



ISSN: 2603-9982

Pérez Duarte, D.C., Pérez Duarte, L.F. y Armero Cano, L.E. (2020). El uso del kirigami como dispositivo didáctico en el aprendizaje de la geometría. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(3), 1-17.

EL USO DEL KIRIGAMI COMO DISPOSITIVO DIDÁCTICO EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Diana Carolina Pérez Duarte, Universidad Antonio Nariño

Luis Fernando Pérez Duarte, Universidad Antonio Nariño

Luis Enrique Armero Cano, Colegio I.E.D. Ismael Perdomo

Resumen

Esta investigación tiene como propósito favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico relacionado con los conceptos de congruencia y semejanza, haciendo uso del kirigami como herramienta didáctica. Las actividades están sustentadas a través de la técnica del kirigami, procesos de visualización con énfasis en las habilidades de visualización de Bishop (1989) y resolución de problemas, utilizando organizadores gráficos y trabajo en equipo. La secuencia didáctica está diseñada para tres sesiones, cada una de ellas con un objetivo específico que guían al estudiante a un aprendizaje autónomo. Los resultados muestran evidencias significativas acerca de la eficacia de dicha metodología.

Palabras clave: kirigami, geometría, congruencia y semejanza, visualización, resolución de problemas.

The use of Kirigami as a teaching device in learning Geometry

Abstract

The purpose of this research is to promote the development of Geometric thinking related to the concepts of congruence and similarity, using the kirigami as a didactic tool. The activities are supported through the kirigami technique, visualization processes with emphasis on Bishop's visualization skills (1989) and problem solving, using graphic organizers and teamwork. The sequence didactic is designed for three sessions, each with a specific objective that guides the student to autonomous learning. The results show significant evidence about the effectiveness of this methodology.

Keywords: kirigami, Geometry, congruence and similarity, visualization, problem solving.

INTRODUCCIÓN

Indiscutiblemente la trascendencia de las matemáticas y sus diferentes campos del saber, han influido en la historia de la humanidad, ya que han permitido entender, comprender, manejar y concebir diferentes aspectos de la cotidianidad del ser humano.

Dentro de los campos del saber de las matemáticas, se encuentran los tipos de pensamiento, los cuales propician la racionalidad y el conocimiento de esta ciencia, así, como el fortalecimiento de los procesos matemáticos. De manera particular, la geometría desempeña un papel fundamental en el desarrollo de habilidades como: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar y comparar para entender el mundo que rodea al individuo.

La geometría debe potenciar competencias en el reconocimiento de las propiedades y las medidas de las figuras en el plano y en el espacio, permitiendo el avance de los procesos matemáticos en la solución de diferentes situaciones con formas concretas.

A través de la historia, el ser humano ha utilizado la geometría en la vida cotidiana en diferentes aspectos como las artes, manifestadas en diversas expresiones tales como la cerámica, orfebrería, pintura y tejidos, manejando en estas expresiones formas y tamaños asociados a la naturaleza. Así mismo, en la antigüedad la arquitectura ha utilizado la geometría como eje fundamental de sus creaciones y en la actualidad las ingenierías, la fotografía y el diseño hacen de la geometría una herramienta práctica para el desarrollo de sus procesos.

Este desarrollo histórico y su utilización social, ha sido relegado a los procesos de enseñanza de esta ciencia, lo que ha generado dificultades en la solución de problemas que son significativos a la realidad del estudiante, ya que limita el proceso de modelamiento mental muy alejados de las situaciones de la realidad. Esto conlleva a generar dificultades en el manejo de las diferentes relaciones geométricas, que se pueden encontrar en los diversos problemas que enfrentan los estudiantes, de manera particular esto se evidencia en el manejo de los conceptos de semejanza y congruencia de figuras (Goncalves, 2006, p.96).

En las instituciones educativas, tradicionalmente se ha desarrollado los conceptos de semejanza y congruencia como se presenta en los textos guías, en estos se presentan simplemente comparaciones de figuras sin llevarlas a un contexto significativo al estudiante, por consiguiente, no permite que haya una construcción del concepto ni una aprensión de ellos.

Dicho lo anterior, es fundamental que dentro del proceso de enseñanza de la geometría se implemente el uso de materiales y estrategias que faciliten el aprendizaje de diferentes conceptos, de tal manera, que el conocimiento que se adquiera sea significativo para el estudiante y de fácil aplicación y transferencia a situaciones cotidianas. Esto lleva a la pregunta ¿Cómo favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico relacionado con los conceptos de congruencia y semejanza en estudiantes de grado noveno?

Para dar solución a la pregunta se realizó una secuencia didáctica basada en el kirigami para construir sólidos, donde se enfatiza los conceptos de congruencia y semejanza; se fortalecen las habilidades de la visualización lo que conlleva a mejorar las nociones geométricas, desarrollar estrategias de resolución de problemas, descubrir elementos matemáticos, fomentar la convivencia y trabajo en equipo, mejorar la concentración, memoria, creatividad y motricidad.

MARCO TEORICO

Para la realización de la investigación se tiene en cuenta los procesos de visualización, resolución de problemas y el Kirigami, a continuación, se detallarán cada uno de estos aspectos.

Kirigami

Kirigami tiene etimología japonesa en donde "kiru" (cortar) y "kami" (papel). Se trata del arte de cortar papel obteniendo así una hoja de papel plana con partes fundidas. En Japón esta actividad es popular, llena de significados y posee sentido religioso. Originalmente se manejaban tres tipos de técnicas: senshi, sanshi y kokushi.

Senshi: se practica sólo con cortes por medio de la tijera. Esta técnica consiste en doblar el papel sucesivamente y realizar cortes sobre él. Los senshis eran artículos popularmente confeccionados por familias pobres, que las utilizaban como elemento decorativo en sus residencias o productos que eran vendidos como artefactos artesanales.

Sanshi: es un método muy utilizado por los niños. Se basa en plegado con forma de acordeón, donde el corte se lleva a cabo en el papel.

Kokushi son formados por cortes más precisos y detallados, hechos con estiletes o cutter formando imágenes positivas y negativas.

El origami arquitectónico también se conoce como "Origamic Architecture", "Pop-up architecture", "3D Cards" o "Kirigami tridimensional", es la fusión del doblado del Origami con el Kirigami de corte sistemático que lleva a la transformación de imágenes en dos y tres dimensiones, lo que resulta en figuras que parecen "saltar el papel", dando sensación visual de "edificio"; se originó en el período Edo japonés (1603-1868) con las linternas de papel (okoshi-e) hechas para iluminar las casas de té. Este arte al crear formas sofisticadas dio como resultado verdaderas esculturas en papel que eran empleadas en la producción artesanal de tarjetas a fin de conmemorar una fecha o evento o aún como saludo para alguien especial.

La utilización del kirigami y el origami desarrollan los conceptos geométricos en la construcción de figuras. Una de las fortalezas de esta técnica, es que permite el paso de dos a tres dimensiones de una manera sencilla y manipulando material concreto, lo que permite un aprendizaje significativo, y facilita la comprensión de los conceptos de geometría. Es importante antes de realizar esta técnica hacer un análisis adecuado de la temática a trabajar con el fin de establecer las figuras más convenientes y adecuadas a construir de tal manera que el estudiante logre apropiarse los conceptos de una manera práctica y que los pueda verificar fácilmente.

Visualización

Para Hershkowitz, (1990), la visualización se asocia con “la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual” (p.75), por otro lado, Zimmermann y Cunningham (1991), define la visualización como “el proceso de formar imágenes ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología” (p. 3).

Arcavi, (2003) combina las definiciones anteriores para definir la visualización como “la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el

pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión” (p. 216).

Rina, Dubinsky, y Dautermann, (1996) plantean que la visualización es el medio para viajar entre el contexto externo (representaciones externas) y la mente. La visualización es un acto que puede consistir en la construcción mental de objetos o procesos que un sujeto asocia con objetos o medios externos como el papel, el tablero o la pantalla del computador, o situaciones percibidas; para Clemens y Battista, (1992) la visualización integra procesos por los cuales se obtienen conclusiones a partir de representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones. Por tanto, la visualización está en estrecha relación con la representación del espacio, o la exploración heurística; adicional a las anteriores definiciones, además se establece que la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual (Cantoral y Montiel, 2001, p.146). En consecuencia, es un proceso que se utiliza en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Según Bishop, (1989) establece siete habilidades relacionadas con la visualización: Coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual, memoria visual, habilidades fundamentales que se alcanzan en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Resolución de Problemas

La resolución de problemas ha sido estudiada por diferentes investigadores, en diversos campos de la Educación Matemática, lo que le ha permitido devenir como una de las teorías en la actualidad.

Investigadores como Polya (1981), Mason, Burton y Stacey (1988), entre otros, han planteado definiciones de problema. Estos autores son del criterio que, para ser un problema, se deben presentar dificultades en su resolución y su solución no debe ser inmediata. Polya (1981) plantea que tener un problema “... significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (p. 117).

Por su parte, Ballester et al. (2000), expresa que un problema “... refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de las ciencias o la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución; se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución también desconocida se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos”(p.430).

Para la investigación se asume la definición dada por Krulik y Rudnik (1987), al establecer que un problema es “... una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma” (p.23), bajo esta apreciación se diseñaran los problemas que se presentaran en cada una de las secuencias didácticas.

El sistema de actividades que se propone en la investigación conduce al planteamiento de problemas retadores. Según Pérez (2004) los problemas retadores “... invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento” (p.1). Por otra parte, Falk (1980) plantea que los problemas retadores constituyen “... una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el

alumno, y que la solución no sea inmediata” (p.22). Los problemas retadores generan motivación e interés en los estudiantes, característicos estas que se evidencian en el planteamiento de problemas geométricos.

Un proceso sólido de planteamiento de problemas geométricos en la educación básica se potencia, si en el trabajo de aula se propicia: la indagación, la exploración, el razonamiento, la exposición de su actuación y la integración de conceptos, elementos que son característicos de los procesos de enseñanza aprendizaje del contenido matemático basados en problemas retadores y se interrelacionan con las habilidades propuestas por Bishop, (1989) en los procesos de visualización. Planteamientos fundamentales que integran la propuesta didáctica.

METODOLOGÍA

La presente investigación es de carácter cualitativo dirigiéndose de lo particular a lo general. Primero se explora y describe la situación actual de la población estudiada, para posteriormente generar resultados de cambio en cada una de las etapas del proceso investigativo. Este estudio se llevó a cabo con estudiantes de grado noveno (edades entre 13 y 15 años) de un centro escolar, jornada tarde de la Localidad 19 (Ciudad Bolívar-Bogotá).

Por lo que respecta a los participantes de la investigación, se seleccionó el grado noveno que al iniciar el año académico contaba con una matrícula de 80 estudiantes distribuidos en dos grupos 901 y 902, este último se eligió como grupo para la investigación, debido que en el pretest aplicado a los grupos se evidencio mayores dificultades en los conceptos matemáticos.

Materiales y métodos de intervención

Para dar respuesta a la problemática del presente trabajo se realizó un pretest y un post test (anexo 1). La primera prueba tuvo como objetivo determina y valorar los elementos necesarios asociados al concepto de congruencia y semejanza que deben manejar los estudiantes de grado noveno. Con la segunda prueba, su objetivo fue determinar y valorar la apropiación de los conceptos de congruencia y semejanza que desarrollaron a través del uso del kirigami y la forma en que los estudiantes mejoraron en el pensamiento geométrico para la solución de problemas no rutinarios e interesantes.

La estrategia didáctica se conforma por tres sesiones que están articuladas entre sí, y cada una de ellas desarrolla conceptos fundamentales que son necesarios para la construcción del tema de investigación, además se diseñaron de tal forma que permiten a los estudiantes superar deficiencias conceptuales. Para el desarrollo del estudio se propusieron las siguientes actividades.

- **Sesión 1: Construcción de los conceptos de semejanza y congruencia.** Esta sesión busca que los estudiantes construyan los conceptos de congruencia y semejanza partiendo de la realización de dobles (ver figura 1), en un papel para visualizar lo que sucede en cada uno de ellos y así establecer las relaciones que se generan entre las figuras geométricas (cuadrados y rectángulos).

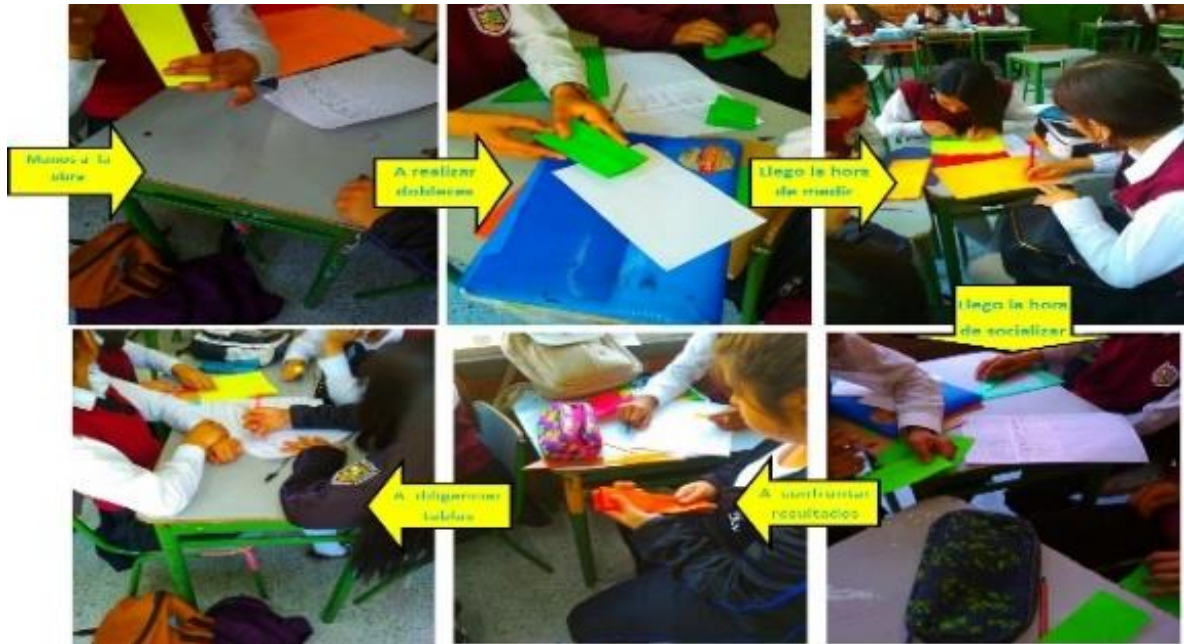


Figura 1. Trabajo con los estudiantes. Fuente: del autor (2019)

- **Sesión 2: Construcción de sólidos y aplicación de conceptos de congruencia y semejanza.** En esta sesión se aplica la técnica del kirigami en la construcción de sólidos teniendo en cuenta las características de plegabilidad y estabilidad que se debe manejar, permitiendo el paso de una superficie plana a figuras tridimensionales en donde los estudiantes abordaran los conceptos de congruencia y semejanza, como se evidencia en la figura 2.



Figura 2. Trabajo con los estudiantes. Fuente: del autor (2019)

- **Sesión 3: Refuerzo de conceptos de congruencia y semejanza.** En esta sesión se construirá el triángulo de Sierpinski y a medida que se realizan los dobleces se realizan los cortes y se va construyendo la figura. Una vez terminada se vuelve en una superficie plana para verificar las características formadas en ella, al final los

estudiantes crearan una figura utilizando la técnica del Kirigami, dicha secuencia se observa en la figura 3.



Figura 3. Trabajo con los estudiantes. Fuente: del autor (2019)

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

A continuación, se describe algunos resultados obtenidos al aplicar la propuesta didáctica.

Al terminar la sesión 1. se evidenció que los estudiantes se sentían motivados para realizarla y en su desarrollo se hicieron los primeros dobleces y empezaron a diligenciar sus observaciones en el cuadro como se observa en la tabla 1.

Tabla 1. A través de los dobleces complete la información

Figura geométrica	Número de dobleces	Nombre de figura geométrica formada	Número de figuras geométricas formadas	Nombre del segmento de la base	Medida de la base	Nombre del segmento de la altura	Medida de la altura
1	0	cuadrado	1	\overline{AB}	$m\overline{AB} =$	\overline{BD}	$m\overline{BD} =$
2							
3							
4							

Se evidenciaron dificultades al establecer el segmento de la base y de la altura; al momento de realizar la medida de los segmentos se hicieron presentes falencias al utilizar la regla o escuadra, ya que iniciaban la medida desde el valor 1.

Durante la realización de los dobleces algunos estudiantes afirman: “*profe el número de figuras en cada dobléz se duplica cuando no se ha doblado hay 1, con el primer dobléz hay 2, con el segundo dobléz hay 4, con el tercero hay 8*”, a lo que se les indica que terminen de realizar los dobleces y establezcan si se cumple su afirmación y si pueden establecer una fórmula matemática.

Durante la sesión se logra observar que los estudiantes describen las figuras que se forman: cuadrados y rectángulos, visualizan que existe relación entre los cuadrados en los diferentes dobleces así mismo entre los rectángulos, para ello utilizan la estrategia del Folding back¹ de Pirie y Kieren que les permite comprender mejor el concepto de congruencia y semejanza al devolverse a dobleces anteriores y poder realizar comparaciones; afirman: “*profe las medidas de los cuadrados que se forman en el nuevo doblez es la mitad del anterior doblez en donde se formaron cuadrados y con las medidas de los rectángulos pasa lo mismo*”, con respecto a esta afirmación se les dice que eso es una semejanza y ese valor es la razón de semejanza; a continuación se les indaga por las características que tienen los cuadrados y rectángulos que se forman al terminar cada doblez, a lo que los estudiantes responden: “*los cuadrados son iguales tiene las mismas medidas*”, y luego observan los rectángulos y contestan que: “*los rectángulos también son iguales*”, a estas afirmaciones se les indica que esas figuras son congruentes.

Con el fin de reforzar los conceptos anteriores los estudiantes construyen la tabla 1., en donde se comparan las diferentes figuras y se establece la razón entre lados homólogos, y a continuación definen si existe razón de semejanza, cuantas figuras son congruentes y si existe semejanza entre las dos figuras (ver figura 4).

Figura geométrica	Numero de dobleces	Nombre de figura geométrica formada	Numero de figuras geométricas formadas	Nombre del segmento de la base	Medida de la base	Nombre del segmento de la altura	Medida de la altura
1	0	cuadrado	1	AB	mAB = 20	BD	mBD = 20
2	1	rectángulo	2	JC	mJC = 20	CK	mCK = 10
3	2	cuadrado	4	HO	mHO = 10	ON	mON = 5
4	4	rectángulo	8	XV	mXV = 5	VD	mVD = 2,5
5	6	cuadrado	16	FY	mFY = 2,5	YI	mYI = 1,25
6	10	rectángulo	32	AP	mAP = 1,25	PI	mPI = 0,625
7	14	cuadrado	64	HN	mHN = 0,625	NI	mNI = 0,3125

Figura geométrica	Numero de dobleces	Nombre de figura geométrica formada	Numero de figuras geométricas formadas	Nombre del segmento de la base	Medida de la base	Nombre del segmento de la altura	Medida de la altura
1	0	cuadrado	1	AB	mAB = 15 cm	BD	mBD = 15 cm
2	1	rectángulo	2	AC	mAC = 7,5 cm	CB	mCB = 7,5 cm
3	2	cuadrado	4	AE	mAE = 3,75 cm	ED	mED = 3,75 cm
4	4	rectángulo	8	AG	mAG = 1,875 cm	GD	mGD = 1,875 cm
5	6	cuadrado	16	FM	mFM = 0,9375 cm	MD	mMD = 0,9375 cm
6	10	rectángulo	32	IK	mIK = 0,46875 cm	KL	mKL = 0,46875 cm
7	14	cuadrado	64	LO	mLO = 0,234375 cm	OD	mOD = 0,234375 cm

Figura 4. Trabajo con los estudiantes. Fuente: del autor

Al finalizar la sesión se logra establecer que los estudiantes mejoran en las habilidades de visualización, por lo tanto las habilidades geométricas se fortalecen; adicional a lo anterior, los estudiantes logran asimilar y apropiarse del concepto de congruencia y semejanza con los elementos asociados a ellos; el uso de tablas permite organizar la información lo que facilita la adquisición y el manejo del conocimiento, e integrando con el trabajo colaborativo que les permite discernir y llegar a acuerdos que fortalece el proceso de aprendizaje. Cabe resaltar que los estudiantes establecieron que la secuencia matemática del número de figuras formadas en cada serie de dobleces es 2 elevado al

¹ Folding back: proceso de comprensión de un concepto, puede ocurrir que el sujeto se encuentre con dificultad al resolver una actividad y retroceda a una capa o anillo interior con la finalidad de reconstruir o construir el conocimiento objeto de dificultad, para regresar con una comprensión más profunda hacia la misma capa u otra exterior a ella. (Pirie y Kieren, 1999)

número de dobleces, como se observa en la figura 5. Dentro de esta sesión se lograron trabajar elementos como segmentos paralelos, segmentos perpendiculares, ángulos rectos, figuras geométricas, como rectángulos y cuadrados.

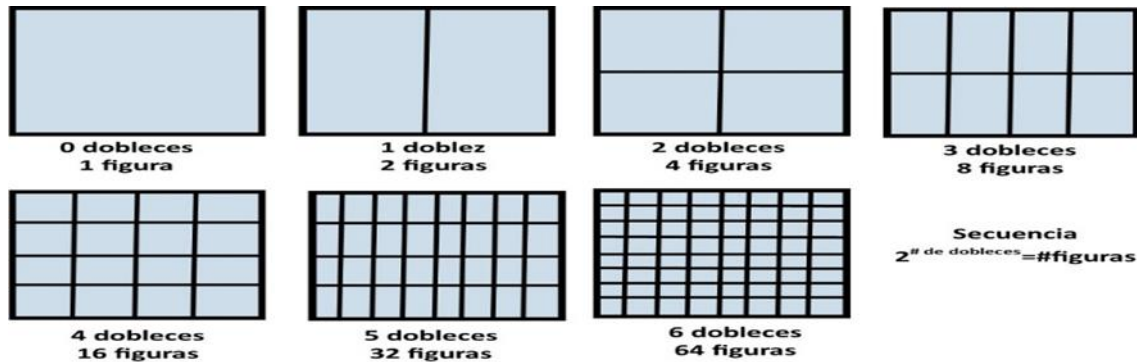


Figura 5. Presentación de trabajo a los estudiantes. Fuente: del autor (2019)

Como resultado de la actividad se evidenció que los estudiantes al utilizar la técnica del Kirigami, son capaces de establecer si dos figuras son congruentes o semejantes utilizando como herramienta la visualización, para ello en el grupo algunos estudiantes lo argumentaron analizando las características de las figuras que se forman, otros estudiantes, lo argumentaron hallando las razones de semejanza entre lados homólogos. Es de resaltar el análisis que realizan los estudiantes sobre la secuencia que se forma en el transcurso de la actividad, además la forma de buscar un modelo matemático de la actividad que están realizando.

Al verificar el objetivo de la sesión, es imperante mencionar que se logró que los estudiantes describieran y construyeran el concepto de congruencia y semejanza por medio del doblado de papel. Además, se reforzaron conceptos en los que se presentaban dificultades, como en la razón de semejanza, manejo de lados homólogos de figuras geométricas, manejo de escalas y en la argumentación de sus respuestas. Adicional a lo anterior, se hizo uso de la visualización como herramienta que propicia la adquisición de conceptos.

Se logra evidenciar el rol que juega el uso de material manipulable en este caso el papel y la técnica del origami en el aprendizaje de geometría, ya que permite al estudiante definir, manejar y apropiarse de una manera más sencilla y eficiente los conceptos de congruencia y semejanza, así, como los elementos asociados a estos; además, permite el mejoramiento en los procesos de visualización que se puede apreciar en la caracterización realizada a la actividad.

Además, cabe destacar el trabajo en equipo que permite discernir, confrontar y establecer resultados en el desarrollo de la actividad, complementado con el uso de organizadores gráficos en este caso tablas como elemento del aprendizaje significativo, que permite organizar la información y el conocimiento, facilitando el aprendizaje subordinado, supraordinado y combinatorio.

Durante el desarrollo de la actividad se caracterizó las habilidades de visualización fundamentadas en Bishop (1989), que se describen en la siguiente tabla 2.

Tabla 2. *Habilidades de visualización utilizadas en el desarrollo de la sesión 1*

Actividad Sesión 1	Coordinación Visomotora	Percepción Figura - fondo	Constancia Perceptual (forma, tamaño y Posición)	Percepción de la posición en el espacio	Percepción de relaciones espaciales entre objetos	Discriminación visual	Memoria visual
0 dobleces	X	X	X			X	X
1 doblez	X	X	X	X	X	X	X
2 dobleces	X	X	X	X	X	X	X
3 dobleces	X	X	X	X	X	X	X
4 dobleces	X	X	X	X	X	X	X
5 dobleces	X	X	X	X	X	X	X
6 dobleces	X	X	X	X	X	X	X
7 dobleces	X	X	X	X	X	X	X

La tabla de caracterización de habilidades de visualización se obtiene observando los procesos realizados por los estudiantes, estos son:

La coordinación visomotora se obtuvo al acomodar la hoja de papel de tal manera que le quedara más fácil observar la figura.

La percepción de figura- fondo se determinó cuando los estudiantes identificaban la figura que se generaba en cada secuencia de dobleces.

Para valorar la habilidad de constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición. Se define cuando los estudiantes observan la figura generada en el doblez con las figuras anteriores y comparan su forma, tamaño y posición en la hoja de papel.

Para validar la habilidad de percepción de la posición en el espacio, se estableció la relación de figura en la hoja, cuando no se ha realizado doblez en esta, no se desarrolla la habilidad. Además, es la figura base para realizar las comparaciones con las figuras generadas.

En la habilidad de percepción de relaciones espaciales entre objetos, se determina al relacionar las diferentes figuras, al seleccionar una de las figuras generadas para realizar la comparación con otra figura elaborada con anterioridad, en el doblez cero, no se evidencia esta habilidad, ya que es la figura con la que se inicia el proceso de comparación.

La discriminación visual, se establecen las similitudes y diferencias que se generan entre las diferentes figuras y entre sus elementos.

Para la habilidad de memoria, se evidencia cuando se recuerdan las figuras y se relacionan sus características.

Para la sesión 2. Teniendo en cuenta el trabajo realizado en la sesión anterior y tomando los dobleces que se formaron, el docente les explica la técnica del Kirigami, que consiste en hacer dobleces y realizar cortes en el papel.

Inicia la sesión orientando el doblez de valle y el doblez de montaña, en una hoja se inicia la construcción de la primera figura, realiza los cortes por la parte del doblez, a

continuación, muestra cual es el dobléz de valle y el de montaña que se van a manejar, a partir de ello, arma un ortoedro en donde explica las características del kirigami de plegabilidad y estabilidad.

Los estudiantes realizan la construcción con gran expectativa de ver el resultado que se les genera, se les dificulta realizar los dobleces de valle y montaña, lo que convierte la actividad en un reto; a continuación, se interroga a los estudiantes si existe congruencias y semejanza entre las caras del ortoedro, a los que responde: *“profe los huecos son cuadrados y son congruentes y las dos caras que se ven son rectángulos y también son congruentes,”* otro estudiante afirma: *“profe no se forman dos rectángulos sino 4 y los 4 son congruentes,”* a lo que se le pregunta porque 4 caras y responde: *“mire profe se forma una caja y las cajas tienen 6 caras, ellos solo tienen en cuenta 4 y las otras dos donde están, pues son la de atrás y la base que no se ven porque están en el hueco”*, a lo que los compañeros dan la razón, con base en las discusiones dadas, se evidencia la construcción de conocimiento en colectivo, fundamento de la resolución de problemas.

Ahora se les pide que comparen los sólidos creados y establezcan si existe congruencia y semejanza, a lo que afirman: *“profe las caras laterales huecas son cuadradas y son semejantes, y las otras caras son rectangulares y también son semejantes”*, a lo que se les interroga que conclusión pueden sacar, y responden: *“los dos solidos son congruentes”*.

Para terminar la actividad, el docente desarma la figura y realiza nuevos cortes y forma el dobléz de valle y montaña, formando la nueva figura. Luego los estudiantes realizan la actividad y con su figura armada el docente les pregunta, cuáles de las tres figuras son semejantes y si es así cual es la razón de semejanza, a lo que los estudiantes responden: *“los tres sólidos son semejantes, el segundo es el doble del primero; el tercero es el triple del primero y el tercero está relacionado porque por cada 6 unidades hay 4 del segundo en el rectángulo, y por cada 3 unidades del tercero hay 2 unidades del segundo en el cuadrado”*, como se evidencia en la figura 6.



Figura 6. Respuesta dada por algunos estudiantes. Fuente: del autor (2019)

En una segunda sesión, se realiza la construcción de una segunda figura en la que tiene como objetivo establecer congruencias entre los sólidos, se dan las instrucciones necesarias para ello, se llevan a cabo los cortes y se establecen los dobleces de valle y montaña, se realiza el armado en tres dimensiones, y se interroga a los estudiantes de los sólidos armados cuales son congruentes y cuales son semejantes, al respecto responden: *“pues todos los sólidos son iguales tienen la misma medida en todas sus caras homólogos por eso son congruentes, además la razón de semejanza entre lados homólogos es 1”*, como se observa en la figura 7.

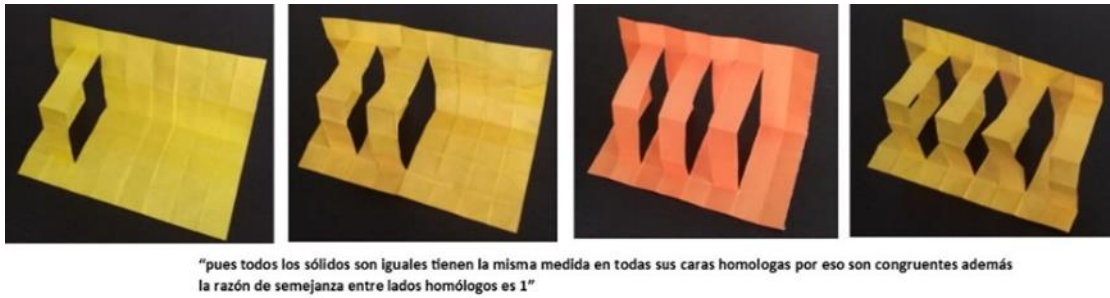


Figura 7. Respuesta dada por algunos estudiantes. Fuente: del autor (2019)

Una vez terminada esta actividad se plantean dos prácticas en las que se construyen sólidos y con base a ellos se proponen problemas asociados a congruencia y semejanza.

En el primer problema, se dan las instrucciones de corte y de dobleces de valle y montaña y se construye un cubo de tres unidades, a partir de él, se plantea que deben construir un sólido semejante al modelo.

Para el segundo problema, se construye un ortoedro de 2 unidades de ancho y de tres unidades de largo y de fondo, a partir de él, deben construir 2 ortoedros semejantes y ortoedro congruente; durante estas prácticas se observa que los estudiantes potencializan las habilidades de visualización en busca de la solución al problema planteado. A demás, fortalecen las habilidades geométricas al explicar y argumentar de manera lógica la solución planteada.

Esto evidencia, que los estudiantes utilizan los métodos heurísticos descritos por Polya (1981), de trabajar en sentido inverso, ya que toman la meta, en este caso cubos semejantes como dato para establecer la solución más adecuada, esto se demuestra en la afirmación dada por un estudiante: *"profe el nuevo cubo debe medir 1 o 2 unidades ya que el cubo hecho del modelo mide 3"*.

Los estudiantes al construir el sólido congruente y dos semejantes, buscaban hallar el primero congruente, para luego verificar que espacio de papel queda disponible para construir los sólidos semejantes, en este proceso diseñaban estrategias heurísticas a través del ensayo y error.

Otra estrategia de solución planteada por los estudiantes, es que, a partir de un problema más sencillo, llegan a la solución de un problema más complejo, esto se evidencia en dos situaciones:

Primera, los estudiantes realizan un dibujo con base en este modelaban la figura en el papel de Kirigami, ver figura 8.



Figura 8. Estrategia de un estudiante al hacer un dibujo. Fuente: del autor (2019)

La segunda solución planteada, es cuando toman una hoja del cuaderno y construyen una figura semejante al modelo y buscan posibles soluciones las comprueban y luego lo realizaban en el papel de Kirigami, como se evidencia en la figura 9.

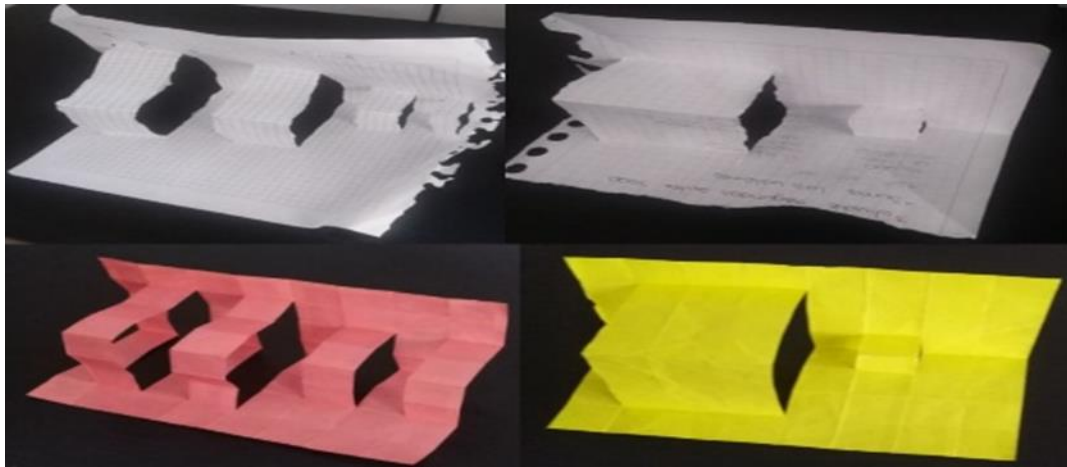


Figura 9. Trabajo un estudiante con el uso del kirigami. Fuente: del autor (2019)

Por otra parte, algunos estudiantes desarrollaron procesos de pensamiento divergente, estableciendo soluciones innovadoras, como construir el sólido solución en el mismo sólido del problema, llevándolos continuamente a revisar las condiciones del problema y verificando si se cumplían, obteniendo soluciones rápidas.

Al finalizar las secuencias se aplicó un post test (anexo.1) donde se evidencio que los estudiantes se apropiaron del concepto de congruencia y semejanza y de los elementos asociados a ellos, lo que se indica en la figura 10.

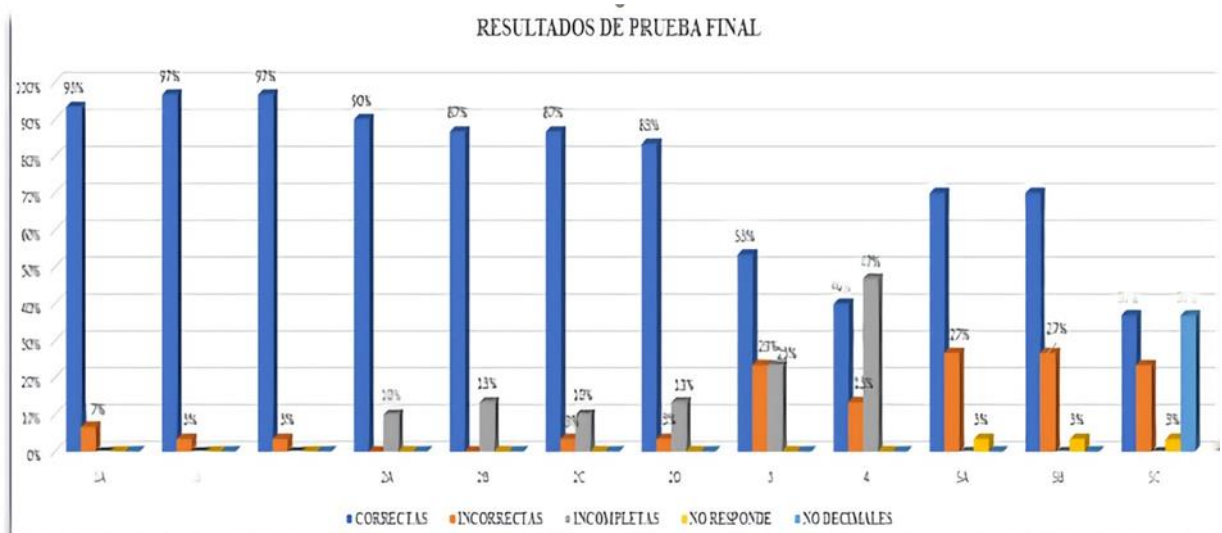


Figura 10. Resultados prueba final. Fuente: del autor (2019)

En la figura 10, se observa que las preguntas del 1A, 1B, 1C, 2A, 2B, 2C, 2D, más del 80% respondieron correctamente, donde se evaluaban los conceptos de razón de semejanza entre dos sólidos, en diferentes contextos.

En las preguntas 3 y 4 las respondieron correctamente más del 50%, donde debían argumenta precisa la congruencia y semejanza, en problemas más complejos.

Para la pregunta 5 las respondieron correctamente más del 70%, el 37% en esta se evidencio dificultades en el manejo de operaciones aritméticas.

CONCLUSIONES

A la pregunta sobre el uso del Kirigami, como dispositivo didáctico en el aprendizaje relacionado con conceptos de semejanza y congruencia, reveló importantes elementos:

Primero, el uso como dispositivo didáctico en el aprendizaje de la geometría, optimiza el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de semejanza y congruencia, puesto, que el estudiante es capaz de visualizar los sólidos y establecer características asociadas a la congruencia y la semejanza.

Segundo, el uso del kirigami facilita el proceso de pasar de dos dimensiones a tres dimensiones y conlleva, a que el estudiante genere imágenes más cercanas a la realidad, lo que fomenta el desarrollo de las habilidades de visualización propuestas por Bishop (1989).

Tercero, en el desarrollo de las actividades se observó que se propician espacios para el trabajo en equipo, lo cual con lleva a generar habilidades comunicativas en los estudiantes, donde deben socializar situaciones durante el desarrollo de la actividad y llegar a acuerdos, estableciendo roles dentro de equipo de trabajo.

Cuarto, el uso del Kirigami, potenció la habilidad de los estudiantes en la resolución de problemas, ya que los llevó al surgimiento de heurísticas, lo que permitió la construcción de redes conceptuales, llevando al estudiante a construir de forma natural los conceptos propuestos en la investigación.

Quinto, se desarrollaron habilidades de concentración, memoria, creatividad y motricidad, ya que las construcciones de las diferentes figuras se convierten en un desafío para ellos.

Todos estos elementos unidos potenciaron el desarrollo del pensamiento geométrico, a través, de un aprendizaje significativo y con elementos reales del contorno del estudiante.

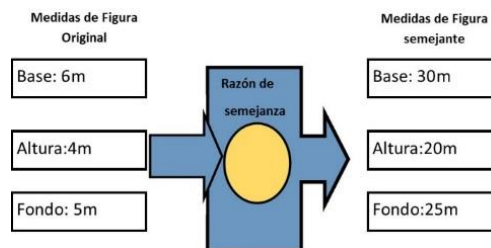
REFERENCIAS

- Arcavi, A. (2003). *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 215-241.
https://www.researchgate.net/publication/225216743_The_role_of_visual_representations_in_the_learning_of_mathematics_Educational_Studies_in_Mathematics_523_215-241/link/581cb79008ae12715af20609/download
- Ballester, S et al. (2000). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. Focus on learning Problems in Mathematics, 7-16.
https://www.researchgate.net/publication/226067440_Spatial_Abilities_and_Mathematics_Education_-_A_Review
- Cantoral R.y Montiel G. (2001). Visualización y pensamiento matemático. México: Prentice Hall & Pearson Education.

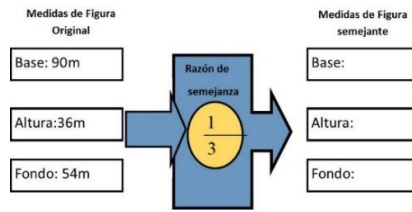
- Clemens, D., y Battista, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. En D. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 34-67). New York: NCTM.
- Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño
- Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista ciencias de la educación*, 1(27) 84-98. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf>
- Hershkowitz, R. (1990). *Psychological Aspects of Learning Geometry*. Cambridge University Press, *Matemática y cognición*. 70-95. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.006>
- Krulik, S. y Rudnik, J. (1987). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Editorial Labor.
- Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
- Rina, Dubinsky, y Dautermann, (1996). Coordinación de estrategias visuales y analíticas: un estudio de la comprensión de los estudiantes del grupo D 4. *Revista de Investigación en Educación Matemática* 27 (4): 435-457. <http://www.jstor.org/stable/749876>

ANEXO 1. POST TEST

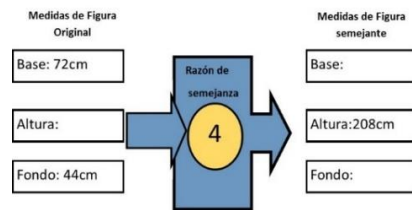
1. Manuel creó una máquina de transformación, las medidas de una figura original a una semejante por medio de la razón de semejanza.
 - a. Ubica en el círculo el valor de la razón de semejanza que permite hallar la figura semejante en el círculo de la máquina.



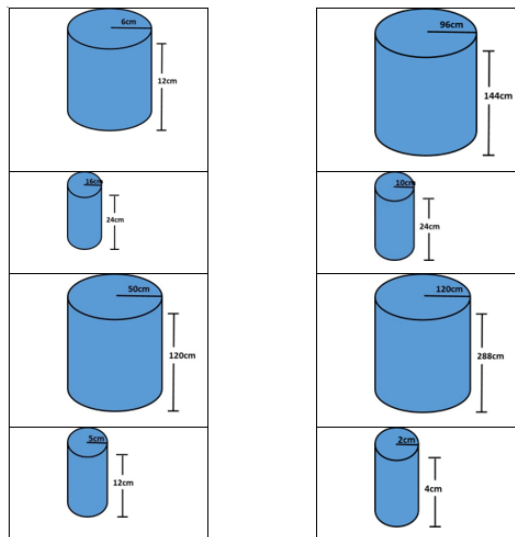
- b. Halle las medidas de la figura semejante utilizando la máquina de transformación.



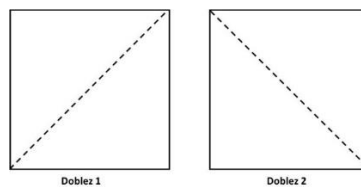
- c. Halle las medidas faltantes de la figura original y semejante utilizando la máquina de transformación.



2. Relaciona con líneas las figuras de la derecha con las figuras de la izquierda que sean semejantes y ubique el valor de la razón de semejanza sobre la línea.

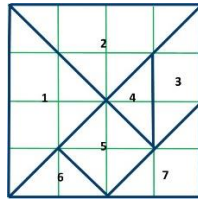


3. Al tomar una hoja de papel y realizar los dobleces que se indican en la figura...



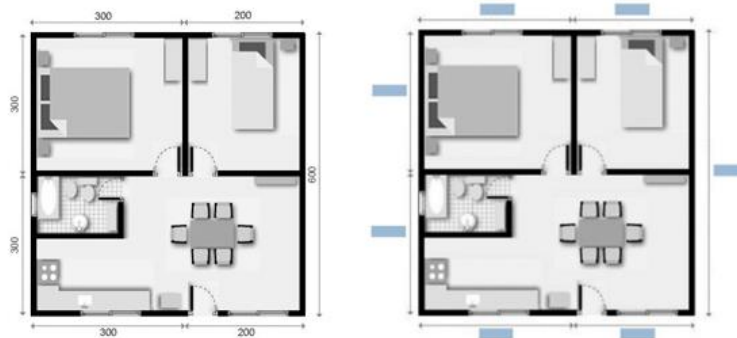
Describe los conceptos de congruencia y semejanza que se desarrollan al realizar los _____ dos _____ dobleces

4. Valeria como tarea del colegio construyó un Tangram, para ello realizó el siguiente esquema:



Del esquema del tangram qué figuras son congruentes. Justifique su respuesta.

5. Alejandro debe realizar la maqueta para la clase de Tecnología, para ello realizó el siguiente plano de su apartamento; ubique en cada rectángulo azul las medidas que debe tener la maqueta si Alejandro desea manejar la escala de reducción 1:12.



Diana Carolina Pérez Duarte
Universidad Antonio Nariño
dianacperez@uan.edu.co

Luis Fernando Pérez Duarte
Universidad Antonio Nariño
luisfperez@uan.edu.co

Luis Enrique Armero Cano
Colegio I.E.D. Ismael Perdomo
luisarmero@gmail.com