

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

UNIVERSO DI DE SITTER

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Federica Iannelli

Abstract

Lo scopo dell'elaborato è di studiare la geometria di de Sitter ovvero la soluzione nel vuoto delle equazioni di Einstein con un termine cosmologico. La trattazione viene sviluppata in due capitoli.

Il primo capitolo vuole motivare l'interesse alla soluzione di de Sitter presentando due fasi dell'evoluzione dell'universo, l'inflazione cosmologica e l'attuale espansione accelerata, entrambe descrivibili approssimativamente dalla geometria di de Sitter. Il secondo capitolo si concentra sull'analisi dello spaziotempo di de Sitter descrivendolo in quattro diversi sistemi di coordinate, analizzandone le geodetiche e studiandone la struttura causale attraverso i diagrammi di Penrose.

Indice

Introduzione	6
1 Inflazione cosmica ed espansione accelerata	9
1.1 Equazioni di Einstein	9
1.2 Costituenti dell'universo	11
1.2.1 Universo dominato dalla massa-energia	12
1.2.2 Universo dominato dalla costante cosmologica	14
1.3 Inflazione cosmica ed espansione accelerata dell'universo	15
1.3.1 Fattore di scala cosmico	15
1.3.2 Inflazione cosmica	18
1.3.3 Espansione accelerata	20
2 La soluzione di de Sitter	23
2.1 Universo di de Sitter	23
2.2 Spaziotempo di de Sitter	24
2.2.1 Impostazione matematica	24
2.2.2 Sistemi di coordinate	25
2.2.3 Geodetiche	36
2.2.4 Diagrammi di Penrose	50
Conclusioni	56
Bibliografia	58

Introduzione

La geometria di de Sitter è la soluzione nel vuoto delle equazioni di Einstein con un termine cosmologico e nella cosmologia contemporanea gioca un duplice ruolo. Prima di tutto l'aspetto unificante dei diversi modelli di inflazione risiede nel fatto che l'universo primordiale ha subito una fase di espansione esponenziale descritta approssimativamente dalla geometria di de Sitter.

Il secondo motivo di interesse della geometria de Sitter sta nei dati di osservazione degli ultimi anni, tra cui le osservazioni sulle distanze delle supernove, che puntano verso un'espansione accelerata dell'universo.

Queste osservazioni hanno stravolto idee consolidate indicando che l'effetto gravitazionale della maggior parte del contenuto di energia dell'universo è simile alla costante cosmologica di Einstein. Questa forma di energia è chiamata energia oscura.

I dati raccolti dal satellite WMAP hanno confermato che l'universo è descritto dal modello Λ CDM con la componente di energia oscura equivalente ad una costante cosmologica positiva che costituisce circa tre quarti del suo contenuto di energia totale. Infatti mentre nell'universo primordiale il contributo della costante cosmologica alla densità di energia totale è stato trascurabile, con l'espansione dell'universo la densità di energia delle altre componenti (materia, materia oscura, radiazione, neutrini e onde gravitazionali) è andato decrescendo fino a che a un certo punto la costante cosmologica è diventata dominante. Una soluzione cosmologica spazialmente omogenea delle equazioni di Einstein in cui l'unica sorgente è la costante cosmologica è lo spaziotempo di de Sitter, che descrive un universo vuoto sempre in accelerazione.

Quindi la geometria de Sitter sembra assumere il ruolo di geometria di riferimento dell'universo.

Capitolo 1

Inflazione cosmica ed espansione accelerata

1.1 Equazioni di Einstein

La teoria della relatività generale pubblicata da Albert Einstein nel 1916, ha tra i vari meriti quello di aver gettato le basi della cosmologia moderna. Il risultato forse più importante di questa teoria è la relazione tra la struttura geometrica dello spaziotempo e le sorgenti gravitazionali identificabili nella massa-energia. Questa relazione è espressa formalmente dalle equazioni di campo di Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

dove $G_{\mu\nu}$ è il tensore di Einstein, G_N è la costante di gravitazione di Newton e ha il ruolo fisico di convertire massa in energia, $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di curvatures di Ricci, R è la curvatura scalare e $g_{\mu\nu}$ è la metrica dello spazio tempo.

$T_{\mu\nu}$ contiene tutte le informazioni sulla densità di massa-energia [1] e l'Eq. (1.1) permette di interpretare la gravità come geometria dello spaziotempo: la materia determina la curvatura dello spazio tempo [2].

Ne deriva un approccio innovativo allo studio della gravitazione.

L'Eq. (1.1), è in realtà un sistema di dieci equazioni non lineari difficilmente risolvibili in maniera esatta (cioè non quantistica). Tuttavia per sistemi fisici dotati di particolari simmetrie si possono trovare soluzioni relativamente semplici. Per esempio pochi mesi dopo la pubblicazione della teoria di Einstein, Karl Schwarzschild trova una soluzione per una sorgente statica a simmetria sferica e priva di carica elettrica.

L'Eq (1.1) non ammette una soluzione in grado di descrivere un universo statico, ma prevede un universo dinamico in contrazione o in espansione, per cui Einstein nel 1917, ritenendo che l'universo dovesse essere statico e quindi di dover contrastare in particolare la prima possibilità, cioè quella di un collasso gravitazionale

dovuto alla gravità, pensò di introdurre una costante Λ che compensasse la tendenza a contrarsi (o ad espandersi secondo altri modelli) dello spazio, modificando l'Eq. (1.1) nel modo seguente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Nello stesso anno Willem de Sitter propose una soluzione esatta di queste equazioni postulando un universo vuoto in cui le forze gravitazionali sono trascurabili.

Nel 1922 Alexander Friedman prendendo come ipotesi il *principio cosmologico* (*CP*) che afferma che l'universo è omogeneo e isotropo su larga scala, e considerando una visione idealizzata secondo cui i costituenti dell'universo formerebbero un fluido perfetto con densità e pressione costante, aveva proposto una soluzione dell'Eq. (1.1) che descriveva un universo non statico, in espansione o in contrazione.

Un supporto sperimentale a questo modello (come a qualsiasi altro modello che descriva un universo non statico) arrivò nel 1929 con le osservazioni dell'astrofisico Edwin Hubble che per la prima volta ipotizzò su basi sperimentali la possibilità di un universo in espansione. I dati di Hubble infatti dimostrano che le galassie più distanti da noi si allontanano con velocità maggiori rispetto a quelle più vicine. Questo comportamento è descritto dalla legge di Hubble, secondo cui esiste una relazione lineare tra il redshift della luce emessa dalle galassie e la loro distanza [3].

Con gli studi di Hubble la teoria dell'universo stazionario divenne marginale e le speculazioni scientifiche si concentrarono su come potesse essere stata l'evoluzione dell'universo fino al momento attuale. Studiando i modelli di Friedmann sono state trovate delle soluzioni che descrivono l'evoluzione a ritroso nel tempo come una contrazione. Parallelamente alla contrazione si ha una diminuzione delle dimensioni dell'universo ed un aumento della temperatura. Si giunse così a formulare la teoria del *Big Bang* che descrive l'inizio del cosmo come una singolarità spaziotemporale: uno stato in cui le dimensioni dell'intero universo tendono a zero, mentre temperatura e densità tendono a infinito. Nessun modello fisico è adeguato a descrivere queste condizioni iniziali. Un'osservazione fondamentale a supporto della teoria del Big Bang fu quella della *radiazione cosmica di fondo* (*CMBR*) osservata per la prima volta nel 1964 dai ricercatori Arno Penzias e Robert Wilson. Oltre a dare delle risposte la *CMBR* ha posto un problema fondamentale noto come *problema dell'orizzonte*, infatti osservando la *CMBR*, si registra una omogeneità dell'universo difficilmente spiegabile con la teoria classica del Big Bang. Non si comprende come punti diversi dell'universo molto distanti tra loro presentino le stesse caratteristiche fisiche.

Il problema dell'orizzonte, così come altri problemi che presenteremo in seguito, troverà una soluzione con la *teoria dell'inflazione*. Tale teoria ipotizza una espansione esponenziale dell'universo nelle sue fasi iniziali.

Dalla fine degli anni '90 è stato osservato che la velocità di espansione del nostro universo sta aumentando, cioè l'espansione cosmologica ha ricominciato ad

accelerare, quindi possiamo dire che l'universo sta presentando un comportamento simile al periodo dell'inflazione. Dei modelli di Friedmann che descrivono un universo non statico, nessuno prevede un'accelerazione positiva per cui la costante cosmologica torna ad essere un elemento indispensabile nello studio dell'evoluzione dell'universo, in particolare per spiegare le fasi di espansione cosmologica accelerata.

La soluzione più semplice dell'Eq. (1.2) che descrive questo comportamento è lo spaziotempo di de Sitter, che sarà presentato e discusso nel capitolo 2.

1.2 Costituenti dell'universo

L'universo evolvendosi ha attraversato diverse fasi a seconda della percentuale relativa delle sue componenti. Ciò significa che in base al periodo preso in esame l'universo può essere costituito in maggior percentuale da alcune sostanze invece che da altre.

Assumendo che l'universo sia pervaso da un fluido perfetto, il tensore energia-impulso di tale fluido può essere scritto nel modo seguente

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

dove $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$ sono rispettivamente la densità e la pressione del fluido, e la velocità di quest'ultimo vale $U_\mu = (1, 0, 0, \dots, 0)$ in quanto risulta fermo rispetto ad un osservatore comovente.

In forma matriciale

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & pg_{ij} \end{bmatrix} \Rightarrow T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (1.4)$$

L'Eq. (1.4) soddisfa l'equazione di continuità $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$. La componente-00 di questa equazione comporta la conservazione locale dell'energia,

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.5)$$

dove $a = a(t)$ è il fattore di scala cosmico, $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ e

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \quad (1.6)$$

è il parametro di Hubble. L'Eq. (1.5) è equivalente alla legge di conservazione per una trasformazione adiabatica $dE = -pdV$ in un elemento di volume dV , $V \propto a^3$, dove ρdV rappresenta il decremento dell'energia gravitazionale in seguito all'espansione e $p dV$ il lavoro fatto dall'espansione.

Assumiamo ora una equazione di stato per il fluido,

$$p = \omega\rho, \quad (1.7)$$

dove ω è una costante. La conservazione dell'energia sarà data da

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.8)$$

In base al valore assunto da ω si distinguono tre casi che corrispondono a tre possibili stati dell'universo in cui a dominare sono rispettivamente la materia, la radiazione o la costante cosmologica Λ .

1.2.1 Universo dominato dalla massa-energia

- **Materia**

In questo caso il fluido cosmico è costituito da materia fredda, non relativistica nella forma di polvere; oltre alla gravità non è presente nessun'altra forza, inoltre $\omega = 0$, quindi $p = 0$. Per cui l'Eq. (1.8) implica

$$\rho_m = \frac{E}{V} \propto a^{-3}, \quad (1.9)$$

che concorda con il fatto che la massa propria delle particelle di tipo polvere, $E \sim m_0$, è un'invariante e che per l'elemento di volume vale la relazione di proporzionalità

$$V \propto a \propto a \propto a. \quad (1.10)$$

- **Radiazione**

L'universo è riempito da un gas caldo ultra relativistico, la cui massa risulta essere trascurabile così come la traccia del tensore energia-impulso.

$$T = (-\rho + 3p) = 0. \quad (1.11)$$

da cui risulta che

$$p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \omega = \frac{1}{3} \quad (1.12)$$

e

$$\rho_r = \frac{E}{V} \propto a^{-4}. \quad (1.13)$$

Infatti la relazione di proporzionalità per il volume è la stessa dell'Eq. (1.10) e l'energia dei fotoni subisce un redshift conforme a

$$E \propto a^{-1}. \quad (1.14)$$

Naturalmente non ha senso considerare il sistema di riferimento scelto comovente con i fotoni. Quindi l'unica definizione possibile del sistema di riferimento utilizzato è data dal CP , oppure che le coordinate sono tali che $\rho_r = \rho_r(t)$ e $p_r = p_r(t)$.

Curvatura dello spaziotempo causata dalla massa-energia ordinaria

Per un universo con una distribuzione uniforme di massa e senza costante cosmologica, vale l'Eq. (1.1) che riscriviamo per comodità

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

Per una curvatura piccola, $g_{\mu\nu}$ può essere approssimato dalla metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

e in questo caso, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ poiché $g^{\mu\nu}$ è definito dalla matrice identità 4×4 $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^{\mu\alpha}$. Usando questa approssimazione e moltiplicando l'Eq. (1.1) per $g^{\nu\mu}$

$$g^{\nu\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N g^{\nu\mu}T_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad R^\nu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\nu R = 8\pi G_N g^{\nu\mu}T_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} &\approx Tr \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \\ &= Tr \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} = -\rho + 3p. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Per cui risulta che

$$-R = 8\pi G_N(-\rho + 3p) \quad \Rightarrow \quad R = 8\pi G_N(\rho - 3p). \quad (1.18)$$

Quindi la curvatura è positiva se $\rho > 3p$ ed è negativa se $3p > \rho$.

La massa-energia presente nel nostro universo ha una pressione molto piccola, $p \approx 0$, tuttavia questa costituente produce un'accelerazione dell'universo $\propto -(\rho + 3p)$, ossia una decelerazione che ne rallenta l'espansione.

1.2.2 Universo dominato dalla costante cosmologica

Le osservazioni mostrano che andando indietro nel tempo ρ_r aumenta rapidamente, per cui per molto tempo si è pensato che nelle prime fasi la dinamica dell'universo fosse stata controllata dalla radiazione e che attualmente fosse controllata dalla materia.

Grazie al lavoro dei fisici Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt e Adam Riess possiamo affermare che oggi l'universo sta attraversando una fase di espansione accelerata e questo non è compatibile con gli effetti prodotti dalla materia, per cui tra le possibili componenti dell'universo bisogna includere un fluido con equazione di stato

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad \omega = -1, \quad \rho_\Lambda \propto 1. \quad (1.19)$$

dove Λ è la costante cosmologica.

L'esatta natura di questa componente che ha l'effetto di accelerare l'espansione dell'universo non è affatto chiara, per questo è indicata con il termine *energia oscura*.

Energia del vuoto

La maggior parte delle teorie della fisica delle particelle predice fluttuazioni quantistiche del vuoto che determinano la continua comparsa e annichilazione di particelle e antiparticelle, e che conferirebbero al vuoto un'energia detta *energia del vuoto*. Infatti l'esistenza di un vuoto privo di energia comporterebbe l'annullamento simultaneo della posizione e della velocità di una particella, contraddicendo il principio d'indeterminazione [4].

La teoria quantistica dei campi, che descrive le interazioni fra le particelle elementari in termini di campo, contribuisce alla dimostrazione dell'esistenza di questa energia identificandola con l'energia di punto zero. Poiché l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva arbitraria, il valore dell'energia del vuoto potrebbe essere considerato non importante.

Tuttavia se si considera anche la forza di gravità, l'energia del vuoto determina conseguenze sull'espansione dell'universo.

Infatti il lavoro prodotto da una variazione di volume dV è pari a $-pdV$, dove p è la pressione. Ma dal momento che l'energia è uguale a ρV , dove ρ è la densità dell'energia del vuoto, la quantità di energia in un contenitore vuoto aumenta all'aumentare del volume, per cui dV è positivo.

Quindi l'energia del vuoto ha una pressione negativa equivalente alla sua densità, e questo porta ad identificare l'energia oscura con l'energia del vuoto. La densità di energia del vuoto e la conseguente pressione negativa rimangono costanti durante l'espansione, mentre la densità di energia della materia, cioè l'attrazione gravitazionale, si riduce e questo determina l'accelerazione dell'espansione. L'energia del vuoto, assumerà pertanto il ruolo di costante cosmologica positiva antigravitazionale. Un universo costituito solo dall'energia del vuoto si comporta come uno *spaziotempo di de Sitter*.

Le considerazioni riguardo alla curvatura dello spaziotempo causata dalla costante cosmologica saranno espone nel prossimo capitolo.

1.3 Inflazione cosmica ed espansione accelerata dell'universo

L'inflazione cosmica e l'espansione accelerata sono due fasi attraversate dall'universo durante la sua evoluzione. Queste due fasi spesso sono messe in relazione in quanto presentano caratteristiche molto simili tanto da poter essere descritte formalmente con lo stesso modello matematico. Entrambi i casi infatti prevedono un universo dominato da una costante cosmologica positiva che è approssimativamente descritto dallo spaziotempo di de Sitter.

Prima di parlare anche solo brevemente di inflazione ed espansione accelerata è utile introdurre in maniera formale il fattore di scala cosmico $a(t)$.

1.3.1 Fattore di scala cosmico

Il fattore di scala cosmico $a(t)$ è adimensionale e parametrizza l'espansione dell'universo. L'equazione dinamica per il fattore $a(t)$ si ricava a partire dalla metrica di Friedmann-Robertson-Walker (*FRW*), che è univocamente identificata dall'omogeneità e isotropia dell'universo. L'espressione matematica di tale metrica è

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.20)$$

dove l'origine $r = 0$ è del tutto arbitraria e t è il tempo cosmologico, ossia il tempo proprio di un osservatore comovente con il fluido cosmico omogeneo e isotropo, per r , θ e ϕ costanti. Inoltre $\{t, r, \theta, \phi\}$ sono dette coordinate comoventi e k è detta costante di curvatura scalare. Quest'ultima potrebbe assumere qualsiasi valore reale, tuttavia, per $k \neq 0$, riscalandolo opportunamente r ed a , si avrà sempre

$k = \pm 1$. Il valore assunto da k caratterizza la topologia dell'ipersuperficie di tipo spazio Σ_t :

- **Universo piatto:** $k = 0 \Rightarrow \Sigma_t$ è piatta.
- **Universo chiuso:** $k = 1 \Rightarrow \Sigma_t$ è una sfera 3-dimensionale.
- **Universo aperto:** $k = -1 \Rightarrow \Sigma_t$ è un iperboloide 3-dimensionale.

Dalla forma specifica della metrica FRW (1.20) si ricavano le equazioni di Friedmann

$$G_{00} = 8\pi G_N T_{00} \Rightarrow 3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 8\pi G_N \rho \quad (1.21)$$

$$G_{ii} = 8\pi G_N T_{ii} \Rightarrow 3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G_N (\rho + 3p) \quad (1.22)$$

che sono le equazioni di campo di Einstein applicate al sistema-universo una volta che si sia ipotizzato il principio cosmologico. L'Eq. (1.21) tecnicamente è un vincolo che seleziona le possibili combinazioni delle condizioni iniziali

$$\begin{cases} a(t_0) = a_0 \\ \dot{a}(t_0) = \dot{a}_0 \end{cases}$$

per l'Eq. (1.22) che è la vera equazione dinamica per il fattore di scala. Definiamo inoltre il parametro di decelerazione q

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{a^2} \quad (1.23)$$

e il parametro di densità Ω

$$\Omega = \frac{8\pi G_N}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{critico}} \quad (1.24)$$

dove

$$\rho_{critico} = \frac{3H^2}{8\pi G_N}. \quad (1.25)$$

Per cui l'Eq. (1.21) può essere riscritta come segue

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (1.26)$$

e si possono trarre le seguenti conseguenze:

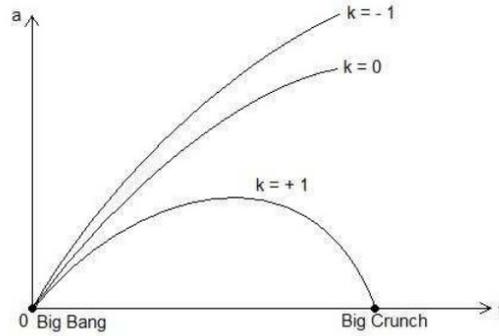


Figura 1.1: Evoluzione di $a = a(t)$ per $k = 0, \pm 1$.

- $\rho < \rho_{critico} \Leftrightarrow \Omega < 1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow$ Universo Aperto.
- $\rho = \rho_{critico} \Leftrightarrow \Omega = 1 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow$ Universo Piatto.
- $\rho > \rho_{critico} \Leftrightarrow \Omega > 1 \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ Universo Chiuso.

La curvatura spaziale k determina l'evoluzione del fattore di scala (Fig. 1.1). Le osservazioni suggeriscono che il nostro universo sia molto prossimo ad essere piatto ($\Omega \simeq 1$). Assumendo che l'universo sia piatto si possono osservare diversi andamenti del fattore di scala a seconda di quale sia la componente dominante:

- **Universo piatto dominato dalla materia**

$$\begin{cases} \rho_m \sim \frac{1}{a^3} & \Rightarrow & \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim \frac{1}{a^3} \\ a\dot{a}^2 \sim 1 & \Rightarrow & \sqrt{a} da \sim dt \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} \sim t \quad (1.27)$$

- **Universo piatto dominato dalla radiazione**

$$\begin{cases} \rho_r \sim \frac{1}{a^4} & \Rightarrow & \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim \frac{1}{a^4} \\ a\dot{a}^2 \sim 1 & \Rightarrow & a da \sim dt \end{cases} \Rightarrow a^2 \sim t \quad (1.28)$$

- **Universo piatto dominato dall'energia del vuoto**

$$\begin{cases} \rho_\Lambda \sim \Lambda & \Rightarrow & \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim \frac{\Lambda}{3} \\ \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \sim \frac{\dot{a}}{a} = H_0 & \Rightarrow & a \sim e^{H_0 t} \end{cases} \text{ (Universo de Sitter)} \quad (1.29)$$

$H^0 \equiv H(t_0)$ è il valore attuale del parametro di Hubble e si chiama *costante di Hubble*¹.

Introducendo un valore positivo di Λ nelle equazioni di Friedmann, la costante cosmologica assume il ruolo di contrastare la forza gravitazionale attrattiva, consentendo una accelerazione nell'espansione dell'universo.

Le osservazioni che portano ad assumere $\Omega \simeq 1$ implicano una densità media

$$\rho_0 = \rho_0 \simeq 10^{-29} \text{g/cm}^3. \quad (1.30)$$

La sorgente che contribuisce con maggiore percentuale

$$\frac{\rho_{DE}}{\rho_0} \simeq 75\%. \quad (1.31)$$

al valore di ρ_0 è l'energia oscura la cui presenza è richiesta dall'attuale valore negativo del parametro di decelerazione ($q_0 < 0$ cioè $\ddot{a}_0 > 0$).

1.3.2 Inflazione cosmica

La teoria dell'inflazione fu sviluppata tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80 grazie al contributo di diversi fisici tra cui Alexei Starobinski, Alan Guth e Andrei Linde. L'idea fondamentale è che $\sim 10^{-30}$ secondi dopo il big bang l'universo sia entrato in una fase di espansione esponenziale, quindi in una fase di espansione molto più rapida di quanto previsto dallo scenario standard. Questa espansione accelerata è formalizzata da

$$\ddot{a}(t) > 0 \quad (1.32)$$

e il meccanismo che la determina deriva dalle teorie fisiche moderne dette GUT (teorie di grande unificazione), che cercano di unificare tre delle quattro forze fondamentali. In particolare questo meccanismo si basa sull'esistenza di un campo scalare (inflatone) introdotto per rompere la simmetria tra queste forze. Senza scendere troppo nel dettaglio possiamo cogliere il nocciolo delle idee alla base dell'inflazione semplicemente usando il risultato per cui in questa fase l'universo è dominato dalla densità di energia del vuoto del campo scalare.

L'idea dell'inflazione ha suscitato molto interesse perché è in grado di risolvere diversi problemi che sorgono nei modelli cosmologici standard e in particolare il *problema dell'orizzonte* e il *problema della piattezza* [5].

¹In quasi tutti i modelli cosmologici (in particolare in tutti quelli basati sull'ipotesi del Big Bang) la costante di Hubble è costante solo nel senso che se in questo momento (cioè nello stesso istante di tempo cosmologico) noi ripetessimo la sua misura in qualunque altro punto dell'universo, otterremmo il medesimo valore. Questo valore però cambia nel tempo. Per riferirsi ad $H(t)$ si usa il termine parametro di Hubble, mentre con costante di Hubble H_0 si intende il valore attuale.

Problema dell'orizzonte

Il problema dell'orizzonte è equivalente al problema della isotropia della CMBR. L'universo osservabile è altamente omogeneo e isotropo su grande scala. Uno studio dettagliato rivela che questo è possibile solo se l'universo era altamente omogeneo e isotropo anche nelle sue primissime fasi. Questa analisi porta anche alla conclusione che la regione che si è evoluta diventando l'universo osservabile sarebbe stata troppo grande perché i punti che la compongono fossero causalmente connessi, cioè non ci sarebbe stato tempo perché l'informazione viaggiando alla velocità della luce, potesse connettere tutti i punti della regione. Per questo non si è in grado di spiegare l'omogeneità e l'isotropia dell'universo primordiale ricorrendo alle forze fisiche, a meno che le forze che creano le condizioni iniziali siano in grado di violare il principio di causalità.

L'inflazione supera questo problema perché permette di supporre che la regione di spazio che si è evoluta nell'universo oggi osservabile fosse molto più piccola dell'orizzonte. (La CMBR ebbe origine dopo la fine dell'espansione, questo spiega il motivo per cui nonostante sia isotropa non riusciamo ad osservare l'intero universo).

Analizziamo il problema da un punto di vista formale. Consideriamo due segnali provenienti da direzioni opposte. Dalla metrica FRW si trova che i coni di luce sono definiti dall'equazione

$$ds^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dt = a dr \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{dt}{a} \quad (1.33)$$

Supponiamo di essere in $r = 0$ e integriamo l'espressione precedente lungo il cono di luce, da $t = -t_s$ all'istante attuale ($t = 0$). Quindi troviamo la coordinata radiale comovente dell'origine,

$$r_s = \int_0^{t_s} dr \sim \int_{-t_s}^0 \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.34)$$

Se l'universo è dominato dalla materia o dalla radiazione, si ottiene

$$a(t) \sim t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad r_s \sim t_s^{1-\alpha}. \quad (1.35)$$

Quindi la distanza propria percorsa dai fotoni è

$$R \sim a(-t_s)r_s = t_s^\alpha t_s^{1-\alpha} = t_s, \quad (1.36)$$

inoltre

$$\dot{a} \sim t^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \sim t^{-1}, \quad (1.37)$$

e l' *orizzonte delle particelle*

$$R_H \sim \frac{1}{H(-t_s)} \sim t_s \quad (1.38)$$

aumenta nel tempo (più l'universo entra in contatto causale con un dato osservatore).

Invece, in un universo dominato dalla costante cosmologica

$$a(t) \sim e^{H_0 t} \quad \Rightarrow \quad r_s \sim \frac{-e^{H_0 t}}{H_0} \quad (1.39)$$

pertanto l'orizzonte delle particelle sembra restare alla stessa distanza dall'osservatore centrale,

$$R \sim e^{H_0 t_s} r_s \sim \frac{1}{H_0}. \quad (1.40)$$

Problema della piattezza

Il problema della piattezza consiste nella necessità di una regolazione estremamente fine delle condizioni iniziali sulla curvatura per dare origine ad un universo compatibile con le osservazioni attuali, ossia molto prossimo all'essere piatto e che in particolare richiedono che nell'universo primordiale $\Omega \approx 1$. Se k non è nullo allora Ω tende ad essere rapidamente molto diverso da 1.

L'inflazione supera questo problema perché l'espansione esponenziale rende l'universo quasi piatto: immaginando l'universo come un pallone e pensando che la superficie curva del pallone rappresenti lo spazio curvo, se il pallone non viene gonfiato molto, la curvatura è grande, mentre se viene gonfiato in grande misura la sua superficie diventa quasi piatta.

1.3.3 Espansione accelerata

L'espansione accelerata fu scoperta nel 1998 da due progetti indipendenti, il Supernova Cosmology Project e l'High-Z Supernova Search Team. Entrambi misurarono l'accelerazione dell'universo usando supernove di tipo Ia.

L'idea è che poiché le supernove di tipo Ia hanno la stessa luminosità intrinseca possono essere usate come candele standard. Inoltre gli oggetti più lontani appaiono meno luminosi, quindi possiamo ricavare la distanza di queste supernove misurandone la luminosità. La distanza può essere messa in relazione con il redshift delle supernove in modo da fornire una misura della velocità di espansione dell'universo. Questa relazione verrà formalizzata nel prossimo capitolo.

Si ritiene che l'espansione dell'universo abbia avuto inizio nel momento in cui è entrato nell'era dominata dalla materia oscura, circa 4 miliardi di anni fa. I

risultati del WMAP hanno confermato che un'espansione accelerata dell'universo è compatibile con un valore positivo della costante cosmologica Λ , equivalente alla presenza di un'energia del vuoto positiva con cui viene identificata la materia oscura che costituisce circa tre quarti del contenuto totale di energia dell'universo ($0.728 \leq \Omega_\Lambda \leq 0.738$) [6]. Nonostante ci siano spiegazioni alternative, questa è la descrizione accettata dall'attuale modello standard della cosmologia, il modello Λ CDM (che include anche la materia oscura fredda: Cold Dark Matter). Nonostante nel periodo dell'inflazione il fattore di scala fosse molto più piccolo dell'espansione attuale, fu comunque un periodo di espansione accelerata, per cui presenta caratteristiche molto simili all'accelerazione attuale.

Capitolo 2

La soluzione di de Sitter

2.1 Universo di de Sitter

L'universo de Sitter è una soluzione cosmologica delle equazioni di campo di Einstein. Si tratta di un modello spazialmente piatto che trascura la materia ordinaria in modo tale che la dinamica dell'universo sia dominata dalla costante cosmologica. Tale modello è dunque utilizzabile per spiegare l'energia oscura e il campo inflatone dell'universo primordiale. Infatti i modelli di inflazione cosmica e le attuali osservazioni dell'accelerazione dell'universo convergono su un modello di universo primordiale che, fino a circa 10^{-33} secondi dopo il Big Bang, può essere descritto come un universo de Sitter (singolarità gravitazionale).

Come emerge dall'Eq. (1.29), la costante cosmologica determina il tasso di espansione H dell'universo: più è grande la costante cosmologica più è alto il tasso di espansione.

Nel paragrafo 2.2 vedremo che lo spaziotempo di de Sitter può essere descritto da vari sistemi di coordinate, tra cui le coordinate statiche, quindi diversamente dai modelli *FRW* può essere pensato come una soluzione statica delle equazioni di Einstein.

In una classe di modelli con diversi valori della costante di Hubble, l'universo statico sviluppato da Einstein può essere considerato come un caso speciale dell'universo de Sitter, nel quale l'espansione inflativa è leggermente positiva e finemente sintonizzata per annullare il collasso gravitazionale associato alla densità della materia.

Come modello per l'universo fisico, la soluzione di de Sitter non era considerata applicabile al nostro universo osservabile, fino a quando non furono sviluppati dei modelli per l'inflazione cosmica e per l'energia oscura. Prima di allora si ipotizzava che il Big Bang implicasse solo l'accettazione del più debole principio cosmologico, che ritiene l'isotropia valida solo per estensioni spaziali ma non per estensioni temporali.

Quindi un'applicazione dello spazio de Sitter modella l'universo primordiale durante l'inflazione cosmica. Molti modelli inflazionistici sono solo approssimativamente

de Sitter e possono essere modellati dando al parametro di Hubble una dipendenza dal tempo lieve.

L'universo de Sitter descrive con buona approssimazione anche l'attuale espansione accelerata dell'universo. L'espansione esponenziale del fattore di scala implica che la distanza fisica tra due osservatori abbastanza lontani tra loro a un certo punto crescerà più velocemente della velocità della luce, a quel punto i due osservatori non saranno più in grado di entrare in contatto causale tra loro. Pertanto un osservatore in un universo de Sitter vede un orizzonte degli eventi oltre il quale non può vedere né apprendere informazioni.

2.2 Spaziotempo di de Sitter

A causa della complessità delle equazioni di campo si possono trovare soluzioni esatte solo in spazi piuttosto simmetrici. Inoltre le soluzioni esatte sono idealizzate in quanto si assume che ogni regione dello spaziotempo contenga forme di materia o di energia piuttosto semplici. Tuttavia le soluzioni esatte danno un'idea delle caratteristiche qualitative che possono sorgere in relatività generale e quindi delle possibili proprietà delle soluzioni realistiche delle equazioni di campo [7].

2.2.1 Impostazione matematica

In questo paragrafo saranno introdotte le nozioni di base per studiare la geometria classica dello spaziotempo de Sitter in d -dimensioni dS_d , in modo da avere una trattazione che sia il più generale possibile.

Lo spaziotempo dS_d può essere definito come una sottovarietà di uno spaziotempo di Minkowski aumentato di una dimensione $\mathcal{M}^{d,1}$.

Per uno spaziotempo dS_d , il tensore energia-impulso della materia, $T_{\mu\nu}$ nell'Eq. (1.2) si annulla, e dS_d può essere considerato come la soluzione delle equazioni di Einstein [8]

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

per uno spaziotempo vuoto con energia del vuoto costante e positiva ($\Lambda > 0$):

$$T_{\mu\nu}^{vuoto} \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G_N} g_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

La sola componente non banale dell'Eq. (2.1) è

$$R = \frac{2d}{d-2}\Lambda > 0. \quad (2.3)$$

Questo significa che lo spaziotempo di de Sitter è massimamente simmetrico e la sua struttura locale è caratterizzata da una curvatura scalare costante e positiva tale che

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{d(d-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R. \quad (2.4)$$

Poiché la curvatura scalare (2.3) è costante ovunque, dS_d non presenta singolarità, e questo è confermato dallo scalare

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2}{d(d-1)}R^2 = \frac{8d^2}{d(d-1)(d-2)^2}\Lambda^2. \quad (2.5)$$

Può essere utile introdurre una tabella che riassume le definizioni delle principali quantità tensoriali

	definizione
Jacobiano	$g \equiv \det(g_{\mu\nu})$
Connessione	$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\nu}g_{\sigma\rho} + \partial_{\rho}g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}g_{\nu\rho})$
Derivata covariante	$\nabla_{\mu}A^{\nu} \equiv \partial_{\mu}A^{\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}A^{\rho}$
Tensore di Riemann	$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} \equiv \partial_{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\rho\nu}^{\mu} + \Gamma_{\rho\tau}^{\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\tau} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\tau}$
Tensore di Ricci	$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$
Curvatura scalare	$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$
Tensore di Einstein	$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R$

2.2.2 Sistemi di coordinate

In questo paragrafo vengono introdotti quattro sistemi di coordinate e le trasformazioni di coordinate che collegano un sistema all'altro. Come nel caso di uno spaziotempo piatto, la simmetria di una varietà Riemanniana si ottiene dall'invarianza della metrica sotto trasformazioni simmetriche. In particolare, scegliamo un sistema di coordinate $(x^{\mu}, g_{\mu\nu})$ e consideriamo una trasformazione $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$. Se la metrica $g_{\mu\nu}$ è un invariante (in forma) per la trasformazione

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) \quad (2.6)$$

per tutte le coordinate x^{μ} , tale trasformazione è detta *isometria*. Poiché ogni trasformazione finita e continua, con Jacobiano non nullo può essere costruita con una somma di infinite trasformazioni infinitesime, è sufficiente studiare le isometrie continue per trasformazioni infinitesime. Se consideriamo una trasformazione infinitesima di coordinate

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon X^{\mu}(x) \quad (2.7)$$

dove ε è un parametro molto piccolo e X^{μ} è un campo vettoriale, dall'espansione della forma-invariante (2.6) si ottengono le equazioni di Killing

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}g_{\mu} \equiv X^{\rho}\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\partial_{\mu}X^{\rho} = 0, \quad (2.8)$$

dove $\mathcal{L}_{\vec{X}}$ è la derivata di Lie lungo il campo vettoriale \vec{X} . Ogni X^{μ} dato da una soluzione delle equazioni di Killing (2.8) è detto campo vettoriale di Killing. Nei paragrafi successivi saranno esaminate le simmetrie di Killing di ogni sistema di coordinate.

Una buona visualizzazione di dS_d si ottiene immergendo tale spaziotempo in uno spaziotempo piatto $(d+1)$ -dimensionale. In uno spaziotempo di Minkowski $(d+1)$ -dimensionale, l'equazione di Einstein è banalmente soddisfatta

$$0 = {}^{d+1}R \equiv g^{AB}R_{AB} = R + R_{dd}, \quad (2.9)$$

dove gli indici A, B, \dots , rappresentano le $(d+1)$ dimensioni dello spaziotempo di Minkowski, e vanno da 0 a d . Se poniamo

$$R_{dd} = -\frac{2d}{d-2}\Lambda$$

che implica una costante di curvatura positiva dello spazio immerso, si ottiene l'equazione di Einstein d -dimensionale (2.3) di dS_d .

La topologia di tale spaziotempo d -dimensionale con costante di curvatura positiva è visualizzata assumendo come vincolo algebrico l'iperboloide

$$\eta_{AB}X^AX^B = l^2, \quad (2.10)$$

nello spaziotempo di Minkowski piatto $\mathcal{M}^{d,1}$ $(d+1)$ -dimensionale dove $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$, ed l è una scala di lunghezza cosmologica pari a $\sqrt{3}/\Lambda$ conosciuta come *lunghezza di Hubble* o *raggio di de Sitter* [9].

Quindi la metrica dello spaziotempo piatto $(d+1)$ -dimensionale definita a livello globale è

$$ds^2 = \eta_{AB}dX^AdX^B, \quad (2.11)$$

vincolata dall'equazione dell'iperboloide (2.10).

Con l'introduzione del vincolo si può dimostrare che vale la seguente relazione per la curvatura scalare

$$R = \frac{d(d-1)}{l^2}, \quad (2.12)$$

e si ottiene anche una relazione tra la costante cosmologica Λ e la lunghezza l tale che

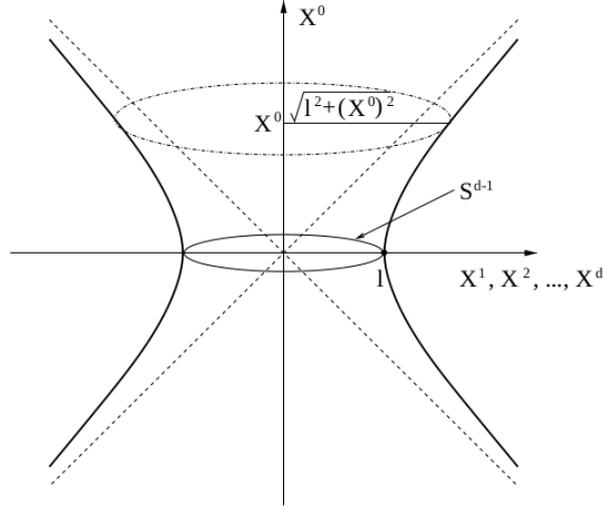


Figura 2.1: Iperboloide d -dimensionale che illustra lo spaziotempo di de Sitter immerso in $(d + 1)$ -dimensioni.

$$\Lambda = \frac{(d-1)(d-2)}{2l^2}. \quad (2.13)$$

Con una trasformazione simmetrica di Weyl è sempre possibile riscalfare l in modo che sia pari a 1:

$$X^A \rightarrow X'^A = e^{-\omega} X^A = \frac{X^A}{l}, \quad (2.14)$$

dove ω è il parametro della trasformazione.

Pertanto dS_d è definito come un'ipersuperficie (iperboloide) d -dimensionale immersa in uno spaziotempo piatto $(d + 1)$ -dimensionale, e la topologia globale è cilindrica, essendo $\mathbb{R} \times S^{d-1}$, dove S^{d-1} è una sfera $(d - 1)$ -dimensionale (Fig. 2.1).

Coordinate globali (chiuse) $(\tau, \theta_i) \quad i = 1, 2, \dots, d - 1$

Un sistema di coordinate che ricopre tutto l'iperboloide d -dimensionale si ottiene dalle seguenti osservazioni: come mostrato in Fig. 2.1, la relazione tra X^0 e la distanza spaziale (X^1, X^2, \dots, X^d) è iperbolica e le superfici spaziali con X^0 costante definiscono delle sfere d -dimensionali di raggio $\sqrt{l^2 + (X^0)^2}$. Pertanto una scelta conveniente che soddisfi l'equazione del vincolo (2.10) è

$$\begin{aligned} X^0 &= l \sinh \frac{\tau}{l} \\ X^\alpha &= l \omega^\alpha \cosh \frac{\tau}{l} \quad (\alpha = 1, \dots, d), \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove $-\infty < \tau < \infty$ e ω^α è tale che

$$\sum_{\alpha=1}^d (\omega^\alpha)^2 = 1. \quad (2.16)$$

Di conseguenza avremo $(d-1)$ variabili angolari θ_i , $i = 1, 2, \dots, d$, tali che

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \cos \theta_1, & 0 \leq \theta_1 < \pi, \\ \omega^2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, & 0 \leq \theta_2 < \pi, \\ &\vdots \\ \omega^{d-2} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-3} \cos \theta_{d-3} & 0 \leq \theta_{d-3} < \pi, \\ \omega^{d-1} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}, & 0 \leq \theta_{d-2} < \pi, \\ \omega^d &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}, & 0 \leq \theta_{d-1} < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sostituendo l'Eq. (2.15) e l'Eq. (2.17) nella metrica (2.11) si ottiene la metrica riscritta in funzione delle coordinate (τ, θ_i) :

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{l} \right) d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.18)$$

dove $d\Omega_{d-1}^2$ è l'angolo solido $(d-1)$ -dimensionale

$$\begin{aligned} d\Omega_{d-1}^2 &= d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{d-2} d\theta_{d-1}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) d\theta_j^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si noti che le singolarità della metrica (2.19) in $\theta_i = 0$ e $\theta_i = \pi$ ($i = 1, 2, \dots, d-2$) sono le banali singolarità che si presentano nelle coordinate polari. In queste coordinate con un tempo τ fissato, l'ipersuperficie spaziale corrisponde a una sfera $(d-1)$ -dimensionale con raggio pari a $l \cosh(\tau/l)$. Quindi il raggio di tale superficie è infinitamente grande per $\tau = -\infty$, decresce fino a raggiungere la sua estensione minima l in $\tau = 0$ e poi aumenta tendendo a infinito per $\tau \rightarrow \infty$. È importante sottolineare che la sezione spaziale è compatta (finita) eccetto per il passato e futuro più lontani (agli estremi). In questo sistema di coordinate l'unico vettore di Killing è $\partial/\partial\theta_{d-1}$ in quanto la metrica (2.18) è isometrica rispetto alla rotazione di una coordinata θ_{d-1} . Invece, $\partial/\partial\tau$ non è un vettore di Killing e l'assenza di questa simmetria di Killing rompe la conservazione dell'energia, per cui l'Hamiltoniana non è opportunamente definita e il processo di quantizzazione non è regolare.

Coordinate conformi (T, θ_i)

Una importante proprietà dello spaziotempo dS_d si ottiene dal calcolo del tensore di Weyl (o tensore conforme)

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho\sigma} = & R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{d-2}(g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}R_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}) \\
& + \frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{\mu\rho}g_{\rho\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\sigma\nu})R,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

per $d \geq 4$, o del tensore di Cotton

$$C^{\mu\nu} = \frac{\epsilon^{\rho\sigma\mu}}{\sqrt{-g}} \nabla_{\sigma} \left(R^{\mu}_{\rho} - \frac{\delta^{\nu}_{\rho}}{4} R \right) \tag{2.21}$$

per $d = 3$. Sostituendo le Eq. (2.3) e (2.4) nelle Eq. (2.20) e (2.21) dei tensori conformi si può notare che tali tensori si annullano e questo dimostra che dS_d è conformemente piatto:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = \left[\frac{1}{d(d-1)} - \frac{2}{d(d-2)} + \frac{1}{(d-1)(d-2)} \right] (g_{\mu\rho}g_{\rho\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\sigma\nu})R = 0, \tag{2.22}$$

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}} \nabla_{\rho} (R - 4\Lambda) \stackrel{R \sim \Lambda}{=} 0. \tag{2.23}$$

Quindi la condizione (2.4) secondo cui il tensore di Riemann è determinato solo dalla curvatura scalare è equivalente alla condizione che il tensore conforme si annulli in questo sistema di coordinate. Di conseguenza, l'unico scalare di dS_d , $l = \sqrt{(d-1)(d-2)}/2\Lambda$ può essere riscritto con una trasformazione di Weyl. La caratteristica di dS_d di essere conforme suggerisce che il sistema di coordinate conforme sia un buon sistema di coordinate. La metrica scritta in termini del tempo conforme T , è

$$ds^2 = F(T/l)^2 (-dT^2 + l^2 d\Omega_{d-1}^2). \tag{2.24}$$

Confrontando la metrica delle coordinate globali (2.18) con quella delle coordinate conformi (2.24), la trasformazione di coordinate tra i due sistemi è riassunta dall'equazione differenziale al primo ordine di $F(T/l)$

$$\frac{d \ln F}{dT} = \pm \sqrt{F^2 - 1}, \tag{2.25}$$

dove $F(T/l) = \cosh(\tau/l) \geq 1$ fornisce una condizione a contorno tale che $F(0) = 1$. L'unica soluzione dell'Eq.(2.25) è

$$F(T/l) = \sec \left(\frac{T}{l} \right). \tag{2.26}$$

Sostituendo questo risultato nella metrica (2.24), si ottiene

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{T}{l}} (-dT^2 + l^2 d\Omega_{d-1}^2) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{T}{l} < \frac{\pi}{2}. \quad (2.27)$$

Poiché la metrica (2.27) è isometrica per la rotazione di θ_{d-1} , $\partial/\partial\theta_{d-1}$ è un vettore di Killing, ma non ci sono altri vettori di Killing. Quindi l'unica simmetria è una simmetria assiale. Si noti che esiste una corrispondenza biunivoca tra le coordinate globali (2.18) e le coordinate conformi (2.27), e questo significa che anche il sistema di coordinate conformi descrive l'intero spaziotempo di de Sitter. Inoltre ogni geodetica nulla rispetto alla metrica conforme risulta nulla anche nella metrica trasformata conformemente

$$d\tilde{s}^2 \equiv \cos^2 \frac{T}{l} ds^2 = -dT^2 + l^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.28)$$

Ancora una volta si noti che il sistema di coordinate conformi (2.27) non prevede la simmetria di Killing di tipo tempo, quindi l'Hamiltoniana non può essere considerata una quantità che si conserva, per cui risulta difficile sviluppare una teoria quantistica in questo sistema di coordinate.

Ora ricaviamo la metrica conforme (2.26) risolvendo le Eq. (2.1) per la metrica (2.24). La curvatura scalare risulta essere

$$R = (d-1) \frac{(d-2)F^2 + (d-4)\dot{F}^2 + 2F\ddot{F}}{l^2 F^4}, \quad (2.29)$$

dove $\dot{F} \equiv dF/d(T/l)$, e anche nei paragrafi successivi il punto sarà usato per esprimere la derivata rispetto alla coordinate temporale riscalata relativa al proprio paragrafo. Quindi l'Eq. (2.3) diventa

$$2(F\ddot{F} - F^2 - 2\dot{F}^2) = d(F^4 - \dot{F}^2 - F^2). \quad (2.30)$$

Una soluzione particolare dell'Eq. (2.30) indipendente da d dovrebbe soddisfare le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} F\ddot{F} - 2\dot{F}^2 - F^2 &= 0, \\ \dot{F}^2 + F^2 - F^4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si dimostra che l'unica soluzione delle Eq. (2.31) con $F(0) = 1$ equivale all'Eq. (2.26). La soluzione generale dovrebbe soddisfare le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} F\ddot{F} - F^2 - 2\dot{F}^2 &= d\mathcal{G}, \\ F^4 - \dot{F}^2 - F^2 &= 2\mathcal{G}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove \mathcal{G} è una funzione arbitraria di T/l .

Coordinate planari (inflazionarie) (t, x^i)

Una caratteristica fondamentale dello spaziotempo di de Sitter è di essere massimamente simmetrico. Consideriamo un osservatore comovente in dS_d , questo potrebbe trovare una superficie spaziale massimamente simmetrica ortogonale alla propria direzione temporale. La corrispondente metrica planare (inflazionaria) prende la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t/l)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.33)$$

dove $a(t/l)$ è il fattore di scala cosmico e anche la metrica spaziale $(d-1)$ -dimensionale γ_{ij} ha tra le proprietà che la definiscono quella di essere massimamente simmetrica:

$${}^{d-1}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2.34)$$

dove

$$k = \frac{a^4}{(d-1)(d-2)} {}^{d-1}R. \quad (2.35)$$

Si noti che ogni componente non nulla della curvatura di Riemann d -dimensionale $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ è espressa dalla metrica $(d-1)$ -dimensionale (2.33) in modo che

$$R_{titj} = -l^2 a\ddot{a}\gamma_{ij}, \quad (2.36)$$

$$R_{tijk} = -a\dot{a}(\partial_i\gamma_{kj} + \partial_j\gamma_{ki} - \partial_k\gamma_{ij}), \quad (2.37)$$

$$R_{ijkl} = (ka^2 + a^2\dot{a}^2)(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2.38)$$

dove il punto indica la derivazione rispetto alla coordinata temporale riscalata, $\dot{a} \equiv da(t/l)/d(t/l)$. La stessa cosa vale per le componenti del tensore di Ricci

$$R_{tt} = -\frac{d-1}{a}\ddot{a}, \quad (2.39)$$

$$R_{ti} = \frac{\dot{a}}{a}\gamma^{jk}(\partial_j\gamma_{ik} - \partial_i\gamma_{jk} + \partial_k\gamma_{ji}), \quad (2.40)$$

$$R_{tj} = [a\ddot{a} + (d-2)(\dot{a}^2 + k)]\gamma_{ij}, \quad (2.41)$$

e per la curvatura scalare

$$R = (d-1)\frac{2a\ddot{a} + (d-2)\dot{a}^2 + (d-2)k}{a^2}. \quad (2.42)$$

In uno spaziotempo di de Sitter l'unica sorgente della gravità è una energia del vuoto positiva (o equivalentemente una costante cosmologica positiva) data dall'Eq.

(2.2). Inoltre considerando tale sorgente come un fluido cosmologico perfetto, dall'equazione di stato (1.7) deriva un'energia del vuoto con densità positiva e costante e con pressione negativa.

Grazie all'isotropia e all'omogeneità, la parte spaziale della metrica (2.33) γ_{ij} coincide con la metrica *FRW* in funzione delle coordinate sferiche $(d-1)$ -dimensionali (r, θ_a) , con $(a = 1, 2, \dots, d-2)$:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t/l) \left[\frac{dr^2}{1 - k(r/l)^2} + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \right]. \quad (2.43)$$

Con la metrica (2.43) le equazioni di Einstein sono riassunte dalle due equazioni di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{4\pi G_N}{d-2} \left[\frac{d}{d-1} \rho - (d-4)p \right] - \frac{k}{a^2} = \frac{d-2}{2(d-1)} \Lambda - \frac{k}{a^2}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G_N \left(\frac{\rho}{d-1} + p \right) = \frac{d-2}{2(d-1)} \Lambda. \quad (2.45)$$

In uno spaziotempo di de Sitter con costante cosmologica positiva, l'Eq. (2.45) è sempre positiva. Quindi l'universo descritto da dS_d è in accelerazione, o equivalentemente il suo parametro di decelerazione (1.23) risulta essere negativo. Quando $k = 0$ oppure $k = -1$, la parte destra dell'Eq. (2.44) è sempre positiva. Questo significa che una volta che l'universo ha cominciato ad espandersi sarà eternamente in espansione, o equivalentemente che se viene osservato un parametro di Hubble positivo ($H(t) = (\dot{a}/a) > 0$), il tasso di espansione dell'universo continua ad essere positivo. Anche per il caso $k = +1$, una volta che il fattore di scala cosmico raggiunge un valore critico a_{cr} tale che $a_{cr} = \sqrt{2(d-1)/(d-2)\Lambda}$ l'universo mantiene un'espansione eterna. Le soluzioni esatte delle equazioni di Friedmann (2.44) e (2.45) sono nient'altro che le soluzioni inflazionarie consistenti con le considerazioni precedenti

$$a(t/l) \begin{cases} = l \sinh(t/l), & \text{per } k = -1 \\ \propto \exp(\pm t/l), & \text{per } k = 0 \\ = l \cosh(t/l), & \text{per } k = +1 \end{cases} \quad (2.46)$$

Se interpretiamo la singolarità in $a = 0$ come il Big Bang, allora per un universo aperto ($k = -1$) il Big Bang è avvenuto in $t = 0$, per un universo piatto in espansione ($k = 0$) è avvenuto nell'infinito passato $t = -\infty$, mentre per un universo chiuso ($k = +1$) non è avvenuto.

Introducendo un parametro t , il vincolo dell'iperboloide (2.10) immerso in uno spaziotempo di Minkowski $(d+1)$ -dimensionale può essere decomposto in due

vincoli, di cui uno è un iperbole 2-dimensionale di raggio $\sqrt{1 - \left(\frac{x^i}{l}\right)^2} e^{2t/l}$

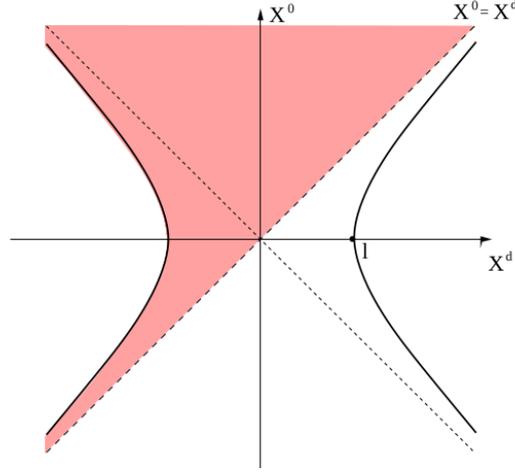


Figura 2.2: La regione ombreggiata rappresenta la metà superiore di dS_d ricoperta dalle coordinate planari.

$$-\left(\frac{X^0}{l}\right)^2 + \left(\frac{X^d}{l}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x^i}{l}\right)^2 e^{2t/l}, \quad (2.47)$$

e l'altro è una sfera $(d-1)$ -dimensionale di raggio $\frac{x^i}{l}e^{t/l}$

$$\left(\frac{X^1}{l}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X^{d-1}}{l}\right)^2 = \left(\frac{x^i}{l}\right)^2 e^{2t/l}, \quad (2.48)$$

dove con $(x^i)^2$ si intende la somma sull'indice i . Quindi un buon sistema di coordinate per implementare i vincoli (2.47) e (2.48) è

$$\begin{aligned} \frac{X^0}{l} &= -\sinh \frac{t}{l} + \frac{(x^i/l)^2}{2} e^{2t/l}, \\ \frac{X^i}{l} &= \frac{x^i}{l} e^{t/l} \quad (i = 1, 2, \dots, d-1), \\ \frac{X^d}{l} &= -\cosh \frac{t}{l} + \frac{(x^i/l)^2}{2} e^{2t/l}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

dove $-\infty < x^i < \infty$ e $-\infty < t < \infty$. Poiché $-X^0 + X^d = -l \exp(-t/l) \leq 0$, le coordinate planari (2.49) ricoprono solo la metà superiore di dS_d come mostrato in Fig. 2.2.

La metà inferiore di dS_d può essere descritta cambiando la $(d+1)$ -esima coordinata X^d in $X^d/l = (\cosh t/l) + [(x^i)^2 e^{2t}/2l^2]$. Inserendo le trasformazioni (2.49) nella metrica piatta di Minkowski $(d+1)$ -dimensionale, si ottiene la metrica planare di dS_d :

$$ds^2 = -dt^2 + \exp \frac{2t}{l} (dx^i)^2 \quad (2.50)$$

che coincide esattamente con la soluzione piatta (2.46) trovata risolvendo le equazioni di Friedmann (2.44) e (2.45).

Poiché la metrica (2.50) non è isometrica per traslazioni, $\partial/\partial t$ non è un vettore di Killing di tipo tempo. Questo implica che l'energia non è conservata e che l'Hamiltoniana non esiste, ciò impedisce la descrizione della gravità quantistica in coordinate planari. Tuttavia, la metrica (2.50) è indipendente da x^i per cui soddisfa l'invarianza della forma (2.6). Quindi $\partial/\partial x^i$ sono vettori di Killing di tipo spazio e la geometria spaziale prevede simmetrie traslazionali e rotazionali.

Coordinate statiche (t, r, θ_a) , $a = 1, 2, \dots, d-2$

Anche in questo caso, introducendo un parametro r ¹, il vincolo (2.10) immerso nello spaziotempo di Minkowski $(d+1)$ -dimensionale viene decomposto in due vincoli di cui uno è un'iperbole 2-dimensionale di raggio $\sqrt{1 - (r/l)^2}$

$$-\left(\frac{X^0}{l}\right)^2 + \left(\frac{X^d}{l}\right)^2 = 1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \quad (2.51)$$

e l'altro è una sfera $(d-1)$ -dimensionale di raggio r/l

$$-\left(\frac{X^1}{l}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X^{d-1}}{l}\right)^2 = \left(\frac{r}{l}\right)^2. \quad (2.52)$$

Quindi un buon sistema di coordinate per implementare i due vincoli (2.51) e (2.52) è

$$\begin{aligned} \frac{X^0}{l} &= -\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \sinh \frac{t}{l}, \\ \frac{X^i}{l} &= \frac{r}{l} \omega^i, \quad (i = 1, 2, \dots, d-1), \\ \frac{X^d}{l} &= -\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \cosh \frac{t}{l}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

dove gli ω^i sono quelli definiti nell'Eq. (2.17) ed r ($0 \leq r < \infty$) sarà identificata con la coordinata radiale del sistema di coordinate statiche. Poiché $-X^0 + X^d = -\sqrt{l^2 - r^2} \exp(-t/l) \leq 0$ e $X^0 + X^d = -\sqrt{l^2 - r^2} \exp(t/l) \leq 0$, la regione $r \leq l$ ricopre solo un quarto dell'intero dS_d come mostrato dalla regione ombreggiata in Fig. 2.3. In seguito $r = l$ sarà identificato con un orizzonte dello spaziotempo di de Sitter.

¹Le coordinate statiche t ed r sono diverse dalle coordinate planari t ed r .

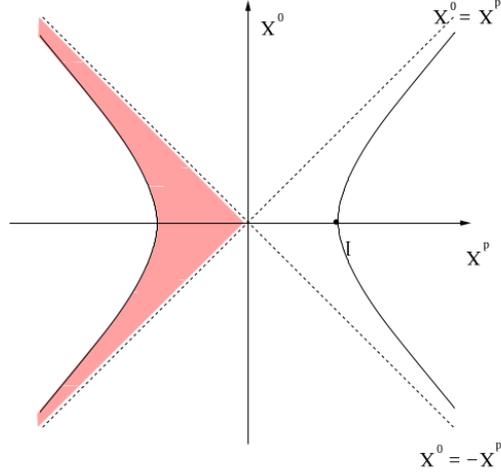


Figura 2.3: La parte colorata rappresenta la regione delimitata dall'orizzonte di de Sitter ($r \leq l$).

Sostituendo le (2.53) nella metrica di Minkowski $(d + 1)$ -dimensionale (2.11) si ottiene la metrica statica di ddS_d :

$$ds^2 = - \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2} + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.54)$$

dove

$$\begin{aligned} d\Omega_{d-2}^2 &= d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{d-3} d\theta_{d-2}^2 \\ &= \sum_{b=1}^{d-2} \left(\prod_{a=1}^{b-1} \sin^2 \theta_a \right) \theta_b^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

La metrica (2.54) è invariante in forma sia per traslazioni temporali che per rotazioni della coordinata θ_{d-2} quindi si hanno due vettori di Killing, $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial \theta_{d-2}$. Di conseguenza la geometria dello spaziotempo ha sia simmetria assiale che tempo-traslazionale. Quindi in coordinate statiche l'Hamiltoniana è ben definita, ma l'unitarietà è minacciata dall'esistenza dell'orizzonte in $r = l$.

Per descrivere il sistema con simmetria rotazionale in d dimensioni, un osservatore statico potrebbe introdurre il sistema di coordinate statico in cui la metrica prevede due funzioni indipendenti della coordinata radiale r , ad esempio $\Omega(r)$ e $A(r)$:

$$ds^2 = -e^{2\Omega(r)} A(r) dt^2 + \frac{dr^2}{A(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2. \quad (2.56)$$

La curvatura scalare della metrica (2.56) è

$$R = (d-2) \left[\frac{(d-3)(1-A)}{r^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dA}{dr} + A \frac{d\Omega}{dr} \right) \right] - \left[\frac{d^2 A}{dr^2} + 2A \frac{d^2 \Omega}{dr^2} + 2A \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)^2 + 3 \frac{dA}{dr} \frac{d\Omega}{dr} \right]. \quad (2.57)$$

e la forma semplificata delle Eq. (2.1) risulta essere

$$\frac{d-2}{r} \frac{d\Omega}{dr} = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{d-2}{r^{d-2}} \frac{d}{dr} [r^{d-3}(1-A)] = \frac{(d-1)(d-2)}{l^2}. \quad (2.59)$$

La soluzione delle Eq. (2.58) e (2.59) è detta soluzione di Schwarzschild-de Sitter:

$$\Omega = \Omega_0 \quad \text{e} \quad A = 1 - \frac{r^2}{l^2} - \frac{2G_N M}{r^{d-3}}. \quad (2.60)$$

La costante Ω_0 è una costante che può sempre essere assorbita da una trasformazione scalare della variabile temporale t , $dt \rightarrow e^{-\Omega_0 dt}$, e l'altra costante d'integrazione M (che è proporzionale alla massa di un buco nero di Schwarzschild-de Sitter), per uno spaziotempo di de Sitter può essere posta uguale a zero. Quindi la metrica risultante coincide esattamente con quella dell'Eq. (2.54).

2.2.3 Geodetiche

Di solito la struttura di uno spaziotempo curvo fissato viene analizzata dai moti classici di una particella di prova. La geodetica, la curva più corta che congiunge due punti nello spazio di de Sitter, è determinata dalla minima lunghezza d'arco σ per un dato punto iniziale P_i e finale P_f , ed è parametrizzata da un parametro arbitrario λ tale che $x^\mu(\lambda)$:

$$\sigma = \int_{P_i}^{P_f} d\sigma = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \frac{dI}{d\lambda} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda L = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (2.61)$$

In base al principio variazionale, la geodetica deve soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange del secondo ordine

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (2.62)$$

In questa sezione analizzeremo le possibili geodetiche nei quattro sistemi di coordinate dello spaziotempo di de Sitter ottenuti nei paragrafi precedenti. Inoltre in ogni sistema di coordinate introdurremo alcune quantità utili e analizzeremo alcune caratteristiche delle geodetiche ottenute.

Coordinate globali (chiuse)

Per la metrica (2.18) in coordinate globali, la Lagrangiana per il moto della geodetica è

$$L^2 = - \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 + l^2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{l} \right) \sum_{j=1}^{d-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2, \quad (2.63)$$

dove λ è un parametro affine. Le corrispondenti equazioni geodetiche (2.62) sono date dalle equazioni

$$\frac{d^2\tau}{d\lambda^2} + l \sinh \left(\frac{\tau}{l} \right) \cosh \left(\frac{\tau}{l} \right) \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \left(\frac{d\theta_i}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_i}{d\lambda^2} + \frac{2 \sinh(\tau/l)}{l \cosh(\tau/l)} \frac{d\tau}{d\lambda} \frac{d\theta_i}{d\lambda} - \sin \theta_i \cos \theta_i \prod_{j=i+1}^{j-1} \sin^2 \theta_j \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2 \\ + 2 \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\cos \theta_k}{\sin \theta_k} \frac{d\theta_k}{d\lambda} \right) \frac{d\theta_j}{d\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (2.65)$$

Poiché la coordinata θ_{d-1} è ciclica, nell'Eq. (2.65) $d\theta_{d-1}/d\lambda$ è sostituita da una costante del moto J tale che

$$J = l^2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{l} \right) \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \frac{d\theta_{d-1}}{d\lambda}. \quad (2.66)$$

Ricordiamo che ogni geodetica che collega arbitrariamente due punti su una sfera $(d-1)$ -dimensionale dovrebbe giacere sul cerchio massimo di tale sfera. Grazie alla simmetria rotazionale su S^{d-1} , è sempre possibile orientare il sistema di coordinate in modo che la proiezione radiale dell'orbita coincida con l'equatore

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_{d-2} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.67)$$

delle coordinate sferiche. Tale considerazione può essere confermata verificando esplicitamente che l'Eq. (2.67) sia una soluzione dell'Eq. (2.65). Questo significa che una particella di prova che alla partenza ha momenti nulli, continua ad avere momenti nulli nelle direzioni θ_i ($i = 1, 2, \dots, d-2$). Quindi il sistema che ci interessa si riduce da d -dimensioni a $(1+1)$ -dimensioni senza perdita di generalità. Inserendo l'Eq. (2.67) nell'Eq. (2.66) si ottiene

$$\frac{d\theta_{d-1}}{d\lambda} = \frac{J}{l^2 \cosh^2(\tau/l)} \quad (2.68)$$

In modo tale che l'Eq. (2.64) diventi

$$\frac{d^2\tau}{d\lambda^2} = -\frac{J^2 \sinh(\tau/l)}{l^3 \cosh^3(\tau/l)}. \quad (2.69)$$

Dall'integrazione dell'Eq. (2.69) si ottiene la conservazione dell'energia E

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff}(\tau/l), \quad (2.70)$$

dove il potenziale efficace è dato da

$$V_{eff}(\tau/l) = \begin{cases} 0 & (J = 0) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{J}{l} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(\tau/l)} & (J \neq 0) \end{cases} \quad (2.71)$$

di conseguenza l'altra costante del moto E dovrebbe essere limitata inferiormente, cioè $E \geq -\frac{1}{2}(J/2l)^2$. L'equazione dell'orbita è

$$\tan \theta_{d-1} = \frac{J}{l} \frac{\sinh(\tau/l)}{\sqrt{(J/l)^2 + 2E \cosh^2(\tau/l)}}. \quad (2.72)$$

Poiché le superfici spaziali sono sfere S^{d-1} con curvatura costante positiva e sono superfici di Cauchy, le geodetiche normali a tali superfici con $J = 0$ sono curve che si contraggono monotonicamente fino ad una separazione spaziale minima e poi si riespano all'infinito come mostra la linea punteggiata in Fig. 2.4. In Fig. 2.4 si può osservare anche una linea tratteggiata rappresentativa del moto geodetico con $J \neq 0$. Supponendo di identificare il parametro affine λ con la coordinata temporale τ , dall'analisi precedente si può affermare che qualsiasi geodetica proveniente da ogni punto può essere estesa a valori infiniti del parametro affine in entrambe le direzioni. Poiché $\lambda = r \in (-\infty, \infty)$, lo spaziotempo di de Sitter è detto geodeticamente completo. Tuttavia esistono punti separati spazialmente che non possono essere collegati da alcuna geodetica.

Coordinate conformi

Come per il caso precedente, dalla metrica conforme (2.27) si ricava direttamente la Lagrangiana per le geodetiche (2.61)

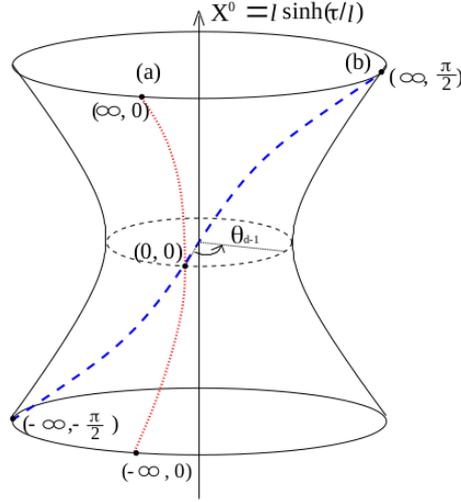


Figura 2.4: Due moti geodetici in coordinate globali: (a) la linea tratteggiata per $j = 0$, (b) la linea punteggiata per $J \neq 0$.

$$L^2 = \sec^2\left(\frac{T}{l}\right) \left[-\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + l^2 \sum_{j=1}^{d-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda}\right)^2 \right], \quad (2.73)$$

e le corrispondenti equazioni geodetiche (2.62) sono

$$\frac{d^2 T}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} \frac{\sin(T/l)}{\cos(T/l)} \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + l \frac{\sin(T/l)}{\cos(T/l)} \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \left(\frac{d\theta_i}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_i}{d\lambda^2} + \frac{2 \sin(T/l)}{l \cos(T/l)} \frac{dT}{d\lambda} \frac{d\theta_i}{d\lambda} - \sin \theta_i \cos \theta_i \prod_{j=i+1}^{j-1} \sin^2 \theta_j \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda}\right)^2 \\ + 2 \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\cos \theta_k}{\sin \theta_k} \frac{d\theta_k}{d\lambda} \right) \frac{d\theta_j}{d\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

Poiché la coordinata θ_{d-1} è ciclica, $d\theta_{d-1}/d\lambda$ è sostituita da una costante del moto J tale che

$$J = \frac{l^2}{\cos^2(T/l)} \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \frac{d\theta_{d-1}}{d\lambda}. \quad (2.76)$$

poiché le $(d-1)$ coordinate angolari $\{\theta_i\}$ costituiscono una sfera $(d-1)$ -dimensionale, valgono le stesse considerazioni fatte per l'Eq.(2.67), pertanto il sistema a cui siamo interessati si riduce da d dimensioni a $(1+1)$ dimensioni senza perdita di generalità. Sostituendo l'Eq. (2.67) nell'Eq. (2.76), si ottiene

$$\frac{d\theta_{d-1}}{d\lambda} = \frac{J}{l^2} \cos^2(T/l) \quad (2.77)$$

inoltre è possibile riscrivere l'equazione (2.74) come segue

$$\frac{d^2T}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} \tan(T/l) \left(\frac{dT}{d\lambda} \right)^2 + l \tan(T/l) \left(\frac{d\theta_{d-1}}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.78)$$

da cui si ottiene un altro integrale primo del moto E :

$$E \equiv -\frac{l^2}{2} \left(\frac{d\theta_{d-1}}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dT}{d\lambda} \right)^2 - \cos^2(T/l). \quad (2.79)$$

Nell'Eq. (2.79) il parametro affine λ è stato riscritto in modo da assorbire una costante ridondante. Combinando le Eq. (2.77) e (2.79), si ottiene un'equazione dell'orbita espressa in funzione delle funzioni ellittiche f e h :

$$\theta_{d-1} = \frac{J}{l\sqrt{2}} \left[\sqrt{1+E} f\left(\frac{T}{l}, \frac{1}{E+1}\right) - \frac{E}{\sqrt{1+E}} h\left(\frac{T}{l}, \frac{1}{E+1}\right) \right] \quad (2.80)$$

dove

$$f\left(\frac{T}{l}, \frac{1}{E+1}\right) = \int dT \sqrt{1 - \frac{1}{E+1} \sin^2(T/l)} \quad (2.81)$$

$$h\left(\frac{T}{l}, \frac{1}{E+1}\right) = \int dT \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{E+1} \sin^2(T/l)}}. \quad (2.82)$$

Come mostrato in Fig. 2.5, (T, θ_{d-1}) rappresenta un cilindro di altezza finita. La linea punteggiata rappresenta una geodetica con energia nulla, $E = 0$ (o equivalentemente con momento angolare nullo, $J = 0$) mentre la linea tratteggiata rappresenta una geodetica con energia positiva $E > 0$ (o equivalentemente con momento angolare non nullo, $J \neq 0$).

Coordinate planari (inflazionarie)

La Lagrangiana per il moto geodetico (2.61) per lo spazio piatto con $k = 0$ è

$$L^2 = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + e^{2t/l} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + e^{2t/l} r^2 \sum_{b=1}^{d-2} \left(\prod_{a=1}^{b-1} \sin^2 \theta_a \right) \left(\frac{d\theta_b}{d\lambda}\right)^2, \quad (2.83)$$

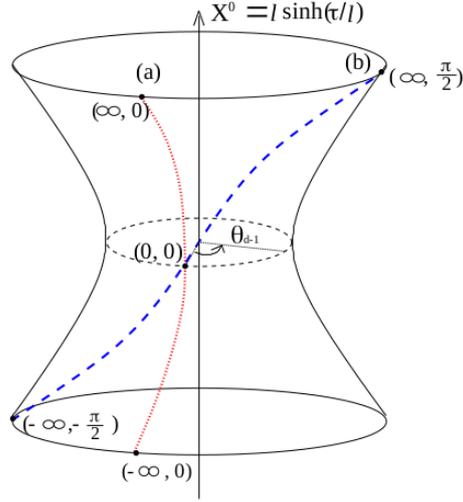


Figura 2.5: Geodetiche sul piano (T, θ_{d-1}) : (a) la linea punteggiata per $J = 0$, (b) la linea tratteggiata per $J \neq 0$.

e le corrispondenti equazioni geodetiche (2.62) sono

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} e^{2t/l} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{e^{2t/l}}{l} r^2 \sum_{b=1}^{d-2} \left(\prod_{a=1}^{b-1} \sin^2 \theta_a \right) \left(\frac{d\theta_b}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{2}{l} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - r \sum_{b=1}^{d-2} \left(\prod_{a=1}^{b-1} \sin^2 \theta_a \right) \left(\frac{d\theta_b}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_a}{d\lambda^2} + \frac{2}{l} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\theta_a}{d\lambda} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta_a}{d\lambda} - \sin \theta_a \cos \theta_a \prod_{b=a+1}^{b-1} \sin^2 \theta_b \left(\frac{d\theta_b}{d\lambda} \right)^2 \\ + 2 \left(\sum_{c=1}^{a-1} \frac{\cos \theta_c}{\sin \theta_c} \frac{d\theta_c}{d\lambda} \right) \frac{d\theta_a}{d\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (2.86)$$

Poiché la coordinata θ_{d-2} è ciclica, $d\theta_{d-2}/d\lambda$ è sostituita da una costante del moto J tale che

$$J = 2e^{2t/l} r^2 \prod_{b=1}^{d-3} \sin^2 \theta_b \frac{d\theta_{d-2}}{d\lambda}. \quad (2.87)$$

Sfruttando il fatto che ogni geodetica che collega due punti arbitrari su una sfera $(d-2)$ -dimensionale dovrebbe giacere sul cerchio massimo di tale sfera, si può scegliere, senza perdita di generalità

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_{d-3} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.88)$$

che, a seguito della simmetria rotazionale sulla sfera $(d-2)$ -dimensionale S^{d-2} dovrebbe essere una soluzione dell'Eq. (2.86). Quindi il sistema di nostro interesse si riduce da d dimensioni a $(2+1)$ dimensioni senza perdita di generalità. Sostituendo l'Eq. (2.88) nell'Eq. (2.87) si ottiene

$$\frac{d\theta_{d-2}}{d\lambda} = \frac{J}{2e^{2t/l} r^2}, \quad (2.89)$$

per cui le equazioni (2.84) e (2.85) diventano

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{e^{2t/l}}{l} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2 e^{-4t/l}}{4l r^3} = 0, \quad (2.90)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{2}{l} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{J^2 e^{-4t/l}}{4 r^3} = 0, \quad (2.91)$$

Sottraendo l'Eq. (2.90) con la (2.91) si ottiene una combinazione delle due equazioni

$$r \frac{dr}{d\lambda} e^{2t/l} = -l \frac{dt}{d\lambda} + C, \quad (2.92)$$

dove C è una costante. Infine, per $C = 0$, la soluzione dell'equazione radiale (2.92) è

$$r = l e^{-t/l}. \quad (2.93)$$

Per $J = 0$, l'Eq. (2.91) diventa

$$\frac{d}{d\lambda} \left(2e^{2t/l} \frac{dr}{d\lambda} \right) = 0. \quad (2.94)$$

Questo implica che $dr d\lambda = C' e^{-2t/l}$ e C' è una costante.

Le informazioni sul fattore di scala $a(t)$ si ottengono dalle osservazioni degli shift nella lunghezza d'onda della luce emessa da sorgenti distanti. Convenzionalmente tale distanza è misurata in termini del parametro di redshift z tra due eventi, definito dalla seguente variazione della lunghezza d'onda:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (2.95)$$

dove λ è la lunghezza d'onda dei fotoni, e gli indici 0 ed 1 sono riferiti rispettivamente al momento dell'osservazione e al momento dell'emissione. Dal momento che lo spazio de Sitter è omogeneo e isotropo, consideriamo un osservatore posto nell'origine delle coordinate $r = 0$ e un fotone che viaggia verso tale osservatore lungo la direzione radiale con θ_a fissato. Supponiamo che la luce sia emessa dalla sorgente al tempo t_1 e arrivi all'osservatore al tempo t_0 . Quindi, dalla metrica (2.27), la geodetica nulla che collega $(t_1, r_1, \theta_1, \theta_{d-2})$ e $(t_0, 0, \theta_1, \theta_{d-2})$ mette in relazione il tempo coordinato e la distanza come segue

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv f(r_1). \quad (2.96)$$

Se la cresta d'onda successiva lascia r_1 al tempo $t_1 + \delta t_1$ e raggiunge l'osservatore all'istante $t_0 + \delta t_0$, l'indipendenza dal tempo di $f(r_1)$ ci da

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.97)$$

Per un tempo sufficientemente piccolo δt_0 (o δt_1) il fattore di scala $a(t)$ è approssimato da una costante nell'intervallo di integrazione dell'Eq. (2.97) e con l'aiuto di $\lambda_0 = \delta t_0 \ll |t_1 - t_0|$ (o $\lambda_1 = t_1 \ll |t_1 - t_0|$), l'Eq. (2.97) porta a

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} &= \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \\ &= 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_1 - t_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.98)$$

dove, $H_0 = H(t_0)$ e $q_0 = q(t_0)$. Sostituendo l'Eq. (2.98) nell'Eq. (2.95), si ottiene

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad (2.99)$$

D'altra parte, la distanza comovente r_1 non è misurabile, per cui viene definita la relazione distanza-luminosità. Tale relazione, indicata con d_L , fornisce uno strumento per stimare le distanze cosmiche per specifiche sorgenti luminose quali possono essere stelle o galassie.

Consideriamo inizialmente uno spaziotempo di Minkowski. Indichiamo con F il flusso di energia, ovvero l'energia E per unità di tempo T e di superficie A . In questo caso l'energia si conserva durante la propagazione della luce in quanto non si verifica il fenomeno del redshift gravitazionale, quindi l'energia totale che attraversa ogni sfera concentrica per unità di tempo $L = E/T$ non dipende dal raggio della sfera e coincide con la luminosità intrinseca $L_0 = E_0/T_0$. Il flusso osservato su una porzione di sfera é

$$F = \frac{L}{A} = \frac{L_0}{4\pi(R)^2} \Rightarrow d_L^2 = R^2 = \frac{L_0}{4\pi F} \quad (2.100)$$

che è la relazione distanza-luminosità per uno spaziotempo piatto, con d_L che coincide con il raggio della sfera.

In un universo in espansione il flusso sarà indebolito di un fattore $(1+z)$ a causa del redshift subito dai fotoni. Inoltre se si assume che l'evoluzione cosmica non influenza il meccanismo microscopico con cui la luce viene emessa, la frequenza con cui l'osservatore registra l'arrivo dei fotoni è analogamente ridotta rispetto alla frequenza con cui i fotoni sono stati emessi. Infatti se δt è l'intervallo di tempo tra due emissioni discrete della sorgente, in un universo in espansione, l'osservatore rileverà questi due segnali successivi separati da un tempo $(1+z)\delta t$. Pertanto otteniamo le seguenti relazioni per L e per F

$$L \simeq \frac{L_0}{(1+z)^2},$$

$$F = \frac{L}{A} \simeq \frac{L_0}{4\pi(a_0 r_1)^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L_0}{4\pi(d_L)^2}, \quad (2.101)$$

dove a_0 è il fattore di scala al momento dell'osservazione, e $a_0 r$ è il raggio proprio della sfera centrata sulla sorgente e su cui è posto l'osservatore. Praticamente quando la distanza comovete tra l'osservatore e la sorgente di luce è r_1 , una distanza fisica diventa $a_0 r_1$. L'Eq.(2.101) implica

$$d_L = a_0 r_1 (1+z). \quad (2.102)$$

Misurando z e sapendo che $d_L \simeq \sqrt{L_0/F}$, l'Eq. (2.102) può essere utilizzata per misurare il fattore di scala cosmico ².

Usando l'espansione (2.98), l'Eq. (2.99) è espressa da

$$\frac{1}{1+z} = 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (2.103)$$

Per piccoli valori di $H_0(t_1 - t_0)$, l'Eq.(2.103) può essere invertita

$$t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \dots \right]. \quad (2.104)$$

²Il redshift viene determinato dallo spettro di emissione o di assorbimento della luce emessa dalle sorgenti. Per conoscere la luminosità intrinseca L_0 della sorgente si possono usare le stelle variabili che presentano una relazione specifica tra il periodo di oscillazione della loro luminosità apparente e la luminosità assoluta definita come luminosità intrinseca misurata da una distanza standard. per distanze maggiori si possono usare galassie con proprietà simili. Queste sorgenti privilegiate sono dette candele standard e formano la scala cosmica della distanza.

Quando $k = 0$, la parte destra dell'Eq. (2.96) vale r e dall'espansione della parte sinistra per piccoli valori di $H_0(t_1 - t_0)$ si ottiene

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_{t_1}^{t_0} dt \left(\frac{1}{a(t_1)} - \frac{\dot{a}(t_1)}{a^2(t_1)} t + \dots \right) \\ &= \frac{1}{a_0} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

dove, nella seconda riga è stata usata la seguente approssimazione $a(t_1) \approx a_0 \dot{a}_0 (t_1 - t_0) + 1/2 \ddot{a}_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots$ e nella terza è stata sostituita l'Eq.(2.104). Nell'Eq. (2.102), sostituendo r_1 con l' Eq. (2.105), si ottiene la legge di Hubble:

$$d_L = \frac{1}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] \simeq \frac{z}{H_0}. \quad (2.106)$$

che mette in relazione la distanza di una sorgente con il suo redshift osservato. Si noti che è possibile determinare l'attuale parametro di Hubble H_0 e l'attuale parametro di decelerazione q_0 misurando il redshift e la relazione distanza-luminosità. Anche grazie a queste osservazioni è stato possibile rappresentare l'universo attuale come spazialmente piatto. Come riferimento, oggi il valore osservato di H_0 è $H_0 = 100 \text{ h km/s Mpc}$ ($0.62 \lesssim \text{h} \lesssim 0.82$) quindi la corrispondente scala di tempo $T_{universo} \equiv H_0^{-1}$ è di circa un miliardo di anni e la scala della lunghezza $L_{universo} \equiv c H_0^{-1}$ è di circa alcune migliaia di Mpc.

Poiché il fattore di scala è dato da una funzione esponenziale, $a(t) = e^{t/l}$, per lo spaziotempo piatto con $k = 0$, la parte sinistra dell'Eq. (2.96) è:

$$\frac{r_1}{l} = e^{-t_1/l} - e^{-t_0/l}. \quad (2.107)$$

Inoltre il redshift è espresso come

$$z = e^{(t_0 - t_1)/l} - 1, \quad (2.108)$$

per cui la relazione distanza-luminosità nell'Eq. (2.102) diventa

$$d_L = l(z + z^2). \quad (2.109)$$

Confrontando l'Eq. (2.109) con la legge di Hubble (2.106), possiamo confermare che lo spazio piatto in espansione con $k = 0$ ha una costante di Hubble $H_0 = 1/l$ e

l'universo di de Sitter sta accelerando con un parametro di decelerazione $q_0 = -1$, come previsto ³.

Coordinate statiche

I moti geodetici parametrizzati dal tempo proprio σ sono descritti dalla seguente Lagrangiana derivante dalla metrica (2.54):

$$L^2 = - \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2} \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \sum_{b=1}^{d-2} \left(\prod_{a=1}^{b-1} \sin^2 \theta_a \right) \left(\frac{d\theta_b}{d\sigma} \right)^2. \quad (2.110)$$

Poiché sia il tempo t che le coordinate angolari θ_{d-2} sono ciclici, i momenti coniugati E e J sono conservati:

$$J \equiv \frac{\partial L^2}{\partial \left(\frac{d\theta_{d-2}}{d\sigma} \right)} + r^2 \prod_{j=1}^{d-3} \sin^2 \theta_j \frac{d\theta_{d-2}}{d\sigma}, \quad (2.111)$$

$$\sqrt{-2E} \equiv \frac{\partial L^2}{\partial \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)} = - \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \frac{dt}{d\sigma}. \quad (2.112)$$

Per le stesse considerazioni fatte nel paragrafo sulle geodetiche in coordinate planari, il sistema che ci interessa si riduce da d -dimensioni a $(2+1)$ -dimensioni senza perdita di generalità, quindi l'Eq. (2.111) diventa

$$\frac{d\theta_{d-2}}{d\sigma} = \frac{J}{r^2}. \quad (2.113)$$

Da questo punto in poi, per questo paragrafo useremo le variabili riscalate $e = E/l^2$, $x = r/l$, e $j = J/l^2$. Si noti che per il limite imposto dalla velocità della luce, j non può valere più di uno. Dalla Lagrangiana (2.110), l'equazione geodetica radiale del secondo ordine diventa

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} + \frac{x}{1-x^2} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - 2e \frac{x}{1-x^2} - j^2 \frac{1-x^2}{x^3} = 0. \quad (2.114)$$

³Dal momento che il parametro di decelerazione è $q = -1$, a differenza dei modelli descritti dalla metrica FRW, l'universo di de Sitter è caratterizzato da una legge di espansione di Hubble valida non solo nello spazio ma anche nel tempo, quindi soddisfa il *principio cosmologico perfetto* che assume l'omogeneità sia dello spazio che del tempo.

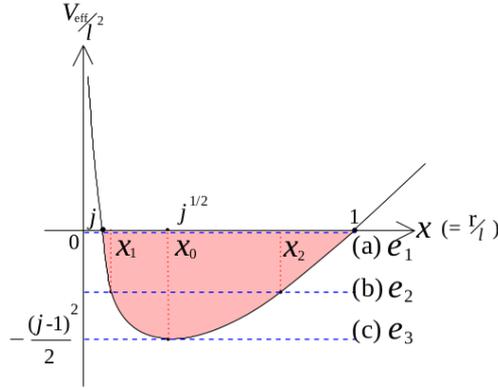


Figura 2.6: Potenziale efficace e diversi valori dell'energia e : (a) $e_1 = 0$, (b) $-\frac{(j-1)^2}{2} < e_2 < 0$, (c) $e_3 = -\frac{(j-1)^2}{2}$.

l'integrazione dell'Eq. (2.114) comporta la conservazione dell'energia e

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + \frac{V_{eff}}{l^2} \leq 0, \quad (2.115)$$

dove il potenziale efficace V_{eff} è dato da

$$V_{eff}(x) = \frac{l^2}{2} (1 - x^2) \left(\frac{j^2}{x^2} - 1 \right). \quad (2.116)$$

Come mostrato in Fig. 2.6, a causa della forza centrifuga repulsiva, il moto di una particella con energia e_1 non può mai essere inferiore a $x = j$ e tende a zero per j che tende a zero. Poiché l'energia cinetica dovrebbe essere positiva, l'unico intervallo consentito è $j < r < 1$ mentre gli altri sono proibiti. Per $e = e_2$, una particella di prova si muove su un'orbita limitata tra due punti x_1 (perielio) e x_2 (afelio) che si ottengono da $dx/d\sigma = 0$

$$x_1^2 = \frac{j^2 + 1 + 2e - \sqrt{(j^2 + 1 + 2e)^2 - 4j^2}}{2}, \quad (2.117)$$

$$x_2^2 = \frac{j^2 + 1 + 2e + \sqrt{(j^2 + 1 + 2e)^2 - 4j^2}}{2}. \quad (2.118)$$

Se l'energia e ha un minimo del potenziale efficace $e = e_3$, il moto è possibile solo in $x = x_0$ per cui il moto dell'orbita sarà circolare. La regione ombreggiata in Fig. 2.6 che è delimitata dall'orizzonte di de Sitter ($x = 1$) è quella consentita ad un osservatore statico. Tale regione corrisponde a un quarto della regione iperbolica globale in Fig. 2.13.

Dall'Eq. (2.105), risolvendo per $dr/d\sigma = 0$, si ottiene

$$d\sigma = \frac{dx^2}{2\sqrt{-x^4 + (j^2 + 2e + 1)x^2 - j^2}}. \quad (2.119)$$

Dall'integrazione di entrambi i lati di questa equazione si ottiene

$$x^2 = \frac{j^2 + 1 + 2e}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(j^2 + 1 + 2e)^2 - 4j^2} \sin(2\sigma + C), \quad (2.120)$$

Dove C è una costante d'integrazione. Se si sceglie il perielio x_1 dato nell'Eq. (2.117) per $\sigma = 0$, C vale $-\pi/2$ e l'afelio x_2 è dato da $\sigma = \pi/2$. Quando l'energia e assume il valore massimo $e = 0$, la posizione dell'afelio in $x = 1$ non è altro che l'orizzonte di de Sitter. Quindi il tempo proprio trascorso per il moto dal perielio all'afelio, $(-\pi/2, \pi/2)$, è finito. Cambiando il tempo proprio σ dell'Eq. (2.119) nel tempo coordinato di un osservatore statico t mediante l'Eq. (2.112), si trova

$$dt = dx^2 \frac{\sqrt{-2e}}{(x^2 - 1)\sqrt{-x^4 + (j^2 + 2e + 1)x^2 - j^2}}, \quad (2.121)$$

e integrando per $e = e_2$ si ottiene

$$\tan [2(t - t_0)] = \frac{4e - (j^2 - 1 + 2e)(x^2 - 1)}{\sqrt{-2e}(1 - x^2)\sqrt{2e + (1 - x^2)\left(1 - \frac{j^2}{x^2}\right)}} \quad (2.122)$$

Si noti che gli intervalli sono

$$j < x < 1, \quad 0 < j < 1, \quad -\frac{(j - 1)^2}{2} < e_2 < 0. \quad (2.123)$$

Nel caso in cui $e = e_1$, dall'integrazione dell'Eq. (2.121) si ottiene

$$t - t_0 = \lim_{e \rightarrow 0} l\sqrt{-2e} = \frac{\sqrt{(1 - j^2)(1 - x^2) - (1 - x^2)^2}}{(1 - j^2)(x^2 - 1)} \quad (2.124)$$

Per raggiungere l'orizzonte di de Sitter in $x = 1$, l'energia e dovrebbe avere un valore e_1 a prescindere dal valore di j , come mostrato in Fig. 2.7. Per $e = e_3 = -(j - 1)^2/2$, x è fissato da $x_0 = \sqrt{j}$. Quando una particella di prova si avvicina all'orizzonte di de Sitter, il tempo coordinato trascorso diverge come

$$t - t_0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{l\sqrt{2}}{1 - j^2} \sqrt{\frac{1 - j^2}{1 - x^2} - 1} \sim \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = +\infty. \quad (2.125)$$

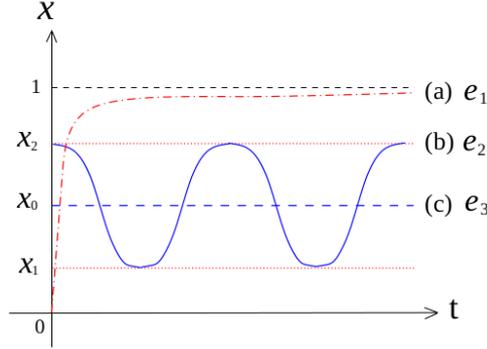


Figura 2.7: Geodetiche radiali: (a) la linea con tratti e punti corrisponde a e_1 , (b) la linea continua corrisponde a e_2 , (c) la linea tratteggiata corrisponde a e_3 .

Combinando l'Eq. (2.113) con l'Eq. (2.119) e con la sua integrazione, si ottiene l'equazione di un'orbita ellittica per $e = e_2$

$$\sin(2\theta_{d-2} + \theta_0) = \frac{-2j^2 + (1 + j^2 + 2e)x^2}{x^2 \sqrt{[(1 + j)^2 + 2e][(1 - j)^2 + 2e]}}. \quad (2.126)$$

Se scegliamo x come perielio in $\theta_{d-2} = 0$, θ_0 diventa $-\pi/2$. Dall'Eq. (2.117), il semiasse maggiore a di x^2 è dato da

$$a = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{j^2 + 1 + 2e}{2}. \quad (2.127)$$

L'eccentricità ε dell'ellisse può essere scritta come

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{j^2}{a^2}}. \quad (2.128)$$

La relazione tra ε e l'orbita è la seguente

$$\begin{cases} \varepsilon < 1, & e \leq 0 & \Rightarrow & \text{ellisse} \\ \varepsilon = 0, & e = -\frac{(j-1)^2}{2} & \Rightarrow & \text{circonferenza.} \end{cases} \quad (2.129)$$

Questo schema è in accordo con la discussione qualitativa sul potenziale efficace (2.116) e sul diagramma dell'energia in Fig. 2.6. Riscriviamo l'Eq. (2.54) in funzione di a e ε

$$x = \sqrt{\frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(2\theta_{d-2})}}. \quad (2.130)$$

Come ci si aspetta dall'Eq (2.117), l'Eq. (2.130) equivale a $x = \sqrt{a(1 - \varepsilon)}$ in $\theta_{d-2} = 0$ e $x = \sqrt{a(1 + \varepsilon)}$ in $\theta_{d-2} = \pi/2$. Come mostrato in Fig. 2.8, l'Eq. (2.130) soddisfa la condizione per le orbite chiuse (il così detto teorema di Bertrand).

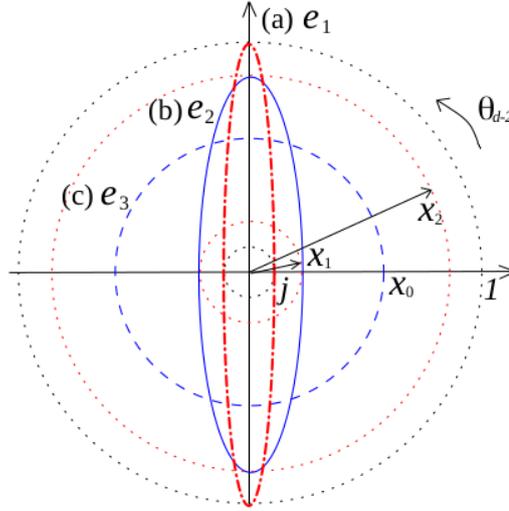


Figura 2.8: Orbite sul piano (x, θ_{d-2}) : (a) la linea con tratti e punti corrisponde a e_1 , (b) la linea continua corrisponde a e_2 , (c) la linea tratteggiata corrisponde a e_3 . I cerchi rappresentano dall'esterno l'orizzonte di de Sitter, l'afelio, le orbite circolari e i due perielii.

2.2.4 Diagrammi di Penrose

Consideriamo uno spaziotempo con metrica $g_{\mu\nu}$ e introduciamo una metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ conforme a $g_{\mu\nu}$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \quad (2.131)$$

Il fattore conforme Ω è opportunamente scelto in modo tale da portare i punti all'infinito in una posizione finita cosicché l'intero spaziotempo sia ridotto ad una regione finita detta diagramma di Penrose. Una notevole proprietà è che le geodetiche nulle di due metriche conformi coincidono, queste determinano i coni di luce e di conseguenza definiscono la struttura causale. Se avviene tale processo detto di compattificazione conforme, tutta l'informazione sulla struttura causale dello spaziotempo di de Sitter è facilmente visualizzata attraverso il diagramma di Penrose, anche se le distanze sono altamente distorte. Quindi tale diagramma contiene tutte le informazioni riguardanti la struttura causale di dS_d , ma distorce molto le distanze. Poiché lo spaziotempo di de Sitter ha una topologia cilindrica $(\mathbb{R} \times S^{d-1})$, per ottenere un diagramma di Penrose è necessario sostituire l'iperboloidi con un cilindro d -dimensionale di altezza finita $I \times S^{d-1}$ $I = [0, \pi]$. Poiché ognuno di questi diagrammi è rappresentato da un quadrato bidimensionale sul piano, ogni punto del diagramma indica in realtà una sfera $(d-2)$ -dimensionale S^{d-2} , tranne quelli sul lato sinistro o destro del diagramma. In questo paragrafo, dopo una breve parentesi per chiarire il concetto di orizzonte nell'universo di de Sitter, studieremo in dettaglio la struttura causale in diverse coordinate sfruttando i diagrammi di Penrose.

Orizzonti delle particelle e degli eventi

Si possono distinguere diversi tipi di orizzonti. Consideriamo la linea di mondo di un osservatore O che si muove su una geodetica di tipo tempo in uno spaziotempo in cui la superficie I^- è di tipo spazio (Fig. 2.9). Allora, in ogni punto P sulla linea di mondo di O , il cono luce passato in P è l'insieme degli eventi nello spaziotempo che O può osservare a quell'istante. La divisione tra le particelle viste da O in P e quelle non viste da O in P da origine all'orizzonte delle particelle di O in P . Questo orizzonte rappresenta la storia delle particelle che stanno ai limiti della possibilità visiva di O . Se I^- è nulla, (come nel caso dello spaziotempo di Minkowski) allora O in P può vedere tutte le particelle (Fig. 2.10).

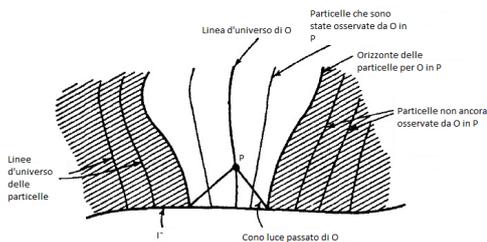


Figura 2.9: Orizzonti delle particelle di un osservatore I^- di tipo spazio.

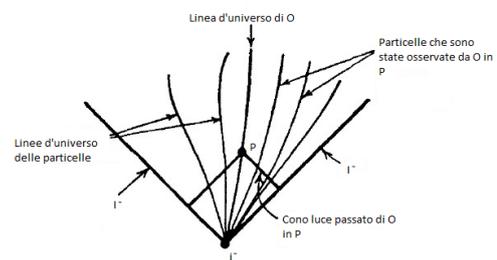


Figura 2.10: Caso in cui I^- è nulla.

Consideriamo ora uno spaziotempo in cui sia I^- che I^+ siano di tipo spazio (Fig. 2.11). Se consideriamo l'intera storia dell'osservatore O , allora il cono luce passato di O in P su I^+ si chiama orizzonte degli eventi futuro di O . Gli eventi al di fuori di questo orizzonte non verranno mai visti da O . Nel caso in cui I^+ sia nulla (per esempio lo spaziotempo di Minkowski), se O si muove su(lungo) una geodetica di tipo tempo, allora O non possiede un orizzonte degli eventi. Se tuttavia l'osservatore R si muove con accelerazione uniforme, allora la velocità dell'osservatore si avvicina asintoticamente alla velocità della luce, che significa che la linea d'universo finisce su I^+ , e quindi R possiede un orizzonte degli eventi futuro (Fig. 2.12).

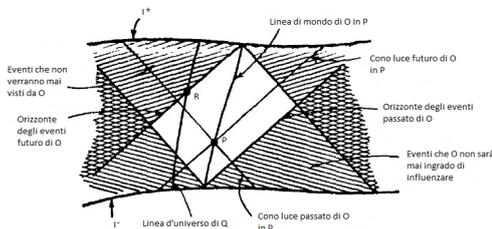


Figura 2.11: Caso in cui I^- e I^+ sono di tipo spazio.

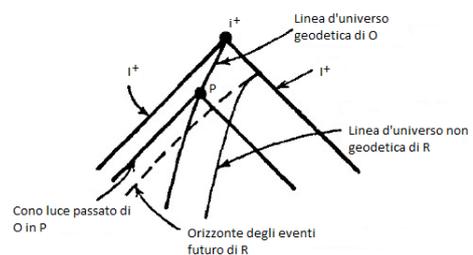


Figura 2.12: Caso in cui I^+ è nulla.

Nei casi esaminati gli orizzonti degli eventi dipendono dall'osservatore, a differenza degli orizzonti degli eventi dei buchi neri che sono definiti orizzonti degli eventi assoluti e non dipendono dall'osservatore.

Coordinate statiche

Introduciamo una trasformazione di coordinate dalle coordinate statiche (2.54) alle coordinate di Eddington-Finkelstei (x^+, x^-, θ_a) tale che

$$x^\pm \equiv t \pm \frac{l}{2} \ln \frac{1 + \frac{r}{l}}{1 - \frac{r}{l}}. \quad (2.132)$$

con $x^\pm \in (-\infty, \infty)$. Come prevedibile, $r/l = 0$ genera una curva di tipo tempo, $x^\pm = t$, per un oggetto fisso nell'origine. Quindi la metrica nell'Eq. (2.54) diventa

$$ds^2 = -\operatorname{sech}^2 \left(\frac{x^+ - x^-}{2l} \right) dx^+ dx^- + l^2 \tanh^2 \left(\frac{x^+ - x^-}{2l} \right) d\Omega_{d-2}^2. \quad (2.133)$$

Anche se per via del logaritmo il possibile dominio di r/l corrisponde ad una regione interna dell'orizzonte di de Sitter $[0, 1)$, la metrica (2.133) resta reale per tutto l'intervallo di r/l in quanto $(\sec [(x^+ - x^-)/2l], \tanh [(x^+ - x^-)/2l])$ vale $(1, 0)$ in $r/l = 0$, $(0, 1)$ in $r/l = 1$, e $(-1, \infty)$ in $r/l = \infty$, quindi ricopre l'intero spaziotempo di de Sitter.

Per ottenere il diagramma di Penrose che ci interessa, queste coordinate vengono trasformate nelle coordinate di Kruskal (U, V) con

$$U \equiv -e^{\frac{x^-}{l}} \quad e \quad V \equiv -e^{\frac{x^+}{l}}. \quad (2.134)$$

e la metrica diventa

$$ds^2 = \frac{l^2}{(1 - UV)^2} [-4dUdV + (1 + UV)^2 d\Omega_{d-2}^2]. \quad (2.135)$$

Data la relazione $(r/l) = (1 + UV)/(1 - UV)$ il prodotto UV vale -1 nell'origine $(r/l) = 0$, 0 sull'orizzonte $(r/l) = 1$ e 1 all'infinito $(r/l) = \infty$. Inoltre, la relazione $-U/V = e^{2t/l}$ ci dice che la linea $U = 0$ corrisponde all'infinito passato ($t = -\infty$) e che la linea $V = 0$ corrisponde all'infinito futuro ($t = \infty$). Quindi l'intero spaziotempo di de Sitter è rappresentato da un diagramma di Penrose che è un quadrato delimitato da $|UV| = 1$. Sull'orizzonte $r = l$ perciò $r/l = (1 + UV)/(1 - UV)$ implica che $UV = 0$. Per cui come mostrato in Fig. 2.13, gli assi coordinati $U = 0$ e $V = 0$ (le linee tratteggiate) sono nulli, ma gli orizzonti e le frecce sulle linee tratteggiate indicano le direzioni verso cui U e V aumentano. La regione ombreggiata è la regione causalmente connessa per l'osservatore nell'origine sulla parte destra del quadrato ($UV = -1, r/l = 0$).

Nelle coordinate di Kruskal (2.134), un vettore di killing $\partial/\partial t$ in coordinate statiche è espresso come

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U}{l} \frac{\partial}{\partial U} - \frac{V}{l} \frac{\partial}{\partial V}. \quad (2.136)$$

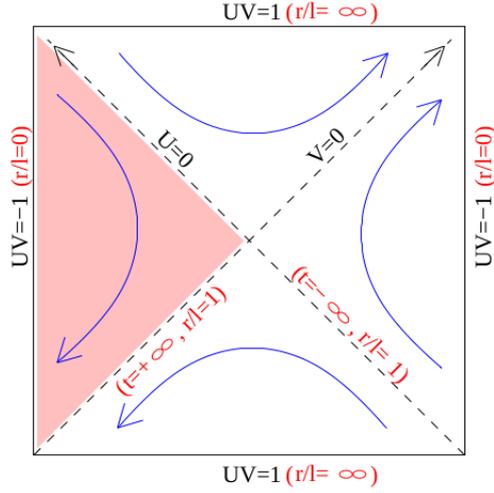


Figura 2.13: Diagramma di Penrose per lo spaziotempo di de Sitter in coordinate statiche.

Quindi la norma del vettore di Killing è

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \frac{4UV}{(1-UV)^2}. \quad (2.137)$$

e si annulla in $UV = 0$. Nella regione in cui $UV > 0$, la norma è di tipo spazio, mentre una metà della regione con V negativo è proibita. Il vettore di Killing di tipo tempo è definito solo nella regione ombreggiata con $(\partial/\partial t)^2 < 0$. L'esistenza del campo vettoriale di Killing $\partial/\partial t$ garantisce la conservazione dell'Hamiltoniana che consente una descrizione quantomeccanica dell'evoluzione temporale. Tuttavia, $\partial/\partial t$ è di tipo spazio sia nel triangolo superiore che in quello inferiore, mentre nel triangolo sulla destra delimitato dal polo sud punta verso il passato. Quindi, al di fuori della regione ombreggiata, l'evoluzione temporale non può essere definita.

Coordinate conformi

Come già accennato, la metrica conforme (2.28) descrive tutto lo spaziotempo di de Sitter ed è piatta eccetto per un fattore conforme $1/\cos^2(T/l)$ dovuto alla simmetria (2.22). Queste proprietà risultano utili per tracciare il diagramma di Penrose. Confrontando direttamente la metrica conforme (2.28) con quella delle coordinate di Kruskal (2.135), si ottiene un insieme di trasformazioni di coordinate

$$U = \tan \left[\frac{1}{2} \left(\frac{T}{l} + \theta_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (2.138)$$

$$V = \tan \left[\frac{1}{2} \left(\frac{T}{l} - \theta_1 + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (2.139)$$

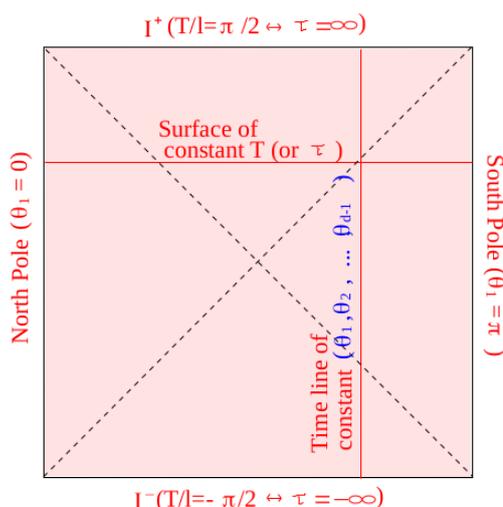


Figura 2.14: Diagramma di Penrose dello spaziotempo di de Sitter in coordinate conformi.

dove le costanti di integrazione sono scelte considerando un paragone con le quantità nelle coordinate statiche. Poiché l'intervallo del tempo conforme T è $-\pi/2 < T/l < \pi/2$, il taglio orizzontale S^{d-1} in $T/l = -\pi/2 \Leftrightarrow \tau/l = -\infty$ ($T/l = \pi/2 \Leftrightarrow \tau/l = \infty$) costituisce un infinito passato (futuro) nullo \mathcal{I}^- (\mathcal{I}^+) con $UV = 1$, come mostrato in Fig. 2.14. A $\theta_1 = 0$ ($\theta_1 = \pi$), corrisponde una linea verticale sul lato sinistro (o destro) con $UV = -1$, detta polo nord (sud). Quando $T/l = -\theta_1 + \frac{\pi}{2}$ (o $T/l = -\theta_1 - \frac{\pi}{2}$), $U = 0$ (o $V = 0$) corrispondente a una geodetica nulla (o un'altra geodetica nulla) che parte dal polo sud (o nord) all'infinito passato nullo \mathcal{I}^- e termina al polo nord (o sud) all'infinito futuro nullo \mathcal{I}^+ dove hanno origine e si interrompono tutte le geodetiche nulle (Fig. 2.14).

Ogni foliazione orizzontale con T costante è una superficie S^{d-1} e ogni linea verticale con θ costante è di tipo tempo. Anche se questo diagramma contiene tutto lo spaziotempo di de Sitter, ogni osservatore non può osservare l'intero spaziotempo. Lo spaziotempo di de Sitter ha un orizzonte delle particelle perché l'infinito passato nullo è di tipo spazio, cioè un osservatore al polo nord non può vedere nulla oltre il suo cono nullo passato dal polo sud in ogni istante, come mostrato dalla regione \mathcal{O}^- in Fig. 2.15a, in quanto le geodetiche delle particelle sono di tipo tempo. Lo spaziotempo di de Sitter ha un orizzonte degli eventi futuro in quanto anche l'infinito futuro nullo è di tipo spazio: L'osservatore non potrà mai mandare un messaggio ad alcuna regione oltre \mathcal{O}^+ , come mostrato in Fig. 2.15b. Questo fatto è in contrasto con quanto segue dallo spaziotempo di Minkowski dove un osservatore di tipo tempo riceverà prima o poi tutta la storia dell'universo nel cono di luce passato. Quindi la regione completamente accessibile ad un osservatore al polo nord è la regione comune sia a \mathcal{O}^- che a \mathcal{O}^+ che coincide esattamente con la regione causalmente connessa per l'osservatore statico nell'origine in Fig. 2.13.

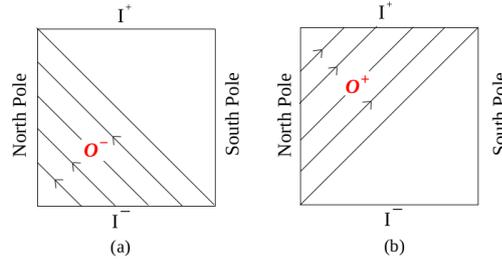


Figura 2.15: (a) Passato causale di un osservatore al polo nord, (b) futuro causale di un osservatore al polo nord.

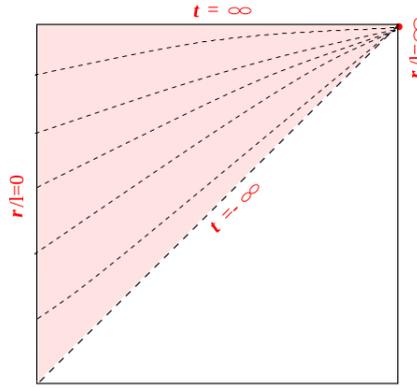


Figura 2.16: Diagramma di Penrose dello spaziotempo di de Sitter in coordinate Planari.

Coordinate planari (inflazionarie)

Confrontando le coordinate planari (2.50) con le coordinate di Kruskal (2.135) troviamo di nuovo un insieme di trasformazioni di coordinate

$$U = \frac{\frac{r}{l} - e^{-\frac{t}{l}}}{2}, \quad (2.140)$$

$$V = \frac{2}{\frac{r}{l} + e^{-\frac{t}{l}}}. \quad (2.141)$$

Dall'Eq (2.141) si può osservare che $V > 0$. Inoltre dalla relazione $r/l = U + 1/V$ si ha che $UV = -1$ sia nell'origine $r/l = 0$ che all'infinito $r/l = \infty$. In Fig. 2.16 l'origine corrisponde al bordo sulla sinistra mentre l'infinito al punto nell'angolo in alto a destra. Secondo la relazione $t/l = -\ln(1/V - U)$ l'infinito passato $t = -\infty$ ha $V = 0$, quindi corrisponde alla linea diagonale e l'infinito futuro $t = +\infty$ ha $UV = 1$, quindi corrisponde alla linea orizzontale nella parte alta del diagramma di Penrose. Per cui le coordinate planari coprono solo metà dello spazio tempo di de Sitter (come mostra la regione ombreggiata in Fig. 2.16). Ogni linea tratteggiata

in Fig. 2.16 è una superficie con tempo costante, $(d - 1)$ -dimensionale di area infinita con la metrica piatta $k = 0$, che interseca una linea di $r/l = 0$. Anche se l'intero spazio di de Sitter è geodeticamente completo, metà dello spaziotempo di de Sitter descritto dalle coordinate planari è incompleto nel passato come mostrato in Fig. 2.16.

Conclusioni

In questa tesi è stata discussa la geometria classica dello spaziotempo di de Sitter d -dimensionale. Questo risulta essere la più simmetrica soluzione del vuoto delle equazioni di Einstein, avente una costante cosmologica positiva (repulsiva). Nel caso in cui $d = 4$ con tre dimensioni spaziali e una temporale, lo spaziotempo di de Sitter può essere assunto con buona approssimazione come modello cosmologico dell'universo fisico.

Dal punto di vista topologico dS_d è il prodotto $R \times S^{d-1}$, per cui se $d \geq 3$ allora lo spazio di de Sitter risulta semplicemente connesso.

I temi che sono stati affrontati costituiscono una base per argomenti di ricerche che sono ancora in corso, come l'entropia e la temperatura de Sitter, la corrispondenza dS/CFT (teoria di campo conforme), la cosmologia trans-Planckiana e la comprensione dell'energia del vuoto nel contesto della teoria delle stringhe. L'obiettivo finale di queste ricerche dovrebbe essere una perfetta comprensione del problema della costante cosmologica come conseguenza della gravità quantistica.

Bibliografia

- [1] B. Klauber, *Simplified Guide to de Sitter and Anti-de Sitter Spaces*, (2019).
- [2] R. Casadio, *Elements of relativity*, (2016).
- [3] R. d'Inverno, *Introduzione alla relatività di Einstein*, CLUEB, (2001).
- [4] *What is the 'zero-point energy' (or 'vacuum energy') in quantum physics?*, Scientific American, (1997).
- [5] A. H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Physical Review D (Particles and Fields), Volume 23, Issue 2, (1981).
- [6] S. Akcay, R. A. Matzner *The Kerr-de Sitter Universe*, Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, (2011).
- [7] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, (1973).
- [8] K. Yoonbai, O. Chae Young, P. Namil, *Classical geometry of de Sitter spacetime: An introductory review*, Journal of the Korean Physical Society. 42, (2003).
- [9] M. Spradlin, A. Strominger, A. Volovich, *Les Houches Lectures on de Sitter Space*, Les Houches Summer School: Session 76: Euro Summer School on Unity of Fundamental Physics: Gravity, Gauge Theory and Strings, (2001).