Janne Korvenpää

Dyadiset kuutiot homogeenisen tyypin avaruudessa

Perustieteiden korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 11. lokakuuta 2012.

Työn valvoja ja ohjaaja:

Prof. Juha Kinnunen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

AALTO-YLIOPISTO
PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU

DIPLOMITYÖN
TIIVISTELMÄ

Tekijä: Janne Korvenpää

Työn nimi: Dyadiset kuutiot homogeenisen tyypin avaruudessa

Päivämäärä: 11. lokakuuta 2012 | Kieli: Suomi | Sivumäärä:3+46

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Professuuri: Matematiikka | Koodi: Mat-1

Valvoja ja ohjaaja: Prof. Juha Kinnunen

Tässä työssä yleistetään harmonisessa analyysissä usein käytettävät euklidisen avaruuden dyadiset kuutiot rakenteeltaan yleisempään homogeenisen tyypin avaruuteen, eli tuplaavalla mitalla varustettuun kvasimetriseen avaruuteen. Dyadisten kuutioiden keskeisimpiä ominaisuuksia ovat, että ne muodostavat puurakenteen siten, että kaksi dyadista kuutiota ovat joko pistevieraita tai toinen on toisen osajoukko, ja että kukin kuutiosukupolvi peittää koko avaruuden vähintäänkin nollamittaista joukkoa vaille. Lisäksi dyadiset kuutiot eivät poikkea muodoltaan merkittävästi palloista siinä mielessä, että niitä rajoittavat sisä- ja ulkopuolelta saman, sukupolven määräämän, suuruusluokan pallot. Dyadisten kuutioiden keskeisimpiä sovelluksia ovat harmonisessa analyysissä käytettävät dyadinen Calderón–Zygmundin jako sekä dyadinen maksimaalifunktio, jotka eivät merkittävästi eroa euklidisen avaruuden vastaavista.

Avainsanat: dyadinen kuutio, homogeenisen tyypin avaruus, kvasimetriikka, metrinen avaruus, tuplaava mitta, dyadinen maksimaalifunktio, Calderón–Zygmundin jako

AALTO UNIVERSITY
SCHOOL OF SCIENCE

ABSTRACT OF THE
MASTER'S THESIS

Author: Janne Korvenpää

Title: Dyadic cubes in a space of homogeneous type

Date: 11. lokakuuta 2012 Language: Finnish Number of pages:3+46

Department of Mathematics and Systems Analysis

Professorship: Mathematics Code: Mat-1

Supervisor and instructor: Prof. Juha Kinnunen

In this thesis, we generalize the system of Euclidean dyadic cubes used in harmonic analysis to a space of homogeneous type, i.e. a quasi-metric space with a doubling measure. The essential properties of the dyadic cubes are that they form a tree structure such that any two of them are either disjoint or one is contained in the other, and that each generation of cubes covers the whole space excluding a possible set of measure zero. In addition, dyadic cubes are not too far away from balls in the sense that they are bounded by balls of the same magnitude from inside and outside. The most central applications of dyadic cubes are the dyadic Calderón–Zygmund decomposition and the dyadic maximal function. They are used in harmonic analysis and they do not significantly differ from their Euclidean counterparts.

Keywords: dyadic cube, space of homogeneous type, quasi-metric, metric space, doubling measure, dyadic maximal function, Calderón–Zygmund decomposition

1 Johdanto

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ jako koordinaattiakseleiden suuntaisiksi dyadisiksi kuutioiksi

$$\{2^{-k}([0,1)^n + \alpha) : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$$

on usein käytetty menetelmä harmonisessa analyysissä euklidisissa avaruuksissa. Dyadiset kuutiot muodostavat puurakenteen siten, että kukin kuutio on jaettavissa 2^n täsmälleen samanmuotoiseen seuraavan sukupolven kuutioon, ja kunkin kuution särmän pituus riippuu eksponentiaalisesti kuution sukupolvesta. Dyadisten kuutioiden keskeisimpiä ominaisuuksia ovat, että kaksi dyadista kuutiota ovat joko pistevieraita tai toinen on toisen osajoukko, ja että kunkin sukupolven k kuutiot muodostavat koko avaruuden osituksen. Lisäksi kuutiot eivät muodoltaan poikkea merkittävästi palloista siinä mielessä, että $2r$-särmäinen kuutio sisältää r-säteisen pallon ja toisaalta se sisältyy $\sqrt{n}r$-säteiseen palloon.

Koska harmoninen analyysi ei rajoitu pelkästään euklidisiin avaruuksiin, on vastaavantyyppiselle dyadiselle jaolle käyttöä myös muunlaisissa avaruuksissa. Tässä työssä esitetään, kuinka euklidisen avaruuden dyadiset kuutiot keskeisimpine ominaisuuksineen ja sovelluksineen saadaan yleistettyä rakenteeltaan yleisempään homogeenisen tyypin avaruuteen. Euklidisen avaruuden tapaa määritellä kuutiot ei voida käyttää homogeenisen tyypin avaruudessa, sillä jälkimmäisessä ei yleisesti ole koordinaattiakseleita, eikä kohtisuoria suuntia missään muussakaan mielessä. Homogeenisen tyypin avaruuden ainoat luontevasti käsiteltävät joukot ovat sen pallot, joten dyadisten kuutioiden konstruktio perustuukin homogeenisen tyypin avaruudessa palloihin sekä joukko-opin perusominaisuuksiin.

Konstruktion erilaisuudesta huolimatta euklidisen avaruuden dyadisten kuutioiden keskeisimmät ominaisuudet saadaan pääpiirteittäin pätemään myös homogeenisen tyypin avaruuden dyadisille kuutioille. Erityisesti puurakenneominaisuus, että kaksi dyadista kuutiota ovat joko pistevieraita tai toinen on toisen osajoukko, pätee sellaisenaan. Sen sijaan koko avaruuden osituksen tässä työssä esiteltävien dyadisten kuutioiden sukupolvet muodostavat vain nollamittaista joukkoa vaille, mutta myös aito ositus saavutettaisiin tarvittaessa. Tällä erolla ei kuitenkaan yleensä ole merkitystä, sillä harmonisen analyysin integraalioperaattoreissa nollamittaiset joukot eivät vaikuta. Homogeenisen tyypin avaruuden dyadiset kuutiot lisäksi vastaavat euklidisen avaruuden kuutioiden tapaan palloja siinä mielessä, että niitä rajoittavat sisä- ja ulkopuolelta saman, sukupolven määräämän, suuruusluokan pallot.

Keskeisimpiä eroja euklidisen avaruuden dyadisiin kuutioihin nähden on homogeenisen tyypin avaruuden dyadisilla kuutioilla se, että niiden ei ole pistejoukkoina muistutettava muodoltaan juurikaan toisiaan, sikäli kuin joukkojen muodosta voidaan edes järkevässä mielessä puhua. Erityisesti saman sukupolven dyadisten kuutioiden tarvitsee olla keskenään ainoastaan samaa suuruusluokkaa siinä mielessä, että niitä rajoittavat sekä sisä- että ulkopuolelta samansäteiset pallot. Lisäksi dyadisten kuutioiden lapsien lukumäärä puurakenteessa saattaa vaihdella huomattavasti eri kuutioilla, toisin kuin euklidisen avaruuden tapauksessa. Lapsien lukumäärälle saadaan kuitenkin kaikille kuutioille yhteinen yläraja. Pienimmillään dyadisella kuutiolla saattaa puolestaan olla ainoastaan yksi lapsi, jolloin kuutio ja lapsi ovat pistejoukkoina samat.

Homogeenisen tyypin avaruuden dyadisten kuutioiden sovelluksina tarkastellaan dyadista Calderón–Zygmundin jakoa sekä dyadista maksimaalifunktiota, jotka eivät juurikaan poikkea euklidisen avaruuden vastaavista. Dyadinen Calderón–Zygmundin jako tarjoaa pistevieraan dyadisen kuutioperheen, jonka kuutiot ovat suurimpia mahdollisia, joissa annetun funktion integraalikeskiarvo ylittää halutun suuruisen tason. Calderón–Zygmundin jaon avulla voidaan esimerkiksi harmonisessa analyysissä jakaa funktio kahteen osaan, joilla yksittäin on käteviä ominaisuuksia. Dyadinen maksimaalifunktio puolestaan on harmonisessa analyysissä perinteisemmän Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktion tapaan käytettävä työkalu, jossa tarkastellaan integraalikeskiarvoja pallojen sijasta dyadisten kuutioiden yli. Dyadiselle maksimaalioperaattorille saadaan todistettua ominaisuudet heikko $(1,1)$ ja vahva (p,p), kun $p > 1$. Lisäksi osoittautuu, että dyadisen maksimaalifunktion ja Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktion L^p-normit ovat samaa suuruusluokkaa.

Motivaationa tälle työlle on ollut kirjoittaa selkeä ja täsmällinen esitys homogeenisen tyypin avaruuden dyadisista kuutioista, joiden konstruktiota ei aiemmassa kirjallisuudessa ole kovin perusteellisesti esitetty. Ainoa tunnettu jossain määrin kattava esitys dyadisten kuutioiden konstruktiosta on M. Christin paperi [3], jossa siinäkin on paljon välivaiheita jätetty perustelematta. Todistusten välivaiheiden puuttumisen lisäksi lähteinä käytetyissä papereissa esiintyy jonkin verran epätäsmällisyyksiä, esimerkiksi lauseiden oletuksissa, minkä vuoksi erityisesti näihin kohtiin on tässä kiinnitetty tarkemmin huomiota.

Työn dyadisten kuutioiden konstruktiota käsittelevät osat on tehty M. Christin paperin [3] pohjalta, jonka notaatiota on myös pääosin noudatettu. Dyadiseen Calderón–Zygmundin jakoon sekä dyadiseen maksimaalifunktioon liittyvät kohdat ovat puolestaan suurimmaksi osaksi H. Aimarin, A. Bernardisin ja B. Iaffein paperista [1], jonka lisänä on käytetty myös toista heidän paperiaan [2]. Lisäksi homogeenisen tyypin avaruuteen liittyen on hyödynnetty kirjoja Lectures on Analysis on Metric Spaces [6] sekä A Panorama of Harmonic Analysis [8]. Viitteistä [4], [5] ja [7] löytyy myös tätä työtä sivuavia aiheita, kahdessa ensimmäisessä tosin ranskan kielellä.

2 Homogeenisen tyypin avaruus

Tässä luvussa esitellään homogeenisen tyypin avaruudeksi kutsuttu abstrakti matemaattinen avaruus sekä sen keskeisimpiä ominaisuuksia. Homogeenisen tyypin avaruus on muodoltaan varsin yleinen, sillä sen pisteisiin liittyvät ainoastaan kvasimetriikka ja tuplaava mitta. Esimerkiksi euklidiset avaruudet $\mathbb{R}^n$ Lebesguen mitalla varustettuina ovat homogeenisen tyypin avaruuden erikoistapauksia. Aloitetaan kvasimetriikan määritelmästä.

Määritelmä 2.1 (Kvasimetriikka). Kvasimetriikka joukossa X on funktio $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= 0, \text{ jos ja vain jos } x = y, && (2.2)\\ \rho(x,y) &= \rho(y,x), && (2.3)\\ \rho(x,z) &\leq A_0\rho(x,y) + A_0\rho(y,z), && (2.4) \end{aligned}$$

missä $A_0 \geq 1$ on pisteistä x, y, z riippumaton vakio.

Tavalliseen metriikkaan nähden ainoa ero kvasimetriikassa on, että tavallisen kolmioepäyhtälön tilalla on heikennetty kolmioepäyhtälö (2.4). Joka tapauksessa kvasimetriikka on ajateltavissa etäisyysfunktiona siinä missä metriikkakin. Yhdessä kvasimetriikka ρ ja vastaava joukko X muodostavat kvasimetrisen avaruuden (X, ρ). Kvasimetriikka määrää avaruuden (X, ρ) x-keskiset r-säteiset pallot

$$B(x,r) := \{y \in X : \rho(x,y) < r\}, \quad x \in X, r > 0.$$

Myös avaruuden avoimet ja suljetut joukot määritellään vastaavasti kuin metrisissä avaruuksissa. Kvasimetrisen avaruuden pallot eivät kuitenkaan ole välttämättä avoimia joukkoja toisin kuin normaalin metriikan tapauksessa. Yksinkertainen esimerkki tästä löytyy lähteestä [7].

Muilta osin kvasimetrinen avaruus ei olennaisesti poikkea metrisestä avaruudesta. Etäisyysfunktiona kvasimetriikka ρ yleistyy luonnollisesti pisteen $x \in X$ ja osajoukon $A \subset X$ välille sekä kahden osajoukon $A, B \subset X$ välille:

$$\rho(x,A) := \inf_{y \in A} \rho(x,y), \quad \rho(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x,y).$$

Etäisyysfunktiona kvasimetriikka määrää myös osajoukon $A \subset X$ halkaisijan

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \rho(x,y).$$

Kvasimetriikan lisäksi homogeenisen tyypin avaruuteen tarvitaan kvasimetriikan kanssa yhteensopiva tuplaava mitta.

Määritelmä 2.5 (Tuplaava mitta). Tuplaava mitta avaruudessa (X, ρ) on Borel-säännöllinen mitta μ siten, että avaruuden (X, ρ) pallot ovat μ-mitallisia joukkoja ja seuraavat ehdot pätevät kaikilla $x \in X$, $r > 0$:

$$0 < \mu(B(x, r)) < \infty, \tag{2.6}$$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq A_1 \mu(B(x, r)), \tag{2.7}$$

missä $A_1 \geq 1$ on pisteestä x ja luvusta r riippumaton vakio.

Jatkossa tarkasteltava homogeenisen tyypin avaruus saadaan yhdistämällä kvasimetriseen avaruuteen tuplaava mitta. Lisäksi tehdään tarkastelua helpottava oletus, että tämän kvasimetrisen avaruuden pallot ovat avoimia. Tämä ei varsinaisesti rajoita jatkossa tehtävän tarkastelun yleisyyttä, sillä kvasimetriikalle on aina olemassa sen kanssa ekvivalentti kvasimetriikka, jonka pallot ovat avoimia. Asiasta on mainittu hieman tarkemmin lähteessä [3].

Määritelmä 2.8 (Homogeenisen tyypin avaruus). Homogeenisen tyypin avaruus on kolmikko (X, ρ, μ), jossa X on epätyhjä joukko, ρ kvasimetriikka joukossa X siten, että avaruuden (X, ρ) pallot ovat avoimia joukkoja, ja μ tuplaava mitta avaruudessa (X, ρ).

Homogeenisen tyypin avaruuteen liittyy siis kiinteästi yksi kvasimetriikka ja yksi mitta, jotka pysyvät koko ajan samoina. Näihin liittyviä kolmioepäyhtälön (2.4) vakiota A_0 ja tuplaavuusvakiota A_1 ehdossa (2.7) kutsutaan yhdessä avaruuden geometrisiksi vakioiksi. Kun jatkossa homogeenisen tyypin avaruudessa (X, ρ, μ) puhutaan mitallisista joukoista ja integroituvista funktioista, tarkoitetaan nimenomaan joukon X μ-mitallisia osajoukkoja ja joukossa X määriteltyjä μ-integroituvia funktioita. Vastaavasti puhuttaessa pelkästään palloista tai halkaisijoista tarkoitetaan nimenomaan kvasimetriikan ρ määrittelemiä joukon X palloja ja osajoukkojen halkaisijoita.

Yksi keskeisimmistä homogeenisen tyypin avaruuteen liittyvistä tuloksista on Lebesguen differentioituvuuslause, joka pätee vastaavanlaisena kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Lauseen todistusta ei tässä esitetä, vaan sellainen löytyy esimerkiksi lähteestä [6].

Lause 2.9 (Lebesguen differentioituvuuslause). *Olkoon f lokaalisti integroituva funktio homogeenisen tyypin avaruudessa (X, ρ, μ). Tällöin*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f \, d\mu = f(x)$$

melkein kaikilla $x \in X$.

Luvun lopuksi esitetään vielä kaksi homogeenisen tyypin avaruuden ominaisuutta, joita tarvitaan myöhemmissä luvuissa. Niistä ensimmäinen kertoo, että avaruuden mitta on ääretön täsmälleen silloin, kun avaruus on rajoittamaton.

Lemma 2.10. *Homogeenisen tyypin avaruudessa (X, ρ, μ) pätee*

$$\mu(X) = \infty, \text{ jos ja vain jos } \operatorname{diam}(X) = \infty.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\operatorname{diam}(X) = \infty$. Tarkastellaan palloa $B(x,r) \subset X$, ja näytetään ensimmäiseksi, että on olemassa pallo $B(y,R) \subset X$, jolle pätee

$$B(x,r) \cap B(y,R) = \varnothing \quad \text{ja} \quad B(x,r) \subset B(y,CR), \tag{2.11}$$

missä vakio C riippuu ainoastaan vakiosta A_0. Koska $\operatorname{diam}(X) = \infty$, voidaan valita piste $y \in X$ sekä luku $R \geq r$ siten, että $\rho(y,x) = A_0(r+R)$. Olkoon $z \in B(x,r)$, jolloin kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioimalla

$$\begin{aligned} A_0(r+R) = \rho(y,x) &\leq A_0\rho(y,z) + A_0\rho(z,x) \\ &\leq A_0\rho(y,z) + A_0 r, \end{aligned}$$

josta $\rho(y,z) \geq R$, eli $z \notin B(y,R)$. Toisaalta kolmioepäyhtälön (2.4) mukaan pätee myös

$$\begin{aligned} \rho(y,z) &\leq A_0\rho(y,x) + A_0\rho(x,z) \\ &< A_0 A_0(r+R) + A_0 r \\ &\leq (2A_0^2 + A_0)R \\ &= CR, \end{aligned}$$

eli $z \in B(y,CR)$.

Pallojen $B(x,r)$ ja $B(y,R)$ välisestä relaatiosta (2.11) sekä mitan μ monotonisuudesta ja tuplaavuudesta (2.7) saadaan

$$\mu(B(x,r)) \leq \mu(B(y,CR)) \leq C'\mu(B(y,R)) \leq C'\mu(X \setminus B(x,r)),$$

missä C' on vakiosta C määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C' = A_1^d$, jossa vakio $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d \geq C$. Tämä epäyhtälö pätee kaikille palloille $B(x,r) \subset X$, joten tekemällä alkuperäisestä väitteestä vastaoletus $\mu(X) < \infty$ seuraa

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \lim_{r\to\infty} \mu(B(x,r)) \\ &\leq C' \lim_{r\to\infty} \mu(X \setminus B(x,r)) \\ &= C'\big(\mu(X) - \lim_{r\to\infty} \mu(B(x,r))\big) \\ &= C'\big(\mu(X) - \mu(X)\big) = 0, \end{aligned}$$

eli $\mu(X) = 0$. Tämä on ristiriidassa mitan μ ominaisuuden (2.6) kanssa, joten päätellään, että $\mu(X) = \infty$.

Toinen suuntaa seuraa suoraviivaisesti: oletetaan, että $\operatorname{diam}(X) < \infty$, jolloin $X = B(x,r)$ jollakin pallolla $B(x,r)$ ja näin ollen $\mu(X) < \infty$ mitan μ ominaisuuden (2.6) perusteella. $\square$

Viimeisenä esitettävä homogeenisen tyypin avaruuden ominaisuus kertoo, että hajanainen pistejoukko ei voi sisältää mielivaltaisen paljon pisteitä pallosta, jonka säde on pistejoukon pisteiden välimatkojen suuruusluokkaa. Joissain yhteyksissä tätä ominaisuutta kutsutaan avaruuden (X,ρ) äärelliseksi Assouadin dimensioksi, josta on kerrottu tarkemmin esimerkiksi lähteessä [1].

Lemma 2.12. *Homogeenisen tyypin avaruudessa (X,ρ,μ) jokaisella $K > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $r > 0$ jokainen joukko muotoa*

$$A = \{z_1, z_2, z_3, \dots : \rho(z_i, z_j) \geq r, \text{ kun } i \neq j\} \subset X$$

sisältää korkeintaan N pistettä pallosta $B(x, Kr)$.

Todistus. Olkoon $K > 0$, $x \in X$, $r > 0$ ja $A \subset X$ väitteen mukainen joukko. Näytetään ensin, että

$$B(z, \tfrac{r}{2A_0}) \cap B(w, \tfrac{r}{2A_0}) = \varnothing, \quad \text{kun } z, w \in A, z \neq w. \tag{2.13}$$

Olkoon $y \in B(z, \frac{r}{2A_0})$, jolloin joukon A määrittelyn sekä kolmioepäyhtälön (2.4) mukaan

$$\begin{aligned} r \leq \rho(z,w) &\leq A_0\rho(z,y) + A_0\rho(y,w) \\ &\leq A_0\frac{r}{2A_0} + A_0\rho(y,w), \end{aligned}$$

josta $\rho(y,w) \geq \frac{r}{2A_0}$, eli $y \notin B(w, \frac{r}{2A_0})$. Merkitään sitten $Z = A \cap B(x, Kr)$ ja näytetään, että

$$B(x, Kr) \subset B(z, 2A_0Kr) \quad \text{ja} \quad B(z, \tfrac{r}{2A_0}) \subset B(x, A_0(K+1)r), \quad z \in Z. \tag{2.14}$$

Olkoon ensin $y \in B(x, Kr)$, jolloin kolmioepäyhtälöä (2.4) sekä tietoa $z \in Z \subset B(x, Kr)$ käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \rho(z,y) &\leq A_0\rho(z,x) + A_0\rho(x,y) \\ &< A_0Kr + A_0Kr \\ &= 2A_0Kr, \end{aligned}$$

eli $y \in B(z, 2A_0Kr)$. Vastaavasti olettamalla $y \in B(z, \frac{r}{2A_0})$ saadaan

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &\leq A_0\rho(x,z) + A_0\rho(z,y) \\ &< A_0Kr + A_0\frac{r}{2A_0} \\ &< A_0(K+1)r, \end{aligned}$$

eli $y \in B(x, A_0(K+1)r)$.

Mitan μ tuplaavuuden (2.7) ja monotonisuuden sekä tulosten (2.13) ja (2.14) avulla saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}\sum_{z\in Z}\mu(B(z,2A_0Kr)) &\leq \sum_{z\in Z}C\mu(B(z,\tfrac{r}{2A_0}))\\ &= C\mu(\bigcup_{z\in Z}B(z,\tfrac{r}{2A_0}))\\ &\leq C\mu\big(B(x,A_0(K+1)r)\big),\end{aligned}$$

missä C on vakioiden $2A_0K$ ja $\frac{1}{2A_0}$ suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C=A_1^d$, jossa $d\in\mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d\frac{1}{2A_0}\geq 2A_0K$. Mitan μ tuplaavuutta (2.7) soveltamalla saadaan niin ikään

$$\mu\big(B(x,A_0(K+1)r)\big)\leq C'\mu(B(x,Kr)),$$

missä C' on vastaavasti vakioiden $A_0(K+1)$ ja K suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin. Nyt inkluusion (2.14), mitan μ monotonisuuden sekä edellä johdettujen epäyhtälöiden avulla saadaan arvioitua joukon Z pisteiden lukumääräksi

$$\#Z=\sum_{z\in Z}1\leq\sum_{z\in Z}\frac{\mu(B(z,2A_0Kr))}{\mu(B(x,Kr))}\leq CC'\frac{\mu\big(B(x,A_0(K+1)r)\big)}{\mu\big(B(x,A_0(K+1)r)\big)}=CC'\leq N,$$

kun $N\in\mathbb{N}$ valitaan suuremmaksi tai yhtä suureksi kuin CC', joka ei riipu pisteestä x, luvusta r eikä joukosta A. $\square$

3 Dyadiset kuutiot

Tässä luvussa konstruoidaan dyadiset kuutiot homogeenisen tyypin avaruudessa ja esitetään niiden keskeisimmät ominaisuudet todistuksineen. Koko luvun ajan tarkastelun kohteena on Määritelmän 2.8 mukainen homogeenisen tyypin avaruus (X, ρ, μ) geometrisilla vakioilla A_0 ja A_1.

Aloitetaan dyadisten kuutioiden konstruointi kiinnittämällä yksi referenssipiste kutakin kuutiota vastaavasta joukosta. Olkoon $\delta \in (0,1)$ toistaiseksi kiinnittämätön parametri, ja kiinnitetään kullakin $k \in \mathbb{Z}$ maksimaalinen joukko $Z_k \subset X$ pisteitä siten, että

$$\rho(z_\alpha^k, z_\beta^k) \geq \delta^k \quad \text{kaikilla } z_\alpha^k, z_\beta^k \in Z_k, \text{ joilla } z_\alpha^k \neq z_\beta^k. \tag{3.1}$$

Maksimaalisella joukolla tarkoitetaan tässä sitä, että joukkoon Z_k ei voida lisätä yhtäkään uutta joukon X pistettä ehdon (3.1) pysyessä voimassa. Maksimaalinen joukko ei siis ole tässä yksikäsitteinen, mutta sellainen on joka tapauksessa olemassa. Joukko Z_k voi olla joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön avaruudesta (X, ρ) riippuen. Joka tapauksessa Z_k on epätyhjä, koska $X \neq \varnothing$.

Indeksi k kertoo dyadisen kuution sukupolven, ja piste $z_\alpha^k \in Z_k$ voidaan tulkita keskipisteeksi sitä vastaavalle dyadiselle kuutiolle Q_α^k, joka määritellään jäljempänä. Parametri δ puolestaan määrää saman sukupolven kuutioiden keskipisteiden minimietäisyyden sekä skaalaussuhteen peräkkäisten sukupolvien kuutioiden välillä.

Indeksoidaan joukkojen Z_k, $k \in \mathbb{Z}$, pisteet indeksijoukoilla I_k siten, että

$$\alpha \in I_k, \text{ jos ja vain jos } z_\alpha^k \in Z_k. \tag{3.2}$$

Joukkojen Z_k maksimaalisuudesta johtuen

$$\text{kaikilla } x \in X, \text{ kaikilla } k \in \mathbb{Z} \text{ on olemassa } \alpha \in I_k \text{ siten, että } \rho(x, z_\alpha^k) < \delta^k. \tag{3.3}$$

Kun referenssipisteet ovat kiinnitettyjä, saadaan niiden avulla muodostettua osittaisjärjestys niissä esiintyvien indeksiparien määräämään joukkoon. Tällaista osittaisjärjestystä tullaan tarvitsemaan dyadisten kuutioiden määrittelyssä.

Lemma 3.4. *Joukossa $\{(k, \alpha) : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k\}$ on olemassa osittaisjärjestys $\preceq$, joka toteuttaa seuraavat ehdot.*

(a) Jos $(k, \alpha) \preceq (l, \beta)$, niin $k \geq l$.

(b) Jokaiselle (k, α) ja $l \leq k$ on olemassa yksikäsitteinen $\beta \in I_l$ siten, että $(k, \alpha) \preceq (l, \beta)$.

(c) Jos $(k, \alpha) \preceq (k-1, \beta)$, niin $\rho(z_\alpha^k, z_\beta^{k-1}) < \delta^{k-1}$.

(d) Jos $\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\beta) < \frac{1}{2A_0}\delta^{k-1}$, *niin* $(k,\alpha) \preceq (k-1,\beta)$.

Todistus. Tuloksen (3.3) mukaan jokaisella parilla (k,α) on olemassa ainakin yksi $\beta \in I_{k-1}$, jolla $\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\beta) < \delta^{k-1}$. Näytetään, että vastaavalle parille on toisaalta olemassa korkeintaan yksi $\beta \in I_{k-1}$, jolla $\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\beta) < \frac{1}{2A_0}\delta^{k-1}$: jos z^{k-1}_γ on toinen tällainen piste, niin kolmioepäyhtälön (2.4) mukaan

$$\begin{aligned}\rho(z^{k-1}_\beta, z^{k-1}_\gamma) &\leq A_0\rho(z^{k-1}_\beta, z^k_\alpha) + A_0\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\gamma)\\ &< A_0\frac{1}{2A_0}\delta^{k-1} + A_0\frac{1}{2A_0}\delta^{k-1}\\ &= \delta^{k-1},\end{aligned}$$

mikä on ristiriidassa epäyhtälön (3.1) kanssa.

Osittaisjärjestys $\preceq$ konstruoidaan seuraavasti: jokaisella parilla (k,α) katsotaan, onko olemassa indeksiä $\beta \in I_{k-1}$, jolla $\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\beta) < \frac{1}{2A_0}\delta^{k-1}$. Mikäli on, asetetaan $(k,\alpha) \preceq (k-1,\beta)$ ja $(k,\alpha) \npreceq (k-1,\gamma)$ kaikille muille $\gamma \in I_{k-1}$. Jos ei ole, valitaan jokin $\beta \in I_{k-1}$, jolla $\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\beta) < \delta^{k-1}$, ja asetetaan $(k,\alpha) \preceq (k-1,\beta)$ ja $(k,\alpha) \npreceq (k-1,\gamma)$ kaikille muille $\gamma \in I_{k-1}$.

Lopuksi täydennetään $\preceq$ refleksiiviseksi, eli asetetaan $(k,\alpha) \preceq (k,\alpha)$ kaikilla (k,α), sekä transitiiviseksi, eli jos $(k,\alpha) \preceq (l,\beta)$ ja $(l,\beta) \preceq (m,\gamma)$, niin asetetaan $(k,\alpha) \preceq (m,\gamma)$. Tällöin siitä saadaan osittaisjärjestys, sillä viimeinen vaadittava ominaisuus, antisymmetrisyys, pätee konstruktion perusteella. Kaikki neljä väittämää (a)–(d) seuraavat suoraan konstruktiosta. □

Lemman 3.4 väittämä (a) tarkoittaa, että osittaisjärjestys $\preceq$ muodostaa luontevan sukupolvijärjestyksen. Väittämä (b) puolestaan kertoo, että jokaisella indeksiparilla (k,α) on yksikäsitteinen esi-isä sukupolvessa l. Yhdessä näistä väittämistä seuraa, että osittaisjärjestys muodostaa puurakenteen. Väittämä (c) voidaan tulkita siten, että puurakenteessa vanhempaa ja lasta vastaavat pisteet ovat lähellä toisiaan, ja väittämä (d) siten, että vanhempaa vastaava piste on vain omia lapsiaan vastaavien pisteiden lähellä.

Dyadisten kuutioiden määrittelemistä varten kiinnitetään Lemman 3.4 ehdot toteuttava osittaisjärjestys $\preceq$. Dyadiset kuutiot muodostetaan palloista, joiden keskipisteinä ovat aina sellaiset referenssipisteet, joiden indeksipari on kuution indeksiparin jälkeläinen osittaisjärjestyksen puurakenteessa.

Määritelmä 3.5 (Dyadinen kuutio). Sukupolven $k \in \mathbb{Z}$ indeksin $\alpha \in I_k$ dyadinen kuutio on

$$Q^k_\alpha := \bigcup_{(l,\beta)\preceq(k,\alpha)} B(z^l_\beta, a_0\delta^l),$$

missä $a_0 \in (0,1)$ on toistaiseksi kiinnittämätön parametri.

Dyadisista kuutioista muodostuu sukupolven k dyadisten kuutioiden perhe

$$\mathcal{D}_k := \{Q_\alpha^k : \alpha \in I_k\}$$

sekä kaikkien dyadisen jaon kuutioiden perhe

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k.$$

Määritelmän 3.5 dyadiset kuutiot saadaan toteuttamaan vastaavantyyppiset ominaisuudet kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ klassiset dyadiset kuutiot, kunhan niiden määrittelyssä käytetyt parametrit δ ja a_0 valitaan riittävän pieniksi.

Lause 3.6 (Dyadisten kuutioiden ominaisuudet). *Kuutioperheelle $\mathcal{D}$ on olemassa ainoastaan luvuista A_0, A_1 riippuvat vakiot $\delta \in (0,1)$, $a_0 \in (0,1)$, $\eta > 0$, $C_1 < \infty$, $C_2 < \infty$ ja $N_0 \in \mathbb{N}$ siten, että seuraavat väitteet pätevät.*

(a) Jokainen $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ on avoin.

(b) Jokainen $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ sisältää pallon $B(z_\alpha^k, a_0\delta^k)$.

(c) Jokaiselle $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ pätee $\operatorname{diam}(Q_\alpha^k) \leq C_1\delta^k$.

(d) Jokaiselle $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ ja $l < k$ on olemassa yksikäsitteinen $\beta \in I_l$ siten, että $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^l$.

(e) Jos $l \geq k$ ja $\alpha \in I_k, \beta \in I_l$, niin joko $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$ tai $Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k = \varnothing$.

(f) Jokaiselle $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ pätee

$$\#\{Q_\beta^{k+1} \in \mathcal{D}_{k+1} : Q_\beta^{k+1} \subset Q_\alpha^k\} \leq N_0.$$

(g) Jokaiselle $k \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\mu(X \setminus \bigcup_{\alpha \in I_k} Q_\alpha^k) = 0.$$

(h) Jokaiselle $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ pätee

$$\mu(\{x \in Q_\alpha^k : \rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \leq t\delta^k\}) \leq C_2 t^\eta \mu(Q_\alpha^k) \quad \textit{kaikilla } t > 0,$$

missä $\overline{Q_\alpha^k}$ on kuution Q_α^k sulkeuma.

Lauseen 3.6 väittämät (b) ja (c) kertovat, että dyadiset kuutiot sekä sisältävät pallon että sisältyvät palloon, jonka säde on eksponentiaalisesti verrannollinen kuution sukupolven indeksiin. Toisin sanoen kuutiota rajoittavat sisä- ja ulkopuolelta saman suuruusluokan pallot. Yhdessä tuplaavan mitan μ ominaisuuden (2.6) kanssa tästä seuraa välittömästi, että kuutioiden mitta on positiivinen ja äärellinen. Väittämät (d) ja (e) merkitsevät, että dyadiset kuutiot muodostavat luontevan sukupolvista määräytyvän puurakenteen. Väittämä (f) kertoo, että kaikkien dyadisten kuutioiden lapsien lukumäärällä on tässä sukupuussa sama yläraja. Väittämä (g) puolestaan tarkoittaa, että kunkin sukupolven kuutiot peittävät koko avaruuden nollamittaista joukkoa vaille, ja väittämä (h), että dyadisten kuutioiden mitta ei kasaannu lähelle niiden reunoja. Viimeiselle väittämälle on käyttöä lähinnä ainoastaan singulaaristen integraalioperaattoreiden yhteydessä.

Parametrien δ ja a_0 arvot vaikuttavat todistuksen kulkuun alusta loppuun asti. Niitä ei siis tulla kiinnittämään ennen kuin lauseen viimeinenkin väittämä on todistettu. Todistuksen edetessä niitä kuitenkin jatkuvasti rajoitetaan ylhäältäpäin rajoituksin muotoa $\delta \in (0, \delta')$ ja $a_0 \in (0, a_0')$, missä δ' ja a_0' riippuvat ainoastaan vakioista A_0 ja A_1. Tällaisia rajoituksia kertyy äärellinen määrä, joten lopulliset ylärajat saadaan minimeinä yksittäisistä ylärajoista. Suurimmassa osassa todistuksen apuna käytettävistä lemmoista pitää tulkita, että ne pätevät edellyttäen, että δ ja a_0 ovat riittävän pieniä, vaikka sitä ei eksplisiittisesti lemmojen muotoilussa mainitakaan.

Siirrytään todistamaan Lauseen 3.6 väittämiä yksi kerrallaan. Väittämä (a) seuraa suoraan Määritelmästä 3.5: pallot $B(z_\beta^l, a_0\delta^l)$ ovat homogeenisen tyypin avaruudessa avoimia, joten Q_α^k on avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Samoin väittämä (b) seuraa suoraan dyadisten kuutioiden määritelmästä, sillä osittaisjärjestykselle $\preceq$ pätee refleksiivisyys $(k, \alpha) \preceq (k, \alpha)$.

Seuraavaa kohtaa varten tarvitaan osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4c) heikennetty yleistys, joka antaa ylärajan sille, kuinka kaukana kuution keskipiste voi olla sen esi-isän keskipisteestä.

Lemma 3.7. *Jos* $(l, \beta) \preceq (k, \alpha)$, *niin* $\rho(z_\beta^l, z_\alpha^k) \leq 2A_0\delta^k$.

Todistus. Oletetaan $(l, \beta) \preceq (k, \alpha)$, jolloin Lemman 3.4 mukaan on olemassa yksikäsitteinen ketju

$$(k, \alpha) = (k, \gamma_0) \succeq (k+1, \gamma_1) \succeq (k+2, \gamma_2) \succeq \cdots \succeq (k+n, \gamma_n) = (l, \beta).$$

Kolmioepäyhtälön (2.4) ja implikaation (3.4c) avulla arvioiden saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(z_\alpha^k, z_\beta^l) &\leq A_0\rho(z_\alpha^k, z_{\gamma_1}^{k+1}) + A_0\rho(z_{\gamma_1}^{k+1}, z_\beta^l) \\
&\leq A_0\delta^k + A_0\rho(z_{\gamma_1}^{k+1}, z_\beta^l) \\
&\leq A_0\delta^k + A_0^2\rho(z_{\gamma_1}^{k+1}, z_{\gamma_2}^{k+2}) + A_0^2\rho(z_{\gamma_2}^{k+2}, z_\beta^l) \\
&\leq A_0\delta^k + A_0^2\delta^{k+1} + A_0^2\rho(z_{\gamma_2}^{k+2}, z_\beta^l) \\
&\;\vdots \\
&\leq A_0\delta^k + A_0^2\delta^{k+1} + A_0^3\delta^{k+2} + \cdots + A_0^{n-1}\delta^{k+n-2} + A_0^{n-1}\delta^{k+n-1} \\
&\leq A_0\delta^k \sum_{j=0}^{\infty} (A_0\delta)^j = \frac{A_0\delta^k}{1 - A_0\delta} \\
&\leq 2A_0\delta^k,
\end{aligned}$$

kun δ on valittu pienemmäksi kuin $\frac{1}{2A_0}$. Tällaisella valinnalla myös toiseksi viimeisen rivin geometrinen sarja on suppeneva. $\square$

Todistetaan Lauseen 3.6 väittämä (c). Olkoon $x, y \in Q_\alpha^k$, jolloin Määritelmän 3.5 mukaan $x \in B(z_\beta^l, a_0\delta^l)$ ja $y \in B(z_\gamma^m, a_0\delta^m)$ joillakin $(l, \beta), (m, \gamma) \preceq (k, \alpha)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\rho(x,y) &\leq A_0\rho(x, z_\beta^l) + A_0^2\rho(z_\beta^l, z_\alpha^k) + A_0^3\rho(z_\alpha^k, z_\gamma^m) + A_0^3\rho(z_\gamma^m, y) \\
&\leq A_0 a_0\delta^l + A_0^2 2A_0\delta^k + A_0^3 2A_0\delta^k + A_0^3 a_0\delta^m \\
&\leq A_0 1\delta^k + A_0^2 2A_0\delta^k + A_0^3 2A_0\delta^k + A_0^3 1\delta^k \\
&= (A_0 + 3A_0^3 + 2A_0^4)\delta^k \\
&= C_1\delta^k.
\end{aligned}
$$

Ensimmäisessä epäyhtälössä on käytetty kolme kertaa kolmioepäyhtälöä (2.4). Toisessa on käytetty Lemmaa 3.7 sekä tietoa, että $x \in B(z_\beta^l, a_0\delta^l)$ ja $y \in B(z_\gamma^m, a_0\delta^m)$. Viimeisessä epäyhtälössä puolestaan $a_0 \leq 1$ ja $l, m \geq k$. Ottamalla saadusta epäyhtälöstä $\rho(x,y) \leq C_1\delta^k$ puolittain supremum yli joukon $\{(x,y) : x, y \in Q_\alpha^k\}$ päädytään haluttuun epäyhtälöön $\operatorname{diam}(Q_\alpha^k) \leq C_1\delta^k$. Väittämän (3.6c) välitön seuraus on $Q_\alpha^k \subset B(z_\alpha^k, C_1\delta^k)$.

Seuraavaa väittämää varten todistetaan ensin aputulos, jonka mukaan saman sukupolven kuutioista saadaan keskenään pistevieraita.

Lemma 3.8. *Jos* $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^k \neq \varnothing$, *niin* $\alpha = \beta$.

Todistus. Olkoon $x \in Q_\alpha^k \cap Q_\beta^k$. Tällöin Määritelmän 3.5 mukaan on olemassa parit $(m, \gamma) \preceq (k, \alpha)$ ja $(n, \sigma) \preceq (k, \beta)$ siten, että $x \in B(z_\gamma^m, a_0\delta^m)$ ja $x \in B(z_\sigma^n, a_0\delta^n)$. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $m \geq n$. Siten kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioituna saadaan

$$
\begin{aligned}
\rho(z_\gamma^m, z_\sigma^n) &\leq A_0\rho(z_\gamma^m, x) + A_0\rho(x, z_\sigma^n) \\
&\leq A_0 a_0\delta^m + A_0 a_0\delta^n \\
&\leq 2A_0 a_0\delta^n.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Tarkastellaan sitten kahta tapausta. Jos $m = n$, saadaan edellinen epäyhtälö (3.9) muotoon $\rho(z_\gamma^n, z_\sigma^n) < \delta^n$, kun valitaan $a_0 < \frac{1}{2A_0}$. Tästä seuraa pisteistön Z_n valinnan (3.1) perusteella, että $\gamma = \sigma$, eli $(m, \gamma) = (n, \sigma)$. Nyt osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4b) mukaan pareilla (m, γ) ja (n, σ) on sama yksikäsitteinen esi-isä sukupolvessa k, joten $\alpha = \beta$.

Toisaalta, jos $m > n$, on osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4b) mukaan olemassa yksikäsitteinen z_τ^{n+1} siten, että $(m, \gamma) \preceq (n+1, \tau)$. Kolmioepäyhtälön

(2.4), Lemman 3.7 sekä epäyhtälön (3.9) avulla saadaan

$$\begin{aligned}\rho(z_\tau^{n+1}, z_\sigma^n) &\le A_0\rho(z_\tau^{n+1}, z_\gamma^m) + A_0\rho(z_\gamma^m, z_\sigma^n) \\ &\le A_0 2A_0\delta^{n+1} + A_0 2A_0 a_0\delta^n \\ &= 2A_0^2(\delta + a_0)\delta^n \\ &< \frac{1}{2A_0}\delta^n,\end{aligned}$$

jossa on valittu δ ja a_0 pienemmiksi kuin $\frac{1}{8A_0^3}$. Nyt osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuudesta (3.4d) seuraa $(n+1, \tau) \preceq (n, \sigma)$, joten transitiivisuus huomioiden saadaan ketju

$$(m, \gamma) \preceq (n+1, \tau) \preceq (n, \sigma) \preceq (k, \beta).$$

Koska päti myös $(m, \gamma) \preceq (k, \alpha)$, päätellään tässäkin tapauksessa ominaisuuden (3.4b) mukaan, että $\alpha = \beta$. □

Todistetaan sitten Lauseen 3.6 väittämä (e). Olkoon $l \ge k$ ja $Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k \ne \varnothing$. Valitaan γ osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4b) mukaisesti siten, että $(l, \beta) \preceq (k, \gamma)$. Tällöin $Q_\beta^l \subset Q_\gamma^k$ Määritelmän 3.5 ja osittaisjärjestyksen $\preceq$ transitiivisuuden perusteella. Näin ollen pätee myös $Q_\gamma^k \cap Q_\alpha^k \ne \varnothing$, josta seuraa Lemman 3.8 mukaan, että $\gamma = \alpha$. Siispä $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$. Toisaalta, jos $l \ge k$ ja $Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k = \varnothing$, niin ei voi päteä $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$, sillä $Q_\beta^l \ne \varnothing$. Väittämä (3.6e) on näin ollen todistettu.

Lemma 3.8 sekä juuri todistettu dyadisten kuutioiden ominaisuus (3.6e) yhdistämällä saadaan selkeä yhteys osittaisjärjestyksen $\preceq$ ja kuutioperheen $\mathcal{D}$ välille.

Lemma 3.10. *Olkoon $l \ge k$ ja $Q_\alpha^k, Q_\beta^l \in \mathcal{D}$. Tällöin*

$$(l, \beta) \preceq (k, \alpha), \quad \textit{jos ja vain jos} \quad Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k, \quad \textit{ja} \tag{3.11}$$

$$(l, \beta) \npreceq (k, \alpha), \quad \textit{jos ja vain jos} \quad Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k = \varnothing. \tag{3.12}$$

Todistus. Todistetaan ensin väittämä (3.11). Oletetaan, että $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$. Osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4b) mukaan on olemassa yksikäsitteinen $\gamma \in I_k$ siten, että $(l, \beta) \preceq (k, \gamma)$. Tällöin Määritelmästä 3.5 ja osittaisjärjestyksen $\preceq$ transitiivisuudesta seuraa, että $Q_\beta^l \subset Q_\gamma^k$. Koska nyt $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k \cap Q_\gamma^k$ ja $Q_\beta^l \ne \varnothing$, niin $Q_\alpha^k \cap Q_\gamma^k \ne \varnothing$, joten Lemman 3.8 perusteella pätee $\alpha = \gamma$. Siis $(l, \beta) \preceq (k, \alpha)$. Toinen suunta seuraa suoraan Määritelmästä 3.5 ja osittaisjärjestyksen $\preceq$ transitiivisuudesta.

Jälkimmäinen väittämä (3.12) seuraa suoraviivaisesti edellisestä; Ottamalla tuloksesta (3.11) negaatio saadaan, että $(l, \beta) \npreceq (k, \alpha)$, jos ja vain jos $Q_\beta^l \not\subset Q_\alpha^k$. Näistä jälkimmäinen pätee dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6e) perusteella täsmälleen, kun $Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k = \varnothing$, joten väite on näin ollen todistettu. □

Todistetaan sitten lauseen 3.6 väittämä (d). Olkoon $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ ja $l < k$. Osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuus (3.4b) takaa yksikäsitteisen indeksin β, jolle $(k, \alpha) \preceq (l, \beta)$.

Tällöin Lemman 3.10 kohdan (3.11) mukaan $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^l$ täsmälleen tällä yksikäsitteisellä $\beta \in I_l$, mikä todistaa väittämän (3.6d).

Todistetaan lauseen 3.6 väittämä (f). Tarkastellaan kuutiota $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$. Keskipistejoukolle $Z_{k+1} \subset X$ pätee ominaisuutensa (3.1) mukaan

$$\rho(z_\beta^{k+1}, z_\gamma^{k+1}) \geq \delta^{k+1}, \quad \text{kun } z_\beta^{k+1}, z_\gamma^{k+1} \in Z_{k+1}, z_\beta^{k+1} \neq z_\gamma^{k+1},$$

joten Lemman 2.12 perusteella on olemassa vakio $N_0 \in \mathbb{N}$ siten, että Z_{k+1} sisältää korkeintaan N_0 pistettä pallosta $B(z_\alpha^k, (C_1\delta^{-1})\delta^{k+1}) = B(z_\alpha^k, C_1\delta^k)$. Tässä N_0 riippuu ainoastaan vakioista A_0 ja A_1, kunhan myös δ riippuu ainoastaan niistä. Koska dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) mukaan $Q_\alpha^k \subset B(z_\alpha^k, C_1\delta^k)$, niin Z_{k+1} sisältää korkeintaan N_0 pistettä myös kuutiosta Q_α^k. Näin ollen dyadisten kuutioiden ominaisuus (3.6e) huomioiden pätee

$$\#\{Q_\beta^{k+1} \in \mathcal{D}_{k+1} : Q_\beta^{k+1} \subset Q_\alpha^k\} = \#\{z_\beta^{k+1} \in Z_{k+1} : z_\beta^{k+1} \in Q_\alpha^k\} \leq N_0$$

ja väittämä (3.6d) on todistettu.

Siirrytään seuraavaksi todistamaan Lauseen 3.6 väittämä (g). Kiinnitetään $k \in \mathbb{Z}$ ja merkitään

$$G := \bigcup_{\alpha \in I_k} Q_\alpha^k.$$

Millä tahansa $x \in X$ ja $n \in \mathbb{Z}$ on pisteistön Z_n ominaisuuden (3.3) mukaan olemassa $z_\beta^n \in Z_n$ siten, että $\rho(x, z_\beta^n) < \delta^n$. Kun $n \geq k$, niin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6d) mukaan on olemassa $\alpha \in I_k$ siten, että $(n, \beta) \preceq (k, \alpha)$, jolloin Määritelmän 3.5 perusteella $B(z_\beta^n, a_0\delta^n) \subset G$. Näytetään, että pätee myös $B(z_\beta^n, a_0\delta^n) \subset B(x, A_0(1 + a_0)\delta^n)$: olkoon $y \in B(z_\beta^n, a_0\delta^n)$, jolloin kolmioepäyhtälön (2.4) avulla arvioiden

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &\leq A_0\rho(x, z_\beta^n) + A_0\rho(z_\beta^n, y) \\
&< A_0\delta^n + A_0a_0\delta^n \\
&= A_0(1 + a_0)\delta^n,
\end{aligned}$$

eli $y \in B(x, A_0(1 + a_0)\delta^n)$.

Näytetään sitten, että mitan μ osalta pätee myös kääntäen

$$\mu(B(z_\beta^n, a_0\delta^n)) \geq c\mu\big(B(x, A_0(1 + a_0)\delta^n)\big),$$

missä $c > 0$ on luvuista A_0 ja A_1 riippuva vakio. Käyttämällä tuplaavuusehtoa (2.7) d kertaa saadaan

$$\mu(B(z_\beta^n, 2^d a_0\delta^n)) \leq A_1^d \mu(B(z_\beta^n, a_0\delta^n)).$$

Valitaan d siten, että $2^d a_0 \geq A_0^2(1 + a_0) + A_0$, ja olkoon $y \in B(x, A_0(1 + a_0)\delta^n)$. Nyt pisteen z_β^n valintaa hyödyntäen kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(y, z_\beta^n) &\leq A_0\rho(y, x) + A_0\rho(x, z_\beta^n) \\
&< A_0A_0(1 + a_0)\delta^n + A_0\delta^n \\
&= (A_0^2(1 + a_0) + A_0)\delta^n \\
&\leq 2^d a_0\delta^n,
\end{aligned}$$

eli $y \in B(z_\beta^n, 2^d a_0 \delta^n)$. Näin ollen $B(x, A_0(1+a_0)\delta^n) \subset B(z_\beta^n, 2^d a_0\delta^n)$. Mitan μ tuplaavuuden ja monotonisuuden nojalla saadaan siten

$$\begin{aligned}\mu(B(z_\beta^n, a_0\delta^n)) &\geq \frac{1}{A_1^d}\mu(B(z_\beta^n, 2^d a_0\delta^n)) \\ &\geq \frac{1}{A_1^d}\mu\big(B(x, A_0(1+a_0)\delta^n)\big) \\ &= c\mu\big(B(x, A_0(1+a_0)\delta^n)\big),\end{aligned}$$

jossa vakio c riippuu ainoastaan luvuista A_0 ja A_1, kun huomioidaan, että myös luku a_0 riippuu ainoastaan niistä.

Merkitään todistuksen loppuosan ajan $A_0(1+a_0)\delta^n =: r_n$. Yhdistämällä saadut inkluusiot $B(z_\beta^n, a_0\delta^n) \subset G$ ja $B(z_\beta^n, a_0\delta^n) \subset B(x, r_n)$ sekä mitan μ monotonisuus saadaan

$$\mu(B(z_\beta^n, a_0\delta^n)) \leq \mu(G \cap B(x, r_n)).$$

Yhdistämällä mukaan vielä epäyhtälö $c\mu(B(x, r_n)) \leq \mu(B(z_\beta^n, a_0\delta^n))$ ja huomioimalla, että luvusta n oletettiin ainoastaan $n \geq k$, seuraa

$$\frac{\mu(G \cap B(x, r_n))}{\mu(B(x, r_n))} \geq c > 0 \quad \text{kaikilla } n \geq k.$$

Ottamalla tästä puolittain limes inferior, kun $n \to \infty$, ja huomioimalla, että $x \in X$ oli mielivaltainen, saadaan

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\mu(G \cap B(x, r))}{\mu(B(x, r))} \geq c > 0 \quad \text{kaikilla } x \in X. \tag{3.13}$$

Toisaalta valitsemalla Lebesguen differentioituvuuslauseessa 2.9 funktioksi f joukon G karakteristinen funktio χ_G päädytään yhtälöön

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(G \cap B(x, r))}{\mu(B(x, r))} = \chi_G(x) \quad \text{melkein kaikilla } x \in X. \tag{3.14}$$

Yhdistämällä raja-arvotulokset (3.13) ja (3.14) seuraa, että melkein kaikilla $x \in X$ pätee $\chi_G(x) = 1$, eli $\mu(X \setminus G) = 0$. Näin ollen

$$\mu(X \setminus \bigcup_{\alpha \in I_k} Q_\alpha^k) = 0$$

millä tahansa $k \in \mathbb{Z}$ ja väittämä (3.6g) on todistettu.

Edellä todistetun dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6g) mukaan joukot

$$N_k := X \setminus \bigcup_{\alpha \in I_k} Q_\alpha^k$$

ovat nollamittaisia, eli jokaisen sukupolven k kuutioperhe $\mathcal{D}_k$ peittää avaruuden X nollamittaista joukkoa vaille. Myös $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} N_k) = 0$ mitan μ subadditiivisuuden perusteella. Kun jatkossa halutaan korostaa, että tämä nollamittainen joukko on jätetty tarkastelun ulkopuolelle, merkitään

$$\hat{X} := X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} N_k.$$

Avaruudelle $\hat{X}$ pätee siten erityisesti $\hat{X} \subset \bigcup_{\alpha\in I_k} Q^k_\alpha$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja $\mu(X \setminus \hat{X}) = 0$.

Lauseen 3.6 väittämän (h) todistamiseksi tarvitaan ensin useita aputuloksia. Ensimmäinen niistä on dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6b) hieman vahvennettu muoto, jonka mukaan dyadiset kuutiot sisältävät suuremmankin pallon, tosin nollamittaista joukkoa vaille.

Lemma 3.15. *Merkitään* $C_3 = \frac{1}{4A_0^2}$. *Tällöin kaikilla* $Q^k_\alpha \in \mathcal{D}$ *pätee*

$$B(z^k_\alpha, C_3\delta^k) \cap \hat{X} \subset Q^k_\alpha.$$

Todistus. Olkoon $x \in B(z^k_\alpha, C_3\delta^k) \cap \hat{X}$. Oletetaan, että $x \notin Q^k_\alpha$, jolloin $x \in Q^k_\beta$ jollakin muulla $\beta \in I_k$, koska nollamittainen joukko, jota sukupolven k kuutiot eivät peitä, on leikattu pois. Tällöin on Määritelmän 3.5 mukaan olemassa $(l,\gamma) \preceq (k,\beta)$, siten, että $x \in B(z^l_\gamma, a_0\delta^l)$. Osittaisjärjestyksen $\preceq$ puurakenteesta (3.4a–b) seuraa, että $l \geq k$ ja $(l,\gamma) \npreceq (k,\alpha)$. Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen. Jos $l = k$, niin kolmioepäyhtälöstä (2.4) sekä pisteen x sijainnista seuraa

$$\begin{aligned}
\rho(z^k_\alpha, z^l_\gamma) &\leq A_0\rho(z^k_\alpha, x) + A_0\rho(x, z^l_\gamma) \\
&\leq A_0C_3\delta^k + A_0a_0\delta^l \\
&= A_0\frac{1}{4A_0^2}\delta^k + A_0a_0\delta^k \\
&\leq (\tfrac{1}{4} + A_0a_0)\delta^k \\
&< \delta^k,
\end{aligned}$$

kun a_0 on valittu pienemmäksi kuin $\frac{3}{4A_0}$. Koska oli $l = k$, on tämä ristiriidassa pisteistön Z_k valinnan (3.1) kanssa.

Toisaalta, jos $l > k$, niin osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4b) mukaan on olemassa $\sigma \in I_{k+1}$ siten, että $(l,\gamma) \preceq (k+1,\sigma)$. Koska $x \in B(z^l_\gamma, a_0\delta^l)$, niin $x \in Q^{k+1}_\sigma$ Määritelmän 3.5 mukaan. Koska myös $z^{k+1}_\sigma \in Q^{k+1}_\sigma$, niin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) perusteella $\rho(x, z^{k+1}_\sigma) \leq C_1\delta^{k+1}$. Tällöin kolmioepäyhtälöä (2.4) sekä alkuperäistä oletusta $x \in B(z^k_\alpha, C_3\delta^k)$ käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(z^k_\alpha, z^{k+1}_\sigma) &\leq A_0\rho(z^k_\alpha, x) + A_0\rho(x, z^{k+1}_\sigma) \\
&\leq A_0C_3\delta^k + A_0C_1\delta^{k+1} \\
&= A_0\frac{1}{4A_0^2}\delta^k + A_0C_1\delta^{k+1} \\
&= \Big(\frac{1}{4A_0} + A_0C_1\delta\Big)\delta^k \\
&< \frac{1}{2A_0}\delta^k,
\end{aligned}$$

kun δ on valittu pienemmäksi kuin $\frac{1}{4A_0^2C_1}$. Nyt osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4d) mukaan seuraa $(k+1,\sigma) \preceq (k,\alpha)$, jolloin edelleen transitiivisuuden perusteella $(l,\gamma) \preceq (k,\alpha)$. Tämä on ristiriita, sillä oli päätelty myös $(l,\gamma) \not\preceq (k,\alpha)$. □

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan Lauseen 3.6 väittämässä (h) esiintyvää joukkoa, johon kuuluvat kuution reunan lähellä olevat pisteet. Merkitään tällaista joukkoa

$$E_\alpha^k(\tau) := \{x \in Q_\alpha^k : \rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) < \tau\delta^k\} \tag{3.16}$$

ja kutsutaan sitä kuution $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ τ-reunaksi. Näytetään ensimmäiseksi, että τ-reunan määritelmässä esiintyvä joukko $X \setminus \overline{Q_\alpha^k}$ on kontrolloitavissa helpommin käsiteltävällä joukolla $\hat{X} \setminus Q_\alpha^k$.

Lemma 3.17. *Olkoon $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ ja $x \in X$. Tällöin*

$$\rho(x, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) \leq A_0\rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}).$$

Todistus. Jos $X \setminus \overline{Q_\alpha^k} = \varnothing$, niin $\rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) = \infty$ ja väite pätee. Olkoon siis $X \setminus \overline{Q_\alpha^k} \neq \varnothing$ ja $y \in X \setminus \overline{Q_\alpha^k}$. Näytetään ensin, että $\rho(y, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) = 0$. Tehdään vastaoletus, että $\rho(y, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) = r > 0$, ja olkoon $z \in B(y, \varepsilon_1)$, jossa $\varepsilon_1 > 0$ on toistaiseksi kiinnittämätön luku. Tällöin kolmioepäyhtälön (2.4) avulla saadaan

$$\begin{aligned} r = \rho(y, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) &\leq A_0\rho(y,z) + A_0\rho(z, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) \\ &\leq A_0\varepsilon_1 + A_0\rho(z, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k), \end{aligned}$$

josta voidaan ratkaista

$$\rho(z, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) \geq \frac{r}{A_0} - \varepsilon_1 = \frac{r}{2A_0} > 0,$$

kun valitaan $\varepsilon_1 = \frac{r}{2A_0}$. Näin ollen kokonaisella pallolla $B(y, \varepsilon_1)$ pätee

$$\rho(B(y,\varepsilon_1), \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) > 0.$$

Toisaalta, koska $y \in X \setminus \overline{Q_\alpha^k}$ ja $X \setminus \overline{Q_\alpha^k}$ on suljetun joukon komplementtina avoin joukko, sisältää se jonkin pallon $B(y, \varepsilon_2)$. Saadut päätelmät yhdistämällä seuraa, että on olemassa pallo $B = B(y, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$ siten, että

$$B \subset X \setminus \overline{Q_\alpha^k} \quad \text{ja} \quad \rho(B, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) > 0.$$

Tästä seuraa edelleen $B \subset (X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \setminus (\hat{X} \setminus Q_\alpha^k) \subset X \setminus \hat{X}$, joten mitan μ ominaisuuden (2.6) sekä monotonisuuden mukaan $0 < \mu(B) \leq \mu(X \setminus \hat{X}) = 0$, mikä on ristiriita. Päätellään siis $\rho(y, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) = 0$, jolloin kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioimalla saadaan

$$\rho(x, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) \leq A_0\rho(x,y) + A_0\rho(y, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) = A_0\rho(x,y).$$

Väite seuraa ottamalla tästä puolittain infimum yli joukon $\{y \in X \setminus \overline{Q_\alpha^k}\}$. □

Näytetään sitten, että dyadisen kuution mielivaltaisen suuren sukupolven jälkeläisillä voidaan peittää riittävän pieni kuution τ-reuna.

Lemma 3.18. *Jokaisella $N \in \mathbb{N}$ on olemassa $\tau' > 0$ siten, että jos $\tau \in (0, \tau')$ ja $x \in E_\alpha^k(\tau)$, niin $x \in Q_\sigma^{k+N}$ jollakin $\sigma \in I_{k+N}$, jolla $(k+N, \sigma) \preceq (k, \alpha)$.*

Todistus. Kiinnitetään $N \in \mathbb{N}$ ja olkoon $x \in E_\alpha^k(\tau)$, jossa $\tau > 0$. Tällöin Määritelmän 3.5 mukaan $x \in B(z_\beta^l, a_0\delta^l)$ jollakin $(l, \beta) \preceq (k, \alpha)$. Lemmojen 3.15 ja 3.10 perusteella $B(z_\beta^l, C_3\delta^l) \cap \hat{X} \subset Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$, jossa $C_3 = \frac{1}{4A_0^2}$. Tästä seuraa

$$\hat{X} \setminus Q_\alpha^k \subset \hat{X} \setminus (B(z_\beta^l, C_3\delta^l) \cap \hat{X}) = \hat{X} \setminus B(z_\beta^l, C_3\delta^l),$$

joten

$$\begin{aligned} \rho(z_\beta^l, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) &= \inf_{y \in \hat{X} \setminus Q_\alpha^k} \rho(z_\beta^l, y) \\ &\geq \inf_{y \in \hat{X} \setminus B(z_\beta^l, C_3\delta^l)} \rho(z_\beta^l, y) \\ &\geq C_3\delta^l. \end{aligned}$$

Toisaalta Lemman 3.17, kolmioepäyhtälön (2.4) sekä pisteen x määrittelyn perusteella

$$\begin{aligned} \rho(z_\beta^l, \hat{X} \setminus Q_\alpha^k) &\leq A_0\rho(z_\beta^l, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \\ &\leq A_0^2\rho(z_\beta^l, x) + A_0^2\rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \\ &\leq A_0^2 a_0\delta^l + A_0^2\tau\delta^k. \end{aligned}$$

Nämä epäyhtälöt yhdistämällä saadaan $(C_3 - A_0^2 a_0)\delta^l \leq A_0^2\tau\delta^k$. Valitsemalla a_0 pienemmäksi kuin $\frac{1}{8A_0^4}$ seuraa $C_3 - A_0^2 a_0 \geq \frac{1}{8A_0^2} > 0$, jolloin $\delta^l \leq 8A_0^4\tau\delta^k$. Nyt kun luku τ valitaan pienemmäksi kuin $\frac{1}{8A_0^4}\delta^N =: \tau'$, on pädettävä $l \geq k + N$. Valitaan sitten $\sigma \in I_{k+N}$ siten, että $(l, \beta) \preceq (k+N, \sigma)$. Koska $x \in B(z_\beta^l, a_0\delta^l)$, niin tällöin $x \in Q_\sigma^{k+N}$ Määritelmän 3.5 mukaan. Lisäksi, koska $x \in Q_\alpha^k \cap Q_\sigma^{k+N}$, niin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6e) mukaan $Q_\sigma^{k+N} \subset Q_\alpha^k$, joten Lemman 3.10 perusteella on oltava $(k+N, \sigma) \preceq (k, \alpha)$. Väite on näin ollen todistettu. □

Lemman 3.18 sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6d) mukaan riittävän pienellä $\tau > 0$ on kullekin joukon $E_\alpha^k(\tau)$ pisteelle x olemassa yksikäsitteinen ketju sukupolvesta k sukupolveen $k+N$ siten, että x kuuluu kaikkiin ketjun kuutioihin. Merkitään vastaavaa indeksiparien ketjua

$$\mathcal{C}_k^N(x) := \{(j, \sigma(x,j))\}_{j=k}^{k+N}, \quad x \in E_\alpha^k(\tau), \tag{3.19}$$

missä $\sigma(x,j) \in I_j$ siten, että $\sigma(x,k) = \alpha$, $x \in Q_{\sigma(x,j)}^j$ ja

$$(j, \sigma(x,j)) \preceq (j-1, \sigma(x, j-1)), \quad j = k+1, \ldots, k+N.$$

Lemma 3.20. *Olkoon $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$ ja $N \in \mathbb{N}$. Jos τ on riittävän pieni kuutiosta Q_α^k riippumaton luku, niin on olemassa ainoastaan vakioista A_0 ja A_1 riippuva luku $\varepsilon_1 > 0$ siten, että kaikilla $x \in E_\alpha^k(\tau)$*

$$\rho(z_{\sigma_j}^j, z_{\sigma_i}^i) \geq \varepsilon_1 \delta^j, \quad kun\ (j, \sigma_j), (i, \sigma_i) \in \mathcal{C}_k^N(x)\ ja\ j < i.$$

Todistus. Olkoon $\tau \in (0, \tau')$ toistaiseksi kiinnittämätön, missä τ' määräytyy Lemman 3.18 mukaan luvusta N. Tehdään vastaoletus, että kaikilla $\varepsilon_1 > 0$ pätee

$$\rho(z_{\sigma_j}^j, z_{\sigma_i}^i) < \varepsilon_1 \delta^j$$

joillekin $x \in E_\alpha^k(\tau)$ ja $(j, \sigma_j), (i, \sigma_i) \in \mathcal{C}_k^N(x)$, joille $j < i$. Merkitään johdonmukaisuuden vuoksi $\sigma_k := \sigma(x, k) = \alpha$. Tällöin Lemman 3.17, kolmioepäyhtälön (2.4), tehtyjen oletusten sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) perusteella

$$\begin{aligned}
\rho(z_{\sigma_j}^j, \hat{X} \setminus Q_{\sigma_k}^k) &\leq A_0 \rho(z_{\sigma_j}^j, X \setminus \overline{Q_{\sigma_k}^k}) \\
&\leq A_0^2 \rho(z_{\sigma_j}^j, x) + A_0^2 \rho(x, X \setminus \overline{Q_{\sigma_k}^k}) \\
&\leq A_0^3 \rho(z_{\sigma_j}^j, z_{\sigma_i}^i) + A_0^3 \rho(z_{\sigma_i}^i, x) + A_0^2 \rho(x, X \setminus \overline{Q_{\sigma_k}^k}) \\
&< A_0^3 \varepsilon_1 \delta^j + A_0^3 C_1 \delta^i + A_0^2 \tau \delta^k \\
&= (A_0^3 \varepsilon_1 + A_0^3 C_1 \delta^{i-j} + A_0^2 \tau \delta^{k-j}) \delta^j \\
&\leq (A_0^3 \varepsilon_1 + A_0^3 C_1 \delta + A_0^2 \tau \delta^{-N}) \delta^j,
\end{aligned}$$

joka pätee kaikilla $\varepsilon_1 > 0$ ja Lemman 3.18 mukaan kaikilla $\tau \in (0, \tau')$. Valitaan sitten ε_1 siten, että $A_0^3 \varepsilon_1 < \frac{1}{3} C_3$, δ siten, että $A_0^3 C_1 \delta < \frac{1}{3} C_3$, sekä τ siten, että $A_0^2 \tau \delta^{-N} < \frac{1}{3} C_3$, missä $C_3 = \frac{1}{4A_0^2}$, kuten Lemmassa 3.15. Tällöin

$$\rho(z_{\sigma_j}^j, \hat{X} \setminus Q_{\sigma_k}^k) < (\frac{1}{3} C_3 + \frac{1}{3} C_3 + \frac{1}{3} C_3) \delta^j = C_3 \delta^j.$$

Edelleen Lemman 3.15 ja ketjun $\mathcal{C}_k^N(x)$ määritelmän mukaan

$$B(z_{\sigma_j}^j, C_3 \delta^j) \cap \hat{X} \subset Q_{\sigma_j}^j \subset Q_{\sigma_k}^k,$$

eli $\hat{X} \setminus Q_{\sigma_k}^k \subset \hat{X} \setminus B(z_{\sigma_j}^j, C_3 \delta^j)$, joten edelliseen epäyhtälöön yhdistämällä saadaan

$$\rho(z_{\sigma_j}^j, \hat{X} \setminus B(z_{\sigma_j}^j, C_3 \delta^j)) \leq \rho(z_{\sigma_j}^j, \hat{X} \setminus Q_{\sigma_k}^k) < C_3 \delta^j.$$

Tämä on ristiriita, sillä pallon keskipisteen etäisyys pallon ulkopuolesta ei voi olla sen sädettä pienempi. Väite on näin ollen todistettu. □

Merkitään kuution Q_α^k τ-reunan (3.16) pisteitä vastaavia kuutioiden keskipisteitä ketjun (3.19) sukupolvessa j seuraavasti:

$$S_j(\tau) := \bigcup_{x \in E_\alpha^k(\tau)} \{z_{\sigma_j}^j : (j, \sigma_j) \in \mathcal{C}_k^N(x)\}, \quad k \leq j \leq k + N. \tag{3.21}$$

Lemma 3.22. *On olemassa $\tau > 0$ ja vain luvuista A_0 ja A_1 riippuva $\varepsilon_2 > 0$ siten, että*

$$B(z, \varepsilon_2\delta^i) \cap B(z', \varepsilon_2\delta^j) = \varnothing \quad \textit{kaikilla } z \in S_i(\tau), z' \in S_j(\tau), z \neq z'.$$

Todistus. Valitaan τ Lemman 3.20 mukaiseksi riittävän pieneksi luvuksi. Kiinnitetään indeksit i ja j siten, että $k \leq j \leq i \leq k+N$, ja keskipisteet $z \in S_i(\tau)$, $z' \in S_j(\tau)$. Jos z ja z' kuuluvat eri ketjuihin $\mathcal{C}_k^N(\cdot)$, niin $z = z^i_{\sigma(x,i)}, z' = z^j_{\sigma(x',j)}$ joillakin $x, x' \in E^k_\alpha(\tau)$, joille $(i, \sigma(x,i)) \not\leq (j, \sigma(x',j))$. Tällöin $Q^i_{\sigma(x,i)} \cap Q^j_{\sigma(x',j)} = \varnothing$ Lemman 3.10 perusteella. Dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6b) mukaan tästä seuraa

$$B(z^i_{\sigma(x,i)}, a_0\delta^i) \cap B(z^j_{\sigma(x',j)}, a_0\delta^j) = \varnothing,$$

joten voidaan valita $\varepsilon_2 \leq a_0$, jolloin tämä tapaus on todistettu.

Jos z ja z' puolestaan kuuluvat samaan ketjuun $\mathcal{C}_k^N(\cdot)$, niin on olemassa $x \in E^k_\alpha(\tau)$ siten, että $z = z^i_{\sigma(x,i)}, z' = z^j_{\sigma(x,j)}$. Tässä tapauksessa on pädettävä aito epäyhtälö $j < i$, koska oletettiin $z \neq z'$. Lemman 3.20 mukaan tästä seuraa $\rho(z, z') \geq \varepsilon_1\delta^j$, jollakin $\varepsilon_1 > 0$. Toisaalta, jos oletetaan vastoin väitettä, että kaikilla $\varepsilon_2 > 0$ on olemassa $y \in B(z, \varepsilon_2\delta^i) \cap B(z', \varepsilon_2\delta^j)$, niin kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioiden saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(z, z') &\leq A_0\rho(z, y) + A_0\rho(y, z') \\
&< A_0\varepsilon_2\delta^i + A_0\varepsilon_2\delta^j \\
&\leq 2A_0\varepsilon_2\delta^j \\
&= \varepsilon_1\delta^j,
\end{aligned}$$

jossa on valittu $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2A_0}$. Tässä tapauksessa päädyttiin siis ristiriitaan, joten väite on todistettu. □

Kaikille dyadisille kuutioille saadaan kuution τ-reunan ja itse kuution mittojen suhde mielivaltaisen pieneksi, kunhan tarkastellaan riittävän pientä τ-reunaa.

Lemma 3.23. *Jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\tau > 0$ siten, että*

$$\mu(E^k_\alpha(\tau)) < \varepsilon\mu(Q^k_\alpha) \quad \textit{kaikilla } Q^k_\alpha \in \mathcal{D}.$$

Todistus. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja $Q^k_\alpha \in \mathcal{D}$. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ suuri toistaiseksi kiinnittämätön luku. Olkoon ε_2 Lemman 3.22 mukainen riittävän pieni luku ja τ luvusta N riippuva niin pieni luku, että tällainen on olemassa. Näytetään ensin, että

$$E^k_\alpha(\tau) \subset \bigcup_{z \in S_{k+N}(\tau)} B(z, C_1\delta^{k+N}).$$

Jos $x \in E^k_\alpha(\tau)$, niin Lemman 3.18 mukaan $x \in Q^{k+N}_\sigma$, jollakin $(k+N, \sigma) \in \mathcal{C}_k^N(x)$. Tällöin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) perusteella $\rho(x, z^{k+N}_\sigma) < C_1\delta^{k+N}$, eli $x \in B(z^{k+N}_\sigma, C_1\delta^{k+N})$. Koska $z^{k+N}_\sigma \in S_{k+N}(\tau)$, niin edelleen pätee

$$x \in \bigcup_{z \in S_{k+N}(\tau)} B(z, C_1\delta^{k+N}).$$

Tällöin mitan μ monotonisuuden, subadditiivisuuden ja tuplaavuuden (2.7) perusteella

$$\begin{aligned}\mu(E_\alpha^k(\tau)) &\leq \mu\Big(\bigcup_{z\in S_{k+N}(\tau)} B(z, C_1\delta^{k+N})\Big) \\ &\leq \sum_{z\in S_{k+N}(\tau)} \mu(B(z, C_1\delta^{k+N})) \\ &\leq C \sum_{z\in S_{k+N}(\tau)} \mu(B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N})),\end{aligned} \tag{3.24}$$

missä $C = A_1^d$ on saatu soveltamalla tuplaavuusehtoa (2.7) d kertaa valitsemalla $d \in \mathbb{N}$ siten, että $2^d\varepsilon_2 \geq C_1$.

Olkoon sitten $k \leq j \leq k+N$, ja merkitään $z \preceq w$ tarkoittamaan, että $(l,\beta) \preceq (m,\gamma)$, kun $z = z_\beta^l$ ja $w = z_\gamma^m$ ovat kuutioiden keskipisteitä. Koska osittaisjärjestys $\preceq$ muodostaa puurakenteen ja lisäksi Lemman 3.22 mukaan pallot $B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N})$ ja $B(z', \varepsilon_2\delta^{k+N})$ ovat pistevieraita, kun $z \neq z'$, voidaan edellisen epäyhtälön summa pilkkoa kahdeksi sisäkkäiseksi summaksi:

$$\sum_{z\in S_{k+N}(\tau)} \mu(B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N})) = \sum_{w\in S_j(\tau)} \sum_{\substack{z\in S_{k+N}(\tau)\\ z\preceq w}} \mu(B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N})). \tag{3.25}$$

Jälkimmäisen summan palloille pätee tiedon $\varepsilon_2 \leq a_0$, Määritelmän 3.5 sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) mukaan

$$B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N}) \subset B(z, a_0\delta^{k+N}) \subset Q^j(w) \subset B(w, C_1\delta^j),$$

missä $Q^j(w) \in \mathcal{D}_j$ on se kuutio, jonka keskipiste on w. Toisaalta pallot $B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N})$ ovat Lemman 3.22 mukaan pistevieraita, joten mitan μ additiivisuuden ja monotonisuuden perusteella

$$\sum_{\substack{z\in S_{k+N}(\tau)\\ z\preceq w}} \mu(B(z, \varepsilon_2\delta^{k+N})) \leq \mu(B(w, C_1\delta^j)). \tag{3.26}$$

Yhdistämällä saadut epäyhtälöt (3.24)–(3.26), soveltamalla uudestaan tuplaavuusehtoa kerrointen C_1 ja ε_2 välillä ja huomioimalla, että pallot $B(w, \varepsilon_2\delta^j)$ ovat

Lemman 3.22 mukaan pistevieraita, saadaan

$$\begin{aligned}
\mu(E^k_\alpha(\tau)) &\le C \sum_{z\in S_{k+N}(\tau)} \mu(B(z,\varepsilon_2\delta^{k+N})) \\
&= C \sum_{w\in S_j(\tau)} \sum_{\substack{z\in S_{k+N}(\tau)\\ z\preceq w}} \mu(B(z,\varepsilon_2\delta^{k+N})) \\
&\le C \sum_{w\in S_j(\tau)} \mu(B(w,C_1\delta^j)) \\
&\le C^2 \sum_{w\in S_j(\tau)} \mu(B(w,\varepsilon_2\delta^j)) \\
&= C^2\mu\Big(\bigcup_{w\in S_j(\tau)} B(w,\varepsilon_2\delta^j)\Big).
\end{aligned}$$

Merkitään $G_j := \bigcup_{z\in S_j(\tau)} B(z,\varepsilon_2\delta^j)$, jolloin siis

$$\mu(E^k_\alpha(\tau)) \le C^2\mu(G_j), \quad k\le j\le k+N.$$

Määritelmän 3.5 sekä tiedon $\varepsilon_2 \le a_0$ mukaan joukot G_j ovat alkuperäisen kuution Q^k_α osajoukkoja ja toisaalta Lemman 3.22 mukaan keskenään pistevieraita, joten mitan μ monotonisuuden ja additiivisuuden perusteella

$$\mu(Q^k_\alpha) \ge \mu\Big(\bigcup_{j=k}^{k+N} G_j\Big) = \sum_{j=k}^{k+N}\mu(G_j) \ge \sum_{j=k}^{k+N}\frac{1}{C^2}\mu(E^k_\alpha(\tau)) \ge \frac{N}{C^2}\mu(E^k_\alpha(\tau)).$$

Valitsemalla N suuremmaksi kuin $\frac{C^2}{\varepsilon}$ seuraa $\mu(E^k_\alpha(\tau)) < \varepsilon\mu(Q^k_\alpha)$, joten väite on todistettu. □

Merkitään kullakin $Q^k_\alpha \in \mathcal{D}$ ja $j\ge 0$ kuution reunan lähellä olevia jälkeläisiä sukupolvessa $k+j$ seuraavasti:

$$\mathcal{E}_j(Q^k_\alpha) := \{Q^{k+j}_\beta \subset Q^k_\alpha : \rho(Q^{k+j}_\beta, X\setminus \overline{Q^k_\alpha}) \le C_4\delta^{k+j}\},$$

missä C_4 on suuri, toistaiseksi kiinnittämätön vakio. Merkitään vastaavaa pistejoukkoa

$$E_j(Q^k_\alpha) := \{x : x\in Q^{k+j}_\beta \text{ jollakin } Q^{k+j}_\beta \in \mathcal{E}_j(Q^k_\alpha)\}.$$

Joukko $E_j(Q^k_\alpha)$ vastaa läheisesti kuution Q^k_α τ-reunaa $E^k_\alpha(\tau)$.

Lemma 3.27. *Merkitään $C_5 = \frac{1}{8A_0^4}$. Kun vakio C_4 valitaan riittävän suureksi ja lukujen τ ja j välillä pätee yhteys $C_5\delta^{j+1} < \tau \le C_5\delta^j$, niin*

$$E^k_\alpha(\tau) \subset E_j(Q^k_\alpha) \subset E^k_\alpha(C_6\tau) \quad \textit{kaikilla } Q^k_\alpha \in \mathcal{D},$$

missä C_6 on indeksistä j ja luvusta τ riippumaton vakio.

Todistus. Kiinnitetään $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$. Näytetään ensin väitteen ensimmäinen inkluusio. Kiinnitetään $x \in E_\alpha^k(\tau)$, jolloin Lemman 3.18 ja sen todistuksen mukaan $x \in Q_\sigma^{k+j}$ jollakin $\sigma \in I_{k+j}$ erityisesti, kun $\tau \leq \frac{1}{8A_0^4}\delta^j = C_5\delta^j$. Dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) mukaan siten $\rho(z_\sigma^{k+j}, x) \leq C_1\delta^{k+j}$, jolloin kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(Q_\sigma^{k+j}, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) &\leq A_0\rho(Q_\sigma^{k+j}, z_\sigma^{k+j}) + A_0^2\rho(z_\sigma^{k+j}, x) + A_0^2\rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \\
&\leq 0 + A_0^2C_1\delta^{k+j} + A_0^2\tau\delta^k \\
&\leq A_0^2C_1\delta^{k+j} + A_0^2C_5\delta^j\delta^k \\
&= A_0^2(C_1 + C_5)\delta^{k+j}.
\end{aligned}$$

Valitsemalla luvuksi C_4 yllä oleva kerroin $A_0^2(C_1 + C_5)$ pätee siten $Q_\sigma^{k+j} \in \mathcal{E}_j(Q_\alpha^k)$, mistä seuraa myös $x \in E_j(Q_\alpha^k)$.

Näytetään sitten väitteen jälkimmäinen inkluusio. Kiinnitetään $x \in E_j(Q_\alpha^k)$, jolloin $x \in Q_\beta^{k+j}$ jollakin $Q_\beta^{k+j} \in \mathcal{E}_j(Q_\alpha^k)$. Olkoon $y \in Q_\beta^{k+j}$, jolloin kolmioepäyhtälön (2.4) ja dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) mukaan

$$\begin{aligned}
\rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) &\leq A_0\rho(x, y) + A_0\rho(y, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \\
&\leq A_0C_1\delta^{k+j} + A_0\rho(y, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}).
\end{aligned}$$

Ottamalla saadusta epäyhtälöstä puolittain infimum yli joukon $\{y \in Q_\beta^{k+j}\}$ ja käyttämällä tietoa, että $Q_\beta^{k+j} \in \mathcal{E}_j(Q_\alpha^k)$ ja $C_5\delta^{j+1} \leq \tau$, saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(x, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) &\leq A_0C_1\delta^{k+j} + A_0\rho(Q_\beta^{k+j}, X \setminus \overline{Q_\alpha^k}) \\
&\leq A_0C_1\delta^{k+j} + A_0C_4\delta^{k+j} \\
&= A_0(C_1 + C_4)\delta^{-1}\delta^{j+1}\delta^k \\
&\leq A_0(C_1 + C_4)\delta^{-1}\frac{\tau}{C_5}\delta^k \\
&= C_6\tau\delta^k.
\end{aligned}$$

Koska on lisäksi oltava $x \in Q_\alpha^k$, pätee siten $x \in E_\alpha^k(C_6\tau)$. □

Todistetaan lopulta Lauseen 3.6 väittämä (h). Pienten luvun t arvojen tapauksessa tämän väittämän

$$\mu(E_\alpha^k(t)) \leq C_2t^\eta\mu(Q_\alpha^k) \quad \text{kaikilla } 0 < t \leq C_5$$

todistamiseksi riittää osoittaa, että joillakin vakioilla C ja η pätee

$$\mu(E_j(Q_\alpha^k)) \leq C\delta^{j\eta}\mu(Q_\alpha^k) \quad \text{kaikilla } j \geq 0. \tag{3.28}$$

Nimittäin, jos oletetaan, että (3.28) pätee, niin voidaan valita lukujen j ja t välille yhteys $C_5\delta^{j+1} < t \leq C_5\delta^j$, jolloin joukko $\{j \geq 0\}$ vastaa joukkoa $\{0 < t \leq C_5\}$, ja

Lemman 3.27 sekä mitan μ monotonisuuden mukaan

$$\begin{aligned}\mu(E^k_\alpha(t)) &\le \mu(E_j(Q^k_\alpha))\\ &\le C\delta^{j\eta}\mu(Q^k_\alpha)\\ &= C\delta^{-\eta}\delta^{(j+1)\eta}\mu(Q^k_\alpha)\\ &\le C\delta^{-\eta}(\frac{t}{C_5})^\eta\mu(Q^k_\alpha)\\ &\le C_2t^\eta\mu(Q^k_\alpha),\end{aligned}$$

kun C_2 on valittu suuremmaksi tai yhtä suureksi kuin $C\delta^{-\eta}C_5^{-\eta}$.

Väittämän (3.28) todistamiseksi kiinnitetään ensin suuri indeksi $J \in \mathbb{N}$, jolle pätee

$$\mu(E_J(Q^k_\alpha)) \le \frac{1}{2}\mu(Q^k_\alpha) \quad \text{kaikilla } Q^k_\alpha \in \mathcal{D}. \tag{3.29}$$

Tällainen J on olemassa, sillä Lemman 3.23 mukaan on olemassa $\tau > 0$ siten, että

$$\mu(E^k_\alpha(C_6\tau)) \le \frac{1}{2}\mu(Q^k_\alpha) \quad \text{kaikilla } Q^k_\alpha \in \mathcal{D},$$

ja edelleen Lemman 3.27 perusteella luvusta τ riippuvalla indeksillä j pätee

$$\mu(E_j(Q^k_\alpha)) \le \mu(E^k_\alpha(C_6\tau)) \quad \text{kaikilla } Q^k_\alpha \in \mathcal{D}.$$

Muodostetaan sitten kuutioperheiden $\mathcal{E}_j(Q^k_\alpha)$ avulla uudet kuutioperheet $\mathcal{F}_n(Q^k_\alpha)$ rekursiivisesti siten, että $\mathcal{F}_1(Q^k_\alpha) := \mathcal{E}_J(Q^k_\alpha)$ ja

$$\mathcal{F}_{n+1}(Q^k_\alpha) := \bigcup_{Q^{k+nJ}_\beta \in \mathcal{F}_n(Q^k_\alpha)} \mathcal{E}_J(Q^{k+nJ}_\beta), \quad \text{kun } n \ge 1. \tag{3.30}$$

Perhe $\mathcal{F}_n(Q^k_\alpha)$ koostuu siis sukupolven $k + nJ$ kuutioista, ja sen kuutiot ovat aina lähellä J sukupolvea ylemmän kuution reunaa. Erityisesti pätee

$$\mathcal{E}_{nJ}(Q^k_\alpha) \subset \mathcal{F}_n(Q^k_\alpha) \quad \text{kaikilla } n \ge 1, \tag{3.31}$$

mikä todettakoon induktiolla; Tapaus $n = 1$ seuraa suoraan kuutioperheen $\mathcal{F}_n(Q^k_\alpha)$ määritelmästä. Oletetaan sitten, että $\mathcal{E}_{nJ}(Q^k_\alpha) \subset \mathcal{F}_n(Q^k_\alpha)$ jollakin $n \ge 1$, ja olkoon $Q^{k+(n+1)J}_\gamma \in \mathcal{E}_{(n+1)J}(Q^k_\alpha)$. Tällöin kuutioperheen $\mathcal{E}_j(Q^k_\alpha)$ määritelmän mukaan

$$\rho(Q^{k+(n+1)J}_\gamma, X \setminus \overline{Q^k_\alpha}) \le C_4\delta^{k+(n+1)J},$$

jolloin myös

$$\rho(Q^{k+(n+1)J}_\gamma, X \setminus \overline{Q^{k+nJ}_\beta}) \le C_4\delta^{k+(n+1)J},$$

missä β määräytyy ehdosta $(k+(n+1)J, \gamma) \preceq (k+nJ, \beta) \preceq (k, \alpha)$. Tämä tarkoittaa, että $Q^{k+(n+1)J}_\gamma \in \mathcal{E}_J(Q^{k+nJ}_\beta)$. Toisaalta $Q^{k+nJ}_\beta \in \mathcal{E}_{nJ}(Q^k_\alpha)$, sillä

$$\begin{aligned}\rho(Q^{k+nJ}_\beta, X \setminus \overline{Q^k_\alpha}) &\le \rho(Q^{k+(n+1)J}_\gamma, X \setminus \overline{Q^k_\alpha})\\ &\le C_4\delta^{k+(n+1)J}\\ &\le C_4\delta^{k+nJ}.\end{aligned}$$

Yhdistämällä johdettuihin tuloksiin vielä induktio-oletus $\mathcal{E}_{nJ}(Q_\alpha^k) \subset \mathcal{F}_n(Q_\alpha^k)$ saadaan

$$\begin{aligned} Q_\gamma^{k+(n+1)J} \in \mathcal{E}_J(Q_\beta^{k+nJ}) &\subset \bigcup_{Q_\beta^{k+nJ} \in \mathcal{E}_{nJ}(Q_\alpha^k)} \mathcal{E}_J(Q_\beta^{k+nJ}) \\ &\subset \bigcup_{Q_\beta^{k+nJ} \in \mathcal{F}_n(Q_\alpha^k)} \mathcal{E}_J(Q_\beta^{k+nJ}) = \mathcal{F}_{n+1}(Q_\alpha^k). \end{aligned}$$

Siispä $\mathcal{E}_{(n+1)J}(Q_\alpha^k) \subset \mathcal{F}_{n+1}(Q_\alpha^k)$.

Tuloksen (3.31) mukaan myös $E_{nJ}(Q_\alpha^k) \subset F_n(Q_\alpha^k)$, missä $F_n(Q_\alpha^k)$ on vastaava pistejoukko

$$F_n(Q_\alpha^k) := \{x : x \in Q_\beta^{k+nJ} \text{ jollakin } Q_\beta^{k+nJ} \in \mathcal{F}_n(Q_\alpha^k)\}.$$

Koska kuutiot Q_β^{k+nJ} ovat Lemman 3.8 mukaan pistevieraita, ja määritelmänsä mukaan $E_J(Q_\beta^{k+nJ}) \subset Q_\beta^{k+nJ}$, niin kuutioperheiden $\mathcal{F}_n(Q_\alpha^k)$ rekursiosta (3.30) saadaan mitan μ additiivisuuden perusteella rekursio myös joukkojen $F_n(Q_\alpha^k)$ mitoille: $\mu(F_1(Q_\alpha^k)) = \mu(E_J(Q_\alpha^k))$ ja

$$\mu(F_{n+1}(Q_\alpha^k)) = \sum_{Q_\beta^{k+nJ} \in \mathcal{F}_n(Q_\alpha^k)} \mu(E_J(Q_\beta^{k+nJ})), \quad \text{kun } n \geq 1. \tag{3.32}$$

Soveltamalla rekursiota (3.32) sekä epäyhtälöä (3.29) n kertaa ja huomioimalla, että kunkin perheen $\mathcal{F}_i(Q_\alpha^k)$ kuutiot ovat pistevieraita keskenään, saadaan

$$\begin{aligned} \mu(F_n(Q_\alpha^k)) &= \sum_{Q_\beta^{k+(n-1)J} \in \mathcal{F}_{n-1}(Q_\alpha^k)} \mu(E_J(Q_\beta^{k+(n-1)J})) \\ &\leq \sum_{Q_\beta^{k+(n-1)J} \in \mathcal{F}_{n-1}(Q_\alpha^k)} \frac{1}{2}\mu(Q_\beta^{k+(n-1)J}) \\ &= \frac{1}{2}\mu(F_{n-1}(Q_\alpha^k)) \\ &\vdots \\ &\leq (\frac{1}{2})^{n-1}\mu(F_1(Q_\alpha^k)) \\ &= (\frac{1}{2})^{n-1}\mu(E_J(Q_\alpha^k)) \\ &\leq (\frac{1}{2})^{n-1}\frac{1}{2}\mu(Q_\alpha^k) \\ &= \frac{1}{2^n}\mu(Q_\alpha^k). \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä tulokseen (3.31) sekä mitan μ monotonisuuteen saadaan

$$\mu(E_{nJ}(Q_\alpha^k)) \leq \mu(F_n(Q_\alpha^k)) \leq \frac{1}{2^n}\mu(Q_\alpha^k) = \delta^{\eta nJ}\mu(Q_\alpha^k) \quad \text{kaikilla } n \geq 0, \tag{3.33}$$

jossa on valittu η siten, että $\delta^{\eta J} = \frac{1}{2}$. Kiinnitetään sitten indeksi $j \geq 0$, jolloin se on muotoa $j = nJ + m$, jossa $n \geq 0$ ja $0 \leq m \leq J - 1$. Tällöin joukkojen $E_j(Q^k_\alpha)$ ja $E_{nJ}(Q^k_\alpha)$ sisäkkäisyyden sekä tuloksen (3.33) perusteella

$$\begin{aligned}\mu(E_j(Q^k_\alpha)) &\leq \mu(E_{nJ}(Q^k_\alpha)) \leq \delta^{\eta n J}\mu(Q^k_\alpha) = \delta^{-\eta m}\delta^{\eta j}\mu(Q^k_\alpha) \\ &\leq \delta^{-\eta J}\delta^{\eta j}\mu(Q^k_\alpha) = C\delta^{\eta j}\mu(Q^k_\alpha).\end{aligned}$$

Tämä todistaa väittämän (3.28), eli dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6h) pienten lukujen t tapauksessa.

Suurten lukujen t tapauksessa dyadisten kuutioiden ominaisuus (3.6h), eli

$$\mu(E^k_\alpha(t)) \leq C_2 t^\eta \mu(Q^k_\alpha) \quad \text{kaikilla } t > C_5,$$

seuraa suoraviivaisesti: koska $E^k_\alpha(t) \subset Q^k_\alpha$, riittää mitan μ monotonisuuden perusteella valita C_2 siten, että $1 \leq C_2 t^\eta$, kun $t > C_5$, mikä onnistuu valinnalla $C_2 \geq C_5^{-\eta}$. Näin ollen väittämä (3.6h) on kokonaisuudessaan todistettu ja sen myötä myös koko Lause 3.6.

Todistetaan luvun lopuksi vielä joitakin Lauseesta 3.6 seuraavia hyödyllisiä dyadisille kuutioille päteviä ominaisuuksia. Niistä ensimmäisen mukaan rajoitetun avaruuden tapauksessa suuret kuutiot yhtyvät koko avaruuteen.

Korollaari 3.34. *Avaruus (X, ρ) on rajoitettu, jos ja vain jos on olemassa indeksipari (k, α) siten, että $X = Q^l_\beta$ kaikilla $(l, \beta) \succeq (k, \alpha)$.*

Todistus. Olkoon (X, ρ) rajoitettu, eli $\operatorname{diam}(X) < \infty$. Valitaan indeksi $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $a_0\delta^k > \operatorname{diam}(X)$, ja olkoon $\alpha \in I_k$. Tällöin millä tahansa $x \in X$ pätee

$$\rho(z^k_\alpha, x) \leq \operatorname{diam}(X) < a_0\delta^k,$$

eli $X \subset B(z^k_\alpha, a_0\delta^k)$. Koska dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6b) mukaan $B(z^k_\alpha, a_0\delta^k) \subset Q^k_\alpha$, niin päätellään, että $X \subset Q^k_\alpha$. Dyadisten kuutioiden määritelmästä seuraa edelleen $X \subset Q^l_\beta$ kaikilla $(l, \beta) \succeq (k, \alpha)$. Toisaalta, koska kuutiot ovat joukon X osajoukkoja, pätee väitteen joukoille yhtäsuuruus.

Olkoon sitten olemassa (k, α) siten, että $X = Q^l_\beta$ kaikilla $(l, \beta) \succeq (k, \alpha)$, jolloin erityisesti $X = Q^k_\alpha$. Dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) mukaan pätee $Q^k_\alpha \subset B(z^k_\alpha, C_1\delta^k)$, joten myös $X \subset B(z^k_\alpha, C_1\delta^k)$. Avaruus (X, ρ) on siis rajoitettu. $\square$

Dyadisille kuutioille pätee tuplaavuusominaisuus, jonka mukaan kuution ja sen lapsen mittojen suhteella on yläraja.

Korollaari 3.35. *Olkoon $Q^k_\alpha, Q^{k-1}_\beta \in \mathcal{D}$ siten, että $Q^k_\alpha \subset Q^{k-1}_\beta$. Tällöin on olemassa indekseistä k, α ja β riippumaton vakio C siten, että*

$$\mu(Q^{k-1}_\beta) \leq C\mu(Q^k_\alpha).$$

Todistus. Näytetään ensin, että kuutioiden $Q^k_\alpha, Q^{k-1}_\beta$ keskipisteitä ympäröiville palloille pätee

$$B(z^{k-1}_\beta, C_1\delta^{k-1}) \subset B(z^k_\alpha, A_0\delta^{-1}(1+C_1)\delta^k), \tag{3.36}$$

missä C_1 on vakio dyadisten kuutioiden ominaisuudessa (3.6c). Oletetaan, että $x \in B(z^{k-1}_\beta, C_1\delta^{k-1})$, jolloin kolmioepäyhtälön (2.4) ja osittaisjärjestyksen $\preceq$ ominaisuuden (3.4c) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(z^k_\alpha, x) &\leq A_0\rho(z^k_\alpha, z^{k-1}_\beta) + A_0\rho(z^{k-1}_\beta, x) \\
&< A_0\delta^{k-1} + A_0C_1\delta^{k-1} \\
&= A_0\delta^{-1}(1+C_1)\delta^k,
\end{aligned}$$

eli $x \in B(z^k_\alpha, A_0\delta^{-1}(1+C_1)\delta^k)$.

Nyt dyadisten kuutioiden ominaisuuksien (3.6c) ja (3.6b), inkluusion (3.36) sekä mitan μ monotonisuuden ja tuplaavuuden (2.7) avulla saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}
\mu(Q^{k-1}_\beta) &\leq \mu(B(z^{k-1}_\beta, C_1\delta^{k-1})) \\
&\leq \mu\big(B(z^k_\alpha, A_0\delta^{-1}(1+C_1)\delta^k)\big) \\
&\leq C\mu(B(z^k_\alpha, a_0\delta^k)) \\
&\leq C\mu(Q^k_\alpha),
\end{aligned}$$

missä C on vakioiden $A_0\delta^{-1}(1+C_1)$ ja a_0 suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C = A_1^d$, jossa $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d a_0 \geq A_0\delta^{-1}(1+C_1)$. □

Viimeisenä dyadisten kuutioiden ominaisuutena näytetään, että kuutioiden reunat ovat nollamittaisia.

Korollaari 3.37. *Kaikilla $Q^k_\alpha \in \mathcal{D}$ kuution reunalle ∂Q^k_α pätee $\mu(\partial Q^k_\alpha) = 0$.*

Todistus. Näytetään, että

$$\partial Q^k_\alpha \cap Q^k_\beta = \varnothing \quad \text{kaikilla } Q^k_\alpha, Q^k_\beta \in \mathcal{D}_k. \tag{3.38}$$

Tapaus $\alpha = \beta$ on triviaali, sillä Q^k_α on dyadisena kuutiona avoin joukko, eikä sisällä reunaansa. Tapauksessa $\alpha \neq \beta$ tehdään vastaoletus, että on olemassa $x \in \partial Q^k_\alpha \cap Q^k_\beta$ joillakin $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in I_k$. Koska $x \in \partial Q^k_\alpha$, on oltava $\rho(x, Q^k_\alpha) = 0$. Toisaalta, koska $x \in Q^k_\beta$ ja Q^k_β on dyadisena kuutiona avoin joukko, pätee $B(x,\varepsilon) \subset Q^k_\beta$ jollakin $\varepsilon > 0$, jolloin erityisesti $\rho(x, X \setminus Q^k_\beta) \geq \varepsilon$. Koska $Q^k_\alpha \subset X \setminus Q^k_\beta$ dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6e) mukaan, saadaan näin ollen

$$0 < \varepsilon \leq \rho(x, X \setminus Q^k_\beta) \leq \rho(x, Q^k_\alpha) = 0,$$

eli ristiriita. Tuloksesta (3.38) seuraa mille tahansa $Q^k_\alpha \in \mathcal{D}_k$

$$\partial Q^k_\alpha \subset X \setminus \bigcup_{\beta \in I_k} Q^k_\beta,$$

joten $\mu(\partial Q^k_\alpha) = 0$ dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6g) sekä mitan μ monotonisuuden perusteella. □

Dyadisten kuutioiden konstruktiota olisi mahdollisuus modifioida siten, että kunkin sukupolven kuutiot saataisiin peittämään avaruus X kokonaan, eikä vain nollamittaista joukkoa vaille, mikä onnistuisi sisällyttämällä dyadisiin kuutioihin niiden reunoja mukaan sopivalla logiikalla. Tällaista modifiointia on tehty esimerkiksi lähteissä [2] ja [7]. Usein tästä ei kuitenkaan ole varsinaista hyötyä, sillä dyadisten kuutioiden tyypillisimmät sovellukset liittyvät integraalioperaattoreihin, joihin nollamittaisella joukolla ei ole vaikutusta.

4 Dyadinen Calderón–Zygmundin jako

Tässä luvussa esitetään Calderón–Zygmundin jaon dyadinen versio, joka on yksi dyadisten kuutioiden sovelluksista. Tarkastelun lähtökohtana ovat Määritelmän 2.8 mukainen homogeenisen tyypin avaruus (X, ρ, μ) geometrisilla vakioilla A_0 ja A_1 sekä Lauseen 3.6 mukainen perhe dyadisia kuutioita $\mathcal{D}$. Aloitetaan määrittelemällä integraalikeskiarvo.

Määritelmä 4.1 (Integraalikeskiarvo). Mitallisessa joukossa $A \subset X$ integroituvan funktion f integraalikeskiarvo yli joukon A on

$$\begin{aligned} m_A(f) &= \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, \mathrm{d}\mu, && \text{kun } \mu(A) < \infty \quad \text{ja} \\ m_A(f) &= 0, && \text{kun } \mu(A) = \infty. \end{aligned}$$

Dyadinen Calderón–Zygmundin jako tarjoaa pistevieraan dyadisen kuutioperheen, jonka kuutiot ovat suurimpia mahdollisia, joissa annetun funktion integraalikeskiarvo ylittää halutun suuruisen tason.

Lause 4.2 (Calderón–Zygmund). *Olkoon f ei-negatiivinen integroituva funktio ja $\lambda \geq m_X(f)$ positiivinen luku. Tällöin on olemassa kuutioperhe $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{D}$ siten, että seuraavat väitteet pätevät.*

(a) $Q \cap Q' = \varnothing$ kaikilla $Q, Q' \in \mathcal{F}_\lambda$, joilla $Q \neq Q'$.

(b) $m_Q(f) > \lambda$ kaikilla $Q \in \mathcal{F}_\lambda$.

(c) $m_{Q'}(f) \leq \lambda$ kaikilla $Q' \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_\lambda$, joille $Q' \supset Q$ jollakin $Q \in \mathcal{F}_\lambda$.

(d) $m_{Q'}(f) \leq \lambda$ kaikilla $Q' \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_\lambda$, joille $Q' \cap \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{F}_\lambda} Q \right) = \varnothing$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{H} := \{Q \in \mathcal{D} : m_Q(f) > \lambda\}$. Jos $\mathcal{H} = \varnothing$, voidaan valita myös $\mathcal{F}_\lambda = \varnothing$, jolloin kaikki väitteet (a)–(d) seuraavat triviaalisti. Oletetaan sitten, että $\mathcal{H} \neq \varnothing$. Näytetään, että tällöin jokaisella $Q \in \mathcal{H}$ perhe $\mathcal{H}_Q := \{\tilde{Q} \in \mathcal{H} : \tilde{Q} \supset Q\}$ on äärellinen. Jos avaruus (X, ρ) on rajoitettu, niin Korollaarin 3.34 mukaan $X = Q_0$, jollakin $Q_0 \in \mathcal{D}$, jolloin oletuksen $m_X(f) \leq \lambda$ mukaan $Q_0 \notin \mathcal{H}_Q$. Koska $Q \subset Q_0$, on dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6d) perusteella olemassa ketju

$$Q = Q^k_{\alpha_k} \subset Q^{k-1}_{\alpha_{k-1}} \subset \cdots \subset Q^{l+1}_{\alpha_{l+1}} \subset Q^l_{\alpha_l} = Q_0,$$

jonka kuutiot ainoina sukupolvissa $k, \ldots, l$ sisältävät kuution Q. Tämä ketju on äärellinen ja sisältää perheen $\mathcal{H}_Q$, joten myös $\mathcal{H}_Q$ on äärellinen.

Jos avaruus (X, ρ) on rajoittamaton, niin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6d) perusteella on olemassa kuutioiden ketju

$$Q = Q^k_{\alpha_k} \subset Q^{k-1}_{\alpha_{k-1}} \subset Q^{k-2}_{\alpha_{k-2}} \subset \cdots,$$

jonka kuutiot ovat ainoita, jotka sisältävät kuution Q. Näytetään ensin, että tämän ketjun kuutioiden keskipisteitä ympäröiville palloille pätee

$$B(z^k_{\alpha_k}, \delta^j) \subset B(z^j_{\alpha_j}, A_0(C_1+1)\delta^j), \quad j \leq k. \tag{4.3}$$

Olkoon $j \leq k$ ja $y \in B(z^k_{\alpha_k}, \delta^j)$. Kuution Q keskipisteelle pätee $z^k_{\alpha_k} \in Q^k_{\alpha_k} \subset Q^j_{\alpha_j}$, joten kolmioepäyhtälön (2.4) sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) avulla saadaan

$$\begin{aligned} \rho(z^j_{\alpha_j}, y) &\leq A_0\rho(z^j_{\alpha_j}, z^k_{\alpha_k}) + A_0\rho(z^k_{\alpha_k}, y) \\ &< A_0C_1\delta^j + A_0\delta^j \\ &= A_0(C_1+1)\delta^j, \end{aligned}$$

eli $y \in B(z^j_{\alpha_j}, A_0(C_1+1)\delta^j)$.

Inkluusion (4.3), tuplaavuusehdon (2.7) sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6b) avulla saadaan

$$\begin{aligned} \mu(B(z^k_{\alpha_k}, \delta^j)) &\leq \mu\big(B(z^j_{\alpha_j}, A_0(C_1+1)\delta^j)\big) \\ &\leq A'\mu(B(z^j_{\alpha_j}, a_0\delta^j)) \\ &\leq A'\mu(Q^j_{\alpha_j}), \end{aligned}$$

missä A' on vakioiden $A_0(C_1+1)$ ja a_0 suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $A' = A_1^d$, jossa vakio $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d a_0 \geq A_0(C_1+1)$. Saadusta epäyhtälöstä sekä Lemmasta 2.10 seuraa ketjun kuutioille

$$\lim_{j\to-\infty} \mu(Q^j_{\alpha_j}) \geq \lim_{j\to-\infty} \frac{1}{A'}\mu(B(z^k_{\alpha_k}, \delta^j)) = \frac{1}{A'}\mu(X) = \infty.$$

Merkitään notaation selkeyttämiseksi $Q_i := Q^{k-i}_{\alpha_{k-i}}$, $i \geq 0$, jolloin edellinen raja-arvo saadaan muotoon

$$\lim_{i\to\infty} \mu(Q_i) = \infty, \tag{4.4}$$

jonka avulla saadaan edelleen

$$\lim_{i\to\infty} m_{Q_i}(f) \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\mu(Q_i)} \int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 < \lambda. \tag{4.5}$$

Jostakin indeksistä $n \in \mathbb{N}$ eteenpäin ketjun kuutioille pätee siten $m_{Q_i}(f) < \lambda$, joten

$$\mathcal{H}_Q \subset \{Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\},$$

eli se on äärellinen tässäkin tapauksessa.

Koska kukin $\mathcal{H}_Q$ muodostaa äärellisen kuutioketjun, voidaan siitä valita suurin kuutio. Näin ollen asettamalla

$$\mathcal{F}_\lambda := \{\tilde{Q} \in \mathcal{H} : \tilde{Q} \not\subset Q' \text{ kaikilla } Q' \in \mathcal{H}, Q' \neq \tilde{Q}\}$$

saadaan hyvin määritelty kuutioperhe. Kaikki väitteet (a)–(d) seuraavat suoraan konstruktiosta sekä kuutioiden dyadisuudesta. □

Calderón–Zygmundin jako mahdollistaa funktion jakamisen kahteen osaan, "hyvään" osaan g ja "huonoon" osaan b, joilla yksittäin on käteviä ominaisuuksia.

Korollaari 4.6. *Olkoon f ei-negatiivinen integroituva funktio ja $\lambda \geq m_X(f)$ positiivinen luku. Tällöin f voidaan esittää muodossa $f = g + b$ siten, että*

(a) $|g(x)| \leq C\lambda$ *melkein kaikilla $x \in X$,*

(b) $\displaystyle\int_X b \,\mathrm{d}\mu = 0$,

(c) $\|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$,

missä C on funktiosta f, pisteestä x ja luvusta λ riippumaton vakio.

Todistus. Olkoon $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{D}$ Calderón–Zygmundin jaon 4.2 mukainen kuutioperhe. Valitaan

$$g(x) = f(x), \quad \text{kun } x \in X \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_\lambda} Q,$$
$$g(x) = m_Q(f), \quad \text{kun } x \in Q \in \mathcal{F}_\lambda$$

ja

$$b(x) = \sum_{Q \in \mathcal{F}_\lambda} b_Q(x), \quad \text{jossa } b_Q(x) = (f(x) - m_Q(f))\chi_Q(x),$$

jolloin erityisesti $f(x) = g(x) + b(x)$ kaikilla $x \in X$. Todistetaan ensin väittämä (a) tapauksessa $x \in Q \in \mathcal{F}_\lambda$. Kun tarkastellaan tällaista kuutiota Q^k_α, niin Calderón–Zygmundin jaon ominaisuuden (4.2c) mukaan $m_{Q^{k-1}_\beta}(f) \leq \lambda$ kuution Q^k_α vanhemmalla $Q^{k-1}_\beta \supset Q^k_\alpha$. Siten Korollaaria 3.35 hyödyntäen saadaan arvioitua

$$\begin{aligned} |g(x)| = m_{Q^k_\alpha}(f) &\leq \frac{1}{\mu(Q^k_\alpha)} \int_{Q^{k-1}_\beta} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{\mu(Q^{k-1}_\beta)}{\mu(Q^k_\alpha)} \frac{1}{\mu(Q^{k-1}_\beta)} \int_{Q^{k-1}_\beta} f \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{\mu(Q^{k-1}_\beta)}{\mu(Q^k_\alpha)} \lambda \\ &\leq C\lambda. \end{aligned}$$

Siirrytään sitten väittämän (a) tapaukseen $x \in X \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_\lambda} Q$. Olkoon lisäksi $x \in \hat{X}$ sekä sellainen, jolla Lebesguen differentioituvuuslauseen 2.9 raja-arvotulos pätee. Tällöin pisteen x valinta kattaa käsiteltävän tapauksen nollamittaista joukkoa vaille. Koska $x \in \hat{X}$, sisältyy se jokaisen sukupolven k kuutioon, jolloin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6e) mukaan on olemassa yksikäsitteinen kuutioketju

$$\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{D}, \quad Q_k \subset Q_{k-1}, \quad x \in Q_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z},$$

jonka kuutioiden keskipisteitä merkittäköön vastaavasti z_k. Dyadisten kuutioiden määritelmän 3.5 perusteella jokaisella k on tällöin olemassa indeksi $j \geq k$ siten, että $x \in B(z_j, a_0\delta^j)$. Tätä ominaisuutta soveltamalla yhä suuremmilla indekseillä k muodostuu osajono $(z_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$, jolle pätee $x \in B(z_{j_i}, a_0\delta^{j_i})$. Näytetään, että tälle osajonolle pätee myös

$$B(z_{j_i}, C_1\delta^{j_i}) \subset B(x, A_0(a_0 + C_1)\delta^{j_i}) \quad \text{ja} \quad B(x, \tfrac{1}{8A_0^3}\delta^{j_i}) \subset B(z_{j_i}, C_3\delta^{j_i}), \tag{4.7}$$

missä C_1 on vakio dyadisten kuutioiden ominaisuudesta (3.6c) ja $C_3 = \frac{1}{4A_0^2}$ vakio Lemmasta 3.15. Olkoon ensin $y \in B(z_{j_i}, C_1\delta^{j_i})$, jolloin kolmioepäyhtälön (2.4) sekä tiedon $x \in B(z_{j_i}, a_0\delta^{j_i})$ avulla arvioiden saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &\leq A_0\rho(x, z_{j_i}) + A_0\rho(z_{j_i}, y) \\
&< A_0a_0\delta^{j_i} + A_0C_1\delta^{j_i} \\
&= A_0(a_0 + C_1)\delta^{j_i},
\end{aligned}$$

eli $y \in B(x, A_0(a_0 + C_1)\delta^{j_i})$. Olkoon sitten $y \in B(x, \frac{1}{8A_0^3}\delta^{j_i})$, jolloin vastaavasti kolmioepäyhtälöllä (2.4) arvioimalla sekä huomioimalla Lemman 3.18 todistuksessa tehty rajoitus $a_0 < \frac{1}{8A_0^4}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(z_{j_i}, y) &\leq A_0\rho(z_{j_i}, x) + A_0\rho(x, y) \\
&< A_0a_0\delta^{j_i} + A_0\frac{1}{8A_0^3}\delta^{j_i} \\
&< \big(A_0\frac{1}{8A_0^4} + A_0\frac{1}{8A_0^3}\big)\delta^{j_i} \\
&\leq \frac{1}{4A_0^2}\delta^{j_i} = C_3\delta^{j_i},
\end{aligned}$$

eli $y \in B(z_{j_i}, C_3\delta^{j_i})$.

Pisteen x määrittelystä $x \in X \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} Q$ seuraa Calderón–Zygmundin jaon ominaisuuden (4.2d) mukaan $m_{Q_{j_i}}(f) \leq \lambda$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt saadaan arvioitua Lebesguen differentioituvuuslauseen 2.9, mitan μ tuplaavuuden (2.7) ja monotonisuuden, inkluusioiden (4.7), dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) sekä Lemman 3.15

avulla

$$
\begin{aligned}
|g(x)| = f(x) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\mu(B(x, \frac{1}{8A_0^3}\delta^{j_i}))} \int_{B(x,\frac{1}{8A_0^3}\delta^{j_i})} f \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \frac{C}{\mu\big(B(x, A_0(a_0+C_1)\delta^{j_i})\big)} \int_{B(x,\frac{1}{8A_0^3}\delta^{j_i})} f \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \frac{C}{\mu(B(z_{j_i}, C_1\delta^{j_i}))} \int_{B(z_{j_i}, C_3\delta^{j_i})} f \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \frac{C}{\mu(Q_{j_i})} \int_{Q_{j_i}} f \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq C\lambda,
\end{aligned}
$$

missä C on vakioiden $A_0(a_0 + C_1)$ ja $\frac{1}{8A_0^3}$ suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C = A_1^d$, jossa $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d \frac{1}{8A_0^3} \geq A_0(a_0 + C_1)$. Molemmissa tapauksissa saatiin siis $|g(x)| \leq C\lambda$ melkein kaikilla $x \in X$, joten väittämä (a) on näin ollen todistettu.

Väittämä (b) seuraa suoraviivaisesti laskemalla:

$$
\begin{aligned}
\int_X b \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} \int_X b_Q \,\mathrm{d}\mu = \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} \mu(Q) \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q (f - m_Q(f)) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} \mu(Q)\big(m_Q(f) - m_Q(f)\big) = 0.
\end{aligned}
$$

Samoin väittämä (c) seuraa suoraviivaisesti: reaalilukujen kolmioepäyhtälöllä arvioimalla ja funktion f ei-negatiivisuus huomioimalla saadaan

$$
\begin{aligned}
\|b\|_1 = \int_X |b| \,\mathrm{d}\mu &\leq \int_X \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} |b_Q| \,\mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} \int_Q |f - m_Q(f)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} \Big(\int_Q f \,\mathrm{d}\mu + \int_Q m_Q(f) \,\mathrm{d}\mu \Big) \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{F}_\lambda} \Big(\int_Q f \,\mathrm{d}\mu + \int_Q f \,\mathrm{d}\mu \Big) \\
&\leq 2 \int_X f \,\mathrm{d}\mu = 2\|f\|_1,
\end{aligned}
$$

jossa viimeisessä epäyhtälössä on hyödynnetty perheen $\mathcal{F}_\lambda$ kuutioiden pistevierautta.

□

Tarvittaessa väittämän (4.6a) pätevyysalue saadaan helposti kattamaan myös koko X sen sijaan, että se pätisi vain melkein kaikkialla. Tämä onnistuu siirtämällä funktion f määrittely siinä nollamittaisessa joukossa, jossa (4.6a) ei päde, funktiosta g funktioon b.

Esitetään tämän luvun lopuksi vielä erillinen peiteargumentti, jonka mukaan avoin ja rajoitettu joukko voidaan peittää pistevierailla dyadisilla kuutioilla nollamittaista joukkoa vaille.

Propositio 4.8. *Olkoon $G \subset X$ avoin ja rajoitettu joukko. Tällöin on olemassa pistevieras kuutioperhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ siten, että*

$$G \supset \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q \quad \text{ja} \quad \mu(G \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q) = 0.$$

Todistus. Kiinnitetään $x \in G \cap \hat{X}$, jolloin joukon G avoimuuden perusteella on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset G$. Valitaan indeksi $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $\delta^k < \frac{r}{C_1}$, missä C_1 on vakio dyadisten kuutioiden ominaisuudessa (3.6c). Tällöin oletuksen $x \in \hat{X}$ mukaan $x \in Q_\alpha^k$ jollakin $\alpha \in I_k$. Indeksin k valinnan perusteella pätee $Q_\alpha^k \subset B(x, r) \subset G$, sillä jos $y \in Q_\alpha^k$, niin dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) perusteella

$$\rho(x, y) \leq \operatorname{diam}(Q_\alpha^k) \leq C_1 \delta^k < C_1 \frac{r}{C_1} = r.$$

Merkitään tällaisten kuutioiden perhettä $\mathcal{D}(x) := \{Q \in \mathcal{D} : x \in Q \subset G\}$. Perhe $\mathcal{D}(x)$ on epätyhjä, sillä $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}(x)$, ja muodostaa ketjun, sillä se koostuu pisteen x sisältävistä dyadisista kuutioista. Lisäksi perhe $\mathcal{D}(x)$ on inkluusion $\subset$ suhteen ylhäältä rajoitettu, sillä sen kuutioille pätee $Q \subset G$, jossa G on rajoitettu. Perheestä $\mathcal{D}(x)$ voidaan siten valita inkluusion $\subset$ suhteen maksimaalinen kuutio, jota merkittäköön $Q(x)$.

Asetetaan nyt $\mathcal{G} := \{Q(x) : x \in G \cap \hat{X}\}$. Tällöin perheen $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ kuutiot ovat pareittain pistevieraita niiden maksimaalisuuden vuoksi. Lisäksi erityisesti jokainen $x \in G \cap \hat{X}$ sisältyy kuutioon $Q(x)$ ja toisaalta kaikilla $x \in G \cap \hat{X}$ pätee $Q(x) \subset G$, joten

$$G \cap \hat{X} \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} Q \subset G.$$

Tämä todistaa väitteen, sillä $\mu(G \cap \hat{X}) = \mu(G) < \infty$. $\square$

5 Dyadinen maksimaalifunktio

Tässä luvussa tarkastellaan dyadista maksimaalifunktiota ja vertaillaan sitä perinteisempään Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktioon. Erityisesti näytetään, että näiden maksimaalifunktioiden L^p-normit ovat verrannollisia keskenään. Dyadiselle maksimaalioperaattorille todistetaan myös integraalioperaattoreiden ominaisuudet heikko $(1,1)$ ja vahva (p,p), kun $p > 1$, hyödyntäen dyadisia kuutioita sekä dyadista Calderón–Zygmundin jakoa.

Lähtökohtana ovat jälleen Määritelmän 2.8 mukainen homogeenisen tyypin avaruus (X, ρ, μ) geometrisilla vakioilla A_0 ja A_1 sekä Lauseen 3.6 mukainen perhe dyadisia kuutioita $\mathcal{D}$. Aloitetaan määrittelemällä Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktio sekä sen dyadinen vastine.

Määritelmä 5.1 (Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktio)**.** Olkoon f lokaalisti integroituva funktio. Funktion f epäkeskeinen Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktio pisteessä $x \in X$ on

$$Mf(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \, \mathrm{d}\mu,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien pallojen $B \subset X$, jotka sisältävät pisteen x.

Määritelmä 5.2 (Dyadinen maksimaalifunktio)**.** Olkoon f lokaalisti integroituva funktio. Funktion f dyadinen maksimaalifunktio pisteessä $x \in X$ on

$$M^{\mathrm{dy}} f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| \, \mathrm{d}\mu,$$

missä supremum otetaan yli kaikkien dyadisten kuutioiden $Q \in \mathcal{D}$, jotka sisältävät pisteen x, lisätulkinnalla, että supremum yli tyhjän joukon on 0.

Dyadisen maksimaalioperaattorin ominaisuuksien heikko $(1,1)$ ja vahva (p,p), kun $p > 1$, todistamiseksi tarvitaan ensin aputulos, jonka mukaan dyadisen maksimaalifunktion kutakin jakaumajoukkoa vastaa pistevieras perhe dyadisia kuutioita.

Lemma 5.3. *Olkoon f integroituva funktio ja $\lambda > 0$. Tällöin on olemassa pistevieras kuutioperhe $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ siten, että*

$$\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\} = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q.$$

Todistus. Tarkastellaan erikseen tapaukset $\lambda < m_X(|f|)$ ja $\lambda \geq m_X(|f|)$. Tapaus $\lambda < m_X(|f|)$ on mahdollinen vain, kun $\mu(X) < \infty$, jolloin Lemman 2.10 mukaan avaruus (X, ρ) on rajoitettu ja edelleen Korollaarin 3.34 mukaan $X = Q_\alpha^k$ jollakin kuutiolla $Q_\alpha^k \in \mathcal{D}$. Tässä tapauksessa voidaan valita $\mathcal{F} = \{Q_\alpha^k\}$, jolloin pistevieraus seuraa triviaalisti. Koska lisäksi kaikilla $x \in X$ pätee tällöin

$$M^{\mathrm{dy}} f(x) \geq m_{Q_\alpha^k}(|f|) = m_X(|f|) > \lambda,$$

niin väitteen molemmat joukot ovat koko X, joten väite pätee.

Tapauksessa $\lambda \geq m_X(|f|)$ puolestaan voidaan perheeksi $\mathcal{F}$ valita Calderón–Zygmundin jaon 4.2 mukainen perhe $\mathcal{F}_\lambda$ funktioon $|f|$ sovellettuna, jolloin pistevieraus seuraa ominaisuudesta (4.2a). Näytetään tällä valinnalla väitteen inkluusiot molempiin suuntiin. Olkoon ensin $x \in X$ siten, että $M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda$, jolloin Määritelmän 5.2 perusteella $m_Q(|f|) > \lambda$ jollakin $Q \in \mathcal{D}$, jolla $x \in Q$. Calderón–Zygmundin jaon ominaisuuksista (4.2c–d) sekä kuutioiden dyadisuudesta seuraa tällöin, että on olemassa $Q' \in \mathcal{F}$ siten, että $Q' \supset Q$. Siten $x \in \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q$. Olkoon sitten $x \in Q \in \mathcal{F}$, jolloin Calderón–Zygmundin jaon ominaisuuden (4.2b) mukaan

$$M^{\mathrm{dy}} f(x) \geq m_Q(|f|) > \lambda,$$

eli $x \in \{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}$. Näin ollen väitteen joukkojen yhtäsuuruus pätee tässäkin tapauksessa. □

Dyadinen maksimaalioperaattori on tyypillisten maksimaalioperaattoreiden tapaan rajoitettu, eli se on heikko $(1,1)$ ja vahva (p,p), kun $p > 1$. Tässä dyadisessa tapauksessa heikko $(1,1)$ saavutetaan jopa vakiolla 1.

Lause 5.4. *Olkoon f lokaalisti integroituva funktio.*

(I) Kaikilla $\lambda > 0$ pätee

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

(II) Kaikilla $1 < p \leq \infty$ pätee

$$\|M^{\mathrm{dy}} f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

missä C_p on ainoastaan luvusta p riippuva vakio.

Todistus. Todistetaan ensin väittämä (I). Jos $\|f\|_1 = \infty$, niin väittämä pätee triviaalisti. Oletetaan sitten $\|f\|_1 < \infty$, ja olkoon $\lambda > 0$ ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ Lemman 5.3 mukainen funktioon f ja lukuun λ liittyvä kuutioperhe. Lemman 5.3 todistuksen perusteella kaikilla $Q \in \mathcal{F}$ pätee $m_Q(|f|) > \lambda$, jonka kanssa yhtäpitävä on epäyhtälö

$$\mu(Q) < \frac{1}{\lambda} \int_Q |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Nyt Lemman 5.3, edeltävän epäyhtälön sekä perheen $\mathcal{F}$ pistevierauden avulla saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) &= \sum_{Q \in \mathcal{F}} \mu(Q) < \frac{1}{\lambda} \sum_{Q \in \mathcal{F}} \int_Q |f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\lambda} \|f\|_1,\end{aligned}$$

mikä todistaa väittämän (I).

Todistetaan sitten väittämä (II) käyttäen Marcinkiewiczin interpolaationa tunnettua tekniikkaa. Olkoon $\lambda > 0$, ja jaetaan funktio f kahteen osaan $f = f_1 + f_2$, missä $f_1 = f\chi_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}}$ ja $f_2 = f\chi_{\{|f|\leq\frac{\lambda}{2}\}}$. Tällöin erityisesti $|M^{\mathrm{dy}}f_2(x)| \leq \frac{\lambda}{2}$ kaikilla $x \in X$. Nyt maksimaalioperaattorin M^{dy} subadditiivisuuden, mitan μ monotonisuuden ja subadditiivisuuden sekä jo todistetun väittämän (I) avulla saadaan arvioitua

$$
\begin{aligned}
& \mu(\{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f(x)| > \lambda\}) \\
\leq\ & \mu(\{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f_1(x)| + |M^{\mathrm{dy}}f_2(x)| > \lambda\}) \\
\leq\ & \mu(\{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\
\leq\ & \mu(\{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) + \mu(\{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\
\leq\ & \frac{2}{\lambda}\|f_1\|_1 + 0 \\
=\ & \frac{2}{\lambda}\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} |f| \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

Olkoon sitten $1 < p < \infty$, jolloin käyttämällä reaalifunktioiden integrointisääntöjä sekä Fubinin lausetta saadaan edellä johdetun epäyhtälön avulla arvioitua

$$
\begin{aligned}
\int_X |M^{\mathrm{dy}}f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \int_0^{|M^{\mathrm{dy}}f|} p\lambda^{p-1} \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\{|M^{\mathrm{dy}}f|>\lambda\}} p\lambda^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \\
&= p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1}\mu(\{x \in X : |M^{\mathrm{dy}}f(x)| > \lambda\}) \,\mathrm{d}\lambda \\
&\leq p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1}\Big(\frac{2}{\lambda}\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} |f| \,\mathrm{d}\mu\Big) \,\mathrm{d}\lambda \\
&= 2p\int_X \int_0^{2|f|} \lambda^{p-2}|f| \,\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}\mu \\
&= 2p\int_X \frac{1}{p-1}(2|f|)^{p-1}|f| \,\mathrm{d}\mu \\
&= 2^p\frac{p}{p-1}\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

Korottamalla saatu epäyhtälö puolittain potenssiin $\frac{1}{p}$ saadaan

$$
\|M^{\mathrm{dy}}f\|_p \leq 2\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p = C_p\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.
$$

Ottamalla tästä epäyhtälöstä puolittain raja-arvo, kun $p \to \infty$, seuraa myös tapaus $p = \infty$:

$$
\|M^{\mathrm{dy}}f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty = C_\infty\|f\|_\infty.
$$

Väittämä (II) on näin ollen kokonaisuudessaan todistettu. □

Seuraavaksi keskitytään näyttämään, että Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktio saadaan jakaumajoukkojen mielessä rajoitettua dyadisella maksimaalifunktiolla, mikä vaatii ensin muutaman aputuloksen. Ensimmäisenä aputuloksena tarvitaan edellisen luvun Calderón–Zygmundin jaosta 4.2 versio, jossa funktion integroituvuusoletus on rajoittamattoman avaruuden tapauksessa korvattu heikommalla oletuksella.

Lemma 5.5. *Oletetaan, että avaruus (X, ρ) on rajoittamaton, ja olkoon f ei-negatiivinen lokaalisti integroituva funktio ja λ positiivinen luku siten, että*

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) < \infty.$$

Tällöin on olemassa kuutioperhe $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{D}$ siten, että seuraavat väitteet pätevät.

(a) $Q \cap Q' = \varnothing$ kaikilla $Q, Q' \in \mathcal{F}_\lambda$, joilla $Q \neq Q'$.

(b) $m_Q(f) > \lambda$ kaikilla $Q \in \mathcal{F}_\lambda$.

(c) $m_{Q'}(f) \leq \lambda$ kaikilla $Q' \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_\lambda$, joille $Q' \supset Q$ jollakin $Q \in \mathcal{F}_\lambda$.

(d) $m_{Q'}(f) \leq \lambda$ kaikilla $Q' \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}_\lambda$, joille $Q' \cap \big(\bigcup_{Q \in \mathcal{F}_\lambda} Q \big) = \varnothing$.

Todistus. Lauseen 4.2 rajoittamattoman tapauksen todistus pätee tässä tilanteessa sellaisenaan päätelmää (4.5) lukuun ottamatta, joten ainoastaan se tarvitsee korvata toisenlaisella päättelyllä. Olkoon kaikki tehty kuten Lauseessa 4.2 päätelmän (4.5) alkuun asti, jolloin riittää todistaa, että on olemassa indeksi $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$m_{Q_i}(f) \leq \lambda \quad \text{kaikilla } i > n.$$

Näytetään tämä tekemällä vastaoletus, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $i > n$ siten, että $m_{Q_i}(f) > \lambda$. Vastaoletusta soveltamalla yhä suuremmilla indekseillä n saadaan aidosti kasvava indeksijono $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$, jolle pätee $m_{Q_{i_j}}(f) > \lambda$, $j \in \mathbb{N}$. Määritelmän 5.2 perusteella tästä seuraa erityisesti

$$M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda \quad \text{kaikilla } x \in Q_{i_j}, j \in \mathbb{N},$$

jolloin mitan μ monotonisuuden perusteella pätee

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) \geq \mu(Q_{i_j}) \quad \text{kaikilla } j \in \mathbb{N}.$$

Ottamalla tästä puolittain raja-arvo, kun $j \to \infty$, saadaan tuloksen (4.4) perusteella

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) = \infty,$$

joka on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa. Tämä todistaa väitteen. $\square$

Seuraavaksi esitellään Lemman 5.3 vahvennettu muoto, jossa integroituvuusoletus on korvattu heikommalla oletuksella.

Lemma 5.6. *Olkoon f lokaalisti integroituva funktio ja $\lambda > 0$ siten, että*

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) < \infty.$$

Tällöin on olemassa pistevieras kuutioperhe $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ siten, että

$$\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\} = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q.$$

Todistus. Jos f on integroituva funktio, voidaan perheeksi $\mathcal{F}$ valita Lemman 5.3 mukainen kuutioperhe, jolloin väite seuraa suoraan Lemmasta 5.3. Oletetaan sitten, että f on lokaalisti integroituva funktio, jolle pätee $\|f\|_1 = \infty$. Tämä on mahdollista vain, kun $\mu(X) = \infty$, jolloin Lemman 2.10 perusteella avaruus (X, ρ) on rajoittamaton. Tällöin todistus jatkuu täsmälleen kuten Lemman 5.3 tapauksessa $\lambda \geq m_X(|f|)$, mutta käyttämällä Calderón–Zygmundin jaosta versiota 5.5 version 4.2 sijaan. □

Vielä ennen päätuloksen esittämistä tarvitaan yksi määritelmä sekä yksi aputulos.

Määritelmä 5.7 (R-naapurusto)**.** kuution $Q^k_\alpha \in \mathcal{D}$ R-naapurusto on kuutioperhe

$$\mathcal{N}_R(Q^k_\alpha) := \{Q^k_\beta \in \mathcal{D}_k : \rho(z^k_\alpha, z^k_\beta) \leq R\delta^k\}.$$

Lemma 5.8. *On olemassa vakiot $L < \infty$ ja $R < \infty$ siten, että jokaiselle lokaalisti integroituvalle funktiolle f ja jokaiselle $\lambda > 0$, jotka toteuttavat ehdon*

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) < \infty,$$

pätee

$$\{x \in X : Mf(x) > L\lambda\} \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} \Big(\bigcup_{Q' \in \mathcal{N}_R(Q)} Q' \Big) \cup (X \setminus \hat{X}),$$

missä $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ on Lemman 5.6 mukainen funktioon f ja lukuun λ liittyvä kuutioperhe.

Todistus. Näytetään ensin, että riittää todistaa väite keskeiselle maksimaalifunktiolle

$$M^{\mathrm{c}} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\mu$$

maksimaalifunktion Mf sijaan. Jos $x, y \in X$ ja $\rho(y,x) < r$, niin kolmioepäyhtälön (2.4) perusteella $B(x,r) \subset B(y, 2A_0 r)$ ja $B(y,r) \subset B(x, 2A_0 r)$, jolloin mitan μ

tuplaavuutta (2.7) sekä monotonisuutta hyödyntämällä saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}
Mf(x) &= \sup_{r>0}\sup_{\rho(y,x)<r}\frac{1}{\mu(B(y,r))}\int_{B(y,r)}|f|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \sup_{r>0}\sup_{\rho(y,x)<r}\frac{C}{\mu(B(y,2A_0r))}\int_{B(y,r)}|f|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \sup_{r>0}\sup_{\rho(y,x)<r}\frac{C}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,2A_0r)}|f|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \sup_{r>0}\frac{C^2}{\mu(B(x,2A_0r))}\int_{B(x,2A_0r)}|f|\,\mathrm{d}\mu \\
&= C^2M^{\mathrm{c}}f(x),
\end{aligned}$$

missä C on vakiosta $2A_0$ määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C = A_1^d$, jossa $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d \ge 2A_0$. Näin ollen, jos väite pätee maksimaalifunktiolle $M^{\mathrm{c}}f$ luvulla L, niin se pätee maksimaalifunktiolle Mf luvulla $L' = C^2L$, sillä edellä lasketun epäyhtälön perusteella

$$\{x \in X : Mf(x) > L'\lambda\} \subset \{x \in X : M^{\mathrm{c}}f(x) > L\lambda\}.$$

Todistetaan väite keskeiselle maksimaalifunktiolle $M^{\mathrm{c}}f$. Olkoon $x \in X$ siten, että

$$x \notin \bigcup_{Q\in\mathcal{F}}\Big(\bigcup_{Q'\in\mathcal{N}_R(Q)} Q'\Big) \cup (X \setminus \hat{X}),$$

jossa $R > 0$ on toistaiseksi kiinnittämätön luku, jolloin väitteen todistamiseksi on näytettävä, että $x \notin \{x \in X : M^{\mathrm{c}}f(x) > L\lambda\}$, kunhan luvut R ja L valitaan riittävän suuriksi. Olkoon $r > 0$ ja $j \in \mathbb{Z}$ siten, että $\delta^{j+1} \le r < \delta^j$, ja merkitään

$$\mathcal{G}(x,r) := \{\tilde{Q} \in \mathcal{D}_j : \tilde{Q} \cap B(x,r) \neq \varnothing\}.$$

Aloitetaan näyttämällä, että kaikille $\tilde{Q} \in \mathcal{G}(x,r)$ ja kaikille $Q \in \mathcal{F}$ pätee $\tilde{Q} \not\subset Q$, kunhan R on valittu riittävän suureksi. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $\tilde{Q} \in \mathcal{G}(x,r)$ ja $Q \in \mathcal{F}$ siten, että $\tilde{Q} \subset Q$. Tällöin on kuutioiden dyadisuuden perusteella pädettävä $Q = Q_\alpha^k$ jollakin $k \le j$ ja $\alpha \in I_k$. Olkoon $y \in \tilde{Q} \cap B(x,r)$, jolloin myös $y \in Q$, joten kolmioepäyhtälön (2.4) ja dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\rho(z_\alpha^k, x) &\le A_0\rho(z_\alpha^k, y) + A_0\rho(y,x) \\
&< A_0C_1\delta^k + A_0r \\
&< A_0C_1\delta^k + A_0\delta^j \\
&\le A_0(C_1+1)\delta^k,
\end{aligned}$$

eli $x \in B(z_\alpha^k, A_0(C_1+1)\delta^k)$. Toisaalta, koska oletuksen mukaan $x \notin X \setminus \hat{X}$, niin $x \in Q_\beta^k$ jollakin $\beta \in I_k$. Tällöin kolmioepäyhtälön (2.4), edellä johdetun epäyhtälön sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) avulla saadaan

$$\begin{aligned}\rho(z_\alpha^k, z_\beta^k) &\leq A_0\rho(z_\alpha^k, x) + A_0\rho(x, z_\beta^k) \\ &< A_0A_0(C_1+1)\delta^k + A_0C_1\delta^k \\ &= (A_0^2(C_1+1) + A_0C_1)\delta^k,\end{aligned}$$

joten $Q_\beta^k \in \mathcal{N}_R(Q_\alpha^k)$, kun valitaan $R = A_0^2(C_1+1) + A_0C_1$. Koska päti myös $Q_\alpha^k \in \mathcal{F}$ ja $x \in Q_\beta^k$, niin edelleen

$$x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{F}} \Big(\bigcup_{Q'\in\mathcal{N}_R(Q)} Q'\Big),$$

mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Päätellään siis $\tilde{Q} \not\subset Q$.

Näytetään seuraavaksi, että perheen $\mathcal{G}(x,r)$ kuutioille $\tilde{Q}$ pätee $m_{\tilde{Q}}(|f|) \leq \lambda$: olkoon $\tilde{Q} \in \mathcal{G}(x,r)$, jolloin edellä todistetun perusteella kaikilla $Q \in \mathcal{F}$ pätee $\tilde{Q} \not\subset Q$, joten edelleen Lemman 5.6 sekä Calderón–Zygmundin jaon ominaisuuksien (4.2/5.5c–d) perusteella on oltava $m_{\tilde{Q}}(|f|) \leq \lambda$. Näytetään myös, että perheen $\mathcal{G}(x,r)$ kuutioiden lukumäärä on ylhäältä rajoitettu. Dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) ja tiedon $r < \delta^j$ perusteella

$$\#\mathcal{G}(x,r) \leq \#\{\tilde{z} \in Z_j : B(\tilde{z}, C_1\delta^j) \cap B(x,\delta^j) \neq \varnothing\}.$$

Olkoon $y \in B(\tilde{z}, C_1\delta^j) \cap B(x,\delta^j)$, jolloin kolmioepäyhtälöstä (2.4) seuraa

$$\begin{aligned}\rho(\tilde{z}, x) &\leq A_0\rho(\tilde{z}, y) + A_0\rho(y, x) \\ &< A_0C_1\delta^j + A_0\delta^j \\ &= A_0(C_1+1)\delta^j,\end{aligned}$$

joten edelleen tämän epäyhtälön sekä joukon Z_j valinnan (3.1) ja Lemman 2.12 mukaan

$$\#\mathcal{G}(x,r) \leq \#\{\tilde{z} \in Z_j : \tilde{z} \in B(x, A_0(C_1+1)\delta^j)\} \leq N,$$

jossa $N \in \mathbb{N}$ ei riipu pisteestä x eikä luvusta r. Näytetään vielä, että on olemassa $C < \infty$ siten, että

$$\mu(\tilde{Q}) \leq C\mu(B(x,r)) \quad \text{kaikilla } \tilde{Q} \in \mathcal{G}(x,r).$$

Kiinnitetään $\tilde{Q} \in \mathcal{G}(x,r)$. Olkoon $y \in \tilde{Q}$ ja $z \in \tilde{Q} \cap B(x,r)$, jolloin kolmioepäyhtälön (2.4), dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) ja tiedon $\delta^{j+1} \leq r < \delta^j$ perusteella

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\leq A_0\rho(x,z) + A_0\rho(z,y) \\ &< A_0r + A_0C_1\delta^j \\ &< A_0(1+C_1)\delta^j \\ &\leq A_0(1+C_1)\delta^{-1}r,\end{aligned}$$

eli $\tilde{Q} \subset B(x, A_0(1+C_1)\delta^{-1}r)$. Edelleen mitan μ monotonisuuden ja tuplaavuuden (2.7) avulla arvioiden saadaan

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{Q}) &\leq \mu\big(B(x, A_0(1+C_1)\delta^{-1}r)\big) \\ &\leq C\mu(B(x,r)),\end{aligned}$$

missä C on luvusta $A_0(1+C_1)\delta^{-1}$ määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C = A_1^d$, jossa $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d \geq A_0(1+C_1)\delta^{-1}$.

Lopulta hyödyntämällä perheen $\mathcal{G}(x,r)$ kuutioiden $\tilde{Q}$ pistevierautta ja sitä, että ne peittävät pallon $B(x,r)$ nollamittaista joukkoa vaille, sekä edellä todistettuja epäyhtälöitä $\#\mathcal{G}(x,r) \leq N$, $\mu(\tilde{Q}) \leq C\mu(B(x,r))$ ja $m_{\tilde{Q}}(|f|) \leq \lambda$ saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f|\,\mathrm{d}\mu &= \frac{1}{\mu(B(x,r))}\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{G}(x,r)}\int_{\tilde{Q}\cap B(x,r)} |f|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu(B(x,r))}\sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{G}(x,r)}\int_{\tilde{Q}} |f|\,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{G}(x,r)}\frac{\mu(\tilde{Q})}{\mu(B(x,r))} m_{\tilde{Q}}(|f|) \\ &\leq NC\lambda.\end{aligned}$$

Ottamalla näin saadusta epäyhtälöstä puolittain supremum yli joukon $\{r > 0\}$ saadaan

$$M^{\mathrm{c}}f(x) \leq NC\lambda = L\lambda,$$

joten $x \notin \{x \in X : M^{\mathrm{c}}f(x) > L\lambda\}$. Väite on näin ollen todistettu keskeiselle maksimaalifunktiolle, joten myös alkuperäinen väite seuraa. □

Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktion jakaumajoukkojen mitat saadaan rajoitettua dyadisen maksimaalifunktion jakaumajoukkojen mitoilla, kunhan edellisen jakaumatasoja skaalataan sopivasti suuremmiksi.

Lause 5.9. *On olemassa vakiot $L < \infty$ ja $C < \infty$ siten, että*

$$\mu(\{x \in X : Mf(x) > L\lambda\}) \leq C\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}}f(x) > \lambda\})$$

kaikilla lokaalisti integroituvilla funktioilla f ja kaikilla $\lambda > 0$.

Todistus. Olkoot L ja R Lemman 5.8 mukaiset vakiot. Näytetään ensimmäiseksi, että on olemassa vakio C siten, että

$$\mu\Big(\bigcup_{Q'\in\mathcal{N}_R(Q)} Q'\Big) \leq C\mu(Q) \quad \text{kaikilla } Q \in \mathcal{D}. \tag{5.10}$$

Olkoon $Q \in \mathcal{D}$ ja $y \in Q' \in \mathcal{N}_R(Q)$. Tällöin $Q = Q_\alpha^k$ ja $Q' = Q_\beta^k$ joillakin $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in I_k$, jolloin kolmioepäyhtälön (2.4) ja dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6c) avulla saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}\rho(z_\alpha^k, y) &\leq A_0\rho(z_\alpha^k, z_\beta^k) + A_0\rho(z_\beta^k, y) \\ &\leq A_0R\delta^k + A_0C_1\delta^k \\ &< 2A_0(R+C_1)\delta^k,\end{aligned}$$

joten $Q' \subset B(z_\alpha^k, 2A_0(R+C_1)\delta^k)$. Tämä pätee kaikilla $Q' \in \mathcal{N}_R(Q)$, joten mitan μ monotonisuuden ja tuplaavuuden (2.7) sekä dyadisten kuutioiden ominaisuuden (3.6b) avulla saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{Q'\in\mathcal{N}_R(Q)} Q'\Big) &\le \mu\big(B(z_\alpha^k, 2A_0(R+C_1)\delta^k)\big)\\ &\le C\mu(B(z_\alpha^k, a_0\delta^k))\\ &\le C\mu(Q),\end{aligned}$$

missä C on vakioiden $2A_0(R+C_1)$ ja a_0 suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C = A_1^d$, jossa $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d a_0 \ge 2A_0(R+C_1)$.

Olkoon sitten f lokaalisti integroituva funktio ja $\lambda > 0$. Jos

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) = \infty,$$

niin väite pätee triviaalisti. Oletetaan sitten, että

$$\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}) < \infty,$$

ja olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ Lemman 5.6 mukainen kuutioperhe. Tällöin Lemman 5.8, mitan μ monotonisuuden ja subadditiivisuuden, tuloksen (5.10), perheen $\mathcal{F}$ pistevierauden sekä Lemman 5.6 perusteella

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : Mf(x) > L\lambda\}) &\le \mu\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}}\Big(\bigcup_{Q'\in\mathcal{N}_R(Q)} Q'\Big) \cup (X \setminus \hat{X})\Big)\\ &\le \sum_{Q\in\mathcal{F}} \mu\Big(\bigcup_{Q'\in\mathcal{N}_R(Q)} Q'\Big) + \mu(X \setminus \hat{X})\\ &\le \sum_{Q\in\mathcal{F}} C\mu(Q) + 0\\ &= C\mu\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q\Big)\\ &= C\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}} f(x) > \lambda\}),\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

Edellä todistetusta Lauseesta 5.9 seuraa erityisesti, että Hardy–Littlewoodin maksimaalifunktion L^p-normit saadaan rajoitettua dyadisen maksimaalifunktion L^p-normeilla.

Korollaari 5.11. *Kaikilla $1 \le p \le \infty$ on olemassa vakio $C_p < \infty$ siten, että*

$$\|Mf\|_p \le C_p \|M^{\mathrm{dy}} f\|_p$$

kaikilla lokaalisti integroituvilla funktioilla f.

Todistus. Olkoon $1 \le p < \infty$, f lokaalisti integroituva funktio ja L ja C Lauseen 5.9 mukaiset vakiot. Tällöin reaalifunktioiden integrointisääntöjen, Fubinin lauseen sekä Lauseen 5.9 avulla saadaan arvioitua

$$\begin{aligned}
\int_X (Mf)^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_X L^p \int_0^{\frac{1}{L}Mf} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu \\
&= L^p \int_0^\infty \int_{\{Mf>L\lambda\}} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= pL^p \int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{x \in X : Mf(x) > L\lambda\})\,\mathrm{d}\lambda \\
&\le pL^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} C\mu(\{x \in X : M^{\mathrm{dy}}f(x) > \lambda\})\,\mathrm{d}\lambda \\
&= CL^p \int_0^\infty \int_{\{M^{\mathrm{dy}}f>\lambda\}} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= CL^p \int_X \int_0^{M^{\mathrm{dy}}f} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu \\
&= CL^p \int_X (M^{\mathrm{dy}}f)^p\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Korottamalla näin saatu epäyhtälö puolittain potenssiin $\frac{1}{p}$ seuraa

$$\|Mf\|_p \le C^{\frac{1}{p}} L \|M^{\mathrm{dy}}f\|_p = C_p \|M^{\mathrm{dy}}f\|_p, \quad 1 \le p < \infty.$$

Ottamalla tästä epäyhtälöstä puolittain raja-arvo, kun $p \to \infty$, seuraa myös tapaus $p = \infty$:

$$\|Mf\|_\infty \le L\|M^{\mathrm{dy}}f\|_\infty = C_\infty \|M^{\mathrm{dy}}f\|_\infty.$$

Väite on näin ollen todistettu kaikille $1 \le p \le \infty$. □

Toiseen suuntaan epäyhtälö maksimaalifunktioiden Mf ja $M^{\mathrm{dy}}f$ arvojen välillä pätee jopa pisteittäin, mistä seuraa triviaalisti myös vastaava epäyhtälö L^p-normeille:

$$\|M^{\mathrm{dy}}f\|_p \le C\|Mf\|_p, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{5.12}$$

Propositio 5.13. *On olemassa vakio $C < \infty$ siten, että kaikilla lokaalisti integroituvilla funktioilla f pätee*

$$M^{\mathrm{dy}}f(x) \le CMf(x) \quad \textit{kaikilla } x \in X.$$

Todistus. Olkoon f lokaalisti integroituva funktio. Jos $x \notin \bigcup_{Q\in\mathcal{D}} Q$, niin Määritelmän 5.2 mukaan $M^{\mathrm{dy}}f(x) = 0$, joten väite pätee automaattisesti. Olkoon sitten $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{D}} Q$. Käytetään skaalatuille palloille merkintää $cB := B(z, cr)$, kun $B = B(z,r)$, ja merkitään kutakin $Q = Q^k_\alpha \in \mathcal{D}$ vastaavaa palloa $B_Q := B(z^k_\alpha, \delta^k)$.

Tällöin dyadisten kuutioiden ominaisuuksien (3.6b) ja (3.6c) sekä mitan μ monotonisuuden ja tuplaavuuden (2.7) perusteella

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{dy}} f(x) &= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(a_0 B_Q)} \int_{C_1 B_Q} |f| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \sup_{Q \ni x} \frac{C}{\mu(C_1 B_Q)} \int_{C_1 B_Q} |f| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \sup_{C_1 B \ni x} \frac{C}{\mu(C_1 B)} \int_{C_1 B} |f| \,\mathrm{d}\mu \\ &= CMf(x), \end{aligned}$$

missä C on vakioiden a_0 ja C_1 suhteesta määräytyvä tuplaavuuskerroin, eli $C = A_1^d$, jossa $d \in \mathbb{N}$ määräytyy ehdosta $2^d a_0 \geq C_1$. □

Jos Hardy–Littlewoodin maksimaalioperaattorin ominaisuudet heikko $(1, 1)$ ja vahva (p, p), kun $p > 1$, oletetaan tunnetuiksi, seuraavat vastaavat Lauseen 5.4 mukaiset ominaisuudet dyadiselle maksimaalioperaattorille myös suoraan Propositiosta 5.13. Toisaalta Lauseen 5.9 ja Korollaarin 5.11 perusteella pätee myös kääntäen, että nämä Hardy–Littlewoodin maksimaalioperaattorin ominaisuudet seuraavat vastaavista dyadisen maksimaalioperaattorin ominaisuuksista. Hardy–Littlewoodin maksimaalioperaattorille ominaisuudet heikko $(1, 1)$ ja vahva (p, p), kun $p > 1$, saadaan siis tässä luvussa esitetystä ilman erillistä vaivaa.

Viitteet

[1] H. Aimar, A. Bernardis, B. Iaffei, Comparison of Hardy–Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type, Journal of Mathematical Analysis and Applications 312 (2005) 105–120.

[2] H. Aimar, A. Bernardis, B. Iaffei, Multiresolution approximations and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type, Journal of Approximation Theory 148 (2007) 12–34.

[3] M. Christ, A T(b) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral, Colloquium Mathematicum 60/61 (1990) 601–628.

[4] R.R. Coifman, G. Weiss, Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, Étude de certaines intégrales singulières, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer, 1971.

[5] G. David, Morceaux de Graphes Lipschitziens et Intégrales Singulières sur une Surface, Revista Matemática Iberoamericana 4 (1988), no. 1, 73–114.

[6] J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Springer, 2001.

[7] T. Hytönen, A. Kairema, Systems of dyadic cubes in a doubling metric space, 2011.

[8] S.G. Krantz, A Panorama of Harmonic Analysis, The Mathematical Association of America, 1999.