

Controlador Dinámico Adaptable para Seguimiento de Trayectoria con Robots Móviles

Felipe N. Martins[†], Wanderley C. Celeste[†], Ricardo Carelli[‡], Teodiano F. Bastos-Filho[†] y Mário Sarcinelli-Filho[†]

[†] Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
Av. Fernando Ferrari, 514 29075-910 Vitória, ES, Brasil
felipe.n.martins@gmail.com, wanderley@ele.ufes.br, mario.sarcinelli@ele.ufes.br, tfbastos@ele.ufes.br
[‡] Instituto de Automática, Universidad Nacional de San Juan
Av. San Martín (Oeste) 1109, 5400 San Juan, Argentina
rcarelli@inaut.unsj.edu.ar

Resumen— Este trabajo presenta un controlador adaptable diseñado para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil tipo unicycle. El controlador consta de dos partes. En la primera se generan los valores deseados de las velocidades lineal y angular del robot en base a su cinemática. Estos valores son luego procesados para compensar la dinámica del robot generando así los comandos para su accionamiento. Los parámetros que representan la dinámica del robot son adaptados en línea, resultando en la reducción de errores de control y un mejor desempeño ante incertidumbres en esos parámetros. Se presenta la prueba de estabilidad para el sistema de control propuesto. Los resultados de simulación y experimentación muestran que el controlador presenta un buen desempeño tanto para el objetivo de seguimiento de trayectorias como de posicionamiento del robot.

Palabras Clave— Modelo dinámico, robots móviles, sistemas no lineales, seguimiento de trayectoria, controlador adaptable.

I. INTRODUCCIÓN

Para realizar tareas que requieren alta velocidad y/o transporte de cargas pesadas, es importante considerar la dinámica del robot. En el caso de transporte de cargas, por ejemplo, las características dinámicas del robot, tales como masa, centro de gravedad e inercia, cambian cuando éste está cargado. Para mantener un buen desempeño, el controlador debe ser capaz de adaptarse a dichos cambios. La adaptación es igualmente importante cuando hay dificultad en modelar el sistema con exactitud, aunque no ocurran variaciones en los parámetros de una tarea a otra.

Se han publicado diversos trabajos relativos al diseño de controladores para el seguimiento de trayectorias. Algunos están basados solamente en la cinemática del robot (Carelli *et al.*, 1999; Wu *et al.*, 1999). Otros controladores propuestos también compensan la dinámica del robot. En (Das y Kar, 2006), por ejemplo, se presenta un controlador adaptable basado en lógica difusa que estima la incertidumbre del

sistema, la cual incluye la de los parámetros dinámicos del robot. Esto permite el ajuste en línea de los parámetros. En (Fukao *et al.*, 2000) se presenta un controlador de seguimiento de trayectoria adaptable para el modelo dinámico del robot móvil basado en pares. Sin embargo no se identifican los parámetros dinámicos del robot y los resultados presentados contemplan solamente simulación. Otros controladores de seguimiento de trayectoria basados en la dinámica del robot son presentados por (Liu *et al.*, 2004; Dong y Guo, 2005). Sin embargo, los resultados en esos trabajos están basados solamente en simulaciones.

En (Kim *et al.*, 2000) se propone un controlador adaptable robusto que es dividido en dos partes: una basada en la cinemática del robot móvil y otra que compensa su dinámica. Los parámetros adaptados no representan los parámetros físicos del robot, y solamente se muestran resultados de simulación. Además, las acciones de control se dan como pares, mientras los robots comerciales requieren normalmente comandos de velocidad lineal y angular.

Una parametrización lineal del modelo dinámico de robots móviles de tipo unicycle es realizada en (De La Cruz, 2006), que también presenta el diseño de un controlador de seguimiento de trayectoria que genera velocidades lineal y angular, y es basado en el modelo dinámico del robot. Una ventaja del controlador presentado es que sus parámetros adaptables están directamente relacionados a los parámetros físicos del robot. Un procedimiento de identificación de parámetros es presentado en el referido trabajo. Sin embargo, el desempeño del controlador es severamente afectado si los parámetros no son correctamente identificados o si dichos parámetros cambian con el tiempo, debido, por ejemplo, a un cambio de carga.

En el presente trabajo se presenta el diseño de un controlador adaptable de seguimiento de trayectoria basado en la dinámica de un robot móvil unicycle. Es presentada, también, la prueba de estabilidad de dicho controlador, basada en la teoría de Lyapunov. El diseño es realizado en dos partes: un controlador basado en la cinemática del robot, y un controlador que compensa su

dinámica. El segundo es capaz de actualizar los parámetros estimados, que están directamente relacionados a los parámetros físicos del robot. Ambos funcionan juntos formando un controlador de trayectoria completo, y fueron desarrollados basados en el modelo dinámico presentado en (De La Cruz, 2006).

Resultados de simulación muestran que los parámetros estimados no divergen aunque el sistema funcione por un largo período de tiempo. Resultados experimentales muestran que el controlador propuesto es capaz de hacer que el robot siga una trayectoria mientras actualiza sus parámetros, logrando una reducción en el error de control. También se muestra que el controlador propuesto es capaz de cumplir un objetivo de posicionamiento, esto es que el robot alcance una posición de referencia fija, lo cual no es posible para algunos controladores de trayectoria propuestos en la bibliografía.

II. MODELO DINÁMICO

El modelo dinámico del robot móvil uniclo (De La Cruz, 2006) se describe a continuación. En la figura 1 se observan las velocidades lineal u y angular ω desarrolladas por el robot, el punto de interés h con coordenadas x, y en el plano XY , la orientación ψ del robot, su centro de masa G , la posición de la rueda castor C , la localización de la herramienta E (un brazo robótico, por ejemplo), y la distancia a entre el punto de interés y el punto central del eje virtual que une las ruedas de tracción, B .

La representación del modelo completo propuesto en (De La Cruz, 2006), está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \psi - a \omega \sin \psi \\ u \sin \psi + a \omega \cos \psi \\ \omega \\ \frac{\theta_3}{\theta_1} \omega^2 - \frac{\theta_4}{\theta_1} u \\ -\frac{\theta_3}{\theta_2} u \omega - \frac{\theta_6}{\theta_2} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_\omega \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde el vector de parámetros identificados y el vector de incertidumbres asociados al robot móvil son, respectivamente, $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$ y $\delta = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \delta_u \ \delta_\omega]^T$, donde δ_x y δ_y son funciones de las velocidades debido al deslizamiento de las ruedas y orientación del robot, δ_u y δ_ω son funciones de parámetros físicos del robot, tales como masa, momento de inercia, diámetro de las ruedas, parámetros de los motores y de sus servo controladores, fuerzas en las ruedas, y otros. Dichos parámetros son considerados como perturbaciones.

El modelo del robot (1) es dividido en una parte cinemática y una parte dinámica, como se muestra en la Fig. 2. Por lo tanto se diseñan dos controladores basados en los modelos cinemáticos y dinámicos respectivamente. Ambos diseños se realizan con la técnica de linealización por retroalimentación.

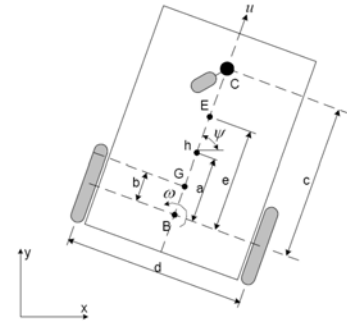


Fig. 1. Robot móvil uniclo.

III. COTROLADOR CINEMÁTICO

A. Diseño

El diseño del controlador cinemático está basado en la parte del modelo del robot que corresponde a su cinemática,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix},$$

donde la salida está definida por las coordenadas del punto de interés, o sea $\mathbf{h} = [x \ y]^T$. Por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2)$$

y la cinemática inversa es

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La ley de control propuesta, basada en la cinemática del robot, es dada por

$$\begin{bmatrix} u_{ref}^c \\ \omega_{ref}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d + l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \dot{y}_d + l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde $\tilde{x} = x_d - x$, $\tilde{y} = y_d - y$ son los errores de posición actuales relativos a los ejes X y Y , respectivamente, $k_x > 0$ y $k_y > 0$ son las ganancias del controlador, $l_x, l_y \in \mathfrak{R}$ son las constantes de saturación, y (x, y) y (x_d, y_d) son las posiciones actual y deseada, respectivamente. Las funciones \tanh han sido incorporadas con el fin de evitar la saturación de las referencias generadas por el controlador cinemático. Este genera las velocidades lineal y angular de referencias para el controlador dinámico, como se ilustra en la Fig. 3.

B. Análisis de estabilidad

En esto análisis se ha supuesto un seguimiento de velocidad perfecto, lo que permite igualar (3) y (4) bajo

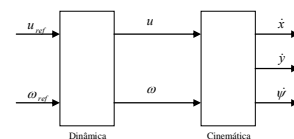


Fig. 2. Diagrama de bloques del modelo dinámico completo del robot.

la hipótesis de que $u \equiv u_{ref}$ y $\omega \equiv \omega_{ref}$, ignorando la dinámica del robot. De este modo, se obtiene la ecuación de lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Definiendo el vector de error $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$, resulta

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} = - \begin{bmatrix} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) & 0 \\ 0 & l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}},$$

que tiene un equilibrio único en el origen.

Se propone la función candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$. Su derivada temporal es

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -\tilde{x} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) - \tilde{y} l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) < 0$$

la cual resulta ser definida negativa. Entonces, se puede concluir que el sistema tiene un equilibrio asintóticamente estable en el origen, o sea, $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ y $\tilde{y}(t) \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

Nota 1. Considerando el caso en que la referencia es un punto de destino fijo, y no una trayectoria, el robot alcanza dicho punto y se detiene. Sin embargo, debe ser también garantizado que la orientación ψ del robot sea acotada. Al observar la Fig.1, se puede concluir que el robot se detiene cuando alcanza el punto de destino, y $\psi(t) \rightarrow \psi_{constante}$. Si no fuera así, $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ no convergirían a cero, lo que contradice a la prueba anterior.

Nota 2. El análisis de estabilidad para el controlador cinemático será revisado en la próxima sección, donde un controlador dinámico adaptable es adicionado al esquema completo de control.

IV. CONTROLADOR DINÁMICO ADAPTABLE

A. Diseño

El controlador dinámico adaptable recibe como referencias las velocidades lineal y angular generadas por el controlador cinemático, y genera otros valores de velocidades lineal y angular, que son enviados como señales de comando a los servo-controladores del robot, como se muestra en la Fig. 3.

El proyecto del controlador dinámico adaptable es basado en el modelo dinámico parametrizado del robot, obtenido de (1), que es

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{ref} \\ \dot{\omega}_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix},$$

y que puede ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{ref} \\ \dot{\omega}_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

o, de forma más compacta, como $\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta}$, donde

$$\mathbf{v}_{ref} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix},$$

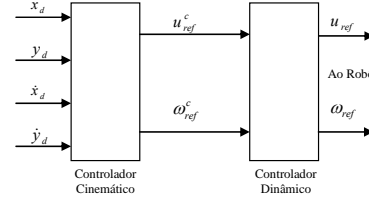


Fig. 3. Diagrama de bloques de la estructura del controlador.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix}, \quad \text{y}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2).$$

La ley de control propuesta, basada en la dinámica inversa, es

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix},$$

la cual puede ser reescrita como

$$\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta}, \quad (7)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2]^T$, con $\sigma_1 = \dot{u}_{ref}^c + k_u \tilde{u}$, $k_u > 0$,

$$\sigma_2 = \dot{\omega}_{ref}^c + k_\omega \tilde{\omega}, \quad k_\omega > 0, \quad \tilde{u} = u_{ref}^c - u \quad \text{y} \quad \tilde{\omega} = \omega_{ref}^c - \omega.$$

La Ecuación (7) puede ser también escrita como

$$\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{G}(\sigma_1, \sigma_2, u, \omega)\boldsymbol{\theta}, \quad (8)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & u\omega & \omega \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, si los parámetros del robot son inciertos, la ley de control

$$\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (9)$$

debe ser considerada en lugar de (8), donde $\boldsymbol{\theta}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son los parámetros reales y estimados del robot, respectivamente, mientras $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ es el vector de error paramétrico.

B. Análisis de estabilidad

De (6) y (9) sigue que $\mathbf{D}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, lo que es equivalente a $\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{v}}) = -\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Considerando $\boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}$, donde $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{ref} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{K} = \text{diag}(k_u, k_\omega) > \mathbf{0}$, resulta

$$\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}) = -\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{que es equivalente a}$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{v}}} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{v}}, \quad (10)$$

que representa la ecuación de error del controlador.

Para verificar la estabilidad del sistema se considera la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (11)$$

donde $\boldsymbol{\gamma} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ es una matriz diagonal definida positiva y $\mathbf{D} > \mathbf{0}$. Usando $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ ($\boldsymbol{\theta}$ es considerado constante), la derivada temporal de (11) puede ser escrita como

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{G} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\gamma} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (12)$$

Dos leyes de actualización de parámetros son consideradas para el controlador adaptable propuesto. La primera es

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}}. \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (12), se tiene

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{DK} \tilde{\mathbf{v}} \leq 0, \quad (14)$$

lo que permite verificar la estabilidad del equilibrio en el origen del sistema del error dado por (10). Esto implica que $\tilde{\mathbf{v}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ son señales acotadas.

Integrando (14) se obtiene

$$V(T) - V(0) = -\int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{DK} \tilde{\mathbf{v}} dt,$$

y, eliminando $V(T)$, se verifica que

$$V(0) \geq \int_0^T \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{DK} \tilde{\mathbf{v}} dt. \quad (15)$$

Para \mathbf{DK} , que es una matriz simétrica y definida positiva, se verifica

$$\lambda_{\min}(\mathbf{DK}) \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 \leq \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{DK} \tilde{\mathbf{v}} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{DK}) \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2, \quad (16)$$

con $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ y $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ representando los autovalores mínimo y máximo de la matriz \mathbf{A} .

De (15) y (16), se obtiene que

$$\int_0^T \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 dt \leq \frac{V(0)}{\lambda_{\min}(\mathbf{DK})}, \quad \forall T,$$

lo que significa que $\tilde{\mathbf{v}}$ es una señal de cuadrado integrable. Además, $\tilde{\mathbf{v}}$ es acotado, como puede ser visto de (10) teniendo en cuenta que $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ y \mathbf{G} son todos acotados. Según el Lema de Barbalat (Aström y Wittenmark, 1995), se puede concluir que $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo que garantiza la convergencia asintótica de los errores de control a cero.

La ley de actualización de parámetros (13) funciona como un integrador, y, por lo tanto, puede ocasionar problemas de robustez cuando ocurren errores de medición, ruidos o disturbios en la señal medida. Una posible forma de evitar la divergencia de los parámetros es desactivar la adaptación cuando el valor de error es menor que un umbral, como se muestra en (Martins et al., 2007). Otra manera de evitarse dicha divergencia es introducir una modificación sigma en la ley de actualización de los parámetros, como se muestra en (Kaufman, Barkana y Sobel, 1998) y ejemplificado en (Nasisi y Carelli, 2003), que presenta un controlador servo-visual con modificación sigma aplicado a un manipulador robótico.

De esto modo, la ley de actualización de parámetros con modificación sigma es

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (17)$$

donde $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ es una matriz de ganancias positivas. La Ecuación (17) puede ser reescrita como

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\gamma}^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{0}, \quad (18)$$

y sustituyendo el resultado en (12) se tiene que

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{DK} \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{0}. \quad (19)$$

Definiendo las constantes $\mu_{DK} = \chi(\mathbf{DK})$ y $\mu_{\Gamma} = \chi(\boldsymbol{\Gamma})$, donde $\chi(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$, o sea, el menor valor singular de la matriz \mathbf{A} , siendo λ_{\min} su menor autovalor, se puede escribir que

$$\dot{V} \leq -\mu_{DK} \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \mu_{\Gamma} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \mu_{\Gamma} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\mathbf{0}\|. \quad (20)$$

Ahora, se considera la relación

$$\left(\frac{1}{\xi} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi \|\mathbf{0}\| \right)^2 = \frac{1}{\xi^2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - 2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\mathbf{0}\| + \xi^2 \|\mathbf{0}\|^2,$$

que resulta en

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\mathbf{0}\| = \frac{1}{2\xi^2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{0}\|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \xi \|\mathbf{0}\| \right)^2, \quad \xi \in \mathfrak{R}^+.$$

Despreciando el término negativo, se obtiene la desigualdad

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\mathbf{0}\| \leq \frac{1}{2\xi^2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{0}\|^2 \quad (21)$$

es obtenida. Sustituyendo (21) en (20), se tiene

$$\dot{V} \leq -\mu_{DK} \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \mu_{\Gamma} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \mu_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\xi^2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{0}\|^2 \right),$$

o, equivalentemente,

$$\dot{V} \leq -\mu_{DK} \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \mu_{\Gamma} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2} \right) \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \mu_{\Gamma} \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{0}\|^2. \quad (22)$$

Definiendo los parámetros

$$\alpha_1 = \mu_{DK} > 0, \quad \alpha_2 = \mu_{\Gamma} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2} \right) > 0,$$

con ξ adecuadamente seleccionado, la Ecuación (22) puede ser reescrita como

$$\dot{V} < -\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 - \alpha_2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \rho, \quad (23)$$

donde $\rho = \mu_{\Gamma} \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{0}\|^2$.

Ahora se reescribe (11) como

$$V \leq \beta_1 \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 + \beta_2 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2, \quad (24)$$

donde $\beta_1 = (1/2)\mathcal{G}_D$, $\beta_2 = \mathcal{G}_{\gamma}$, $\mathcal{G}_{\gamma} = \kappa_{\max}(\boldsymbol{\gamma})$ y $\mathcal{G}_D = \kappa_{\max}(\mathbf{D})$, con $\kappa_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ denotando los valores singulares máximos de \mathbf{A} . Luego, se puede escribir

$$\dot{V} \leq -\Lambda V + \rho, \quad (25)$$

con $\Lambda = \min \left\{ \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right\}$. Como ρ es acotado, por las

ecuaciones presentadas anteriormente se puede concluir que $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ son finalmente acotados.

Retomando el análisis del error de seguimiento de trayectoria $\tilde{\mathbf{h}}$ de la Sección 3, y dejando ahora la suposición de seguimiento perfecto de trayectoria, la ecuación (5) se transforma en

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde el vector de error $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$ representa el error de seguimiento de velocidad previamente definido como $\tilde{\mathbf{v}}$. En forma compacta, la Ecuación (26) puede

ser reescrita como $\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \tilde{\mathbf{v}}(t)$, donde

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}.$$

Considerando la misma función candidata de Lyapunov de la Sección 3.1, o sea, $V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0$, su primera derivada temporal es calculada como $\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) + \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{v}}$. Una condición suficiente para que $\dot{V} < 0$ puede ser expresada como $\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) > \|\tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{v}}\|$. Para valores pequeños de error de control, $\tilde{\mathbf{h}}$, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{h}}) \approx \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2$$

y la condición suficiente para $\dot{V} < 0$ es que

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\tilde{\mathbf{v}}\|}{\min(k_x, k_y)}. \quad (27)$$

Para el caso en que se considera la ley de actualización dada por (13), fue probado que $\tilde{\mathbf{v}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, lo que permite concluir de inmediato que la condición (27) es asintóticamente verificada para algún valor de $\tilde{\mathbf{h}}$ y, así, finalmente se concluye que $\tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, o sea, el objetivo de control es satisfecho. Por otra parte, considerando la ley de adaptación robusta con la modificación sigma, dada en (17), fue probado que $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ queda finalmente acotado por un valor R en una norma de la señal. De este modo, se concluye que el error de control de seguimiento también quedará finalmente acotado por un valor $R/\min(k_x, k_y)$ en una norma del error de control.

V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Algunos resultados de experimentos y simulaciones se presentan en esta sección. El controlador propuesto fue implementado en un robot móvil *Pioneer 3-DX*, que tiene como entradas de comando las referencias de las velocidades lineal y angular. El controlador fue iniciado con los parámetros dinámicos de un *Pioneer 2-DX*, obtenidos vía identificación. El *Pioneer 3-DX* tiene montado un sensor láser de 4,5 kg, un incremento de masa que cambia considerablemente su comportamiento dinámico en relación al *Pioneer 2-DX* (originalmente, ambos robots tenían aproximadamente unos 9 kg de masa). El efecto producido en la dinámica por el sensor láser es un error de aproximadamente 10% en los valores de los parámetros, error que está presente en el inicio de todos los experimentos.

En el experimento, el robot está inicialmente en las coordenadas (0,2 m; 0,0 m), y debe seguir una trayectoria circular, con centro en (0,0 m; 0,8 m). Dicha trayectoria comienza en (0,8 m; 0,8 m), y sigue manteniendo un radio de 0,8 m hasta los 50 segundos, cuando el radio súbitamente cambia a 0,7 m. A partir de este momento el radio de la trayectoria de referencia sigue alternando entre 0,7 y 0,8 m cada 60 segundos.

La Fig. 4(a) muestra los errores de distancia para los experimentos con el controlador propuesto, con y sin actualización de parámetros, siguiendo la trayectoria de

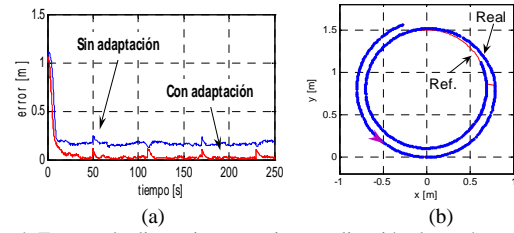


Fig. 4. Errores de distancia con y sin actualización de parámetros (a), y parte de la trayectoria recorrida incluyendo un cambio de referencia de radio – con adaptación de parámetros (b).

referencia descrita. El error de distancia se define como la distancia instantánea entre la referencia y la posición real del robot, obtenida a partir de su odometría. El error inicial observado en la Fig. 4(a) se debe a que la trayectoria de referencia se inicia en un punto distante de la posición inicial del robot.

El controlador propuesto fue probado primero sin actualización de parámetros. Puede observarse en la Fig. 4(a) que, en este caso, el error de trayectoria en régimen permanente tiene un valor promedio cerca de 0,2 m. Se nota que dicho valor de error se mantiene aún después que el radio de la trayectoria de referencia cambia. La misma figura muestra el error de distancia para el caso en que hay actualización de los parámetros dinámicos – en este caso se ha aplicado la ley de actualización de parámetros con modificación sigma, dada en (17). Es posible observar que el error tiene un valor notablemente menor que en el caso en que no existe adaptación. La Fig. 4(b) muestra una parte de la trayectoria recorrida por el robot incluyendo un cambio de radio de la referencia, para el caso del controlador con adaptación de parámetros.

La evolución de los parámetros estimados se presenta en la Fig. 5, donde puede observarse que todos convergen a valores fijos. También se han realizado experiencias de simulación del sistema completo para verificar su comportamiento en tiempos de operación prolongados. El modelo dinámico del robot móvil unicycle presentado en la Sección II y la estructura de control completa usando modificación sigma fueron simulados en experiencias equivalentes a casi 20 horas. La trayectoria de referencia para la simulación fue la misma utilizada en los experimentos, y fue introducido un ruido en los valores de velocidades recibidos por el controlador. La Fig. 6 muestra la evolución de los parámetros estimados, observándose su convergencia sin verificarse fenómenos de deriva paramétrica.

El siguiente experimento tuvo como objetivo mostrar el comportamiento del sistema para un problema de regulación. En este caso, el robot sale del punto (0,2 m, 0,0 m), y debe alcanzar el punto de referencia fijo (-2,0 m, 2,8 m). Puede observarse en la Fig. 7(a) que el controlador propuesto presenta un buen desempeño, llevando al robot hasta el punto de referencia. En la Fig. 7(b) se puede ver que el robot se detiene completamente cuando alcanza el punto de referencia, o sea, las velocidades lineal y angular van a cero. La Fig. 8 muestra que el error de distancia tiende a un valor muy pequeño cuando el robot completa el trayecto.

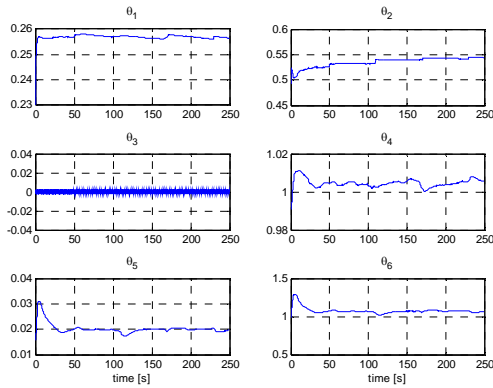


Fig. 5. Evolución de los parámetros estimados – experimento con modificación sigma.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha diseñado e implementado un controlador adaptable de seguimiento de trayectorias. Dicho controlador está dividido en dos partes basadas en los modelos cinemático y dinámico del robot. Una ley de actualización de parámetros con modificación sigma fue propuesta y la estabilidad del sistema fue demostrada. Resultados experimentales muestran el buen desempeño del controlador para seguimiento de trayectoria y posicionamiento. Resultados de simulación muestran que los parámetros convergen aún cuando el sistema funcione durante largo tiempo.

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen a la CAPES/Brasil y a la SPU/Argentina por el soporte financiero dado a la colaboración entre la UFES y la UNSJ (proyecto 018/04 CAPG-BA), en la cual este trabajo se involucra. El autor Felipe Martins también agradece a la UCL – Faculdade do Centro Leste, por el apoyo que le permitió a él participar de este trabajo.

REFERENCIAS

- Aström, K. J. y Wittenmark, B. *Adaptive Control*, 2a. edición, Addison-Wesley Publishing Company, pp. 199-223 (1995).
- Carelli, R., Secchi, H. y Mut, V. “Algorithms for Stable Control of Mobile Robots with Obstacle

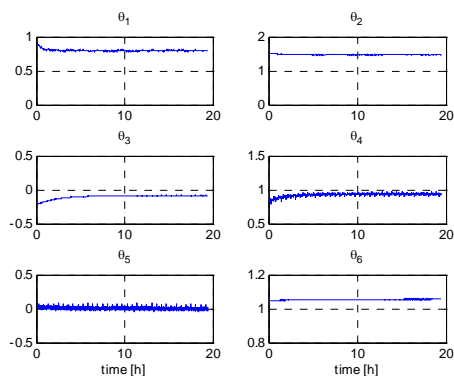


Fig. 6. Evolución de los parámetros estimados – simulación de larga duración.

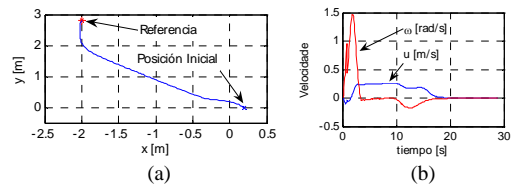


Fig. 7. Trayectoria del robot (a), velocidades lineal u y angular ω para referencia de punto fijo.

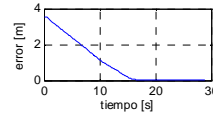


Fig. 8. Error de distancia para referencia de punto fijo.

Avoidance,” *Latin American Applied Research*, Vol. 29, pp. 191-196 (1999).

- Das, T. y Kar, I. N. “Design and Implementation of an Adaptive Fuzzy Logic-Based Controller for Wheeled Mobile Robots,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, no. 3, pp. 501-510 (2006).

De La Cruz, C. “Control de Formación de Robots Móviles,” *Tesis de Doctorado*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina (2006).

Dong, W. y Guo, Y. “Dynamic tracking control of uncertain mobile robots,” *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2774-2779 (2005).

Fukao, T., Nakagawa, H. y Adachi, N. “Adaptive Tracking Control of a Mobile Robot,” *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 16, no. 5, pp. 609-615 (2000).

Kaufman, H., Barkana, I. y Sobel, K. *Direct adaptive control algorithms, theory and applications*, 2a. edición, New York, pp. 182-184 (1998).

Kim, M. S., Shin, J. H. y Lee, J. J. “Design of a Robust Adaptive Controller for a Mobile Robot,” *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1816-1821 (2000).

Liu, S., Zhang, H., Yang, S. X. y Yu, J. “Dynamic Control of a Mobile Robot Using an Adaptive Neurodynamics and Sliding Mode Strategy,” *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, pp. 5007-5011 (2004).

Martins, F. N., Celeste, W. C., Carelli, R., Sarcinelli Filho, M. y Bastos Filho, T. F. “Kinematic and Adaptive Dynamic Trajectory Tracking Controller for Mobile Robots,” *Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Advances in Vehicle Control and Safety*, pp. 29-34, Buenos Aires, Argentina (2007).

Nasisi, O. e Carelli, R. “Adaptive Servo Visual Robot Control,” *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 43, pp. 51-78 (2003).

Wu, W., Chen, H., Wang, Y. y Woo, P. “Adaptive Exponential Stabilization of Mobile Robots with Uncertainties,” *Proceedings of the IEEE 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, pp.3484-3489 (1999).