

# VIBRACIONES Y OSCILACIONES LINEALES



---

# VIBRACIONES Y OSCILACIONES LINEALES

---

**Alejandro E. Martínez Castro**  
**Rafael Muñoz Beltrán**  
Universidad de Granada



**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE ESTRUCTURAS E INGENIERÍA HIDRÁULICA**



*A los alumnos del Grado en  
Ingeniería Civil de la  
Universidad de Granada*



# Índice general

---

Relación de Figuras	IX
Relación de Tablas	XI
Presentación	XIII
<b>1 Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción	2
1.2. Clasificación y definiciones	3
1.3. Problemas de valores iniciales y problemas de contorno	5
1.4. EDO lineales con coeficientes constantes	7
1.5. Método general de resolución de una EDO lineal con coeficientes constantes	9
1.5.1. Método de resolución de la ecuación homogénea	10
1.5.2. Métodos de determinación de la solución particular	13
1.5.3. Ejemplos de resolución completa de EDO lineales con coeficientes constates	19
1.6. Resolución de una EDO lineal mediante paquetes informáticos	20
1.6.1. Resolución con Maxima	20
1.6.2. Resolución con Mathematica	21
1.6.3. Resolución con SymPy	22
<b>2 Vibraciones de Sistemas de un Grado de Libertad</b>	<b>25</b>
	VII

2.1.	Introducción: sistemas de un grado de libertad	25
2.2.	Ecuaciones del movimiento	27
2.3.	Vibraciones libres	28
2.3.1.	Vibraciones libres no amortiguadas	30
2.3.2.	Vibraciones libres amortiguadas	31
2.3.3.	Determinación del amortiguamiento experimentalmente	35
2.4.	Vibraciones forzadas	36
2.4.1.	Vibraciones forzadas no amortiguadas: fuerza armónica	37
2.4.2.	Vibraciones forzadas amortiguadas: fuerza armónica	39
<b>3</b>	<b>Vibraciones de Sistemas de Múltiples Grados de Libertad</b>	<b>47</b>
3.1.	Vibraciones libres en sistemas de múltiples grados de libertad	48
3.1.1.	Solución mediante un cambio de base: análisis modal	50
3.1.2.	Problema de Valores Propios Generalizado	52
3.1.3.	Determinación de la relación entre coordenadas	61
3.2.	Vibraciones forzadas en sistemas de múltiples grados de libertad	62
3.3.	Consideración sobre el amortiguamiento	64
	Referencias	67

# RELACIÓN DE FIGURAS

---

1.1	Página de ayuda de Maxima para Ecuaciones Diferenciales	21
1.2	Ejemplos de resolución con Maxima de EDO lineales de orden 2	22
1.3	Ejemplos de resolución con Mathematica de EDO lineales de orden 2	22
1.4	Ejemplos de resolución con Python (SymPy) de una EDO lineal de orden 2	23
2.1	Modelo de comportamiento elastico amortiguado de una masa con un grado de libertad	26
2.2	Diagrama de cuerpo libre de la masa	27
2.3	Respuesta vibracional libre de 1 gdl sin amortiguamiento. Parámetros $k = 1 \text{ N/m}$ y $m = 1 \text{ Kg}$ . Condiciones iniciales $x = 1 \text{ m}$ y $\dot{x} = 0 \text{ m/s}$ en $t = 0 \text{ s}$ .	31
2.4	Respuesta de vibración libre de 1 gdl sobreamortiguada. Parámetros $k = 1 \text{ N/m}$ , $\zeta = 2$ y $m = 1 \text{ kg}$ . En $t = 0 \text{ s}$ , $x = 1 \text{ m}$ y $\dot{x} = 0 \text{ m/s}$ .	32
2.5	Respuesta de vibración libre de 1 gdl con amortiguamiento crítico. Parámetros $k = 1 \text{ N/m}$ , $\zeta = 1$ y $m = 1 \text{ Kg}$ . En $t = 0 \text{ s}$ , $x = 1 \text{ m}$ y $\dot{x} = 0 \text{ m/s}$ .	33

2.6	Respuesta de vibración libre de 1 gdl con amortiguamiento subcrítico. Parámetros $k = 1$ N/m, $\zeta = 0.05$ y $m = 1$ Kg. En $t = 0$ s, $x = 1$ m y $\dot{x} = 0$ m/s.	34
2.7	Amplitudes $x_1$ y $x_2$ del movimiento. Medida del amortiguamiento experimental	35
2.8	Amplificación dinámica en sistema no amortiguado	39
2.9	Coefficiente de amplificación dinámica DAF	42
2.10	Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para $\zeta = 0.01$	43
2.11	Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para $\zeta = 0.4$	44
2.12	Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para $\zeta = 0.6$	44
2.13	Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para $\zeta = 0.71$	45
2.14	Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para $\zeta = 0.8$	45
3.1	Ejemplos de sistemas de 2 grados de libertad	49
3.2	Diagrama de cuerpo libre. Sistema de 2 masas con 2 muelles en serie	49
3.3	Sistema de 2 GDL. Ejemplo	58
3.4	Sistema de 2 grados de libertad. Vibración forzada	62

## RELACIÓN DE TABLAS

---



# PRESENTACIÓN

---

*A teacher can never truly teach unless he is still learning himself. A lamp can never light another lamp unless it continues to burn its own flame. The teacher who has come to the end of his subject, who has no living traffic with his knowledge but merely repeats his lessons to his students, can only load their minds; he cannot quicken them.*

—Rabindranath Tagore, poeta indio y premio Nobel de Literatura en 1913

Estas notas cubren una serie de temas sobre vibraciones y oscilaciones en sistemas de 1 grado de libertad. El contenido está planteado para la asignatura de Mecánica para Ingenieros, del Grado en Ingeniería Civil de la Universidad de Granada.

Las vibraciones de sistemas de 1 y múltiples grados de libertad son las aplicaciones de la dinámica más cercanas a la ingeniería civil. En efecto, los conceptos de frecuencia fundamental, modos propios, etc, están presentes en el diseño de pasarelas, edificios y puentes. Los fenómenos de amplificación resonante juegan un rol principal en el diseño de estructuras y sistemas esbeltos, como por ejemplo:

- La respuesta vibratoria de un puente de ferrocarril al paso de trenes de alta velocidad.
- Las acciones que un terremoto ejerce sobre una estructura.
- Fenómenos de interacción fluido-estructura (acción del viento en un puente, flotación y agitación en dársenas portuarias, entre otros).
- Estudios experimentales de vibrometría para diagnosticar la salud estructural.

Por todo ello, se anima al estudiante a que acoja *con especial cariño* el estudio de esta última parte de la asignatura. La cual ha quedado ubicada en último lugar no por ser menos importante, sino meramente por una cuestión de desarrollo del programa de la asignatura.

Los contenidos que se estudian en este curso son básicos e introductorios. El estudiante tendrá oportunidad de profundizar en estos temas más adelante, en otros cursos de especialización. Los fundamentos adquiridos en esta asignatura permitirán libertad de estudio y avance. Esa libertad que sólo el conocimiento libre y bien fundamentado permite ofrecer.

Estas notas se introducen con una introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs), de tipo lineal. Es muy posible que este contenido haya sido cursado en otras asignaturas de formación básica matemática. También es posible que, debido al desarrollo curricular de cada estudiante, y a los programas de dobles grados, el estudiante no haya atendido a un curso formal sobre EDOs. El contenido que se ofrece aquí es meramente introductorio, y únicamente pretende presentar al estudiante una serie de recursos propios del análisis matemático que, bien aprendidos, permiten crecer a ritmo rápido en la parte de vibraciones. Por tanto, se anima a que el repaso o estudio de esta parte, con ayuda de unos vídeos creados para estudiantes de mecánica, y que se ofrecen también en la asignatura, sirvan para consolidar los procedimientos de resolución de las EDOs lineales.

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

---

*Differential equations form the basis for the scientific view of the world*

—V.I. Arnold

*If you wish to foresee the future of mathematics, our proper course is to study the history and present condition of the science*

—Henry Poincaré

*However varied may be the imagination of man, nature is a thousand times richer, ... Each of the theories of physics ... presents (partial differential) equations under a new aspect ... without the theories, we should not know partial differential equations*

—Henry Poincaré

En el estudio de problemas de física matemática, se plantean ecuaciones en las que interviene una función  $y(x)$  y sus derivadas. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales*. En este capítulo se introducen los fundamentos

matemáticos implicados en este tipo de ecuaciones. El estudio más general de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales cae fuera del ámbito de este documento. Se recomienda al lector que desee profundizar en este aspecto las siguientes referencias:

- Libro de Lev Elsgoltz [2], de la editorial MIR. Se pueden encontrar algunas ediciones traducidas del ruso, como la de la editorial Mir-Rubiños. En esta obra se muestran los aspectos básicos de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales lineales, y sus diversas formas de integración. También se exponen temas de cálculo variacional.
- Libro de Ecuaciones Diferenciales de la Serie Shaum [1]. Los libros de la serie Shaum son muy prácticos y cubren muy bien las necesidades del estudiante de ingeniería.
- Libro de Murray R. Spiegel [4]. Es un libro clásico, muy claro y enfocado para un estudiante de ingeniería. Contiene tres bloques básicos: i) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ii) sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, iii) Ecuaciones en Derivadas Parciales.
- Libro de T. Myint-U [3]. Trata los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Muy completo y revisado en su cuarta edición. Es un libro muy bien escrito y curioso, por sus numerosas citas de frases de científicos y pensadores en torno a la ciencia y las matemáticas. Algunas de las frases de esta publicación están obtenidas de sus páginas.

## 1.1. Introducción

Al estudiar un fenómeno físico, con frecuencia no es posible encontrar de inmediato las leyes que relacionan las magnitudes que gobiernan dicho fenómeno. Sin embargo, es fácil establecer la dependencia entre las magnitudes básicas y sus derivadas. Las ecuaciones que se plantean, por tanto, contienen como incógnita funciones desconocidas, de las cuales se conocen las relaciones que han de darse entre la función y sus derivadas.

Se denomina *ecuación diferencial* a una ecuación cuya incógnita es una función. La función puede ser escalar o vectorial. En la ecuación aparece la función incógnita, combinada con expresiones que implican sus derivadas. Veamos algunos ejemplos:

1. La ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (1.1)$$

es la ecuación de la desintegración radiactiva, en la cual  $k$  es la constante de desintegración y  $x$  es la cantidad de sustancia no desintegrada que existe en

la muestra en el tiempo  $t$ . La observación física que da origen a esta ecuación consiste en plantear que la velocidad de desintegración (que es el término  $dx/dt$ ), en un instante de tiempo  $t$ , es proporcional, y con signo negativo, a la cantidad (o concentración) de sustancia no desintegrada.

2. La ecuación del movimiento de un punto material puede escribirse como,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}) \quad (1.2)$$

en la cual  $m$  es la masa del punto material,  $\vec{r}$  es el vector de posición, y  $\vec{F}$  representa el vector fuerza dependiente del tiempo  $t$ , el radio-vector  $\vec{r}$  y la velocidad  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ .

3. La ecuación que gobierna la torsión de Saint Venant en una pieza prismática de sección constante es,

$$\frac{\partial^2 \Phi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(y, z)}{\partial z^2} = -2G\Theta \quad (1.3)$$

respecto al sistema de referencia ubicado en el centro de gravedad  $\mathcal{R}\{G; x, y, z\}$  siendo el eje  $x$  colineal con la directriz de la barra, y los ejes  $y$  y  $z$  contenidos en la sección de estudio. La constante  $G$  es el módulo de rigidez tangencial, y  $\Theta$  es el parámetro de deformación angular unitaria de la sección (ángulo de torsión girado por unidad de longitud en la directriz de la pieza).

## 1.2. Clasificación y definiciones

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse, atendiendo al *número de variables* de las que depende la función, como sigue:

**Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** Son aquellas en las cuales la función a determinar depende únicamente de un parámetro. Por ejemplo, en la ecuación de desintegración radiactiva (1.1), la función  $x(t)$  sólo depende de un parámetro, el tiempo  $t$ . También son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, formando un sistema, las que intervienen en el análisis del equilibrio dinámico de un punto material, visto anteriormente en la ecuación (1.2).

**Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)** Son aquellas en las que las funciones dependen de varias variables, y las relaciones se establecen con derivadas parciales respecto a algunas de estas variables. Por ejemplo, la ecuación (1.3) es una ecuación en derivadas parciales.

Se denomina *orden* de una ecuación diferencial al grado de la derivada más alta de la función desconocida que interviene en la ecuación.

### ■ EJEMPLO 1.1 Orden de una ecuación diferencial

- La ecuación de flexión de una viga de Bernoulli-Euler, de módulo de elasticidad  $E$ , momento de inercia constante  $I$ , y carga distribuida por unidad de línea  $p(x)$  (positiva en la dirección  $y$  positiva) es:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad (1.4)$$

es una EDO de cuarto orden, ya que la derivada más alta que aparece es de orden 4.

- La ecuación

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + \cos(x) \frac{dy(x)}{dx} = f(x) \quad (1.5)$$

es una EDO de orden 3.

- La ecuación

$$\frac{\partial^5 u(x, y, z)}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^3 u(x, y, z)}{\partial z^2 \partial y} + u(x, y, z) = 0 \quad (1.6)$$

es una EDP de orden 5.

Se llama *solución* de una ecuación diferencial a una función tal que, al ser sustituida en la ecuación, la convierte en una identidad. Así, para la ecuación (1.1) de desintegración radiactiva, su solución es:

$$x(t) = c e^{-kt} \quad (1.7)$$

siendo  $c$  una constante arbitraria.

Nótese que la solución representada por la ecuación (1.7) depende de una constante  $c$ , la cual ha de ser determinada a partir del conocimiento *inicial* que se tenga sobre la función  $x$ . Si, por ejemplo, se sabe que para el tiempo  $t = t_0$  la cantidad de sustancia que se desintegra vale  $x_0$ , es decir  $x(t_0) = x_0$ , entonces, la determinación de cuánto debe valer la constante  $c$  es inmediata:

$$x(t_0) = c e^{-kt_0} = x_0 \Rightarrow c = x_0 e^{kt_0}$$

quedando,

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)} \quad (1.8)$$

El proceso de determinación de las soluciones de una ecuación diferencial se denomina *integración*. En el ejemplo anterior, la solución es analítica y exacta. En la literatura, existen distintas técnicas de resolución analítica de ecuaciones diferenciales, las cuales sólo son aplicables cuando la estructura de la ecuación es de un determinado tipo. Este tipo da nombre al grupo de ecuaciones que se está estudiando. Así, en el estudio de las EDO es clásico encontrar procedimientos y reglas

de integración aplicables a determinados tipos de ecuaciones. Asimismo, es objeto de estudio de las ecuaciones diferenciales atribuir propiedades a las soluciones aún sin haberlas integrado explícitamente: existencia y unicidad, estabilidad, singularidades, etc. Finalmente, los *métodos numéricos* surgen para resolver ecuaciones diferenciales de forma aproximada, cuando lo que se desea es obtener una predicción basada en una ecuación diferencial. Este último aspecto está íntimamente ligado a la ingeniería y a las ciencias aplicadas. Es por esto que en los estudios de ingeniería, los métodos numéricos (como el método de los elementos finitos) ocupan un lugar destacado dentro de las herramientas matemáticas útiles al ingeniero.

### 1.3. Problemas de valores iniciales y problemas de contorno

En el ejemplo de desintegración radiactiva, la solución definida en la ecuación (1.8) se ha podido determinar imponiendo una *condición inicial*. En general, en el contexto de problemas mecánicos, este tipo de condiciones están asociadas a información que se dispone en un determinado instante de tiempo. Este tipo de problemas se denominan *problemas con condiciones iniciales*.

Existe otro tipo de condición, denominada *condición de contorno*, ya que se establece en el contorno (o frontera) de un dominio. En problemas de mecánica de sólidos, corresponde con líneas, superficies o volúmenes que describen cada tipo de modelización empleada para los sólidos. Así,

- Las vigas se modelizan mediante su línea media, correspondiendo su contorno a los puntos inicial y final de la viga.
- Las placas y láminas se modelizan mediante la *superficie media*, correspondiendo su contorno a las líneas que definen sus fronteras.
- Los sólidos se definen mediante un volumen limitado por las superficies que forman su contorno.

Se denomina *problema de contorno* a la búsqueda de solución de una ecuación diferencial con condiciones definidas en su contorno. Nótese que necesario especificar condiciones en todo el contorno (valores de la función, derivadas direccionales, o condiciones mixtas). Al contrario que ocurre en un problema de valores iniciales, se especifican los valores conocidos de la función en un conjunto de puntos, y no sólo en un instante de tiempo.

#### ■ EJEMPLO 1.2 Viga biempotrada

Anteriormente se vio que la ecuación (1.4) es la ecuación de flexión de vigas de Bernoulli-Euler. Cuando el término de carga es una función constante,  $p(x) = q$ , la ecuación queda:

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (1.9)$$

La integración de esta ecuación es sencilla, ya que basta integrar en  $x$  a cada lado de la igualdad. Integrando una vez, queda:

$$\int \frac{d^4y(x)}{dx^4} dx = \int \frac{q}{EI} dx \Rightarrow \frac{d^3y(x)}{dx^3} = \frac{qx}{EI} + c_1$$

donde  $c_1$  es una constante de integración. Repitiendo el proceso tres veces más se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} &= \frac{qx^2}{2EI} + c_1x + c_2 \\ \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{qx^3}{6EI} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 \\ y(x) &= \frac{qx^4}{24EI} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3x + c_4 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación  $y(x)$  queda determinada en función de cuatro constantes. Precisamente esas cuatro constantes se determinan imponiendo las condiciones de contorno en los extremos. Si la viga está empotrada, tanto en  $x = 0$  como en  $x = l$ , entonces

$$\begin{aligned} y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &= 0 \\ y(l) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} &= 0 \end{aligned}$$

Las cuatro condiciones de contorno definen en este caso un único valor para las constantes  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ . En efecto. Imponiendo que

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

Imponiendo a su vez que el giro es cero en  $x = 0$ ,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

queda por tanto, tras imponer las condiciones de contorno asociadas a  $x = 0$ , que  $y(x)$  debe tener la siguiente expresión,

$$y(x) = \frac{qx^4}{24EI} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2}$$

Imponiendo ahora la primera condición en  $x = l$ ,

$$y(l) = 0 \Rightarrow \frac{ql^4}{24EI} + c_1 \frac{l^3}{6} + c_2 \frac{l^2}{2} = 0 \quad (1.10)$$

y finalmente, imponiendo que el giro en  $x = l$  se anule, tendremos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \frac{ql^3}{6EI} + c_1 \frac{l^2}{2} + c_2 l = 0 \quad (1.11)$$

Ya sólo queda resolver  $c_1$  y  $c_2$  de las ecuaciones (1.10) y (1.11). De la ecuación (1.11) se puede definir la variable  $c_2$  en función de  $c_1$ , como sigue

$$c_2 = -\frac{ql^2}{6EI} - c_1 \frac{l}{2} \quad (1.12)$$

y sustituyendo en la ecuación (1.10) se tiene

$$\frac{ql^4}{24EI} + c_1 \frac{l^3}{6} - \left( \frac{ql^2}{6EI} + c_1 \frac{l}{2} \right) \frac{l^2}{2} \quad (1.13)$$

De esta ecuación puede resolverse directamente  $c_1$  y sustituir en la ecuación (1.12), quedando

$$c_1 = \frac{-ql}{2EI}; c_2 = \frac{ql^2}{12EI}$$

Finalmente, la ecuación de la viga queda:

$$y(x) = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{ql^2x^2}{24EI} \quad (1.14)$$

Con esto, se ha resuelto un primer *problema de contorno* sencillo. Las abscisas  $x = 0$  y  $x = l$  constituyen el contorno del dominio matemático de la viga, que es el conjunto de puntos  $x$  contenido en el intervalo  $(0, l)$  abierto.

Para facilitar la notación, en lo que sigue se empleará la notación simplificada para las derivadas:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$$

En general, el orden de la derivada se escribirá con un superíndice en números romanos, a partir de la derivada tercera; así:

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = y^{IV}(x)$$

#### 1.4. EDO lineales con coeficientes constantes

Se denomina EDO de tipo lineal a aquella en la cual la función y sus derivadas se escriben como combinación lineal de funciones que dependen sólo de la variable independiente. Las función o sus derivadas no se encuentran elevadas a ninguna potencia, ni existen productos entre funciones o sus derivadas.

■ EJEMPLO 1.3 EDO lineal

Las siguientes EDO son lineales:

$$3y'''(x) - 5y''(x) + 8y(x) = 0 \quad (1.15)$$

$$y^{IV}(x) + 12xy''(x) + 8y(x) = 0 \quad (1.16)$$

$$y^{IV}(x) + e^x y''(x) + 8y(x) = x^2 \quad (1.17)$$

Las siguientes ecuaciones no son lineales, por aparecer productos de la función  $y(x)$  o sus derivadas.

$$y'''(x) + 5y'(x)y''(x) - 6y(x) = e^{-x}$$

$$y^{IV}(x) + y^2(x) = 0$$

Finalmente, las siguientes ecuaciones no son lineales, por no ser los coeficientes que acompañan a la función  $y(x)$  o sus derivadas funciones sólo de  $x$ .

$$\cos(x)y'(x) + e^{y(x)x} = 0 \quad (1.18)$$

$$y(x) - \cos(y'(x)) = 3x \quad (1.19)$$

Dentro de las EDO lineales, se distinguen dos tipos:

**EDO lineales con coeficientes constantes** Son aquellas en las que la combinación lineal se realiza mediante coeficientes que son constantes (no dependen de la variable independiente). Por ejemplo, la ecuación (1.15) es de tipo lineal con coeficientes constantes.

**EDO lineales con coeficientes variables** Son aquellas en las que los coeficientes que acompañan a la función o a sus derivadas son funciones que dependen de la variable independiente. Por ejemplo, la ecuación (1.16) es de tipo lineal, pero no es de coeficientes constantes, puesto que la función  $12x$  acompaña a la derivada segunda  $y''(x)$ . Análogamente, la ecuación (1.17) es lineal, pero no de coeficientes constantes. Finalmente, la ecuación (1.15) sí es una EDO lineal con coeficientes constantes.

En general, una EDO es lineal de coeficientes variables si puede escribirse como sigue:

$$a_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) y(x) = f(x) \quad (1.20)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ .

En la notación alternativa para las derivadas, también puede escribirse como sigue:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (1.21)$$

En las ecuaciones anteriores, nótese que se ha escrito en el término de la izquierda la combinación de la función con sus derivadas, y en el término de la derecha se ha dejado aislada a una función  $f(x)$ , que no depende de  $y(x)$ . Si el término  $f(x)$  es cero, la EDO lineal se denomina *homogénea*; en cambio, si el término  $f(x)$  es una función no nula, la EDO lineal se denomina *completa*.

### 1.5. Método general de resolución de una EDO lineal con coeficientes constantes

Esta sección se centra en el estudio práctico del método de resolución general de una EDO lineal con coeficientes constantes. El formato general de una ecuación de este tipo puede escribirse como,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (1.22)$$

siendo  $a_n \dots a_1$  coeficientes constantes, y  $f(x)$  una función que sólo depende de  $x$ .

La solución general de una ecuación de este tipo es suma de dos términos.

$$y(x) = y^h(x) + y^p(x) \quad (1.23)$$

siendo  $y^h(x)$  la solución de la *ecuación homogénea*, e  $y_p(x)$  una solución particular que cumpla la *ecuación completa*.

La ecuación homogénea es idéntica a la original (1.22), pero con  $f(x) = 0$ . Por tanto,

$$a_n [y^h(x)]^{(n)} + a_{n-1} [y^h(x)]^{(n-1)} + \cdots + a_1 [y^h(x)]' + a_0 y^h(x) = 0 \quad (1.24)$$

La solución de (1.24) contendrá las constantes de integración del problema.

La solución particular  $y^p(x)$  es una solución *cualquiera* del siguiente problema,

$$a_n [y^p(x)]^{(n)} + a_{n-1} [y^p(x)]^{(n-1)} + \cdots + a_1 [y^p(x)]' + a_0 y^p(x) = f(x) \quad (1.25)$$

Sólo se exige para  $y^p(x)$  cumplir con (1.25), que es una ecuación igual que la EDO del problema (1.22). No se le exige a  $y^p(x)$  cumplir ningún tipo de condición de contorno. Por lo tanto, no existe una única posibilidad, siendo cualquier  $y^p(x)$  que cumpla (1.25) válida para construir la solución.

Una vez obtenidas  $y^h(x)$  e  $y^p(x)$ , se construirá  $y(x) = y^h(x) + y^p(x)$ , y a ésta función sí se le pueden imponer condiciones de contorno, quedando las constantes libres procedentes de  $y^h(x)$  determinadas. Nótese que  $y^p(x)$  no aporta constantes de integración a la solución  $y(x)$ .

En lo que sigue se verá el método general de construcción de la solución homogénea, y se expondrán métodos para construir la solución particular para determinadas formas de  $f(x)$ .

### 1.5.1. Método de resolución de la ecuación homogénea

El método general consiste en probar como solución una función del tipo,

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad (1.26)$$

siendo  $\lambda$  un parámetro a determinar. Si se asume que  $y(x)$  tiene la forma vista en la ecuación (1.26), sus derivadas se obtienen de forma sencilla. Así, para la primera derivada,

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad (1.27)$$

y en general, para una derivada de orden  $n$ , su expresión viene dada por,

$$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x} \quad (1.28)$$

Sustituyendo la expresión de  $y(x)$  propuesta y la de sus derivadas en la ecuación, se obtiene que los valores de  $\lambda$  buscados son los ceros de un polinomio. Basta resolver los posibles valores de  $\lambda$  en el polinomio para encontrar las funciones que determinan una *base* de funciones en la cual puede escribirse la función  $y(x)$  como combinación lineal de coeficientes constantes desconocidos. Al resolver para  $\lambda$  pueden presentarse varios casos, lo cual origina diferentes estrategias para construir la solución base. Veamos estos casos.

**Caso I: Las raíces de  $\lambda$  son todas reales y distintas de cero** Este es el caso más general, y conduce directamente a una base formada por funciones exponenciales. Veámoslo con un ejemplo.

#### ■ EJEMPLO 1.4 Resolución de la ecuación homogénea, raíces reales

Consideremos la siguiente EDO,

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0 \quad (1.29)$$

Claramente, esta ecuación es una EDO lineal con coeficientes constantes, de tipo homogéneo. Probemos una solución del tipo  $y(x) = e^{\lambda x}$ . En consecuencia, las derivadas de  $y(x)$  se escribirán como sigue,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación (1.29), tendremos

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0$$

agrupando los términos en  $\lambda$  y observando que  $e^{\lambda x}$  es común, tendremos,

$$(\lambda^2 + 3\lambda - 4) e^{\lambda x} = 0$$

La función  $e^{\lambda x}$  no se anula para ningún valor de  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el paréntesis anterior ha de valer cero, quedando la ecuación de un *polinomio característico*,

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

polinomio cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \quad (1.30)$$

Las dos soluciones de  $\lambda$  son

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -4 \quad (1.31)$$

Por tanto, la solución para  $y(x)$  es,

$$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-4x} \quad (1.32)$$

siendo  $c_1$  y  $c_2$  dos constantes, a determinar tras imponer las adecuadas condiciones de contorno.

**Caso II: Las raíces de  $\lambda$  son complejas** Las raíces del polinomio característico pueden ser complejas. Según la definición de la exponencial compleja:

$$e^{a+ib} = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)) \quad (1.33)$$

Construir la solución con exponentes complejos es válido. Sin embargo, también puede definirse la solución en la base de funciones trigonométricas. Veámoslo con un ejemplo.

### ■ EJEMPLO 1.5 Resolución de la ecuación homogénea, raíces complejas

Considere la ecuación

$$y''(x) + 9y(x) = 0 \quad (1.34)$$

Para resolverla, busquemos una solución de la forma  $y(x) = e^{\lambda x}$ ; sustituyendo la función y sus derivadas en la ecuación (1.34) tendremos

$$(\lambda^2 + 9) e^{\lambda x} = 0; \quad (1.35)$$

La solución para  $\lambda$  es:

$$\lambda = \pm 3i \quad (1.36)$$

La solución puede escribirse por tanto como sigue;

$$y(x) = c_1 e^{i3x} + c_2 e^{-i3x} \quad (1.37)$$

La pareja de funciones exponenciales, teniendo en cuenta que en cada una de ellas puede realizarse la expansión (1.33) permite cambiar las funciones de base. En efecto, puede comprobarse, por simple sustitución en la Ecuación (1.34), que la siguiente función es solución también de dicha ecuación:

$$y(x) = d_1 \operatorname{sen}(3x) + d_2 \operatorname{cos}(3x) \quad (1.38)$$

con  $d_1$  y  $d_2$  dos constantes a determinar.

**Caso III: Raíces de  $\lambda$  con el mismo valor, pero múltiples** Otro caso interesante es el de polinomios con raíces dobles o de orden superior. En este caso la solución del polinomio característico tiene sólo una raíz. Para poder completar la base, es necesario añadir funciones adicionales. Estas funciones adicionales se construyen por producto de la base  $\{x, x^2, x^3, \dots\}$ , multiplicada por la solución exponencial para una raíz. Veámoslo con un ejemplo.

#### ■ EJEMPLO 1.6 Resolución de la ecuación homogénea, raíces múltiples

Considere la siguiente EDO,

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \quad (1.39)$$

Probando una función de la forma  $y(x) = e^{\lambda x}$ , se obtendrá:

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 9) e^{\lambda x} = 0 \quad (1.40)$$

Claramente, el término entre paréntesis es el *polinomio característico*, y debe valer cero. Pero este término puede escribirse como sigue:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \quad (1.41)$$

Por tanto, la ecuación característica queda

$$(\lambda - 3)^2 = 0 \quad (1.42)$$

cuya solución es  $\lambda = 3$  *doble*. La función  $y(x) = e^{3x}$  es solución de la ecuación. Pero puesto que la ecuación es de orden 2, necesita 2 funciones para definir una base. Para construir una base, se completa con el producto de potencias en  $x$ , multiplicadas por la propia función  $y(x) = e^{3x}$ , hasta tener tantas funciones de base como orden tiene la ecuación. En este caso, sólo hay que añadir 1 función más, y será la  $y(x) = x e^{3x}$ . Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea será,

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \quad (1.43)$$

**Caso IV: Raíces  $\lambda = 0$  múltiples** Finalmente, puede presentarse una ecuación para la cual la derivada más baja no tenga orden 0. Supóngase el grado de la ecuación  $n$  y sea  $m$  el orden de la derivada menor. En este caso, el polinomio característico presenta  $\lambda = 0$  como solución, con multiplicidad distinta de cero. En tal caso, es necesario completar la base con las funciones  $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$  para tener una base con  $n$  términos.

### ■ EJEMPLO 1.7 Resolución de la ecuación homogénea, derivada más baja de grado superior a 0

Consideremos la siguiente EDO lineal homogénea.

$$y^{IV}(x) + 3y'''(x) - 4y''(x) = 0 \quad (1.44)$$

La búsqueda de una solución del tipo  $y(x) = e^{\lambda x}$  implica la formación del siguiente polinomio característico,

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0 \quad (1.45)$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$(\lambda^2 + 3\lambda - 4)\lambda^2 = 0 \quad (1.46)$$

La primera posibilidad para que la ecuación anterior sea cero es que  $\lambda^2 = 0$ . Esto implica que  $\lambda = 0$ , con multiplicidad 2. Si anulamos el primer paréntesis de la ecuación, entonces

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad (1.47)$$

Esta ecuación ya se resolvió en el Ejemplo 1.4. Sus soluciones son,  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -4$ . Si considerásemos que la solución general fuese,

$$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-4x} \quad (1.48)$$

observaríamos que, siendo la ecuación de grado 4, faltarían 2 términos en la base. Para construir la base, completamos con las funciones generadas por las potencias  $\{1, x\}$ . Por tanto, la solución general quedará como sigue

$$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-4x} + c_3 + c_4 x \quad (1.49)$$

Claramente, esta solución verifica la EDO (1.44) e incluye una base completa.

El resto de situaciones que puede presentarse para resolver la ecuación homogénea incluye una combinación de estos casos.

#### 1.5.2. Métodos de determinación de la solución particular

No existe un método general que permita contruir cualquier solución particular. La búsqueda de una solución particular depende de la forma que tenga la función  $f(x)$ . En esta sección se verán los casos más habituales:

**Término  $f(x)$  polinómico** Consideramos en este caso que la función  $f(x)$  sea un polinomio, de grado total  $m$ :

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \quad (1.50)$$

con  $b_0, b_1, \cdots, b_m$  constantes. En este caso, se prueba una función  $y^p(x)$  que tenga la misma forma que  $f(x)$ .

$$y^p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m \quad (1.51)$$

con  $c_0, c_1, \cdots, c_m$  constantes, las cuales se determinan sustituyendo (1.51) en la EDO que debe cumplir, que es (1.25). Las constantes quedan determinadas, ya que una característica fundamental de la solución particular es que no incluye constantes “libres” de integración.

### ■ EJEMPLO 1.8 Búsqueda de una solución particular cuando $f(x)$ es polinómica

Consideremos la ecuación

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 11 - 4x \quad (1.52)$$

Para construir la solución particular, probamos una función  $y^p(x)$  de la forma

$$y^p(x) = c_0 + c_1x \quad (1.53)$$

Nótese que se ha considerado una expansión lineal, porque  $f(x)$  es lineal. Las derivadas de esta solución particular son:

$$\begin{aligned} [y_p(x)]' &= c_1 \\ [y_p(x)]'' &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$0 + 3c_1 - 4(c_0 + c_1x) = 11 - 4x \quad (1.54)$$

quedando

$$3c_1 - 4c_0 - 4c_1x = 11 - 4x \quad (1.55)$$

Cada potencia de  $x$  de forma independiente produce una ecuación. Escribiremos por tanto una ecuación en la que igualamos todo lo que no lleva potencias de  $x$ , y otra en la que se incluyen los términos que van con  $x$ . Esto es así porque la ecuación anterior es válida, para todo  $x$  incluido en el dominio de definición de la ecuación, y no sólo para valores puntuales de  $x$ .

$$\begin{aligned} 3c_1 - 4c_0 &= 11 \\ -4c_1 &= -4 \end{aligned}$$

La segunda ecuación permite resolver  $c_1 = 1$ ; sustituyendo en la primera, encontramos que  $c_0 = -2$ . Por tanto, la solución particular buscada es

$$y^p(x) = -2 + x \quad (1.56)$$

En efecto, puede comprobarse que la función  $y^p(x)$  de (1.56) verifica (1.52). Esto es así porque, *por construcción*, se ha ajustado una  $y_p(x)$  para que cumpla dicha ecuación. Obsérvese que la expresión (1.56) no incluye constantes no definidas, al contrario de lo que ocurre al resolver para la ecuación homogénea.

El método anteriormente visto necesita una modificación, que se da cuando en la ecuación homogénea correspondiente hay raíces del polinomio característico en  $\lambda = 0$ . Esta situación se da, cuando los coeficientes  $a_0, a_1 \dots a_\alpha$ , con  $\alpha < n$  son nulos. En esta situación  $\lambda = 0$  es una raíz, de multiplicidad  $\alpha$ . La solución particular se busca del tipo:

$$y_p(x) = x^\alpha (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \quad (1.57)$$

análogo al procedimiento de búsqueda de la solución homogénea. Veamos un ejemplo.

■ **EJEMPLO 1.9 Búsqueda de una solución particular cuando  $f(x)$  es polinómica y el valor  $\lambda = 0$  está en la ecuación característica**

Consideremos la siguiente ecuación,

$$y''(x) + y'(x) = x - 2 \quad (1.58)$$

Observamos que la derivada más baja es  $y'(x)$ . Esto indica que  $\lambda = 0$  será un cero con multiplicidad 1 en la ecuación característica. Probemos una solución particular del tipo:

$$y^p(x) = x(c_0 + c_1 x) \quad (1.59)$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación, se obtiene que  $c_0 = -3$ ,  $c_1 = 1/2$ . Por lo tanto,

$$y^p(x) = x\left(-3 + \frac{x}{2}\right) \quad (1.60)$$

**Término  $f(x)$  tipo  $f(x) = e^{kx}(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$**  Vamos a distinguir dos casos. En el primero de ellos,  $k$  no es raíz de la ecuación característica; en el segundo de ellos,  $k$  es raíz de multiplicidad  $\alpha$  de la ecuación característica.

- **Caso I.** El parámetro  $k$  no es raíz de la ecuación característica. En ese caso, la solución particular tiene la misma exponencial, y se plantea un polinomio del mismo tipo que el que incluye el término  $f(x)$ . Es decir,

$$y^p(x) = e^{kx}(c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \quad (1.61)$$

- Caso II (denominado también *resonante*). En este caso, se plantea una solución del mismo tipo que  $f(x)$ , con un polinomio del mismo tipo que el incluido en  $f(x)$ , pero se incluye el producto de  $x^\alpha$ .

$$y^p(x) = x^\alpha e^{kx} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) \quad (1.62)$$

Veamos estos casos en ejemplos.

#### ■ EJEMPLO 1.10

Consideremos la ecuación

$$y''(x) + 9y(x) = e^{5x} \quad (1.63)$$

La ecuación homogénea tiene valores  $\lambda = \pm i3$ , y estos valores son diferentes de 5, que es el parámetro  $k$  de la exponencial. La solución particular tiene la misma forma que la exponencial,

$$y^p(x) = c e^{5x} \quad (1.64)$$

La constante  $c$  se ajusta sustituyendo en la ecuación.

#### ■ EJEMPLO 1.11

Considérese la siguiente ecuación

$$y''(x) + y(x) = e^{3x}(x - 2) \quad (1.65)$$

La solución particular, teniendo en cuenta que la ecuación característica tiene por valores  $\lambda = \pm i$ , distinto de  $k = 3$ , tendrá la forma,

$$y^p(x) = e^{3x}(c_0 + c_1 x) \quad (1.66)$$

Las constantes  $c_0$  y  $c_1$  se determinarán sustituyendo esta solución en la ecuación

#### ■ EJEMPLO 1.12

Consideremos la ecuación

$$y''(x) - y(x) = e^x(x^2 - 1) \quad (1.67)$$

En este caso, las raíces del polinomio característico son  $\lambda = \pm 1$ . Observamos que la raíz  $\lambda = 1$  es la misma que el exponente de la función exponencial, es decir  $k = 1$ . Además, tiene multiplicidad 1. Por tanto, se buscará una solución particular con el siguiente formato,

$$y^p(x) = x e^x (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \quad (1.68)$$

Las constantes  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  se determinarán sustituyendo en la ecuación.

**Término  $f(x)$  tipo trigonométrico** Consideremos en esta sección el caso en el que  $f(x) = A \operatorname{sen}(kx)$ . Este caso es análogo a aquel en el que la función sea  $f(x) = B \operatorname{cos}(kx)$ . En ambos casos,  $A$  y  $B$  son dos constantes. Se distinguen nuevamente dos casos: que  $k$  no sea una de las raíces  $\lambda$  del polinomio característico, o bien que sí lo sea.

En el caso en el que  $k$  no sea una de las raíces  $\lambda$ , probaremos una función del tipo:

$$y^p(x) = c_1 \operatorname{sen}(kx) + c_2 \operatorname{cos}(kx) \quad (1.69)$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinarán sustituyendo en la ecuación e igualando los coeficientes que acompañen, por separado, a las funciones  $\operatorname{sen}(kx)$ , y haciendo nulos los coeficientes en  $\operatorname{cos}(kx)$ .

### ■ EJEMPLO 1.13

Consideremos la ecuación

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2 \operatorname{sen}(5x) \quad (1.70)$$

Las raíces de  $\lambda$  son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = -3$ . Claramente,  $k = 5$  no es ninguna de las raíces. Busquemos una solución de la forma

$$y^p(x) = c_1 \operatorname{sen}(5x) + c_2 \operatorname{cos}(5x) \quad (1.71)$$

Las derivadas primera y segunda son,

$$\begin{aligned} [y^p(x)]' &= 5c_1 \operatorname{cos}(5x) - 5c_2 \operatorname{sen}(5x) \\ [y^p(x)]'' &= -25c_1 \operatorname{sen}(5x) - 25c_2 \operatorname{cos}(5x) \end{aligned}$$

Sustituyendo la función y sus derivadas en la ecuación (1.70), queda

$$\begin{aligned} [-25c_1 \operatorname{sen}(5x) - 25c_2 \operatorname{cos}(5x)] - 5 [5c_1 \operatorname{cos}(5x) - 5c_2 \operatorname{sen}(5x)] \\ + 6 [c_1 \operatorname{sen}(5x) + c_2 \operatorname{cos}(5x)] = 2 \operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$

Agrupando todo lo que va con  $\operatorname{sen}(5x)$  y  $\operatorname{cos}(5x)$ ,

$$[-25c_1 + 25c_2 + 6c_1] \operatorname{sen}(5x) + [-25c_2 - 25c_1 + 6c_2] \operatorname{cos}(5x) = 2 \operatorname{sen}(5x)$$

Quedando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} -19c_1 + 25c_2 &= 2 \\ -25c_1 - 19c_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$c_1 = \frac{-19}{493}, \quad c_2 = \frac{25}{493} \quad (1.72)$$

y por tanto, la solución particular buscada queda,

$$y^p(x) = \frac{-19}{493} \operatorname{sen}(5x) + \frac{25}{493} \operatorname{cos}(5x) \quad (1.73)$$

Otro caso, de gran interés en el contexto de problemas de vibraciones, se da cuando la raíz compleja ( $ik$ ) es precisamente una de las raíces del polinomio característico, de multiplicidad  $\alpha$ . En este caso, denominado *resonante*, la solución particular se construye ponderando la combinación de funciones trigonométrica, por  $x^\alpha$ . Es decir,

$$y^p(x) = x^\alpha [c_1 \operatorname{sen}(kx) + c_2 \operatorname{cos}(kx)] \quad (1.74)$$

#### ■ EJEMPLO 1.14

Considérese la ecuación

$$y''(x) + 16y(x) = 3 \operatorname{sen}(4x) \quad (1.75)$$

Las raíces del polinomio característico son  $\lambda = \pm i4$ . Puesto que 4 está presente en la función  $\operatorname{sen}(4x)$ , la función  $y^p(x)$  debe buscarse de la forma

$$y^p(x) = x [c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \operatorname{cos}(4x)] \quad (1.76)$$

La primera derivada es

$$[y^p(x)]' = [c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \operatorname{cos}(4x)] + x [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] \quad (1.77)$$

y la segunda derivada,

$$[y^p(x)]'' = 2 [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] + x [-c_1 16 \operatorname{sen}(4x) - c_2 16 \operatorname{cos}(4x)] \quad (1.78)$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$2 [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] + x [-c_1 16 \operatorname{sen}(4x) - c_2 16 \operatorname{cos}(4x)] + 16x [c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \operatorname{cos}(4x)] = 3 \operatorname{sen}(4x)$$

El segundo y tercer sumando del término de la izquierda son iguales, y cambiados de signo. Se anulan y por tanto, queda,

$$2 [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] = 3 \operatorname{sen}(4x)$$

Igualando los coeficientes que multiplican a la función  $\operatorname{sen}(4x)$ , y los que multiplican a  $\operatorname{cos}(4x)$ , tendremos dos ecuaciones para  $c_1$  y  $c_2$ .

$$\begin{aligned} 8c_1 &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ -8c_2 &= 3 \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{8} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Por tanto, la solución particular será

$$y^p(x) = -\frac{3}{8}x \cos(4x) \quad (1.80)$$

Existen más casos resueltos en la literatura. Puede consultarse en la bibliografía recomendada, especialmente en [2] otros métodos de construcción de soluciones particulares.

### 1.5.3. Ejemplos de resolución completa de EDO lineales con coeficientes constantes

La solución general de una EDO lineal de coeficientes constantes se construye sumando la solución de la ecuación homogénea, más una solución particular.

$$y(x) = y^h(x) + y^p(x) \quad (1.81)$$

Veamos algunos ejemplos de resolución

#### ■ EJEMPLO 1.15

Considérese la EDO

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 11 - 4x \quad (1.82)$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y^h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} \quad (1.83)$$

Una solución particular es,

$$y^p(x) = x - 2 \quad (1.84)$$

Por tanto,

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + x - 2 \quad (1.85)$$

#### ■ EJEMPLO 1.16

Considérese la EDO

$$y''(x) + y'(x) = x - 2 \quad (1.86)$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y^h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \quad (1.87)$$

Una solución particular es

$$y^p(x) = x \left( \frac{x}{2} - 3 \right) \quad (1.88)$$

Por tanto, la solución de la ecuación es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 + x \left( \frac{x}{2} - 3 \right) \quad (1.89)$$

## 1.6. Resolución de una EDO lineal mediante paquetes informáticos

Una forma práctica de resolver ecuaciones diferenciales consiste en emplear asistentes matemáticos de cálculo simbólico. Estos asistentes tienen implementados los principales métodos de construcción de soluciones, y por tanto, permiten una rápida solución *práctica* eliminando errores. En esta sección se presentarán tres asistentes matemáticos: Maxima, Mathematica y el paquete SymPy, de Python.

### 1.6.1. Resolución con Maxima

Maxima es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices y tensores. Maxima produce resultados de alta precisión usando fracciones exactas, números enteros de precisión arbitraria y números de coma flotante con precisión variable. Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones.

El código fuente de Maxima puede ser compilado en varios sistemas operativos incluyendo Windows, Linux y MacOS X. El código fuente para todos los sistemas y los binarios pre-compilados para Windows y Linux están disponibles en el Administrador de archivos de SourceForge.

Maxima es un descendiente de Macsyma, el legendario sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Este es el único sistema basado en ese programa que está todavía disponible públicamente y con una comunidad activa de usuarios, gracias a la naturaleza del software abierto. Macsyma fue revolucionario en sus días y muchos sistemas posteriores, tales como Maple y Mathematica, se inspiraron en él.

La rama Maxima de Macsyma fue mantenida por William Schelter desde 1982 hasta su muerte en 2001. En 1998 él obtuvo permiso para liberar el código fuente bajo la licencia de software libre GPL. Su esfuerzo y habilidad hicieron posible la subsistencia del sistema Maxima. La comunidad científica le agradece su dedicación voluntaria, su tiempo y conocimientos, para mantener el código original de DOE Macsyma vivo. Después de su muerte se formó un grupo de usuarios y desarrolladores para propagar la audiencia de Maxima.

La Figura 1.1 muestra la ayuda del programa Maxima para resolver EDOs de segundo orden. Se muestra una pantalla obtenida de la compilación para Windows, denominada *WxMaxima*. En la ayuda, se indica que el procedimiento de resolución

está basado en la transformada de Laplace. El resultado final, para las ecuaciones analizadas en esta sección, es independiente del procedimiento empleado para resolverlas.

La Figura 1.2 muestra ejemplos de resolución de EDO lineales de orden 2. Los ejemplos están tomados a su vez de algunos ejemplos vistos anteriormente. El último de ellos es interesante, ya que se observa que la solución propuesta por Maxima para la solución particular difiere en una constante, respecto a (1.60). En efecto, la solución particular no es única, y puede verse que al sustituir la solución particular propuesta por Maxima en la EDO, también cumple la ecuación.

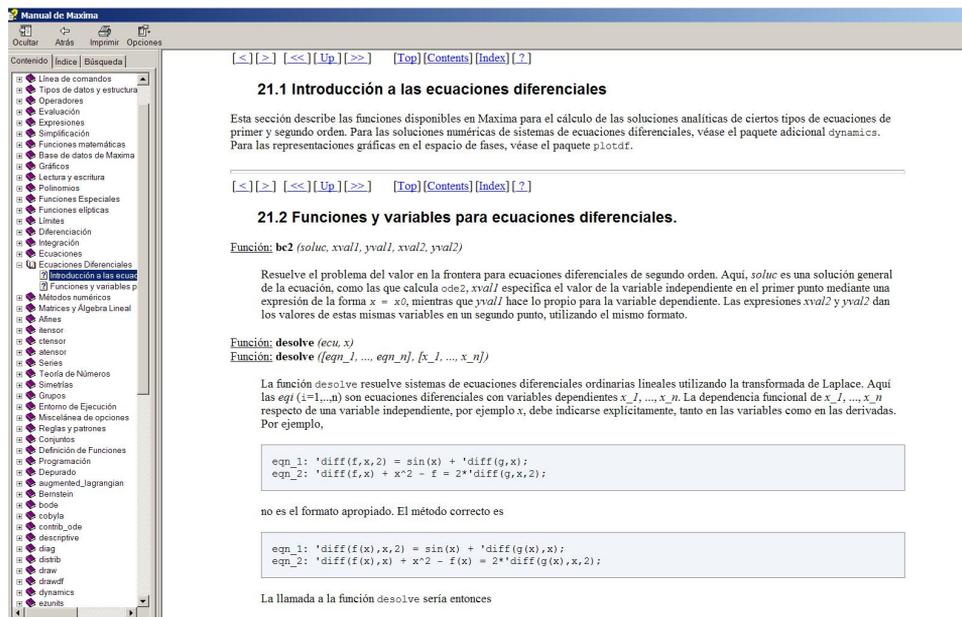
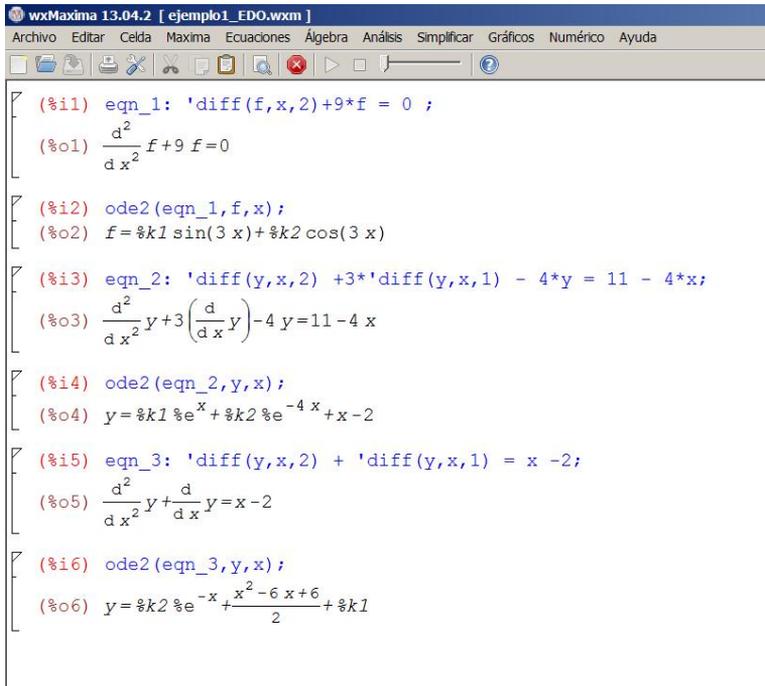


Figura 1.1 Página de ayuda de Maxima para Ecuaciones Diferenciales

## 1.6.2. Resolución con Mathematica

El paquete Mathematica ha sido desarrollado por Wolfram Research, y constituye una excelente opción para cálculo simbólico. No es un programa libre, y es más completo, en general, que *Maxima*. Su desarrollo está fuertemente inspirado en él.

Mathematica permite resolver ecuaciones diferenciales de órdenes más altos. La Figura 1.3 muestra ejemplos de uso de Mathematica para resolver ecuaciones diferenciales. Nótese que en la última ecuación, la solución particular es idéntica a la propuesta en (1.60). Nuevamente, se hace la observación de que la solución particular no es única, y basta construir una cualquiera que cumpla la ecuación diferencial completa.



```

wxMaxima 13.04.2 [ejemplo1_EDO.wxmn]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i1) eqn_1: 'diff(f,x,2)+9*f = 0 ;
(%o1) \frac{d^2}{dx^2} f + 9 f = 0

(%i2) ode2(eq_n_1, f, x);
(%o2) f = %k1 sin(3 x) + %k2 cos(3 x)

(%i3) eqn_2: 'diff(y,x,2) + 3*'diff(y,x,1) - 4*y = 11 - 4*x;
(%o3) \frac{d^2}{dx^2} y + 3 \left( \frac{d}{dx} y \right) - 4 y = 11 - 4 x

(%i4) ode2(eq_n_2, y, x);
(%o4) y = %k1 %e^x + %k2 %e^{-4 x} + x - 2

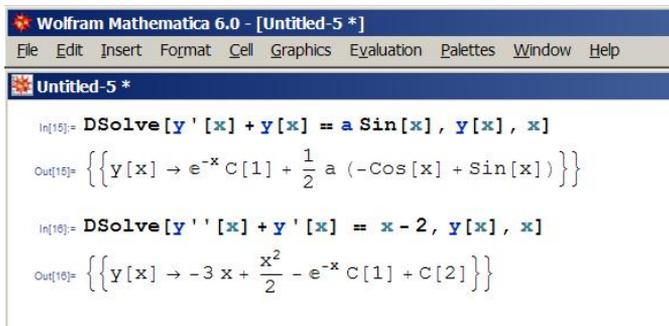
(%i5) eqn_3: 'diff(y,x,2) + 'diff(y,x,1) = x - 2;
(%o5) \frac{d^2}{dx^2} y + \frac{d}{dx} y = x - 2

(%i6) ode2(eq_n_3, y, x);
(%o6) y = %k2 %e^{-x} + \frac{x^2 - 6 x + 6}{2} + %k1

```

Figura 1.2 Ejemplos de resolución con Maxima de EDO lineales de orden 2

Actualmente, Mathematica se encuentra en su versión 10, y es el principal software de análisis simbólico que ofrece el mercado. Pueden consultarse sus características en la página web de Wolfram (<http://www.wolfram.com/mathematica/>).



```

Wolfram Mathematica 6.0 - [Untitled-5 *]
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

Untitled-5 *

In[15]= DSolve[y' [x] + y [x] == a Sin [x], y [x], x]
Out[15]= {{y [x] -> e^{-x} C [1] + \frac{1}{2} a (-Cos [x] + Sin [x])}}

In[16]= DSolve[y' ' [x] + y ' [x] == x - 2, y [x], x]
Out[16]= {{y [x] -> -3 x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} C [1] + C [2]}}

```

Figura 1.3 Ejemplos de resolución con Mathematica de EDO lineales de orden 2

### 1.6.3. Resolución con SymPy

El paquete SymPy dota de habilidades de cálculo simbólico al lenguaje Python. La principal ventaja del uso de Python y su ecosistema es que es software libre, y como tal, carece de los problemas de instalación de Mathematica. Su interfaz es

moderna, sustentada en general mediante el servidor Jupyter (<http://jupyter.org>). Este servidor permite convertir un navegador, como Firefox, en el programa necesario para visualizar y renderizar el contenido de las ecuaciones diferenciales.

La figura 1.4 muestra un ejemplo de resolución, integrado dentro de un cuaderno de Jupyter Notebook.

**Jupyter** EDO\_SymPy Last Checkpoint: a minute ago (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Python [conda root]

**Resolución de una EDO con SymPy**

Autor: Alejandro E. Martínez Castro

Dpto. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica.

In [1]: `from sympy import init_session  
init_session()`

IfPython console for SymPy 1.0 (Python 2.7.12-32-bit) (ground types: python)

These commands were executed:  
`>>> from __future__ import division  
>>> from sympy import *  
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')  
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)  
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)  
>>> init_printing()`

Documentation can be found at <http://docs.sympy.org/1.0/>

A continuación se va a resolver la EDO

$$y'(x) + y(x) = a \sin(x)$$

En primer lugar definimos el símbolo y como función, y a como símbolo.

In [2]: `y = Function('y')  
a = symbols('a')`

A continuación se define la EDO. La forma más directa es definir una ecuación que se va a igualar a cero. No es necesario escribir el signo "igual a". Simplemente, se escribe la ecuación que se va a igualar a cero.

$$y'(x) + y(x) - a \sin(x) = 0$$

In [3]: `eq = y(x).diff(x) + y(x) - a * sin(x)`

Finalmente, se va a resolver la EDO.

In [4]: `dsolve(eq)`

Out [4]:  $y(x) = \left( C_1 + \frac{a}{2} (\sin(x) - \cos(x)) \right) e^{-x}$

**Figura 1.4** Ejemplos de resolución con Python (SymPy) de una EDO lineal de orden 2



## CAPÍTULO 2

---

# VIBRACIONES DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

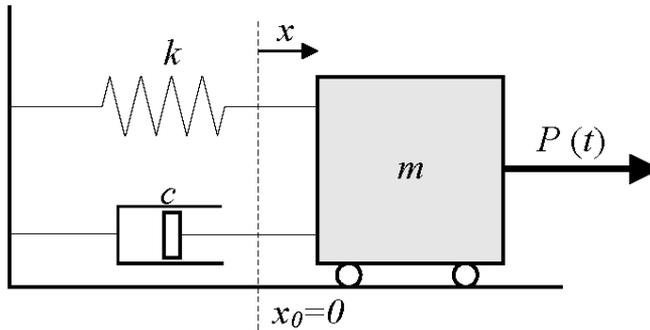
---

### 2.1. Introducción: sistemas de un grado de libertad

Las vibraciones de los sistemas materiales son una parte muy importante de la dinámica, fundamentalmente por su aplicación práctica. Las vibraciones son respuestas del sistema que pueden ser deseadas o no deseadas en función de la aplicación. Sea de una manera u otra, en el diseño del sistema hay que tener en cuenta su respuesta y contemplar la vibración que puede tener el sistema.

Se presenta el estudio vibratorio de sistemas de un grado de libertad como un primer paso hacia la comprensión de las vibraciones en sistemas complejos de más grados de libertad.

Un sistema de un grado de libertad es un sistema en el que un sólo dato elegido adecuadamente, es capaz de determinar biunívocamente cada posición del sistema. Cuando el sistema se encuentra en equilibrio estable, cualquier perturbación pequeña que lo saque del mismo, será contestada con fuerzas del sistema que intentarán restablecer el equilibrio, dado que es estable. Pero la posición de estabilidad no tiene porqué alcanzarse directamente, sino que el sistema oscilará entorno a la misma. El concepto de estabilidad está asociado a la existencia de un campo conservativo de fuerzas que actúa sobre el sistema y que lo atrapa en una posición de



**Figura 2.1** Modelo de comportamiento elástico amortiguado de una masa con un grado de libertad

potencial mínimo. La existencia de fuerzas no conservativas hará que el sistema termine quieto sobre en la posición de equilibrio nuevamente, disipando la energía recibida en la perturbación. Si no hay fuerzas no conservativas (caso ideal), se quedará oscilando entorno a la posición de equilibrio.

Los campos conservativos más habituales en la ingeniería práctica serán, el campo gravitatorio de la tierra (como campo de fuerzas constante), y campos elásticos (campo de fuerzas lineales con el desplazamiento).

Las fuerzas no conservativas más habituales que producen la vuelta a la posición de equilibrio, suelen ser fuerzas que dependen de la velocidad, como las fuerzas de rozamiento o los comportamientos viscosos de los materiales.

Así, se establece un modelo simple de comportamiento de los sistemas para su estudio vibracional que incluye ambos tipos de fuerzas conservativas (constantes y lineales con el desplazamiento) y no conservativas (lineales con la velocidad).

El elemento inferior, debajo del muelle de la figura 2.1, introduce una fuerza proporcional a la velocidad que se opone al movimiento, independientemente de la dirección hacia la que se mueva. Se denomina amortiguador, y es equivalente al comportamiento de un amortiguador que hace pasar un líquido viscoso, como el aceite, de una cámara a otra a través de unos orificios. Se trata de un modelo para representar esa misma realidad u otra diferente pero equivalente: puede estar representando, por ejemplo, el comportamiento visco-elástico de un pilar de hormigón, comportamiento que posee en la realidad. El amortiguador simula el comportamiento viscoso del hormigón, mientras que el muelle simula el comportamiento elástico. Adicionalmente, la masa podrá recibir una fuerza externa cualquiera  $P(t)$ .

El modelo es unidimensional en el sentido de que, posee un grado de libertad, es decir, para determinar la posición de la masa es suficiente con un dato, un parámetro.

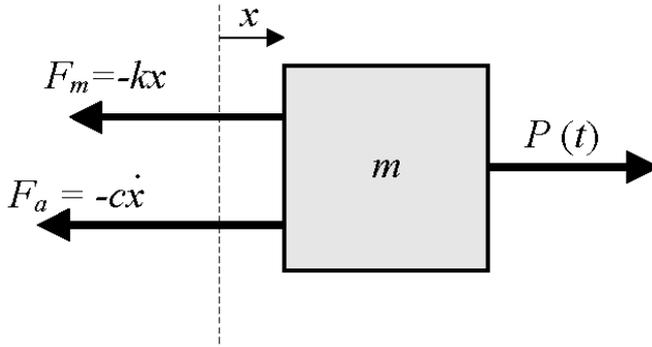


Figura 2.2 Diagrama de cuerpo libre de la masa

## 2.2. Ecuaciones del movimiento

El estudio dinámico de las vibraciones pasa por establecer las ecuaciones del movimiento del sistema.

Sobre la masa actúa un muelle. La fuerza que ejerce el mismo es lineal con el desplazamiento respecto de su posición de equilibrio,

$$F_m = -k(x - x_0) \quad (2.1)$$

Siendo  $x_0$  la posición  $x$  en el caso de que el muelle esté relajado, es decir, es su posición de equilibrio, de mínima energía potencial. Lo habitual es colocar el origen de  $x$  en esa posición, lo que hace que  $x_0 = 0$ , y en tal caso  $F_m = -kx$ . La constante  $k$  es la constante de rigidez del muelle.

También actúa un amortiguador sobre la masa, ejerciendo una fuerza proporcional a la velocidad,

$$F_a = -cv = -c\dot{x} \quad (2.2)$$

La constante  $c$ , denominada coeficiente de amortiguamiento, indica el nivel de amortiguamiento existente, más alto cuanto mayor sea la constante.

El estudio dinámico se puede realizar de varias maneras, pero se elige las leyes fundamentales de la dinámica de la partícula, concretamente al ley fundamental del momento lineal (ver Figura 2.2),

$$\sum F_{\text{exteriores}} = ma(t) \longrightarrow F_m(t) + F_a(t) + P(t) = ma(t) \quad (2.3)$$

Siendo  $\ddot{x} = a(t)$ . Sustituyendo la expresión de las fuerzas en la ecuación,

$$-kx - c\dot{x} + P(t) = m\ddot{x} \quad (2.4)$$

Obteniéndose la siguiente ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, que constituye la ecuación del movimiento,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (2.5)$$

### 2.3. Vibraciones libres

La acción  $P(t)$  fuerza al sistema a moverse de una manera que no es la natural que el propio sistema impondría en su evolución temporal. Por ello se denomina vibración libre al caso en el que esta fuerza  $P(t)$  es nula permitiendo la libre evolución del sistema de manera no forzada. La ecuación queda,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.6)$$

siendo una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes. Según indica la teoría de cálculo diferencial, este tipo de ecuaciones, muy comunes en la física, posee una solución que es la siguiente función exponencial, aunque sus coeficientes pueden ser complejos,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} \quad (2.7)$$

Las derivadas de la solución propuesta son,

$$\dot{x}(t) = C_1 \lambda e^{\lambda t} \quad (2.8)$$

$$\ddot{x}(t) = C_1 \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (2.9)$$

Sustituyendo esta solución genérica en la ecuación diferencial se podrán calcular sus coeficientes,

$$C_1 m \lambda^2 e^{\lambda t} + C_1 c \lambda e^{\lambda t} + C_1 k e^{\lambda t} = 0 \quad (2.10)$$

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0 \quad (2.11)$$

quedando la *ecuación característica* en función de  $\lambda$ . Este parámetro debe cumplir esta ecuación de segundo grado en este caso, por ser la ecuación diferencial de segundo grado. Los valores  $\lambda$ , raíces de la ecuación característica, son los que hacen que la exponencial propuesta sea la solución de la ecuación diferencial. Así,

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2.12)$$

Se definen los siguientes parámetros,

- Frecuencia angular natural o propia del sistema:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Esta frecuencia es angular, y se expresa en rad/s. A partir de este parámetro puede calcularse el periodo natural del sistema,  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  (se mide en segundos), y la frecuencia natural del sistema,  $f_0 = 1/T_0$ , que se mide en hercios (Hz).
- Tasa de amortiguamiento:  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_0}$ .

de esta forma, el parámetro  $\lambda$  queda,

$$\lambda = -\zeta \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.13)$$

dando lugar a dos soluciones,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Son valores que dependen de los parámetros mecánicos del sistema,  $m, k, c$ . Dado que hay dos valores habrá dos soluciones diferentes. Como es una ecuación diferencial lineal, cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación, también es solución de la ecuación. Por lo tanto, de forma general, se toma como solución la combinación lineal de ambas soluciones,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.14)$$

Los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , se calculan aplicando las condiciones iniciales del sistema, tanto en desplazamiento como en velocidad. El mismo sistema evolucionará de forma diferente dependiendo de dónde esté el sistema en  $t = 0$ , y con qué velocidad se esté moviendo. Esa información la incorporan al problema las constantes  $C$ . Como se utilizarán desplazamientos y velocidades reales (no imaginarias), serán constantes reales.

Si se tuviera el caso de que la ecuación característica diera lugar a una raíz doble ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ), no valdría la combinación lineal anterior como solución. En ese caso, el término  $t e^{\lambda t}$  también es solución, cuestión que se comprueba,

$$x(t) = C_2 t e^{\lambda t} \quad (2.15)$$

$$\dot{x}(t) = C_2 (1 + \lambda t) e^{\lambda t} \quad (2.16)$$

$$\ddot{x}(t) = C_2 (2\lambda + \lambda^2 t) e^{\lambda t} \quad (2.17)$$

expresiones que si se sustituyen en la ecuación debe poderse calcular la raíz doble,

$$2m\lambda + c + (m\lambda^2 + c\lambda + k)t = 0 \quad (2.18)$$

$$\text{Simultáneamente: } \begin{cases} 2m\lambda + c = 0 & \lambda = \frac{-c}{2m} \\ m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 & \text{ec. característica anterior} \end{cases} \quad (2.19)$$

Para que la raíz sea doble, el discriminante de la solución de la ecuación característica debe ser nulo, lo que implica que  $\zeta = 1 = \frac{c}{2m\omega_0}$ , es decir,  $c = 2m\omega_0 = c_c$ . A este valor del amortiguamiento se le denomina crítico,  $c_c$ .

En tal caso,

$$\lambda = \frac{-c_c}{2m} = -\frac{2m\omega_0}{2m} = -\omega_0 \quad (2.20)$$

La definición del amortiguamiento crítico como  $c_c = 2m\omega_0$ , lleva a una nueva visión de la tasa de amortiguamiento  $\zeta$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (2.21)$$

siendo mayor que 1 si el amortiguamiento del sistema supera al crítico y menor que 1 si queda por debajo. El amortiguamiento crítico depende exclusivamente de los valores  $k$  y  $m$ , por lo tanto la tasa de amortiguamiento indica si el amortiguamiento  $c$  supera al crítico del sistema  $c_c$  o no. Tal y como se verá, dará lugar a respuestas diferentes del sistema en cada caso.

### 2.3.1. Vibraciones libres no amortiguadas

El caso de vibración libre no amortiguada, implica que el coeficiente de amortiguamiento es nulo, pues no existe amortiguación.

$$c = 0 \longrightarrow \zeta = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (2.22)$$

siendo  $i$  la variable imaginaria.

Así, la solución de la ecuación diferencial será,

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (2.23)$$

Teniendo en cuenta la expresión de Euler sobre la exponencial compleja,

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \quad (2.24)$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha \quad (2.25)$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega_0 t) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\omega_0 t) \quad (2.26)$$

En el caso más general,  $C_1$  y  $C_2$  podrían ser constantes complejas, pero en este caso son conjugadas, por lo tanto los paréntesis son números reales, y se denominan por comodidad  $C_3$  y  $C_4$

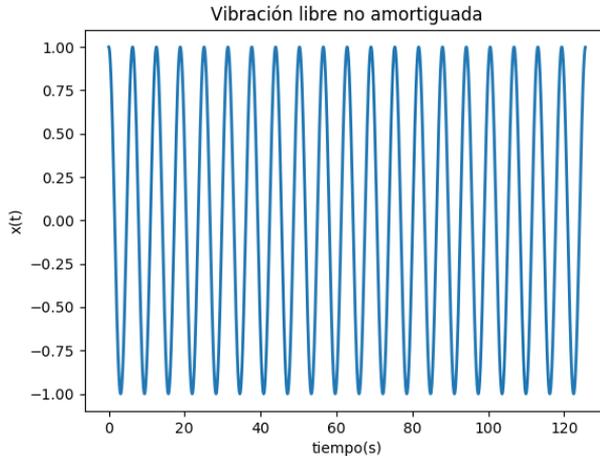
$$x(t) = C_3 \cos(\omega_0 t) + iC_4 \operatorname{sen}(\omega_0 t) \quad (2.27)$$

Esta ecuación representa un movimiento armónico simple de frecuencia natural  $\omega_0$  que no decae. Puede ser expresado de la siguiente forma,

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.28)$$

Siendo  $A$  la amplitud de movimiento, y  $\varphi$  el desfase respecto del instante  $t = 0$ . La respuesta se puede observar en la Figura 2.3. Recuérdese que un movimiento armónico simple es asimilable a la proyección de un movimiento circular uniforme sobre uno de sus diámetros, con velocidad angular  $\omega_0$  e inicio del movimiento en  $t = 0$  en la posición  $\varphi$  radianes. Para ver la equivalencia de las expresiones anteriores, se desarrolla la suma del seno,

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t) \cos \varphi + A \operatorname{sen} \varphi \cos(\omega_0 t) = \underbrace{(A \cos \varphi)}_{C_3} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \underbrace{(A \operatorname{sen} \varphi)}_{C_4} \cos(\omega_0 t) \quad (2.29)$$



**Figura 2.3** Respuesta vibracional libre de 1 gdl sin amortiguamiento. Parámetros  $k = 1$  N/m y  $m = 1$  Kg. Condiciones iniciales  $x = 1$  m y  $\dot{x} = 0$  m/s en  $t = 0$  s.

por lo que las expresiones son equivalentes, siendo,

$$C_3 = A \cos \varphi \quad (2.30)$$

$$C_4 = A \sin \varphi \quad (2.31)$$

$$A = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \quad (2.32)$$

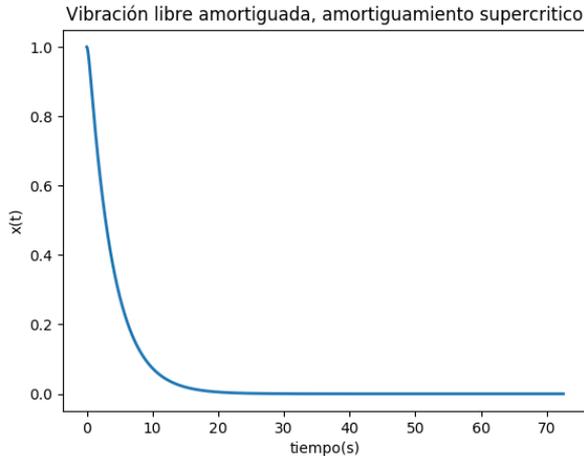
$$\tan \varphi = \frac{C_4}{C_3} \quad (2.33)$$

### 2.3.2. Vibraciones libres amortiguadas

Si existe amortiguamiento, la constante  $c$ , que de por sí, es positiva por oponerse siempre a una variación de la velocidad, tomará su valor, y en función de cuánto sea este en relación con los parámetros dinámicos del sistema dará lugar a respuestas diferentes.

Recuérdese que  $\zeta = \frac{c}{c_c}$ , siendo  $c_c = 2m\omega_0$  el llamado amortiguamiento crítico. Todo dependerá de si el amortiguamiento es inferior, igual o superior al crítico, valor que depende de las otras constantes del sistema, en definitiva, de  $m$  y  $k$ .

**2.3.2.1. Sobreamortiguamiento** Se trata del caso en el que  $\zeta > 1$ , es decir,  $c > c_c$ . Se trata de un amortiguamiento tan fuerte que se opone a la variación de la velocidad de tal manera que impide la oscilación del sistema. El sistema llegará a la posición de equilibrio lentamente sin oscilar, y como se verá, esta aproximación será realizada mediante una función exponencial negativa, asintótica con  $x = 0$  en el tiempo.



**Figura 2.4** Respuesta de vibración libre de 1 gdl sobreamortiguada. Parámetros  $k = 1$  N/m,  $\zeta = 2$  y  $m = 1$  kg. En  $t = 0$  s,  $x = 1$  m y  $\dot{x} = 0$  m/s.

Un ejemplo práctico, sería la reacción de una almohada viscoelástica. Después de toda la noche con la cabeza apoyada, al cesar el peso, la almohada inicia una lenta recuperación de su forma original, primero más rápidamente y a medida que pasa el tiempo más lentamente. Al cabo de un largo periodo de tiempo la almohada recupera totalmente su forma. Al hacerlo no ha habido oscilación, ha sido un lento acercamiento hacia la posición de equilibrio si sobrepasarla. El comportamiento elástico del material es evidente, pues la almohada recupera su forma inicial, pero su elevado comportamiento viscoso es el causante de que la recuperación sea muy lenta, y además sin oscilación.

Cuando hay sobreamortiguamiento, las raíces de la ecuación características son,

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.34)$$

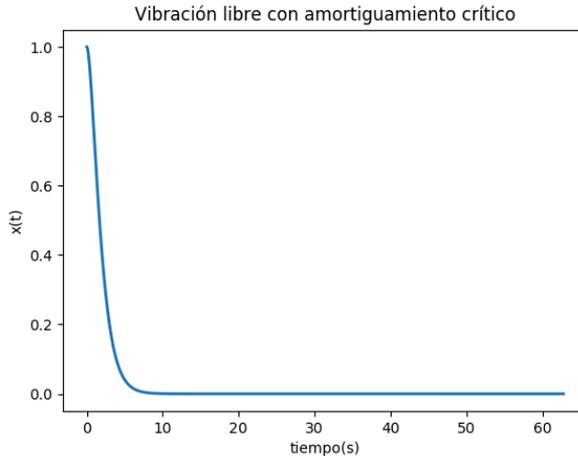
Se trata de raíces reales, dado que el discriminante es positivo. La solución, tal y como se ha visto, es la del caso más general,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.35)$$

Como el valor de la raíz cuadrada del discriminante va a ser menor que  $\zeta$ , se puede observar en la expresión que las raíces  $\lambda$  van a ser ambas, además de reales, negativas. Se puede ver mejor modificando la expresión,

$$\lambda_{1,2} = \zeta \omega_0 \left( -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \right) \quad (2.36)$$

Si  $\zeta > 1$ , las raíces son siempre negativas, lo que tiene como consecuencia que las exponenciales de la solución de la ecuación diferencial son negativas, y por



**Figura 2.5** Respuesta de vibración libre de 1 gdl con amortiguamiento crítico. Parámetros  $k = 1$  N/m,  $\zeta = 1$  y  $m = 1$  Kg. En  $t = 0$  s,  $x = 1$  m y  $\dot{x} = 0$  m/s.

ello tienden asintóticamente a  $x = 0$  a medida que aumenta  $t$ . Es un movimiento no vibratorio, que se acerca hacia la posición de equilibrio, cada vez con menor velocidad, dado que la fuerza del muelle va cayendo a medida que avanza el tiempo y la masa se dirige hacia la posición de equilibrio (ver Figura 2.4). El amortiguador tampoco permite una gran aceleración, por lo tanto, la masa no adquiere inercia suficiente para sobrepasar la posición de equilibrio y luego volver, es decir, para oscilar.

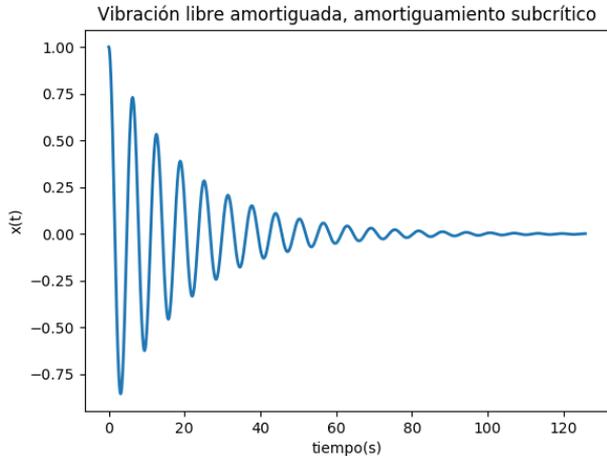
**2.3.2.2. Amortiguamiento crítico** Es el caso límite  $\zeta = 1$ ,  $c = c_c$ , entre el sobre-amortiguamiento y un amortiguamiento que permite la oscilación. La raíz de la ecuación característica, además de ser negativa, es doble,  $\lambda_{1,2} = -\omega_0$ .

La solución de la ecuación diferencial es,

$$x(t) = C_1 e^{-\omega_0 t} + C_2 t e^{-\omega_0 t} \quad (2.37)$$

En este caso tampoco hay oscilación del sistema, el cual llega a su posición de equilibrio, pero está en el límite de comenzar a realizar una vibración. El sistema llega un momento en el que alcanza la posición de equilibrio y ahí se queda (ver Figura 2.5). La diferencia con el caso sobre-amortiguado es que la posición de equilibrio es asintótica, por lo que sólo se alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**2.3.2.3. Subamortiguamiento** Cuando  $\zeta < 1$ ,  $c < c_c$ , se produce oscilación en la vuelta de la masa hacia su posición de equilibrio. La inercia que adquiere la masa por su aceleración y la fuerza del muelle hacen que la masa sobrepase su posición de equilibrio. El muelle invierte el sentido de su fuerza y comienza a frenar a la



**Figura 2.6** Respuesta de vibración libre de 1 gdl con amortiguamiento subcrítico. Parámetros  $k = 1$  N/m,  $\zeta = 0.05$  y  $m = 1$  Kg. En  $t = 0$  s,  $x = 1$  m y  $\dot{x} = 0$  m/s.

masa. La existencia de amortiguación, implica disipación energética, por lo que la masa va perdiendo su energía mecánica. La masa acaba en la posición de equilibrio.

Las raíces de la ecuación característica son complejas y conjugadas.

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta \omega_0 \pm \underbrace{i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}_{\omega_d} \quad (2.38)$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm i \omega_d \quad (2.39)$$

siendo  $\omega_d$ , la frecuencia angular amortiguada (ver Figura 2.6). La solución de las ecuaciones del movimiento es una exponencial negativa (atenuante de la oscilación) y una exponencial imaginaria pura (una movimiento oscilante armónico simple, parecido al del caso sin amortiguamiento).

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_0 t} A \operatorname{sen}(\omega_d t + \varphi) \quad (2.40)$$

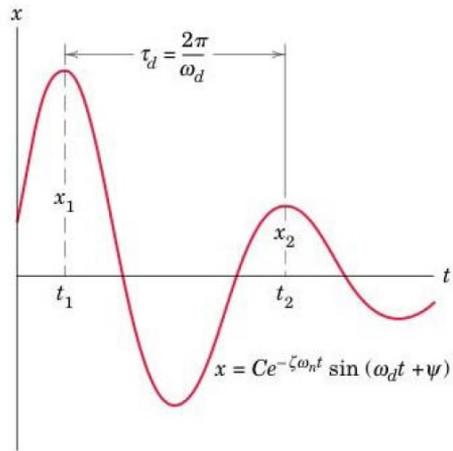
La frecuencia de oscilación con amortiguamiento no coincide con la frecuencia natural  $\omega_0$ , que es la que se obtenía en la vibración sin amortiguamiento. Cuanto mayor amortiguamiento más baja será a frecuencia de oscilación

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.41)$$

Es cierto que en muchas aplicaciones las tasas de amortiguaciones suelen ser bajas. Cuando esto ocurre la frecuencia amortiguada se acerca a la frecuencia natural, pero no es igual. En el límite en el que el amortiguamiento desaparece  $\zeta = 0$ , se puede observar en la expresión que ambas coinciden.

### 2.3.3. Determinación del amortiguamiento experimentalmente

A menudo es necesario determinar el amortiguamiento  $\zeta$  por vía experimental, para un sistema con amortiguamiento pequeño. En general el valor real del coeficiente  $c$  de amortiguamiento suele ser desconocido, y es más sencillo determinar  $\zeta$ . Para determinar el amortiguamiento, debemos excitar el sistema con un desplazamiento inicial, y dejarlo evolucionar libremente. En una gráfica de  $x(t)$  frente al tiempo, podremos medir dos amplitudes sucesivas en un ciclo, como muestra la figura 2.7.



**Figura 2.7** Amplitudes  $x_1$  y  $x_2$  del movimiento. Medida del amortiguamiento experimental

El ratio entre las amplitudes es:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{C e^{-\zeta \omega_0 t_1}}{C e^{-\zeta \omega_0 (t_1 + T_d)}} = e^{\zeta \omega_0 T_d} \tag{2.42}$$

Se define el *decremento logarítmico* como:

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta \omega_0 T_d = \zeta \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.43}$$

De esta ecuación podemos resolver  $\zeta$ ;

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \tag{2.44}$$

Para  $\zeta$  pequeño,  $\delta$  es también pequeño, y el anterior cociente puede evaluarse despreciando el término cuadrático del denominador.

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi} \tag{2.45}$$

En la práctica, es habitual que las amplitudes entre dos ciclos consecutivos sean prácticamente iguales. Es más sencillo medir las amplitudes entre  $n$  ciclos consecutivos. En tal caso, el ratio entre amplitudes será:

$$\delta_n = \ln \left( \frac{x_1}{x_n} \right) = \zeta \omega_0 n T_d \simeq \zeta n 2 \pi \quad (2.46)$$

y de aquí:

$$\zeta \simeq \frac{\delta_n}{n 2 \pi} \quad (2.47)$$

## 2.4. Vibraciones forzadas

En este caso, la acción  $P(t)$  actúa durante el movimiento, forzando al sistema a moverse de forma diferente a la natural (vibraciones libres). La acción sobre un sistema lineal, o *forzador* juega un papel muy importante en la respuesta del oscilador. Existen dos tipos básicos de acciones:

- Acciones de naturaleza aleatoria. Estas acciones se caracterizan porque, conocido  $P(t)$ , no es posible predecir de forma exacta cuánto valdrá  $P(t + \Delta t)$ . Su estudio sólo es posible desde el punto de vista estadístico. Este tipo de acciones son muy importantes en ingeniería civil, ya que existen acciones fundamentales, como el viento o el oleaje, que no se conocen de forma determinista. Una acción de naturaleza aleatoria se denomina *vibración aleatoria*. El estudio de la respuesta de sistemas lineales frente a este tipo de acciones constituye hoy en día una parte muy importante y fundamental en la ingeniería. Las técnicas que se emplean en respuesta estocástica son más sencillas, más rápidas y más acordes con el tipo de acción que se pretende modelizar. Se aconsejan varias lecturas avanzadas en este sentido, siendo la referencia clásica de Newland <sup>1</sup>.
- Acciones deterministas. La función  $P(t)$  es una función analítica conocida. Este será el caso que se verá en este apartado.

La ecuación a resolver es una EDO lineal de coeficientes constantes, con un término de fuerza  $P(t)$ . Retomando la ecuación aquí:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (2.48)$$

La solución de una EDO de este tipo se obtiene sumando dos funciones:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.49)$$

<sup>1</sup>D.E. Newland, *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*. Dover Publications

La función  $x_h(t)$  es la solución de la ecuación homogénea, cuestión que ya se ha visto al tratar las vibraciones libres. Verifica la siguiente ecuación:

$$m\ddot{x}_h + c\dot{x}_h + kx_h = 0 \quad (2.50)$$

La solución  $x_p(t)$  es una solución particular (cualquiera) que verifique la ecuación completa,

$$m\ddot{x}_p + c\dot{x}_p + kx_p = P(t) \quad (2.51)$$

#### 2.4.1. Vibraciones forzadas no amortiguadas: fuerza armónica

El primer caso que consideraremos es aquel en el cual el término de fuerza viene dado por una fuerza armónica, de tipo:

$$P(t) = P \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.52)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular de excitación.

La ecuación diferencial es, por tanto:

$$m\ddot{x} + kx = P \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.53)$$

Para resolver esta ecuación, plantearemos la descomposición (2.49). La solución de la homogénea puede escribirse como combinación lineal de  $\{\operatorname{sen}(\omega_0 t), \operatorname{cos}(\omega_0 t)\}$ , con  $\omega_0 = \frac{k}{m}$ . Por tanto:

$$x_h(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t) + B \operatorname{cos}(\omega_0 t) \quad (2.54)$$

siendo  $A$  y  $B$  coeficientes a determinar, con las condiciones de contorno.

Para la solución particular, consideraremos que admite una expresión de la forma:

$$x_p(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \operatorname{cos}(\omega t) \quad (2.55)$$

siendo  $C_1, C_2$  dos constantes a determinar sustituyendo  $x_p(t)$  en la ecuación.

Las derivadas de  $x_p(t)$  son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= C_1 \omega \operatorname{cos}(\omega t) - C_2 \omega \operatorname{sen}(\omega t) \\ \ddot{x}_p &= -C_1 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) - C_2 \omega^2 \operatorname{cos}(\omega t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.53) quedará:

$$m(-C_1 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) - C_2 \omega^2 \operatorname{cos}(\omega t)) + k(C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \operatorname{cos}(\omega t)) = P \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.57)$$

Igualando entre sí todo lo que va con  $\cos(\omega t)$ , se obtiene que  $C_2$  debe valer 0. E igualando todos los términos que van con  $\sin(\omega t)$  se obtiene:

$$(-m\omega^2 + k)C_1 = P \Rightarrow C_1 = \frac{P}{k - m\omega^2} \quad (2.58)$$

operando, teniendo en cuenta que  $\omega_0 = \frac{k}{m}$

$$C_1 = \frac{P \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}(k - m\omega^2)} = \frac{P}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\frac{P}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.59)$$

El parámetro  $C_1$  es la amplitud de la respuesta de la oscilación forzada. Puede verse que este parámetro es distinto de cero, pero presenta una singularidad cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$ . En esta situación, el límite tiende a infinito.

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} C_1 = \infty \quad (2.60)$$

En un sistema sin amortiguamiento, si la fuerza es armónica, y la frecuencia de la excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, se obtiene un movimiento infinito, ya que desde el principio,  $C_1 \rightarrow \infty$ , para todo instante de tiempo. Esta condición es difícil de imaginar en la realidad, ya que todo sistema tiene un amortiguamiento, aunque sea pequeño. Veremos por tanto que cuando existe amortiguamiento, se modifica esta tendencia, y en vez de tender a infinito, tenderá a un valor muy alto.

La solución completa del movimiento se compone siempre de las dos partes:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + C_1 \sin(\omega t) \quad (2.61)$$

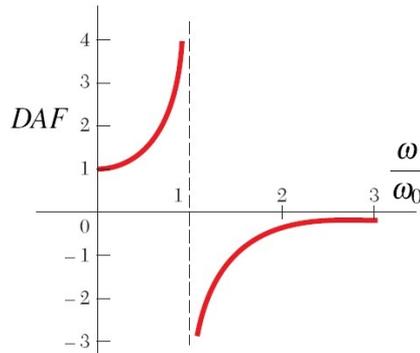
Los dos primeros términos forman parte de la solución homogénea, y es una solución caracterizada por la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ . El tercer término representa una solución en fase con la carga.

En el numerador de  $C_1$  aparece  $P/k$ , que puede interpretarse como la respuesta *estática*, que aparecería si  $P$  no variase con el tiempo. Denominando  $x_{st} = P/k$ , se tiene:

$$\frac{C_1}{x_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = DAF \quad (2.62)$$

El anterior cociente se denomina *coeficiente de amplificación dinámica*, y lo notaremos como DAF (Dynamic Amplification Factor), y hace referencia a la amplificación dinámica, dependiente de la frecuencia, que experimenta el movimiento respecto del nivel estático de referencia. La Figura 2.8 muestra el DAF en función

del ratio de frecuencias. Cuando la carga excita con la frecuencia natural del sistema, se produce una asíntota. Esta situación se denomina *resonancia* del sistema.



**Figura 2.8** Amplificación dinámica en sistema no amortiguado

En la práctica existe amortiguamiento, como se ha indicado anteriormente, con lo cual, nunca se produce una asíntota real. No obstante, para sistemas débilmente amortiguados, se produce una amplificación apreciable, como se verá más adelante. La gráfica de la figura (2.8) muestra también que para  $\omega < \omega_0$ , la respuesta y la carga están en fase (el ratio es positivo), mientras que para  $\omega > \omega_0$ , se invierte el signo, y la respuesta estará en contrafase con la carga.

#### 2.4.2. Vibraciones forzadas amortiguadas: fuerza armónica

En este caso la ecuación del movimiento viene dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2.63)$$

La solución de esta ecuación es suma de la solución de la ecuación homogénea  $x_h(t)$ , más una solución particular  $x_p(t)$ . Las soluciones para  $x_h(t)$  se estudiaron en el apartado de vibraciones libres amortiguadas. La solución de la homogénea se denomina *solución transitoria*, y en ausencia de fuerzas, sabemos que decae hasta hacerse nula. La solución  $x_p(t)$  se denomina *respuesta permanente* (steady-state). En lo que sigue se resolverá la solución particular  $x_p(t)$ .

Considerando una solución del tipo,

$$x_p(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (2.64)$$

el ángulo  $\varphi$  representa una fase. La representación anterior es equivalente a considerar una  $x_p(t)$  generada por las funciones  $\operatorname{sen}(\omega t)$ ,  $\operatorname{cos}(\omega t)$

Las derivadas de esta función serán:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= \omega B \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_p &= -\omega^2 B \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-mB\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + cB\omega \cos(\omega t + \varphi) + kB \sin(\omega t + \varphi) = P \sin(\omega t) \quad (2.65)$$

Por trigonometría,

$$\begin{aligned}\sin(\omega t + \varphi) &= \sin(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t) \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.65),

$$\begin{aligned}-mB\omega^2 [\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t)] + \\ cB\omega [\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)] + \\ kB [\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t)] = \\ P \sin(\omega t)\end{aligned} \quad (2.66)$$

Igualando los términos que acompañan a  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$ , se tiene:

Términos con  $\sin(\omega t)$ :

$$-mB\omega^2 \cos(\varphi) - cB\omega \sin(\varphi) + kB \cos(\varphi) = P \quad (2.67)$$

Los términos con  $\cos(\omega t)$ :

$$-mB\omega^2 \sin(\varphi) + cB\omega \cos(\varphi) + kB \sin(\varphi) = 0 \quad (2.68)$$

Multiplicando la ecuación (2.67) por  $\cos(\varphi)$  y la (2.68) por  $\sin(\varphi)$ , y sumando ambas, queda:

$$(-m\omega^2 + k)B = P \cos(\varphi) \quad (2.69)$$

Considerando ahora el producto de (2.67) por  $\sin(\varphi)$  y restando (2.68) por  $\cos(\varphi)$  queda:

$$-c\omega B = P \sin(\varphi) \quad (2.70)$$

El resultado anterior (2.70) indica que el seno del ángulo de desfase es negativo, lo cual indica que  $\varphi \in [-\pi, 0]$

Dividiendo (2.70) entre (2.69) queda:

$$\tan(\varphi) = -\frac{c \omega}{k - m \omega^2} \quad (2.71)$$

Considerando finalmente la suma de (2.69) elevada al cuadrado + (2.70) elevada al cuadrado, se tiene:

$$(k - m \omega^2)^2 B^2 + c^2 \omega^2 B^2 = P^2 \quad (2.72)$$

Y despejando  $B$ ,

$$B = \frac{P}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2}} \quad (2.73)$$

lo cual indica que  $B$  es positivo si  $P$  es positivo.

Introduciendo el parámetro  $\alpha = \frac{\omega_0}{\omega}$ , y teniendo en cuenta que  $c_c = 2m\omega_0$ , podemos escribir:

$$\tan(\varphi) = -\frac{c \frac{\omega}{m}}{\omega_0 - \omega^2} = -\frac{c \omega \frac{2\omega_0}{c_c}}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{2\zeta \alpha}{1 - \alpha^2} \quad (2.74)$$

Considerando ahora el factor de amplificación dinámica, como

$$DAF = \frac{B}{B_{est}} \quad (2.75)$$

Con  $B_{est} = \frac{P}{k}$ , se tiene:

$$DAF = \frac{B}{B_{est}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c \omega}{k}\right)^2}} \quad (2.76)$$

y considerando  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , y que

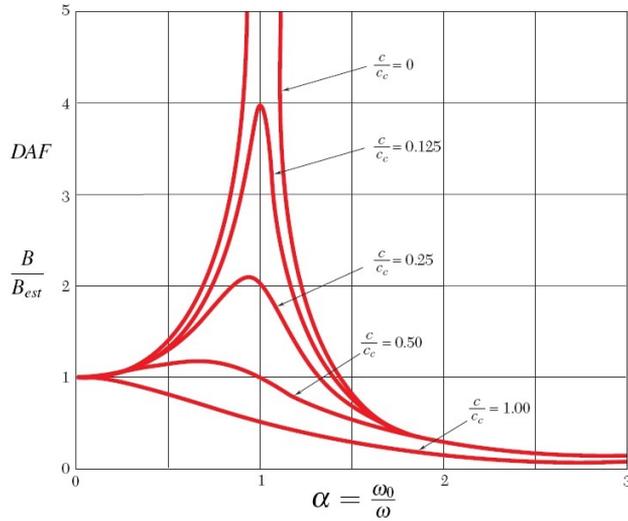
$$k = \omega_0^2 m = \omega_0^2 \frac{c_c}{2\omega_0} = \frac{1}{2} c_c \omega_0$$

se tiene:

$$DAF = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (2.77)$$

E introduciendo el parámetro  $\alpha$ ,

$$DAF = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\zeta \alpha)^2}} \quad (2.78)$$



**Figura 2.9** Coeficiente de amplificación dinámica DAF

La figura 2.9 representa el valor del coeficiente de amplificación en función del ratio entre la frecuencia de la excitación y la frecuencia natural, para diferentes tasas de amortiguamiento. Se observa que para una frecuencia próxima a la natural, se produce un pico en el factor de amplificación, sólo para tasas de amortiguamiento muy bajas. El punto en el que se produce el máximo va evolucionando a medida que aumenta el amortiguamiento, hasta que finalmente, no se produce amplificación a medida que  $\zeta$  crece. También se observa que no siempre se produce amplificación en el movimiento.

El máximo DAF puede calcularse para un  $\zeta$  dado, derivándolo e igualándolo a cero:

$$\frac{dDAF}{d\alpha} = 0 \tag{2.79}$$

esto produce:

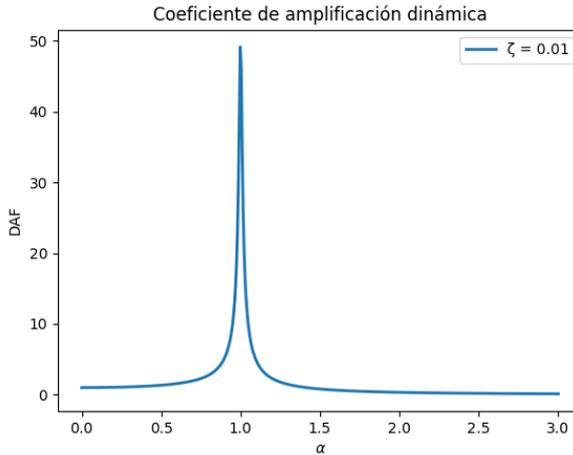
$$2(1 - \alpha^2)(-2\alpha) + 2(2\zeta\alpha)2\zeta = 0 \tag{2.80}$$

Una solución de esta ecuación es  $\alpha = 0$ . Pero existe en general otra posible solución: quedando:

$$-(1 - \alpha^2) + 2\zeta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{2.81}$$

esta ecuación tiene solución real si  $\zeta^2 < \frac{1}{2}$ , es decir, si  $\zeta < \sqrt{1/2} \simeq 0.7071$ .

Para un valor de  $\zeta \geq 0.7071$  no existe amplificación de la respuesta. Para este valor, se obtiene que  $\alpha = 0$ . Esto indica que el máximo DAF se producirá en  $\alpha = 0$ . Y esta situación será así también para valores de  $\zeta$  comprendidos en  $\zeta \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ .

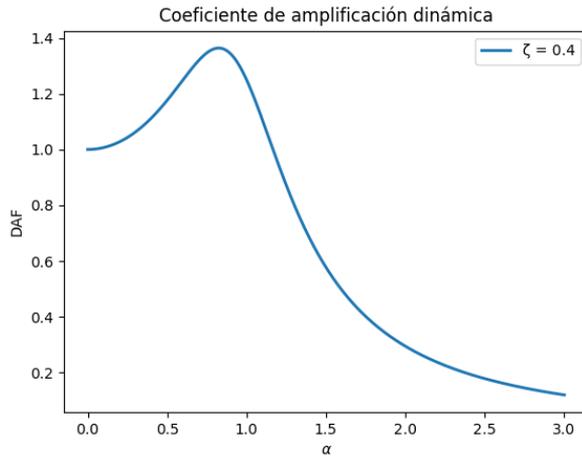


**Figura 2.10** Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para  $\zeta = 0.01$

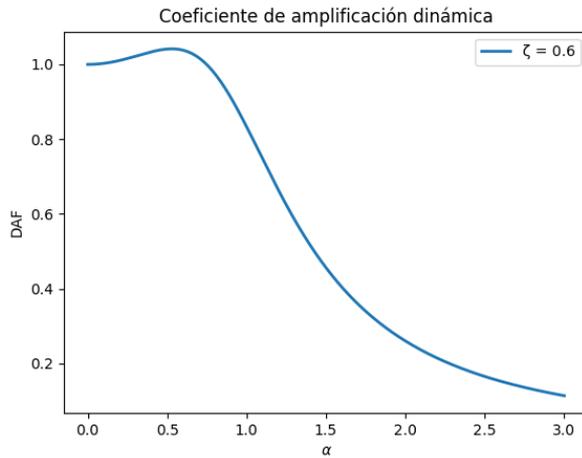
La figura 2.10 muestra que para una tasa de amortiguamiento baja, el pico es muy pronunciado y se concentra en torno al punto  $\alpha = 1$ , que representa una situación en la cual la frecuencia de la excitación forzada es igual a la frecuencia natural del sistema. A diferencia de lo que ocurriría para el caso sin amortiguamiento, en este caso el movimiento no tiende a infinito, sino que está acotado. Sin embargo, el punto  $\alpha = 1$  sigue presentando un comportamiento especial, que deberá tenerse muy en cuenta en el diseño. En los casos reales, ninguna amplificación tiende a infinito, sino a un valor muy alto, a causa del amortiguamiento. Y es posible que el diseño incumpla alguna restricción, (resistente, confort, límites de desplazamientos, etc) para una situación de este tipo. En sistemas débilmente amortiguados deberá considerarse por tanto la posibilidad de la resonancia como una situación a evitar, o, en todo caso, a *controlar*.

La figura anterior muestra dos extremos relativos, uno en  $\alpha = 0$  y otro en un punto próximo a  $\alpha = 1$ . A medida que crece el amortiguamiento, el extremo que se produce en  $\alpha = 1$  tiende a desplazarse hacia  $\alpha = 0$ . Esto puede verse en la evolución para  $\zeta$  mostrada en las figuras 2.11, y 2.12. Esta última muestra claramente que el máximo no se está dando en  $\alpha = 1$ .

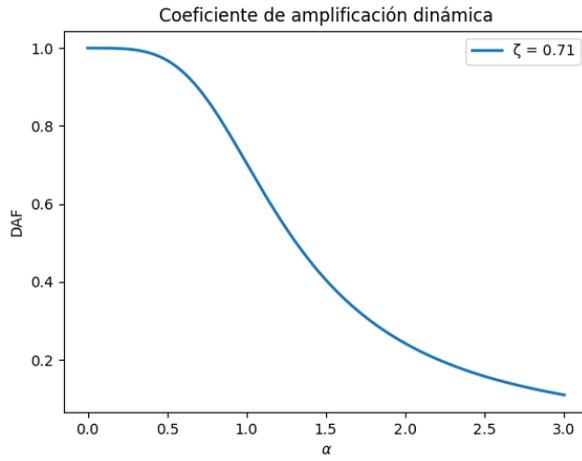
A partir de  $\zeta = 0.71$  aproximadamente, sólo existe un extremo relativo en  $\alpha = 0$ . Esta situación la muestra la figura 2.13. Para valores del amortiguamiento superiores al límite anterior, sólo se producirá un máximo DAF en  $\alpha = 0$ , con un fuerte decaimiento a medida que va aumentando el amortiguamiento. La figura 2.14 ilustra esta situación.



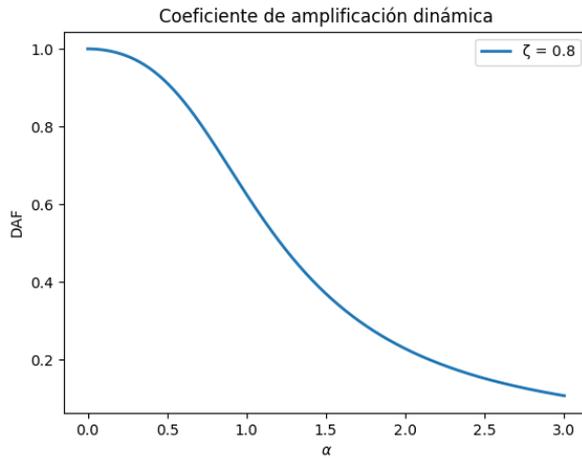
**Figura 2.11** Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para  $\zeta = 0.4$



**Figura 2.12** Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para  $\zeta = 0.6$



**Figura 2.13** Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para  $\zeta = 0.71$



**Figura 2.14** Vibración forzada amortiguada con carga armónica. Coeficiente de amplificación dinámica DAF para  $\zeta = 0.8$



## CAPÍTULO 3

---

# VIBRACIONES DE SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

---

En este capítulo se estudiará la respuesta de sistemas de más de un grado de libertad. El sistema de  $n$ -grados de libertad se reducirá al análisis de  $n$  problemas independientes, cada uno de 1 grado de libertad. Las características fundamentales de un sistema de 1 grado de libertad, como son la masa, rigidez y amortiguamiento, se plantearán aquí en un formato matricial, mediante la *matriz de masa*, *matriz de rigidez* y *matriz de amortiguamiento*.

El sistema matricial resultante puede resolverse de diferentes formas. Un planteamiento posible, cuando la matriz de amortiguamiento es nula, es el análisis modal, mediante el establecimiento de un problema de valores propios generalizado. Esto permitirá pasar de un sistema de  $n$ -ecuaciones diferenciales acopladas, a uno de  $n$ -ecuaciones diferenciales desacopladas. En este sistema desacoplado, la ecuación del movimiento es igual a la estudiada en el capítulo anterior (sistemas de 1 grado de libertad).

Cuando existe amortiguamiento general, se tendrán tres matrices, y no es posible, en general, utilizar la técnica del análisis modal. Sin embargo, es posible realizar ciertas hipótesis sobre el amortiguamiento, que permitirán plantear el problema como un problema de valores propios generalizados, sobre dos matrices.

En este capítulo se planteará el problema de vibraciones libres y forzadas para sistemas no amortiguados. Posteriormente se plantearán formas de incorporar el amortiguamiento.

En ingeniería civil, el análisis modal en el dominio del tiempo constituye una herramienta fundamental de análisis en diversos contextos, entre los que cabe destacar los siguientes:

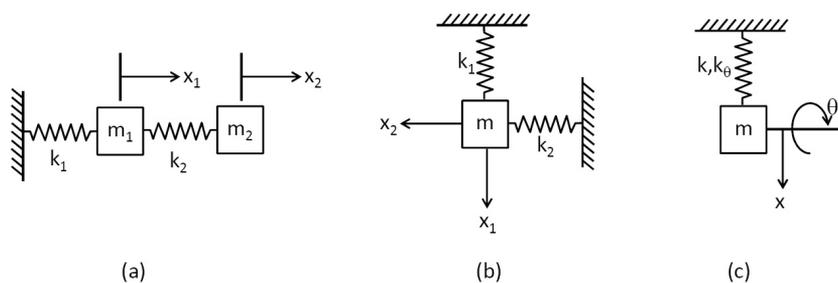
- Dinámica de puentes de ferrocarril de alta velocidad.
- Respuesta sísmica de edificios y puentes.
- Respuesta vibratoria de estructuras sometidas a viento.
- Problemas vibratorios al paso de peatones en pasarelas.
- Identificación y verificación de estructuras mediante análisis modal (experimental / operacional).

Es importante, por tanto, que el ingeniero civil domine los conceptos incluidos en este capítulo. El análisis modal no es una técnica general válida para cualquier sistema dinámico. Para casos generales, existen dos procedimientos, vinculados con los métodos numéricos.

- Solución en el dominio del tiempo. Este tipo de análisis se realiza para casos generales, y suele realizarse mediante una discretización temporal de las ecuaciones generales matriciales del problema, formando métodos explícitos o implícitos de solución. Junto al método de reducción de orden, generando un sistema de ecuaciones en espacio-estado (ecuaciones sólo en derivadas primeras), es posible utilizar otros esquemas altamente eficientes que trabajan directamente con derivadas segundas.
- Solución en el dominio de la frecuencia. Mediante una transformada de tipo integral (transformada de Fourier) es posible realizar un cambio de variable, y trabajar directamente en frecuencias. Este tratamiento suele ser general y rápido, y precisa, si se quiere recuperar la información temporal, realizar el cambio inverso. Existen algoritmos numéricos altamente eficientes para realizar, tanto el cambio directo como el inverso, conocido como métodos de transformada rápida de Fourier.

### 3.1. Vibraciones libres en sistemas de múltiples grados de libertad

La figura 3.1 ilustra 3 sistemas de 2 grados de libertad cada uno, sin fuerzas y sin amortiguamiento. El primero (a) consiste en dos masas con dos resortes en serie. El segundo (b) muestra una masa con dos resortes en dos direcciones perpendiculares

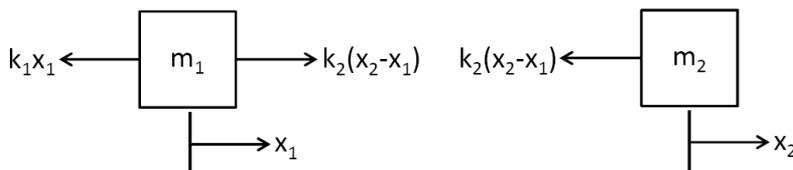


**Figura 3.1** Ejemplos de sistemas de 2 grados de libertad

entre sí. El terdero (c) muestra una masa que se desplaza y rota sobre su eje. Buena parte de los ejemplos numéricos que se plantearán se harán sobre sistemas de 2 grados de libertad.

En lo que sigue, emplearemos el acrónimo SMGL para referirnos a sistemas de múltiples grados de libertad.

Consideremos el sistema formado por dos masas y dos muelles de la figura 3.1 (a). Planteando el diagrama de cuerpo libre de cada masa, podemos establecer el esquema de la figura 3.2



**Figura 3.2** Diagrama de cuerpo libre. Sistema de 2 masas con 2 muelles en serie

Estableciendo la segunda ley de Newton para cada masa, se obtiene el siguiente sistema:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \tag{3.1}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) \tag{3.2}$$

Reordenando estas ecuaciones:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \tag{3.4}$$

Estas dos ecuaciones representan un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), de tipo lineal de coeficientes constantes, acopladas. La solución dependerá

de cuatro condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= X_1; \dot{x}_1(0) = V_1 \\x_2(0) &= X_2; \dot{x}_2(0) = V_2\end{aligned}\quad (3.5)$$

siendo  $X_1$  y  $X_2$  las condiciones en  $t = 0$  de desplazamiento, y  $V_1, V_2$  las de velocidad, en el mismo instante inicial.

Este sistema puede escribirse en formato matricial:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.6)$$

En formato matricial, el sistema puede escribirse como:

$$[M] \cdot \ddot{\vec{x}} + [K] \cdot \vec{x} = \vec{0}\quad (3.7)$$

donde  $\vec{x} = [x_1, x_2]^T$  y  $\vec{0} = [0, 0]^T$ .

Existen varias formas de resolver el sistema anterior. Nótese que el sistema es acoplado, ya que no es posible resolver cada función de manera independiente, puesto que cada ecuación contiene tanto a  $x_1$  como a  $x_2$ . Físicamente, el movimiento de  $x_1$  influye en el de  $x_2$ , y viceversa. Una forma de resolverlo consiste en establecer un cambio de base.

### 3.1.1. Solución mediante un cambio de base: análisis modal

Consideremos un cambio de base, representado por la matriz  $[C]$ , tal que:

$$\vec{x} = [C] \vec{q}\quad (3.8)$$

Siendo  $\vec{q} = [q_1, q_2]^T$  un vector formado por dos nuevas funciones  $q_1(t), q_2(t)$ . Introduciendo este cambio en el sistema matricial representado en la ecuación (3.7), se tiene:

$$[M] \cdot [C] \cdot \ddot{\vec{q}} + [K] \cdot [C] \cdot \vec{q} = \vec{0}\quad (3.9)$$

A continuación, premultiplicaremos el sistema anterior por la traspuesta de la matriz  $[C]$ .

$$[C]^T \cdot [M] \cdot [C] \cdot \ddot{\vec{q}} + [C]^T \cdot [K] \cdot [C] \vec{q} = \vec{0}\quad (3.10)$$

Es posible elegir  $[C]$  tal que diagonalice a la vez a las matrices  $[M]$  y  $[K]$ , quedando:

$$[M_D] \cdot \ddot{\vec{q}} + [K_D] \cdot \vec{q} = 0\quad (3.11)$$

En el sistema anterior, las matrices  $[M_D]$  y  $[K_D]$  son matrices diagonales. Para encontrar la matriz  $[C]$ , se debe resolver un *Problema de Valores Propios Generalizado*, como se verá más adelante. Si escribimos las ecuaciones que representan el sistema (3.11), vemos que queda:

$$\begin{pmatrix} m_1^d & 0 \\ 0 & m_2^d \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^d & 0 \\ 0 & k_2^d \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

donde el superíndice  $d$  denota *de la matriz diagonal*. Claramente, las ecuaciones diferenciales para  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  están desacopladas. Cada una de ellas representa un problema de 1 grado de libertad. Las ecuaciones diferenciales anteriores se denominan *ecuaciones modales* del movimiento, y representan las ecuaciones del movimiento en una base diferente, denominada *base modal*. Las dos ecuaciones desacopladas del movimiento son:

$$m_1^d \ddot{q}_1 + k_1^d q_1 = 0 \quad (3.13)$$

$$m_2^d \ddot{q}_2 + k_2^d q_2 = 0 \quad (3.14)$$

La solución para cada  $q_i(t)$  es fácil, según lo visto en el capítulo de vibraciones de sistemas de 1 grado de libertad. Asumiendo para cada función una solución  $q_i(t) = e^{\lambda_i t}$ , sabemos que al sustituir esta función y sus derivadas en las ecuaciones (3.13) y ((3.14) quedarán 2 polinomios en  $\lambda$ , respectivamente:

$$-\lambda_1^2 m_1^d + k_1^d = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \pm i \sqrt{\frac{k_1^d}{m_1^d}} \quad (3.15)$$

$$-\lambda_2^2 m_2^d + k_2^d = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \pm i \sqrt{\frac{k_2^d}{m_2^d}} \quad (3.16)$$

Y recordando lo visto en sistemas de 1 GDL,

$$q_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t) + B_1 \operatorname{cos}(\omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1^d}{m_1^d}} \quad (3.17)$$

$$q_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t) + B_2 \operatorname{cos}(\omega_2 t), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2^d}{m_2^d}} \quad (3.18)$$

Las constantes  $A_1, A_2, B_1, B_2$  se deberán imponer a partir de las condiciones iniciales, las cuales deben expresarse ahora en función de condiciones para  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ . La ecuación (3.8) permite establecer el cambio entre la pareja de coordenadas  $x_1, x_2$  y  $q_1, q_2$  para todo instante de tiempo. En este sentido, denominando  $E$  a la

base canónica formada por las funciones  $x_1, x_2$  y  $B$  a la base modal, se tendrá que el cambio inverso viene dado por:

$$\vec{q} = [C]^{-1} \vec{x} \quad (3.19)$$

La ecuación anterior puede establecerse para determinar  $q_1(0), q_2(0)$  en función de  $X_1$  y  $X_2$ , y también  $\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)$  en función de  $V_1, V_2$ , como sigue:

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = [C]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = [C]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.1.2. Problema de Valores Propios Generalizado

El problema básico de determinar una matriz  $[C]$  que permita diagonalizar a la vez dos matrices se denomina *Problema de Valores Propios Generalizado*. Para el caso que nos ocupa, planteando una solución armónica para el vector  $\vec{x}$ , del tipo  $\vec{x} = \vec{\alpha} e^{i\omega t}$ , donde ya se ha asumido que las soluciones son complejas, y siendo  $\vec{\alpha}^T = [\alpha_1, \alpha_2]^T$  un vector, se tendrá:

$$\vec{\ddot{x}} = -\omega^2 \vec{\alpha} e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

Y sustituyendo en la ecuación:

$$[M] \cdot \vec{\ddot{x}} + [K] \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

quedará:

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \cdot \vec{\alpha} e^{i\omega t} = \vec{0} \quad (3.23)$$

Y para que esta situación sea posible, debe ocurrir que la matriz que se obtiene al realizar la operación del paréntesis sea singular, que es el equivalente multidimensional a que un paréntesis escalar sea cero, como ocurría con el oscilador de 1 grado de libertad. Por tanto, la matriz

$$(-\omega^2 [M] + [K])$$

es singular si su determinante verifica:

$$|-\omega^2 [M] + [K]| = 0 \quad (3.24)$$

A partir de la ecuación anterior se determina un polinomio en  $\omega_2$ , y en consecuencia, se determinarán dos frecuencias que anulan al determinante anterior. Estas

dos frecuencias coinciden con  $\omega_1^d$  y  $\omega_2^d$ . Además, en todo problema de valores propios existen no sólo *valores propios*, que en nuestro caso son las  $\omega^2$ , sino también *vectores propios*, que serán valores de  $\vec{\alpha}$  diferentes del vector nulo, asociados a cada una de las dos  $\omega_i$ , (y por tanto los notaremos como  $\vec{\alpha}_i$ ) que verifiquen:

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \cdot \vec{\alpha}_i = 0, \tag{3.25}$$

Nótese que, evidentemente, el sistema anterior es un sistema *compatible, indeterminado*, y por tanto, no existe un único vector propio, sino una relación entre sus componentes. El sistema anterior puede normalizarse de diferentes formas.

- Normalización para que  $\vec{\alpha}_i^T \cdot \vec{\alpha}_i = 1$ . En este caso, se normaliza de forma habitual, determinando la norma euclídea de un vector candidato a  $\alpha_i$  y dividiéndolo entre su módulo.
- Normalización a la matriz de masa. En este caso, se puede elegir  $\alpha_i$  tal que:

$$\vec{\alpha}_i^T \cdot [M] \cdot \vec{\alpha}_i = 1 \tag{3.26}$$

Los vectores  $\vec{\alpha}_i$ , ordenados por columnas, generan la matriz  $[C]$ . La columna  $j$  de la matriz  $[C]$  será el vector  $\alpha_j$ . Los vectores  $\vec{\alpha}_i$  se denominan *modos de vibración*. Para cada modo, existe una frecuencia  $\omega_i$  de vibración libre, que son los valores propios del problema de valores propio generalizado.

**3.1.2.1. Propiedades de los valores propios y vectores propios**

- Todos los valores propios son reales. Esto se debe a la estructura de las matrices  $[M]$  y  $[K]$ , ya que en mecánica, son matrices cuadradas simétricas definidas positivas.
- Todos los vectores propios son reales.
- Todos los valores propios son positivos.
- Los vectores propios son siempre ortogonales respecto de la matriz de masa  $[M]$ . Si  $\vec{\alpha}_i$  y  $\vec{\alpha}_j$  son dos vectores propios, con  $i \neq j$  entonces se verifica:

$$\vec{\alpha}_i^T \cdot [M] \cdot \vec{\alpha}_j = 0 \tag{3.27}$$

- Los vectores propios y valores propios no dependen del sistema de coordenadas. Es decir, que aunque se plantee otro sistema equivalente de grados de libertad, los valores propios y vectores propios no cambian. Se dice por tanto que son *intrínsecos*.
- Los vectores propios son linealmente independientes.

**3.1.2.2. El Problema de Valores Propio Generalizado en álgebra: planteamiento formal** El estudiante de ingeniería civil habrá estudiado seguramente, en una asignatura de álgebra lineal, la estructura de un problema de valores propios. En efecto, dada una matriz  $[A]$ , los valores propios de  $[A]$  se obtienen planteando un vector  $\vec{u}$ , denominado *vector propio*, tal que:

$$[A] \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \quad (3.28)$$

Y para que este sistema se pueda resolver, se debe dar:

$$([A] - \lambda [I]) \vec{u} = \vec{0} \quad (3.29)$$

Los valores de  $\lambda$  se obtienen resolviendo el siguiente determinante

$$|[A] - \lambda [I]| = 0 \quad (3.30)$$

La operación anterior produce un conjunto de *valores propios*  $\lambda_i$ . Para cada uno de estos se determina un vector propio, resolviendo el sistema lineal,

$$([A] - \lambda_i [I]) \vec{u}_i = \vec{0} \quad (3.31)$$

Este problema ya ha sido tratado en mecánica al estudiar el problema de diagonalización del tensor de inercia.

Existe en álgebra otro problema, denominado *problema de valores propios generalizado*, para el cual el enunciado del problema es el siguiente: dadas dos matrices,  $[A]$  y  $[B]$ , cuadradas, determinar los valores de  $\lambda$  que verifican:

$$[A] \cdot \vec{u} = \lambda [B] \cdot \vec{u} \quad (3.32)$$

En este caso, para resolver  $\lambda$  se debe plantear:

$$([A] - \lambda [B]) \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.33)$$

Para obtener  $\lambda$  deberá resolverse el determinante:

$$|[A] - \lambda [B]| = 0 \quad (3.34)$$

que producirá los valores propios  $\lambda_i$ . Y para cada valor propio, existirá un vector propio asociado,  $\vec{u}_i$  tal que:

$$([A] - \lambda_i [B]) \cdot \vec{u}_i = 0 \quad (3.35)$$

Los vectores propios  $\vec{u}_i$  pueden disponerse por columnas, formando la llamada *matriz de paso*  $[C]$ . Esta matriz permite diagonalizar *a la vez* a las matrices  $[A]$  y  $[B]$ , mediante la siguiente operación:

$$[C]^T \cdot [A] \cdot [C] = [A_d] \quad (3.36)$$

$$[C]^T \cdot [B] \cdot [C] = [B_d] \quad (3.37)$$

Este problema puede reducirse a uno estándar de valores propios. Sin embargo, el tratamiento numérico de estos problemas es más eficiente si se conserva en su formato original, con dos matrices simétricas definidas positivas.

Existen diferentes rutinas numéricas eficientes para calcular este problema. En Python, dentro del paquete *Linalg* (dedicado a álgebra lineal), que pertenece a la librería *Scipy*, se encuentra la función *eig*, que permite el cálculo numérico del problema de valores propios generalizados.

### ■ EJEMPLO 3.1

Considere que en una estructura, las matrices de masa y rigidez vienen dadas por:

$$[M] = \begin{pmatrix} 92400 & 0 & 0 \\ 0 & 4E5 & 0 \\ 0 & 0 & 4E5 \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} 160E6 & 0 & 0 \\ 0 & 2000E6 & -1200E6 \\ 0 & -1200E6 & 2000E6 \end{pmatrix}$$

Determine numéricamente la solución del problema de modos y frecuencias naturales de vibración.

*Solución:* El siguiente código (para Python 3.6) permite resolver el problema.

```
import numpy as np
import scipy.linalg as LA

#=====
# Matrices de masa y rigidez
#=====

M_masa = np.array([[ 92400, 0, 0 ],
                   [ 0, 4E5, 0 ],
                   [ 0, 0, 4E5 ]])

K_rigidez = np.array([[ 160E6, 0, 0 ],
                      [ 0, 2000E6, -1200E6 ],
```

```

[ 0, -1200E6, 2000E6]])

#=====
# Diagonalización
#=====

omega2, vectores = LA.eig(K_rigidez, M_masa)

print ()
print ("Frecuencias naturales en rad/seg NO ordenadas")
print ("=====")
for w in range(0, len(omega2)):
    print("Frecuencia", w+1, "=", np.sqrt(omega2[w]), "rd/s")

#=====
# Ordenamos de menor a mayor
#=====

idx = omega2.argsort()[::-1]

omega2 = omega2[idx]
vectores = vectores[:,idx]

print ()
print ("Frecuencias naturales en rad/seg ordenadas")
print ("=====")

for w in range(0, len(omega2)):
    print("Frecuencia", w+1, "=", np.sqrt(omega2[w]), "rd/s")

#=====
# Periodos de cada modo
#=====

periodos = 2. * np.pi / np.sqrt(omega2)
print ()
print ("Periodos naturales en segundos ordenados de mayor a menor")
print ("=====")

for w in range(0, len(omega2)):

```

```

print ("Periodo", w+1, "=", 2. * np.pi / np.sqrt(omega2[w]), "s")

#=====
# Modos de vibración
#=====

print ()
print ("Vectores Propios, normalizados a la unidad")
print ("=====")

for w in range(0, len(omega2)):
    print ("Modo", w+1, "=", vectores[:,w] )

```

La solución que genera el código es la siguiente:

Frecuencias naturales en rad/seg NO ordenadas

=====

Frecuencia 1 = (44.72135955+0j) rd/s  
 Frecuencia 2 = (89.4427191+0j) rd/s  
 Frecuencia 3 = (41.6125189288+0j) rd/s

Frecuencias naturales en rad/seg ordenadas

=====

Frecuencia 1 = (41.6125189288+0j) rd/s  
 Frecuencia 2 = (44.72135955+0j) rd/s  
 Frecuencia 3 = (89.4427191+0j) rd/s

Periodos naturales en segundos ordenados de mayor a menor

=====

Periodo 1 = (0.150992669248+0j) s  
 Periodo 2 = (0.140496294621+0j) s  
 Periodo 3 = (0.0702481473104+0j) s

Vectores Propios, normalizados a la unidad

=====

Modo 1 = [ 1. 0. 0.]  
 Modo 2 = [-0. -0.70710678 -0.70710678]  
 Modo 3 = [ 0. -0.70710678 0.70710678]

### ■ EJEMPLO 3.2

Considere el sistema de 2 masas y 2 muelles de la siguiente figura:

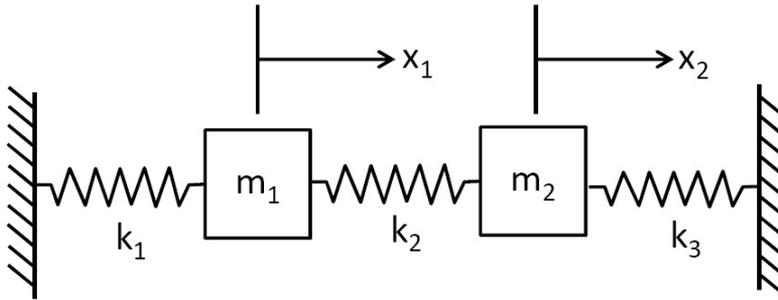


Figura 3.3 Sistema de 2 GDL. Ejemplo

Considere que  $m_1 = m_2 = m$ , y  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ . Determine la respuesta para  $[V_1, V_2] = [0, 0]$  (velocidades iniciales nulas) y condiciones iniciales para  $[X_1, X_2]$  dada por:  $[-1, 1]$ .

Solución:

Las ecuaciones del movimiento son, en este caso, las siguientes:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema, matricialmente, puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde, en este caso, las matrices  $[M]$  y  $[K]$  vienen dadas por:

$$[M] = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$[K] = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar las frecuencias angulares naturales, plantearemos el determinante:

$$|-\omega^2 [M] + [K]| = 0 \tag{3.38}$$

sustituyendo:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 m + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

quedando:

$$(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow -\omega^2 m + 2k = \pm k \rightarrow \omega^2 m = 2k \pm k \quad (3.40)$$

Quedando dos soluciones para  $\omega^2$ .

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{3k}{m} \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

Para cada valor propio  $\omega^2$  se puede determinar un vector propio asociado. Así, para el valor propio  $\omega_1^2$ , el primer vector propio se determinará resolviendo  $\vec{\alpha}_1$ , tal que:

$$(-\omega_1^2 [M] + [K]) \cdot \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \quad (3.41)$$

sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{m}m + 2k & -k \\ -k & -\frac{k}{m}m + 2k \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (3.42)$$

Quedando un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Eligiendo <sup>1</sup>  $\alpha_1 = 1$ , quedará que  $\alpha_2 = 1$ . Esto conduce como solución al vector propio  $\vec{\alpha}_1^T = [1, 1]^T$ . Si se normaliza a la unidad, teniendo en cuenta que el módulo de este vector es  $\sqrt{2}$ , puede obtenerse el vector propio normalizado:

<sup>1</sup>El sistema es compatible indeterminado, dependiendo de 1 parámetro. Se recomienda repasar este tipo de sistemas de ecuaciones lineales, ya que en general, no siempre se resuelven dando arbitrariamente un parámetro unitario a cualquiera de las incógnitas, y despejando el resto en función de ellas. Es posible que alguna de ellas valga directamente cero, incumpléndose la posibilidad de que queden libres

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Procediendo ahora con el valor propio  $\omega_2^2$  se tendrá:

$$(-\omega_2^2 [M] + [K]) \cdot \vec{\alpha}_2 = \vec{0} \quad (3.45)$$

sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3k}{m}m + 2k & -k \\ -k & -\frac{3k}{m}m + 2k \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (3.46)$$

quedando:

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

En esta ocasión, el vector propio  $\vec{\alpha}_2$  será:

$$\vec{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La matriz de paso  $[C]$  se construye concatenando los vectores propios por columnas.

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Si se desea normalizar los modos a la matriz de masa, se obtiene que, puesto que la condición es:

$$[C]^T \cdot [M] \cdot [C] = [I] \quad (3.50)$$

Entonces la matriz de paso es:

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

En lo que sigue se asumirá la primera forma, dada por la ecuación (3.49)

Considerando la condición de contorno:  $[V_1, V_2] = [0, 0]$  y  $[X_1, X_2] = [-1, 1]$ .

Aplicando el cambio de base  $\vec{q} = [C]^{-1} \vec{x}$ , y teniendo en cuenta que la matriz  $[C]$  en este caso es ortogonal, entonces  $[C]^{-1} = [C]^T$ . Las condiciones de contorno quedan:

$$\vec{q}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Para las velocidades, puesto que las condiciones iniciales son nulas, el cambio de base también determina que  $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)] = [0, 0]$ .

En el sistema desacoplado, el modo 1 parte de condiciones nulas, puesto que  $q_1(0) = 0$  y  $\dot{q}_1(0) = 0$ . Con estas condiciones, la solución para la ecuación modal 1 queda:

$$q_1(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + B_1 \text{cos}(\omega_1 t) \quad (3.53)$$

tiene como constantes  $A_1 = 0, A_2 = 0$ . Con lo cual, el modo 1 no interviene en la solución.

Para el modo 2, se tendrá que  $q_2(0) = -\sqrt{2}$  y  $\dot{q}_2(0) = 0$ . Por tanto, en la solución para la ecuación modal 2, queda:

$$q_2(t) = A_2 \text{sen}(\omega_2 t) + B_2 \text{cos}(\omega_2 t) \quad (3.54)$$

quedando que  $A_2 = 0$ , y  $B_2 = -\sqrt{2}$ .

Una vez resueltas las dos funciones para  $\vec{q}$ , teniendo en cuenta que  $\vec{x} = [C] \cdot \vec{q}$ , podrá determinarse la solución para  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  como:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \text{cos}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Quedando:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\text{cos}(\omega_2 t) \\ x_2(t) &= \text{cos}(\omega_2 t) \end{aligned}$$

### 3.1.3. Determinación de la relación entre coordenadas

Se ha visto que la matriz  $[C]$  permite relacionar las coordenadas, o grados de libertad del sistema  $\vec{X}$  con las coordenadas modales  $\vec{q}$ , mediante la relación:

$$\vec{x} = [C] \cdot \vec{q} \quad (3.56)$$

El cambio inverso es posible utilizando la matriz inversa:

$$\vec{q} = [C] \cdot \vec{X} \quad (3.57)$$

El cálculo de una inversa es siempre un problema, que en el caso que nos ocupa, puede ser realizado de forma equivalente. En efecto, premultiplicando por el producto  $\vec{C}^T \cdot [M]$  en ambos miembros de la igualdad (3.56), obtendremos.

$$[C]^T \cdot [M] \cdot \ddot{\vec{x}} = [C]^T \cdot [M] \cdot [C] \cdot \ddot{\vec{q}} \quad (3.58)$$

y teniendo en cuenta que la matriz de masa diagonal es precisamente  $[M_D] = [C]^T \cdot [M] \cdot [C]$ , la ecuación anterior queda:

$$[C]^T \cdot [M] \cdot \ddot{\vec{x}} = [M_D] \cdot \ddot{\vec{q}} \quad (3.59)$$

La matriz de masa diagonal se invierte de forma simple (puesto que la inversa de una matriz que es diagonal es otra matriz diagonal que tiene, en la diagonal, los inversos de todos y cada uno de los elementos de la diagonal de la matriz de partida), y por tanto, se puede pasar al primer miembro, premultiplicando:

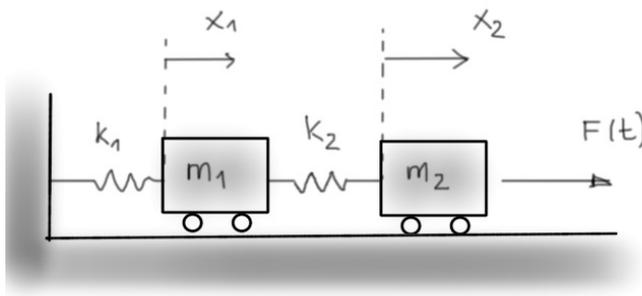
$$[M_D]^{-1} \cdot [C]^T \cdot [M] \cdot \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{q}} \quad (3.60)$$

Por tanto:

$$[C]^{-1} = [M_D]^{-1} \cdot [C]^T \cdot [M]d \quad (3.61)$$

### 3.2. Vibraciones forzadas en sistemas de múltiples grados de libertad

En esta sección se abordará el problema de determinar la solución para un sistema de múltiples grados de libertad cuando existe amortiguamiento. Consideraremos nuevamente el ejemplo del sistema formado por dos masas y dos resortes elásticos, pero en esta ocasión se considerará una fuerza armónica de tipo  $F(t) = P \text{sen}(\omega t)$  sobre la segunda masa, siendo  $P$  la amplitud de la fuerza, y  $\omega$  la frecuencia con la que se excita la masa 2.



**Figura 3.4** Sistema de 2 grados de libertad. Vibración forzada

Las ecuaciones del movimiento se obtienen aislando cada masa, y estableciendo el diagrama de cuerpo libre. Son las siguientes:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (3.62)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = P \text{sen}(\omega t) \quad (3.63)$$

Este sistema tendrá unas condiciones iniciales, de la forma:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= X_1; \quad \dot{x}_1(0) = V_1 \\ x_2(0) &= X_2; \quad \dot{x}_2(0) = V_2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Este sistema puede escribirse de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Simbólicamente, quedará como:

$$[M] \cdot \ddot{\vec{x}} + [K] \cdot \vec{x} = \vec{F} \quad (3.66)$$

Nótese que respecto del caso de vibraciones libres, se ha introducido un término en la derecha, que es el vector de fuerzas. En este caso,

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Para resolver el sistema, emplearemos nuevamente un cambio de base, mediante una matriz  $[C]$  tal que  $\vec{x} = [C] \cdot \vec{q}$ . Introduciendo el cambio de variable en el sistema, y premultiplicando por  $[C]^T$ , se tendrá:

$$[C]^T \cdot [M] \cdot [C] \cdot \ddot{\vec{q}} + [C]^T \cdot [K] \cdot [C] \cdot \vec{q} = [C]^T \cdot \vec{F} \quad (3.68)$$

Y puesto que la matriz  $[C]$  diagonaliza a  $[M]$  y  $[C]$  a la vez, el sistema será:

$$[M_D] \cdot \ddot{\vec{q}} + [K_D] \vec{q} = [C]^T \cdot \vec{F} \quad (3.69)$$

En este sistema, nótese que la parte de la izquierda ya se estudió cuando se vieron vibraciones libres, y la parte de la derecha, para el sistema de 2 masas que nos ocupa, puede verse como dos fuerzas armónicas. Si

$$[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

El término  $[C]^T \cdot \vec{F}$  será:

$$[C]^T \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ P \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{21} P \text{sen}(\omega t) \\ c_{22} P \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

En la ecuación (3.71) puede verse que la fuerza que actúa sobre la segunda masa genera dos fuerzas sobre cada modo de vibración. Considerando este vector de fuerza, y las matrices diagonales, el sistema quedará de la forma:

$$\begin{pmatrix} m_1^d & 0 \\ 0 & m_2^d \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^d & 0 \\ 0 & k_2^d \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{21} P \text{sen}(\omega t) \\ c_{22} P \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Quedando dos ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$m_1^d \ddot{q}_1 + k_1^d q_1 = c_{21} P \text{sen}(\omega t) \quad (3.73)$$

$$m_2^d \ddot{q}_2 + k_2^d q_2 = c_{22} P \text{sen}(\omega t) \quad (3.74)$$

$$(3.75)$$

La solución para cada función es la de un oscilador de 1 grado de libertad, sometido a un término de carga armónico. Sabemos resolver este tipo de ecuación. La solución es siempre suma de un término de la ecuación homogénea más una solución particular.

$$q_1(t) = q_1^h + q_1^p \quad (3.76)$$

$$q_2(t) = q_2^h + q_2^p \quad (3.77)$$

La solución homogénea aportará las constantes de integración, y tiene el mismo formato que el representado por las ecuaciones (3.17) y (3.18). La solución particular es, esencialmente, idéntica a la vista para el caso de 1 grado de libertad. En este caso, las posibilidades de resonancia se establecen para cada modo de vibración.

### 3.3. Consideración sobre el amortiguamiento

El problema general amortiguado tiene la siguiente estructura:

$$[M] \cdot \ddot{\vec{X}} + [D] \cdot \dot{\vec{X}} + [K] \cdot \vec{X} = \vec{F} \quad (3.78)$$

En general, no es posible encontrar una matriz  $[C]$  que diagonalice a la vez a las tres matrices que intervienen en el problema. Lo usual es realizar hipótesis sobre el amortiguamiento, que permitan reducir el problema a dos matrices  $[M]^*$  y  $[K]^*$ . Las hipótesis más habituales son las siguientes:

- Enriquecer la ecuación modal con una tasa de amortiguamiento. La idea es no considerar inicialmente el amortiguamiento, para encontrar una base de modos normales. Una vez establecida la ecuación modal, se introduce artificialmente

una tasa de amortiguamiento  $\zeta_n$  para el modo  $n$ . Así, la ecuación del modo  $n$  puede escribirse como:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n(t) = g_n(t) \quad (3.79)$$

Este tipo de amortiguamiento, con tasa de amortiguamiento modal constante, se considera en la Instrucción de Acciones en Puentes de Ferrocarril.

- Modelo de amortiguamiento proporcional. Consiste en definir la matriz  $[D]$  proporcional a las matrices de masa y rigidez. Esta es la base de modelos de amortiguamientos, como el de Rayleigh o Caughey.

$$[D] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (3.80)$$

Siendo  $\alpha$  y  $\beta$  dos parámetros a determinar. Este tipo de amortiguamiento se considera, por ejemplo, en la norma sísmica (NCSP para Puentes, por ejemplo).



# REFERENCIAS

---

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa. *Ecuaciones diferenciales (Shaum)*. McGraw-Hill, 1992.
2. Lev Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, 1992.
3. Tyn Myint-U and Lokenath Debnath. *Linear partial differential equations for scientists and engineers (Fourth Edition)*. Birkhäuser, 2007.
4. Murray R. Spiegel. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Prentice-Hall, 1981.