

## Аналитический метод расчёта преломляющих оптических элементов для формирования заданных двумерных распределений интенсивности

Е.В. Бызов<sup>1</sup>, Л.Л. Досколович<sup>1,2</sup>, С.В. Кравченко<sup>1</sup>, Н.Л. Казанский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Предложен новый вид лучевого отображения в задаче расчёта преломляющих оптических элементов для формирования заданных двумерных распределений интенсивности. Предложенное отображение позволяет свести расчет преломляющего оптического элемента к решению обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной. Результаты расчета показывают высокие рабочие характеристики предложенного метода. При формировании прямоугольных равномерных распределений интенсивности с размерами от  $80^\circ \times 1^\circ$  до  $40^\circ \times 20^\circ$  относительная среднеквадратичная ошибка формирования заданной интенсивности не превышает 15 %.

**Ключевые слова:** поверхность свободной формы, оптика для светодиодов, преломляющий оптический элемент, неизображающая оптика, распределение интенсивности, аналитический метод.

**Цитирование:** Бызов, Е.В. Аналитический метод расчёта преломляющих оптических элементов для формирования заданных двумерных распределений интенсивности / Е.В. Бызов, Л.Л. Досколович, С.В. Кравченко, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 6. – С. 883-892. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-818.

**Citation:** Byzov EV, Doskolovich LL, Kravchenko SV, Kazanskiy NL. Analytical design of refractive optical elements generating a prescribed two-dimensional intensity distribution. Computer Optics 2020; 44(6): 883-892. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-818.

### Введение

В течение нескольких последних десятилетий производительность светодиодов быстро увеличивалась, что способствовало стремительному росту производства и продаж светодиодных систем освещения. Светодиоды превосходят многие традиционные технологии освещения с точки зрения энергоэффективности, срока службы, универсальности и качества цвета, а благодаря демократичной цене успешно конкурируют в различных светотехнических приложениях [1].

Для формирования заданных световых распределений в светодиодных системах освещения используется так называемая вторичная оптика (преломляющие или отражающие оптические элементы, устанавливаемые непосредственно над излучающим элементом светодиода). Расчет преломляющей поверхности из условия формирования заданного распределения интенсивности является обратной задачей неизображающей оптики. Методы решения этой задачи можно условно разделить на две большие группы в зависимости от влияния размеров источника излучения на расчеты.

В случаях, когда размерами источника пренебречь нельзя, как правило, используются оптимизационные методы, требующие больших временных и вычислительных затрат [2–12]. В данных методах расчет параметров оптического элемента осуществляется из

условия минимизации некоторой целевой функции, с помощью которой измеряются оптические характеристики системы освещения. Результат и скорость сходимости процедуры оптимизации сильно зависят от начальных значений параметров, которые обычно задаются с использованием приближения точечного источника излучения.

В случаях, когда влиянием размеров источника излучения можно пренебречь, обратная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа (типа уравнения Монже–Ампера) [13–16]. Аналитические решения данного уравнения получены только для задач, обладающих осевой симметрией, и для ряда задач формирования однопараметрических распределений освещенности [17–23]. «Прямое» численное решение уравнения данного типа методом конечных разностей приводит к решению системы нелинейных уравнений большой размерности (система содержит от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч нелинейных уравнений) [24–26]. Для решения данной системы используются итерационные методы, например, метод Ньютона. В силу сложности задачи решения системы нелинейных уравнений для расчета оптических элементов широко используются т.н. методы лучевого отображения [19–23, 27–39]. Под лучевым отображением понимается функция, представляющая координаты лучей, преломленных или отраженных оптической

поверхностью, в зависимости от координат лучей, вышедших из источника излучения.

В ряде «инженерных» методов [30–39] лучевое отображение выбирается эвристически, в виде, который позволяет в относительно простой форме рассчитать параметры отображения из закона сохранения светового потока. Важно отметить, что получаемое отображение должно удовлетворять условию интегрируемости [30], которое определяет возможность построения оптической поверхности, реализующей это отображение. Простые эвристические отображения, как правило, не удовлетворяют условию интегрируемости и позволяют получить только приближенное решение с невысокими рабочими характеристиками [30–33]. Для улучшения таких приближенных решений используются дополнительные методы оптимизации [34, 38]. В частности, в работе [38] полученное на начальном шаге лучевое отображение оптимизируется с использованием метода обратной связи. Такой подход позволил авторам лишь незначительно улучшить световое распределение в требуемой прямоугольной области: равномерность формируемого распределения увеличилась с 50 % до 87 %. Тем не менее, судя по представленным в работе изображениям (см. рис. 9 в [38]), эффективность полученного решения достаточно низкая, поскольку значительная часть светового потока локализована за пределами требуемой прямоугольной области.

В ряде случаев задача поиска интегрируемого лучевого отображения может быть сведена к задаче Монжа–Канторовича о перемещении масс (ЗПМ) со специальной функцией стоимости [27–29]. Решение ЗПМ в общем случае требует использования специализированных вычислительных алгоритмов и обладает большой вычислительной сложностью.

В настоящей работе предложен новый вид лучевого отображения в задаче расчёта преломляющих оптических элементов для формирования заданных двумерных распределений интенсивности. Отметим, что в данной задаче считается выполненным условие дальней зоны, которое означает, что размерами оптического элемента можно пренебречь по сравнению с расстоянием до освещаемой плоскости. В этом случае преломляющий элемент рассматривается как точечный источник, закон излучения которого описывается функцией интенсивности.

Предложенное в работе отображение является обобщением лучевого отображения из задачи расчёта преломляющей поверхности для формирования однопараметрического распределения интенсивности в виде «отрезка», для которой получено аналитическое решение [21]. В [21] показано, что лучи, направляемые преломляющей поверхностью в каждую точку отрезка, находятся на поверхности кругового конуса с вершиной в источнике излучения. В данной работе предлагается использовать данный тип лучевого отображения при формировании двумерных распре-

делений интенсивности, соответствующих «полосе». Под полосой понимается вытянутая область, получаемая из исходного отрезка заменой каждой точки на отрезок, перпендикулярный исходному (рис. 1). В рамках предложенного в работе лучевого отображения расчет оптического элемента сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной. Нужно отметить, что хотя предложенное лучевое отображение в общем случае не является интегрируемым, представленные результаты расчета показывают хорошие рабочие характеристики предложенного метода. При формировании прямоугольных распределений интенсивности с угловыми размерами от  $80^\circ \times 1^\circ$  до  $40^\circ \times 20^\circ$  относительная среднеквадратичная ошибка формирования заданной постоянной интенсивности не превысила 15 %.

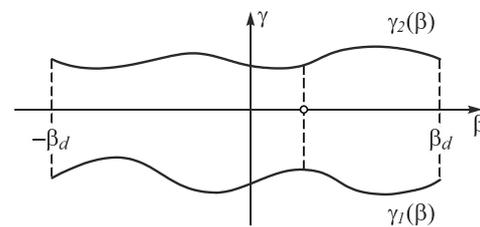


Рис. 1. Геометрия двумерной освещаемой области (полосы)

### 1. Расчет преломляющей поверхности для формирования распределения интенсивности в виде отрезка

Рассматриваемый в работе метод расчета преломляющих оптических элементов для формирования заданных двумерных распределений интенсивности основан на методе расчета преломляющей поверхности для формирования однопараметрического распределения интенсивности. В этой связи сначала рассмотрим задачу формирования однопараметрического распределения интенсивности в виде отрезка. Аналитическое решение данной задачи было получено в работе [21]. Однако для полноты изложения и введения основных понятий кратко повторим основные результаты работы [21].

Пусть в начале координат в среде с показателем преломления  $n_1 > 1$  расположен точечный источник излучения с функцией интенсивности  $I_0(\sigma, u)$ , где  $(\sigma, u)$  – некоторые криволинейные координаты, задающие направления исходящих из источника лучей. Над источником расположена преломляющая поверхность  $\mathbf{S}(\sigma, u) = (x(\sigma, u), y(\sigma, u), z(\sigma, u))$ , разделяющая среду с показателем преломления  $n_1$  и среду с показателем преломления  $n_2 = 1$  (рис. 2a). Задача состоит в расчёте поверхности  $\mathbf{S}(\sigma, u)$  из условия формирования заданного однопараметрического распределения интенсивности  $I(\beta)$ , где  $\beta \in [-\beta_d, \beta_d]$  – угловая координата, задающая направления преломленных на поверхности лучей.

В рассматриваемом случае координата  $\beta$  соответствует углу между проекцией преломленного луча на плоскость  $xOz$  и осью  $z$ . При этом направления преломленных на поверхности  $S(\sigma, u)$  лучей задаются следующей вектор-функцией (рис. 2а):

$$\mathbf{p}(\beta) = (\sin \beta, 0, \cos \beta), \beta \in [-\beta_d, \beta_d]. \quad (1)$$

Поскольку функция  $\mathbf{p}(\beta)$  описывает направление на точки отрезка в дальней зоне, то далее мы будем называть её отрезком.

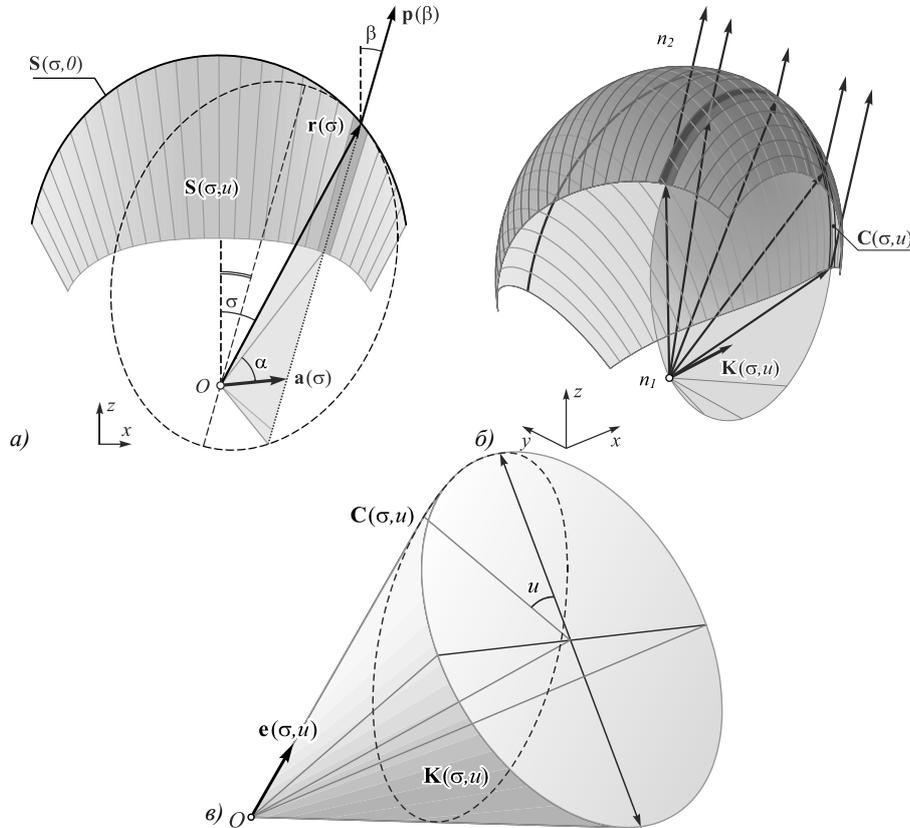


Рис. 2. Геометрия задачи расчёта преломляющей поверхности для формирования однопараметрического распределения интенсивности в виде отрезка: проекция на плоскость  $xOz$  (а); изометрическая проекция и схематическое изображение конуса лучей (б); геометрия кругового конуса  $K(\sigma, u)$  (в)

Без ограничения общности будем считать, что при  $u=0$  координатная линия  $S(\sigma, 0) = (x(\sigma, 0), 0, z(\sigma, 0))$  соответствует центральному сечению поверхности  $S(\sigma, u)$  плоскостью  $y=0$ . В качестве координаты  $\sigma$  будем использовать угол между направлением на точку центрального сечения  $S(\sigma, 0)$  и осью  $z$  (рис. 2а). Пусть  $r=r(\sigma)$  – модуль радиус-вектора центрального сечения, а  $\beta=\beta(\sigma)$  – функция, задающая направления преломленных лучей на профиле  $S(\sigma, 0)$  (рис. 2а). Функции  $r(\sigma)$  и  $\beta(\sigma)$  связаны законом Снеллиуса, который в дифференциальной форме может быть представлен в виде [21]:

$$\frac{dr(\sigma)}{d\sigma} = -r(\sigma) \frac{\sin(\sigma - \beta(\sigma))}{1/n_{21} - \cos(\sigma - \beta(\sigma))}, \quad (2)$$

где  $n_{21} = n_2/n_1$ . В работе [21] показано, что поверхность  $S(\sigma, u)$  можно представить в виде огибающей однопараметрического семейства эллипсоидов по параметру  $\sigma$  с первым фокусом в начале координат (в точке расположения точечного источника) и направлением большей оси  $\tilde{\mathbf{p}}(\sigma) = \mathbf{p}(\beta(\sigma))$ . Каждый эллипсоид семейства преобразует сферический пучок от источника в пучок с плоским волновым фронтом и

направлением  $\tilde{\mathbf{p}}(\sigma)$ . Уравнение огибающей поверхности имеет вид [21]:

$$S(\sigma, u) = \mathbf{e}(\sigma, u) \cdot l(\sigma, u) = \mathbf{e}(\sigma, u) \cdot \frac{\Psi(\sigma)}{1 - n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \tilde{\mathbf{p}}(\sigma))}, \quad (3)$$

где  $l(\sigma, u)$  – расстояние от источника излучения до точки эллипсоида по направлению  $\mathbf{e}(\sigma, u)$ , где координата  $u$  единичного вектора  $\mathbf{e}(\sigma, u)$  будет объяснена ниже. Значения  $\Psi(\sigma)$  и  $n_{21}$  в (3) имеют смысл фокальных параметров и эксцентриситета эллипсоидов семейства, формирующих огибающую поверхность.

В качестве иллюстрации на рис. 2а показан один из эллипсов, касающийся центрального сечения огибающей поверхности в точке  $S(\sigma, 0)$ . Данный эллипс является сечением плоскости  $y=0$  соответствующего эллипсоида, преобразующего сферический пучок от источника в пучок с направлением  $\tilde{\mathbf{p}}(\sigma)$ . Функция  $\Psi(\sigma)$  в (3) может быть выражена через функции  $r(\sigma)$  и  $\beta(\sigma)$  в виде [21]:

$$\Psi(\sigma) = r(\sigma) \cdot (1 - n_{21} \cos(\sigma - \beta(\sigma))). \quad (4)$$

В работе показано [21], что падающие от источника лучи, которые после преломления на поверхности  $S(\sigma, u)$  имеют направление  $\vec{p}(\sigma) = \mathbf{p}(\beta(\sigma))$ , лежат на поверхности кругового конуса  $\mathbf{K}(\sigma, u)$  с вершиной в начале координат (рис. 2б). Образующие конуса соответствуют отрезкам, соединяющим начало координат с точками пересечения эллипса и прямой с направляющим вектором  $\vec{p}(\sigma)$ , проходящей через точку касания эллипса и центрального сечения (рис. 2а). Сечения данных конусов плоскостями

$$-(x - x(\sigma, 0)) \cos \beta(\sigma) + (z - z(\sigma, 0)) \sin \beta(\sigma) = 0 \quad (5)$$

образуют преломляющую поверхность [21]. Одно из сечений  $C(\sigma, u)$  показано пунктирной линией на рис. 2б. Отметим, что указанные сечения также принадлежат эллипсоидам, образующим огибающую поверхность (2) [21]. Поэтому в качестве вектора  $\mathbf{e}(\sigma, u)$  в (2) можно использовать единичный вектор образующей соответствующего конуса  $\mathbf{K}(\sigma, u)$ . В качестве координаты  $u$  при задании вектора  $\mathbf{e}(\sigma, u)$  и, соответственно, преломляющей поверхности  $S(\sigma, u)$  будем использовать угол, определяющий положение точки в сечении конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса (рис. 2в). В этом случае, как предполагалось выше, при  $u=0$   $S(\sigma, u)$  определяет центральное сечение поверхности  $S(\sigma, u)$ . Отметим, что пунктирная линия на поверхности конуса на рис. 2в соответствует сечению  $C(\sigma, u)$  преломляющей поверхности, показанному на рис. 2б.

Из геометрии задачи вектор  $\mathbf{e}(\sigma, u)$  может быть получен в виде [21]:

$$\mathbf{e}(u, \sigma) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha(\sigma) \cos \tau(\sigma) \cos u + \\ + \cos \alpha(\sigma) \sin \tau(\sigma), \\ \sin u \sin \alpha(\sigma), \\ \sin \alpha(\sigma) \sin \tau(\sigma) \cos u + \\ + \cos \alpha(\sigma) \cos \tau(\sigma) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} = \frac{F_2(\sigma, u) - R(\sigma, \beta(\sigma)) [F_1(\sigma, u) - F_2(\sigma, u)]}{I(\beta(\sigma)) / \sin \alpha(\sigma) - R(\sigma, \beta(\sigma)) [F_1(u, \sigma) - F_2(u, \sigma)]}, \quad (10)$$

где

$$R(\sigma, \beta(\sigma)) = \frac{n_{21} \cos(\sigma - \beta(\sigma)) - 1}{n_{21}^2 - 2n_{21} \cos(\sigma - \beta(\sigma)) + 1}, \quad (11)$$

$$F_1(\sigma, u) = \int_0^{g(\sigma, \beta)} I_0(\sigma, u) du, \quad (12)$$

$$F_2(\sigma, u) = \int_0^{g(\sigma, \beta)} I_0(\sigma, u) \cos u du. \quad (13)$$

Верхний предел интегрирования  $g(\sigma, \beta)$  в выражениях (12) и (13) есть некоторая функция, определяющая размер преломляющей поверхности по переменной  $u$  при фиксированном значении  $\sigma$  [21].

Таким образом, расчет преломляющей поверхности для формирования однопараметрического распределения интенсивности в виде отрезка сводится к выполнению следующих шагов:

где

$$\alpha(\sigma) = \arccos \left[ \frac{\sin(\sigma - \beta(\sigma))}{\sqrt{1 - 2n_{21} \cos(\sigma - \beta(\sigma)) + n_{21}^2}} \right] \quad (7)$$

угол при вершине конуса,  $\tau(\sigma) = \alpha(\sigma) + \sigma$ . Отметим, что функции  $\alpha(\sigma)$  и  $\tau(\sigma)$ , определяющие компоненты вектора  $\mathbf{e}(\sigma, u)$ , выражаются через функцию  $\beta(\sigma)$ .

Из формул (3) – (7) можно видеть, что преломляющая поверхность  $S(\sigma, u)$ , формирующая отрезок  $\vec{p}(\sigma) = \mathbf{p}(\beta(\sigma))$ , функционально зависит от функции  $\beta = \beta(\sigma)$ . Данная функция рассчитывается из закона сохранения светового потока из условия формирования заданного распределения интенсивности  $I(\beta)$ ,  $\beta \in [-\beta_d, \beta_d]$  [21]. Из (3), (6) можно получить элемент телесного угла, соответствующий элементу поверхности  $S(\sigma, u)$ , в следующем виде [21]:

$$d\Omega_c = \left| \frac{\partial \mathbf{e}(\sigma, u)}{\partial \sigma} \times \frac{\partial \mathbf{e}(\sigma, u)}{\partial u} \right| d\sigma du = \sin \alpha(\sigma) \left( \frac{\partial \alpha(\sigma)}{\partial \sigma} - \cos u \frac{\partial \tau(\sigma)}{\partial \sigma} \right) d\sigma du. \quad (8)$$

Соответственно, закон сохранения светового потока может быть записан в виде [21]:

$$I(\beta) \left| \frac{d\mathbf{p}(\beta)}{d\sigma} \right| = \int I_0(u, \sigma) \sin \alpha(\sigma) \left( \frac{\partial \alpha(\sigma)}{\partial \sigma} - \cos u \frac{\partial \tau(\sigma)}{\partial \sigma} \right) du. \quad (9)$$

Из (9) для расчета функции  $\beta(\sigma)$  может быть получено следующее обыкновенное дифференциальное уравнение [21]:

1. Расчет функции  $\beta(\sigma)$  из решения дифференциального уравнения (10).
2. Расчет функции  $r(\sigma)$  из решения дифференциального уравнения (2).
3. Расчет функции  $\psi(\sigma)$  по формуле (4).
4. Расчет преломляющей поверхности  $S(\sigma, u)$  по формулам (3), (4), (6), (7).

### 2. Расчет преломляющей поверхности для формирования двумерного распределения интенсивности

Рассмотрим далее задачу формирования заданного двумерного распределения интенсивности  $I(\beta, \gamma)$ ,  $(\beta, \gamma) \in D$ , где

$$D = [-\beta_d, \beta_d] \times [\gamma_1(\beta), \gamma_2(\beta)] \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В данном случае  $\gamma$  – угол, отсчитываемый от плоскости  $xOz$ , а функции  $\gamma_1(\beta), \gamma_2(\beta)$  определяют границы освещаемой области  $D$  по переменной  $\gamma$  (рис. 1). Угол  $\beta$ , как и в параграфе 1, соответствует углу между проекцией преломленного луча на плоскость  $xOz$  и осью  $z$ . В частном случае  $\gamma_1(\beta) = \gamma_2(\beta) \equiv 0$  область  $D$  соответствует отрезку (1). При формировании двумерного распределения интенсивности направления преломленных поверхностью лучей имеют вид:

$$\mathbf{p}(\beta, \gamma) = (\sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma, \cos \beta \cos \gamma). \quad (14)$$

Рассмотрим задание лучевого отображения  $\beta = \beta(\sigma, u), \gamma = \gamma(\sigma, u)$ , определяющего координаты преломленных лучей через координаты падающих от источника лучей, в задаче формирования двумерного распределения интенсивности  $I(\beta, \gamma)$ . В задаче формирования однопараметрического распределения интенсивности конусы лучей  $\mathbf{K}(\sigma, u)$  отображались в точки  $\tilde{\mathbf{p}}(\sigma) = \mathbf{p}(\beta(\sigma))$  отрезка (1) (рис. 2б). При формировании двумерного распределения интенсивности предлагается использовать обобщение этого отображения. Определим функции  $\beta = \beta(\sigma, u)$  и  $\gamma = \gamma(\sigma, u)$  из условия, что конусы лучей, задаваемые вектором  $\mathbf{e}(\sigma, u)$  в (6) при фиксированных значениях  $\sigma$ , преобразуются преломляющей поверхностью в «отрезки»  $\mathbf{p}(\beta(\sigma), \gamma)$ ,

$$\frac{d\gamma(\sigma, u)}{du} = \frac{I_0(\sigma, u) \sin \alpha(\sigma) (d\alpha(\sigma)/d\sigma - \cos(u) d\tau(\sigma)/d\sigma)}{I(\beta, \gamma) \cos \gamma d\beta/d\sigma}, \quad (17)$$

где  $d\beta/d\sigma$  имеет вид (10), углы конусов  $\alpha(\sigma)$  определены уравнением (7), а  $\tau(\sigma) = \alpha(\sigma) + \sigma$ . Отметим, дифференциальное уравнение (17) определяет функцию  $\gamma(\sigma, u)$  при каждом фиксированном значении  $\sigma$ .

Рассмотрим теперь восстановление преломляющей поверхности, используя рассчитанные функции  $\beta(\sigma)$  и  $\gamma(\sigma, u)$ . Определим преломляющую поверхность  $S(\sigma, u; \beta, \gamma)$ , формирующую двумерное распределение интенсивности  $I(\beta, \gamma), (\beta, \gamma) \in D$ , в виде огибающей двухпараметрического семейства эллипсоидов по параметрам  $(\beta, \gamma) \in D$  [27–29].

Каждый эллипсоид семейства преобразует сферический пучок от источника в пучок с плоским волновым фронтом и направлением  $\mathbf{p}(\beta, \gamma)$ . Уравнение огибающей поверхности определяется уравнением эллипсоида

$$S(\sigma, u; \beta, \gamma) = \mathbf{e}(\sigma, u) \cdot l(\sigma, u; \beta, \gamma) = \mathbf{e}(\sigma, u) \cdot \frac{\psi(\beta, \gamma)}{1 - n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \mathbf{p}(\beta, \gamma))} \quad (18)$$

и условием равенства нулю частных производных функции  $l(\sigma, u; \beta, \gamma)$  по параметрам  $(\beta, \gamma)$  [21]:

$$\frac{\partial l(\sigma, u; \beta, \gamma)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial l(\sigma, u; \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 0. \quad (19)$$

$\gamma \in [\gamma_1(\beta(\sigma)), \gamma_2(\beta(\sigma))]$ , являющиеся поперечными сечениями заданного двумерного распределения интенсивности. В этом случае функцию  $\beta(\sigma, u) = \beta(\sigma)$  предлагается рассчитывать из условия формирования однопараметрического распределения интенсивности. Поскольку элемент телесного угла, соответствующего вектор-функции (14), имеет вид  $d\Omega = \cos \gamma d\beta d\gamma$ , то указанное однопараметрическое распределение интенсивности получается интегрированием по  $\gamma$  заданного двумерного распределения с весом  $\cos \gamma$ :

$$I(\beta) = \int_{\gamma_1(\beta)}^{\gamma_2(\beta)} I(\beta, \gamma) \cos \gamma d\gamma, \beta \in [-\beta_d, \beta_d]. \quad (15)$$

Расчет функции  $\beta(\sigma)$  осуществляется на основе интегрирования дифференциального уравнения (10).

Для расчета функции  $\gamma = \gamma(\sigma, u)$  воспользуемся законом сохранения светового потока:

$$I(\beta, \gamma) \cos \gamma d\beta d\gamma = I_0(\sigma, u) d\Omega_c, \quad (16)$$

где  $I_0(\sigma, u)$  — интенсивность источника излучения, а  $d\Omega_c$  — элемент телесного угла (8), соответствующего вектор-функции  $\mathbf{e}(\sigma, u)$ . Подставляя (8) в (16), получим для функции  $\gamma = \gamma(\sigma, u)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

Выражения (19) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \ln \psi(\beta, \gamma)}{\partial \beta} = - \frac{n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \partial \mathbf{p}(\beta, \gamma) / \partial \beta)}{1 - n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \mathbf{p}(\beta, \gamma))}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \ln \psi(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} = - \frac{n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \partial \mathbf{p}(\beta, \gamma) / \partial \gamma)}{1 - n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \mathbf{p}(\beta, \gamma))}.$$

Для расчета преломляющей поверхности необходимо вычислить функцию  $\psi(\beta, \gamma)$ , представляющую фокальные параметры эллипсоидов (18). Действительно, при известной функции  $\psi(\beta, \gamma)$  преломляющая поверхность рассчитывается по формуле

$$S(\sigma, u) = \mathbf{e}(\sigma, u) \frac{\psi(\beta(\sigma), \gamma(\sigma, u))}{1 - n_{21}(\mathbf{e}(\sigma, u), \tilde{\mathbf{p}}(\sigma, u))}, \quad (21)$$

где  $\tilde{\mathbf{p}}(\sigma, u) = \mathbf{p}(\beta(\sigma), \gamma(\sigma, u))$ . Для расчета функции  $\psi(\beta, \gamma)$  предлагается следующий метод. Введем функцию  $G(\beta, \gamma) = \ln \psi(\beta, \gamma)$  и аппроксимируем её двумерными B-сплайнами [40]. Область  $D$ , на которой определена функция  $G(\beta, \gamma)$ , а также заданное распределение интенсивности  $I(\beta, \gamma)$ , ограничена прямоугольником с размерами сторон  $2\beta_d$  и  $2\gamma_d$ , где  $\gamma_d = \max_{\beta} [|\gamma_1(\beta)|, |\gamma_2(\beta)|]$ . Зададим на отрезке  $[-\beta_d, \beta_d]$  набор из  $M$  эквидистантных узлов. Используя данные узлы, введём B-сплайны порядка  $q$  и обозначим их

как  $B_m(\beta)$ ,  $m = 1, \dots, M+q-2$  [40]. Аналогичным образом введём В-сплайны  $P_n(\gamma)$  по второй координате  $\gamma \in [-\gamma_d, \gamma_d]$ . Представим теперь функцию  $G(\beta, \gamma)$  в виде разложения по введённым базисным функциям:

$$G(\beta, \gamma) = \sum_{m,n} p_{mn} B_m(\beta) P_n(\gamma), \quad (22)$$

где  $p_{mn}$  – коэффициенты разложения. Отметим, что в случае, когда сплайны  $B_m(\beta)$  и  $P_n(\gamma)$  имеют один порядок и одинаковое число узлов, представление (22) содержит  $N = (N_1 + q - 2)^2$  неизвестных коэффициентов  $p_{mn}$ .

Будем считать, что функции  $\beta(\sigma)$  и  $\gamma(\sigma, u)$ , получаемые из решения дифференциальных уравнений (10) и (17), заданы в дискретном наборе точек  $(\sigma_i, u_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда коэффициенты  $p_{mn}$  предлагается определить из условия, что частные производные  $\partial G / \partial \beta$ ,  $\partial G / \partial \gamma$  сплайна (22) в точках  $(\beta_i, \gamma_i) = (\beta(\sigma_i), \gamma(\sigma_i, u_i))$ ,  $i = 1, \dots, N$  являются аппроксимацией по методу наименьших квадратов производных (20), рассчитанных в точках  $(\beta_i, \gamma_i)$  и  $(\sigma_i, u_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Таким образом, расчет коэффициентов  $p_{mn}$  сводится к решению следующей задачи минимизации:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{p}) = & \sum_i \left[ \frac{\partial \ln \psi}{\partial \beta}(\beta_i, \gamma_i, \sigma_i, u_i) - \frac{\partial G}{\partial \beta}(\beta_i, \gamma_i) \right]^2 + \\ & + \sum_i \left[ \frac{\partial \ln \psi}{\partial \gamma}(\beta_i, \gamma_i, \sigma_i, u_i) - \frac{\partial G}{\partial \gamma}(\beta_i, \gamma_i) \right]^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mathbf{p}$  — вектор коэффициентов сплайна. Несложно показать, что решение задачи (23) сводится к стандартному методу наименьших квадратов. Данный подход, состоящий в аппроксимации производных оптической поверхности, позволяет скомпенсировать ошибки, возникшие при расчете лучевого отображения [27, 29].

Таким образом, расчет преломляющей поверхности для формирования двумерного распределения интенсивности сводится к выполнению следующих шагов:

1. Расчет требуемого однопараметрического распределения интенсивности  $I(\beta)$  по формуле (15).
2. Расчет функции  $\beta(\sigma)$  из решения дифференциального уравнения (10).
3. Расчет функции  $\gamma(\sigma, u)$  из решения дифференциального уравнения (17).

4. Восстановление функции  $G(\beta, \gamma) = \ln \psi(\beta, \gamma)$  из ее частных производных (20), используя описанный выше метод.

5. Расчет преломляющей поверхности  $S(\sigma, u)$  по формулам (6), (14), (21).

### 3. Примеры расчета

При проектировании преломляющих оптических элементов необходимо учитывать френелевские потери (т.е. потери, связанные с частичным отражением света от преломляющей поверхности) и возможность полного внутреннего отражения световых лучей от поверхности оптического элемента. Для уменьшения френелевских потерь в данной работе предлагается дополнительно использовать внутреннюю осесимметричную поверхность (рис. 3). Эта преломляющая поверхность формирует мнимый источник излучения, смещённый вниз по оси Oz. При этом уменьшаются углы падения лучей на внешнюю поверхность, формирующую заданное распределение интенсивности, и, соответственно, снижаются френелевские потери и вероятность полного внутреннего отражения. Профиль внутренней поверхности определяется уравнением картезианского овала [24].

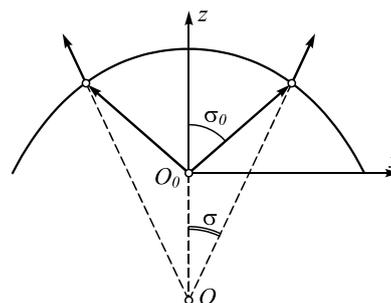


Рис. 3. Профиль преломляющей поверхности, формирующей мнимый источник, смещённый по оси z. Определяется уравнением картезианского овала

С использованием описанного в работе метода построения лучевого отображения были рассчитаны преломляющие оптические элементы для формирования постоянной интенсивности света в прямоугольных областях в диапазоне угловых размеров от  $80^\circ \times 1^\circ$  до  $40^\circ \times 20^\circ$  (табл. 1). Расчет производился для точечного ламбертовского источника излучения.

Табл. 1. Примеры расчёта оптических элементов и результаты их моделирования с размерным источником излучения со стороны 1,5 мм

№ примера	Размер освещаемой области, град	Длина, ширина и высота оптического элемента, мм	Световая эффективность, %	СКО
1	80×1	43,6 × 27,0 × 28,3	82,13	3,62
2	80×20	38,6 × 28,6 × 31,3	83,78	10,6
3	60×20	36,9 × 28,9 × 28,3	80,36	13,4
4	40×20	32,3 × 28,9 × 28,37	75	15

Во всех примерах лучевые отображения с шагом в  $1^\circ$  были найдены из решений обыкновенных дифференциальных уравнений (10) и (17). Внешние пре-

ломляющие поверхности были рассчитаны по формулам (6), (14) и (21) через полученное лучевое отображение. Для определения функции  $\psi(\beta, \gamma)$  в формуле

(21) функция  $G(\beta, \gamma) = \ln \psi(\beta, \gamma)$  была восстановлена двумерными В-сплайнами 3-го порядка из её частных производных (20), используя 2048 узловых точек. Подробное описание этапов расчета приведено в конце предыдущего параграфа. Внутренняя поверхность была рассчитана из условия формирования мнимого точечного источника излучения, смещенного относи-

тельно начала координат по оси Oz на  $\Delta z = -2, 0$ . Такое значение смещения было выбрано эмпирически, на основании анализа потерь Френеля. Высота внутренней поверхности составила 4,5 мм. В связи с тем, что внешние преломляющие поверхности очень похожи, на рис. 4 изображены только три оптических элемента – для примеров 1, 3, 4 из табл. 1.

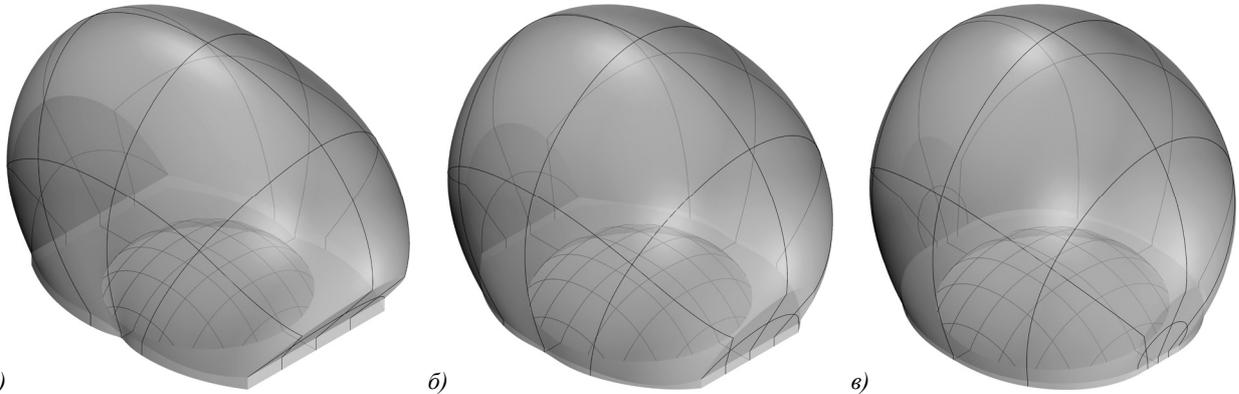


Рис. 4. Преломляющие оптические элементы для формирования постоянной интенсивности света в прямоугольной области с угловыми размерами: (а)  $80 \times 1$  (пример 1 в табл. 1), (б)  $60 \times 20$  (пример 3 в табл. 1), (в)  $40 \times 20$  (пример 4 в табл. 1)

В силу симметрии формируемого распределения интенсивности рассчитываемые оптические элементы симметричны относительно плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ . В связи с этим расчёт преломляющих поверхностей производился для  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , где  $\varphi$  – азимутальный угол сферической системы координат. При этом «полные» поверхности оптического элемента (при  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ) получаются из поверхностей при  $\varphi \in [0, \pi/2]$  последовательным отражением относительно плоскостей симметрии  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 0$ .

Отметим, что поскольку в рассматриваемой задаче выполняется условие дальней зоны, то преломляющие поверхности могут быть отмасштабированы относительно начала координат для получения оптического элемента нужных габаритов. Такое масштабирование никак не повлияет на результаты моделирования работы элемента.

Для иллюстрации на рис. 5 приведено лучевое отображение, рассчитанное предложенным методом для задачи формирования равномерного распределения интенсивности в прямоугольной области с размерами  $60^\circ \times 20^\circ$ . В левой части рисунка изображена стереографическая проекция единичной сферы, на которой определена функция интенсивности источника излучения, из точки  $(0; 0; -1)$  на плоскость  $z=0$  [37]. Справа на рис. 5 изображена область определения требуемого распределения интенсивности в координатах  $\beta$  и  $\gamma$ .

Было проведено моделирование работы рассчитанных оптических элементов методом трассировки лучей в коммерческом программном обеспечении TracePro [41]. Для реалистичности в качестве источника излучения использовался ламбертовский источник излучения с размером  $1,5 \times 1,5$  мм<sup>2</sup>. На рис. 6 представлены распределения интенсивности, рассчи-

танные методом трассировки лучей при числе лучей  $N = 500000$ .

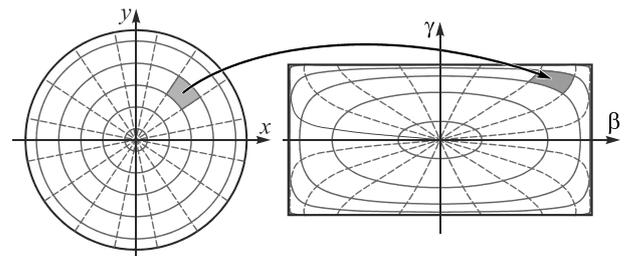


Рис. 5. Структура лучевого отображения для преломляющего оптического элемента, формирующего постоянную интенсивность в прямоугольной области размером  $60^\circ \times 20^\circ$

Для оценки качества формируемого светового распределения использовались среднеквадратичное отклонение (СКО) формируемого распределения интенсивности от равномерного в заданной области и световая эффективность, равная доле излученного источником светового потока, попавшей в эту область. В табл. 1 приведено краткое описание примеров – размеры освещаемой области, размеры рассчитанного оптического элемента и результаты моделирования.

Отметим, что представленный метод предназначен для освещения областей с малым поперечным размером (с большим аспектным соотношением). Несмотря на это, СКО не превосходит 15% даже для прямоугольной области с угловыми размерами  $40^\circ \times 20^\circ$  (табл. 1).

Представленные примеры демонстрируют высокую эффективность предложенного метода в задачах расчёта преломляющих оптических элементов для формирования двумерных распределений интенсивности прямоугольной формы.

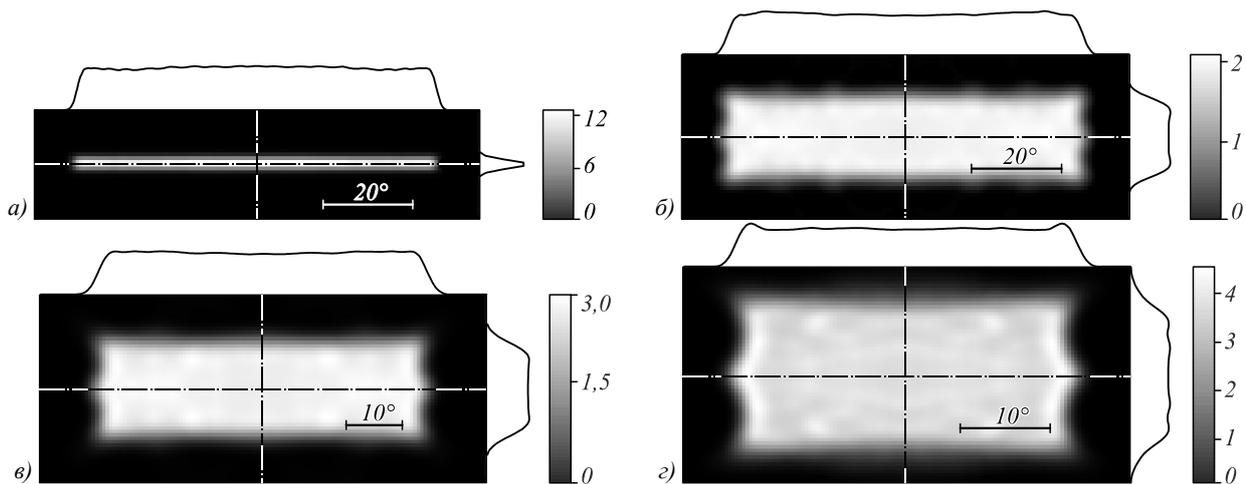


Рис. 6. Распределения интенсивности, рассчитанные в программе TracePro, формируемые преломляющими оптическими элементами при протяженном источнике излучения со стороны 1,5 мм. Размеры требуемых областей:  $80^\circ \times 1^\circ$  (а),  $80^\circ \times 20^\circ$  (б),  $60^\circ \times 20^\circ$  (в),  $40^\circ \times 20^\circ$  (з)

### Заключение

Предложен новый вид лучевого отображения в задаче расчёта преломляющих оптических элементов для формирования заданных двумерных распределений интенсивности. В рамках предложенного в работе лучевого отображения расчет оптического элемента сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной. Представленные результаты расчета показывают хорошие рабочие характеристики предложенного метода. При формировании прямоугольных и эллиптических распределений интенсивности с угловыми размерами от  $80^\circ \times 1^\circ$  до  $40^\circ \times 20^\circ$  относительная среднеквадратичная ошибка формирования заданной постоянной интенсивности не превышает 15%.

Полученные в работе теоретические результаты расширяют класс методов, которые могут быть использованы для расчёта начальных приближений в оптимизационных методах расчёта преломляющих оптических элементов.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №18-19-00326).

### Литература

1. Scuello, M. Museum lighting: Why are some illuminants preferred? / M. Scuello, I. Abramov, J. Gordon, S. Weintraub // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – Vol. 21, Issue 2. – P. 306-311.
2. Li, Z. Energy feedback freeform lenses for uniform illumination of extended light source LEDs / Z. Li, S. Yu, L. Lin, Y. Tang, X. Ding, W. Yuan, B. Yu // Applied Optics. – 2016. – Vol. 55. – P. 10375-10381.
3. Zhao, S. Integral freeform illumination lens design of LED based pico-projector / S. Zhao, K. Wang, F. Chen, Z. Qin, S. Liu // Applied Optics. – 2013. – Vol. 52. – P. 2985-2993.

4. Moiseev, M.A. Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension / M.A. Moiseev, L.L. Doskolovich // Journal of Modern Optics. – 2010. – Vol. 57, Issue 7. – P. 536-544.
5. Ries, H. Tailored edge-ray reflectors for illumination / H. Ries, R. Winston // Journal of the Optical Society of America A. – 1994. – Vol. 11. – P. 1260-1264.
6. Chaves, J. Introduction to nonimaging optics / J. Chaves. – 2nd ed. – CRC Press, 2016.
7. Wu, R. Direct three-dimensional design of compact and ultra-efficient freeform lenses for extended light sources / R. Wu, C.Y. Huang, X. Zhu, H.-N. Cheng, R. Liang // Optica. – 2016. – Vol. 3. – P. 840-843.
8. Wu, R. Direct design of aspherical lenses for extended non-Lambertian sources in two-dimensional geometry / R. Wu, H. Hua, P. Benitez, J.C. Miñano // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40. – P. 3037-3040.
9. Hu, S. Ultra-compact LED lens with double freeform surfaces for uniform illumination / S. Hu, K. Du, T. Mei, L. Wan, N. Zhu // Optics Express. – 2015. – Vol. 23. – P. 20350-20355.
10. Li, X. Prescribed intensity in 3D rotational geometry for extended sources by using a conversion function in 2D design / X. Li, P. Ge, H. Wang // Applied Optics. – 2017. – Vol. 56. – P. 1795-1798.
11. Li, X. An efficient design method for LED surface sources in three-dimensional rotational geometry using projected angle difference / X. Li, P. Ge, H. Wang // Lighting Research & Technology. – 2019. – Vol. 51, Issue 3. – P. 457-464.
12. Byzov, E.V. Optimization method for designing double-surface refractive optical elements for an extended light source / E.V. Byzov, S.V. Kravchenko, M.A. Moiseev, E.A. Bezus, L.L. Doskolovich // Optics Express. – 2020. – Vol. 28. – P. 24431-24443.
13. Guan, P. On a Monge-Ampere equation arising in geometric optics / P. Guan, X.-J. Wang // Journal of Differential Geometry. – 1998. – Vol. 48, Issue 2. – P. 205-223.
14. Olikier, V.I. Geometric and variational methods in optical design of reflecting surfaces with prescribed irradiance properties / V.I. Olikier // Proceedings of SPIE. – 2005. – Vol. 5942. – P. 594207.
15. Parkyn, W.A. Illumination lenses designed by extrinsic differential geometry / W.A. Parkyn // Proceedings of SPIE. – 1988. – Vol. 3482. – P. 389-396.

16. **Kirkilionis, M.** Trends in nonlinear analysis / M. Kirkilionis, S. Kromker, R. Rannacher, F. Tomi. – Berlin: Springer, 2003. – P. 193-224.
17. **Elmer, W.** Optical design of reflectors. Part 2 / W. Elmer, F. Cooke // Applied Optics. – 1978. – Vol. 17, Issue 7. – P. 977-979.
18. **Moiseev, M.A.** Design of TIR optics generating the prescribed irradiance distribution in the circle region / M.A. Moiseev, L.L. Doskolovich // Journal of the Optical Society of America A. – 2012. – Vol. 29, Issue 9. – P. 1758-1763.
19. **Doskolovich, L.L.** Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, P. Perlo, S. Bernard // Journal of Modern Optics. – 2005. – Vol. 52, Issue 11. – P. 1529-1536.
20. **Doskolovich, L.L.** Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S. Bernard // Journal of Modern Optics. – 2007. – Vol. 54, Issue 4. – P. 589-597.
21. **Дмитриев, А.Ю.** Расчёт преломляющей поверхности для формирования диаграммы направленности в виде отрезка / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 4. – С. 476-480.
22. **Doskolovich, L.L.** Analytical design of freeform optical elements generating an arbitrary-shape curve / L.L. Doskolovich, A.Y. Dmitriev, E.A. Bezus, M.A. Moiseev // Applied Optics. – 2013. – Vol. 52, Issue 12. – P. 2521-2526.
23. **Doskolovich, L.L.** Analytical source-target mapping method for the design of freeform mirrors generating prescribed 2D intensity distributions / L.L. Doskolovich, E.A. Bezus, M.A. Moiseev, D.A. Bykov, N.L. Kazanskiy // Optics Express. – 2016. – Vol. 24. – P. 10962-10971.
24. **Wu, R.** Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation / R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Z. Zheng, H. Li, X. Liu // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38. – P. 229-231.
25. **Wu, R.** Conceptual design of dedicated road lighting for city park and housing estate / R. Wu, K. Li, P. Liu, Z. Zheng, H. Li, X. Liu // Applied Optics. – 2013. – Vol. 52. – P. 5272-5278.
26. **Wu, R.** Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design / R. Wu, P. Benítez, Y. Zhang, J.C. Miñano // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39. – P. 634-637.
27. **Doskolovich, L.L.** Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, A.A. Mingazov, E.A. Bezus // Optics Express. – 2019. – Vol. 27. – P. 13083-13097.
28. **Mingazov, A.A.** On the use of the supporting quadric method in the problem of designing double freeform surfaces for collimated beam shaping / A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.A. Bezus, L.L. Doskolovich // Optics Express. – 2020. – Vol. 28. – P. 22642-22657.
29. **Doskolovich, L.L.** Reconstruction of an optical surface from a given source-target map / L.L. Doskolovich, E.S. Andreev, S.I. Kharitonov, N.L. Kazanskiy // Journal of the Optical Society of America A. – 2016. – Vol. 33. – P. 1504-1508.
30. **Fournier, F.R.** Fast freeform reflector generation using source-target maps / F.R. Fournier, W.J. Cassarly, J.P. Rolland // Optics Express. – 2010. – Vol. 18. – P. 5295-5304.
31. **Wang, L.** Discontinuous free-form lens design for prescribed irradiance / L. Wang, K. Qian, Y. Luo // Applied Optics. – 2007. – Vol. 46. – P. 3716-3723.
32. **Ding, Y.** Freeform LED lens for uniform illumination / Y. Ding, X. Liu, Z. Zheng, P. Gu // Optics Express. – 2007. – Vol. 16. – P. 12958-12966.
33. **Wu, R.** Freeform lens arrays for off-axis illumination in an optical lithography system / R. Wu, H. Li, Z. Zheng, X. Liu // Applied Optics. – 2011. – Vol. 50. – P. 725-732.
34. **Bruneton, A.** High resolution irradiance tailoring using multiple freeform surfaces / A. Bruneton, A. Bäuerle, R. Wester, J. Stollenwerk, P. Loosen // Optics Express. – 2013. – Vol. 21, Issue 9. – P. 10563-10571.
35. **Bösel, C.** Ray mapping approach for the efficient design of continuous freeform surfaces / C. Bösel, H. Gross // Optics Express. – 2016. – Vol. 24, Issue 13. – P. 14271-14282.
36. **Schwartzburg, Y.** High-contrast computational caustic design / Y. Schwartzburg, R. Testuz, A. Tagliasacchi, M. Pauly // ACM Transactions on Graphics. – 2014. – Vol. 33, Issue 4. – P. 1-11.
37. **Feng, Z.** Freeform illumination optics construction following an optimal transport map / Z. Feng, B.D. Froese, R. Liang // Applied Optics. – 2016. – Vol. 55, Issue 16. – P. 4301-4306.
38. **Lin, C.** Design of LED free-form lens for sensor systems / C. Lin, Y. Fang, W. Su // Sensors and Materials. – 2020. – Vol. 32, Issue 6. – P. 2177-2185.
39. **Desnijder, K.** Flexible design method for freeform lenses with an arbitrary lens contour / K. Desnijder, P. Hanselaer, Y. Meuret // Optics Letters. – 2017. – Vol. 42, Issue 24. – P. 5238-5241.
40. **Prautzsch, H.** Bézier and B-spline techniques / H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 304 p.
41. TracePro – программное обеспечение для дизайна и моделирования оптических систем [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.lambdare.com/tracepro/> (дата обращения 18.10.2020).

### Сведения об авторах

**Бызов Егор Владимирович**, 1988 года рождения. В 2014 году с отличием окончил обучение в магистратуре Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (СГАУ, ныне Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева) по направлению «Прикладные математика и физика». Область научных интересов: методы расчетов формирующей неизображающей оптики для светодиодов. E-mail: [egor.byzov@gmail.com](mailto:egor.byzov@gmail.com).

**Досколович Леонид Леонидович**, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает заведующим лабораторией дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессором кафедры технической кибернетики Самарского универ-

ситета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: [leonid@ipsiras.ru](mailto:leonid@ipsiras.ru).

**Кравченко Сергей Васильевич**, 1991 года рождения. В 2014 году с отличием окончил обучение в магистратуре Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева) по направлению «Прикладная математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2018 год). Является членом международного научного общества SPIE. В списке научных трудов С.В. Кравченко 18 публикаций. E-mail: [sergey.kravchenko91@gmail.com](mailto:sergey.kravchenko91@gmail.com).

**Казанский Николай Львович** в 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет)) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 г.), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Заведующий базовой кафедрой высокопроизводительных вычислений Самарского университета в ИСОИ РАН. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

---

ГРНТИ: 29.31.29

Поступила в редакцию 1 октября 2020 г. Окончательный вариант – 20 октября 2020 г.

---

---

# Analytical design of refractive optical elements generating a prescribed two-dimensional intensity distribution

*E.V. Byzov<sup>1</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, S.V. Kravchenko<sup>1</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>*  
<sup>1</sup>*IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,*  
*443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,*

<sup>2</sup>*Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

## Abstract

A new source-target mapping for the design of refractive optical elements generating prescribed 2D intensity distributions is proposed. The calculation of the optical element is reduced to the solution of ordinary explicit differential equations. The simulation results presented demonstrate high performance of the proposed method. While generating uniform rectangular intensity distributions with angular dimensions varying from  $80^\circ \times 1^\circ$  to  $40^\circ \times 20^\circ$ , the normalized root-mean-square deviations between the generated and required distributions do not exceed 15 %.

**Keywords:** Freeform surface, LED optics, refractive optics, nonimaging optics, intensity distribution, computation methods.

**Citation:** Byzov EV, Doskolovich LL, Kravchenko SV, Kazanskiy NL. Analytical design of refractive optical elements generating a prescribed two-dimensional intensity distribution. *Computer Optics* 2020; 44(6): 883-892. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-818.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Science Foundation (Project No. 18-19-00326).

## References

- [1] Scuello M, Abramov I, Gordon J, Weintraub S. Museum lighting: Why are some illuminants preferred? *J Opt Soc Am A* 2004; 21(2): 306-311.
  - [2] Li Z, Yu S, Lin L, Tang Y, Ding X, Yuan W, Yu B. Energy feedback freeform lenses for uniform illumination of extended light source LEDs. *Appl Opt* 2016; 55: 10375-10381.
  - [3] Zhao S, Wang K, Chen F, Qin Z, Liu S. Integral freeform illumination lens design of LED based pico-projector. *Appl Opt* 2013; 52: 2985-2993.
  - [4] Moiseev MA, Doskolovich LL. Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension. *J Mod Opt* 2010; 57(7): 536-544.
  - [5] Ries H, Winston R. Tailored edge-ray reflectors for illumination. *J Opt Soc Am A* 1994; 11: 1260-1264.
  - [6] Chaves J. Introduction to nonimaging optics. 2<sup>nd</sup> ed. CRC Press; 2016.
  - [7] Wu R, Huang CY, Zhu X, Cheng H-N, Liang R. Direct three-dimensional design of compact and ultra-efficient freeform lenses for extended light sources. *Optica* 2016; 3: 840-843.
  - [8] Wu R, Hua H, Benítez P, Miñano JC. Direct design of aspherical lenses for extended non-Lambertian sources in two-dimensional geometry. *Opt Lett* 2015; 40: 3037-3040.
  - [9] Hu S, Du K, Mei T, Wan L, Zhu N. Ultra-compact LED lens with double freeform surfaces for uniform illumination. *Opt Express* 2015; 23: 20350-20355.
  - [10] Li X, Ge P, Wang H. Prescribed intensity in 3D rotational geometry for extended sources by using a conversion function in 2D design. *Appl Opt* 2017; 56: 1795-1798.
  - [11] Li X, Ge P, Wang H. An efficient design method for LED surface sources in three-dimensional rotational geometry using projected angle difference. *Lighting Res Technol* 2019; 51(3): 457-464.
  - [12] Byzov EV, Kravchenko SV, Moiseev MA, Bezus EA, Doskolovich LL. Optimization method for designing double-surface refractive optical elements for an extended light source. *Opt Express* 2020; 28: 24431-24443.
  - [13] Guan P, Wang X-J. On a Monge-Ampere equation arising in geometric optics. *J Differ Geom* 1998; 48(2): 205-223.
  - [14] Olikier VI. Geometric and variational methods in optical design of reflecting surfaces with prescribed irradiance properties. *Proc SPIE* 2005; 5942: 594207.
  - [15] Parkyn WA. Illumination lenses designed by extrinsic differential geometry. *Proc SPIE* 1988; 3482: 389-396.
  - [16] Kirkilionis M, Kromker S, Rannacher R, Tomi F. Trends in nonlinear analysis. Berlin: Springer; 2003: 193-224.
  - [17] Elmer W, Cooke F. Optical design of reflectors. Part 2. *Appl Opt* 1978; 17(7): 977-979.
  - [18] Moiseev MA, Doskolovich LL. Design of TIR optics generating the prescribed irradiance distribution in the circle region. *J Opt Soc Am A* 2012; 29(9): 1758-1763.
  - [19] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Perlo P, Bernard S. Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram. *J Mod Opt* 2005; 52(11): 1529-1536.
  - [20] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Bernard S. Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram. *J Mod Opt* 2007; 54(4): 589-597.
  - [21] Dmitriev AY, Doskolovich LL. Design of refracting surface to generate a line-segment directivity diagram. *Computer Optics* 2010; 34(4): 476-480.
  - [22] Doskolovich LL, Dmitriev AY, Bezus EA, Moiseev MA. Analytical design of freeform optical elements generating an arbitrary-shape curve. *Appl Opt* 2013; 52(12): 2521-2526.
  - [23] Doskolovich LL, Bezus EA, Moiseev MA, Bykov DA, Kazanskiy NL. Analytical source-target mapping method for the design of freeform mirrors generating prescribed 2D intensity distributions. *Opt Express* 2016; 24: 10962-10971.
  - [24] Wu R, Xu L, Liu P, Zhang Y, Zheng Z, Li H, Liu X. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge-Ampère equation. *Opt Lett* 2013; 38: 229-231.
  - [25] Wu R, Li K, Liu P, Zheng Z, Li H, Liu X. Conceptual design of dedicated road lighting for city park and housing estate. *Appl Opt* 2013; 52: 5272-5278.
-

- 
- [26] Wu R, Benítez P, Zhang Y, Miñano JC. Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design. *Opt Lett* 2014; 39: 634-637.
- [27] Doskolovich LL, Bykov DA, Mingazov AA, Bezus EA. Optimal mass transportation and linear assignment problems in the design of freeform refractive optical elements generating far-field irradiance distributions. *Opt Express* 2019; 27: 13083-13097.
- [28] Mingazov AA, Bykov DA, Bezus EA, Doskolovich LL. On the use of the supporting quadric method in the problem of designing double freeform surfaces for collimated beam shaping. *Opt Express* 2020; 28: 22642-22657.
- [29] Doskolovich LL, Andreev ES, Kharitonov SI, Kazansky NL. Reconstruction of an optical surface from a given source-target map, *J Opt Soc Am A* 2016; 33: 1504-1508.
- [30] Fournier FR, Cassarly WJ, Rolland JP. Fast freeform reflector generation using source-target maps. *Opt Express* 2010; 18: 5295-5304.
- [31] Wang L, Qian K, Luo Y. Discontinuous free-form lens design for prescribed irradiance, *Appl Opt* 2007; 46: 3716-3723.
- [32] Ding Y, Liu X, Zheng Z, Gu P. Freeform LED lens for uniform illumination. *Opt Express* 2008; 16: 12958-12966.
- [33] Wu R, Li H, Zheng Z, Liu X. Freeform lens arrays for off-axis illumination in an optical lithography system. *Appl Opt* 2011; 50: 725-732.
- [34] Bruneton A, Bäuerle A, Wester R, Stollenwerk J, Loosen P. High resolution irradiance tailoring using multiple freeform surfaces, *Opt Express* 2013; 21(9): 10563-10571.
- [35] Bösel C, Gross H. Ray mapping approach for the efficient design of continuous freeform surfaces. *Opt Express* 2016; 24(13): 14271-14282.
- [36] Schwartzburg Y, Testuz R, Tagliasacchi A, Pauly M. High-contrast computational caustic design. *ACM Trans Graph* 2014; 33(4): 1-11.
- [37] Feng Z, Froese BD, Liang R. Freeform illumination optics construction following an optimal transport map. *Appl Opt* 2016; 55(16): 4301-4306.
- [38] Lin C, Fang Y, Su W. Design of LED free-form lens for sensor systems, *Sens Mater* 2020; 32(6): 2177-2185.
- [39] Desnijder K, Hanselaer P, Meuret Y. Flexible design method for freeform lenses with an arbitrary lens contour. *Opt Lett* 2017; 42(24): 5238-5241.
- [40] Prautzsch H, Boehm W, Paluszny M. Bézier and B-spline techniques. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2002.
- [41] TracePro – software for design and analysis of illumination and optical systems. Source: (<https://www.lambdare.com/tracepro/>).
- 

#### *Authors' information*

**Egor Vladimirovich Byzov** (b. 1988) graduated with honors (2014) from Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (now – Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov), majoring in Applied Mathematics and Physics. Research interests: design methods of nonimaging optics for LEDs. E-mail: [egor.byzov@gmail.com](mailto:egor.byzov@gmail.com).

**Leonid Leonidovich Doskolovich** graduated with honors (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara National Research University. Head of laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, professor at Samara University’s Technical Cybernetics sub-department. Current research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics. E-mail: [leonid@ipsiras.ru](mailto:leonid@ipsiras.ru).

**Sergey Vasilyevich Kravchenko** (b. 1991) graduated with honors (2014) from Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (now – Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov), majoring in Applied Mathematics and Physics. He is a co-author of 18 scientific papers. He received his Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2018) from Samara State Aerospace University. E-mail: [sergey.kravchenko91@gmail.com](mailto:sergey.kravchenko91@gmail.com).

**Nikolay Lvovich Kazanskiy** graduated with honors (1981) from Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Mathematics (1996) degrees from Samara University. He is the Head of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”, also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics department of Samara University, holding the chair at the of High-Performance Computing department at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”. He is a member of OSA, SPIE and IAPR. He co-authored 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.

Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm> . E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

---

*Received October 1, 2020. The final version – October 20, 2020.*

---