UNIVERSIDAD
DE CANTABRIA

Facultad de Ciencias

SINGULARIDADES EN MODELOS UNIDIMENSIONALES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.
(Singularities in one-dimensional models of the Navier-Stokes equations)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Peña Labayru

Director: Rafael Granero Belinchón

Junio - 2020

Índice general

Agradecimientos

A mi director de trabajo de fin de grado, Rafael Granero Belinchón, por haberme guiado y aconsejado siempre que lo he necesitado.
Al profesorado de la Facultad de Ciencias, por su inestimable labor docente.
A mi familia, por haber estado ahí.

Resumen

En este trabajo se presenta en primer lugar el origen y derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales describen el comportamiento de todo fluido newtoniano e incompresible, a partir de las correspondientes leyes fundamentales. Asimismo, se introduce la ecuación de Burgers como un modelo unidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes y se estudian sus soluciones, además de la existencia de singularidades para las mismas bajo determinadas condiciones. Finalmente, se presenta el modelo unidimensional denominado *Cheap Navier-Stokes*, y se demuestra la existencia de singularidades para algunas soluciones periódicas de dicho modelo, bajo el cumplimiento de ciertas condiciones para los datos iniciales.
Palabras clave: Ecuaciones de Navier-Stokes, ecuación de Burgers, cheap Navier-Stokes.

Abstract

In this dissertation we present first the origin and derivation of the Navier-Stokes equations, which describe the behaviour of all Newtonian and incompressible fluids, based on the corresponding fundamental laws. Likewise, the Burgers equation is introduced as a one-dimensional model of the Navier-Stokes equations. Furthermore, the solutions of said model are studied, as well as the existence of singularities for them under particular conditions. Finally, the *Cheap Navier-Stokes* equation is presented and, under the fulfilment of certain conditions for the initial values, the existence of singularities for some periodic solutions is proved.
Key words: Navier-Stokes equations, Burgers equation, cheap Navier-Stokes.

Capítulo 1

Introducción histórica

Pese a que la mecánica de fluidos viviese una de sus épocas mas prosperas durante los siglos XVIII y XIX, sus orígenes se remontan a tiempos mucho mas pretéritos, abarcando prácticamente toda civilización y cultura.
Originariamente el conocimiento relativo a comportamiento de los fluidos era, en esencia, rudimentario y de carácter meramente pragmático, siendo este aplicado principalmente en la construcción de embarcaciones y sistemas de irrigación.
El nacimiento de civilizaciones como la griega, cuyo sistema económico se debía en gran medida al comercio marítimo, dio pie a grandes avances en hidrología y en ingeniería naval e hidráulica. A dicho periodo de tiempo corresponden también las aportaciones de Arquímedes (287 – 212 a.C.), cuyos estudios basados en la flotabilidad concluyeron al grito de ¡Eureka! en el famoso principio que lleva su nombre, según narra la leyenda, en un intento por determinar la cantidad de oro en la corona del rey Hierón II de Siracusa [1]. Asimismo, es en la antigua Grecia donde, de la mano de Parménides, nacen los primeros principios e ideas filosóficas acerca de la inmutabilidad de la materia, (*ex nihilo nihil fit*; de la nada, nada viene), que mas tarde acabarían germinando en lo que a día de hoy conocemos como las leyes de conservación.
Sin embargo, los avances realizados previos al Renacimiento se limitaron al perfeccionamiento en técnica e ingeniería, tal y como fue el caso de la construcción complejos sistemas de saneamiento y canales en el Imperio Romano y no sería hasta el siglo XVII cuando estudios experimentales como los realizados por el físico francés Edme Mariotte (1620 – 1684), sobre túneles de viento, o los llevados a cavo por Evangelista Torricelli (1608 – 1647), quien constato la existencia de presión atmosférica haciendo uso del barómetro de su propia invención, resultaron en considerables progresos en el conocimiento fundamental sobre la mecánica de fluidos, un campo previamente desatendido.
Durante dicho siglo, otra de las figuras mas relevantes sería la de Blaise Pascal (1623 – 1662), quien continuando con la labor de Torricelli, realizó estudios sobre el vacío y el equilibrio en fluidos que, posteriormente, sirvieron de cimientos a la hora de fundamentar el principio que recibe su nombre. No obstante, el mas importante progreso de aquella centuria vino de la mano de sir Isaac Newton (1642 – 1727), quien, *alzado a hombros de gigantes,* concibió las leyes del movimiento que resultarían en una revolución en el campo

de la física y enunció la ley de viscosidad, la cual caracteriza la relación entre las tensiones de corte y velocidad de deformación en ciertos fluidos [2], fluidos que mas tarde adoptarían el nombre de newtonianos. Asimismo, a la par que el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), ambos desarrollaron de forma independiente el cálculo infinitesimal, en el cual se sustentarían gran parte de los futuros avances elementales y cuya autoría permanece controvertida aún en nuestros días.
Ya en el siglo XVIII, a los estudios de Newton siguieron los realizados por Daniel Bernoulli (1700 – 1782), autor del famoso tratado *Hydrodynamica*, donde introdujo la noción de presión hidrodinámica y expuso la teoría detrás del movimiento de fluidos incompresibles a través de ciertos conductos y orificios, cimentándola en la ley de conservación de energía y en sus implicaciones en el comportamiento de los fluidos [3].
Basándose en dichos estudios, Leonhard Euler (1707 – 1783) describió matemáticamente el comportamiento de fluidos incompresibles y no viscosos a través de ecuaciones diferenciales, las cuales, a día de hoy se conocen como las ecuaciones de Euler. Esto dio pie a que Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783), a partir de dichas ecuaciones, enunciara su famosa paradoja (*todo cuerpo sumergido en un fluido no viscoso presenta resistencia nula*), con la intención de señalar las debilidades del trabajo de Euler, así como del estudio de fluidos mediante un planteamiento meramente teórico [4].
A este problema darían finalmente solución Claude-Louis Navier (1785 – 1836) y George Gabriel Stokes (1819 – 1903), quienes, de forma independiente, derivaron las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos admitiendo además su rozamiento, las ecuaciones de Navier-Stokes.

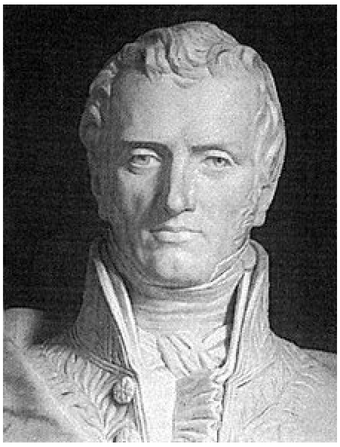

Figura 1.1: Claude-Louis Navier (Izda.) y George Gabriel Stokes (Dcha.)

Aunque en un principio dichas ecuaciones resultaran impracticables debido a su alta complejidad, a día de hoy, gracias a las mejoras tecnológicas y a los avances en métodos numéricos, son utilizadas en un amplio rango de aplicaciones practicas, que van desde predicciones meteorológicas a simulaciones para el diseño de automóviles. Sin embargo, nuestro entendimiento acerca las ecuaciones de Navier-Stokes permanece inconcluso,

siendo uno de los mas importantes problemas de las física-matemática. De hecho, su transcendencia es tal que el Instituto Clay de Matemáticas lo listó como uno de los siete problemas del milenio, premiando con un millón de dolares estadounidenses a todo aquel que demuestre o refute como en tres dimensiones, dado un campo vectorial inicial para la velocidad, existen un campo escalar para la presión y un campo de velocidad, ambos C^∞ y verificando ciertas condiciones que los dotan de sentido físico, que además sean solución de las ecuaciones de Navier-Stokes [5].
La existencia y regularidad de la soluciones ha sido demostrada en condiciones similares, como es el caso bidimensional por Olga Ladyzhenskaya (1922 – 2004) [6], bajo la imposición de ciertas restricciones sobre el tamaño de las condiciones iniciales, o en el caso de intervalos de tiempo finitos y suficientemente pequeños [7]. Otro significativo avance vino de la mano de Jean Leray (1906 – 1998) [8], quien probó la existencia de soluciones débiles en tres dimensiones, pese a que la unicidad de dichas soluciones es desconocida.
Sin embargo, el problema permanece abierto, siendo por lo tanto de gran relevancia el estudio de las soluciones de ecuaciones no-lineales derivadas u obtenidas a modo de simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Capítulo 2

Las ecuaciones de Navier-Stokes

2.1. Descripción del problema

Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre del matemático francés Claude-Louis Navier [9], [10] y el matemático inglés George Gabriel Stokes [11], quienes las derivaron por primera y vez de forma independiente a principios del siglo XIX. Son tres las ecuaciones que las componen: la ecuación de continuidad, la cual expresa la conservación de masa; la nulidad de la divergencia de la velocidad, que refleja la incompresibilidad del fluido y la ecuación del momento, la cual manifiesta la conservación del momento lineal. Matemáticamente, lo anterior se traduce en las siguientes ecuaciones[1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) \rho = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \tag{2.3}$$

Siendo $\rho, p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ los campos escalares correspondientes a la densidad y presión respectivamente; $\mathbf{v}, \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ los campos vectoriales correspondientes a la velocidad y fuerzas externas y $\mu \geq 0$ la viscosidad dinámica del fluido.
En lo que a las soluciones se refiere, dada la condición inicial

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

Las soluciones físicamente razonables (ver [5]), son aquellas para las que $\exists C > 0$ verificando:

$$p, \mathbf{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \tag{2.5}$$

$$\|\mathbf{v}(x, t)\|_{L^2} \leq C \quad \forall t \geq 0 \tag{2.6}$$

Es decir, son las soluciones suaves tales que su energía cinética total esta acotada.

[1] En lo que sigue, salvo que se especifique lo contrario, el laplaciano, el gradiente y la divergencia se tomaran con respecto a las variables espaciales, ocurriendo lo mismo para las normas.

2.2. Derivación

Comenzamos estableciendo varias nociones y consideraciones previas, propias de la mecánica clásica y la mecánica de fluidos, como es la hipótesis del medio continuo:

Hipótesis del medio continuo. *Las propiedades de un fluido o solido deformable pueden ser descritas como funciones continuas. Asimismo, en ocasiones dichas propiedades pueden ser descritas mediante funciones $C^1, C^2, \ldots, C^\infty$ y analíticas.*

En virtud de lo anterior, interpretaremos ciertas propiedades del fluido en cuestión, tales como la densidad ρ, mediante campos escalares C^∞ de la forma $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, los cuales dependen de la posición y el tiempo respectivamente. Asimismo consideramos otras características como la velocidad del fluido $\mathbf{v}$, como campos vectoriales C^∞, con $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ donde $n \in \mathbb{N}$, es la dimensión del espacio tratado.

2.2.1. Ecuación de continuidad

Las ecuaciones de continuidad son una familia de ecuaciones diferenciales, a menudo de formulación similar, las cuales expresan matemáticamente la conservación de ciertas cantidades físicas. Dichas ecuaciones aparecen en un amplio rango de campos, que van desde el electromagnetismo a la termodinámica, siendo la ecuación de continuidad en el contexto de la mecánica de fluidos, aquella que expresa de forma matemática la ley de conservación de masa.

Ley de conservación de masa. *Dado un sistema físico aislado, su masa permanece invariante en el tiempo.*

En lo que a su derivación se refiere, sea Ω un cierto volumen compacto de un fluido, denominado volumen de control, cuya superficie, la cual denotaremos con $\partial\Omega$, es regular a trozos. Entonces, de acuerdo con la definición de la densidad, sea $\mathcal{M}$ la masa correspondiente a dicho volumen, se tiene la siguiente igualdad:

$$\mathcal{M} = \iiint_\Omega \rho dV \tag{2.7}$$

Sea ahora dS un elemento diferencial de dicha superficie entonces con la notación precedente, la masa del fluido que fluye a través de dS y que *entra* en el volumen de control para un intervalo infinitesimal de tiempo dt dado, viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot (\mathbf{n}_S \cdot \mathbf{v}) \cdot dS$$

Donde $\mathbf{n}_S$ es el vector normal a la superficie que apunta hacia interior de la misma. Aplicando ahora el teorema de la divergencia, si integramos en toda la superficie para cierto volumen fijo, obtenemos el valor del flujo de masa en dicha superficie:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -\iint_{\partial\Omega} \rho(-\mathbf{n}_S \cdot \mathbf{v}) dS \\ &= -\iiint_\Omega \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right) dV \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por lo tanto, en virtud de las expresiones (2.7), (2.8) y de la ley de conservación de masa previamente descrita, se concluye que

$$\frac{d}{dt}\iiint_\Omega \rho dV = -\iiint_\Omega \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right) dV$$

Asimismo, puesto que el volumen Ω escogido no depende del tiempo, podemos pasar a derivar bajo el signo de la integral en el primer elemento de la igualdad anterior (ver [12]), obteniendo por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\iiint_\Omega \rho dV = \iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Luego, partiendo de lo anterior se tienen las igualdades siguientes

$$\iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_\Omega \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0$$
$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right) dV = 0$$

Concretamente lo anterior se cumple para toda bola compacta, para las cuales se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Sea $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se tiene que $\int_{\bar{B}(\alpha,r)} \eta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0$, entonces $\eta \equiv 0$.*

Demostración. Sea η una función en las condiciones del enunciado. Si existiera un $\alpha \in \mathbb{R}^n$ con $\eta(\alpha) > 0$, por ser esta continua ha de existir un $r > 0$ con $\eta(\mathbf{x}) > \eta(\alpha)/2$ para todo $\mathbf{x} \in \bar{B}(\alpha, r)$ y por ello

$$\int_{\bar{B}(\alpha,r)} \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \frac{\eta(\alpha)}{2} \mathrm{vol}(\bar{B}(\alpha, r)) > 0$$

Llegando así a una contradicción. El caso $\eta(\alpha) < 0$ puede razonarse aplicando lo anterior a $-\eta(\mathbf{x})$, por lo que se concluye que η ha de ser idénticamente nula. □

Por lo tanto, en virtud de lo anterior obtenemos finalmente la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Es decir, la ecuación de continuidad.

2.2.2. Incompresibilidad del fluido

Un aspecto importante a conocer a la hora de estudiar el comportamiento de un cierto fluido, es la posición de cada una de las partículas que lo componen, para lo cual se introduce la siguiente noción.

Definición 2.2. *Sea $\boldsymbol{\zeta} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ la función tal que para cada punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y cada $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}, t)$ es la posición en el momento t de aquella partícula cuya posición en $t = 0$ era $\boldsymbol{x}$. Dicha función se denomina función trayectoria de partícula o función de flujo del fluido y satisface la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}, t), t) \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{x} \tag{2.10}$$

Siendo $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ la velocidad del fluido.

Para cada instante de tiempo $\tau \geq 0$, la función trayectoria, $\zeta(\mathbf{x}, \tau)$, es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ (ver [13] o [14]), la cual permite el estudio de la evolución de de una cierta región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a través de su imagen por dicha función $\Omega_t := \boldsymbol{\zeta}(\Omega, t)$, tal y como puede observarse en la siguiente figura.

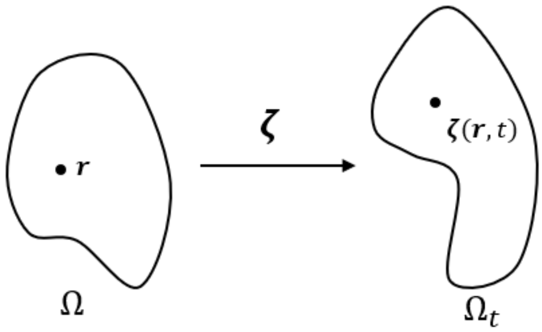

Figura 2.1: Evolución de Ω.

Asimismo, a raíz de lo anterior puede enunciarse la siguiente definición:

Definición 2.3. *Un fluido se dice incompresible si para toda región compacta del mismo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el volumen de Ω_t permanece constante en el tiempo, es decir, si para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \mathrm{vol}(\Omega_t)$$

Lema 2.4. *Sea $J_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{x}, t)$ el determinante Jacobiano de $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}, t)$, entonces se tiene que:*

$$\frac{\partial J_{\boldsymbol{\zeta}}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = J_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{x}, t) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}, t), t)$$

Demostración. Dado que el determinante de la matriz es una $n-$forma multilineal entonces tenemos que:

$$\frac{\partial J_{\boldsymbol{\zeta}}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} M_{ij}$$

Donde M_{ij} es el cofactor asociado a $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta_j}{\partial t}$, que según la descomposición anterior equivale al cofactor (i, j) de la matriz Jacobiana de $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t)$. Por lo tanto, en virtud de la ecuación (2.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta_j}{\partial t}(\mathbf{x}, t) M_{ij} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t), t) M_{ij} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial \zeta_k}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t), t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) M_{ij} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial \zeta_k}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t), t) J_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x}, t)\delta_k^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial \zeta_j}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t), t) J_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x}, t) \\ &= J_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v})(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t), t) \end{aligned}$$

□

Partiendo de dicho lema, podemos probar lo siguiente resultado, correspondiente a la segunda ecuación de Navier-Stokes:

Teorema 2.5. *Un fluido es incompresible si y solo si* $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \equiv 0$

Demostración. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región compacta del fluido, en virtud de la definición anterior, el fluido es incompresible si el $\mathrm{vol}(\Omega_t)$ permanece invariante en el tiempo, es decir, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{vol}(\Omega_t) = 0$. Además, al tratarse de conjuntos compactos puede derivarse bajo el signo de la integral (ver [12]) y de acuerdo con el lema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{vol}(\Omega_t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} dV \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} J_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x},t)dW \\
=& \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\boldsymbol{\zeta}}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\, dW \\
=& \int_{\Omega} J_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x},t)\cdot(\nabla\cdot\mathbf{v})\left(\boldsymbol{\zeta}\left(\mathbf{x},t\right),t\right)dW \\
=& \int_{\Omega_t} (\nabla\cdot\mathbf{v})dV
\end{aligned}$$

Y por lo tanto se concluye que $\int_{\Omega_t}(\nabla\cdot\mathbf{v})dV \equiv 0$.
Asimismo, dado que para cada compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ y $\tau \geq 0$, sea $\Omega\times\{\tau\} = \zeta^{-1}(\Lambda)\cap\mathbb{R}^n\times\{\tau\}$, entonces se tiene que $\Omega_\tau = \zeta(\Omega,\tau) = \Lambda$, al ser un homeomorfismo para cada tiempo fijo y se concluye que la integral de la divergencia ha de anularse en cada compacto y para cada $t \geq 0$, por lo que en virtud de la proposición 2.1, $\nabla\cdot\mathbf{v}\equiv 0$, siendo la implicación opuesta evidente a partir de las igualdades anteriores. □

Por lo tanto, la incompresibilidad del fluido se manifiesta a través de la nulidad de la divergencia del campo de velocidades.

2.2.3. Ecuación del momento

En lo que al estudio de las fuerzas que actúan sobre el fluido se refiere, estas pueden descomponerse en las fuerzas externas y las resultantes de las tensiones internas del propio fluido. Por lo tanto un concepto de suma importancia es la tensión mecánica:

Definición 2.6. *Se llama tensión mecánica a toda fuerza por unidad de área que actúa sobre una superficie del medio continuo, pudiendo ser dicha superficie real o ficticia.*

La tensión mecánica depende de la superficie escogida, por lo que su descripción matemática puede realizarse tomando para cada vector unitario $\mathbf{n}$, el correspondiente campo vectorial

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$$

Que expresa la tensión mecánica en cada punto y momento, con respecto del correspondiente plano de vector normal $\mathbf{n}$, al que pertenece dicho punto.
En cuanto a su interpretación, dado un punto sobre el que actúa una cierta tensión, podemos considerar un entorno del mismo delimitado por los correspondientes n planos coordenados. Entonces sobre cada uno de ellos se tendrá un vector de tensión, el cual puede a su vez descomponerse según sus componentes normal y tangenciales al propio plano. Es decir, sobre el $i-$ésimo plano, cuyo vector normal unitario es $\mathbf{n}_i$, la $j-$ésima componente del vector de tensión en dicho plano es $\sigma_{ij} := T_j^{(\mathbf{n}_i)} = \mathbf{T}^{(\mathbf{n}_i)}\cdot\mathbf{n}_j$, tal y como se observa en el esquema presentado en la Figura 1.

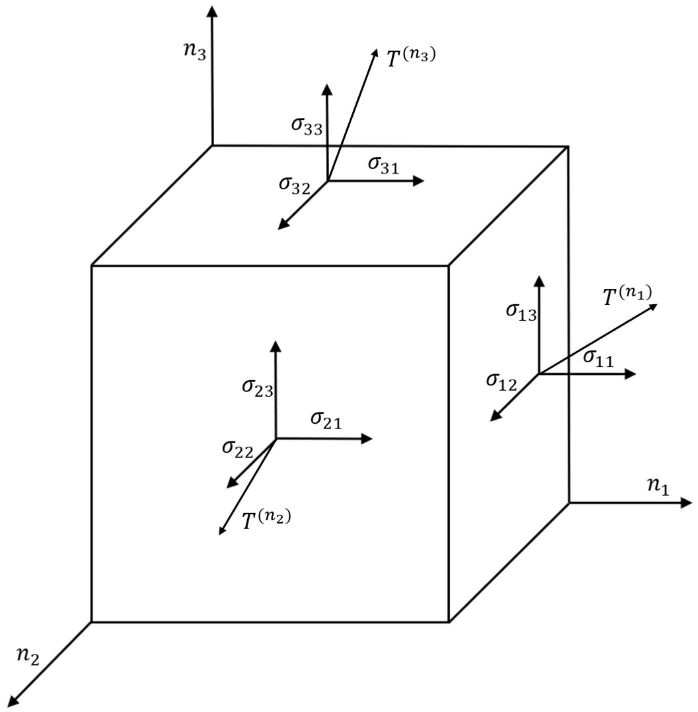

Figura 2.2: Descomposición de la tensión en un espacio tridimensional.

Por lo que al contraer lo anterior hacia el punto, se obtiene la correspondiente descomposición de la tensión mecánica en dicho punto.
Lo anterior admite una expresión general, utilizando la correspondiente formulación matricial. Para ello escribimos, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, el cual se denomina tensor de tensiones, o de Cauchy y en virtud del teorema homónimo, cuya demostración puede consultarse en [15], la descomposición precedente es la adecuada, lo que permite una descripción generalizada de la tensión mecánica.

Teorema de Cauchy. *Dado un vector unitario* $\boldsymbol{n}$*, el campo vectorial* $\boldsymbol{T}^{(\boldsymbol{n})}$ *queda unívocamente determinado en cada punto y momento, por el campo tensorial de segundo orden* $\boldsymbol{\sigma}$ *mediante la relación:*

$$\boldsymbol{T}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

Por otro lado, con la notación precedente podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.7. *Sea* $\boldsymbol{\sigma}$ *el tensor de tensiones definido en un medio continuo, se define la presión, p, como el opuesto de la media aritmética de las componentes normales de* $\boldsymbol{\sigma}$*. Es decir:*

$$p = -\frac{\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{n}$$

siendo $n \in \mathbb{N}$ *la dimensión del espacio y donde se adopta la notación negativa debido a que las tensiones actúan en dirección opuesta a la presión.*

Asimismo, denotando por $\mathbf{I}$ la correspondiente matriz identidad, sea el tensor $\boldsymbol{\tau}$ dado por

$$(\tau_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} + p \cdot \mathbf{I}$$

Entonces el tensor de tensiones admite una descomposición en dos términos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + (-p \cdot \mathbf{I})$$

Los cuales se denominan; tensor volumétrico, $(-p \cdot \mathbf{I})$, el cual representa las fuerzas que hacen variar el volumen, y el tensor desviador (o parte desviadora), $\boldsymbol{\tau}$, que representa las fuerzas causantes de los movimientos y deformaciones y cuyas componentes son las denominadas tensiones de corte τ_{ij}.
Por otro lado, introducimos la siguiente noción.

Definición 2.8. *Se llama fuerza volumétrica a toda fuerza por unidad de volumen que actúa sobre todas las partículas de un cuerpo dado. Dichas fuerzas también reciben el nombre de fuerzas de volumen.*

Observación 2.9. *Sea $\boldsymbol{b}$ una fuerza volumétrica, si denotamos por $\boldsymbol{f}$ la fuerza resultante (no volumétrica) debido a esta, entonces dado un elemento diferencial de volumen, dV, se tiene la siguiente relación*

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b} \cdot dV \tag{2.11}$$

Por otro lado, en lo que sigue se admitirá la hipótesis de que el fluido en cuestión sea newtoniano e incompresible.

Definición 2.10. *Un fluido se dice newtoniano si las tensiones de corte son proporcionales a la velocidad de deformación según la relación*

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Donde μ es la viscosidad dinámica del fluido y x_i y x_j son las $i-$esima y $j-$esima coordenadas, respectivamente, del espacio $\mathbb{R}^n$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$.

Una vez establecido todo lo anterior, podemos pasar a estudiar las fuerzas volumétricas correspondientes a las tensiones internas del fluido. Para ello, basta notar que para cada i y j, σ_{ij} define una cierta fuerza por unidad de área que se aplica sobre el $i-$esimo plano coordenado, en la dirección de x_j, luego $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$ define una fuerza volumétrica que actúa en la dirección de x_j. Por lo tanto, considerando todos los elementos del tensor de tensiones que actúan en la dirección de x_j, se tiene como resultado, el total de las fuerzas volumétricas que actúan en dicha dirección, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j})$$

Asimismo, en virtud de la descomposición del tensor de tensiones realizada previamente, se obtienen las siguiente igualdades

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) &= \nabla \cdot (\tau_{\cdot,j} - p \cdot \mathbf{I}_{\cdot,j}) \\ &= \nabla \cdot (\tau_{\cdot,j}) - \nabla \cdot (p \cdot \mathbf{I}_{\cdot,j})\end{aligned}$$

Considerando además, las correspondientes relaciones entre las tensiones de corte y la velocidad de deformación, se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\tau_{\cdot,j}) - \nabla \cdot (p \cdot \mathbf{I}_{\cdot,j}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (-p \cdot \mathbf{I}_{ij}) \\ &= \mu \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x_j} \\ &= \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla^2 v_j \right) - \frac{\partial p}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Y de acuerdo con el teorema 2.5, la divergencia de el campo de velocidades ha de anularse, por lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) = \mu \left(\nabla^2 v_j \right) - \frac{\partial p}{\partial x_j} \tag{2.12}$$

Por otro lado, en lo que a las fuerzas externas se refiere; dada una fuerza de volumen externa y que actúa sobre cierto fluido, al igual que ocurre con la velocidad, esta puede ser descrita como una función vectorial C^∞ de la forma:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$$

La cual depende de la posición y el tiempo respectivamente.
Entonces, el resultante de las fuerzas volumétricas que actúan en la $j-$esima dirección coordenada, b_j, viene dada por la siguiente expresión:

$$b_j = \nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) + F_j \tag{2.13}$$

Por lo tanto, para un cierto elemento diferencial de volumen dV, si denotamos la fuerza (no volumétrica) resultante como $\mathbf{f}$, concluimos entonces que, en virtud de (2.11) y (2.13), para la $j-$esima dirección se tiene la siguiente expresión:

$$d\mathbf{f}_j = (\nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) + F_j) \cdot dV \tag{2.14}$$

Sin embargo, considerando la ley de conservación del momento lineal.

Ley de conservación del momento lineal. *Dado un sistema físico aislado, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el mismo es nula, entonces su momento lineal permanece invariante en el tiempo.*

Por lo tanto, en virtud de la segunda ley de Newton, se tiene que $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, donde $\mathbf{p}$ es el momento lineal, lo que permite reescribir lo anterior de la siguiente forma.

$$d\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot dm) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\rho \cdot dV)$$

y por lo tanto para la $j-$esima dirección obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{f}_j &= \frac{d}{dt}(v_j \rho \cdot dV) \\
&= \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho + v_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho\right)\right] \cdot dV \\
&= \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho + v_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v})\right)\right] \cdot dV \\
&= \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho + v_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right)\right] \cdot dV \\
&= \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho \cdot dV \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Donde se ha aplicado la regla de la cadena y las igualdades (2.1) y (2.2).
Por lo que ahora podemos igualar las expresiones (2.14) y (2.15), obteniéndose así la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho \cdot dV = (\nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) + F_j) \cdot dV$$

Mediante un razonamiento similar al seguido en la obtención de la ecuación de continuidad, integrando para un cierto volumen de control $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se obtiene que

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho \cdot dV = \iiint_\Omega (\nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) + F_j) \cdot dV$$

Y por lo tanto se deduce que

$$\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho - (\nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) + F_j)\right] \cdot dV = 0$$

Pero como lo anterior es cierto $\forall\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$, se concluye que el integrando ha de ser idénticamente nulo, luego tenemos la siguiente expresión.

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho = \nabla \cdot (\sigma_{\cdot,j}) + F_j \qquad (2.16)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión obtenida en (2.12) en la igualdad (2.16) obtenemos la siguiente ecuación.

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_j\right)\rho = \mu\left(\nabla^2 v_j\right) - \frac{\partial p}{\partial x_j} + F_j$$

La cual puede generalizarse, utilizando la notación adecuada, es decir

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right)\rho = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

Obteniéndose así la última de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Capítulo 3

La ecuación de Burgers

La ecuación de Burgers es una ecuación en derivadas parciales, propuesta como una simplificación para el caso unidimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes, la cual es recurrente en diversas áreas de la matemática-aplicada relacionadas con la mecánica de fluidos. Esta fue introducida por primera vez en 1915 por el matemático inglés Harry Bateman (1882 – 1946) [16] y posteriormente estudiada por el físico holandés Jan Burgers (1895 – 1981) en el año 1948 [17].

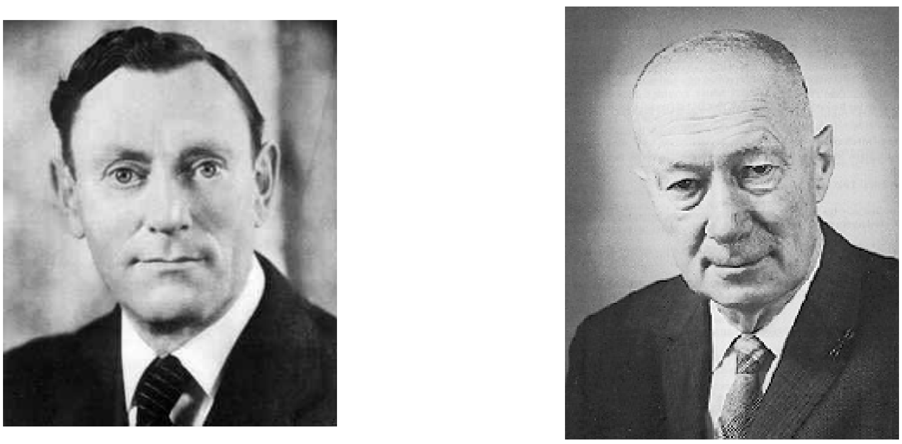

Figura 3.1: Harry Bateman (Izda.) y Jan Burgers (Dcha.)

La ecuación de Burgers viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

Siendo $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ la velocidad y $\nu := \frac{\mu}{\rho} \geq 0$ la viscosidad cinemática del fluido. De manera análoga a lo que ocurría con las ecuaciones de Navier-Stokes, dada la condición inicial

$$v(x,0) = v_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \tag{3.2}$$

Consideraremos que las soluciones físicamente razonables son aquellas para las que $\exists C > 0$ verificando:

$$v \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \tag{3.3}$$

$$\|v(x,t)\|_{L^2} \leq C \quad \forall t \geq 0 \tag{3.4}$$

Siendo por lo tanto, las soluciones suaves tales que su energía cinética total esta acotada. Se diferencian los casos $\nu > 0$ y $\nu = 0$ y reciben el nombre de ecuación de Burgers viscosa y no viscosa respectivamente, ya que pese a que esta última puede entenderse como un caso de la primera, las grandes diferencias que aparecen en su estudio resultan en que de manera general se las distingan.

3.1. Derivación

Las ecuaciones de Burgers pueden derivarse a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes como una mera simplificación de las mismas. De hecho, bajo la suposición de la inexistencia de fuerzas externas, es decir, si $\mathbf{F} \equiv 0$ y que el gradiente de la presión es de igual forma nulo, $\nabla p \equiv 0$. Si admitimos que la densidad, ρ, sea constante, entonces (2.1) y (2.2) son equivalentes y denotando por $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosidad cinemática, obtenemos a partir de (2.3) una forma generalizada de la ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Por lo tanto, si restringimos la anterior igualdad para el caso en el que el espacio en el que se define el campo vectorial es unidimensional, obtenemos la ecuación de Burgers (3.1), donde no se considera la restricción de la ecuación (2.2) al caso unidimensional pues hacerlo supondría tomar $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$, reduciendo por lo tanto el problema a uno trivial. Si finalmente suponemos que el valor de las viscosidad cinemática es nulo, de (3.1) obtenemos la denominada ecuación no viscosa de Burgers.

3.2. Modelo no viscoso

En lo que a la ecuación no viscosa de Burgers se refiere, esta es una ecuación cuasilineal en derivadas parciales y de primer orden, puesto que esta admite una formulación de la forma, $a(x,t,v)\frac{\partial v}{\partial x} + b(x,t,v)\frac{\partial v}{\partial t} = c(x,t,v)$. De hecho dicha ecuación es homogénea pues el último termino es $c(x,t,v) \equiv 0$. Por lo tanto, puede resolverse mediante el denominado método de las características.

3.2.1. El método de las características

Dicho método parte de una sencilla interpretación geométrica del problema, ya que en general, dada una ecuación cuasilineal con la formulación precedente, podemos definir una superficie dada por:

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^2 &\to f(U) \subset \mathbb{R}^3 \\ (x,t) &\mapsto (x,t,v(x,t)) \end{aligned}$$

Cuyo vector normal viene dado según la siguiente expresión:

$$\mathbf{n}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial t}, 1 \right)$$

Por otro lado, sea Λ el campo vectorial sobre en $\mathbb{R}^3$, definido por los coeficientes de la ecuación cuasilineal,

$$\Lambda(x,t,z) := (a(x,t,z), b(x,t,z), c(x,t,z))$$

Entonces si $v(x,t)$ es solución, entonces $\mathbf{n}(x,t) \cdot \Lambda(x,t,v) = 0$. Es decir, el campo Λ es tangente al grafo de la solución y por lo tanto este último estará formado por las curvas integrales de dicho campo vectorial.
Antes de dar un resultado general acerca de las soluciones de la ecuación no viscosa de Burgers, se introduce el siguiente resultado preliminar.

Lema 3.1. *Dado $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, no nula y creciente. Entonces $\forall C > 0$ se tiene que $\|\gamma(x)\|_{L^2} > C$.*

Demostración. Dada γ una función en las condiciones del enunciado, al ser esta no nula, entonces ha de existir un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que, o bien $\gamma(x_0) > 0$ o bien $\gamma(x_0) < 0$.
Además, por ser γ creciente, en el primero de los casos, se tiene que $\gamma(x) \geq \gamma(x_0) > 0$ para todo $x \geq x_0$ y por lo tanto

$$\|\gamma(x)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x)|^2 dx \geq \int_{x_0}^{+\infty} |\gamma(x_0)|^2 dx = +\infty$$

Y de manera análoga, en el caso opuesto se tiene que $\gamma(x) \leq \gamma(x_0) < 0$ para todo $x \leq x_0$, luego

$$\|\gamma(x)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x)|^2 dx \geq \int_{-\infty}^{x_0} |\gamma(x_0)|^2 dx = +\infty$$

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos se llega a la misma conclusión. □

Finalmente, haciendo uso del resultado anterior y el método de las características podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea el problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v(x,0) = \gamma(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{3.5}$$

Entonces las soluciones locales son de la forma

$$v(x,t) = \gamma(x - t \cdot v(x,t)) \tag{3.6}$$

Y toda solución no idénticamente nula tal que $\|v(x,t)\|_{L^2} \in \mathbb{R}\ \forall t \geq 0$*, desarrolla singularidades en tiempo finito. Por lo tanto, no existe solución no nula que globalmente verifique (3.3) y (3.4).*

Demostración. En virtud de la argumentación correspondiente al método de las características, buscamos las curvas integrales del campo definido por $\Lambda(x,t,z) = (z,1,0)$ que además verifiquen las condiciones iniciales.
En primer lugar, se parametriza cada componente en función de dos variables reales r y s, es decir; $x(r,s)$, $t(r,s)$ y $z(r,s)$. Asimismo, si la función inicial se parametriza como $\gamma(r)$, entonces el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de condiciones iniciales.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = z(r,s) \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(r,0) = r \\ t(r,0) = 0 \\ z(r,0) = \gamma(r) \end{cases} \tag{3.7}$$

Comenzamos con la última de las componentes, ya que de manera sencilla se obtiene que como $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(r,s) = 0$, entonces ha de ser $z(r,s) = \alpha_z(r)$ siendo $\alpha_z(r)$ una función auxiliar que depende de la variable r, la cual, considerando la condición inicial correspondiente, $z(r,0) = \gamma(r)$, se concluye que $\alpha_z(r) = \gamma(r)$ y por lo tanto $z(r,s) = \gamma(r)$.
De manera análoga, puesto que $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(r,s) = 1$ se tiene que $t(r,s) = s + \alpha_t(r)$, siendo de nuevo $\alpha_t(r)$ una función auxiliar y como ha de verificarse la condición inicial $t(r,0) = 0$ se concluye que $\alpha_t(r) \equiv 0$ y $t(r,s) = s$.
Por lo tanto, en virtud de lo anterior concluimos que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(r,s) = z(r,s) = \gamma(r)$, cuya solución general viene dada por la expresión $x(r,s) = s \cdot \gamma(r) + \alpha_x(r)$, por lo que teniendo en cuenta la respectiva condición inicial, $x(r,0) = r$ se concluye que $\alpha_x(r) = r$ y por ello $x(r,s) = s \cdot \gamma(r) + r$.
Por último, se resuelve para r y s en términos de x, t y z. Por lo tanto, por lo visto previamente se tiene que $s = t$ y puesto que $x = t \cdot \gamma(r) + r$, se tiene que

$$r = x - t \cdot \gamma(r) = x - t \cdot z$$

Por lo que finalmente podemos reescribir $z(r,s)$ de la siguiente forma

$$z(r,s) = \gamma(x - t \cdot z)$$

Y por lo tanto, tomando $v(x,t) = z(r(x,t), s(x,t))$ se concluye que la solución de (3.5) viene dada por la expresión

$$v(x,t) = \gamma(x - t \cdot v(x,t))$$

Por otro lado, con la notación precedente sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r_1 < r_2$ si se supone que para dichos valores se verifica que $\gamma(r_1) > \gamma(r_2)$, entonces las curvas dadas por

$$x_1(t) := \gamma(r_1) \cdot t + r_1$$

$$x_2(t) := \gamma(r_2) \cdot t + r_2$$

se cortan en el punto $x_0 = x_1(t_0) = x_2(t_0)$ donde

$$t_0 = \frac{r_2 - r_1}{\gamma(r_1) - \gamma(r_2)} > 0$$

Sin embargo, en virtud de la definición del sistema (3.7), se concluye que $v(x,t)$ permanece constante a lo largo de las curvas $(x_1(t), t)$ y $(x_2(t), t)$, y por ello se deduce lo siguiente:

$$v(x_0, t_0) = v(x_1(t_0), t_0) = v(x_1(0), 0) = v(r_1, 0) = \gamma(r_1)$$

Mientras que

$$v(x_0, t_0) = v(x_2(t_0), t_0) = v(x_2(0), 0) = v(r_2, 0) = \gamma(r_2)$$

Y por lo tanto llegamos a la conclusión de que en el punto (x_0, t_0), la solución toma dos valores distintos pues, por hipótesis, $\gamma(r_1) > \gamma(r_2)$. Por ello, se tiene que en dicho punto existirá una singularidad para la solución en forma de discontinuidad.
Finalmente, a raíz de lo anterior se deduce que para que no se den este tipo de singularidades, la función correspondiente a las condiciones iniciales $\gamma(x)$ ha de ser creciente con respecto de la variable x. Por lo cual, dada una solución no nula, entonces ha de ser $\gamma(x)$ no nulo, lo que en virtud del Lema 3.1 supone el incumplimiento de la condición (3.4). Por lo tanto, se concluye la inexistencia de soluciones no idénticamente nulas para el modelo no viscoso de Burgers, verificando globalmente las condiciones (3.3) y (3.4) impuestas. $\square$

3.3. Modelo viscoso

La ecuación de Burgers en su forma viscosa fue estudiada de forma independiente por el matemático austriaco Eberhard Hopf en 1950 [18] y el matemático estadounidense Julian Cole en 1951 [19], quienes obtuvieron la solución general del correspondiente problema de valores iniciales. En ambos casos, la metodología aplicada radica en el uso de una transformación, que en honor a sus precursores recibe el nombre de transformación de Cole-Hopf, la cual permite reducir el problema inicial a uno de valores iniciales involucrando la ecuación del calor y por lo tanto resoluble.

Teorema 3.3. *Sea el problema con valores iniciales correspondiente a la ecuación de Burgers viscosa*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x,0) = v_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Entonces las soluciones son de la forma

$$v(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta - \frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta - \frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy}$$

Demostración. En primer lugar la ecuación viscosa de Burgers puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v^2}{2}\right)$$

Por otro lado, consideramos ahora la función auxiliar definida de la manera siguiente

$$\phi(x,t) := e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x v(\eta,t)d\eta} \tag{3.8}$$

Entonces, en virtud del teorema fundamental del cálculo, de manera sencilla se obtienen las siguientes igualdades, en las cuales se cimienta la transformación de Cole-Hopf

$$\begin{aligned} v(x,t) &= -\frac{2\nu}{\phi(x,t)} \frac{-1}{2\nu} v\,(x,t)\,\phi(x,t) \\ &= -\frac{2\nu}{\phi(x,t)} \frac{\partial \phi}{\partial x}\,(x,t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Además, por otro lado se tiene la siguiente relación

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x}\phi - \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\phi^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

Por lo que, sustituyendo lo anterior en la ecuación de Burgers tenemos las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-2\nu}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2\nu}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-2\nu}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right) \\ -2\nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -2\nu^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\phi - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2}{\phi^2} + \left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Donde, si simplificando la parte derecha de la última igualdad se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)$$

Por lo tanto, integrando con respecto de la variable x se concluye que

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{1}{\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \delta(t)$$

Siendo $\delta(t)$ una función auxiliar que depende de la variable t. Por otro lado, podemos reescribir lo anterior como sigue

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi \cdot \delta(t)$$

De nuevo definimos una segunda función auxiliar.

$$\psi(x,t) := \phi(x,t)e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \tag{3.10}$$

Entonces en virtud de la igualdad (3.8) concluye que:

$$\psi(x,0) = \phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x v_0(\eta)d\eta}$$

Por otro lado, calculando la derivada parcial de ψ con respecto de la variable t, se obtienen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t) - \phi(x,t)\cdot\delta(t)\right)e^{-\int_0^t \delta(s)ds} \\ &= \nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,t)\,e^{-\int_0^t \delta(s)ds} = \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)\end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de valores iniciales.

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\ \psi(x,0) = e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x v_0(\eta)d\eta} \end{cases}$$

Es decir la Ecuación del Calor, cuya solución es bien conocida y la cual viene dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y,0)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy\end{aligned}$$

Por lo tanto, en virtud de la igualdad (3.10) se deduce que

$$\phi(x,t) = \frac{e^{\int_0^t \delta(s)ds}}{2\sqrt{\nu\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy$$

Finalmente por (3.9) concluimos que la solución es

$$\begin{aligned}v(x,t) &= -2\nu\frac{\frac{e^{\int_0^t \delta(s)ds}}{2\sqrt{\nu\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{x-y}{2\nu t}e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy}{\frac{e^{\int_0^t \delta(s)ds}}{2\sqrt{\nu\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-y}{t}e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy}{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^y v_0(\eta)d\eta-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy}\end{aligned}$$

□

3.4. Otro enfoque

Pese a que los métodos y resultados presentados en las secciones anteriores describen de manera efectiva las soluciones en sus respectivos casos, dichos procedimientos son específicos y carecen de carácter general. Por lo tanto, puede resultar de mayor interés el estudio de la ecuación de Burgers basado en la propia estructura de la misma.

3.4.1. Los espacios de Sobolev

En primer lugar, dado un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$, se definen los conjuntos

$$C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \text{ compacto}\}$$
$$L^1_{loc}(\Omega) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} : \varphi \in L^1(K), \forall K \subset \Omega \text{ con } K \text{ compacto}\}$$

A partir de las definiciones precedentes puede introducirse la noción de derivada débil.

Definición 3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Se dice que g es $\alpha-$ésima derivada débil de f si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene que*

$$\int_\Omega \left(f \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) d\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\varphi \cdot g) d\boldsymbol{x}$$

Y en tal caso se escribe $D^\alpha f := g$.

Observación 3.5. *Cuando la derivada exista en el sentido clásico, en virtud de la integración por partes, esta ha de coincidir en casi todo punto con su derivada débil (ver [20]).*

Asimismo, lo anterior permite definir los denominados espacios de Sobolev.

Definición 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$, se denomina espacio de Sobolev de orden k en Ω, al espacio dado por*

$$H^k(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \text{ con } |\alpha| \leq k\}$$

con la norma $\|\cdot\|_{k,2,\Omega}$ definida como

$$\|f\|_{k,2,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

Los espacios de Sobolev suponen una herramienta útil en el estudio de las soluciones de la ecuación de Burgers, pues al restringirse a dichos espacios se garantiza la existencia de la norma L^2. Por otro lado, dado $k \in \mathbb{N}$ sea el conjunto

$$C^k_\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^k(\mathbb{R}^n) : \lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \text{ con } |\alpha| \leq k \right\}$$

Entonces, el siguiente resultado, denominado teorema de inmersión de Sobolev, cuya demostración puede encontrarse en [21], permite relacionar $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ con $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.7. *Sean $k, n, s \in \mathbb{N}$ tales que $s > k + \frac{n}{2}$. Entonces $\exists C > 0$ tal que $\forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ existe una función $\phi \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi = \phi$ en c.t.p., dándose además la siguiente desigualdad*

$$\|\phi\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq C\|\varphi\|_{s,2,\mathbb{R}^n}$$

Por lo tanto, en virtud del teorema anterior, el estudio de las soluciones de la ecuación de Burgers, tales que, para todo $\tau \geq 0$, $v(x, \tau) \in H^k(\mathbb{R})$, puede reducirse a aquellas que cumplan además que $v(x, \tau) \in H^k(\mathbb{R}) \cap C^{k-1}_\infty(\mathbb{R})$ para todo $\tau \geq 0$.

Observación 3.8. *Desde una perspectiva física, limitarse a las soluciones precedentes es razonable, pues cabría esperar que el fluido en cuestión estuviera restringido espacialmente, siendo por lo tanto su velocidad convergente a cero en el infinito y su energía cinética total acotada.*

3.4.2. Estudio de las soluciones y sus cotas

Sea el problema de valores iniciales correspondiente a la ecuación de Burgers.

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \tag{3.11}$$

Donde la viscosidad cinemática es $\nu \geq 0$.
A partir de las nociones introducidas previamente, un resultado inmediato es el siguiente.

Proposición 3.9. *Sea $v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ una solución de (3.11) tal que, $\forall \tau \geq 0$, $v(x, \tau) \in H^3(\mathbb{R}) \cap C^2_\infty(\mathbb{R})$, entonces $\frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau) \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^0_\infty(\mathbb{R})$, $\forall \tau \geq 0$. Si además $\nu = 0$ entonces se tiene que $\frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau) \in H^2(\mathbb{R}) \cap C^1_\infty(\mathbb{R})$, $\forall \tau \geq 0$.*

Demostración. Sea v una solución en las condiciones anteriores, entonces, $\forall \tau \geq 0$ se tiene que $v(x, \tau)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x, \tau)$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \tau)$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x, \tau) \in L^2(\mathbb{R})$, por lo tanto se concluye que $\|v(x, \tau)\|_{3,2,\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. Además, en virtud de la desigualdad del teorema anterior se tiene que $\|v\|_{L^\infty}, \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{3,2,\mathbb{R}}$ para un cierto $C > 0$. Luego, aplicando la desigualdad de Minkowski se deduce lo siguiente

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2} \leq \left\|\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} + \left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2} \leq \nu\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2} < +\infty$$

De manera análoga se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right\|_{L^2} &\leq \left\|\nu\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right\|_{L^2} + \left\|v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} + \left\|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\|_{L^2} \\ &\leq \nu\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2} < +\infty \end{aligned}$$

Asimismo, puesto que $\frac{\partial v}{\partial t}(x,\tau) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\tau) - v(x,\tau)\frac{\partial v}{\partial x}(x,\tau) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, se concluye que $\frac{\partial v}{\partial t}(x,\tau) \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^0_\infty(\mathbb{R})$.
Por otro lado, si $\nu = 0$, de manera similar se tiene que

$$\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t}\right\|_{L^2} \leq \left\|v\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right\|_{L^2} + 3\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right\|_{L^2} + 3\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} < +\infty$$

Y $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x,\tau) = -v\frac{\partial v}{\partial x^2}(x,\tau) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,\tau)\right)^2 \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, luego se tiene que $\frac{\partial v}{\partial t}\,(x,\tau) \in H^2(\mathbb{R}) \cap C^1_\infty(\mathbb{R})$ □

Un aspecto a tener en consideración a la hora de estudiar las cotas de las distintas soluciones, es el comportamiento del máximo y el mínimo, razón por la cual se introduce el siguiente resultado acerca de la existencia de los mismos.

Proposición 3.10. *Dada una función $\eta \in C^0_\infty(\mathbb{R})$, entonces η alcanza su máximo, si y solo si $\exists \chi \in \mathbb{R}$ con $\eta(\chi) \geq 0$. De manera similar, η alcanza su mínimo si y solo si $\exists \chi \in \mathbb{R}$ tal que $\eta(\chi) \leq 0$.*

Demostración. Sea $\eta \in C^0_\infty(\mathbb{R})$, si existiera $\chi \in \mathbb{R}$ tal que $\eta(\chi) \geq 0$, entonces de ser $\eta(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, se concluye que $\eta(\chi) = \max_x \eta(x) = 0$. Si por el contrario existe un $x_+ \in \mathbb{R}$ con $\eta(x_+) = \delta > 0$, puesto que se tiene que $\lim_{|x|\to+\infty} \eta(x) = 0$, se deduce que ha de existir un $L > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > L$ se tiene que $|\eta(x)| < \delta/2$ y por ello

$$\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus[-L,L]} \eta(x) \leq \sup_{x\in[-L,L]} \eta(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \eta(x)$$

Por lo que, al ser η una función continua y $[-L,L]$ un conjunto compacto, dicho supremo ha de alcanzarse, es decir $\exists \alpha \in [-L,L]$ tal que $\sup_x \eta(x) = \eta(\alpha) = \max_x \eta(x)$.
Recíprocamente, si fuera $\eta(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces dado un numero real β cualquiera, sea $\gamma = \eta(\beta) < 0$, de nuevo, puesto que $\lim_{|x|\to+\infty} \eta(x) = 0$, ha de existir un $M > 0$ tal que si $|x| > M$ entonces $|\eta(x)| < |\gamma|/2$ y por ello $\eta(x) > \eta(\beta)$. Por lo tanto se concluye que η no puede alcanzar su máximo y por ello, para que el máximo se alcance ha de existir un $\chi \in \mathbb{R}$ con $\eta(\chi) \geq 0$.
En cuanto al resultado análogo para el mínimo, $\eta(x)$ alcanza su mínimo si y solo si $-\eta(x)$ alcanza su máximo, lo cual por lo anterior ocurre si y solo si existe un $\chi \in \mathbb{R}$ con $-\eta(\chi) \geq 0$, si y solo si $\eta(\chi) \leq 0$. □

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado sobre la existencia del máximo y mínimo de la derivada de ciertas funciones.

Lema 3.11. *Sea una función $\eta \in C^1_\infty(\mathbb{R})$ entonces su derivada $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Dada $\eta \in C^1_\infty(\mathbb{R})$, entonces en se dan las siguientes igualdades

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \eta}{\partial x}\,(x)\,dx = \eta(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Si no existiese el máximo, de acuerdo con la proposición precedente ha de ser $\frac{\partial \eta}{\partial x}(x) < 0$ para todo x y por ello $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \eta}{\partial x}(x)\, dx < 0$, llegando así a una contradicción. Luego ha de existir un cierto $x_+ \in \mathbb{R}$ con $\frac{\partial \eta}{\partial x}(x_+) \geq 0$ y por lo tanto se alcanza el máximo.
De manera análoga, no puede ser $\frac{\partial \eta}{\partial x}(x) > 0$ para todo x pues en tal caso $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \eta}{\partial x}(x)\, dx > 0$. Por lo que debe existir un $x_- \in \mathbb{R}$ con $\eta(x_-) \leq 0$ y por ello el mínimo. □

Por otro lado, se recoge en el siguiente lema un resultado sobre la continuidad del máximo y mínimo.

Lema 3.12. *Sea* $\eta \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ *tal que para todo* $\tau \geq 0$, $\eta(x, \tau) \in C^0_\infty(\mathbb{R})$ *y* $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,t)\right| \in \mathbb{R}$ *para todo* $T \geq 0$*. Entonces las funciones* $M_\eta(t) = \text{máx}_x\, \eta(x,t)$ *y* $m_\eta(t) = \text{mín}_x\, \eta(x,t)$ *son Lipschitz continuas en todo intervalo acotado en el que estén definidas.*

Demostración. Sea η una función en dichas condiciones, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, consideramos los intervalos (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ y $[a, b]$. Suponiendo que $m_\eta(t)$ o $M_\eta(t)$ estén bien definidas en alguno de dichos intervalos, entonces dados r, s con $r < s$ pertenecientes al intervalo en cuestión, de manera directa se observa que

$$|M_\eta(s) - M_\eta(r)|, |m_\eta(s) - m_\eta(r)| \leq \text{máx}_x |\eta(x, s) - \eta(x, r)|$$

Sin embargo, para cada $\chi \in \mathbb{R}$, puesto que $\eta(\chi, t) \in C^1([a, b])$ se tiene que, en virtud del teorema del valor medio de Lagrange, ha de existir un $c \in (r, s)$ tal que

$$\eta(\chi, s) - \eta(\chi, r) = (s - r)\frac{\partial \eta}{\partial t}(\chi, c)$$

Por lo tanto, podemos definir el siguiente valor

$$\Lambda_\eta := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[a,b]} \left|\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t)\right|$$

Que es independiente de los valores r y s. Entonces, se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}
|M_\eta(s) - M_\eta(r)|, |m_\eta(s) - m_\eta(r)| &\leq \text{máx}_x |\eta(x, s) - \eta(x, r)| \\
&\leq \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[a,b]} \left|(r - s)\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t)\right| \\
&\leq \Lambda_\eta |s - r|
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que las funciones $M_\eta(t)$ y $m_\eta(t)$ han de ser funciones Lipschitz continuas en los intervalos acotados en los que estén definidas. □

Se introduce a continuación el denominado teorema de Rademacher, en honor al matemático alemán Hans Rademacher y cuya demostración puede hallarse en [22].

Teorema 3.13 (Rademacher). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua. Entonces g es diferenciable en casi todo punto en Ω.*

Partiendo de los resultados precedentes, podemos probar el siguiente teorema, similar al teorema 3.2, acerca de la existencia finita de algunas soluciones de la ecuación no viscosa de Burgers.

Teorema 3.14. *Toda solución no trivial $v \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ de (3.11) con $\nu = 0$ tal que para todo $\tau \geq 0$, $v(x,\tau) \in C^1_\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x,t)\right| \in \mathbb{R}$, $\forall T \geq 0$ desarrolla singularidades en tiempo finito.*

Demostración. Sea $v \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ una solución no idénticamente nula, tal que verifica las condiciones del enunciado. Definimos ahora $\lambda(x,t) := \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$, entonces, puesto que para cada $\tau \geq 0$ se tiene que $v(x,\tau) \in C^1_\infty(\mathbb{R})$, en virtud del lema 3.11 se concluye que la función $m_\lambda(t) := \text{mín}_x\, \lambda(x,t)$ esta bien definida para todo $t \geq 0$. Asimismo, de acuerdo con el lema 3.12 anterior esta es Lipschitz en todo $[0,T] \subset [0,+\infty)$. Por lo tanto, el teorema de Rademacher nos garantiza la diferenciabilidad de $m_\lambda(t)$ en casi todo punto de su dominio.
Además, denotando para cada $t \geq 0$ por (x_t, t) un par tal que $\lambda(x_t,t) = m_\lambda(t)$, entonces en aquellos punto en los que es diferenciable, teniendo en cuenta que se trata del mínimo, se ha de cumplir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{m_\lambda(t+h) - m_\lambda(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(x_{t+h}, t+h) - \lambda(x_t,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(x_{t+h}, t+h) - \lambda(x_t, t+h) + \lambda(x_t, t+h) - \lambda(x_t,t)}{h} \\
&\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(x_t, t+h) - \lambda(x_t,t)}{h} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}(x_t,t)
\end{aligned}$$

Por otro lado, procediendo de manera similar se obtiene la otra desigualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{m_\lambda(t-h) - m_\lambda(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(x_{t-h}, t-h) - \lambda(x_t,t)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(x_{t-h}, t-h) - \lambda(x_t, t-h) + \lambda(x_t, t-h) - \lambda(x_t,t)}{-h} \\
&\geq \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(x_t, t-h) - \lambda(x_t,t)}{-h} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}(x_t,t)
\end{aligned}$$

Luego, puesto que v es solución de (3.11) se tiene la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\partial \lambda}{\partial t}(x_t,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(x_t,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_t,t) \\
&= \nu \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x_t,t) - v(x_t,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_t,t) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_t,t)\right)^2 \\
&= \nu \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}(x_t,t) - \lambda^2(x_t,t) - v(x_t,t)\frac{\partial \lambda}{\partial x}(x_t,t)
\end{aligned}$$

Donde tomando $\nu = 0$ y dado que el último sumando es nulo, puesto que x_t es el punto en el que la función λ alcanza el mínimo con respecto de la variable x, luego la derivada con respecto a dicha variable ha de anularse y se tiene que, en casi todo punto,

$$\frac{\mathrm{d}m_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) = -m_\lambda^2(t)$$

Sea ahora $\varphi(t)$ solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) = -\varphi^2(t)$, verificando las condiciones iniciales $\varphi(0) = m_\lambda(0)$, entonces ha de ser

$$\varphi(t) = \frac{m_\lambda(0)}{t \cdot m_\lambda(0) + 1}$$

Asimismo, para todo $\alpha > 0$ tal que $\varphi(t)$ esta bien definida en $[0, \alpha)$, y para cada $T \in [0, \alpha)$ se tiene que $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}m_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) = -\varphi^2(t) + m_\lambda^2(t)$ en casi todo punto de $[0, T]$. Por lo tanto, en virtud del teorema fundamental del calculo para la medida de Lebesgue (ver [23]), denotando por μ dicha medida se tiene que

$$\varphi(T) - m_\lambda(T) = \int_0^T \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m_\lambda}{\mathrm{d}t}\right) d\mu = \int_0^T (-\varphi^2 + m_\lambda^2) d\mu = \int_0^T (-\varphi^2(s) + m_\lambda^2(s)) ds$$

Donde la ultima igualdad entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue se debe a que $-\varphi^2(t) + m_\lambda^2(t)$ es una función continua en $[0, T]$. Por lo tanto se tiene que

$$\varphi(t) - m_\lambda(t) \leq \int_0^t (\varphi(s) - m_\lambda(s))(-\varphi(s) - m_\lambda(s)) ds \quad \forall t \in [0, \alpha)$$

Luego, de acuerdo con la proposición 3.10 ha de ser $m_\lambda(0) \leq 0$ y por ello, para todo $t \in [0, \alpha)$, $-\varphi(t) - m_\lambda(t) \geq 0$, por lo que, en virtud del lema de Gronwall en su forma integral (ver [24]), se concluye que $\varphi(t) - m_\lambda(t) \leq 0$. Razonando de manera análoga para $m_\lambda(t) - \varphi(t)$ se tiene que $m_\lambda(t) - \varphi(t) \leq 0$ y por ello

$$\varphi(t) = m_\lambda(t) = \frac{m_\lambda(0)}{t \cdot m_\lambda(0) + 1} \quad \forall t \in [0, \alpha)$$

Por lo tanto, si fuera $m_\lambda(0) = 0$, entonces para todo $\tau \geq 0$, se tiene que $\lambda(x, \tau) \geq m_\lambda(\tau) = 0$, luego $v(x, \tau)$ es creciente. Además como v es no idénticamente nula, ha de existir un par $(\chi, \gamma) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ con $v(\chi, \gamma) \neq 0$ y por lo tanto se tiene que $v(x, \gamma)$ es una función creciente no nula, luego $\|v(x, \gamma)\|_{L^2} = +\infty$, por el lema 3.1, lo cual no puede darse por ser $v(x, \tau) \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $\tau \geq 0$.
Luego ha de ser $m_\lambda(0) < 0$ resultando por lo tanto en la existencia de una asíntota vertical en $t = \frac{-1}{m_\lambda(0)} > 0$ y por ello en la formación de singularidades en tiempo finito para las soluciones no triviales. $\square$

Lema 3.15. *Sea $\eta \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ tal que para todo $\tau \geq 0$, $\eta(x, \tau) \in C^0_\infty(\mathbb{R})$ y $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(x, t)\right| \in \mathbb{R}$, para todo $T \geq 0$. Si existe un $\gamma \geq 0$ tal que $\eta(x, \gamma)$ alcanza su máximo, sea $M_\eta(t) = \text{máx}_x\, \eta(x, t)$, entonces se tiene alguno de los casos siguientes:*

- *$M_\eta(t)$ esta bien definido en $[0,\gamma]$.*
- *$\exists\alpha > 0$ tal que $M_\eta(t)$ esta bien definido en $[\alpha,\gamma]$ y $M_\eta(\alpha) = 0$.*
- *$\exists\alpha \geq 0$ tal que $M_\eta(t)$ esta bien definido en $(\alpha,\gamma]$ y $\lim_{t\to\alpha^+} M_\eta(t) = 0$*

Demostración. Sea $\eta : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ una función en las condiciones del enunciado y $\gamma \geq 0$ tal que $M_\eta(\gamma)$ esta bien definido. Consideramos ahora el conjunto auxiliar $\mathcal{A} := \{a \in [0,\gamma] : M_\eta(t)$ bien definido en $[a,\gamma]\}$, este es no vacío pues $\gamma \in \mathcal{A}$. Asimismo, esta acotado inferiormente, por lo que en virtud del axioma del supremo existe un ínfimo para dicho conjunto, el cual denotamos por α.
Si α pertenece al conjunto anterior, entonces M_η esta definido en $[\alpha,\gamma]$ pudiendo ser $\alpha = 0$ o $0 < \alpha$. En este segundo caso, evidentemente ha de ser $M_\eta(\alpha) \geq 0$, de acuerdo con la proposición 3.10. Suponiendo que fuera $M_\eta(\alpha) > 0$, sea entonces (x_α,α) tal que, $\eta(x_\alpha,\alpha) = M_\eta(\alpha)$. Como η es continua existe un $\delta > 0$ tal que si $|\alpha - t| < \delta$ entonces se tiene que $|\eta(x_\alpha,\alpha) - \eta(x_\alpha,t)| < M_\eta(\alpha)/2$, luego para todo $t \in (\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ se tiene que $\eta(x_\alpha,t) \in (\eta(x_\alpha,\alpha) - M_\eta(\alpha)/2, \eta(x_\alpha,\alpha) + M_\eta(\alpha)/2)$ y por ello $\eta(x_\alpha,t) > 0$, por lo tanto, en virtud de la proposición 3.10 $M_\eta(t)$ esta bien definido en $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, luego lo esta también en $(\alpha-\delta,\gamma]$ en contra de que α sea el ínfimo, luego ha de ser $M_\eta(\alpha) = 0$.
Por otro lado, si $\alpha \notin \mathcal{A}$, entonces $M_\eta(t)$ esta definido en $(\alpha,\gamma]$ y no lo esta en α, luego por la proposición 3.10 ha de ser $\eta(x,\alpha) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Asimismo, para cada $\tau \in (\alpha,\gamma]$ y $\chi \in \mathbb{R}$, puesto que $\eta(\chi,t) \in C^1[\alpha,\gamma]$ de acuerdo con el teorema del valor medio de Lagrange ha de existir un $c \in (\alpha,\tau)$ con

$$\eta(\chi,\tau) - \eta(\chi,\alpha) = (\tau-\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial t}(\chi,c)$$

Por lo tanto sea $\Lambda_\eta = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[\alpha,\gamma]}\left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,t)\right|$ entonces se concluye que

$$|\eta(\chi,\tau) - \eta(\chi,\alpha)| \leq \max_x |\eta(x,\tau) - \eta(x,\alpha)| \leq \sup_{\mathbb{R}\times[\alpha,\tau]}\left|(\tau-\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,t)\right| \leq \Lambda_\eta|\tau-\alpha|$$

Por lo tanto, para cada $t \in (\alpha,\gamma]$ sea $x_t \in \mathbb{R}$ tal que $\eta(x_t,t) = M_\eta(t)$, como $M_\eta(t) \geq 0$ y $\eta(x_t,\alpha) < 0$ se tiene que

$$|\eta(x_t,t) - \eta(x_t,\alpha)| = \eta(x_t,t) - \eta(x_t,\alpha) \leq \Lambda_\eta|t-\alpha|$$

Y por ello se concluye finalmente que

$$0 \leq M_\eta(t) = \eta(x_t,t) \leq \Lambda_\eta|t-\alpha| + \eta(x_t,\alpha) \leq \Lambda_\eta|t-\alpha| \longrightarrow_{t\to\alpha^+} 0$$

□

Observación 3.16. *Los resultados obtenidos en el lema anterior son igualmente aplicables para el mínimo. Es decir, si $\eta(x,\gamma)$ alcanza su mínimo, entonces ha de darse alguno de los tres casos mostrados en dicho lema si sustituimos $M_\eta(t)$ por $m_\eta(t) = \min_x \eta(x,t)$, pues en tal caso basta aplicar el resultado en cuestión a $-\eta(x,t)$.*

El siguiente resultado nos proporciona una cota para la norma L^{∞} de ciertas soluciones de la ecuación de Burgers.

Proposición 3.17. *Sea* $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ *solución de (3.11) tal que para cada* $\tau \geq 0$ $v(x,\tau) \in C^0_{\infty}(\mathbb{R})$ *y* $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,t)\right| \in \mathbb{R}$, $\forall T \geq 0$. *Entonces* v *esta globalmente acotada, dándose además la siguiente desigualdad*

$$\|v(x,t)\|_{L^{\infty}} \leq \|v_0(x)\|_{L^{\infty}} \in \mathbb{R}$$

Demostración. Sea v solución bajo las condiciones del enunciado, entonces en virtud de lema 3.12 se concluye que las funciones $M_v(t) = \text{máx}_x\, v(x,t)$ y $m_v(t) = \text{mín}_x\, v(x,t)$ son Lipschitz continuas en todo intervalo acotado en el que estén definidas. Por lo tanto, por el teorema de Rademacher, dichas funciones han de ser diferenciables en casi todo punto de dichos intervalos.
Denotando por x_t e y_t los puntos en los que se alcanza el mínimo y el máximo respectivamente para cada $t \in [0,+\infty)$ para el que estén definidos, sus derivadas, cuando existan, han de verificar lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m_v}{\mathrm{d}t}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{m_v(t+h) - m_v(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_{t+h}, t+h) - v(x_t,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_{t+h}, t+h) - v(x_t, t+h) + v(x_t, t+h) - v(x_t,t)}{h} \\
&\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_t, t+h) - v(x_t,t)}{h} = \frac{\partial v}{\partial t}(x_t,t)
\end{aligned}$$

De manera similar obtenemos la desigualdad opuesta

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m_v}{\mathrm{d}t}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{m_v(t-h) - m_v(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_{t-h}, t-h) - v(x_t,t)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_{t-h}, t-h) - v(x_t, t-h) + v(x_t, t-h) - v(x_t,t)}{-h} \\
&\geq \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x_t, t-h) - v(x_t,t)}{-h} = \frac{\partial v}{\partial t}(x_t,t)
\end{aligned}$$

Razonando de manera análoga para el caso del máximo se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}M_v}{\mathrm{d}t}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{M_v(t+h) - M_v(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(y_{t+h}, t+h) - v(y_t,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{v(y_{t+h}, t+h) - v(y_t, t+h) + v(y_t, t+h) - v(y_t,t)}{h} \\
&\geq \lim_{h\to 0^+} \frac{v(y_t, t+h) - v(y_t,t)}{h} = \frac{\partial v}{\partial t}(y_t,t)
\end{aligned}$$

Y finalmente se obtiene la última desigualdad restante

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}M_v}{\mathrm{d}t}(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{M_v(t-h)-M_v(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(y_{t-h},t-h)-v(y_t,t)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{v(y_{t-h},t+h)-v(y_t,t-h)+v(y_t,t-h)-v(y_t,t)}{-h} \\
&\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{v(y_t,t-h)-v(y_t,t)}{-h} = \frac{\partial v}{\partial t}(y_t,t)
\end{aligned}$$

Por otro lado, por ser v solución de (3.11), se tiene que $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial v}{\partial x}$ y al tratarse del mínimo y máximo respectivamente con respecto de la variable x, las derivadas primeras correspondientes a dicha variable se anulan, luego

$$\frac{\mathrm{d}m_v}{\mathrm{d}t}(t) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_t,t) \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}M_v}{\mathrm{d}t}(t) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y_t,t) \leq 0$$

Y por lo tanto, de dichas desigualdades se concluye en virtud del teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue (ver [23]), que el máximo es decreciente en todo intervalo en el que esta definido, siendo análogamente el mínimo creciente en los intervalos en los que esta definido. Por lo tanto, de acuerdo con lema 3.15 se deduce que, en todo intervalo en el que estén definidos se tiene que $m_v(t) \geq \min\{m_v(0),0\}$ si $m_v(0)$ este bien definido y $m_v(t) \geq 0$ en otro caso y $M_v(t) \leq \max\{M_v(0),0\}$, si $M_v(0)$ es definido siendo $M_v(t) \leq 0$ en caso contrario.
Asimismo, tal y como se vio en la proposición 3.10, cuando existan ha de ser $M_v(t) \geq 0$ y $m_v(t) \leq 0$. Además, para cada $t \geq 0$ ha de existir o el máximo o el mínimo y puesto se tiene que $\|v(x,t)\|_{L^\infty} = \max\{|M_v(t)|,|m_v(t)|\}$ cuando ambos existan y $\|v(x,t)\|_{L^\infty} = |M_v(t)|$ o $\|v(x,t)\|_{L^\infty} = |m_v(t)|$ en otro caso.
De lo anterior se concluye finalmente que para cada $\tau \geq 0$ (tomando $m_v(\tau) = 0$ o $M_v(\tau) = 0$ si no están bien definidos)

$$\|v(x,\tau)\|_{L^\infty} = \max\{|m_v(\tau)|,|M_v(\tau)|\} \leq \max\{|m_v(0)|,|M_v(0)|\} = \|v_0(x)\|_{L^\infty}$$

Y por lo tanto

$$\|v(x,t)\|_{L^\infty} \leq \|v_0(x)\|_{L^\infty} \in \mathbb{R}$$

□

Se introduce a continuación el siguiente resultado sobre la diferenciabilidad de la norma L^2 bajo ciertas condiciones.

Lema 3.18. *Sea $\eta \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0})$ para el que existe un $T > 0$, tal que $\forall \tau \in [0,T]$, $\eta(x,\tau) \in L^2(\mathbb{R})$, con $\int_0^T \left\|\frac{\partial}{\partial t}\eta^2(x,t)\right\|_{L^1} dt < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\eta^2(x,t)dx \in C([0,T])$, entonces $\|\eta(x,t)\|_{L^2}^2 \in C^1([0,T])$ y se tiene que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta(x,t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\eta^2(x,t)dx \quad \forall t \in [0,T]$$

Demostración. Dada η, una función en las condiciones anteriores, entonces para cada $t \in [0, T]$, aplicando el teorema fundamental del calculo y el teorema de Fubini, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\eta^2(x,t)dx &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\eta^2(x,t)dxdt \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\eta^2(x,t)dtdx \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}[\eta^2(x,t) - \eta^2(x,0)]dx \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\eta^2(x,t)dx - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\eta^2(x,0)dx \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\eta^2(x,t)dx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta(x,t)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Donde la anteúltima igualdad se tiene debido a que $\forall \tau \in [0, T]$, $\eta(x, \tau) \in L^2(\mathbb{R})$. □

Asimismo, el siguiente teorema, similar a la proposición anterior, presenta una cota para la norma L^2 de algunas soluciones de la ecuación de Burgers.

Teorema 3.19. *Dada una solución $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ de (3.11), bajo las condiciones del lema anterior para un cierto $T > 0$ y tal que para cada $\tau \in [0, T]$, se tiene que $v(x, \tau) \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^1_\infty(\mathbb{R})$. Entonces la norma $\|v(x, t)\|_{L^2}$ esta acotada en $[0, T]$ según la siguiente desigualdad*

$$\|v(x,t)\|_{L^2} \leq \|v_0(x)\|_{L^2}$$

Dándose además la igualdad cuando $\nu = 0$.

Demostración. Sea $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ una solución con las condiciones precedentes. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\,(x,t)\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} v^2\,(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} v\,(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial t}\,(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} v\,(x,t)\left(\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,(x,t) - v\,(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial x}\,(x,t)\right)dx \\
&= \left(\nu v\,(x,t)\,\frac{\partial v}{\partial x}\,(x,t) - \frac{v^3\,(x,t)}{3}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,(x,t)\right)^2 dx \\
&= -\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,(x,t)\right)^2 dx \leq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en virtud del teorema fundamental del cálculo se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\|v(x,t)\|_{L^2}^2 &= -2\nu\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,s)\right)^2 dxds + \|v(x,0)\|_{L^2}^2\\ &= -2\nu\int_0^t\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,s)\right\|_{L^2}^2 ds + \|v(x,0)\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a la desigualdad buscada

$$\|v(x,t)\|_{L^2} \leq \|v_0(x)\|_{L^2}$$

Siendo lo anterior una igualdad en el caso en el que la constante de viscosidad cinemática sea nulo. □

Por otro lado, de la última ecuación de la demostración previa, se concluye también la siguiente desigualdad

$$2\nu\int_0^t\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,s)\right\|_{L^2}^2 ds \leq \|v_0(x)\|_{L^2}^2 \tag{3.12}$$

La cual permite la demostración de un resultado, análogo al precedente, acerca de las cotas correspondientes a las normas L^2 de las primeras derivadas. Para ello, se introduce primero el siguiente lema preliminar.

Lema 3.20. *Sea $\eta \in C_\infty^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ para un cierto $p \geq 0$, entonces $\eta \in L^q(\mathbb{R})$, $\forall q \geq p$.*

Demostración. Sea η en las condiciones anteriores, entonces existe un $L > 0$ tal que $|\eta(x)| < 1$ para todo x con $|x| > L$ y como es una función continua, esta esta acotada en $[-L, L]$, es decir $\Lambda_\eta := \|\eta(x)\|_{L^\infty([-L,L])} \in \mathbb{R}$. Sea ahora $q \geq p$ entonces para cada $x \in \mathbb{R} \setminus [-L, L]$ se tiene que $1 > |\eta(x)|^p \geq |\eta(x)|^q$, luego

$$\|\eta(x)\|_{L^q}^q \leq \int_{[-L,L]} |\eta(x)|^q dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |\eta(x)|^p dx \leq 2L\Lambda_\eta^q + \|\eta(x)\|_{L^p}^p \in \mathbb{R}$$

Y por lo tanto $\eta \in L^q(\mathbb{R})$. □

Teorema 3.21. *Sea $v \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ una solución de (3.11) con $\nu > 0$. Si existe $T > 0$ tal que para cada $\tau \in [0, T]$, $v(x, \tau) \in H^3(\mathbb{R}) \cap C_\infty^3(\mathbb{R})$, y $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right| \in \mathbb{R}$, verificando v y $\frac{\partial v}{\partial x}$ las condiciones del lema 3.18, entonces se tiene la siguiente desigualdad*

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{9}{8\nu}\|v_0(x)\|_{L^2}^2\|v_0(x)\|_{L^\infty}^2 + \left\|\frac{\partial v_0}{\partial x}(x)\right\|_{L^2}^2 \qquad \forall t \in [0, T]$$

Si además $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ cumple las condiciones del lema 3.18 y $\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty}(t) \in L^1([0, T])$ entonces

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\right\|_{L^2} \leq \left\|\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}(x)\right\|_{L^2} e^{\left(\frac{5}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,s)\right\|_{L^\infty} ds\right)} \qquad \forall t \in [0, T]$$

Demostración. Sea $v:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ una solución en las condiciones del enunciado, entonces de manera directa se observa que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)dx\end{aligned}$$

Lo cual puede calcularse separándolo y aplicando el método de integración por partes para cada uno de los sumandos del integrando anterior:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\nu\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}dx &= \nu\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx\\ &= -\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx\end{aligned}$$

En lo que al segundo sumando se refiere, procediendo de manera similar se observa que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}v\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx &= v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3 dx-\int_{\mathbb{R}}v\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3 dx\end{aligned}$$

Y por lo tanto, finalmente se deduce la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 = -\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3 dx \tag{3.13}$$

Asimismo lo anterior puede acotarse, ya que aplicando de nuevo la integración por partes se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^4}^4 &= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^4 dx = v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3\bigg|_{-\infty}^{+\infty}-3\int_{\mathbb{R}}v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\\ &= -3\int_{\mathbb{R}}v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\\ &\leq 3\|v\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq 3\|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^4}^2\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

Donde las desigualdades previas se obtienen mediante la aplicación de la desigualdad de Holder, la cual es aplicable en virtud del lema 3.20. Por lo tanto

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^4}^2 \leq 3\|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2} \tag{3.14}$$

Por otro lado, de manera análoga, en virtud de la desigualdad de Holder se tiene que:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^3}^3 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^3 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^4}^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por lo que, partiendo de la ecuación (3.13) y aplicando las desigualdades (3.14) y (3.15) se obtiene entonces lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}^2 &\leq -2\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^3 dx\\ &\leq -2\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^4}^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}\\ &\leq -2\nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + 3\|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}\\ &\leq -2\nu\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 + 3\|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}\\ &\leq -2\nu\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 + \left(\frac{3\|v\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}}{2\sqrt{\nu}}\right)\left(2\sqrt{\nu}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}\right)\\ &\leq \frac{9\|v\|_{L^\infty}^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2}^2}{8\nu}\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Y finalmente, de acuerdo con la desigualdad (3.12), en virtud de la proposición 3.17 obtenemos la primera de las cotas buscadas

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right\|_{L^2}^2 &= \frac{9}{8\nu}\int_0^t \|v(x,s)\|_{L^\infty}^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,s)\right\|_{L^2}^2 ds + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,0)\right\|_{L^2}^2\\ &\leq \frac{9}{8\nu}\|v_0(x)\|_{L^2}^2\|v_0(x)\|_{L^\infty}^2 + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}(x,0)\right\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

En lo que a la segunda derivada se refiere, bajo las hipótesis añadidas en el enunciado, procediendo de manera análoga se obtiene la siguiente cadena de igualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 v}{\partial t\partial x^2}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\left(\nu\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - v\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right) - \frac{5}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dx - \frac{5}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

Donde aplicando la integración por partes al primer sumando, se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} dx = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \nu\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)^2 dx \\
= -\nu\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se deduce la siguiente desigualdad

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 \leq 5\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2
$$

Y aplicando el lema de Gronwall en su forma diferencial (ver [25] o [26]) a la desigualdad anterior se obtiene finalmente la segunda de las cotas buscadas

$$
\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 e^{\left(5\int_0^t \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty}(s) ds\right)}
$$

$\square$

Capítulo 4

El modelo Cheap Navier-Stokes

En este último capítulo estudiaremos la conocida como *Cheap Navier-stokes equation* [27], introducida por Stephen Montgomery-Smith como un modelo que comparte algunas de las características de las ecuaciones de Navier-Stokes. Dicho modelo viene dado por la siguiente expresión

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \sqrt{-\Delta}(v^2) \tag{4.1}$$

Donde $\sqrt{-\Delta}$ recibe el nombre de laplaciano fraccionario y es el operador tal que para cada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathcal{F}(\sqrt{-\Delta}(f))(\xi) = |\xi|\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Siendo $\mathcal{F}$ la transformada de Fourier, la cual para cada función real $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ viene dada por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i2\pi\xi\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}$$

Cuando la integral anterior exista.

4.1. Derivación y conceptos previos

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, suponiendo que la densidad del fluido en cuestión permanece constante y admitiendo la ausencia de fuerzas externas, $\mathbf{F} \equiv 0$, tomando la divergencia a ambos lados de (2.3) obtenemos lo siguiente:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) + \frac{1}{\rho}\Delta p = \nu\nabla\cdot(\Delta\mathbf{v})$$

Y conmutando $\frac{\partial}{\partial t}$ y la divergencia se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{v}) + \nabla\cdot((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) + \frac{1}{\rho}\Delta p = \nu\nabla\cdot(\Delta\mathbf{v})$$

Ahora bien, considerando la identidad $\Delta\mathbf{v} = (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{v}$, lo anterior puede reescribirse como

$$\nabla \cdot ((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) + \frac{1}{\rho}\Delta p = \nu\Delta(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

Y en virtud de (2.2), los términos de la parte derecha de la anterior igualdad se anulan, llegando así a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\rho}\Delta p = -\nabla\cdot((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v})$$

Aplicando el operador inverso del laplaciano obtenemos

$$p = -\rho(\Delta^{-1})(\nabla\cdot((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}))$$

Sustituyendo lo anterior en (2.3) se tiene la siguiente reformulación de la ecuación del momento

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nabla(\Delta^{-1})(\nabla\cdot((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v})) + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{4.2}$$

4.1.1. La transformada de Hilbert

Antes de continuar con la derivación se introducen algunas nociones que serán de uso recurrente no solo en esta sección, sino a lo largo del capitulo.

Definición 4.1. *Dada una función real de variable real, f, con un número finito de singularidades en los puntos $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$ con $c_1 < \dots < c_n$, entonces se escribe P.V. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ y se llama valor principal de Cauchy al valor*

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{c_1-\epsilon} f(x)dx + \sum_{i=2}^{n}\int_{c_{i-1}+\epsilon}^{c_i-\epsilon} f(x)dx + \int_{c_n+\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} f(x)dx\right]$$

De manera análoga, dada una función real de variable real, g, con un número finito de singularidades en los puntos $d_1, \dots d_m \in [a,b]$ con $a < d_1 < \dots < d_m < b$, entonces se escribe P.V. $\int_a^b g(x)dx$ y se llama valor principal de Cauchy al valor

$$P.V. \int_a^b g(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_a^{d_1-\epsilon} g(x)dx + \sum_{i=2}^{m}\int_{d_{i-1}+\epsilon}^{d_i-\epsilon} g(x)dx + \int_{d_m+\epsilon}^{b} g(x)dx\right]$$

Partiendo de la definición anterior podemos definir la transformada de Hilbert.

Definición 4.2 (Transformada de Hilbert). *Dada una función $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ se define su transformada de Hilbert como*

$$\mathcal{H}(f)(x) := \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y}dy$$

Un resultado que define las cotas de las transformadas de Hilbert de algunas funciones, y por lo tanto muestra que la transformada de Hilbert esta bien definida para las mismas, es el denominado Teorema de la desigualdad de Riesz, cuya demostración puede ser consultada en [28].

Teorema 4.3 (Desigualdad de Riesz). *Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$ entonces $\exists C > 0$ con $\|\mathcal{H}(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$.*

Por otro lado, la transformada de Hilbert se relaciona con la transformada de Fourier según el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ entonces*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}(f))(\xi) = \begin{cases} -i\frac{\xi}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi) & si\ \xi \neq 0 \\ 0 & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar se obtiene la transformada de Fourier de la función $\frac{1}{x\pi}$, aplicando la noción de valor principal de Cauchy, es decir,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x\pi}\right)(\xi) = P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2\pi\xi x}}{x\pi}dx = P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\xi x)}{x\pi}dx + P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i\sin(2\pi\xi x)}{x\pi}dx$$

El valor principal del primer sumando ha de ser nulo, ya que al ser el integrando una función impar se tiene que para todo ϵ con $0 < \epsilon < 1$

$$\int_{-1/\epsilon}^{-\epsilon} \frac{\cos(2\pi\xi x)}{x\pi}dx + \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{\cos(2\pi\xi x)}{x\pi}dx = 0$$

En lo que a la segunda integral se refiere, si $\xi = 0$ su valor principal es igualmente nulo. En otro caso se tiene que, haciendo el cambio de variable $t = 2\pi|\xi|x$ como $\operatorname{sign}(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i\sin(2\pi\xi x)}{x\pi}dx = \frac{-i\xi}{\pi|\xi|}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi|\xi|x)}{x}dx = \frac{-i\xi}{\pi|\xi|}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{-i\xi}{|\xi|}$$

Pues la ultima integral tiene valor π, ya que se trata de la integral de Dirichlet, cuyo valor es bien conocido.
Finalmente, dado que $\mathcal{H}(f)(x) = \left(f * \left(\frac{1}{y\pi}\right)\right)(x)$, luego

$$\mathcal{F}\left(\left(f * \left(\frac{1}{x\pi}\right)\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x\pi}\right)(\xi) \cdot \mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} -i\frac{\xi}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi) & \text{si } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

□

El teorema anterior nos posibilita el estudio de ciertas propiedades de la transformada de Hilbert, entre ellas la que se recoge en el siguiente corolario.

Corolario 4.5. *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0_\infty(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{H}(f)(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0_\infty(\mathbb{R})$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in L^1(\mathbb{R})$ es continua a trozos. Si se tiene que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{H}(f)(x), \mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, entonces $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{H}(f)(x) = \mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(x)$*

Demostración. Sea f una función en dichas condiciones, entonces, cuando $\xi \neq 0$, aplicando el teorema anterior obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{H}(f)\right)(\xi) &= i\xi\mathcal{F}(\mathcal{H}(f))(\xi) \\
&= \left(-i\frac{\xi}{|\xi|}\right)(i\xi)\,\mathcal{F}(f)(\xi) \\
&= -i\frac{\xi}{|\xi|}\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\right)(\xi)
\end{aligned}$$

Y para $\xi = 0$, se tiene que $\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{H}(f)\right)(0) = 0 = \mathcal{F}\left(\mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\right)(0)$.
Obteniéndose la igualdad buscada en virtud del teorema de inversión de Fourier. □

Observación 4.6. *La igualdad obtenida en el corolario anterior se da en condiciones mas generales, es decir, se da la conmutatividad entre derivada y transformada de Hilbert (ver [29]).*

Asimismo, la transformada de Hilbert puede definirse para funciones periódicas, lo que resultara de gran utilidad en el estudio de las soluciones periódicas que se realizará mas adelante. Antes de ofrecer dicha definición veamos la base de la misma.
Para ello, sea f una función cuyo periodo es 2π es decir $f(x) = f(x + 2\pi n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{x-y}dy &= \frac{1}{\pi}P.V.\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\frac{f(y)}{x-y}dy\right) \\
&= \frac{1}{\pi}P.V.\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(y)}{x-y+2\pi n}dy\right) \\
&= \frac{1}{\pi}P.V.\int_{0}^{2\pi}f(y)\left[\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-y+2\pi n}+\frac{1}{x-y-2\pi n}\right)\right]dy \\
&= \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{0}^{2\pi}\frac{f(y)}{\tan((x-y)/2)}dy
\end{aligned}$$

Donde la ultima ecuación se obtiene gracias a la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\tan(x/2)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+2\pi n}+\frac{1}{x-2\pi n}\right)$$

Por lo tanto, podemos definir la transformada de Hilbert de funciones periódicas de la siguiente forma:

Definición 4.7. *Sea f una función periódica de periodo 2π, entonces su transformada de Hilbert es*

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} P.V. \int_0^{2\pi} \frac{f(y)}{\tan((x-y)/2)} dy \left(= \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-y)}{\tan(y/2)} dy \right)$$

La definición anterior puede ser generalizada de manera sencilla para el caso de funciones periódicas de periodo aleatorio, mediante el cambio de variable correspondiente. Sin embargo, en el caso que nos ocupa basta con conocer la formulación anterior.
Cabe destacar que las propiedades previamente estudiadas correspondientes a la transformada de Hilbert en el caso de la recta real, se trasladan de forma natural al caso de funciones periódicas (ver [29]).

4.1.2. El proyector de Leray

Introducimos ahora el siguiente teorema, correspondiente a la descomposición de Helmholtz para una dimensión arbitraria y cuya demostración puede consultarse en [13].

Teorema 4.8 (**Descomposición de Helmholtz-Hodge**). *Dado un campo vectorial $\boldsymbol{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{X} \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$, entonces admite una única descomposición ortogonal de la forma*

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u} + \nabla\varphi$$

Donde $\boldsymbol{u}$ es un campo vectorial de divergencia nula y $\boldsymbol{u}, \nabla\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$

Partiendo del resultado anterior podemos definir el siguiente operador.

Definición 4.9 (**Proyector de Leray**). *Se llama proyector de Leray, $\mathbb{P}$, al operador*

$$\mathbb{P} : L^2(\mathbb{R}^n)^n \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)^n \to L^2(\mathbb{R}^n)^n \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$$

definido por

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{u}$$

donde $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u} + \nabla\varphi$ es su descomposición de Helmholtz-Hodge.

El proyector de Leray puede ser reescrito de forma que resulte mas manejable en la situación que nos ocupa, tal y como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.10. *Sea $\boldsymbol{X}$, un campo vectorial con $\boldsymbol{X} \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$, entonces*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} - \nabla(\Delta^{-1})(\nabla \cdot \boldsymbol{X})$$

Demostración. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{u} + \nabla\varphi$, entonces $\mathbb{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \nabla\varphi$, tomando la divergencia se obtiene que $\nabla \cdot (\mathbf{X} - \nabla\varphi) = 0$ y por lo tanto

$$(\Delta^{-1})(\nabla \cdot \mathbf{X}) = \varphi$$

Y sustituyendo lo anterior obtenemos el resultado deseado.

□

Por lo tanto en virtud de la proposición anterior, podemos escribir (4.2) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{v} - \mathbb{P}((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) \tag{4.3}$$

Y como $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot(v_i\cdot v_j)_{1\leq i,j\leq n} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)_{1\leq i\leq n} \\
&= (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Luego podemos escribir

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{v} - \mathbb{P}(\nabla\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})) \tag{4.4}$$

Por otro lado se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.11. *Dado $\boldsymbol{X}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{X}\in L^2(\mathbb{R}^n)^n\cap C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$, entonces*

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}(\boldsymbol{X}))(\xi) = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leq i,j\leq n}\mathcal{F}(\boldsymbol{X})(\xi)$$

Demostración. En virtud de la proposición anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbb{P}(\mathbf{X}))(\xi) &= \mathcal{F}(\mathbf{X} - \nabla(\Delta^{-1})(\nabla\cdot\mathbf{X}))(\xi) \\
&= \mathcal{F}(\mathbf{X})(\xi) - \mathcal{F}(\nabla(\Delta^{-1})(\nabla\cdot\mathbf{X}))(\xi)
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la propiedades de la transformada de Fourier con respecto de la derivada, podemos reescribir el último sumando como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla(\Delta^{-1})(\nabla\cdot\mathbf{X}))(\xi) &= i\xi^T\mathcal{F}((\Delta^{-1})(\nabla\cdot\mathbf{X}))(\xi) \\
&= \frac{-i}{|\xi|^2}\xi^T\mathcal{F}(\nabla\cdot\mathbf{X})(\xi) \\
&= \frac{1}{|\xi|^2}(\xi^T\cdot\xi)\mathcal{F}(\mathbf{X})(\xi) \\
&= \left(\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leq i,j\leq n}\mathcal{F}(\mathbf{X})(\xi)
\end{aligned}$$

Y por lo tanto podemos escribir

$$\mathcal{F}(\mathbf{X})(\xi) - \mathcal{F}(\nabla(\Delta^{-1})(\nabla\cdot\mathbf{X}))(\xi) = \left(\delta_{i,j} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leq i,j\leq n}\mathcal{F}(\mathbf{X})(\xi)$$

□

La idea detrás del modelo propuesto por Montgomery-Smith radica en que, al reducir (4.4) a un modelo unidimensional, desde el punto de vista de la transformada de Fourier, limitar el termino correspondiente al proyector de Leray carece de interés, pues por la proposición anterior este se reduciría al operador nulo, perdiéndose así los matices que pudiera aportar. Por lo tanto, cabría intentar modificarlo con el fin de obtener un análogo unidimensional.
Un enfoque posible sería el de deshacernos del sumando $\left(-\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)$, obteniéndose al descender al caso unidimensional el operador identidad, el cual aplicado en (4.3) resultaría en la ecuación de Burgers estudiada en el capitulo precedente.
Si en cambio optamos por el planteamiento opuesto, ignorando el termino correspondiente a la delta de Kronecker, puesto que $\left(i\frac{\xi_i}{|\xi|}\right)\left(i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right) = -\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}$, siendo además para una dimensión $i\frac{\xi}{|\xi|}$ el coeficiente correspondiente al opuesto de la transformada de Hilbert. Por lo tanto podríamos decantarnos por sustituir $\mathbb{P}$ con $-\mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert, como análogo unidimensional.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\Delta v + \mathcal{H}(\nabla \cdot (v \otimes v)) \tag{4.5}$$

Por otro lado, en una dimensión

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{H}(\nabla \cdot (v \otimes v)))(\xi) &= -i\frac{\xi}{|\xi|}\mathcal{F}(\nabla \cdot (v \otimes v))(\xi) \\
&= -i\frac{\xi}{|\xi|} i\xi\mathcal{F}(v^2)(\xi) \\
&= |\xi|\mathcal{F}(v^2)(\xi) \\
&= \mathcal{F}(\sqrt{-\Delta}(v^2))(\xi)
\end{aligned}$$

Luego podemos escribir $\mathcal{H}(\nabla \cdot (v \otimes v)) = \sqrt{-\Delta}(v^2)$ y si tomamos $\nu = 1$, finalmente, sustituyendo en (4.5), se obtiene (4.1).

4.2. Estudio de las soluciones periódicas

Dada una función f periódica, el laplaciano fraccionario previamente introducido puede ser descrito de manera análoga a la transformada de Hilbert, mediante la siguiente formulación integral (ver [30]):

$$\sqrt{-\Delta}(f)(x) = \mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_0^{2\pi} \frac{f(x) - f(y)}{\sin^2((x-y)/2)}dy$$

Un resultado directo de la expresión anterior y se recoge en el siguiente lema.

Lema 4.12. *Dadas dos funciones f y g periódicas diferenciables de periodo 2π, tal que $g(0) = g(\pi) = 0$ entonces se tiene que*

$$\int_0^{\pi} g(x) \cdot \sqrt{-\Delta}(f)(x)dx = \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sqrt{-\Delta}(g)(x)dx$$

Demostración. Dadas f y g en las condiciones del enunciado, entonces, en virtud de conmutatividad entre derivada y la transformada de Hilbert (ver [29] o [30]) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} g(x)\mathcal{H}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(x)dx &= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{H}\left(f\right)(x)g(x)dx \\
&= g(x)\mathcal{H}(f)(x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathcal{H}(f)(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\left(x\right)dx \\
&= -\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-y)}{\tan(y/2)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\left(x\right)dy\right)dx \\
&= -\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\tan(y/2)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\left(t+y\right)dy\right)dt \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{\pi}^{-\pi}\frac{f(t)}{\tan(-y/2)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\left(t-y\right)dy\right)dt \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}P.V.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\tan(y/2)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\left(t-y\right)dy\right)dt \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}\left(g\right)(t)f(t)dt = \int_0^{\pi}\sqrt{-\Delta}(g)(t)f(t)dt
\end{aligned}$$

Donde se ha realizado en primer lugar el cambio de variable $t = x - y$ y finalmente un cambio de signo para la variable y. □

Asimismo, se enuncia a continuación un resultado correspondiente a un caso particular de la desigualdad de Jensen.

Lema 4.13. *Sea $f : [a,b] \to [p,q]$ una función continua y $\varphi : [p,q] \to \mathbb{R}$ una función convexa, tal que $\varphi \in C^1([p,q])$. Entonces se cumple que*

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx$$

Demostración. Dadas f y φ en las condiciones anteriores. Definimos $\alpha := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, entonces para todo $x \in [p,q]$ y $t \in (0,1]$, se tiene que

$$\varphi(\alpha + t(x-\alpha)) \leq (1-t)\varphi(\alpha) + t\varphi(x)$$

Y por lo tanto, al ser φ diferenciable, se obtiene lo siguiente

$$\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) + \frac{\varphi(\alpha + t(x-\alpha)) - \varphi(\alpha)}{t} \to_{t\to 0^+} \varphi(\alpha) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\right)(x-\alpha)$$

Concretamente se tiene que $\varphi(f(x)) \geq \varphi(\alpha) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\right)(f(x)-\alpha)$, para todo $x \in [a,b]$, luego integrando a ambos lados

$$\int_a^b \varphi(f(x))dx \geq \int_a^b \left[\varphi(\alpha) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\right)(f(x)-\alpha)\right]dx \geq (b-a)\varphi(\alpha) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\right)\cdot 0$$

Y por ello $\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx \geq \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$ □

Teorema 4.14. *Toda solución clásica*[1]*, periódica con respecto de la variable x y de periodo 2π de la ecuación*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \Delta v + \sqrt{-\Delta}(v^2) \quad \alpha > 0 \tag{4.6}$$

Tal que verifica además

$$\int_0^{\pi} (v_0(x)\sin(x) - \alpha)dx > 0$$

Desarrolla singularidades en tiempo finito.

Demostración. Supongamos que v una solución clásica y periódica en el espacio con periodo 2π de (4.6). En primer lugar definimos el funcional I dado por la siguiente expresión,

$$I(t) := \int_0^a v(x,t)\delta(x)dx$$

Para un cierto $a > 0$ y función $\delta(x)$ auxiliares y cuyo valor se determinara mas adelante. Se estudia a continuación su derivada temporal con el fin de estudiar su evolución en el tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) &= \int_0^a \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\,\delta(x)dx \\ &= \alpha \int_0^a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\delta(x)dx + \int_0^a \sqrt{-\Delta}(v^2)(x,t)\delta(x)dx\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se obtiene teniendo en cuenta que v es solución de (4.6). En lo que al primer termino se refiere, integrando por partes se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\delta(x)dx &= \delta(x)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,\frac{\partial \delta}{\partial x}(x)\,dx \\ &= \delta(x)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\Big|_0^a - v(x,t)\frac{\partial \delta}{\partial x}(x)\Big|_0^a + \int_0^a v(x,t)\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}(x)dx\end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos $a = \pi$ y $\delta(x) = \sin(x)$, los dos primeros sumandos de la ultima igualdad se anulan y se tiene que

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\sin(x)dx = \int_0^{\pi} v(x,t)\frac{\partial^2 \sin}{\partial x^2}(x)dx = -I(t)$$

Por otro lado, como la función seno es periódica de periodo 2π y $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, en virtud del lema 4.12 se tiene que

$$\int_0^{\pi} \sqrt{-\Delta}(v^2)(x,t)\sin(x)dx = \int_0^{\pi} v^2(x,t)\sqrt{-\Delta}(\sin(x))dx$$

[1]Se llama solución clásica de una ecuación diferencial, a toda solución para la cual las derivadas presentes en la formulación de dicha ecuación existen y son continuas.

Ahora bien como $\sqrt{-\Delta}(\sin(x)) = \mathcal{H}\left(\frac{\partial \sin(x)}{\partial x}\right) = \mathcal{H}(\cos(x))$ y dicha transformada es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\cos)(x) &= \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x-t)}{\tan(t/2)} dt \\ &= \frac{\cos(x)}{2\pi} P.V. \int_{.\pi}^{\pi} \cos(t)\cot(t/2) dt + \frac{\sin(x)}{2\pi} P.V. \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cot(t/2) dt = \sin(x)\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se tiene por el hecho de ser el primer valor principal de la última fila nula, al ser el integrando impar, mientras que la segunda integral admite primitiva, la cual es $x + \sin(x)$.
Por lo tanto, teniendo en cuenta todo lo anterior se tiene lo siguiente

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = -\alpha I(t) + \int_0^{\pi} v^2(x,t)\sin(x) dx$$

Finalmente, sea x^2 una función convexa, entonces en virtud de la desigualdad de Jensen, puesto que $\sin(x) \geq \sin^2(x)\ \forall x \in [0,\pi]$, se tiene que

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} v(x,t)\sin(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (v(x,t)\sin(x))^2 dx \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} v^2(x,t)\sin(x)dx$$

Y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) \geq -\alpha I(t) + \frac{1}{\pi} I^2(t)$$

Sin embargo, la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = -\alpha f(t) + \frac{1}{\pi} f^2(t)$ es una ecuación diferencial de Bernoulli y cuya solución general es de la forma

$$f(t) = \frac{\pi\alpha}{1 + Ce^{\alpha t}} \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, dadas las condiciones iniciales $f(0) = I(0) > \pi\alpha$ ha de ser entonces $C = \frac{\pi\alpha - I(0)}{I(0)} \in (-1, 0)$, por lo que, al ser $\alpha > 0$, f desarrolla una asíntota vertical para un cierto t finito, $t = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{I(0)}{I(0)-\pi\alpha}\right)$ concretamente. Por ello, al ser $f(0) = I(0)$ debido a la desigualdad anterior se concluye que $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) \geq \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$, luego $I(t) \geq f(t)$ y se tiene que $I(t)$ presenta una singularidad para un cierto t finito.
Ahora bien, como $I(t)$ es la integral del producto de $v(x,t)$ y $\sin(x)$ evaluada en un intervalo acotado e I diverge para cierto t finito, lo cual no puede deberse a la función seno de la integral, por ser esta acotada, se concluye finalmente que la función $v(x,t)$ debe divergir al infinito en cierto punto y de manera no integrable, desarrollando por ello singularidades en tiempo finito. □

Finalmente, partiendo del teorema anterior, podemos dar un resultado análogo para el modelo *Cheap Navier-Stokes* el cual es aplicable independientemente del periodo de la solución.

Teorema 4.15. *Toda solución clásica, periódica con respecto de la variable x y de periodo $2T$ con $T > 0$, del modelo Cheap Navier-Stokes:*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \sqrt{-\Delta}(v^2)$$

Tal que además

$$\int_0^T \left(v_0(x) \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \frac{\pi}{T}\right) dx > 0$$

Desarrolla singularidades en tiempo finito.

Demostración. Supongamos que $v(x,t)$ es una solución clásica y periódica con respecto de la variable x del modelo *Cheap Navier-Stokes*, cuyo periodo es $2T$ para un cierto $T > 0$.
Definimos entonces las variables auxiliares $\zeta = \frac{x\pi}{T}$ y $\tau = \frac{t\pi}{T}$ y la función auxiliar dada por $\psi(\zeta,\tau) := v\,(x,t)$ la cual, por construcción es periódica de periodo 2π con respecto de la variable ζ (de hecho podemos tomar $\psi(\zeta,\tau) = (v(\frac{T}{\pi}x, \frac{T}{\pi}t)) \circ (\zeta,\tau)$).
Además, puesto que $\frac{\partial v}{\partial t}\,(x,t) = \frac{\pi}{T}\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\,(\zeta,\tau)$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\pi^2}{T^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2}\,(\zeta,\tau)$ y

$$\sqrt{-\Delta}(v^2)(x,t) = \mathcal{H}\left(\frac{\partial (v^2)}{\partial x}\right)(x,t) = \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{T}\frac{\partial (\psi)^2}{\partial \zeta}\right)(\zeta,\tau) = \frac{T}{\pi}\sqrt{-\Delta}(\psi^2)(\zeta,\tau)$$

Por lo tanto, sustituyendo en el modelo *Cheap Navier-Stokes* y simplificando los coeficientes de manera propicia, se tiene que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\pi}{T}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \sqrt{-\Delta}(\psi^2)$$

Pero como $\frac{\pi}{T} > 0$, en virtud del teorema anterior se concluye que la función ψ desarrolla singularidades en tiempo finito ya que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\psi_0(\zeta)\sin(\zeta) - \frac{\pi}{T}\right) d\zeta &= \frac{\pi}{T}\int_0^T \left(\psi_0\left(\frac{\pi x}{T}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \frac{\pi}{T}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{T}\int_0^T \left(v_0(x)\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \frac{\pi}{T}\right) dx > 0\end{aligned}$$

Donde se ha realizado el correspondiente cambio de variable $\zeta = \frac{x\pi}{T}$.
Asimismo, puesto que $\psi(\zeta,\tau) = (v(\frac{T}{\pi}x, \frac{T}{\pi}t)) \circ (\zeta,\tau)$ se deduce finalmente que v ha de desarrollar singularidades en tiempo finito. □

Bibliografía

[1] Basic, Josip. *Turbulent history of fluid mechanics.* 2016. [Disonible en: http://doi.org/10.13140/RG.2.1.3487.8485]

[2] Newton, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* 1687.

[3] Grattan-Guinnes, Ivor. *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940.* Elsevier Science. 2005.

[4] Craik, Alex. *Continuity and change: Representing mass conservation in fluid mechanics.* Archive for the history of exact sciences, vol. 67, pp. 43–80. 2012.

[5] Fefferman, Charles L. *https://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf* [Consulta: 22 de febrero de 2020].

[6] Ladyzhenskaya, Olga. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows (2nd edition).* Gordon and Breach, New York. 1969.

[7] Lemarié-Rieusset P.G. *Recent developments in the Navier–Stokes problem.* Boca Raton, FL, Chapman and Hal-CRC. 2002.

[8] Leray, Jean. *Sur le mouvement d'un liquide visquex emplissent l'espace.* Acta Math. J. vol. 63, pp. 193–248. 1934.

[9] Navier, C.L. *Sur les lois des mouvements des fluides, en ayant egard al'adhesion des molecules.* Ann. Chimie 19, pp. 244–260. 1821.

[10] Navier, C.L. *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences de L'Institut de France* VI-389. 1827.

[11] Stokes, G.G. *On the Theories of the Internal Frictionof Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Mo-tion of Elastic Solids.* Cambridge University Press, Cambridge, pp. 75-129. 1880.

[12] Mitiche, A.; Aggarwal, J.K. *Computer vision analysis of image motion by variational methods.* Springer. 2014.

[13] J. Majda, Andrew, L. Andrea, Bertozzi. *Vorticity and Incompressible Flow.* Cambridge University Press. 2001.

[14] Nakahara, Mikio. *Geometry, topology and physics (2. edición)*. CRC press. 2003.

[15] Atanackovic, Teodor M., Guran Ardeshir. *Theory of elasticity for scientists and engineers (1st edition)*. Springer science. 2000.

[16] Bateman, Harry. *Some recent researches on the motion of fluids*. Mon. Wea. Rev. vol. 43, pp. 163–170. 1915.

[17] Burgers, J. M. *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. In Advances in applied mechanics. vol. 1, pp. 171-199. Elsevier. 1948.

[18] Hopf, Eberhard. *The partial differential equationy* $u_t+uu_x = \nu u_{xx}$. Communications on Pure and Applied Mathematics. vol. 3, pp. 201–230. 1950.

[19] Cole, Julian . *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*. Quarterly of applied mathematics. vol. 9, pp. 225-236. 1951.

[20] Knabner, P. Angermann, L. *Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations.* Springer-Verlag New York. 2003.

[21] Linares, F. Ponce, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Springer-Verlag New York. 2015.

[22] Federer, Herbert. *Geometric measure theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1996.

[23] Rudin, W. *Real and complex analysis (3rd ed.).* McGraw-Hill Education. 1986.

[24] Corduneanu, C. *Principles of Differential and Integral Equations.* Allyn and Bacon. Boston. 1971

[25] Webb. J.R.L. *Extensions of Gronwall's inequality with quadratic growth terms and applications.* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 61, 1-12. 2018.

[26] Mischler, S. *An introduction to evolution PDEs.* 2019. [Disponible en: dauphine.fr/ mischler/Enseignements/M2evol2018/chap0.pdf]

[27] Montgomery-Smith, Stephen. *Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation.*P.A.M.S. 129, pp. 2025-3029. 1999.

[28] Titchmarsh, Edward Charles. *Introduction to the theory of Fourier integrals (2nd ed.).* Oxford University: Clarendon Press. 1986

[29] King, Frederick W. *Hilbert Transforms, (vol. 1).* Cambridge: Cambridge University Press. 2009

[30] Bae, Hantaek. Granero-Belinchón, Rafael. *Global existence for some transport equations with nonlocal velocity.* Advances in Mathematics, vol. 269, pp 197-219. 2015.