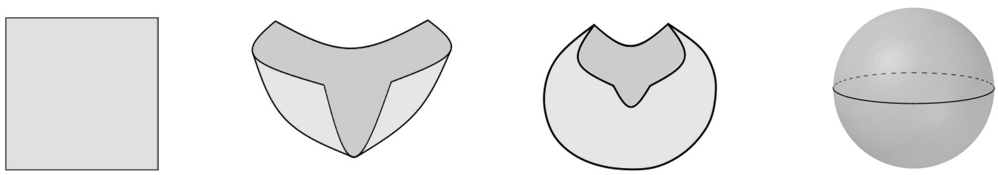

Figura 1.2: Identificación de los bordes del cuadrado $I \times I$.

Si tomamos el cuadrado unidad $I \times I$ e identificamos sus cuatro lados, la superficie resultante es topológicamente equivalente a la esfera $\mathbb{S}^2$. Así veremos que se puede definir el segundo grupo de homotopía $\pi_2(X, p)$, donde X es un espacio topológico cualquiera, $p \in X$ y $\pi_2(X, p)$ representa el conjunto de clases de aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^2 \to X$.

Definición 1.1.8. Un espacio topológico X es *contráctil* si la aplicación identidad $Id_X : X \to X$ es homótopa (rel. a p) a la aplicación constante $c_p : X \to X$, donde $c_p(x) = p$ para cada $x \in X$.

Ejemplo 1.1.9. El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es contráctil para todo entero positivo n. Basta considerar la homotopía $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ que a cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ le hace corresponder $H(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = (1-t)(x_1, \ldots x_n)$, para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$. Así,

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = Id_{\mathbb{R}^n}, \\ H(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) &= (0, \ldots, 0) = c_0, \\ H(0, \ldots, 0, t) &= (0, \ldots, 0), \end{aligned}$$

donde $Id_{\mathbb{R}^n}$ es la identidad en $\mathbb{R}^n$ y c_0 es la aplicación constante que envía todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ al 0.

Los siguientes resultados los utilizaremos en capítulos posteriores para determinar algunos grupos de homotopía.

Teorema 1.1.10. *Sea X un espacio topológico, n un entero positivo y $f, g : \mathbb{S}^n \to X$ dos aplicaciones continuas. Si X es contráctil, entonces f y g son homótopas.*

Demostración. Consideramos dos aplicaciones continuas $f, g : \mathbb{S}^n \to X$. Como X es contráctil, la aplicación identidad es homótopa (rel. a p) a una aplicación constante $c_p : X \to X$, con $c_p(x) = p$ para todo $x \in X$, esto es, $Id_X \sim_p c_p$.
Es claro que $f = Id_X \circ f$, y como $Id_X \sim c_p$, entonces $Id_X \circ f \sim c_p \circ f$.
Si denotamos por k_p a la composición $c_p \circ f : \mathbb{S}^n \to X$, tenemos siguiendo lo anterior que $f \sim k_p$. De forma análoga, $g \sim k_p$.
Finalmente juntando ambas relaciones tenemos que

$$\begin{aligned} f &\sim k_p, \\ g &\sim k_p. \end{aligned}$$

Y como la relación $\sim$ es de equivalencia, tenemos por transitividad que $f \sim g$. □

A continuación veremos un ejemplo en el que se muestra que la esfera $\mathbb{S}^2$ no es un espacio contráctil.

Ejemplo 1.1.11. Si X es un espacio contráctil entonces $Id_X \sim c_p$, con $p \in X$, luego se cumple que $\pi_n(X, p) = \{e\}$ para cualquier entero positivo n, y esto se debe a que los grupos de homotopía de un punto son todos triviales.
Si consideramos la esfera $\mathbb{S}^2$ tenemos que su grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^2, s_0) = \{e\}$, ya que cualquier lazo contenido en la esfera puede contraerse hasta un punto. Sin embargo, el segundo grupo de homotopía $\pi_2(\mathbb{S}^2, s_0)$ no es trivial, sino que probaremos más adelante que es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Con esto podemos concluir que $\mathbb{S}^2$ no es contráctil.

Teorema 1.1.12. *Si $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ es una aplicación continua no suprayectiva con $k, n \in \mathbb{N}$, entonces f es nulhomótopa.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{S}^n$, $c_p : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ una aplicación constante donde para cada $s \in \mathbb{S}^k$ se tiene que $c_p(s) = p$. Queremos probar que $f \sim c_p$.
f no es suprayectiva, luego existe un elemento $x \in \mathbb{S}^n$ que no posee antiimagen en $\mathbb{S}^n$. Como $Im(f) \subsetneq \mathbb{S}^n$, podemos tomar la proyección estereográfica $\Pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ y

componerla con f, $\Pi \circ f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^n$, que es una aplicación continua por serlo Π y f. Por otro lado, podemos componer Π con la aplicación constante c_p, $\Pi \circ c_p : \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}^n$, que por la misma razón es continua. Como $\mathbb{R}^n$ es contráctil, usando el Teorema 1.1.10 sabemos que dos aplicaciones continuas sobre un espacio contráctil son homótopas, luego

$$\Pi \circ f \sim \Pi \circ c_p \Rightarrow f \sim c_p$$

y f es nulhomótopa. □

1.2 Teoría del grado topológico

Las dos maneras básicas de definir el grado topológico son la simplicial y la diferencial. La simplicial es válida para aplicaciones continuas, pero tiene la limitación de estar reducida a complejos simpliciales. Se define usando grupos de homología. La diferencial se restringe a variedades diferenciales y a aplicaciones diferenciales entre ellas. En el caso que nos interesa de aplicaciones de una esfera en sí misma tenemos ambas estructuras: la simplicial y la diferencial.
Dado que toda aplicación continua se puede aproximar por aplicaciones diferenciales, los resultados que se alcanzan son los mismos con ambos enfoques. Optaremos por el diferencial, pues resulta más intuitivo y requiere menos prerrequisitos. En esta Sección seguiremos la notación que utiliza Milnor en [4].

Definición 1.2.1. Sean M y N variedades diferenciables orientables de dimensión n. Sea $f : M \to N$ una aplicación continua. Si M es compacta y N es conexa, entonces el *grado de Brouwer* de la aplicación f se define como

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x \quad \text{para todo } y \in N,$$

donde $df_x : TM_x \to TN_{f(x)}$ es el isomorfismo lineal inducido por la aplicación f entre espacios vectoriales y $x \in M$ un punto regular de f. El signo de df_x es ± 1, dependiendo de si la aplicación df_x preserva o no la orientación. Además se puede probar que el grado $\deg(f, y)$ no depende del valor regular y escogido (ver [4], páginas 28-29), lo cual permite definir $\deg(f) = \deg(f, y)$ sea cual sea el valor regular $y \in N$.

De ahora en adelante consideraremos $M = N$, ambos representando la esfera $\mathbb{S}^n$ de dimensión $n \geq 1$ que se indique.
Para tratar de consolidar la definición anterior veamos algunos ejemplos sobre grados de aplicaciones.

Ejemplo 1.2.2. Sea k un entero positivo y $z \in \mathbb{S}^1$. Consideramos la siguiente aplicación continua

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & z & \longmapsto & z^k. \end{array}$$

Para calcular el grado de f primero debemos ver qué signo tiene $df_z : T\mathbb{S}^1_z \to T\mathbb{S}^1_{f(z)}$ para cualquier $z \in \mathbb{S}^1$. En este caso la aplicación df_z conserva la orientación, luego sign $df_z = +1$. Por definición de grado de Brouwer tenemos que

$$\deg f = \sum_{z \in f^{-1}(z^k)} \text{sign } df_z = 1 + \overset{k}{\dots} + 1 = k,$$

ya que existen k números distintos que cumplen $f(z) = z^k$.

Ejemplo 1.2.3. Tomando k un entero positivo, consideramos la aplicación continua

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & z & \longmapsto & \overline{z^k}, \end{array}$$

donde $\overline{z^k}$ representa el conjugado de z^k. Veamos cuánto vale el grado de $\overline{f}$.
Es de fácil comprobación que en este caso la aplicación $d\overline{f}_z$ no preserva el grado, luego sign $d\overline{f}_z = -1$, y por el mismo razonamiento que utilizamos en Ejemplo 1.2.2

$$\deg \overline{f} = \sum_{z \in \overline{f^{-1}}(\overline{z^k})} \text{sign } d\overline{f}_z = (-1) + \overset{k}{\dots} + (-1) = -k.$$

Los dos ejemplos que acabamos de presentar nos van a servir para calcular el grupo fundamental de la circunferencia, y probaremos que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}$.
El siguiente resultado es una extensión que Hopf realizó del Teorema del grado de Brouwer, y a pesar de que no lo probaremos en este Trabajo, sí lo necesitaremos en secciones posteriores.

Teorema 1.2.4 (Teorema de clasificación de Hopf)**.** *Dos aplicaciones continuas $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ son homótopas sí y solo sí tienen el mismo grado.*

En el contexto de la Teoría del grado de Brouwer es necesario añadir que las aplicaciones f, g deben ser diferencialmente homótopas, sin embargo sin nos referimos al grado topológico el resultado también es cierto con las hipótesis señaladas.
A continuación aparece un ejemplo en el que se explica con detalle el motivo por el cual el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, apoyándose en los ejemplos vistos anteriormente.

Ejemplo 1.2.5. Consideramos la aplicación $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$ y sea k un entero positivo. Comenzamos construyendo φ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \pi_1(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & A_1 = \{f_1 : z \to z^1\} & \longmapsto & 1 \\ & A_2 = \{f_2 : z \to z^2\} & \longmapsto & 2 \\ & A_3 = \{f_3 : z \to z^3\} & \longmapsto & 3 \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_k = \{f_k : z \to z^k\} & \longmapsto & k \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{-1} = \{\overline{f_1} : z \to \overline{z^1}\} & \longmapsto & -1 \\ & A_{-k} = \{\overline{f_k} : z \to \overline{z^k}\} & \longmapsto & -k, \end{array}$$

donde $f_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ son aplicaciones continuas de grado i (visto en el Ejemplo 1.2.2) y $\varphi(A_i)$ tiene como imagen dicho grado para cada $i = 1, \ldots, k$. Las aplicaciones $\overline{f_i} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ son continuas y cada una de ellas de grado $-i$ (visto en el Ejemplo 1.2.3), por lo que $\varphi(A_{-i}) = -i$, para $i = 1, \ldots, k$. Una vez definida veamos que φ es biyectiva:

Sean $A_i, A_j \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ con $i \neq j$, y supongamos que $\varphi(A_i) = \varphi(A_j)$. Como las imágenes son iguales tenemos necesariamente que $i = j$, luego $A_i = A_j$ y φ es inyectiva. Para probar la suprayectividad debemos ver que para cada $i = \{1, \ldots, k\}$ existe un A_i tal que $\varphi(A_i) = i$. Pero esto es claro que ocurre por cómo hemos definido la aplicación φ, y por el Teorema 1.2.4 tenemos que todos los A_i son distintos por ser las aplicaciones f_i no homótopas entre si, ya que tienen distinto grado.

Como φ es biyectiva podemos concluir que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ y $\mathbb{Z}$ tienen el mismo número de elementos.

Capítulo 2

Grupos de Homotopía de Orden Superior

En este Capítulo trataremos algunas definiciones y resultados acerca de los grupos de homotopía de orden superior de un espacio topológico X cualquiera, y estos nos servirán como impulso para poder estudiar más adelante los grupos de homotopía de las esferas. En este Capítulo se ha seguido la Sección 6 del libro [1].

2.1 Definiciones equivalentes de $\pi_n(X, p)$

Comenzaremos hablando de tres definiciones equivalentes de $\pi_n(X)$, donde n es un entero positivo y X un espacio topológico. Para la primera de ellas consideramos el n-cubo unidad

$$I^n = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq t_i \leq 1, \text{ para todo } i\}$$

y su borde $\partial I^n = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n : \ t_i = 0 \text{ ó } t_i = 1 \text{ para algún } i\}$.
Si extendemos la idea de homotopía presentada en el Capítulo anterior al caso general para un entero positivo n, una de las definiciones que obtenemos es la siguiente.

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Consideramos el conjunto $F_n(X, p)$ de aplicaciones continuas $\alpha : I^n \to X$, donde $\alpha(\partial I^n) = p$. Se dice que dos aplicaciones $\alpha, \beta \in F_n(X, p)$ son homótopas módulo p si existe una homotopía $H : I^n \times I \to X$ de manera que

$$\begin{aligned} &H(t, 0) = \alpha(t) \text{ para todo } t \in I^n, \\ &H(t, 1) = \beta(t) \text{ para todo } t \in I^n, \\ &H(t, s) = p \text{ para todo } s \in I,\ t \in \partial I^n. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso $n = 1$, denotamos por $[\alpha]$ a la clase de homotopía de α módulo p.
Para definir la operación $*$ en $F_n(X, p)$, se tiene que para cada par de aplicaciones

$\alpha, \beta \in F_n(X,p)$

$$(\alpha * \beta)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

De este operador surge la operación $\circ$ definida en el conjunto de clases de homotopía de $F_n(X,p)$, que dota a este conjunto de estructura de grupo, donde $[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta]$. Este grupo recibe el nombre de *n-ésimo grupo de homotopía de X*.

Esta interpretación del n-ésimo grupo de homotopía resulta muy útil a la hora de construir homotopías y realizar operaciones como la concatenación de lazos, ya que con n-cubos es más sencillo trabajar con coordenadas cuando nos movemos en dimensiones mayores.
A continuación veremos una segunda definición en la cuál esta tarea puede resultar más compleja, sin embargo posee otras ventajas que después comentaremos. Para ello consideramos la esfera $\mathbb{S}^n$ de dimensión n y el punto $\mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n$.

Definición 2.1.2. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Consideramos el conjunto $G_n(X,p)$ de aplicaciones continuas $\alpha : \mathbb{S}^n \to X$ donde $\alpha(\mathbf{1}) = p$. Diremos que dos aplicaciones α y β son homótopas módulo el punto p si existe una homotopía $H : \mathbb{S}^n \times I \to X$ que cumple

$$\begin{aligned} &H(t,0) = \alpha(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{S}^n, \\ &H(t,1) = \beta(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{S}^n, \\ &H(1,s) = p \text{ para todo } s \in I. \end{aligned}$$

La clase de equivalencia $[\alpha]$ es la clase de homotopía de α, y llamamos *n-ésimo grupo de homotopía* al conjunto formado por estas clases, cuya operación es $\circ$, que a cada par de clases $[\alpha]$, $[\beta]$ le hace corresponder la clase $[\alpha * \beta]$.
Existe una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $F_n(X,x_0)$ y $G_n(X,x_0)$, de tal manera que a cada elemento $\alpha \in G_n(X,x_0)$ le corresponde el elemento $\hat{\alpha} \in F_n(X,x_0)$, donde $\hat{\alpha} = \alpha q$ y q es la aplicación $q : I^n \to \mathbb{S}^n$, que envía el borde ∂I^n al punto 1.
Una vez mencionada esta correspondencia, utilizaremos la aplicación q para ver cómo se define el producto $*$ en este caso.
Consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n : \ t_1 \leq \tfrac{1}{2}\}, \\ B &= \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n : \ t_1 \geq \tfrac{1}{2}\}, \end{aligned}$$

que por la aplicación q van a parar a A' y B' respectivamente, siendo estos los dos hemisferios de la esfera $\mathbb{S}^n$. Además se tiene que $A' \cap B' = q(A \cap B)$, siendo esta región homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Por ejemplo, si consideramos el caso $n = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \{(t_1, t_2) \in I^2 : \ t_1 \leq \tfrac{1}{2}\}, \\ B &= \{(t_1, t_2) \in I^2 : \ t_1 \geq \tfrac{1}{2}\}, \\ A' &= \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{S}^2 : \ s_3 \geq 0\}, \\ B' &= \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{S}^2 : \ s_3 \leq 0\}, \end{aligned}$$

con lo que $A \cap B$ resulta ser un segmento homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$, mientras que $A' \cap B'$ es una circunferencia, luego por definición de la aplicación $q : I^2 \to \mathbb{S}^2$ se tiene que $q(A \cap B) = A' \cap B'$, que como esperábamos, resulta ser un conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^1$.
Para poder definir el producto $*$, imaginemos que la intersección $A' \cap B'$ la identificamos con el punto $\mathbf{1}$ mediante una aplicacion cociente r, obteniendo así dos n-esferas tangentes en el punto $\mathbf{1}$. En el caso $n = 2$ esta identificación sería como contraer el ecuador de $\mathbb{S}^2$ a un punto, obteniendo así dos esferas de dimensión 2 tangentes en dicho punto. De esta manera, el producto $\alpha * \beta$ se define como

$$(\alpha * \beta)(x) = \begin{cases} \alpha r(x) & \text{si } x \in A' \\ \beta r(x) & \text{si } x \in B'. \end{cases}$$

La operación del grupo $\pi_n(X)$ queda definida como $[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Esta segunda definición, a pesar de presentar alguna dificultad a la hora de definir la operación $\circ$, es más visual que la anterior, pues resulta más intuitivo imaginar aplicaciones cuyo dominio es la esfera de dimensión n que verse ante un n-cubo al cual hay que identificarle todos sus bordes. Por ello muchos de los resultados que aparecerán a lo largo del Trabajo se mostrarán siguiendo esta segunda idea.
La última definición que comentaremos sobre el *n-ésimo grupo de homotopía* dista un poco de las dos anteriores, ya que para poder citarla es necesario presentar antes un nuevo concepto; la *topología compacto abierta*.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Consideramos el conjunto $\Omega(X, p)$ de todos los lazos en X de base p. Si $K \subset I$ es compacto y $U \subset X$ es abierto, podemos considerar el conjunto

$$W(K, U) = \{\alpha \in \Omega(X, p) : \alpha(K) \subset U\}.$$

Para cada K compacto de I y U abierto de X se tiene un conjunto $W(K, U)$, y la familia de todos ellos forma una subbase para una topología de $\Omega(X, p)$. Este conjunto recibe el nombre de *topología compacto abierta*.

Una vez hemos presentado la topología compacto abierta, estamos en virtud de dar la tercera definición de n-ésimo grupo de homotopía.

Definición 2.1.4. Sea X un espacio topológico, $p \in X$ y consideramos el conjunto $\Omega(X, p)$ dotado de la topología compacto abierta. Si $n \geq 2$, definimos el *n-ésimo*

grupo de homotopía de X como el (n-*1*)-ésimo grupo de homotopía de $\Omega(X, p)$, de manera que
$$\pi_n(X, p) = \pi_{n-1}(\Omega(X, p), c),$$
donde c es el lazo constante en p.

Esta última definición resulta ser la más abstracta de las tres, y por tanto será la que menos utilizaremos a lo largo de este Trabajo para referirnos a los grupos de homotopía. Sin embargo, el conjunto $\Omega(X, p)$ nos será de gran utilidad en algunos de los resultados que próximamente comentaremos.

2.2 Conmutatividad de $\pi_n(X, p)$ para $n \geq 2$

El *n-ésimo grupo de homotopía* de un espacio topológico es, como bien sugiere su nombre, un grupo para todo $n \geq 1$, pero en este apartado veremos que además es abeliano para $n \geq 2$. Esto en general no sucede en el caso $n = 1$. Por ejemplo, si consideramos la figura del ocho tenemos que su grupo fundamental es el producto libre con dos generadores $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que no es conmutativo. Este grupo se obtiene fácilmente haciendo uso de una consecuencia directa del Teorema de Seifert-Van Kampen, que dice así:

Sea $X = U \cup V$ un espacio topológico donde U, V son abiertos tales que U, V, $U \cap V$ son conexos por caminos y $p \in U \cap V$. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces
$$\pi_1(X, p) \approx \pi_1(U, p) \times \pi_1(V, p).$$

Si consideramos que el espacio X es la figura del ocho y tomamos los abiertos que se indican en la siguiente figura, obtenemos que la intersección de ambos abiertos es un espacio contráctil, luego es simplemente conexo.

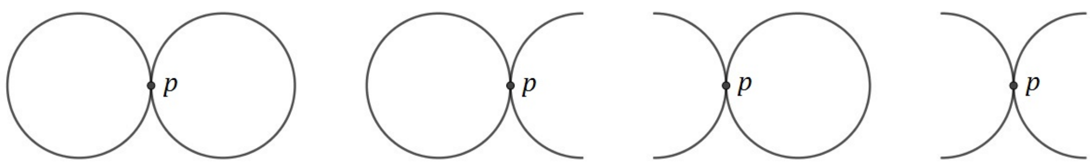

Figura 2.1: Los conjuntos X, U, V y $U \cap V$, de izquierda a derecha respectivamente.

Como además tenemos que los grupos fundamentales de los abiertos U y V coinciden con el de la circunferencia $\mathbb{S}^1$, y es bien sabido que este grupo es isomorfo a $\mathbb{Z}$, podemos concluir que $\pi_1(X, p) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $\times$ representa el producto libre, que no es abeliano.

Una vez hemos visto que la conmutatividad no es una propiedad que se cumpla siempre en el caso $n = 1$, veremos que sí está asegurada para todo $n \geq 2$. Para ello vamos a comenzar con una explicación intuitiva de por qué esto es así, y posteriormente daremos el resultado correspondiente a esta afirmación.
Supongamos que tenemos dos clases $[f], [g] \in \pi_n(X, p)$ donde f, $g : I^n \to X$. La homotopía resultante de componer las cuatro homotopías que aparecen en la siguiente imagen es la que nos va a permitir probar de manera intuitiva la conmutatividad del *n-ésimo grupo de homotopía* de X para $n \geq 2$, esto es, $[f] \circ [g] = [g] \circ [f]$. Para ello basta ver que $f * g \sim g * f$, pues dos aplicaciones homótopas pertenecen a la misma clase, y vimos que $[f] \circ [g] = [f * g]$.

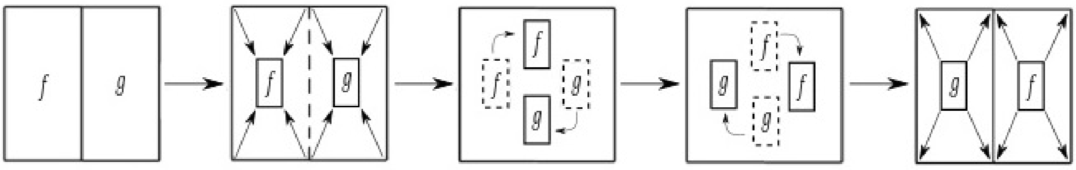

Figura 2.2: Idea intuitiva de la homotopía entre $f * g$ y $g * f$. Adaptada de [9] corrigiendo una errata en la distribución de los dominios.

La primera homotopía permite reducir los dominios de ambas aplicaciones, obteniendo así dos subcubos de I^n. La región que queda fuera de los subcubos va a parar al punto base p. La segunda y la tercera desplazan estos subcubos a cualquier parte de I^n, consiguiendo así intercambiar la posición inicial de ambos dominios, siempre y cuando los dominios reducidos de f y g se mantengan disjuntos. La última homotopía los devuelve a su tamaño original. Componiendo estas cuatro aplicaciones se consigue probar que $f * g \sim g * f$, luego $[f * g] = [g * f]$ y $[f] \circ [g] = [g] \circ [f]$.

Una vez comentada esta idea, vamos a demostrar esta propiedad de los grupos de homotopía desde un punto de vista diferente, haciendo uso de los *espacios de Hopf*. Hay muchas maneras de probar esta propiedad, pero introduciendo este nuevo concepto vamos a conseguir probar de una manera muy sencilla el Teorema que nos interesa. Esto se debe principalmente a que el grupo fundamental de un espacio de Hopf es siempre abeliano, y añadiendo algunas herramientas ya comentadas previamente en el Trabajo tenemos todo lo necesario para realizar la demostración de la conmutatividad de los grupos de homotopía para $n \geq 2$.

Definición 2.2.1. Un *espacio de Hopf* o *H-espacio* es un espacio topológico X junto con una multiplicación continua y un punto base $p \in X$ que cumple que las aplicaciones a las que multiplica p a izquierda y a derecha son homótopas a la aplicación identidad en X mediante homotopías que dejan fijo el punto p. En otras palabras, existen dos homotopías $H_1, H_2 : X \times I \to X$ tales que

$$\begin{aligned} H_1(x,0) &= px, & H_2(x,0) &= xp, \\ H_1(x,1) &= x, & H_2(x,1) &= x, \\ H_1(p,t) &= p, & H_2(p,t) &= p. \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y $t \in I$. El punto p se denomina *identidad de homotopía.*

Cabe destacar que todo grupo topológico G es un H-espacio, ya que si $e \in G$ es el elemento neutro y definimos la homotopía $H : G \times I \to G$ de manera que $H(g,t) = g$, tenemos que

$$\begin{aligned} H(g,0) &= g = eg, \\ H(g,1) &= g, \\ H(e,t) &= e. \end{aligned}$$

Por ejemplo, el conjunto $\Omega(X,p)$ de todos los lazos en X de base p dotado de la topología compacto abierta que aparece en la Definición 2.1.4 es un H-espacio. En este caso la multiplicación continua es la operación $*$ y la identidad de homotopía la aplicación constante c. Si tomamos un elemento cualquiera $\alpha \in \Omega(X,p)$ y $s \in I$, las homotopías H_1 y H_2 quedarían definidas de la siguiente manera

$$H_1(\alpha,s)(t) = \begin{cases} p & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1-s}{2} \\ \alpha\left(\dfrac{2t+s-1}{s+1}\right) & \text{si} \quad \dfrac{1-s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$H_2(\alpha,s)(t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2t}{s+1}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{2} \\ p & \text{si} \quad \dfrac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 2.2.2. *Si X es un H-espacio con identidad de homotopía p, entonces $\pi_1(X,p)$ es abeliano.*

Demostración. Sean $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega(X,p)$, donde $\Omega(X,p)$ es el conjunto de todos los lazos en X de base p. Consideramos en dicho conjunto la operación $\cdot$ definida como

$$\alpha \cdot \beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$$

para todo $t \in I$. Esta operación induce a su vez una operación $\square$ en $\pi_1(X,p)$

$$[\alpha] \square [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

donde $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, p)$. Sea c el lazo constante en el punto p, entonces

$$(\alpha * c) \cdot (c * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t)p & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ p\beta(2t-1) & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$(c * \alpha) \cdot (\beta * c)(t) = \begin{cases} p\beta(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \alpha(2t-1)p & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como X es un H-espacio y p su identidad de homotopía, las multiplicaciones a izquierda y a derecha de p son homótopas a la identidad en X, luego

$$\begin{aligned} (\alpha * c) \cdot (c * \beta) \sim \alpha * \beta \quad &\Rightarrow \quad [(\alpha * c) \cdot (c * \beta)] = [\alpha * \beta], \\ (c * \alpha) \cdot (\beta * c) \sim \beta * \alpha \quad &\Rightarrow \quad [(c * \alpha) \cdot (\beta * c)] = [\beta * \alpha]. \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} [\alpha] \circ [\beta] &= [\alpha * \beta] = [(\alpha * c) \cdot (c * \beta)] = [\alpha * c] \mathbin{\square} [c * \beta] \\ &= [c * \alpha] \mathbin{\square} [\beta * c] = [(c * \alpha) \cdot (\beta * c)] = [\beta * \alpha] \\ &= [\beta] \circ [\alpha], \end{aligned}$$

y $\pi_1(X, p)$ es abeliano. $\square$

Podemos pensar que si G es un grupo no abeliano, entonces su grupo fundamental tampoco lo será. Sin embargo esto no es cierto. Basta considerar la esfera $\mathbb{S}^3$ como el conjunto de los cuaterniones unidad, heredando la estructura de la multiplicación cuaterniónica. Este grupo no es abeliano, por no serlo el conjunto de los cuaterniones, pero sí lo es su grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^3) = \{e\}$.

Teorema 2.2.3. *Si X es un espacio topológico, los grupos $\pi_n(X, p)$ son abelianos para $n \geq 2$.*

Demostración. Probaremos este resultado por inducción.
Para el caso $n = 2$ basta tener en cuenta que $\Omega(X, p)$ es un H-espacio con identidad de homotopía c, luego su grupo fundamental $\pi_1(\Omega(X, p), c)$ es abeliano, y vimos en la Definición 2.1.4 que $\pi_1(\Omega(X, p), c) = \pi_2(X, p)$. Para probar el caso n supongamos que $\pi_{n-1}(Y, q)$ es abeliano, siendo Y un espacio topológico cualquiera. Tomando $Y = \Omega(X, p)$ se tiene que

$$\pi_n(X, p) = \pi_{n-1}(\Omega(X, p), c)$$

ha de ser abeliano. $\square$

2.3 Equivalencia homotópica

Uno de los principales problemas de la Topología es poder discernir cuándo dos espacios topológicos X e Y son homeomorfos. Averiguar si dichos espacios poseen grupos de homotopía isomorfos no basta, ya que es solo una condición necesaria. El contrarrecíproco sí nos puede ser de utilidad, puesto que dados dos espacios topológicos X e Y cuyos grupos de homotopía no son isomorfos, entonces dichos espacios no son homeomorfos. La equivalencia homotópica nos permite distinguir si dos espacios topológicos poseen grupos de homotopía isomorfos. La relación explicada anteriormente es debida a que se ha establecido una relación funtorial entre la categoría de espacios topológicos y la categoría de grupos.

Definición 2.3.1. Un *funtor* (covariante) F entre categorías C_1 y C_2 es una asignación tal que

- A cada objeto A de C_1 le corresponde un objeto $F(A)$ de C_2.
- A cada morfismo $f : A \to B$ de C_1 le corresponde un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ de C_2, de modo que $F(Id) = Id$ y $F(gf) = F(g)F(f)$.

En nuestro caso, los morfismos f y $F(f)$ vienen dados por la siguiente definición.

Definición 2.3.2. Sea $f : (X, p) \to (Y, q)$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos X e Y con $q = f(p)$. Se denomina *aplicación inducida* por f a la aplicación
$$f_* : \pi_n(X, p) \to \pi_n(Y, q),$$
que a cada clase $[\alpha] \in \pi_n(X, p)$ le hace corresponder la clase $[f\alpha] \in \pi_n(Y, q)$, siendo $\alpha : \mathbb{S}^n \to X$.

Veamos que π_n es un funtor entre la categoría de espacios topológicos y la de grupos. La primera condición de la Definición 2.3.1 es claro que se cumple, ya que a cada espacio topológico X se le asigna el grupo $\pi_n(X, p)$, con $p \in X$. Para verificar que se cumple la segunda tomamos dos aplicaciones continuas $f : (X, p) \to (Y, q)$, $g : (Y, q) \to (Z, r)$, y queremos ver que la aplicación $f_* : \pi_n(X, p) \to \pi_n(Y, q)$ satisface $(Id_X)_* = Id_{\pi_n(X,p)}$, lo cual es trivial ya que $[Id\ \alpha] = [\alpha]$, y $(gf)_* = g_* f_*$. Para ello tomamos un elemento $[\alpha]$ de $\pi_n(X, p)$ y calculamos su imagen por ambas aplicaciones
$$\begin{aligned}(gf)_*([\alpha]) &= [gf\alpha],\\ g_* f_*([\alpha]) &= g_*(f\alpha) = [gf\alpha].\end{aligned}$$
Así, π_n es un funtor entre las categorías previamente mencionadas.

Definición 2.3.3. Sea X un espacio topológico y un subespacio $A \subset X$. Una aplicación continua $r : X \to A$ se denomina *retracción* si $r \circ i = Id_A$, donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión. Si existe la aplicación r decimos que A es *retracto* de X.

Definición 2.3.4. Un subcojunto $A \subset X$ es un *retracto de deformación de X* si existe una retracción $r : X \to A$ que además cumple que $i \circ r \sim_A Id_X$.

Intuitivamente, para que un retracto r sea de deformación es necesario que podamos "deformar" de manera continua el espacio X hasta el subespacio A. Notar que no todos los retractos serán por tanto de deformación, como veremos en el Ejemplo 2.3.9.
A continuación comentaremos una noción más general que la de retracción por deformación; la *equivalencia homotópica.* En este caso no se impone la condición de que un subespacio esté estrictamente contenido en otro.

Definición 2.3.5. Sean X e Y dos espacios topológicos con $p \in X$ y $q \in Y$. Diremos que los pares (X,p) y (Y,q) son *homotópicamente equivalentes* o *tienen el mismo tipo de homotopía* si existen dos aplicaciones continuas $f : (X,p) \to (Y,q)$, $g : (Y,q) \to (X,p)$ tales que

$$\begin{aligned} fg &\sim Id_Y, \\ gf &\sim Id_X, \end{aligned}$$

mediante homotopías que mantienen fijos los puntos base. Esto es, existen
$H_1 : X \times I \to X$ y $H_2 : Y \times I \to Y$ que cumplen

$$\begin{array}{llll} H_1(x,0) = gf(x), & H_1(x,1) = x, & H_1(p,t) = p, & \text{para todo } x \in X,\ t \in I, \\ H_2(y,0) = fg(x), & H_2(y,1) = y, & H_2(q,t) = q, & \text{para todo } y \in Y,\ t \in I. \end{array}$$

La aplicación f se denomina *equivalencia homotópica.*

La relación funtorial que mencionábamos anteriormente es la que nos permitirá probar rigurosamente el siguiente resultado:

Si X e Y son dos espacios homotópicamente equivalentes, entonces los grupos $\pi_n(X,p)$ y $\pi_n(Y,q)$ son isomorfos.

De las anteriores definiciones se deduce el siguiente resultado de fácil comprobación.

Corolario 2.3.6. *Si A es un retracto de deformación de X, entonces ambos espacios son homotópicamente equivalentes.*

El siguiente ejemplo nos permitirá tener una visión más intuitiva de los conceptos introducidos previamente.

Ejemplo 2.3.7. Sea $p = (0,0)$ un punto del plano y $X = \mathbb{R}^2 - \{p\}$. Veamos que la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X, y por tanto ambos espacios serán homotópicamente equivalentes. Basta considerar la inclusión $i : \mathbb{S}^1 \to X$ tal que $i(s) = s$ para todo $s \in \mathbb{S}^1$ y la retracción $r : X \to \mathbb{S}^1$ que a todo punto $x \in X$ le hace corresponder el punto $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Con esto tenemos que $r \circ i = Id_{\mathbb{S}^1}$, luego r es retracción. Para ver que es de deformación consideramos la siguiente homotopía

$$\begin{array}{rccl} H\colon & X \times I & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \longmapsto & tx + \dfrac{(1-t)x}{\|x\|}, \end{array}$$

donde

$$H(x,0) = \frac{x}{\|x\|}, \qquad H(x,1) = x, \qquad H(s,t) = \frac{s}{\|s\|} = s,$$

para todo $x \in X$, $s \in \mathbb{S}^1$, $t \in I$. Así, $i \circ r \sim_{\mathbb{S}^1} Id_X$ y $\mathbb{S}^1$ es retracto de deformación de X.

Antes de mostrar el contraejemplo de que no todo retracto de deformación es retracto vamos a probar un resultado que nos va a permitir saber cuándo dos espacios topológicos tienen grupos de homotopía isomorfos.

Teorema 2.3.8. *Si $f : (X,p) \to (Y,q)$ es una equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo inducido*

$$f_* : \pi_n(X,p) \to \pi_n(Y,q),$$

es un isomorfismo para todo entero positivo n.

Demostración. Sean $f : (X,p) \to (Y,q)$, $g : (Y,q) \to (X,p)$ y H_1 la homotopía entre gf y Id_X mencionadas en la Definición 2.3.5. Tomamos un elemento $[\alpha] \in \pi_n(X,p)$ donde $\alpha(\partial I^n) = p$ y definimos una homotopía $F : I^n \times I \to X$ dada por

$$F(s,t) = H_1(\alpha(s),t), \qquad s \in I^n, t \in I.$$

Luego

$$\begin{aligned} F(s,0) &= H_1(\alpha(s),0) = gf\alpha(s), \\ F(s,1) &= H_1(\alpha(s),1) = \alpha(s), \\ F(\partial I^n \times I) &= H_1(\{p\} \times I) = p, \end{aligned}$$

y $gf\alpha \sim_p \alpha$, es decir, $[gf\alpha] = [\alpha]$.
Como f_* y g_* son los homomorfismos inducidos por las aplicaciones f y g respectivamente, tenemos que

$$g_* f_*[\alpha] = [gf\alpha].$$

Añadiendo la condición de que gf es homótopa a la identidad en X podemos concluir que

$$[Id_X \alpha] = [gf\alpha] = g_* f_*[\alpha] = [\alpha].$$

Así, f_* es un isomorfismo de grupos. □

Ejemplo 2.3.9. Consideramos el toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, cuyas coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} x &= \cos(s) \cdot (R + r \cdot \cos(t)) \\ y &= \operatorname{sen}(s) \cdot (R + r \cdot \cos(t)) \\ z &= r \cdot \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

donde R y r son las constantes que representan los radios mayor y menor respectivamente, y $s, t \in [0, 2\pi)$. Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - R)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0\}$ uno de los meridianos del toro. Es claro que la aplicación $r : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^1$ donde

$$r(x, y, z) = (\cos((1-\lambda) \cdot s) \cdot (R + r \cdot \cos(t)),\ \operatorname{sen}((1-\lambda) \cdot s) \cdot (R + r \cdot \cos(t)),\ r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

con $\lambda \in [0, 1]$ es una retracción, pues $i \circ r = Id_{\mathbb{S}^1}$. Sin embargo $\mathbb{S}^1$ no es retracto de deformación de $\mathbb{T}^2$, pues es bien sabido que el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al conjunto de enteros $\mathbb{Z}$, mientras que el del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Luego por el resultado anterior tenemos que los dos espacios no son homotópicamente equivalentes, y por el Corolario 2.3.6 podemos concluir que $\mathbb{S}^1$ no es retracto de deformación de $\mathbb{T}^2$.

2.4 Algunos ejemplos

Haciendo uso de los resultados vistos hasta ahora, daremos una colección de ejemplos sencillos e introduciremos un Teorema que nos servirá para calcular grupos de homotopía de espacios producto.

Ejemplo 2.4.1. Los grupos de homotopía de un punto p son todos triviales.
Sea $p \in X$ un punto cualquiera de un espacio topológico X y tomamos un elemento $[f] \in \pi_n(\{p\})$, donde $f : \mathbb{S}^n \to \{p\}$. Es claro que f coincide con la aplicación constante c_p, y es por eso que el único elemento del n-ésimo grupo de homotopía de p es la clase del lazo constante $[c_p]$, luego $\pi_n(\{p\}) = \{e\}$ para todo entero positivo n.

Ejemplo 2.4.2. Si X es contráctil, $\pi_n(X, p)$ es trivial para todo entero positivo n.
Para probarlo basta recordar el Teorema 1.1.10 en el que vimos que si X es un espacio topológico contráctil y $f, g : \mathbb{S}^n \to X$ son dos aplicaciones continuas, entonces $f \sim g$. Como el grupo $\pi_n(X, p)$ representa el conjunto de clases de equivalencia de aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^n \to X$ y todas ellas son homótopas entre sí por ser X contráctil, entonces se cumple que $\pi_n(X)$ es trivial para todo n.

Como consecuencia directa del ejemplo anterior, el n-ésimo grupo de homotopía de los siguientes espacios también consta de un solo elemento, ya que todos ellos son contráctiles.

- El espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ para cualquier valor de m.
- Los espacios convexos.

- Los conjuntos estrellados.

Seguidamente mostraremos un resultado que nos permitirá calcular el valor de los grupos de homotopía de todos aquellos espacios que puedan expresarse como producto de otros espacios más sencillos.

Teorema 2.4.3. *Sean X e Y dos espacios topológicos con $p \in X$, $q \in Y$. Entonces*

$$\pi_n(X \times Y,\ (p,q)) \approx \pi_n(X,p) \times \pi_n(Y,p),$$

para todo $n \geq 1$.

Demostración. Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \pi_n(X \times Y,\ (p,q)) & \longrightarrow & \pi_n(X,p) \times \pi_n(Y,p) \\ [\alpha] & \longmapsto & (p^X_*(\alpha),\ p^Y_*(\alpha)), \end{array}$$

donde $p^X : X \times Y \to X$, $p^Y : X \times Y \to Y$ denotan las proyecciones canónicas y $*$ el homomorfismo inducido.
Veamos que dicho homomorfismo es de hecho un isomorfismo. Es obvio que φ es sobreyectiva porque la antiimagen de cada par de clases $([\beta_1],[\beta_2])$ viene dada por $[\alpha] = [(\beta_1,\beta_2)]$. Para probar la inyectividad de φ veremos que su núcleo es la clase constante en el punto (p,q). Consideramos el par $(\beta_1,\beta_2) \sim (c_p,c_q)$ mediante las homotopías H_1, H_2. Entonces mediante la homotopía $H = (H_1,H_2)$ tenemos que la aplicación $\alpha = (\beta_1,\beta_2)$ es homótopa a la aplicación constante $c_{(p,q)}$. □

Ejemplo 2.4.4. Consideramos el cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $p \in C$. Su grupo fundamental $\pi_1(C,p)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, mientras que $\pi_n(C,p) = \{e\}$ para todo $n > 1$.
Por el Teorema anterior tenemos que para cualquier valor de n

$$\pi_n(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R},\ p) \approx \pi_n(\mathbb{S}^1,s) \times \pi_n(\mathbb{R},t),$$

donde $s \in \mathbb{S}^1$ y $t \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es contráctil, todos sus grupos de homotopía son triviales. Sin embargo, vimos que el grupo fundamental de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, y en el siguiente Capítulo veremos que $\pi_n(\mathbb{S}^1) = \{e\}$ para todo $n > 1$. Así

$$\begin{aligned} &\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R},\ p) \approx \pi_1(\mathbb{S}^1,s) \times \pi_1(\mathbb{R},t) \approx \mathbb{Z} \times \{e\} = \mathbb{Z}, \\ &\pi_n(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R},\ p) \approx \pi_n(\mathbb{S}^1,s) \times \pi_1(\mathbb{R},t) \approx \{e\} \times \{e\} = \{e\}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.5. El grupo fundamental del toro $\mathbb{T}^2$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y $\pi_n(\mathbb{T}^2,x)$ es trivial para todo $n > 1$.
Para probarlo escribimos el toro como $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, y aplicamos el Teorema 2.4.3

$$\begin{aligned} &\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,\ (s_1,s_2)) \approx \pi_1(\mathbb{S}^1,s_1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1,s_2) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ &\pi_n(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,\ (s_1,s_2)) \approx \pi_n(\mathbb{S}^1,s_1) \times \pi_n(\mathbb{S}^1,s_2) = \{e\} \times \{e\} = \{e\}, \quad n > 1, \end{aligned}$$

para cada $s_1, s_2 \in \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 2.4.6. El grupo fundamental del toro macizo $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, mientras que $\pi_n(T, x)$ es trivial para todo $n > 1$.
El disco $\mathbb{D}^2$ es contráctil, luego todos sus grupos de homotopía son triviales, de tal manera que nos encontramos ante el mismo caso que en el Ejemplo 2.4.4.

Capítulo 3

Grupos de Homotopía de Esferas

En este Capítulo utilizaremos algunos de los resultados anteriores para abordar uno de los objetivos principales de este Trabajo; *los grupos de homotopía de esferas.*
Toda esfera de cualquier dimensión es conexa por caminos, por lo que dados dos enteros positivos n, k, los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^n, s)$ y $\pi_k(\mathbb{S}^n, \hat{s})$ son isomorfos para $s, \hat{s} \in \mathbb{S}^n$. Es por esto que para simplificar la notación de ahora en adelante escribiremos $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ para referirnos al k-ésimo grupo de homotopía de $\mathbb{S}^n$.

3.1 Resultados básicos

Para empezar con el estudio de los grupos de homotopía en esferas trataremos primero el caso sencillo $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ para $k \leq n$, apoyándonos en algunos resultados vistos en las secciones anteriores. El caso $k > n$ será tratado posteriormente, aunque debido a su complejidad, no de una forma general. De hecho, el conocimiento del valor de ciertos grupos de homotopía continúa siendo un problema abierto para la Topología Algebraica.

Teorema 3.1.1. *Si $k < n$ entonces $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ es el grupo trivial.*

Demostración. Sea $[f] \in \pi_k(\mathbb{S}^n)$, donde $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ es una aplicación continua. Como $k < n$, f no es suprayectiva, y recordando el Teorema 1.1.12, dada una aplicación f continua y no suprayectiva, dicha aplicación es nulhomótopa. Es decir, $f \sim c_p$ siendo $c_p : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ una aplicación constante que a cada $s \in \mathbb{S}^k$ le hace corresponder el punto p. Así

$$[f] = [c_p] \implies \pi_k(\mathbb{S}^n) = \{e\}$$

y el k-ésimo grupo de homotopía de la esfera $\mathbb{S}^n$ es el grupo trivial, cuyo único elemento es la clase $[c_p]$ determinada por la aplicación constante. □

Una conclusión directa del resultado anterior es que el grupo fundamental de la n-esfera para $n > 1$ es trivial, esto es, $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{e\}$.
El siguiente Teorema aborda el caso $k = n$, y para dar una idea intuitiva de la demostración nos apoyaremos de la Teoría del grado vista en el primer Capítulo de este Trabajo.

Teorema 3.1.2. *El n-ésimo grupo de homotopía $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, para todo entero positivo n.*

Idea de la demostración. La Teoría del grado da una demostración rigurosa de que el conjunto de clases de equivalencia de las aplicaciones de una esfera en sí misma es isomorfo a $\mathbb{Z}$, pues dos aplicaciones son homótopas si y sólo si tienen el mismo grado (que es un número entero), pero no la detallaremos aquí, puesto que no hemos abordado dicha teoría.
Dado que el caso $n = 1$ se ha tratado en el Capítulo 1, realizaremos ahora la prueba intuitiva para el caso $n \geq 2$. No obstante el Teorema de suspensión de Freudenthal, que sí enuciaremos más adelante, permitirá probar que $\pi_k(\mathbb{S}^k)$ es isomorfo a $\pi_2(\mathbb{S}^2)$ para todo k, con lo que bastaría probar el Teorema para el caso $n = 2$.
Sea $[\alpha] \in \pi_n(\mathbb{S}^n)$, con $\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, y definimos la aplicación

$$\varphi : \pi_n(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{Z}$$

que a cada $[\alpha]$ le hace corresponder un número entero $\varphi[\alpha] =$ *grado de* α.
Por el Teorema 1.2.4 podemos asegurar que φ está bien definida y que además es inyectiva. Consideramos la aplicación identidad $Id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, que tiene grado 1. En la siguiente figura aparece representada la idea de cómo definimos la operación $*$ en la Definición 2.1.2, solo que en este caso las aplicaciones α y γ son ambas la identidad.

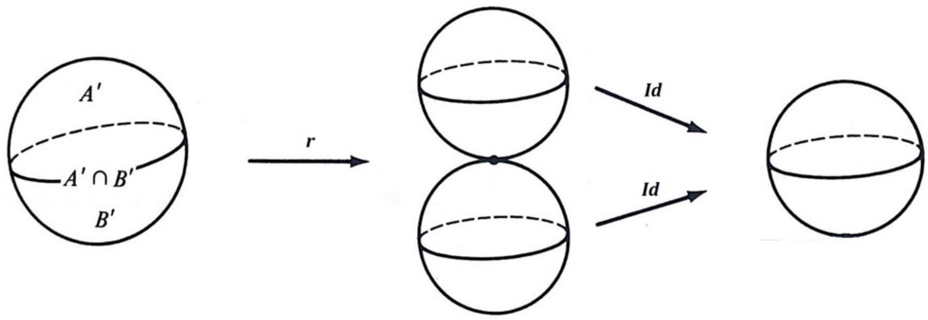

Figura 3.1: Esquema de la aplicación $Id * Id$. Figura adaptada de la Sección 6.2 de [1].

Así, la aplicación

$$Id^{\,2} = Id * Id$$

tiene grado 2, pues la esfera de llegada posee dos antiimágenes. Resulta muy intuitivo extender esta idea al caso general, de modo que la aplicación

$$Id^{\,k} = Id * Id * \overset{k}{\ldots} * Id$$

tiene grado k.

3.1.1 Conjetura de Poincaré

La conjetura de Poincaré es quizá uno de los problemas más famosos de clasificación topológica, además de ser el único problema del milenio que ha sido resuelto hasta la actualidad. En 1904, Poincaré realizó la siguiente conjetura:

Toda variedad topológica M tridimensional, cerrada y simplemente conexa es necesariamente homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^3$.

El planteamiento de este resultado surge a raíz de la siguiente caracterización de $\mathbb{S}^2$: la esfera $\mathbb{S}^2$ es la única variedad cerrada bidimensional con grupo fundamental trivial. Teniendo en cuenta que la esfera $\mathbb{S}^3$ también posee grupo fundamental trivial, tenía sentido plantearse la misma pregunta para dimensión 3. La prueba de esta conjetura es relativamente reciente, y fue dada por Grigori Perelman en el año 2003.
En vista de que existen n-variedades cerradas y simplemente conexas con $n > 3$ que no son homeomorfas a la esfera $\mathbb{S}^n$, en dimensiones superiores no podemos enunciar el análogo de dicha conjetura. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ una variedad de dimensión 4, compacta y conexa, luego es cerrada. Por el Teorema 2.4.3, el grupo fundamental

$$\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \approx \pi_1(\mathbb{S}^2) \times \pi_1(\mathbb{S}^2) = \{e\} \times \{e\} = \{e\},$$

luego X es simplemente conexa. Sin embargo, X no es homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^4$, pues poseen grupos de homotopía de orden 2 distintos

$$\begin{gathered}\pi_2(\mathbb{S}^4) = \{e\},\\ \pi_2(X) = \pi_2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \approx \pi_2(\mathbb{S}^2) \times \pi_2(\mathbb{S}^2) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.\end{gathered}$$

La conjetura de Poincaré generalizada establece que toda variedad topológica M de dimensión n cerrada y homotópicamente equivalente a la esfera $\mathbb{S}^n$ es homeomorfa a dicha esfera. En 1961 Smale probó que la conjetura es cierta para variedades de dimensión n con $n > 4$, y en 1982 Freedman probó la conjetura para $n = 4$. Los autores citados recibieron la Medalla Fields: Smale en 1966, Thurston en 1982, Freedman en 1986 y Perelman en 2006.

3.2 Fibraciones de Hopf

Al comienzo de este Capítulo hemos comentado algunos resultados básicos sobre los grupos de homotopía $\pi_k(\mathbb{S}^n)$. En el caso $k \leq n$, como hemos mencionado anteriormente, todos estos grupos son conocidos. Sin embargo cuando $k > n$ esto no ocurre, y solo se ha llegado a conocer una cantidad finita de ellos. En este último caso podría pensarse que los grupos de homotopía son triviales, como ocurre con los grupos de homología, pero gracias a Heinz Hopf se supo que esto no es así, ya que en 1931 demostró que el grupo $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ no es trivial, o de manera equivalente que la aplicación

$$h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$$

no es nulhomótopa. Dicha aplicación recibe el nombre de *Fibración de Hopf*, y está definida de modo que cada punto de $\mathbb{S}^2$ proviene de una circunferencia específica de $\mathbb{S}^3$.
Antes de probar que h no es nulhomótopa, veamos que está bien definida. Para ello consideramos las esferas

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \\ \mathbb{S}^3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Identificamos el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}^4$ con el plano complejo $\mathbb{C}^2$, de este modo

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 &\longleftrightarrow (z_1, x_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 &\longleftrightarrow (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

Con esta identificación podemos redefinir las esferas como

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &= \{(z_1, x_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z_1|^2 + x_3^2 = 1\}, \\ \mathbb{S}^3 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Así, la fibración de Hopf queda definida de la siguiente manera

$$h(z_1, z_2) = (2z_1\overline{z_2},\ |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{S}^2,$$

donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\overline{z_2}$ representa el complejo conjugado de z_2.
Es claro que la primera componente de la imagen es un número complejo y la segunda un número real, pero debemos comprobar que efectivamente es un punto de la esfera $\mathbb{S}^2$. Para ello tomamos $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ y veamos si su imagen por h satisface las ecuaciones de la 2-esfera.

$$\begin{aligned} |2z_1\overline{z_2}|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 &= (2z_1\overline{z_2})(2\overline{z_1}z_2) + |z_1|^4 + |z_2|^4 - 2|z_1||z_2| = \\ &= |z_1|^4 + |z_2|^4 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = 1^2 = 1, \end{aligned}$$

luego $h(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^2$.
Cabe destacar que dados dos puntos $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{S}^3$ se cumple que si $h(z_1, z_2) = h(w_1, w_2)$, entonces $(z_1, z_2) = \lambda(w_1, w_2)$, donde $|\lambda|^2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. La idea intuitiva de la implicación que tiene este hecho en el cálculo de las fibras de h es la que comentábamos anteriormente, cada punto de la esfera $\mathbb{S}^2$ proviene de

una única circunferencia de $\mathbb{S}^3$, es por eso que puntos de una misma circunferencia tienen la misma imagen. Así,

$$\begin{aligned} h(z_1,z_2) &= h(\lambda(w_1,w_2)) = h(\lambda w_1, \lambda w_2) = (2\lambda w_1 \overline{\lambda w_2},\ |\lambda w_1|^2 - |\lambda w_2|^2) = \\ &= (2|\lambda|^2 w_1 w_2,\ |\lambda|^2|w_1|^2 - |\lambda|^2|w_2|^2) = (2w_1w_2,\ |w_1|^2 - |w_2|^2) = \\ &= h(w_1,w_2), \end{aligned}$$

y queda demostrado que la aplicación h está bien definida para todo $(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^3$.
La prueba de que h no es homótopa a una aplicación constante requiere muchos resultados previos que no han sido indroducidos en la Memoria, de modo que solo comentaremos una idea de los pasos a seguir. Dado que la aplicación $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ es una inmersión suprayectiva y $\mathbb{S}^3$ es una variedad compacta, el Lema de Ehresmann implica que h es una fibración localmente trivial, en particular una fibración de Hurewicz. Así, h satisface la propiedad del levantamiento de homotopía. Supongamos que existe una homotopía

$$H : \mathbb{S}^3 \times I \to \mathbb{S}^2,$$

tal que para todo $x \in \mathbb{S}^3$

$$\begin{aligned} H(x,0) &= h(x), \\ H(x,1) &= c(x), \end{aligned}$$

donde $c : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ es la aplicación constante en el punto x. El levantamiento de homotopía $\tilde{H} : \mathbb{S}^3 \times I \to \mathbb{S}^3$, cuyo diagrama es el siguiente

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^3 \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^3 \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"] & \mathbb{S}^2 \end{tikzcd}$$

es una homotopía entre la identidad $Id_{\mathbb{S}^3}$ y c, luego la esfera $\mathbb{S}^3$ es contráctil. Pero esto no es posible, pues ya vimos que el grupo $\pi_3(\mathbb{S}^3)$ no es trivial, y como todos los grupos de un espacio contráctil han de ser triviales, hemos llegado a la contradicción que buscábamos.
Este tipo de herramientas son útiles para obtener información de otros grupos de homotopía como pueden ser $\pi_7(\mathbb{S}^4)$ y $\pi_{15}(\mathbb{S}^8)$, ya que además de la aplicación h, existen otras fibraciones de Hopf

$$\begin{aligned} h_1 &: \mathbb{S}^7 \to \ \mathbb{S}^4, \\ h_2 &: \mathbb{S}^{15} \to \ \mathbb{S}^8, \end{aligned}$$

cuya construcción se asemeja a la de $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$. Consideramos el conjunto de los cuaterniones y octoniones, que denotaremos respectivamente por $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Definimos las esferas

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^4 &= \{(z_1, x_5) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} : \|z_1\|^2 + x_5^2 = 1\}, \\
\mathbb{S}^7 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} : \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\}, \\
\mathbb{S}^8 &= \{(z_1, x_9) \in \mathbb{O} \times \mathbb{R} : \|z_1\|^2 + x_5^2 = 1\}, \\
\mathbb{S}^{15} &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{O} \times \mathbb{O} : \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\}.
\end{aligned}$$

El comportamiento de h_1 y h_2 es similar al de la fibración h, y aunque no vamos a entrar en detalles, sí podemos afirmar que no son nulhomótopas, luego los grupos $\pi_7(\mathbb{S}^4)$ y $\pi_{15}(\mathbb{S}^8)$ tampoco constan de un solo elemento.

Antes de presentar un resultado que nos permitirá calcular el valor del los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^1)$ para cualquier valor $k > 1$, es necesario dar un resultado previo que no probaremos, pues para su demostración necesitamos introducir varios conceptos y teoremas que no forman parte del objetivo de este Trabajo. Dicha prueba puede encontrarse de una forma detallada en la Sección 6.3 de [1].

Teorema 3.2.1. *Sea (E,p) un espacio recubridor de B, y sea $e_o \in E$, $b_0 \in B$ dos puntos que satisfacen que $p(e_0) = b_0$. Entonces, el homomorfismo inducido*

$$p_* : \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0),$$

es un isomorfismo para todo $n > 1$.

Teorema 3.2.2. *El k-ésimo grupo de homotopía $\pi_k(\mathbb{S}^1)$ es trivial para todo $k > 1$.*

Demostración. Sea $(\mathbb{R}, p)$ un espacio recubridor de la circunferencia $\mathbb{S}^1$, esto es, existe una aplicación continua

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,$$

que verifica que p es suprayectiva y para todo elemento $s \in \mathbb{S}^1$ existe un entorno abierto U de s tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, donde los abiertos V_i cumplen

- V_i es un abierto de $\mathbb{R}$ para todo $i \in I$.
- $V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j$.
- $p|_{V_i} : V_i \to U$ es un homomorfismo para todo $i \in I$.

La aplicación p recibe el nombre de *recubrimiento* y en este caso particular viene dada por $p(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$. Por el Teorema 3.2.1, el homomorfismo

$$p_* : \pi_k(\mathbb{R}) \to \pi_k(\mathbb{S}^1),$$

es un isomorfismo para $k > 1$. Recordemos que en el Ejemplo 1.1.9 vimos que $\mathbb{R}^n$ es contráctil para todo n, luego todos sus grupos de homotopía son triviales y podemos concluir que

$$\pi_k(\mathbb{S}^1) = \{e\},$$

para todo $k > 1$. □

En el siguiente ejemplo aparecen dos aplicaciones aparentemente similares, y nos va a servir para recordar que la suprayectividad es una condición suficiente para que una aplicación sea nulhomótopa, pero no es necesaria.

Ejemplo 3.2.3. Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (cos(z), sen(z)), \end{array}$$

donde $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^2$ tienen radio 1 y están ambas centradas en el origen. En este caso la aplicación f no es suprayectiva, ya que si tomamos por ejemplo el punto $(cos(\pi), sen(\pi)) \in \mathbb{S}^1$, este no posee antiimagen en la esfera $\mathbb{S}^2$, luego es nulhomótopa por el Teorema 1.1.12. Sin embargo la aplicación

$$\begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (cos(4z), sen(4z)), \end{array}$$

sí resulta ser suprayectiva, pues la parametrización $(cos(4z), sen(4z))$ recorre toda la circunferencia dado que $z \in [-1,1]$. Como comentábamos anteriormente, esto no implica que g no sea nulhomótopa, ya que como vimos en el Teorema 3.2.2, el k-ésimo grupo de homotopía de la circunferencia es trivial para todo $k > 1$.

La utilidad de la fibración de Hopf para el cálculo de grupos de homotopía culmina con el Teorema 3.2.5. Antes de enunciar dicho resultado necesitaremos introducir el siguiente lema.

Lema 3.2.4. *Los grupos $\pi_n(\mathbb{S}^2)$ y $\pi_n(\mathbb{S}^3)$ son isomorfos para todo $n \geq 3$.*

Idea de la demostración. A pesar de enunciarse como lema, este es un resultado profundo (véase [7], fórmula (3) de página 111) que requiere el empleo de la sucesión larga de homotopía asociada a la fibración de Hopf $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ con fibra $\mathbb{S}^1$.
La idea es que si $E \to B$ es un fibrado de espacio total E, espacio base B y fibra F, entonces se tiene una sucesión exacta, es decir, la imagen de cada aplicación coincide con el núcleo de la siguiente:

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{f_{i-1}} \pi_n(B) \xrightarrow{f_i} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{f_{i+1}} \pi_{n-1}(E) \longrightarrow \ldots$$

En el caso de la fibración de Hopf

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{S}^3) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{S}^3) \longrightarrow \ldots$$

Dado que los grupos $\pi_n(\mathbb{S}^1)$ son triviales para todo $n > 1$, si tomamos cualquier entero $n \geq 3$ obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\pi_n(\mathbb{S}^1) = \{e\} \xrightarrow{f_1} \pi_n(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{f_2} \pi_n(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{f_3} \{e\} = \pi_{n-1}(\mathbb{S}^1).$$

Veamos que f_2 es un isomorfismo:
Como la imagen de f_1 es 0, por definición de sucesión exacta tenemos que

$$Im(f_1) = Ker(f_2) = 0,$$

luego f_2 es inyectiva. Por otro lado, la imagen de f_2 coincide con el núcleo de f_3, y como esta envía todos los elementos de $\pi_n(\mathbb{S}^2)$ al cero podemos concluir que

$$Im(f_2) = Ker(f_3) = \pi_n(\mathbb{S}^2).$$

Con esto queda demostrado que los grupos $\pi_n(\mathbb{S}^2)$ y $\pi_n(\mathbb{S}^3)$ son isomorfos para todo $n \geq 3$.

Teorema 3.2.5. *El grupo de homotopía $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Aplicando el lema precedente al caso $n = 3$, resulta

$$\pi_3(\mathbb{S}^2) \approx \pi_3(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}.$$

□

3.3 Teorema de suspensión de Freudenthal

Para cada par de enteros positivos n, k existe un homomorfismo

$$E : \pi_k(\mathbb{S}^n) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}),$$

conocido como *homomorfismo de suspensión.* A continuación daremos los detalles de su construcción.
Consideramos la esfera $\mathbb{S}^n$ como el subespacio de $\mathbb{S}^{n+1}$ donde su última coordenada es 0. En este caso se suele decir que $\mathbb{S}^n$ es el *ecuador* de $\mathbb{S}^{n+1}$. Denotamos N y S respectivamente, a los puntos $(0, \ldots, 0, 1)$ y $(0, \ldots, 0, -1)$ de $\mathbb{S}^{n+1}$, también conocidos coloquialmente como *polo norte* y *polo sur*.
Tomamos un elemento $[\alpha] \in \pi_k(\mathbb{S}^n)$ donde $\alpha : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$, y nuestro objetivo es definir su imagen por E. Para ello, extendemos α a una aplicación $\hat{\alpha} : \mathbb{S}^{k+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ de tal manera que $\hat{\alpha}|_{\mathbb{S}^k} = \alpha$. Asimismo, $\hat{\alpha}$ envía los puntos N y S de $\mathbb{S}^{k+1}$ a los puntos N y S de $\mathbb{S}^{n+1}$, respectivamente. Para el resto de puntos, definiremos su imagen de la siguiente manera:
Trazamos un arco que una el polo norte de $\mathbb{S}^{k+1}$ con un punto $x \in \mathbb{S}^k$. La imagen por $\hat{\alpha}$ de todos los puntos que se encuentren en dicho arco se corresponderá linealmente con los puntos que se encuentren en el arco que une el polo norte de $\mathbb{S}^{n+1}$ con el punto $\alpha(x) \in \mathbb{S}^n$. Para definir la imagen de los puntos que se encuentran en el otro hemisferio, basta repetir esta idea intercambiando el punto N con el punto S.
Podemos entonces concluir que dado un elemento $[\alpha] \in \pi_k(\mathbb{S}^n)$, el homomorfismo E queda definido por

$$E[\alpha] = [\hat{\alpha}].$$

La aplicación $\hat{\alpha}$ recibe el nombre de *suspensión* de α.
Este homomorfismo se puede describir en coordenadas del siguiente modo.

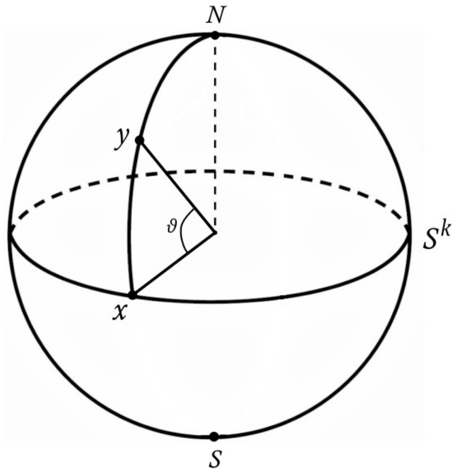

Figura 3.2: Esfera $\mathbb{S}^{k+1}$. Idea de la construcción de E con coordenadas.

Como observamos en la Figura 3.2, tomamos la esfera $\mathbb{S}^k$ como el ecuador de $\mathbb{S}^{k+1}$ y un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{S}^k$ con $\|x\| = 1$. Sea $y \in \mathbb{S}^{k+1}$ un punto del meridiano que pase por x y por ambos polos, entonces $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{k+2})$ con $\|y\| = 1$ y como se encuentra en el meridiano que pasa por x podemos escribir

$$y = (x_1 cos(\vartheta), \ldots, x_{k+1} cos(\vartheta), sen(\vartheta)),$$

donde $\vartheta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es el ángulo que forma con el plano ecuatorial. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & \mathbb{S}^k & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ & x & \longmapsto & \alpha(x), \end{array}$$

con lo que $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_{n+1}(x))$, y la suspensión de α

$$\begin{array}{rccc} \hat{\alpha}\colon & \mathbb{S}^{k+1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n+1} \\ & y & \longmapsto & \hat{\alpha}(y), \end{array}$$

cuya expresión en coordenadas es $\hat{\alpha}(y) = (\alpha_1(x) cos(\vartheta), \ldots, \alpha_{n+1}(x) cos(\vartheta), sen(\vartheta))$. Así, $\hat{\alpha}$ restringida al ecuador de $\mathbb{S}^{k+1}$ se comporta como α y ambos polos de la esfera $\mathbb{S}^{k+1}$ van a parar a ambos polos de $\mathbb{S}^{n+1}$

$$\hat{\alpha}(N) = \left(\alpha_1(x) cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \ldots, \alpha_{n+1}(x) cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right), sen\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = (0, \ldots, 0, 1),$$
$$\hat{\alpha}(S) = \left(\alpha_1(x) cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right), \ldots, \alpha_{n+1}(x) cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right), sen\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = (0, \ldots, 0, -1).$$

Veamos que el homomorfismo E está bien definido, esto es, que no depende del representante escogido de la clase $[\alpha]$. Tomamos dos elementos $[\alpha], [\beta] \in \pi_k(\mathbb{S}^n)$

tales que $[\alpha] = [\beta]$, es decir, $\alpha \sim \beta$. Sea $H : \mathbb{S}^k \times I \to \mathbb{S}^n$ la homotopía entre α y β, entonces

$$\begin{aligned} H(x,0) &= \alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_{n+1}(x)), \\ H(x,1) &= \beta(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Así, $H(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t) \ldots, H_{n+1}(x,t)) \in \mathbb{S}^n$, con lo que

$$\begin{aligned} H_1(x,0) &= \alpha_1(x), & H_1(x,1) &= \beta_1(x), \\ H_2(x,0) &= \alpha_2(x), & H_2(x,1) &= \beta_2(x), \\ &\vdots & &\vdots \\ H_{n+1}(x,0) &= \alpha_{n+1}(x), & H_{n+1}(x,1) &= \beta_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Definimos una nueva homotopía $\hat{H} : \mathbb{S}^{k+1} \times I \to \mathbb{S}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \hat{H}(y,t) = \hat{H}(x_1 cos(\vartheta), \ldots, x_{k+1} cos(\vartheta), sen(\vartheta), t) = (H(x,t) cos(\vartheta), sen(\vartheta)) = \\ = (H_1(x,t) cos(\vartheta), H_2(x,t) cos(\vartheta) \ldots, H_{n+1}(x,t) cos(\vartheta), sen(\vartheta)). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \hat{H}(x,0) &= (H_1(x,0) cos(\vartheta), H_2(x,0) cos(\vartheta) \ldots, H_{n+1}(x,0) cos(\vartheta), sen(\vartheta)) = \\ &= (\alpha_1(x) cos(\vartheta), \alpha_2(x) cos(\vartheta), \ldots, \alpha_{n+1}(x) cos(\vartheta), sen(\vartheta)) = \hat{\alpha}(y), \\ \hat{H}(x,1) &= (H_1(x,1) cos(\vartheta), H_2(x,1) cos(\vartheta) \ldots, H_{n+1}(x,1) cos(\vartheta), sen(\vartheta)) = \\ &= (\beta_1(x) cos(\vartheta), \beta_2(x) cos(\vartheta), \ldots, \beta_{n+1}(x) cos(\vartheta), sen(\vartheta)) = \hat{\beta}(y). \end{aligned}$$

Luego $\hat{H}$ es la homotopía entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, entonces $E[\alpha] = E[\beta]$ y E está bien definida. La prueba de que E es en efecto un homomorfismo puede verse en [7], página 112.

Seguidamente presentaremos un resultado del cual no realizaremos la demostración, y lo utilizaremos como base para probar dos corolarios posteriores. Aunque este Teorema no haya sido probado por Fred H.Croom en [1], su demostración puede encontrarse en [8] siguiendo varios resultados previos que se escapan del propósito de este Trabajo.

Teorema 3.3.1 (Teorema de suspensión de Freudenthal). *El homomorfismo de suspensión*

$$E : \pi_k(\mathbb{S}^n) \to \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1}),$$

es un isomorfismo para todo $k < 2n - 1$, y es suprayectivo para $k \leq 2n - 1$.

Los siguientes corolarios ya son conocidos por el lector, ya que se han probado al inicio de este Capítulo, pero resulta interesante ver que haciendo uso del Teorema 3.3.1, la demostración de estos dos resultados resulta ser muy sencilla.

Corolario 3.3.2. *Los grupos de homotopía $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ son triviales para $k < n$.*

Demostración. Tomamos un entero positivo $r < k$. Como $k < n$, tenemos que

$$1 + r + k < 2n,$$

y restanto el valor $2r + 1$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$k - r < 2n - (2r + 1) = 2(n - r) - 1.$$

Esto se cumple para cualquier valor de r que se encuentre entre 0 y $k - 1$, luego por el Teorema 3.3.1

$$\pi_k(\mathbb{S}^n) \approx \pi_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \approx \cdots \approx \pi_2(\mathbb{S}^{n-k+2}) \approx \pi_1(\mathbb{S}^{n-k+1}).$$

Como $k < n$, entonces $1 < n - k + 1$, y por el Teorema 3.1.1 el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^{n-k+1})$ es trivial, al igual que lo es su grupo isomorfo $\pi_k(\mathbb{S}^n)$. □

La última consecuencia que mencionaremos sobre el Teorema de suspensión de Freudenthal se cumple para cualquier entero positivo n, pero nosotros probaremos solo el caso $n \geq 2$, ya que en el Capítulo 1 hemos dado una demostración para $n = 1$.

Corolario 3.3.3. *Los grupos de homotopía $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ son isomorfos al conjunto de enteros $\mathbb{Z}$ para todo entero positivo $n \geq 2$.*

Demostración. Si $n \geq 2$, entonces $n < 2n - 1$, luego por el Teorema 3.3.1

$$\pi_2(\mathbb{S}^2) \approx \pi_3(\mathbb{S}^3) \approx \cdots \approx \pi_n(\mathbb{S}^n).$$

□

Capítulo 4

Reflexiones finales

El objetivo de esta Capítulo es, primeramente, destacar las ideas esenciales que se han querido mostrar en este Trabajo. De esta manera veremos que aunque parezca un tema cándido, nada más lejos de la realidad.
En esta Memoria hemos mostrado que algunos resultados conocidos para el grupo fundamental son igualmente ciertos para grupos de orden superior, como el que establece que la equivalencia homotópica de espacios topológicos implica que sus respectivos grupos de homotopía de cualquier orden son isomorfos. Mientras que en otros aspectos la diferencia es completa, como en la conmutatividad de $\pi_k(X, p)$ para $k > 1$, que no tiene por qué cumplirse para el caso $k = 1$. También hemos mostrado resultados que relacionan grupos de homotopía de distintos órdenes, de los que el Teorema de suspensión de Freudenthal es el ejemplo más importante.

Concluiremos esta Capítulo enunciando algunos resultados cuyas demostraciones exceden los propósitos de este Trabajo, como el Teorema de Hurewicz que relaciona grupos de homotopía y homología, y algunos resultados más sobre grupos de homotopía de esferas que resultan interesantes de comentar.

4.1 Conclusiones

La dificultad del cálculo de grupos de homotopía de orden superior ha quedado patente en muchos de los resultados vistos anteriormente. Cada paso que damos es un sinfin de nuevos conceptos, y resulta muy trabajoso avanzar, incluso libros como A. Hartcher [3] y Sze-Tsen Hu [8] omiten demostraciones importantes.

La primera idea a destacar es la existencia de varias **definiciones equivalentes** para el n-ésimo grupo de homotopía de un espacio topológico X cualquiera, seguida de la **conmutatividad** de los grupos $\pi_n(X, p)$ para $n \geq 2$, una propiedad sorprendente puesto que para $n = 1$ no es cierta. También vimos que si dos espacios topológicos son homotópicamente equivalentes, entonces sus grupos de homotopía son isomorfos.
Centrándonos por un momento en las esferas, hemos visto que los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ se

dividen en tres grandes bloques:

- Caso $k < n$, el más sencillo. Estos grupos son todos triviales, así como lo son $\pi_k(\mathbb{S}^1)$ para todo $k > 1$.

- Caso $k = n$. El conjunto de clases de aplicaciones continuas que van de la esfera $\mathbb{S}^n$ en sí misma forman un grupo que es isomorfo al conjunto de enteros $\mathbb{Z}$, y es aquí donde interviene la **Teoría del grado**, que mide el número de veces que una esfera de cualquier dimensión se envuelve en sí misma. Así, la clasificación de aplicaciones entre esferas de igual dimensión viene dada por dicha teoría.

- Caso $k > n$. En este último se encuentran los resultados más sorprendentes y a la vez más difíciles de calcular. Entre ellos $\pi_3(\mathbb{S}^2)$, que gracias a **la fibración de Hopf** se supo que este grupo no era trivial, mediante la prueba de que dicha aplicación no es nulhomótopa. Lo mismo ocurre con los grupos $\pi_7(\mathbb{S}^4)$ y $\pi_{15}(\mathbb{S}^8)$.

Así como la Teoría del grado es útil a la hora de relacionar esferas de igual dimensión, el **Teorema de suspensión de Freudenthal** sirve para vincular esferas de dimensiones distintas. La Figura 4.1 que aparece a continuación es una prueba de ello. Todos los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ que se encuentran por debajo de la línea negra irregular son constantes a lo largo de las diagonales, y esto se debe a que todos ellos cumplen la relación $k < 2n - 1$, y por tanto $\pi_k(\mathbb{S}^n) \approx \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1})$.

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0

Figura 4.1: Tabla adaptada de Wikipedia, *Homotopy groups of spheres.*

Estos grupos reciben el nombre de *grupos de homotopía estables*, y son todos finitos salvo los del caso $n = k$, cuyo valor ya es conocido por el lector.
La **sucesión exacta larga de homotopía** también nos permite calcular grupos de homotopía, en particular, nos aporta información sobre la relación que existe entre los grupos de homotopía de la esfera $\mathbb{S}^2$ los de $\mathbb{S}^3$. Es por esto que la tercera fila y la cuarta coinciden para todo $k \geq 3$, pues como vimos en el Lema 3.2.4, los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^2)$ y $\pi_k(\mathbb{S}^3)$ son isomorfos para todos estos valores.
A pesar de conocer todos estos resultados, los cuales simplifican enormemente el problema pues relacionan muchos de los grupos en los que estamos interesados, no se han llegado a conocer siquiera todos los grupos de homotopía de la esfera $\mathbb{S}^2$, incluso siendo este el espacio más sencillo tras los espacios euclídeos.

4.2 Resultados posteriores

El valor de los grupos $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$ cuando $k > 0$ es pequeño se conoce para ciertos valores de n, y aunque no son resultados que vayamos a demostrar, sí nos gustaría mencionarlos. Todas las asunciones que hagamos en los ejemplos que siguen están detalladas en el Capítulo 10 de [8], páginas 328 - 330.

Ejemplo 4.2.1. El grupo $\pi_{n+1}(\mathbb{S}^n)$ es cíclico de orden 2 para todo $n \geq 3$.
Sabiendo que $\pi_4(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_2$. Por el Teorema de suspensión de Freudenthal

$$\pi_4(\mathbb{S}^3) \approx \pi_5(\mathbb{S}^4) \approx \cdots \approx \pi_{n+1}(\mathbb{S}^n),$$

y $\pi_{n+1}(\mathbb{S}^n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ para $n \geq 3$.

Ejemplo 4.2.2. El grupo $\pi_{n+2}(\mathbb{S}^n)$ es cíclico de orden 2 para todo $n \geq 3$.
Al igual que en caso anterior, la guinda de esta demostración es aplicar el Teorema de suspensión a un grupo de homotopía concreto. Considerando que $\pi_6(\mathbb{S}^4) \approx \mathbb{Z}_2$, se tiene

$$\pi_6(\mathbb{S}^4) \approx \pi_7(\mathbb{S}^5) \approx \cdots \approx \pi_{n+2}(\mathbb{S}^n),$$

con lo que $\pi_{n+2}(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 4.2.3. El grupo $\pi_{n+3}(\mathbb{S}^n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{24}$ para todo $n \geq 5$.
Para $n = 3$ y $n = 4$ no es posible aplicar el Teorema de suspensión, dado que para estos valores no se cumple la relación $(n + 3) < 2n - 1$ que vimos en el Teorema 3.3.1. Si $n = 3$, el grupo $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{12}$, mientras que para $n = 4$ se tiene que $\pi_7(\mathbb{S}^4) \approx \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{12}$, grupo que ya sabíamos con anterioridad que no era trivial por la existencia de la aplicación de Hopf.

Es sabido que los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ son triviales para $k < n$, así como los de la circunferencia para $k > 1$. Sin embargo no son los únicos, ya que volviendo a la Figura 4.1 podemos observar que hay otros grupos que tienen esta propiedad, entre ellos los que veremos a continuación.

Ejemplo 4.2.4. El grupo $\pi_{n+4}(\mathbb{S}^n)$ es trivial para todo $n \geq 6$, que al igual que los ejemplos anteriores, se obtiene por el Teorema de suspensión a partir del grupo $\pi_{10}(\mathbb{S}^6) = \{e\}$.

Otro resultado digno de mención es que los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ cuando $k > n$ son todos finitos, excepto los grupos $\pi_{4m-1}(\mathbb{S}^{2m})$ con m un entero positivo, cuyo valor es siempre la suma directa de $\mathbb{Z}$ con un grupo finito. La prueba de este resultado puede seguirse en el Capítulo 5 de [2], página 551.

Por último, mencionaremos un resultado básico de la Topología Algebraica que conecta la Teoría de la homotopía con la Teoría de la homología, introduciendo previamente unas nociones básicas que el lector puede consultar en el Capítulo 1 de [1] y el Capítulo 2 de [3], para así poder obtener una introducción más completa sobre la homología simplicial. La prueba del Teorema en cuestión puede verse en [6].

Definición 4.2.5. Un *k-símplice* en $\mathbb{R}^n$ es una envolvente conexa de un conjunto finito de $k+1$ puntos afinmenmte independientes, esto es, ningún hiperplano de dimensión $k-1$ contiene a todos estos puntos.
Llamamos *cara* de un k-símplice de vértices $a_0, \ldots, a_k$, a cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \ldots, a_k\}$.
Un *complejo simplicial* K es una familia finita de símplices de forma que dado un elemento de K todas sus caras están en K, y la intersección de dos símplices de K es, o bien vacía o una cara común a ambos símplices.
La unión de todos los elementos de K se denomina *poliedro asociado a* K, y lo denotamos por $|K|$.

Teorema 4.2.6 (Teorema de Hurewicz)**.** *Sea K un complejo simplicial conexo y n un entero positivo con $n \geq 2$. Si $|K|$ es $(n-1)$-conexo, es decir, es conexo por caminos y además satisface la condición $\pi_i(|K|) = \{e\}$ para todo $i \leq n$, entonces los grupos $H_n(K)$ y $\pi_n(|K|)$ son isomorfos.*

Para una aplicación de este Teorema consideramos K un complejo simplicial con $|K|$ homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^n$. Dado que las esferas son espacios (n-*1*)-conexos para $n \geq 2$, entonces

$$H_n(\mathbb{S}^n) \approx \pi_n(\mathbb{S}^n).$$

A diferencia de lo visto en esta Memoria, el cálculo de los grupos de homología para esferas es un problema mucho más sencillo, en particular, el hecho de que $H_k(\mathbb{S}^n) = \{e\}$ para $k > n$ simplifica enormemente la obtención de su resultado. Verdaderamente, estamos hablando de un problema que ya se encuentra resuelto en su totalidad.

Me gustaría concluir esta Sección con un resultado transversal probado por John Milnor en el año 1956, que nos muestra cómo la Topología Algebraica puede ayudarnos en la caracterización de variedades diferenciables. Se dice que dos estructuras diferenciables $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ sobre una variedad M son equivalentes cuando exite un difeomorfismo $f : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}')$. Gracias a los grupos de homotopía de orden superior, Milnor consiguió demostrar que existen 28 estructuras diferenciables no equivalentes para la esfera $\mathbb{S}^7$, y realizó la construcción de estas definiendo fibrados de $\mathbb{S}^7$ sobre $\mathbb{S}^4$, con fibra la esfera $\mathbb{S}^3$. Debido, principalmente, a esta sorprendente aplicación de la Topología Algebraica recibió en 1962 la Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos de Estocolmo.

Bibliografía

[1] F.H. Croom. *Basic Concepts of Algebraic Topology.* Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1978.

[2] A. Hatcher. *Spectral sequences in Algebraic Topology.* Unpublished book project, accesible en http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATch5.pdf. (2004).

[3] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2005.

[4] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* University Press of Virginia, Charlottesville, Va, 1965.

[5] J. Porti. La conjetura de Poincaré. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, **43-44**, 2000.

[6] E. H. Spanier. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

[7] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1999.

[8] Sze-Tsen Hu. *Homotopy Theory.* Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII Academic Press, New York-London, 1959.

[9] Tengren Zhang. Freudenthal Suspension Theorem. `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/ZhangTengren.pdf`. Visitado: 2020-08-28.