

Beitrag zur numerischen Analyse der Schädigungsmechanismen von Naturzugkühltürmen

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing.
Sam-Young Noh
aus Seoul

Berichter: Universitätsprofessor Dr.-Ing. Konstantin Meskouris
Universitätsprofessor em. Dr.-Ing. Dr.-Ing E.h. Wilfried B. Krätzig
Universitätsprofessor Dr.-Ing. Reinhard Harte

Tag der mündlichen Prüfung: 20.12.2001

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	iv
1 Einleitung	1
1.1 Einführung in die Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung der Arbeit	2
1.3 Gliederung	3
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	5
2.1.1 Kinematik	5
2.1.2 Bilanzgleichung der Mechanik	10
2.1.3 Gleichgewichtsbedingung	12
2.2 Grundlagen der Schalentheorie	14
2.2.1 Geometrie und Kinematik	14
2.2.2 GREENscher Verzerrungstensor	15
2.2.3 Beschreibung finiter Rotationen des Direktors	16
2.2.4 Konstitutive Beziehung	17
2.2.5 Berücksichtigung der Temperatureinwirkungen	20
2.2.6 Prinzip der virtuellen Arbeit	20
2.3 Finite Elemente Formulierung	21
2.3.1 Approximation der Geometrie	21
2.3.2 Linearisierung	23
2.3.3 Elementformulierung	24
2.3.4 Assumed-Strain-Elementformulierung	24
2.3.5 Multi-layered Schichtenmodell	24
2.4 Multi-Level-Simulationskonzept	26

3	Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton	29
3.1	Allgemeines	29
3.2	Beton	31
3.2.1	Druckverhalten	31
3.2.2	Druck-Zugverhalten	32
3.2.3	Zug- und Nachrißverhalten	32
3.2.4	Modellierung des Betons	33
3.3	Erweitertes Betonmodell nach Darwin & Pecknold	34
3.3.1	Konstitutive Beziehungen	35
3.3.2	Äquivalente einachsige Dehnung	36
3.3.3	Monotone Spannungs-Dehnungsbeziehung	37
3.3.4	Biachsiales Versagenskriterium	37
3.3.5	Zyklische Spannungs-Dehnungsbeziehung	39
3.3.6	Rißverhalten	40
3.4	Betonstahlmodell	42
3.5	Verbundmodell	44
3.5.1	Allgemeines	44
3.5.2	Verbundmechanismen	45
3.5.3	Tension-Stiffening-Modell	48
3.5.4	Erweiterung auf 2-D	57
3.6	Achsentransformation der Werkstoffgesetze	59
3.7	Konzept zur numerischen Umsetzung	60
3.8	Verifikation der Werkstoffmodellierung	60
3.8.1	Tension-Stiffening-Modell	61
3.8.2	Stahlbetonmodell	66
4	Statische Analyse zweier Naturzugkühltürme	71
4.1	Einwirkungen	71
4.1.1	Eigenlast	71
4.1.2	Windlast	71
4.1.3	Temperatur	72
4.1.4	Hygrisches Quellen	72
4.2	Statische Analyse	73
4.2.1	Turm A	75
4.2.2	Turm B	93

5	Schädigungsprozesse	107
5.1	Nichtlineare Schädigungsprozesse	107
5.2	Quantifizierung des Schädigungszustandes	109
6	Schädigungsanalysen der Naturzugkühltürme	113
6.1	Analyse der Eigenschwingungen	113
6.1.1	Turm A	113
6.1.2	Turm B	119
6.2	Quantifizierung des Schädigungszustandes	123
6.2.1	Turm A	123
6.2.2	Turm B	125
6.3	Progressive Schädigungsprozesse	125
7	Zusammenfassung und Ausblick	129
	Literaturverzeichnis	133
A	Ergänzende Formeln zur Schalentheorie	139

Symbolverzeichnis

Operationen

\cdot	Skalarprodukt zweier Vektoren
\bullet	Skalarprodukt zweier Tensoren zweiter Stufe
\times	Vektorprodukt zweier Vektoren
\otimes	Dyadisches bzw. tensorielles Produkt von Tensoren

Allgemeine Bezeichnungen

E^3	EUKLIDischer Raum
$d(\)$	Differential von ()
$\frac{\partial}{\partial x}(\)$	partielle Ableitung von ()
$\delta(\)$	Variation von ()
$\Delta(\)$	linearer Zuwachs einer unabhängigen Variablen
Grad, grad	Gradientenbildung bzgl. \mathbf{X} bzw. \mathbf{x}

Kontinuumsmechanik

\mathcal{B}	Körper
$\partial\mathcal{B}$	Rand des Körpers
\mathcal{X}	Teilchen
P	Punkt
m	Masse
t	Zeit
\mathbf{B}_t	Konfiguration zum Zeitpunkt t
φ	Deformation bzw. Abbildung von \mathbf{X} auf \mathbf{x}
\mathbf{x}^i	Komponenten im kartesischen Koordinatensystem
\mathbf{i}_i	Einheitsbasisvektoren eines Ortskoordinatensystems
θ^j	krummlinige Teilchenkoordinaten
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$	kovariante Basisvektoren
$\mathbf{G}^i, \mathbf{g}^i$	kontravariante Basisvektoren
\mathbf{G}, \mathbf{g}	Metriktensor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
G, g	Determinante des Metriktensors der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
dV, dv	differentielles Volumenelement der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$d\mathbf{A}, d\mathbf{a}$	differentieller Flächenvektor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{F}	materieller Deformationsgradient
J	JAKOBISCHE Funktionaldeterminante
\mathbf{U}	materieller Rechts-Streck-Tensor
\mathbf{v}	räumlicher Links-Streck-Tensor

R	Rotationstensor
C	rechter CAUCHY-GREEN-Tensor
b	linker CAUCHY-GREEN-Tensor
δ	Verzerrungsmaß
E	GREENScher Verzerrungstensor
e	ALMANSI'scher Verzerrungstensor
I	Impuls
L	Drehimpuls
T	CAUCHY-Spannungstensor
P	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
S	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
ρ_0, ρ	Dichte der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{t}_0, \mathbf{t}	Oberflächenspannungsvektor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{t}}$	äußerer Oberflächenspannungsvektor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\bar{\mathbf{b}}$	äußeres Beschleunigungsfeld
v	Geschwindigkeitsvektor
N, n	Oberflächennormalenvektor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration

Schalentheorie

$\mathbf{X}^0, \mathbf{x}^0$	Ortsvektor der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
θ^α	materielle Schalenmittelflächenkoordinaten
A_i, a_i	Mittelflächenbasissystem der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\theta = \theta^3$	geradlinige Koordinaten in Richtung von A₃ bzw. a₃ mit $\theta \in [-1, +1]$
D, d	Einheitsvektor in Richtung von A₃ bzw. a₃
Z, z	Shifter der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$H(\theta^\alpha)$,	Schalendicke in der Referenzkonfiguration
$h(\theta^\alpha)$	
λ	Schalendickenverhältnis h/H
$\alpha_{(ij)}$	Membranverzerrungskomponenten
$\beta_{(ij)}^I, \beta_{(ij)}^{II}$	1. bzw. 2. Biegeverzerrungskomponenten
ϑ	Rotationsvektor
ω	infinitesimaler materieller Rotationsvektor
Θ	infinitesimaler räumlicher Rotationsvektor
E	beliebig fest vorgegebener Einheitsvektor

Finite Elementformulierung

ξ^i	normierte Koordinaten des Einheitsquadrates
N^A	LAGRANGE-Polynom eines Knoten A
D_A, d_A	Direktor im Knoten A
$\Delta \mathbf{x}^0$	Inkrement des Ortsvektors der Schalenmittelfläche
$\Delta \mathbf{d}$	Inkrement des Direktors

Betonmodell

σ_i	Betonspannung in der i-ten Hauptspannungsrichtung
ε_i	Dehnung in der i-ten Hauptspannungsrichtung
γ_{12}	Schubverzerrung
ν_i	Querdehnzahl in der i-ten Hauptspannungsrichtung
E_0	Anfangselastizitätsmodul
E_i	Tangentensteifigkeit in der i-ten Hauptspannungsrichtung
E_S	Sekantensteifigkeit
G	Schubsteifigkeit
ε_{iu}	äquivalente einachsiale Verzerrung
ε_{ic}	der Druckfestigkeit zugehörige äquivalente einachsiale Dehnung
α	Hauptspannungsverhältnis σ_1/σ_2
f_c	einachsiale Druckfestigkeit
f_{ct}	einachsiale Zugfestigkeit
$f_{c,w}$	Würfeldruckfestigkeit
$f_{ct,b}$	Biegezugfestigkeit
σ_{con}	Rißkontaktspannung
ε_{irc}	Dehnung beim ersten Kontakt der Rißufer während des Rißschließungsvorganges
ε_{imax}	aufgetretene maximale Zugdehnung
ε_p	plastische Dehnung
$\varepsilon_{en}, \sigma_{en}$	Dehnung bzw. Spannung des Envelope-Point
$\varepsilon_{tp}, \sigma_{tp}$	Dehnung bzw. Spannung des Turning-Point
$\varepsilon_{cp}, \sigma_{cp}$	Dehnung bzw. Spannung des Common-Point

Stahlmodell

f_{yto}, f_{yc0}	Anfangsfließspannungen für Zug und Druck
f_t	Stahlfestigkeit
ε_{sh}	Anfangsdehnung der Verfestigung
A_G	Gleichmaßdehnung
ε_b	Bruchdehnung
μ	Bewehrungsgrad

Verbundmodell

τ_b	Verbundspannung
U_S	Umfang des Bewehrungsstahls
$s(x)$	Schlupf
$v_s(x), v_c(x)$	Stahl- bzw. Betonverschiebung
σ_s, σ_c	Stahl- bzw. Betonspannung
A_S, A_C	Stahl- bzw. Betonquerschnittsfläche
$\varepsilon_s, \varepsilon_c$	Stahl- bzw. Betondehnung
$\sigma_{sr}, \varepsilon_{sr}$	Stahlspannung bzw. -dehnung im Rißquerschnitt

$\sigma_{sm}, \varepsilon_{sm}$	mittlere Stahlspannung bzw. -dehnung
f_{ct}	Betonzugfestigkeit
ρ_{eff}	effektiver Bewehrungsgrad
$A_{c,eff}$	mitwirkende Betonfläche
$\sigma_{sr,\eta\%}$	Rißstahlspannung bei der $\eta\%$ -Fraktile der Betonzugfestigkeit
ρ_{riss}	auf die Rißfläche bezogener Bewehrungsgrad
t_{riss}	Rißtiefe
ξ	Rißbildungsgrad
$l_t(\xi)$	Einleitungslänge
s_{rm}^I	mittlerer Rißabstand im Erstrißbildungsbereich
s_{rm}^{II}	mittlerer Rißabstand im abgeschlossenen Rißbildungsbereich
w_m	mittlere Rißbreite
τ_{max}	maximale Verbundspannung
τ_f	Verbundreibungsspannung
τ_{unl}	Verbundspannung bei der Entlastung
τ_{rel}	Verbundspannung bei der Wiederbelastung
L_w	Lastspielzahl

Numerische Analyse

w_a	Windaußendruck
$c_p(\theta)$	Druckbeiwert
φ	dynamischer Überhöhungsfaktor
F_l	Interferenzfaktor
q_b	Böenstaudruck
f	Eigenfrequenz
α	Wärmeübergangszahl
λ	Wärmeleitfähigkeit
α_T	Temperaturkoeffizient
ϵ_{s0}	Grundswindmaß
k	Bettungsmodul des Baugrundes
D	Schädigungsindex
S	Spektrale Dichte des Windes
G	Eigengewicht
λ_W	Windlast
ΔT	Temperaturgradient

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung in die Problemstellung

Kühlkomponenten von Kraftwerken zur Erzeugung elektrischer Energie dienen dazu, thermische Ablasten aus den natürlichen Gewässern unserer Umwelt fernzuhalten. Hierzu werden in Deutschland wie in den meisten anderen Industrieländern Naturzugkühltürme verwendet. Durch die Erhöhung der thermischen Wirkungsgrade der Kraftwerke auf Basis fossiler Brennstoffe oder von Kernbrennstoffen werden die Naturzugkühltürme leistungsfähiger und damit größer und höher. Dadurch werden sie in stärkerem Maße durch Wind sowie alle anderen atmosphärischen Einwirkungen beansprucht.

Wie Experimente an Großausführungen belegten, sind Kühlerschalen in besonderem Maße durch den Wind dynamisch beaufschlagt. Bei Türmen bis mittlerer Höhe von etwa 150 *m* liegen die niedrigsten Eigenfrequenzen stets oberhalb von 1.0 *Hz*, weshalb im Hinblick auf die Leistungsspektren der Windgeschwindigkeit oder der Oberflächendrücke i.a. eine ausreichende Hochabstimmung des Gesamtsystems vorliegt. Hinsichtlich der globalen Tragwerkssicherheit ist das Bemessungskonzept nach derzeitiger Richtlinie daher akzeptabel: Die quasi-statischen Windlasten werden mit einem frequenzabhängigen Überhöhungsfaktor vergrößert. Dieses Konzept unterschätzt jedoch die wirklichen Ringbiegewirkungen.

Seit den ersten Deformationsmessungen an fertigen Kühlern ist bekannt, daß Kühlerschalen nahezu kontinuierlichen Biegeschwingungen aus Windbelastungen unterliegen. Darüber hinaus weichen die Druckspektren der Ablösemeridiane wegen der überkritischen VON KÁRMÁN-Ablösung in Form und Frequenzlage von den übrigen Spektren ab, was zusätzliche dynamische Biegewirkungen in Umfangsrichtung der Schale bewirkt. Die dynamischen Biegewirkungen lassen sich weltweit an vielen Kühltürmen beobachten, bei denen sich nach Jahren beanstandungsfreien Tragverhaltens plötzlich Meridianrisse entwickeln und ein mit dem Lebensalter überproportional anwachsender Schädigungsprozeß beginnt. Dieser Schädigungsprozeß gilt auch für Großkühltürme modernster Bauart.

Die Biegeschwingungen beeinflussen die Tragwerkssicherheit, insbesondere aber sind sie

für die Dauerhaftigkeit der dünnen Kühlturmschale und die Verfolgung von Schädigungsprozessen von größter Bedeutung. Die Sanierung der beschädigten Schale durch z.B. Verpressen der Risse ist extrem kostenintensiv und zeitaufwendig, so daß die geplanten Abschaltungsphasen eines Kraftwerks für die Inspektion und Wartung der Maschinen im allgemeinen zu kurz sind. Aus diesem Grund ist die Erhaltung der Gebrauchstauglichkeit von Kühltürmen in der erwarteten Nutzungsdauer neben der Standsicherheit ein wichtiger Aspekt. Für einen Überblick des heutigen Forschungsstandes im Sektor der Schädigungsanalyse von Naturzugkühltürmen sind u.a. die Arbeiten von Krätzig, Gruber, Meskouris & Zahlten (1994), Krätzig & Gruber (1996), Wittek & Meiswinkel (1996), Harte & Krätzig (1999), Harte, Krätzig, Noh & Petryna (2000), Harte & Krätzig (2001) und Krätzig, Meskouris & Noh (2001) zu nennen.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die wirklichkeitsnahe Verfolgung progressiver Schädigungsprozesse von Naturzugkühltürmen, stellvertretend für ähnliche Phänomene an anderen Ingenieurtragwerken, sowie die Erkundung von Maßnahmen zur Schädigungsprävention.

Die typischen meridionalen Reißschädigungen an vielen Großkühltürmen werden durch starke thermische Einwirkungen, hygri-sches Quellen infolge der ständigen Befeuchtung der Turminnenseite oder durch Stürme sowie durch Fundamentsetzungen initialisiert. Die Initialschädigung reduziert die Umfangsbiegefestigkeit so stark, daß das dynamische System des Kühlturms zum spektralen Winderregermaximum hin schieft. Hierdurch verstärkt die ursprünglich mit ausreichendem Abstand hochabgestimmte Schalenkonstruktion ihre dynamischen Einwirkungskomponenten, was zu einer Intensivierung der Initialschädigung führt: Ein progressiver Schädigungsprozeß bildet sich aus. Die Beschreibung dieses progressiven Schädigungsprozesses ist das zentrale Ziel der vorliegenden Arbeit.

Aus heutiger Sicht der Tragwerksuntersuchungen von Naturzugkühltürmen ergibt sich folgende Situationsbeurteilung: Liegt das Ziel im Erreichen einer ausreichenden globalen Tragwerkssicherheit, beispielsweise für den Entwurf von Kühltürmen mit einer Gesamthöhe kleiner als 150 m, so ist die quasi-statische Behandlung des Windes und eine Analyse auf Basis der Elastizitätstheorie i.a. eine akzeptable Näherung. Will man Grenzzustände der Tragfähigkeit untersuchen, sind geometrisch und stofflich nichtlineare Modelle erforderlich. Sollen progressive Schädigungsprozesse unter Windbeanspruchungen erforscht werden, ist darüber hinaus der Zusammenhang zwischen den dynamischen Eigenschaften der beschädigten Struktur und des Windes zu berücksichtigen.

In der vorliegenden Arbeit werden deshalb leistungsfähige und zuverlässige numerische Werkzeuge zusammengestellt und entwickelt. Neben den Lösungsalgorithmen sind diese für die Simulation der Kühlturmstützen sowie der zusammengesetzten Schale geeignete Finite Elemente. Ferner spielt das Materialmodell für den hochgradig nichtlinearen Verbundwerkstoff Stahlbeton eine entscheidende Rolle. Für die vorliegende Arbeit wird

die Anwendung eines Betonmodells mit möglichst wenigen Materialparametern angestrebt. Da die Zugrißbildung des Betons sowie die durch Verbundwirkung verbleibende Zugtragfähigkeit des Betons zwischen den Rissen (Tension-Stiffening) die wesentlichen Einflußkomponenten auf das physikalisch nichtlineare Verhalten der allgemein schwach bewehrten Kühlturmschale charakterisieren, soll eine besondere Bedeutung der Modellierung des Zugriß- und des Verbundverhaltens zwischen Beton und Bewehrungsstahl gelegt werden.

Mittels der aufbereiteten numerischen Werkzeuge werden im Rahmen statischer Analysen unter Berücksichtigung der geometrischen und stofflichen Nichtlinearität zwei real existierende große Naturzugkühltürme analysiert. Basierend auf den aus der statischen Analyse gewonnenen Kenntnissen werden die Eigenfrequenzen nebst Modalformen für verschiedene Lastfallkombinationen analysiert. Strukturmechanisch betrachtet werden somit Eigenschwingungen dem kinematisch und physikalisch nichtlinearen, quasistatischen Grundzustand des Turms mit Schädigungszuständen unter unterschiedlichen Beanspruchungsniveaus superponiert. Aus dem Verlauf der Eigenfrequenzen über unterschiedliche Schädigungsniveaus können Erkenntnisse über die Ursachen des Schädigungsprozesses gezogen werden.

Die Formulierung von geeigneten Schädigungsindikatoren soll es ermöglichen, den Schädigungszustand der Kühltürme unter den jeweiligen Lastintensitäten zu identifizieren. Aus der Simulation von Schädigungen mittels Tragwerksantworten aus nichtlinearen, quasistatischen Analysen sowie aus nichtlinearen Schwingungsanalysen können für einen vorliegenden Kühlturmentwurf Maßnahmen zur Schädigungsprävention abgeleitet werden.

1.3 Gliederung

Im folgenden wird der Inhalt der vorliegenden Arbeit, die in sieben Kapitel gegliedert ist, vorgestellt:

- In **Kapitel 2** werden die strukturmechanischen Grundlagen beschrieben. Dabei wird das in den numerischen Analysen angesetzte Finite Schalenelement erläutert. Die bei dieser FE-Formulierung zugrunde gelegte Schalentheorie, die ausgehend vom dreidimensionalen Kontinuum hergeleitet wird, wird zusammengefaßt.
- Das **3. Kapitel** befaßt sich mit der in der Arbeit formulierten numerischen Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton. Für die vorliegenden Schädigungsanalysen extrem großer dünnwandiger, schwachbewehrter Schalenstrukturen wird ein inkrementell hypoelastisches orthotropes Betonmodell zweidimensional formuliert. Das Verbundmodell erfaßt das Rißverhalten des zu untersuchenden Tragwerks. Durch Simulation der experimentellen Versuche wird die Leistungsfähigkeit des formulierten Materialmodells untersucht und beurteilt.

- In **Kapitel 4** werden zwei real existierende Naturzugkühltürme unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität statisch untersucht. Bei der Festlegung der Lastfallkombinationen wird die hygri-sche Beanspruchung in Form einer äquivalenten Temperaturlast definiert. Zur Simulation der Schädigungsentwicklung über die Lebensdauer der Türme wird ein Lastkollektiv mit zyklischer Windbeanspruchung angesetzt.
- Über die nichtlinearen Schädigungsprozesse eines Tragwerks wird im **5. Kapitel** diskutiert. Zur Quantifizierung des globalen Schädigungszustandes unter dem jeweiligen Beanspruchungsniveau werden Eigenschwingungen des geschädigten Tragwerks herangezogen. Ein Satz von neuen Schädigungsindikatoren wird basierend auf den Eigenschwingungen formuliert. Zur Interpretation dieser Indikatoren wird ein auf der Verformung basierender Indikator angewandt.
- Ausgehend von der Betrachtung der Schädigungsprozesse werden die bereits statisch untersuchten Türme im **6. Kapitel** in Bezug auf Eigenschwingungen analysiert, die den Einfluß der Steifigkeitsabnahme auf die dynamischen Eigenschaften der Türme wiedergeben. Die Schädigungsindikatoren stellen die Entwicklung der globalen Schädigungszustände neben der initialen Schädigung infolge der thermischen und hygri-schen Beanspruchungen in Abhängigkeit der steigenden Windbelastung dar.
- Eine Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit und einen Ausblick auf noch zu untersuchende Aspekte beinhaltet das **7. Kapitel**.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird die angewandte Schalentheorie für die isoparametrische Formulierung des Finiten Elementes von Menzel (1996) zusammenfassend wiedergegeben. Dabei handelt es sich um eine Schalentheorie mit endlichen Rotationen und mit konstanten Schubverzerrungen nach REISSNER. Der Grund für die Anwendung dieser Schalentheorie liegt darin, daß das additive Update des Direktors und die Schwierigkeiten bei der Formulierung des Direktors für die in der vorliegenden Arbeit zu analysierenden zusammengesetzten Schalen elegant umgangen wurden. Somit ermöglicht die Formulierung den Verzicht auf künstliche Steifigkeiten oder Penalty-Faktoren, und Rotationsfreiwerte entlang einer Verschneidungslinie bei zusammengesetzten unterschiedlichen Schalengeometrien können konsistent gekoppelt werden.

Dabei wurde die flächenorientierte kinematische Annahme einer Schalentheorie aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik hergeleitet.

2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Im folgenden werden die wesentlichen Grundlagen der Kontinuumsmechanik im Hinblick auf die Formulierung der drei Grundgleichungen der Strukturmechanik, nämlich der Kinematik, der Gleichgewichtsbedingung und der konstitutiven Beziehung kurz behandelt. Gleichzeitig sind diese auch für die Beschreibung der in der Arbeit angewendeten Schalentheorie von Bedeutung, die nachher in die Finite Formulierung umgesetzt wird. Ausführliche Darstellungen hierzu lassen sich u.a. in den Lehrbüchern von Truesdell & Noll (1965), Green & Zerna (1968), Marsden & Hughes (1983) sowie Basar & Weichert (2000) finden.

2.1.1 Kinematik

Konfiguration und Deformation Unter Konfiguration eines Körpers \mathcal{B} versteht man eine eindeutige Abbildung materieller Teilchen \mathcal{X} des Körpers zur Zeit t im Punkte P des

EUKLIDischen Raumes E^3 :

$$P = P(\mathcal{X}, t). \quad (2.1)$$

Diese Abbildung stellt die Lage jedes materiellen Teilchens eines Körpers \mathbf{B} im Raum zur Zeit t dar. Jeder Punkt P im Raum E^3 kann durch einen Ortsvektor $\mathbf{x} = x^i \mathbf{i}_i$ beschrieben werden, wobei x^i , \mathbf{i}_i jeweils Komponenten und Einheitsbasisvektoren im rechtwinkligen kartesischen Basissystem bezeichnen. Jedes Teilchen χ läßt sich durch allgemeine krummlinige Teilchenkoordinaten θ^j darstellen. Somit wird die Konfiguration des Körpers \mathcal{B} in der aktuellen Zeit t durch genau einen Ortsvektor \mathbf{x} dargestellt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathcal{X}, t) = \mathbf{x}(\theta^i, t). \quad (2.2)$$

Diese Konfiguration wird als Momentankonfiguration bezeichnet, während die Konfiguration zur festen Referenzzeit $t = t_0$ die Referenzkonfiguration beschreibt. Zu jedem Punkt P der Referenzkonfiguration kann als Abbildung der Teilchen genau ein Ortsvektor \mathbf{X} zugeordnet werden:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathcal{X}, t_0) = \mathbf{X}(\theta^i, t_0). \quad (2.3)$$

Erfolgt die Elimination der Teilchenkoordinaten θ^i bei den beiden Konfigurationen (2.2, 2.3) desselben Körpers durch die Abbildungsvorschriften φ zwischen beiden Konfigurationen wie folgt

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t_0, t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t_0, t), \quad (2.4)$$

wird die Abbildungsvorschrift φ als Deformation bezeichnet.

EULERSche & LAGRANGESche Darstellung Die verschiedenen tensoriellen Eigenschaften Ψ der materiellen Punkte werden in der Kontinuumsmechanik grundsätzlich durch zwei unterschiedliche Wege beschrieben.

Die LAGRANGESche Betrachtung stellt die tensoriellen Eigenschaften eines Punktes mit dem Ortsvektor \mathbf{X} zur Zeit t durch die unverformte Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_0 dar:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{X}, t_0, t), \quad (2.5)$$

während bei der EULERSchen Darstellung jedem Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{x} die Eigenschaften Ψ ohne Betrachtung der Referenzkonfiguration zugeordnet werden:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.6)$$

Die LAGRANGESche und die EULERSche Darstellung werden auch jeweils materielle und Feldbeschreibung genannt.

Koordinatensysteme, Basisvektoren und Metriktensoren Die Lage des Teilchens eines Körpers \mathcal{B} im Raum E^3 läßt sich durch die konvektiven krummlinigen Koordinaten θ_i beschreiben. In jedem Punkt des Körpers, der einem Ortsvektor

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{i}_i = X^i(\theta^i) \mathbf{i}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{i}_i = x^i(\theta^i) \mathbf{i}_i \quad (2.7)$$

zugeordnet wurde, können die kovarianten Basisvektoren als tangentielle Vektoren im konvektiven Koordinatensystem der Referenz- und Momentankonfiguration mittels

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad (2.8)$$

bestimmt werden, während die kontravarianten Basisvektoren mit

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.9)$$

dargestellt werden. Die ko- und kontravariante Basisvektoren sind dual zueinander und somit gelten die Beziehungen

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i. \quad (2.10)$$

Die Metriktensoren für die Referenz- und die Momentankonfiguration werden durch

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.12)$$

definiert und ihre Determinante lauten wie folgt:

$$\det \mathbf{G} = \det[G_{ij}] = G \quad \text{bzw.} \quad \det \mathbf{g} = \det[g_{ij}] = g. \quad (2.13)$$

Schließlich berechnen sich die differentiellen Volumenelemente der Referenz- und Momentankonfiguration zu

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 \\ &= (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \sqrt{G} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} dv &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 \\ &= (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \sqrt{g} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Materieller Deformationsgradient Ein materielles infinitesimales Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration läßt sich für den Gradienten bezüglich der materiellen Koordinaten \mathbf{X} wie folgt darstellen:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \text{Grad } \mathbf{x} d\mathbf{X}. \quad (2.16)$$

Somit wird der materielle Deformationsgradient

$$\mathbf{F} := \text{Grad } \mathbf{x} \quad (2.17)$$

als lineare Abbildung des Differential $d\mathbf{x}$ auf das Differential $d\mathbf{X}$ definiert. In einem kartesischen Koordinatensystem wird der materielle Deformationsgradient als ein Tensor 2. Stufe zu

$$\mathbf{x} = x^i(X^j) \mathbf{i}_i, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^j} \otimes \frac{\partial X^j}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{j}_j \quad (2.19)$$

berechnet, während in einem körperfesten konvektiven Koordinatensystem

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^i), \quad (2.20)$$

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.21)$$

geschrieben wird. Damit lassen sich die kovarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration in die der Momentankonfiguration abbilden:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i. \quad (2.22)$$

Die inverse und transformierte Darstellung des materiellen Deformationsgradienten lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g} \otimes \mathbf{G}^i, & \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \\ \mathbf{F}^T &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, & \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mit Hilfe der Determinante J des materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F} der, sog. JAKOBISCHE Funktionaldeterminante

$$J = \det \mathbf{F} = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \right| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}, \quad (2.24)$$

die das Verhältnis der Determinanten der Momentan- und der Referenzkonfiguration darstellt, kann das Volumenelement dV der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration nach dem Satz von EULER transformiert werden:

$$dv = J dV, \quad (2.25)$$

während das Flächenelement $d\mathbf{a}$ sich wie folgt darstellen läßt:

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}. \quad (2.26)$$

Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten Jede Deformation eines Körpers setzt sich aus Starrkörpertranslation, -rotation und der Deformation im eigentlichen Sinne zusammen, welche der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} enthält. Der Deformationsgradient \mathbf{F} , der nicht singulär ist, läßt sich wie jeder nichtsinguläre Tensor 2. Stufe eindeutig in die Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{v} \mathbf{R} \quad (2.27)$$

zerlegen, wobei \mathbf{U} bzw. \mathbf{v} positiv definite, symmetrische Tensoren sind und \mathbf{R} einen orthogonalen Tensor darstellt (Abbildung 2.1).

Die obigen Tensoren 2. Stufe \mathbf{U} , \mathbf{v} und \mathbf{R} , die jeweils als materieller Rechts-Streck-Tensor, räumlicher Links-Streck-Tensor und Rotationstensor bezeichnet werden, sind wie folgt zu bestimmen:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} = \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}} = \sqrt{\mathbf{U} \mathbf{U}}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} = \sqrt{\mathbf{v} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{v}^T} = \sqrt{\mathbf{v} \mathbf{v}}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{F}. \quad (2.30)$$

Wie bereits erwähnt, kann der Deformationsgradient \mathbf{F} wegen der enthaltenen Starrkörperrotation ein sinnvolles Maß der Verzerrung eines Körpers nicht darstellen. Durch die Eliminierung des Rotationstensors läßt sich der rechte

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.31)$$

bzw. der linke CAUCHY-GREEN-Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i)(\mathbf{G}^j \otimes \mathbf{g}_j) = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.32)$$

ermitteln. Die beide Tensoren stellen anschaulich die Beziehung der Quadrate der Linienelemente der Referenz- und Momentanenkongfiguration wie folgt dar:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

bzw.

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Verzerrungstensoren Das absolute Verzerrungsmaß δ eines Körpers wird durch die Differenz der Quadrate eines differentiellen Linienelements in der Momentankongfiguration $d\mathbf{x}$ und in der Referenzkongfiguration $d\mathbf{X}$ definiert. Das Verzerrungsmaß δ läßt sich unter Verwendung des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors (2.31) und des Metriktensors (2.11) darstellen:

$$\begin{aligned} \delta &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{G}) d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Somit wird der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} zu

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad (2.36)$$

definiert und in der Basis der Referenzkongfiguration wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (2.37)$$

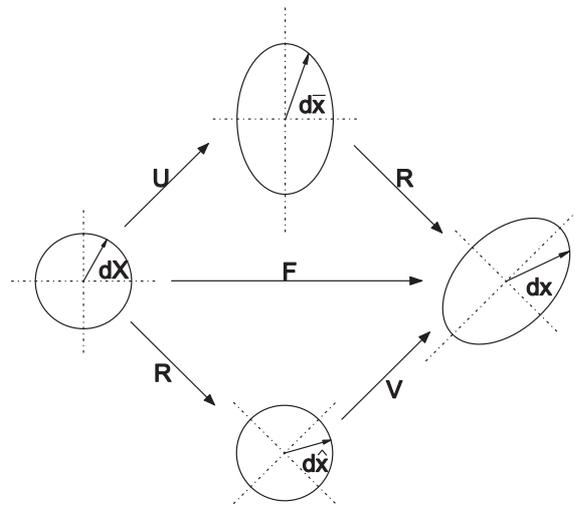


Abbildung 2.1: Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

Wird das Verzerrungsmaß in der Momentankonfiguration betrachtet, kann der ALMANSISCHE Verzerrungstensor unter Verwendung des linken CAUCHY-GREEN-Tensors (2.32) definiert werden:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1})d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot 2e d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aus der gleichen Betrachtung wie beim GREENSchen Verzerrungstensor läßt sich der ALMANSISCHE Verzerrungstensor \mathbf{e} zu

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) = e_{ij}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.39)$$

berechnen.

2.1.2 Bilanzgleichung der Mechanik

Bilanzgleichungen der Masse, des Impulses und des Drehimpulses bilden fundamentale Grundlagen der Kontinuumsmechanik und sind materialunabhängig. Die Gleichungen bilanzieren die zeitliche Änderung einer extensiven physikalischen Größe mit der Zufuhr durch die Oberfläche, der Zufuhr im Inneren des betrachteten Volumens und der Produktion im Inneren dieses Volumens.

Massenerhaltungssatz Die Masse m des materiellen Körpers \mathcal{B} verändert sich während des Deformationsprozesses nicht. Dies bedeutet, daß die Masse m in der Referenzkonfiguration \mathbf{B}_0 für jede Konfiguration \mathbf{B}_t konstant bleibt:

$$m = \int_{\mathbf{B}_t} dm = \int_{\mathbf{B}_t} \rho dv = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 dV = \text{konst.} \quad \text{für alle Zeiten } t, \quad (2.40)$$

wobei ρ die Dichte des Körpers bezeichnet. Unter Verwendung der Beziehung (2.24) läßt sich die 1. und 2. lokale Form der Massenerhaltung zu

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det \mathbf{F} = J, \quad (2.41)$$

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.42)$$

darstellen. Die zweite Gleichung (2.42) wird auch Kontinuitätsbedingung genannt.

Impulserhaltungssatz Der Impulssatz besagt, daß die Änderung des Impulses eines Körpers gleich der Summe der an diesem Körper angreifenden resultierenden Kraft ist, wobei der Impuls durch die Definition

$$\mathbf{I} := \int_{\mathbf{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v} \quad (2.43)$$

gegeben ist. Dieser Impulssatz läßt sich in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}} &= \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{b}}} + \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{t}}} = \frac{D\mathbf{I}}{Dt} \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial\mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da\end{aligned}\quad (2.44)$$

schreiben. Dabei bezeichnet $\bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{b}}}$ die resultierende Volumenkraft, die sich aus der massenbezogenen Beschleunigung $\bar{\mathbf{b}}$ ergibt, während die Oberflächenkraft $\bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{t}}}$ durch die auf der gesamten Oberfläche $\partial\mathbf{B}$ wirkenden Spannungen $\bar{\mathbf{t}}$ entsteht.

Die Darstellung wird unter Verwendung der Beziehungen (2.41) und (2.42) in die Form des dynamischen Kräftegleichgewichts umgeschrieben, dessen lokaler Ausdruck unter Berücksichtigung des CAUCHY-Theorems

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad (2.45)$$

und des GAUSSschen Integralsatzes

$$\int_{\partial\mathbf{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} da = \int_{\mathbf{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} dv \quad (2.46)$$

in räumlicher Darstellung wie folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (2.47)$$

beschrieben wird. Der Ausdruck wird auch als 1. CAUCHYsche Bewegungsgleichung bezeichnet. Diese Gleichung läßt sich in materieller Darstellung

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_0(\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} := \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (2.48)$$

umschreiben. Hierin bezeichnet \mathbf{P} den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor, mit dem der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor wie folgt definiert wird:

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-T} \mathbf{P} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (2.49)$$

Drehimpulserhaltungssatz Der Drehimpuls \mathbf{L} eines materiellen Körpers \mathcal{B} , der sich mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ bewegt, wird bezüglich eines raumfesten Punktes \mathbf{x}_0 durch

$$\mathbf{L} := \int_{\mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.50)$$

definiert. Der Drehimpulssatz besagt, daß die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der Momente aller auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. Der Satz läßt sich mit $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{r}$ zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}} &= \bar{\mathbf{M}}_{\bar{\mathbf{b}}} + \bar{\mathbf{M}}_{\bar{\mathbf{t}}} = \frac{D\mathbf{L}}{Dt} \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{r} \times \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial\mathbf{B}_t} \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{t}} da\end{aligned}\quad (2.51)$$

schreiben. Dabei bezeichnet $\bar{\mathbf{M}}_{\bar{\mathbf{b}}}$ das resultierende Moment infolge der Volumenkraft $\bar{\mathbf{b}}$ in \mathbf{B}_t , während das Moment $\bar{\mathbf{M}}_{\bar{\mathbf{t}}}$ aus der Kraft $\bar{\mathbf{t}}$ auf $\partial\mathbf{B}_t$ resultiert.

Durch Umformung dieser Darstellung unter Verwendung des CAUCHY-Theorems (2.45), des GAUSSschen Integralsatzes (2.46) und der lokalen Formen des Massenerhaltungssatzes (2.41, 2.42) erhält man die Symmetrie des CAUCHYschen Spannungstensors:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.52)$$

Es läßt sich weiter zeigen, daß der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor nicht symmetrisch ist und der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor symmetrisch ist:

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (2.53)$$

Der Bilanzsatz der kinetischen Energie Der Bilanzsatz der kinetischen Energie eines mechanischen Systems ist eine zum Impulserhaltungssatz äquivalente globale Gleichgewichtsbedingung. Der lokale Ausdruck (2.47) des Impulserhaltungssatzes wird mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}$ multipliziert, und durch Umformung des Ausdrucks erhält man die Aussage in der räumlichen Darstellung mit der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{l} und des räumlichen Deformationsgeschwindigkeitstensors \mathbf{d}

$$\mathbf{l} := \text{grad}\dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{d} := \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (2.54)$$

zu

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} n da - \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} \bullet \mathbf{d} dv \quad (2.55)$$

bzw. unter Verwendung der zeitlichen Ableitung des GREENSchen Verzerrungstensors $\dot{\mathbf{E}}$ in materieller Darstellung

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dV = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\partial \mathbf{B}_0} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} N dA - \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} dV. \quad (2.56)$$

Der Bilanzsatz besagt, daß die zeitliche Änderung der kinetischen Energie eines mechanischen Systems der Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte, die um die innere Spannungsleistung vermindert wird, entspricht.

2.1.3 Gleichgewichtsbedingung

Ein allgemeines mechanisches Problem setzt sich neben den geometrischen und statischen Randbedingungen aus einer Gleichgewichtsaussage, der Kinematik und dem Stoffgesetz zusammen. Besonders läßt sich ein solches Problem in der Strukturmechanik durch Näherungsverfahren, speziell durch die Finite Elemente Methode, die auf dem Variationsprinzip basiert, effektiv lösen. Das dem Variationsprinzip zugrundeliegende Prinzip der virtuellen Verschiebungen erfüllt die Gleichgewichtsbedingung implizit. Dies wird auch die schwache Form der Differentialgleichung genannt, die die Grundvoraussetzung zur Anwendung von Näherungsverfahren bildet.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen Die lokale Gleichgewichtsbedingung aus dem Impulserhaltungssatz (2.48), die in jedem lokalen Punkt des Körpers erfüllt wird, lautet in materieller Darstellung

$$\text{div} \mathbf{P} + \rho_0 (\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \mathbf{B}_0, \quad (2.57)$$

dabei werden die statischen Randbedingungen auf dem Rand $\partial_\sigma \mathbf{B}_0$

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad \text{auf} \quad \partial_\sigma \mathbf{B}_0 \quad (2.58)$$

und die geometrische Randbedingung auf dem Rand $\partial_x \mathbf{B}_0$

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \quad \text{auf} \quad \partial_x \mathbf{B}_0 \quad (2.59)$$

definiert. Der gesamte Rand $\partial \mathbf{B}_0$ muß die Bedingungen

$$\mathbf{B} = \partial_\sigma \mathbf{B}_0 + \partial_x \mathbf{B}_0 \quad \text{und} \quad \partial_\sigma \mathbf{B}_0 \cap \partial_x \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.60)$$

erfüllen. Der lokale Impulserhaltungssatz stellt somit mit den Randbedingungen eine starke Formulierung der Gleichgewichtsbedingung dar.

Man betrachtet eine beliebige infinitesimale gedachte Verschiebung $\delta \mathbf{x}$ des materiellen Körpers \mathbf{B} , die die geometrische Randbedingung erfüllt. Die Feld- und Randbedingung (2.57) und (2.58) aus der obigen starken Formulierung wird mit der Verschiebung $\delta \mathbf{x}$ multipliziert. Durch anschließende Integration über das Volumen \mathbf{B}_0 erreicht man die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen:

$$- \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv + \int_{\mathbf{B}_0} (\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0) \cdot \delta \mathbf{x} dv + \int_{\partial_\sigma} (\bar{\mathbf{t}}_0 - \mathbf{P} \mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{x} da = 0. \quad (2.61)$$

Unter der Annahme des statischen Gleichgewichts ($\dot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$) stellt die Integralgleichung

$$\int_{\mathbf{B}_0} (\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0) \cdot \delta \mathbf{x} dv + \int_{\partial_\sigma} (\bar{\mathbf{t}}_0 - \mathbf{P} \mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{x} da = 0 \quad (2.62)$$

eine äquivalente Formulierung der Feld- und der statischen Bedingung (2.57), (2.58) dar, da die beiden Ausdrücke als lokales Gleichgewicht und als statische Randbedingungen gelten, wenn lediglich die obige Integralgleichung (2.62) über dem Lösungsgebiet erfüllt wird. Somit wird die zu lösende Differentialgleichung mit der Gleichgewichtsbedingung und den statischen Randbedingungen nicht streng (stark), sondern schwach formuliert, so daß lokale Fehler zugelassen werden, solange die Differentialgleichung im Integralmittel erfüllt wird. Dabei werden die geometrischen Randbedingungen jedoch stark erfüllt.

Die Gleichung (2.62) läßt sich durch Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes wie folgt darstellen:

$$\delta W(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{P} \bullet \delta \mathbf{F} dv + \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \delta \mathbf{x} dv - \int_{\partial_\sigma \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \delta \mathbf{x} da = 0 \quad (2.63)$$

$\forall \delta \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \partial_x \mathbf{B}_0.$

Eine äquivalente gebräuchliche Form in Abhängigkeit des 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors und des GREENschen Verzerrungstensors lautet:

$$\delta W(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{S} \bullet \delta \mathbf{E} dv + \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \delta \mathbf{x} dv - \int_{\partial_\sigma \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \delta \mathbf{x} da = 0 \quad (2.64)$$

$\forall \delta \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \partial_x \mathbf{B}_0.$

Linearisierung des Variationsprinzip Das in (2.64) aufgestellte nichtlineare Variationsfunktional $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x})$ im Verschiebungsfeld \mathbf{x} ist meist nur durch iterative Lösungsverfahren inkrementell zu lösen.

Hierbei benötigt man die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen an einer bekannten Stelle $\bar{\mathbf{x}}$, die der nach dem ersten Glied abgebrochenen TAYLOR-Reihenentwicklung entspricht:

$$L\delta W(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}; \Delta \mathbf{x}) = \delta W(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) + D\delta W(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x}. \quad (2.65)$$

Unter Annahme von konservativen Lasten wird lediglich die virtuelle innere Arbeit linearisiert:

$$D\delta W(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} = \int_{\mathbf{B}_0} (\delta \mathbf{E} \bullet \Delta \mathbf{S} + \Delta \delta \mathbf{E} \bullet \mathbf{S}) dv. \quad (2.66)$$

Somit lautet die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen:

$$\begin{aligned} L\delta W(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}; \Delta \mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{S} \bullet \delta \mathbf{E} dv + \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \delta \mathbf{x} dv - \int_{\partial_\sigma \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \delta \mathbf{x} da + \\ &\int_{\mathbf{B}_0} (\delta \mathbf{E} \bullet \Delta \mathbf{S}) dv + \int_{\mathbf{B}_0} (\Delta \delta \mathbf{E} \bullet \mathbf{S}) dv. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Im Rahmen der FE-Formulierung wird aus den ersten drei Integralen der Vektor der Ungleichgewichtskräfte $\mathbf{P} - \mathbf{F}_i$ berechnet. Das vierte und das fünfte Integral wird die Anfangsverformungs- und die Anfangsspannungsmatrix genannt, aus denen sich die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T zusammensetzt.

2.2 Grundlagen der Schalentheorie

In diesem Abschnitt soll die Schalentheorie zur isoparametrischen Formulierung des in der vorliegenden Arbeit angewandten Finiten Elementes zusammengefaßt werden. Die Herleitung erfolgt aus den in vorherigen Abschnitten beschriebenen Grundgleichungen der allgemeinen dreidimensionalen Kontinuumsmechanik. Diese werden in eine mittelflächenorientierte Schalentheorie endlicher Rotationen mit konstanten Schubverzerrungen überführt.

2.2.1 Geometrie und Kinematik

Gemäß der Annahme der konstanten transversalen Schubspannung nach REISSNER wird der Ortsvektor eines Punktes des Schalenraumes für die Referenzkonfiguration zu

$$\mathbf{X}(\theta^\alpha, \theta) = \mathbf{X}^0(\theta^\alpha) + \theta \mathbf{A}_3(\theta^\alpha), \quad \mathbf{A}_3 = \frac{1}{2} H(\theta^\alpha) \mathbf{D}(\theta^\alpha) \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1 \quad (2.68)$$

angenommen, während für den Ortsvektor der Momentankonfiguration der kinematische Ansatz

$$\mathbf{x}(\theta^\alpha, \theta) = \mathbf{x}^0(\theta^\alpha) + \theta \mathbf{a}_3(\theta^\alpha), \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} h(\theta^\alpha) \mathbf{d}(\theta^\alpha) \quad \text{mit} \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1 \quad (2.69)$$

gewählt wird. Die Basisvektoren der beiden Konfigurationen lauten für den Schalenraum

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \mathbf{X}_{,\alpha}^0 + \theta \mathbf{A}_{3,\alpha}, & \mathbf{G}_3 &= \mathbf{A}_3, \\ \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{x}_{,\alpha}^0 + \theta \mathbf{a}_{3,\alpha}, & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (2.70)$$

und für die Schalenmittelfläche

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \mathbf{G}_{\alpha|\theta=0} = \mathbf{X}_{,\alpha}^0, & \mathbf{A}_3 &= \mathbf{G}_3, \\ \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{g}_{\alpha|\theta=0} = \mathbf{x}_{,\alpha}^0, & \mathbf{a}_3 &= \mathbf{g}_3. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Um die Kinematik des Schalenraumes durch die der Schalenmittelfläche zu beschreiben, wird der Shifter \mathbf{Z} definiert:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i, \quad \mathbf{z} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^i. \quad (2.72)$$

Somit läßt sich der Basisvektor des Schalenraumes durch den der Schalenmittelfläche darstellen. Durch Definition der Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{K} wird der Shifter in vereinfachter Form dargestellt:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}^0} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}^0} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i \quad (2.73)$$

$$= \frac{\partial(\mathbf{X}^0 + \theta \mathbf{A}_3)}{\partial \mathbf{X}^0} \quad (2.74)$$

$$= \mathbf{A} - \theta \mathbf{K} \quad (2.75)$$

mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}^i = A_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{A}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{A}^\alpha = -(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}) \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^\alpha. \quad (2.77)$$

Analog zur Referenzkonfiguration kann der Shifter der Momentankonfiguration angegeben werden:

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} - \theta \mathbf{k} \quad (2.78)$$

mit

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^i = a_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{k} = -\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \mathbf{X}^0} = -\mathbf{a}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{a}^\alpha = -(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}) \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^\alpha. \quad (2.80)$$

Im Anhang (A.2)-(A.2) stehen desweiteren die Formeln zur Berechnung differentieller Flächen- und Volumenelemente des Schalenraumes und der Schalenmittelfläche zur Verfügung.

2.2.2 GREENScher Verzerrungstensor

Der GREENSche Verzerrungstensor (2.36) des dreidimensionalen Kontinuums läßt sich durch Verwendung des Shifters der Referenzkonfiguration (2.75) auf der Basis der Schalenmittelfläche mit dem Kopfzeiger $(\bar{\cdot}\cdot\cdot)$ darstellen:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^{-T} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{Z}^{-1} \quad (2.81)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{Z}^{-T} (\bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{G}}) \mathbf{Z}^{-1}, \quad (2.82)$$

wobei $\bar{\mathbf{C}}$ der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor und $\bar{\mathbf{G}}$ der Metriktensor der Schalenmittelfläche ist. Der GREENSche Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche kann in einen

konstanten, linearen und quadratischen Anteil bezüglich der Koordinaten in der Dickenrichtung θ aufgeteilt werden.

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_K + \theta \bar{\mathbf{E}}_L + (\theta)^2 \bar{\mathbf{E}}_Q \quad (2.83)$$

$$= \alpha_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j + \theta (\beta_{(\alpha\beta)}^I \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta + \beta_{(\alpha 3)}^I \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^3 + \beta_{(3\alpha)}^I \mathbf{A}^3 \otimes \mathbf{A}^\alpha) + (\theta)^2 \beta_{(\alpha\beta)}^{II} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta \quad (2.84)$$

Die Komponenten für die obige Gleichung sind in A.3 - A.6 zu finden. Dabei wurden weitere Annahmen zur Vereinfachung der Schalenformulierung berücksichtigt. Die Annahmen ergeben sich aus einem konstanten Dickenverlauf und einem inextensiblen Direktor:

$$H(\theta^\alpha), \alpha = 0, \quad \lambda(\theta^\alpha) = \frac{h}{H} = 1, \quad \lambda_{,\alpha} = 0. \quad (2.85)$$

2.2.3 Beschreibung finiter Rotationen des Direktors

Wie man leicht aus dem Verzerrungstensor in (A.3)-(A.6) erkennen kann, wird die Deformation einer Schale durch den Ortsvektor \mathbf{x}^0 der Schalenmittelfläche und den Direktor \mathbf{d} beschrieben. Die Annahme inextensibler Verzerrungen führt zum Fehlen der Drillsteifigkeit um den Direktor der Schale, wodurch die Rotation eindeutig durch zwei Parameter beschrieben werden kann. Dabei entsteht die Schwierigkeit bei der Formulierung des Direktors in der Verschneidungslinie einer zusammengesetzten Schale, da der rotierende Direktor über die Verschneidungslinie hinweg einen Sprung aufweist.

Bei der hier angewandten Formulierung des Updating-Direktors finiter Rotation wird der Rotationsvektor nach RODRIGUES verwendet. Bei der Vorgehensweise von Simo & Fox (1989) lassen sich die Komponenten des Rotationsvektors im globalen Koordinatensystem darstellen, was sich für die Formulierung der kompatiblen Kopplung der drei Rotationsfreiwerte bei der zusammengesetzten Schale als vorteilhaft erweist. Durch eine Unterscheidung zwischen Knoten einer Verschneidungslinie und Knoten eines glatten Schalenbereichs wird der Direktor sechs- bzw. fünfparametrig formuliert.

Durch eine multiplikative Zerlegung kann der Direktor der Referenz- und Momentankonfiguration als Rotation eines beliebigen festen Einheitsvektors (\mathbf{E}) beschrieben werden:

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{d} = \mathbf{R} \mathbf{E}. \quad (2.86)$$

Hierbei erfolgt die Rotation durch \mathbf{R}_0 und \mathbf{R} nicht um \mathbf{E} . Der inkrementelle Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$, der aufgrund der Definition senkrecht zum Direktor \mathbf{d} steht und seine Länge den Rotationswinkel ω aufweist,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}, \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}| \quad (2.87)$$

wird durch die exponentielle Abbildung überführt, so daß die infinitesimale Rotationen $\Delta \mathbf{d}$ einer linearisierten Berechnung nicht berechnet werden müssen. Die aktuelle Konfiguration des Direktors berechnet sich aus der vorhergehenden Konfiguration zu:

$$\mathbf{d}^{k+1} = \exp \left[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{k+1} \right] \mathbf{d}^k = \cos \omega^{k+1} \mathbf{d}^k + \frac{\sin \omega^{k+1}}{\omega^{k+1}} \underbrace{(\boldsymbol{\omega}^{k+1} \times \mathbf{d}^k)}_{\delta \mathbf{d}^{k+1}}. \quad (2.88)$$

Die Abbildung **2.2** veranschaulicht diesen Update des Direktors. Während der Rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ für die sechsparametrische Formulierung verwendet wird, wird bei der fünfparametrischen Formulierung der materielle, inkrementelle, zwei komponentige Rotationsvektor

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta^1 \mathbf{i}_1 + \Theta^2 \mathbf{i}_2 \quad (2.89)$$

herangezogen, der mit dem in der X^1 - X^2 -Ebene liegenden Einheitsvektor definiert wird:

$$\delta \mathbf{T} := \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{E} = \delta T^1 \mathbf{i}_1 + \delta T^2 \mathbf{i}_2, \quad (2.90)$$

wobei die Variation des Direktors zu

$$\delta \mathbf{d} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{E}) = \mathbf{R} \delta \mathbf{T} \quad (2.91)$$

berechnet wird. Dabei wird der Rotationstensor

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{d}^k \times \Delta \mathbf{d} \quad (2.92)$$

inkrementell upgedated. Die linearisierte Form der Variation des Direktors lautet:

$$\Delta \delta \mathbf{d} = -(\Delta \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) \mathbf{d} = -(\Delta \boldsymbol{\Theta} \cdot \delta \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{d} = -(\Delta \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{T}) \mathbf{d}. \quad (2.93)$$

2.2.4 Konstitutive Beziehung

Die Formulierung der konstitutiven Beziehung basiert auf dem linear elastischen Materialgesetz, indem ein Materialtensor vierter Stufe \mathbf{C} den GREENSchen Verzerrungstensor mit dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor verknüpft:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E}. \quad (2.94)$$

Für das nichtlineare Materialgesetz muß die Beziehung in inkrementeller Form angewendet werden. Im folgenden wird jedoch dieses linear elastische Materialgesetz im Hinblick auf die spätere inkrementelle Formulierung weiter betrachtet.

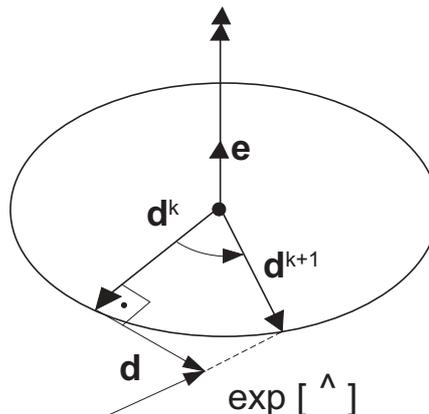


Abbildung 2.2: Exponentiale Abbildung des Direktors

Die virtuelle innere Arbeit des Schalenraumes wird unter Berücksichtigung der Aufteilung des GREENSchen Verzerrungstensors (2.83) auf die Schalenmittelfläche transformiert:

$$-\delta W_i = \int_{B_0} \mathbf{C}\mathbf{E} \bullet \delta \mathbf{E} dV \quad (2.95)$$

$$= \int_{A_0} \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}} \bullet \delta \bar{\mathbf{E}} d\theta \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.96)$$

$$= \int_{A_0} \mathbf{N}_E \bullet \delta \bar{\mathbf{E}}_K + \mathbf{M}_E^I \bullet \delta \bar{\mathbf{E}}_L + \mathbf{M}_E^{II} \bullet \delta \bar{\mathbf{E}}_Q \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2. \quad (2.97)$$

Dabei sind die Krafttensoren zu

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_E &:= N_E^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} \bar{\mathbf{S}} d\theta = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} S^{ij} d\theta \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j, \\ \mathbf{M}_E^I &:= M_E^{Iij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} \theta \bar{\mathbf{S}} d\theta = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} \theta S^{ij} d\theta \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j, \\ \mathbf{M}_E^{II} &:= M_E^{IIij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} (\theta)^2 \bar{\mathbf{S}} d\theta = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} (\theta)^2 S^{ij} d\theta \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \end{aligned} \quad (2.98)$$

definiert. Unter Vernachlässigung quadratischer Verzerrungsanteile $\bar{\mathbf{E}}_Q$ und unter Berücksichtigung des Materialgesetzes lassen sich die Tensoren umformulieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_E &= \bar{\mathbf{D}}^0 \bar{\mathbf{E}}_K + \bar{\mathbf{D}}^1 \bar{\mathbf{E}}_L + \bar{\mathbf{D}}^2 \bar{\mathbf{E}}_Q, \\ \mathbf{M}_E^I &= \bar{\mathbf{D}}^1 \bar{\mathbf{E}}_K + \bar{\mathbf{D}}^2 \bar{\mathbf{E}}_L + \bar{\mathbf{D}}^3 \bar{\mathbf{E}}_Q, \\ \mathbf{N}_E^{II} &= \bar{\mathbf{D}}^2 \bar{\mathbf{E}}_K + \bar{\mathbf{D}}^3 \bar{\mathbf{E}}_L + \bar{\mathbf{D}}^4 \bar{\mathbf{E}}_Q \end{aligned} \quad (2.99)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}^m &= \frac{m^{ijkl}}{D} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} (\theta)^m \bar{\mathbf{C}} d\theta, \quad m = 1, 2 \\ \bar{\mathbf{C}} &= C^{ijkl} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Bei Vernachlässigung der Dickenverzerrung ($\alpha_{(33)} = 0$) und in Anlehnung an Montag (1997) läßt sich die virtuelle innere Arbeit wie folgt in Komponentenschreibweise ausdrücken:

$$-\delta W_i = \int_{B_0} \mathbf{S} \bullet \delta \mathbf{E} dV \quad (2.101)$$

$$= \int_{A_0} (N^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + Q^\alpha \delta \alpha_{(\alpha 3)} + M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)}^I) \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2. \quad (2.102)$$

Die Komponenten werden durch

$$\begin{aligned} N^{(\alpha\beta)} &= \frac{0}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{1}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)} + \frac{0}{D} \alpha^{\beta\rho 3} \alpha_{(\rho 3)}, \\ M^{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{2}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)} + \frac{1}{D} \alpha^{\beta\rho 3} \alpha_{(\rho 3)}, \\ Q^\alpha &= \frac{0}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{1}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)} + \frac{0}{D} \alpha^{\beta\rho 3} \alpha_{(\rho 3)} \end{aligned} \quad (2.103)$$

mit

$$\frac{m}{D} \alpha^{\beta\rho\lambda} = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} C^{\alpha\beta\rho\lambda} (\theta)^m d\theta, \quad m = 1, 2$$

berechnet. Die bisherige Betrachtung des linear elastischen Materialgesetzes gilt ebenfalls bei der inkrementellen Formulierung, sofern der Werkstofftensor \mathbf{C} den Tangentenmodul

darstellt. Daher wurde bei der Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit der tangentielle Werkstofftensor eingeführt, der die inkrementelle Spannung mit der inkrementellen Verzerrung verknüpft:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}_T \Delta \mathbf{E}. \quad (2.104)$$

Die linearisierte Form der virtuellen inneren Arbeit lautet somit

$$-D\delta W_i = \int_{B_0} \Delta \mathbf{S} \bullet \delta \mathbf{E} dV + \int_{B_0} \mathbf{S} \bullet \Delta \delta \mathbf{E} dV \quad (2.105)$$

$$= \int_{A_0} (\Delta N^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + \Delta Q^\alpha \delta \alpha_{(\alpha 3)} + \Delta M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)}^I) \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 + \int_{A_0} (N^{(\alpha\beta)} \Delta \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + Q^\alpha \Delta \delta \alpha_{(\alpha 3)} + M^{(\alpha\beta)} \Delta \delta \beta_{(\alpha\beta)}^I) \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2. \quad (2.106)$$

Dabei lassen sich die Komponenten der linearisierten Krafttensoren im folgenden darstellen:

$$\begin{aligned} \Delta N^{(\alpha\beta)} &= \overset{0}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \alpha_{(\rho\lambda)} + \overset{1}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \beta_{(\rho\lambda)} + \overset{0}{D}_T^{\alpha\beta\rho 3} \Delta \alpha_{(\rho 3)}, \\ \Delta M^{\alpha\beta} &= \overset{1}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \alpha_{(\rho\lambda)} + \overset{2}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \beta_{(\rho\lambda)} + \overset{1}{D}_T^{\alpha\beta\rho 3} \Delta \alpha_{(\rho 3)}, \\ \Delta Q^{(\alpha)} &= \overset{0}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \alpha_{(\rho\lambda)} + \overset{1}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} \Delta \beta_{(\rho\lambda)} + \overset{0}{D}_T^{\alpha\beta\rho 3} \Delta \alpha_{(\rho 3)} \end{aligned} \quad (2.107)$$

mit

$$\overset{m}{D}_T^{\alpha\beta\rho\lambda} = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} C_T^{\alpha\beta\rho\lambda}(\theta)^m d\theta, \quad m = 1, 2. \quad (2.108)$$

Bei der Anwendung des nichtlinearen Materialgesetzes muß die obige Darstellung verbessert werden, da der 2.PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor im zweiten Integralterm nicht mit dem hier formulierten linear elastischen Materialgesetz berechnet werden kann. Daher muß die inkrementell berechnete Spannung in Abhängigkeit der Lastgeschichte summiert werden:

$$\mathbf{S} = \sum_{N=1}^{N_{Last}} \mathbf{S}^N. \quad (2.109)$$

Damit lauten die virtuelle innere Arbeit und die linearisierte Form:

$$-\delta W_i = \int_{B_0} \sum_N \mathbf{S}^N \bullet \delta \mathbf{E} dV \quad (2.110)$$

$$= \int_{A_0} \left(\sum_N N^{(\alpha\beta),N} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + \sum_N Q^{\alpha,N} \delta \alpha_{(\alpha 3)} + \sum_N M^{(\alpha\beta),N} \delta \beta_{(\alpha\beta)}^I \right) \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.111)$$

und

$$-D\delta W_i = \int_{B_0} \Delta \mathbf{S} \bullet \delta \mathbf{E} dV + \int_{B_0} \sum_N \mathbf{S}^N \bullet \Delta \delta \mathbf{E} dV \quad (2.112)$$

$$= \int_{A_0} (\Delta N^{(\alpha\beta)} \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + \Delta Q^\alpha \delta \alpha_{(\alpha 3)} + \Delta M^{(\alpha\beta)} \delta \beta_{(\alpha\beta)}^I) \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 + \int_{A_0} \left(\sum_N N^{(\alpha\beta),N} \Delta \delta \alpha_{(\alpha\beta)} + \sum_N Q^{\alpha,N} \Delta \delta \alpha_{(\alpha 3)} + \sum_N M^{(\alpha\beta),N} \Delta \delta \beta_{(\alpha\beta)}^I \right) \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2$$

$$\sum_N M^{(\alpha\beta),N} \Delta\delta\beta_{(\alpha\beta)}^I \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2. \quad (2.113)$$

2.2.5 Berücksichtigung der Temperatureinwirkungen

Unter der Annahmen eines linearen Temperaturverlaufs über die Tragwerksdicke infolge der stationären Temperaturentbreitung und des thermisch isotropen Werkstoffgesetzes ruft das Temperaturfeld ([Basar & Krätzig 1985])

$$T^*(\theta_1, \theta_2, \theta) = T(\theta_1, \theta_2) + \Delta T(\theta_1, \theta_2) \frac{\theta}{h} \quad (2.114)$$

den Verzerrungsfeld hervor, dessen Komponenten wie folgt lauten:

$$\gamma_{(\alpha\beta)}^T = \alpha_{(\alpha\beta)}^T + \theta \beta_{(\alpha\beta)}^T \quad (2.115)$$

mit

$$\alpha_{(\alpha\beta)}^T = \alpha_T T a_{\alpha\beta}, \quad \beta_{(\alpha\beta)}^T = \alpha_T \frac{\Delta T}{h} a_{\alpha\beta}. \quad (2.116)$$

Dabei bezeichnen T und ΔT jeweils die gleichmäßige Temperatur der Tragwerksmittelfläche und die Temperaturdifferenz zwischen den Laibungen. Die gesamten Verzerrungen setzen sich aus den Verzerrungen infolge der Spannungen S und der Temperatur T zusammen:

$$\gamma_{(\alpha\beta)} = \gamma_{(\alpha\beta)}^S + \gamma_{(\alpha\beta)}^T. \quad (2.117)$$

Somit werden die Komponenten der Krafttensoren in Gleichung (2.103) wie folgt erweitert:

$$\begin{aligned} N^{(\alpha\beta)} &= \overset{0}{D}{}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\alpha_{(\rho\lambda)} - \alpha_{(\rho\lambda)}^T) + \overset{1}{D}{}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\beta_{(\rho\lambda)} - \beta_{(\rho\lambda)}^T) + \overset{0}{D}{}^{\alpha\beta\rho 3} \alpha_{(\rho 3)}, \\ M^{(\alpha\beta)} &= \overset{1}{D}{}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\alpha_{(\rho\lambda)} - \alpha_{(\rho\lambda)}^T) + \overset{2}{D}{}^{\alpha\beta\rho\lambda} (\beta_{(\rho\lambda)} - \beta_{(\rho\lambda)}^T) + \overset{1}{D}{}^{\alpha\beta\rho 3} \alpha_{(\rho 3)}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Unter der Voraussetzung der stationären Temperatureinwirkung enthält die inkrementelle Variable keine Temperaturterme. Daher wird der Einfluß der Temperatur implizit durch die Gleichung (2.118) im Vektor der inneren Kräfte und in der Anfangsspannungsmatrix berücksichtigt.

2.2.6 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die virtuelle äußere Arbeit des dreidimensionalen Kontinuums kann mit Bezug auf die Referenzkonfiguration aus der Gleichung (2.64) entnommen werden.

$$\delta W_a = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \delta \mathbf{u} dv - \int_{\partial_\sigma \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \delta \mathbf{u} da = 0 \quad (2.119)$$

Abweichend von Menzel (1996) wird in dieser Arbeit der Lastangriff auf der Schalenmittelfläche vereinfacht angenommen. Die Oberflächen mit vorgeschriebenen statischen Randbedingungen können in Schalenoberflächen für Flächenlasten \mathbf{p}_0 und für Randlasten \mathbf{n}_r , \mathbf{m}_r unterteilt werden. Die äußere Arbeit lautet unter Vernachlässigung der Volumenkkräfte und der Flächenmomente in Komponentenschreibweise

$$\delta W_a = \int_{A_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{x}^0 \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 + \int_r (\delta \mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{n}_r + \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{m}_r) dr \quad (2.120)$$

$$= \int_{A_0} p_0^i \delta x_i^0 \sqrt{Ad} \theta^1 d\theta^2 + \int_r (n_r^i \delta x_i^0 + \frac{1}{2} H m_r^i \delta d_i) dr. \quad (2.121)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen kann mit der virtuellen inneren Arbeit in (2.111) formuliert werden:

$$\delta W(\mathbf{x}^0, \delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) = \delta W_i(\mathbf{x}^0, \delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) - \delta W_a(\delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) = \mathbf{0}. \quad (2.122)$$

Die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen wird an einer Stelle $(\mathbf{x}^0, \mathbf{d})$ durch

$$L\delta W(\mathbf{x}^0, \delta \mathbf{x}^0; \Delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}; \Delta \mathbf{d}) = \underbrace{\delta W_i(\mathbf{x}^0, \delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) - \delta W_a(\delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d})}_{\text{Ungleichgewichtskraft}} + \underbrace{D\delta W_i(\mathbf{x}^0, \delta \mathbf{x}^0, \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) \cdot (\Delta \mathbf{x}^0, \Delta \mathbf{d})}_{\text{tang. Steifigkeit}} = \mathbf{0} \quad (2.123)$$

beschrieben. In der Gleichung (2.111), (2.113) und (2.121) sind bereits die Formulierung in Komponentenschreibweise angegeben.

2.3 Finite Elemente Formulierung

Das im Abschnitt 2.2.6 hergeleitete Variationsprinzip wird mit der Methode der Finiten Elemente approximativ gelöst. Eine grundlegende Beschreibung dieser Methode ist u.a. in Bathe (1996), Zienkiewicz & Taylor (1991) und Hughes (1987) zu finden.

Das angewandte vierknotige Assumed-Strain-Element von Menzel (1996) wurde mit der im Abschnitt 2.2 dargestellten Schalentheorie endlicher Rotationen mit konstanten Schubverzerrungen nach REISSNER formuliert. Die Beschreibung der Geometrie der Referenz- und Momentankonfiguration erfolgt isoparametrisch durch bilineare LAGRANGE-Polynome. Die getroffenen Annahmen in der Schalentheorie (2.85) werden weiter berücksichtigt.

2.3.1 Approximation der Geometrie

Ein beliebiger Punkt P des Schalenkontinuums der Referenz- und der Momentankonfiguration wird mit $\theta \in [-1, +1]$ durch die Gleichungen (2.68, 2.69) exakt beschrieben. Der approximierte Ortsvektor des Schalenraums eines Elementes $\mathbf{X}_e^h, \mathbf{x}_e^h$ läßt sich durch die LAGRANGE-Polynome $N^A(\xi^1, \xi^2) \in [-1, +1] \times [-1, +1]$ mit den Annahmen der inextensiblen Verformung in Dickenrichtung wie folgt formulieren:

$$\mathbf{X}_e^h = \sum_{A=1}^4 \left(N^A(\xi^1, \xi^2) \mathbf{X}_A^0 + N^A(\xi^1, \xi^2) \theta \frac{1}{2} H \mathbf{D}_A \right), \quad (2.124)$$

$$\mathbf{x}_e^h = \sum_{A=1}^4 \left(N^A(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_A^0 + N^A(\xi^1, \xi^2) \theta \frac{1}{2} H \mathbf{d}_A \right), \quad (2.125)$$

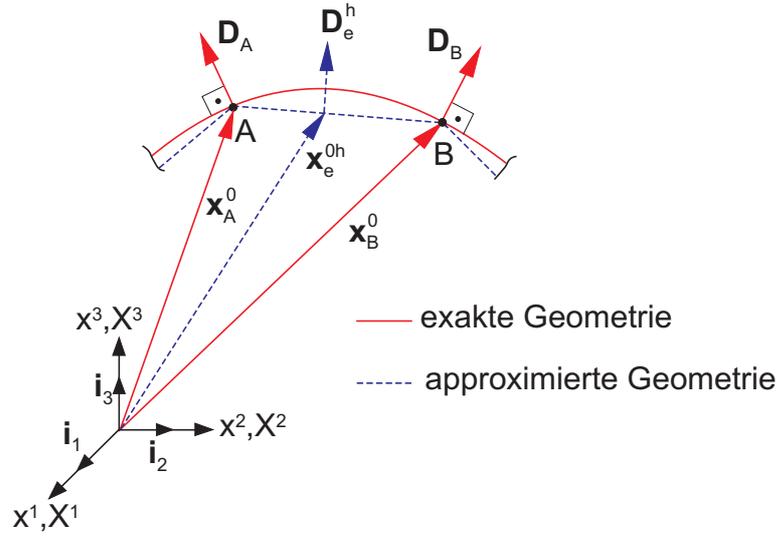


Abbildung 2.3: Fünfparametrische Schalenbeschreibung

während die Geometrie der Schalenmittelfläche $\theta = 0$ der Referenz- und der Momentan-
konfiguration zu

$$\mathbf{X}_e^{0h} = \sum_{A=1}^4 N^A(\xi^1, \xi^2) \mathbf{X}_A^0 = N^A \mathbf{X}_A^0, \quad (2.126)$$

$$\mathbf{x}_e^{0h} = \sum_{A=1}^4 N^A(\xi^1, \xi^2) \mathbf{x}_A^0 = N^A \mathbf{x}_A^0 \quad (2.127)$$

approximiert wird. Auf der rechten Seite obiger Gleichungen wird zur Vereinfachung der
Notation der Summationsindex A verwendet. Die approximierten Ausdrücke des Ortsvek-
tors (2.124)-(2.127) stellen im Elementknoten jedoch exakte Geometrien dar.

Bei der fünfparametrischen Formulierung im Knoten eines glatten Schalenbereichs werden
gemäß Abbildung 2.3 der Direktor in der Referenzkonfiguration \mathbf{D} und in der Momentan-
konfiguration \mathbf{d} in den diskreten Knotenpunkten exakt vorgegeben. Eine approximative
Beschreibung des Direktors im Elementinneren eines Finiten Elementes erfolgt nach

$$\mathbf{D}_e^h = \frac{1}{|N^A \mathbf{D}_A|} N^A \mathbf{D}_A, \quad \mathbf{d}_e^h = \frac{1}{|N^A \mathbf{d}_A|} N^A \mathbf{d}_A, \quad (2.128)$$

während sich ihre Ableitungen ohne Genauigkeitsverlust vereinfachend zu

$$\mathbf{D}_{e,\alpha}^h = N_{,\alpha}^A \mathbf{D}_A, \quad \mathbf{d}_{e,\alpha}^h = N_{,\alpha}^A \mathbf{d}_A \quad (2.129)$$

darstellen lassen.

Im Gegensatz dazu werden die Direktoren bei der sechseparametrischen Formulierung für die
Knoten auf der Verschneidungslinie der unterschiedlichen Geometrien in den Knotenpunkten
nicht mehr exakt vorgegeben. Gemäß Abbildung 2.4 werden sie im Elementknoten

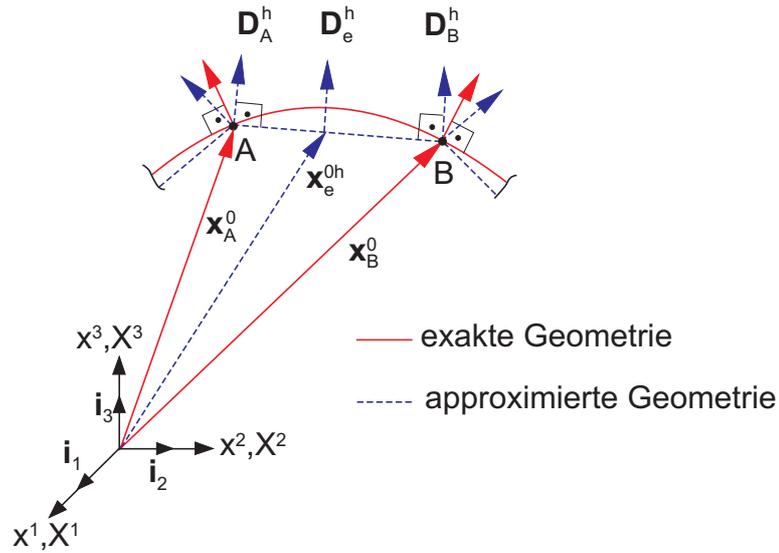


Abbildung 2.4: Sechseparametrische Schalenbeschreibung

durch die Basisvektoren der Schalenmittelfläche wie folgt numerisch berechnet:

$$\mathbf{D}_A^h = \frac{1}{\mathbf{A}_{1A}^h \times \mathbf{A}_{2A}^h} \mathbf{A}_{1A}^h \times \mathbf{A}_{2A}^h, \quad \mathbf{A}_{\alpha A}^h = \mathbf{X}_{e,\alpha}^{0h} = \sum_{A=1}^4 N_{,\alpha}^A \mathbf{X}_A^0. \quad (2.130)$$

Die Interpolation des Direktors innerhalb eines Elementes sowie die Formulierung der ersten Ableitungen erfolgen nach der gleichen Vorschrift wie bei der fünfparametrischen Darstellung. Der Sprung des Direktors ruft eine künstliche Drehsteifigkeit hervor.

2.3.2 Linearisierung

Die Ortsvektoren des Schalenraumes (2.3.1) und der Schalenmittelfläche sowie der Direktor lassen sich zu

$$\Delta \mathbf{x}_e^h = N^A \Delta \mathbf{x}_A^0 + N^A \theta \frac{1}{2} h \Delta \mathbf{d}_A, \quad (2.131)$$

$$\Delta \mathbf{x}_e^{0h} = N^A \Delta \mathbf{x}_A^0, \quad (2.132)$$

$$\Delta \mathbf{d}_e^h = N^A \Delta \mathbf{d}_A \quad (2.133)$$

linearisieren, während die zweite Variation des Ortsvektors des Schalenraumes und des Direktors wie folgt hergeleitet werden:

$$\Delta \delta \mathbf{x}_e^h = N^A \theta \frac{1}{2} H \Delta \delta \mathbf{d}_A, \quad (2.134)$$

$$\Delta \delta \mathbf{d}_e^h = -N^A \Delta \delta \mathbf{d}_A = N^A (\Delta \mathbf{d}_A \cdot \delta \mathbf{d}_A) \delta \mathbf{d}_A. \quad (2.135)$$

Dabei werden $\Delta \mathbf{d}$ und $\Delta \delta \mathbf{d}$ durch Gleichungen (2.91) und (2.93) bestimmt.

2.3.3 Elementformulierung

Die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (2.123) läßt sich für ein Finites Element inkrementell darstellen:

$$\sum_{A=1}^{n_{nodes}^e} \sum_{B=1}^{n_{nodes}^e} [\delta \mathbf{x}_A^0 \quad \delta \mathbf{d}_A] \cdot \left\{ \mathbf{k}_T^{(AB)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_B^0 \\ \Delta \mathbf{d}_B \end{bmatrix} - (\lambda \mathbf{f}_a^A - \mathbf{f}_i^A) \right\} = 0. \quad (2.136)$$

Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix, die aus Anfangsspannungs- und Anfangsverformungsmatrix besteht, wird durch Anwendung der Krafttensoren (2.108, 2.103) und der approximierten Verzerrungen im Anhang (A.11-A.16) als Summe einzelner, jeweils Knoten zugeordneter Anteile berechnet:

$$\mathbf{k}_T = \sum_{A=1}^{n_{nodes}^e} \sum_{B=1}^{n_{nodes}^e} \mathbf{k}_G^{AB} + \mathbf{k}_V^{AB}. \quad (2.137)$$

Durch Überführung der Elementmatrizen in Systemmatrizen unter Berücksichtigung der Inzidenzbeziehung erhält man die tangentielle Gesamtsteifigkeitsgleichung:

$$\mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{V} = \lambda \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_i, \quad (2.138)$$

die je nach Problemstellung durch ein geeignetes Iterationsverfahren gelöst werden kann.

2.3.4 Assumed-Strain-Elementformulierung

Wegen der niedrigen Ordnung der Ansatzfunktion tritt bei dieser Elementformulierung ein Shear-Locking-Verhalten auf. Die Überschätzung der Schubsteifigkeit liefert damit zu steife Ergebnisse. Zur Beseitigung des Shear-Locking-Verhaltens werden die Schubverzerrungen nach Dvorkin & Bathe (1984) in den Kollokationspunkten, die in den Mittelpunkten zwischen zwei Nachbarknoten eines Elementes A,B,C und D in Abbildung 2.5 liegen, ausgewertet und wie folgt neu interpoliert:

$$\alpha_{(13)}^{h \text{ as}} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\alpha_{(13)B}^h + \frac{1}{2}(1 + \xi^2)\alpha_{(13)D}^h, \quad (2.139)$$

$$\alpha_{(23)}^{h \text{ as}} = \frac{1}{2}(1 - \xi^1)\alpha_{(23)A}^h + \frac{1}{2}(1 + \xi^1)\alpha_{(23)C}^h. \quad (2.140)$$

Die bisher erwähnten wesentlichen Eigenschaften dieses Finiten Elements sind in Abbildung 2.5 tabellarisch zusammengestellt.

2.3.5 Multi-layered Schichtenmodell

Die physikalische Nichtlinearität des Materials wird im Schalenelement durch das multi-layered Schichtenmodell realisiert. Damit wird die oben abgeleitete, auf die Schalenmittelfläche bezogene 2D-Schalentheorie, die aus dem dreidimensionalen Kontinuum hergeleitet wurde, in eine $2\frac{1}{2}D$ -Schalentheorie erweitert. Der in der vorliegenden Arbeit verwendete Verbundwerkstoff Stahlbeton, der noch in Kapitel 3 ausführlich beschrieben wird, wird in Dickenrichtung in mehrere Membranschichten unterteilt (Abbildung 2.6). Die Betonstähle werden dabei unabhängig von der Lage der Betonschichten als

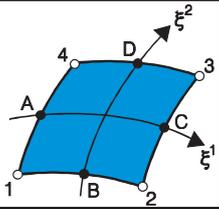
	Isoparametrisches Assumed Strain Element Finiter Rotationen		
	ASE 6		
	5-parametrisch	6-parametrisch	
Theoretische Grundlage	Reissner-Mindlin Theorie $\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{X}^0(\xi^1, \xi^2) + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{D}(\xi^1, \xi^2)$		
Verschiebungsvariablen	X^i	unabhängig	X^i
		abhängig	3
Rotation	Rodrigues Vektor		
Einschränkung	Inextensibility Bedingung $\text{IDI} = 1$		
	3		
Freiheitsgrade	X^i , (4 x 5)	X^i , , 3	(4 x 6)
Formfunktionen	Bilineare Polynome		
Integrationspunkte	2 x 2		
Interpolation von	$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \quad B + \frac{1}{2} (1 + \xi^2) \quad D \\ 2 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^1) \quad A + \frac{1}{2} (1 + \xi^1) \quad C \end{aligned}$		

Abbildung 2.5: Finite Elementformulierung des Schalenelementes

verschmierte Stahlschichten angenommen.

Jeder Materialpunkt einer bestimmten Schicht mit Abstand θ von der Schalenmittelfläche erfährt die inkrementellen Verzerrungen unter der Annahme des linearen Verlaufs über die Schalendicke

$$\Delta\gamma_{(\alpha\beta)} = \Delta\alpha_{(\alpha\beta)} + \theta\Delta\beta_{(\alpha\beta)}, \tag{2.141}$$

mit der die Spannungen über das Materialgesetz bestimmt werden. Vereinfachend werden die transversalen Schubverzerrungen linear elastisch angenommen. Die Integration der Spannungen über alle Schichten der Schalendicke liefert die inneren Kräfte. Der Werkstofftensor in Gleichung (2.103) wird ebenso über die Schichten wie folgt integriert:

$$D_T^{m\alpha\beta\rho\lambda} = \int_{-1}^{+1} \det \mathbf{Z} C_T^{\alpha\beta\rho\lambda}(\theta)^m d\theta = \det \mathbf{Z} \sum_{N=1}^{N_{Layer}} C_{T,N}^{\alpha\beta\rho\lambda}(\theta)^m \Delta\theta, \quad m = 1, 2. \tag{2.142}$$

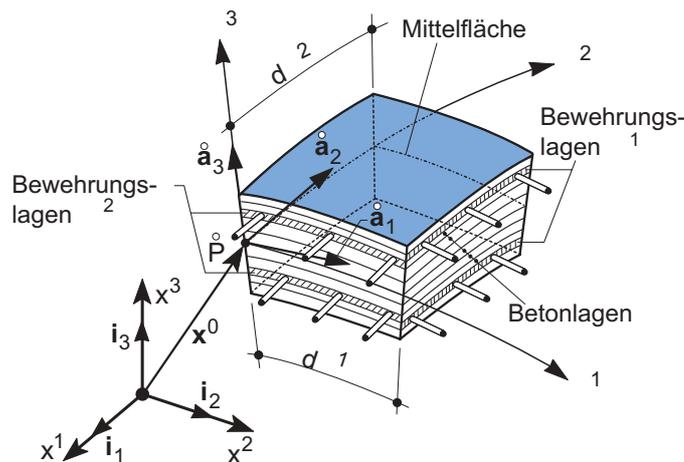


Abbildung 2.6: Multi-layered Stahlbeton-Schalenmodell

2.4 Multi-Level-Simulationskonzept

Mittels der oben dargestellten Finiten Elementmethode sollen die geometrisch und physikalisch nichtlinearen Last-Verformungspfade berechnet werden. Diese komplexen nichtlinearen Berechnungen erfolgen durch eine s.g. Homogenisierungsprozedur mit der Multi-Level-Simulationsstrategie ([Krätzig 1997]). Abbildung 2.7, die diese Prozedur anschaulich erläutert, bietet den Überblick mit den bisher erwähnten Komponenten der Finiten Elementformulierung.

Ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit einem inneren Kraftvektor \mathbf{F}_I wird mit einer tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T die Verformungszunahme $\Delta \mathbf{V}$ für den vorgegebenen äußeren inkrementellen Lastvektor ermittelt, wobei das Gleichgewicht nicht erfüllt sein muß. Die globalen Zuwächse der Freiheitsgrade werden durch eine Inzidenztransformation in einzelne Zuwächse der Freiheitsgrade der einzelnen Finiten Elemente $\Delta \mathbf{v}^p$ überführt. Für jeden Gaußpunkt in einem Finiten Element werden mit den gewählten Ansatzfunktionen und den kinematischen Annahmen die inkrementellen Verzerrungen $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\Delta \alpha_{(\alpha\beta)} \Delta \beta_{(\alpha\beta)} \Delta \alpha_{(\alpha 3)})$ bzw. gesamten Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\alpha_{(\alpha\beta)} \beta_{(\alpha\beta)} \alpha_{\alpha 3})$ ermittelt. Die Verzerrungen werden über die Schalendicke in die einzelnen Layer des geschichteten Modells transformiert. Konstitutive Beziehungen liefern die Spannungen $\Delta \boldsymbol{\sigma}_L, \boldsymbol{\sigma}_L$ und die tangentialen Steifigkeiten in jedem Gaußpunkt eines Layers. Die Integration der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_L$ über alle Layer der Schalendicke ergeben die Schnittkräfte $\Delta \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}$ in Bezug auf die Schalenmittelfläche. Mit den inneren Spannungen werden der innere Kraftvektor \mathbf{f}_I^p und die tangentiale Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_T^p eines Finiten Elementes konstruiert. Die Assemblierung der Elemente ergibt die Größen \mathbf{K}_T und \mathbf{F}_I in der Strukturebene. Die tangentiale Gesamtsteifigkeitsbeziehung ist somit für den nächsten Iterationsschritt fertiggestellt. Zum iterativen Pfadverfolgungsverfahren stehen im allgemeinen NEWTON-RAPHSON- und Bogenlängenverfahren zur Verfügung ([Zienkiewicz & Taylor 1991]).

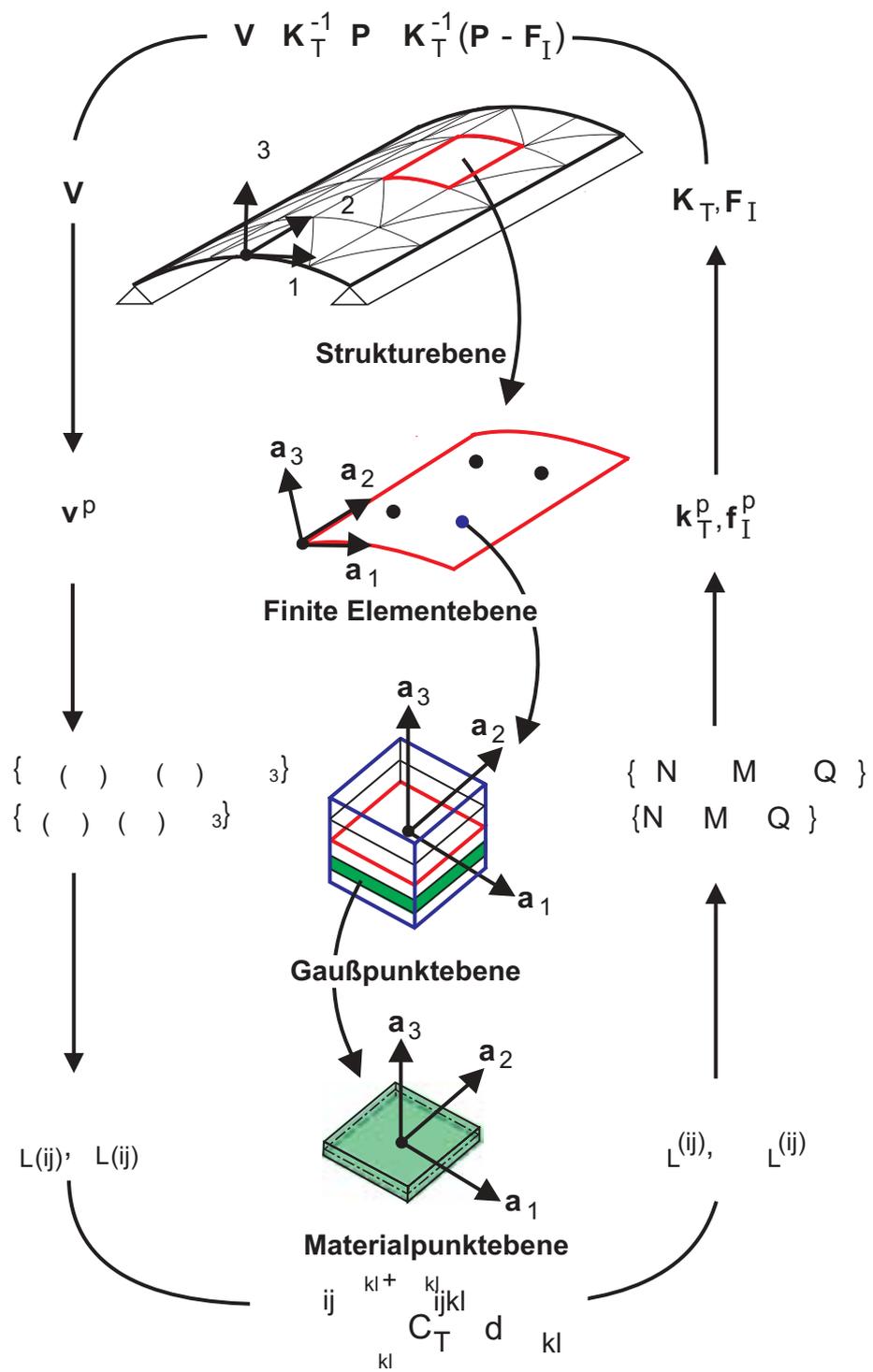


Abbildung 2.7: Multi-Level-Simulationsstrategie

Kapitel 3

Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton

3.1 Allgemeines

Stahlbetonbauteile kommen heute bei fast jedem Bauvorhaben zur Anwendung. Die Gründe dafür sind unter anderem die Wirtschaftlichkeit der Rohmaterialien, die leichte Verarbeitbarkeit, sowie die Widerstandsfähigkeit gegenüber Umwelteinflüssen und mechanischer Abnutzung. Aufgrund der komplexen nichtlinearen Materialeigenschaften war der Werkstoff Stahlbeton im letzten Jahrhundert Gegenstand vieler experimenteller Untersuchungen und Forschungsvorhaben.

Stahlbeton ist ein Verbundwerkstoff, der aus den Komponenten Beton und Bewehrungsstahl besteht. Der Verbund beider Komponenten entsteht durch die Haftung des Bindemittels Zement und durch die Verzahnung beider Komponenten miteinander. Beide Komponenten besitzen stark unterschiedliche Materialeigenschaften. Der Beton ist spröde und besitzt eine hohe Druckfestigkeit, der Stahl ist duktil mit einer hohen Druck- und Zugfestigkeit. Aufgrund dieser unterschiedlichen Eigenschaften haben die beiden Komponenten unterschiedliche Aufgaben. Der Beton nimmt die Druckkräfte auf, während der Stahl im allgemeinen für die Zugbeanspruchung vorgesehen wird. Wegen der etwa gleichen Temperaturdehnkoeffizienten beider Komponenten treten im allgemeinen keine schädliche Eigenspannungen auf. Eine weitere wesentliche Eigenschaft ist, daß der umgebende Beton den Stahl gegen Korrosion schützt: Zum einen bietet die genügend dichte und dicke Betondeckung dem Stahl einen mechanischen Schutz gegen aggressive Medien, zum anderen verhindert die beim Abbinden des Zementes entstehende Alkalität die Korrosion des Stahls.

Stahlbeton weist ein hochgradig nichtlineares Materialverhalten auf. Das Betonverhalten ist infolge seiner Inhomogenität kompliziert und streut sehr stark. Der Bewehrungsstahl besitzt im Vergleich zum Beton ein relativ einfach zu beschreibendes Materialverhalten. Durch das unterschiedliche nichtlineare Materialverhalten beider Komponenten, durch die

nichtlinearen Verbundmechanismen beim interaktiven Zusammenspiel beider und durch die Kraftübertragungsmechanismen nach dem Reißen des Betons (durch die Verzahnung des Betons an den Riβufern und die Verdübelung der Bewehrung in den Riβquerschnitten) läßt sich das komplexe Materialverhalten des Verbundwerkstoffes nur schwierig modellieren. Aus diesem Grund wird in der Ingenieurpraxis das Materialverhalten zumeist stark vereinfacht modelliert und lediglich auf Querschnittsebene berücksichtigt. Der Einfluß auf das Gesamttragwerksverhalten wird in der Regel vernachlässigt oder nur in einigen Fällen z.B. durch Momentenumlagerung zusätzlich in die Analyse mit einbezogen.

Für eine wirklichkeitsnahe numerische Strukturanalyse komplexer Stahlbetonstrukturen beispielsweise mit der Finiten Element Methode spielt die Güte der Materialmodellierung neben der gewählten Elementformulierung, dem Elementnetz, den nichtlinearen Lösungsalgorithmen und den Konvergenzbedingungen eine wesentliche Rolle. Das Materialmodell umfaßt konstitutive Beziehungen und Versagenskriterien. Die konstitutiven Beziehungen der nichtlinearen Werkstoffmodelle liefern in Abhängigkeit der momentanen Verzerrungen die aktuellen Spannungen und tangentialen Steifigkeiten in einem Materialpunkt.

Die Anforderungen an die Genauigkeit und die Dimensionen der Materialmodellierung hängen jedoch von denen der Aufgabenstellung ab. Dabei kann es sich z.B. um eine lokale Untersuchung von Krafteinleitungsbereichen oder um eine Traglastanalyse von großen Strukturen handeln ([Mehlhorn, Dinges, Keuser & Kolmar 1989]). Außerdem streuen die Daten aus experimentellen Versuchen, auf denen die numerische Modellierung basiert, und für numerische Analysen stehen im allgemein nicht genügend Materialdaten zur Verfügung. Daher sind Materialmodellierungen mit einer zu großen Anzahl von Parametern meist nicht gerechtfertigt ([Mehlhorn & Kollegger 1995]).

Aus den oben erwähnten Aspekten ergeben sich für die vorliegende Problemstellung folgende zu modellierende Eigenschaften des Stahlbetons:

- Die bereits bei niedrigen Druckspannungen ausgeprägte nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehung,
- Zyklisches Verhalten mit Plastizierungs- sowie Schädigungskomponenten im Druckbereich,
- Zugrißbildungs- und Rißschließungsvorgänge,
- Monotones und zyklisches Verhalten des Bewehrungsstahles,
- Verbundwirkung zwischen Bewehrungsstahl und Beton und die daraus folgende Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen für monotone und zyklische Beanspruchungen.

Im folgenden werden die wichtigsten Materialeigenschaften der einzelnen Komponenten und der Verbundmechanismen zusammengefaßt und deren Modellierungen diskutiert.

3.2 Beton

3.2.1 Druckverhalten

Der Beton ist ein heterogenes künstliches Kompositmaterial aus Zuschlag, wie Kies und Sand, und Zementstein als Bindemittel, wobei die Eigenschaften durch die Zusammensetzung aus den Einzelkomponenten bestimmt wird. Vor allem die Druckfestigkeit, die auch andere Eigenschaften des Betons bestimmt, hängt vom Zementgehalt und der Zementgüte, von der Festigkeit der Zuschlagstoffe und vom Volumen der im erhärteten Beton verbleibenden Hohlräume ab. Unabhängig von der Zusammensetzung sind Abbindedauer, -temperatur und die Nachbehandlung weitere wichtige Faktoren für die Entwicklung der Druckfestigkeit. Bereits beim Abbindevorgang entstehen Mikrorisse durch das Schwinden des Zementsteins und Temperaturänderung infolge der Hydratation. Diese Mikrorisse im Zementstein (Matrixrisse) und jene zwischen Zementstein und Zuschlagskörnern (Verbundrisse) vor dem Belastungsvorgang sind die Auslöser eines frühzeitig nichtlinearen Spannungs- und Stauchungsverhaltens des Betons. Die unterschiedliche Steifigkeit von Zementstein und Zuschlagskörnern ist der Hauptgrund für die ausgeprägte nichtlineare Arbeitslinie beim Druckbelastungsvorgang. Die Kraftübertragung erfolgt im wesentlichen durch das steifere Zuschlagkorngerüst. Die dabei aus der Umlenkraft resultierende Querkraft, im örtlich unterschiedlichen dreiaxialen Spannungszustand, erzeugt weitere Mikrorisse.

Die Abbildung **3.1** stellt ein typisches Spannungs- und Stauchungsverhalten sowie den Versagensmechanismus des Betons unter einachsialer Druckbeanspruchung qualitativ dar. Beton verhält sich bei niedrigen Spannungsniveaus trotz der bereits vorhandenen Mikrorisse bis zu etwa 30–40 % der Bruchspannung quasi linearelastisch. Etwa bis 70–90 % des Bruchspannungsniveaus verhält sich der Beton noch stabil, jedoch zunehmend nichtlinear. Die Querkraft führt zur Neubildung sowie zum Anwachsen und der Vereinigung der Mikrorisse, aus der sich parallel zur Richtung der Beanspruchung durchgehende Trennrisse entwickeln, wobei die dabei entstehenden Betonprismen noch tragfähig sind. Über dieses Spannungsniveau hinaus wachsen die Mikrorisse instabil an. Die Risse wachsen progressiv ohne Steigerung der Beanspruchung. Die Mikrorisse bilden sich zu vielen kleinen Makrorissen aus. Die innere Struktur des Betons wird so aufgelockert, daß die bisher allmählich reduzierten Volumina stark zunehmen (Volumendilatation). Das Gefüge wird letztendlich zerrüttet und die innere Spannung erreicht die maximal aufnehmbare Bruchspannung (Druckbruch). Das Überschreiten der Bruchspannung bildet eine annähernd 30° schräg zur Beanspruchungsrichtung verlaufende Bruchfläche, die letztendlich durch Sekundärrisse aus zusätzlich entstandenen netzförmigen Mörtelmatrixrissen entsteht. Das Spannungs- und Stauchungsverhalten hängt von der lokalen Verformung in der Bruchfläche ab. Der Beton zeigt anschließend ein entfestigtes Verhalten. Das detaillierte ein- und zweiachsiale Betonverhalten unter verschiedenen Spannungskombinationen ist u.a. von Kupfer ([Kupfer, Hilsdorf & Rüsck 1969], [Kupfer 1973] und [Kupfer & Gerstle 1973]) untersucht worden. Seine Arbeiten liegen der vorliegenden Arbeit zugrunde.

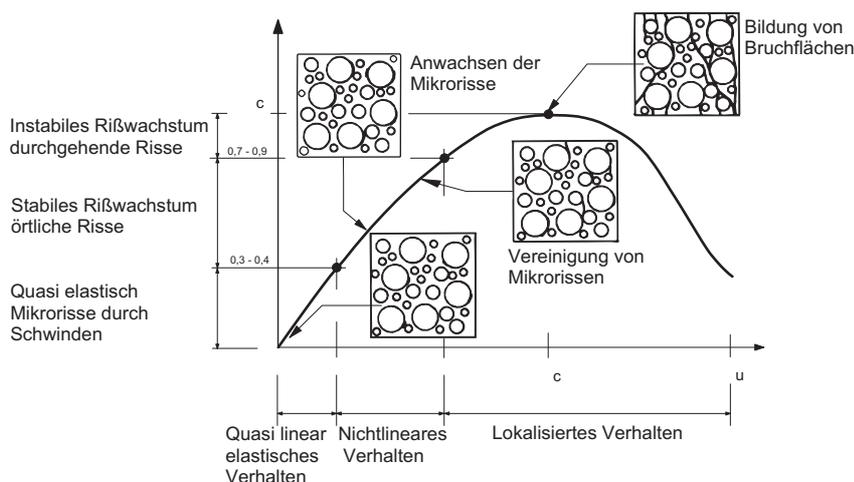


Abbildung 3.1: Betonverhalten unter einachsialer Druckbeanspruchung [Mehlhorn & Kollegger 1995], [Reinhardt 1996]

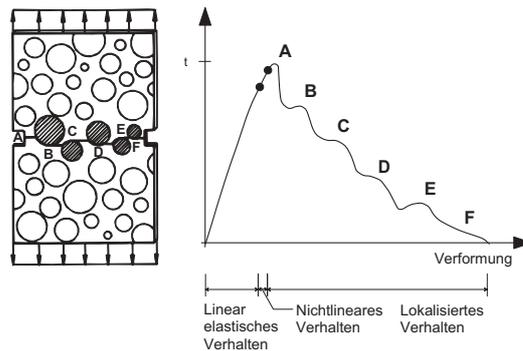
Bei biaxialer Druckbelastung behindert die in die Querrichtung wirkende Druckspannung den oben erwähnten Auflockerungsprozess des Betongefuges, und dadurch verhält sich der Beton steifer. Bei einem höheren Spannungsniveau versagt der Beton durch das Aufspalten infolge der induzierten Querkzugspannung in der dritten Richtung. Die Bruchfläche, zu der die parallel zur lastfreien Oberfläche entstandene Rißfläche führt, verläuft 18–27° zu dieser Oberfläche. Die von Kupfer & Gerstle durchgeführten zweiachsialen Scheibenversuche (Abb. 3.3), belastet mit einer Stahldrahtbrste, zeigen, daß sich die Bruchspannung dem Spannungsverhältnis von $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0.52$ maximal um etwa 27 % gegenüber der beim einachsialen Versuch erhöht. Bei Druckspannungen $\sigma_1 = \sigma_2$ beträgt die Festigkeitserhöhung etwa 16 %. Die Erhöhungen der Betonfestigkeit unter den zweiachsialen Druckbeanspruchungen sind unabhängig von der Betongüte. Bei der Verwendung einer massiven Lasteinleitungsplatte verhindern dagegen Reibungskräfte zwischen dem Probekörper und der Platte die Querdehnung. Dieser Einschnrungseffekt erhöht die Festigkeit maximal um 50 %.

3.2.2 Druck-Zugverhalten

Im Gegensatz zum stützenden Einfluß der Querdrukbeanspruchung begünſtigt die Querkzugbeanspruchung den einachsialen Druckversagensmechanismus. Jedoch tritt der Druckbruch nur auf, wenn die Querkzugspannung kleiner als etwa 1/10 bis 1/15 der Druckspannung ist. Bei größeren Zugspannungen versagt der Beton durch Trennbruch.

3.2.3 Zug- und Nachrißverhalten

Das Zugverhalten des Betons ist bis etwa 80 - 90 % der Zugfestigkeit linear, lediglich kurz vor dem Versagen durch das Reißen des Betons (Trennbruch) führen die vorhandenen



Betonverhalten unter einachsialem Zug

Abbildung 3.2: Betonverhalten unter einachsialem Zug [Mehlhorn & Kollegger 1995]

Mikrorisse zu einem nichtlinearen Verhalten. Wie die Abbildung 3.2 zeigt, bestimmen lokale Verformungen in der Rißfläche das Nachrißverhalten, das aus der noch vorhandenen Verzahnung der einzelnen Zuschlagkörner und aus der Übertragung der Reibungskräfte zwischen den beiden Rißufern resultiert.

3.2.4 Modellierung des Betons

In den letzten zwei Jahrzehnten wurden zahlreiche Betonmodelle veröffentlicht, die auf unterschiedlichen Theorien basieren. Es gibt jedoch noch kein Modell, das Allgemeingültigkeit für die Beschreibung des Betonverhaltens besitzt. Die Modelle lassen sich nach angewandten grundlegenden Theorien wie folgt klassifizieren:

- elastische Modelle,
- plastische Modelle,
- plastische Bruchmodelle.

Elastische Modelle basieren auf der Elastizitätstheorie, die sich von den hyperelastischen und hypoelastischen Modellen unterscheiden. Hyperelastische Modelle, zu denen das CAUCHY-elastische und GREEN-elastische Modell gehören, werden aus der totalen Spannungs- Dehnungsbeziehung formuliert, wobei eine momentane Verzerrung eindeutig einer momentanen Spannung zugeordnet ist. Infolgedessen ist es unabhängig von der Lastgeschichte, und Be- und Entlastungsvorgänge können nicht unterschieden werden. Somit sind die Modelle lediglich für monotone Belastungen geeignet. Hypoelastische Modelle sind dagegen inkrementell formuliert und dadurch lastgeschichtsabhängig. Dieses ermöglicht die Beschreibung zyklischen Werkstoffverhaltens. Da wie bei CAUCHY-elastischen Modellen diesen Modellen die Betrachtung der Potentialfunktion fehlt, kann der erste Hauptsatz der Thermodynamik verletzt werden. Die wesentliche Schwäche der elastischen Modelle liegt darin, daß die Anisotropie des Betons durch Orthotropie erfaßt

wird und dadurch das lastgeschichtsabhängige Verhalten nicht korrekt wiedergeben kann. Trotzdem wurden die Modelle aufgrund ihrer einfachen Modellierung und Anwendungen bei zahlreichen Finiten-Element-Berechnungen eingesetzt.

Die Formulierung der plastischen Modelle basiert auf einer Fließbedingung, einer Verfestigungsregel und einem Fließgesetz. Die Fließbedingung beschreibt den Übergang vom elastischen Bereich zum plastischen Bereich. Die Änderung der Fließregel wird durch die Verfestigungsregel formuliert. Das Fließgesetz stellt die Beziehung von Spannungen und Verzerrungen im elastisch-plastischen Bereich dar. Dabei wird der inelastische Verzerrungsanteil ausschließlich durch das plastische Fließen formuliert. Die oben genannte Schwäche der elastischen Modelle besitzen die plastische Modelle nicht.

Plastische Bruchmodelle erfassen sowohl plastisches Verhalten (Zunahme der Verzerrung bei konstanter Spannung) als auch das Bruchverhalten (Abfall der Spannung bei konstanter Verzerrung). Das Bruchverhalten gibt den Einfluß von Mikrorissen auf das Gesamtverhalten wieder. Das Modell ist mit vielen Materialparametern und hohem numerischen Aufwand verbunden.

Für die vorliegende Arbeit - Analyse extrem großer dünnwandiger Schalenstrukturen - wurde die Anwendung eines hypoelastischen Betonmodells mit zweidimensionaler Beschreibung angestrebt. Da das Zugrißverhalten hauptsächlich das Schädigungsverhalten der zu untersuchenden Schale bestimmt, wurde auf die Verbundmodellierung ein großes Augenmerk gelegt.

3.3 Erweitertes Betonmodell nach Darwin & Pecknold

Das angewandte Betonmodell ist ein hypoelastisches orthotropes Modell, bei dem die Beziehung zwischen dem Spannungsinkrement und dem Dehnungsinkrement durch die Steifigkeitsmatrix linear beschrieben ist:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (3.1)$$

Die zu dieser Klasse gehörenden Betonmodelle sind die Formulierungen von Darwin & Pecknold (1977) für einen biaxialen Spannungszustand und von Elwi & Murray (1979) für einen triaxialen Spannungszustand. Wesentliche Vorteile dieser Modellbeschreibung sind die kompakte Formulierung durch Einführung einer äquivalenten einachsialen Dehnung und die Anwendbarkeit auf zyklische Belastungen mit vier Materialparametern (Zug- und Druckfestigkeit, zur Druckfestigkeit gehörige Verzerrung sowie Anfangselastizitätsmodul).

Im folgenden wird das für die vorliegende Arbeit eingesetzte Konzept von Darwin & Pecknold kurz zusammengefaßt. Wesentliche Teile des Konzeptes wurden unverändert übernommen. Das Zugriß- und Rißschließungsverhalten wurden erweitert.

3.3.1 Konstitutive Beziehungen

Mit der Annahme eines inkrementell linear-orthotropen Verhaltens des Betons kann die konstitutive Beziehung in momentaner Hauptachsenrichtung, die mit den Hauptspannungsrichtungen 1 und 2 zusammenfallen, zuerst ohne Betrachtung des Schubanteils, wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \begin{pmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 \\ \nu_1 E_2 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Dabei sind die spannungsabhängigen Materialkonstanten E_i und ν_i , $i=1,2$ jeweils Tangentensteifigkeiten und Querdehnzahlen. Mit $\nu_2 E_1 = \nu_1 E_2$ aus der Energiebetrachtung und der Einführung der äquivalenten Querdehnzahl $\nu^2 = \nu_1\nu_2$ in Abhängigkeit vom Spannungs- und Dehnungszustand sowie der Berücksichtigung des Schubterms ergibt sich die vollständige konstitutive Beziehung $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}d\boldsymbol{\varepsilon}$ zu

$$\begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2)G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Wegen der fehlenden Information über die Schubsteifigkeit G bei der Transformation der Hauptachsen wird die Annahme getroffen, daß keine bevorzugte Richtung mit Schubsteifigkeit entsteht. Diese Forderung der Invarianz der Schubsteifigkeit gegen die Rotation der Hauptspannungsachse bedeutet, daß die Schubsteifigkeit G vor und nach der Transformation der Steifigkeitsmatrix ($\mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}$) unverändert bleibt. Mit der orthogonalen Transformationsmatrix \mathbf{T} berechnet sich $\bar{\mathbf{C}}$ zu

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (3.4)$$

mittels

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Durch Gleichsetzen der Schubterme in beiden Steifigkeitsmatrizen erhält man die gesuchte invariante Schubsteifigkeit G

$$(1 - \nu^2) G = \frac{1}{4} \left(E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2} \right). \quad (3.6)$$

Somit ist die konstitutive Beziehung durch E_1 , E_2 und ν vollständig definiert.

$$\begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left(E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Da die orthotrope konstitutive Beziehung in inkrementeller Hauptspannungsrichtung formuliert ist, müssen die Schubverzerrungsinkremente bzw. Schubspannungsinkremente verschwinden. Damit fallen die inkrementellen Hauptspannungsrichtungen mit den inkrementellen Hauptverzerrungsrichtungen zusammen.

3.3.2 Äquivalente einachsige Dehnung

Aus der oben hergeleiteten biachsialen konstitutiven Beziehung müssen für vorgegebene inkrementelle Verzerrungen die Tangentialsteifigkeiten und die inkrementellen Spannungen für die jeweiligen Hauptachsen ermittelt werden. Dafür wurde ein Konzept mit äquivalenter einachsialer Verzerrung eingeführt. Die grundlegende Idee dieses Konzeptes ist, daß die konstitutive Beziehung von der jeweiligen Hauptachsenrichtung entkoppelt formuliert und separat mit der einachsialen Beziehung betrachtet wird. Dies führt von der komplexen Berechnung des biachsialen Werkstoffverhalten zu einem erheblich einfacheren Berechnungsmodell. Die Gleichung (3.7) läßt sich in der entkoppelten Form wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichung (3.7) und (3.8) erhält man

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{1}{1 - \nu^2} (d\varepsilon_1 + \nu \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} d\varepsilon_2), \quad (3.9)$$

$$d\varepsilon_{2u} = \frac{1}{1 - \nu^2} (d\varepsilon_2 + \nu \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} d\varepsilon_1). \quad (3.10)$$

Aufgrund der Ähnlichkeit mit den einachsialen Beziehungen werden ε_{iu} , $i = 1, 2$ als äquivalente einachsiale Verzerrungen bezeichnet. Die Definition der inkrementellen äquivalenten Verzerrungen folgt aus Gleichung (3.8):

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{d\sigma_i}{E_i}. \quad (3.11)$$

Somit lassen sich die gesamten äquivalenten Verzerrungen durch

$$\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i} \approx \sum^{NLast} \frac{\Delta\sigma}{E_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.12)$$

darstellen. Die Indizes $i = 1, 2$ bezeichnen die Hauptspannungsrichtungen.

Die oben definierten äquivalenten einachsialen Verzerrungen sind fiktive Größen. Daher lassen sich die äquivalenten einachsialen Verzerrungen nicht wie die wahren Verzerrungen transformieren. Da sie in Hauptspannungsrichtung akkumuliert werden, stellen sie nicht die Deformationsgeschichte in einer festen Richtung des Materials dar, sondern in der sich kontinuierlich ändernden Hauptspannungsrichtung. Diese Abweichung von der Realität, wie sie von einigen Forschern z.B. Chen & Saleeb (1982) und Bazant (1979) kritisiert wird, bedeutet, daß das nichtlineare Materialverhalten (Materialdefekte) stärker aus den vorherigen Belastungsvorgängen als durch die momentane Belastung verursacht betrachtet wird. Dieses wird in gewissem Maße dadurch verbessert, daß die Spannungsebene in 90°-Sektoren unterteilt und das Materialverhalten in Abhängigkeit der Belastungsgeschichte sektorweise akkumuliert wird. Verläßt eine Hauptachse den Sektor, in dem sie ursprünglich lag, werden die Berechnungen mit den Informationen des aktuellen Sektors weitergeführt.

3.3.3 Monotone Spannungs-Dehnungsbeziehung

Die oben definierten äquivalenten einachsialen Verzerrungen lassen sich auf die äquivalenten einachsialen Spannungs-Dehnungsbeziehungen anwenden. Zur Beschreibung der monotonen Spannungs-Dehnungsbeziehung für den Druckbereich wird die Gleichung von Saenz (1964) herangezogen. Die Beziehung (3.13), graphisch dargestellt in Abbildung 3.4, stellt die Kurvenschar durch ε_{iu} und ε_{ic} dar, die vom momentanen Spannungs-Dehnungszustand sowie vom Verhältnis der Spannungen in den beiden Hauptachsenrichtungen abhängig ist.

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_{iu} E_0}{1 + \left[\frac{E_0}{E_S} - 2 \right] \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left[\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right]^2} \quad (3.13)$$

Hierbei bezeichnet ε_{ic} die äquivalente einachsiale Dehnung bei der biachsialen Druckfestigkeit σ_{ic} , die vom Hauptspannungsverhältnis abhängig ist. E_0 ist der Anfangselastizitätsmodul, ermittelt im einachsialen Druckversuch. E_S ist der Sekantenmodul bei der Druckfestigkeit σ_{ic} . Den Entfestigungspfad beschreibt eine abfallende Gerade mit einem Druckbruch bei $(4\varepsilon_{cu}, 0.2\sigma_{ic})$. Somit wird die monotone Spannungs-Dehnungsbeziehung durch vier unabhängige Variablen ε_{cu} , ε_{ic} , σ_{ic} und E_0 eindeutig definiert.

3.3.4 Biachsiges Versagenskriterium

Die biachsiale Betondruckfestigkeit σ_{ic} wurde nach dem biachsialen Versagenskriterium von Kupfer & Gerstle (1973) definiert. Die nachfolgend dargestellten von Kupfer & Gerstle vorgeschlagenen analytischen Ausdrücke basieren auf Versuchsergebnissen von Kupfer, Hilsdorf & Rüschi (1969), die mit denen von Liu, Nilson & Slate (1972) und Nelissen (1972) gut übereinstimmen. Mit der Definition des Hauptspannungsverhältnisses $\alpha = \sigma_1/\sigma_2$, ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) können die Bestimmungsgleichungen für die Versagenshüllkurven angegeben werden.

- Druck-Druck-Bereich: Der Ausdruck der Festigkeitserhöhung des beidseitig gedrückten Betons lautet

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c}, \quad \sigma_{2c} = \frac{1 + 3.65\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c. \quad (3.14)$$

- Zug-Druck-Bereich: Kupfer & Gerstle schlagen eine lineare Gleichung für die Zugfestigkeit vor, die mit zunehmender Druckspannung abnimmt:

$$\sigma_{1t} = \left(1 + 0.8 \frac{\sigma_2}{f_c} \right) f_{ct}, \quad \sigma_{2c} = \frac{1 + 3.65\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c. \quad (3.15)$$

Der Ausdruck für die Zugfestigkeit wurde von Darwin & Pecknold so vereinfacht, daß die Zugspannung konstant bleibt:

$$\sigma_{1t} = f_{ct}, \quad \sigma_{2c} = \frac{1 + 3.28\alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c. \quad (3.16)$$

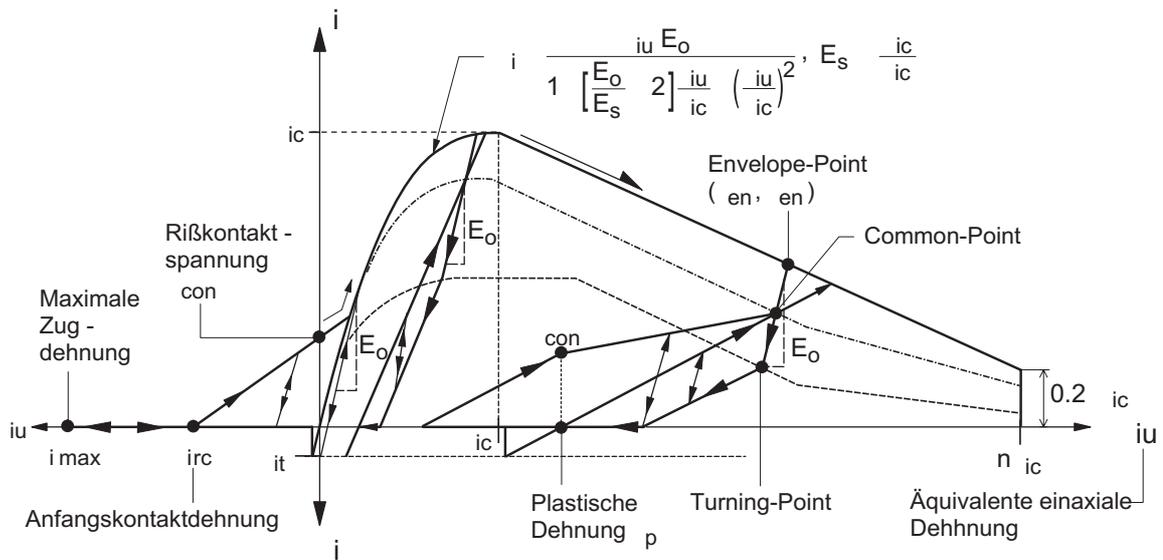


Abbildung 3.4: Konstitutive Beziehung in der Hauptspannungsrichtung

Es wird immer vorausgesetzt, daß $E_0/E_S \geq 2.0$ ist. Diese Bedingung kontrolliert das Vorzeichen der Krümmung der Kurve (3.13), da die Krümmung bei kleinem ε_{ic} unter Umständen wechselt. Die vom Spannungszustand abhängige effektive Querdehnzahl ν , die die Eigenschaft der Ausdehnung (Dilatation) bei einem höheren Spannungsniveau wiedergibt, wird für die Zug-Zug- und Druck-Druck-Beanspruchung als konstant angenommen $\nu = \nu_0$, während ν für die einachsialen Druck- und für die Zug-Druck-Beanspruchung durch

$$\nu = \nu_0 + 0.6 \left(\frac{\sigma_2}{f_c} \right)^4 + 0.4 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1t}} \right)^4 \leq 0.99 \quad \text{für} \quad |\varepsilon_{iu}| \leq |\varepsilon_{ic}| \quad (3.20)$$

approximiert wird. Im Entfestigungsbereich ($|\varepsilon_{iu}| > |\varepsilon_{ic}|$) wird die unabhängige Verformbarkeit von beiden Hauptachsenrichtungen durch das Verschwinden der Querdehnzahl ($\nu = 0$) beschrieben.

3.3.5 Zyklische Spannungs-Dehnungsbeziehung

Das Betonverhalten unter zyklischer Belastung ist durch folgende wesentliche Merkmale charakterisiert, die für eine wirklichkeitsnahe Modellierung des Betons berücksichtigt werden müssen:

- Plastizierung,
- Degradation der Festigkeit,
- Degradation der Steifigkeit,
- Energiedissipation.

Dabei beschreiben der zweite und dritte Punkt gemeinsam den Schädigungszustand. Der vierte Punkt wird durch die Hystereseschleife wiedergegeben. Darwin & Pecknold formulierten die oben genannten vier Komponenten basierend auf einachsialen Versuchsdaten von Karsan & Jirsa (1969).

Die bleibende plastische Dehnung ε_p wird als eine Funktion der Envelope-Dehnung ε_{en} beim Beginn der Entlastung auf der Hüllkurve ausgedrückt. Die Beziehung lautet

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{cu}} = 0.145 \left(\frac{\varepsilon_{en}}{\varepsilon_{cu}} \right)^2 + 0.13 \left(\frac{\varepsilon_{en}}{\varepsilon_{cu}} \right). \quad (3.21)$$

Der Zustand der Steifigkeitsdegradation unter zyklischer Belastung und die maximale Anzahl der Zyklen, bis zum endgültigen Versagen des Betons, bilden die Lage der Common-Points ab. Die Punktschar aus Versuchen, begrenzt durch das Stability-Limit und das Common-Point-Limit, wird vereinfachend als eine Kurve dargestellt. Die Spannung des Common-Points σ_{cp} wird durch

$$\sigma_{cp} = \min \left(\frac{5}{6} \sigma_{en}, \sigma_{en} - \frac{1}{6} f_c \right) \leq \frac{1}{3} \sigma_{en} \quad (3.22)$$

bestimmt, wobei $(\varepsilon_{en}, \sigma_{en})$ den Envelope-Point beschreibt. Die zugehörige Dehnung ε_{cp} läßt sich auf der Gerade finden, die mit der Neigung der Anfangssteifigkeit E_0 durch den Envelope-Point läuft. Der Turning-Point befindet sich auch auf dieser Gerade, die wie folgt definiert ist:

$$\sigma_{tp} = \frac{1}{2} \sigma_{en} \quad \text{für } \varepsilon_{en} \geq \varepsilon_{ic} \quad \text{oder} \quad \sigma_{en} \leq f_c, \quad (3.23)$$

$$\sigma_{tp} = \frac{1}{2} f_c \quad \text{und} \quad \sigma_{tp} \geq 2\sigma_{cp} - \sigma_{en} \quad \text{für die restlichen Bereiche.} \quad (3.24)$$

Der Ausdruck in Gleichung (3.24) beschreibt die zusätzliche Bedingung, daß der Spannungsunterschied zwischen σ_{tp} und σ_{cp} größer sein muß als der zwischen σ_{cp} und σ_{en} . Der Pfad des Wiederbelastungsvorganges wurde durch eine Gerade vom Punkt der plastischen Dehnung $(\varepsilon_p, 0.0)$ zum Common-Point $(\varepsilon_{cp}, \sigma_{cp})$ festgelegt.

Somit legt die Lage des Common-Points $(\varepsilon_{cp}, \sigma_{cp})$ die Änderung der Neigung des Wiederbelastungspfades fest. Je größer die Dehnung, desto flacher ist die Neigung, die den Zustand der Degradation der Steifigkeit, also den Schädigungszustand, beschreibt. Die Lage der Turning-Points kontrolliert dagegen die Energiedissipation für jeden Zyklus: Je niedriger seine Lage, desto größer ist die dissipierte Energie.

3.3.6 Rißverhalten

Für die Zugrißbildung wurde das Hauptspannungskriterium nach Rankine angewendet. Somit entsteht ein Riß, sobald die vorhandene Zugspannung im Materialpunkt die Betonzugfestigkeit überschreitet. Der Entfestigungsbereich nach dem Reißen des Betons wurde nicht im Betonmodell, sondern auf indirektem Wege im modifizierten Stahlmodell berücksichtigt. Infolge der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension-Stiffening) übernimmt der Stahl die freiwerdende Betonzugkraft. Somit werden nach

dem Reißen die Hauptspannung und die dazu gehörige Steifigkeit senkrecht zur Rißfläche zu Null gesetzt. Nach der Rißbildung wird ein einachsialer Zustand angenommen, wobei die Querkontraktionszahl ν auf Null herabgesetzt wird. Existiert bereits ein offener Riß, so kann sich zu diesem noch ein zweiter, senkrechter Riß bilden. In den gerissenen Zuständen sind die Schubfestigkeiten noch vorhanden. Aus der konstitutiven Beziehung (3.7) ergibt sich bei einem offenen Riß die verbleibende Schubsteifigkeit zu einem Viertel der vorhandenen Tangentensteifigkeit in der ungerissenen Hauptspannungsrichtung. Entstehen zwei Risse, so verschwindet die Schubsteifigkeit vollständig.

Ein offener Riß kann sich wieder schließen. Der Rißschließungsvorgang ist ein allmählicher Prozeß, bei dem die Rißufer mit zuschlagkornhaltigen Abbrüchen bereits bei einem positiven Verzerrungszustand miteinander wieder Kontakt gewinnen, was Druckspannungen im Beton hervorruft. Ein vollständiges Schließen eines Risses verlangt somit das Vorhandensein einer Druckkraft. In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Aspekt basierend auf der analytischen Beschreibung von Zhu, Wu & Zhang (1980) und Su & Zhu (1994) modelliert. Da die Beschreibung von Zhu mit der analytischen Formulierung des dort angewendeten Betons gekoppelt ist, wurden die Berechnungsformeln für die Dehnung beim initialen Kontakt der Rißufer (ε_{irc}) und für die Kontaktspannung (σ_{con}) übernommen, die bei der vollständigen Rißschließung im Beton entsteht:

$$\varepsilon_{irc} = \varepsilon_p + 0.5\varepsilon_{max} \left(0.1 + \frac{0.9\varepsilon'_{ic}}{\varepsilon'_{ic} + \varepsilon_{max}} \right), \quad (3.25)$$

$$\varepsilon'_{ic} = \varepsilon_{ic} - \varepsilon_p \geq 0. \quad (3.26)$$

Der zweite Ausdruck in Gleichung (3.26) berücksichtigt den Einfluß der Mikroschädigung des Betons im Entfestigungsbereich. Die Kontaktspannung berechnet sich zu

$$\sigma_{con} = 0.3\sigma_{ic} \left(2 + \frac{\frac{\varepsilon'_{irc}}{\varepsilon_{ic}} - 4}{\frac{\varepsilon'_{irc}}{\varepsilon_{ic}} + 2} \right) \leq \sigma_{con,max} = \sigma_{ic} \frac{\varepsilon'_{irc}}{\varepsilon'_{irc} + \varepsilon_{ic}}. \quad (3.27)$$

Somit läßt sich vereinfacht durch lineare Verbindung der beiden Punkte $(\varepsilon_{icr}, 0)$, $(\varepsilon_p, \sigma_{con})$ der Rißschließungsvorgang beschreiben. Die geradlinige Verlängerung der Verbindung schließt sich entweder mit der monoton steigenden Saenz-Kurve (Gl. 3.13) oder verbindet sich mit dem Common-Point, wenn der Envelope-Point $(\sigma_{en}, \varepsilon_{en})$ im Entfestigungsbereich liegt.

Bei einer Lastumkehr muß sich der bereits entstandene Riß schlagartig wieder öffnen, da die Zugfestigkeit des Betons irreversibel verloren ist. Die Betonspannung wird daher sprunghaft auf Null herabgesetzt. Da die sprunghafte Spannungsänderung bei der Auffindung des Gleichgewichts numerische Schwierigkeiten bereitet, erfolgt in der Arbeit der Lastumkehrvorgang mit der Anfangssteifigkeit E_0 . Alle bisher beschriebenen konstitutiven Beziehungen sind in Abbildung 3.4 dargestellt.

Die Rißrichtung hängt nicht nur von der Belastungsgeschichte, sondern auch stark

von der vorhandenen Bewehrung ab. Die ersten Risse entstehen in Hauptzugspannungsrichtung, sofern die Eigenspannungen noch klein sind. Dieses ist unabhängig von den Bewehrungsrichtungen und vom Verhältnis der Bewehrungsmengen bei Netzbewehrungen. Wie einige Versuchsreihen bestätigen ([Peter 1964], [Vecchio & Collins 1982], [Bhide & Collins 1989] und [Ivanyi & Lardi 1982]), ändert sich mit zunehmender Belastung die Orientierung der wachsenden Risse, wobei sich anfängliche Risse wieder schließen können. Die endgültige Rißrichtung wird unter anderem von der Hauptspannungsrichtung, der Bewehrungsrichtung sowie von der Bewehrungsmenge stark beeinflusst.

Im allgemeinen wird die Rißrichtung in Betonmodellen auf drei verschiedene Weisen formuliert (vgl. [Kollegger 1988]):

- feste zueinander orthogonale Richtungen, bei denen häufig die Versagenslast überschätzt wird,
- feste zueinander nichtorthogonale Richtungen und
- Rißrichtungen, die sich nach verändernden Hauptdehnungsrichtungen einstellen. Das häufig als Swinging Crack Modell oder Rotating Crack Modell bezeichnete Verfahren zeigt gegenüber dem zweiten ein äußerst stabiles numerisches Verhalten.

In dieser Arbeit wurde die Rißrichtung mit der sich verändernden Hauptdehnungsrichtung definiert, die bei jedem Iterationsschritt neu ermittelt wird.

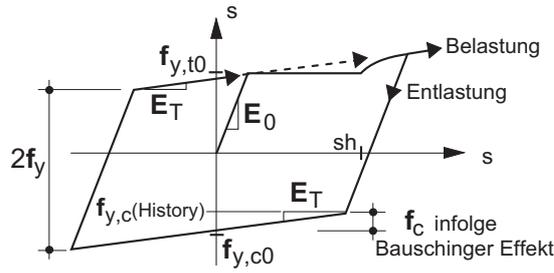
Der Einfluß der Netzabhängigkeit infolge der Lokalisierung des Rißbandes, der sich allgemein bei der Zugrißbildung noch stärker als bei der Druckbeanspruchung auswirkt, ist für die vorliegende Analyse von Stahlbetonstrukturen vernachlässigbar, da die in diskretisierten Elementen verschmiert vorhandenen Bewehrungen die ungehinderte Rißfortpflanzung, verglichen zum unbewehrten Beton, ohnehin verhindern (vgl. [Kollegger 1988]).

3.4 Betonstahlmodell

In der vorliegenden Arbeit wurde das bereits im FE-Programm FEMAS ([Beem, Könke, Montag & Zahlten 1996]) implementierte elasto-plastische Stahlmodell weitgehend übernommen (vgl. [Zhuang 1990], [Zahlten 1990]). Verbessert wurde der Verfestigungsbereich bei Erstbelastung, womit das Verhalten des naturharten Stahls in diesem Bereich besser abgebildet wird (Abb.3.5).

Über ein Schichtenmodell wird das Verhalten des Stahls in jeder Bewehrungslage verschmiert und die inkrementelle konstitutive Beziehung für das angenommene einachsiale Verhalten in jeder Bewehrungsrichtung ausgewertet. Die konstitutive Beziehung lautet

$$\Delta\bar{\sigma} = \mathbf{C}\Delta\bar{\epsilon}. \quad (3.28)$$



- $f_{y,t0}$: Fließspannung im Zugbereich
- $f_{y,c0}$: Fließspannung im Druckbereich
- E_0 : E - modul
- E_T : Tangentialmodul der Elastizität

Abbildung 3.5: Stahlmodell

Darin erfolgt die Erfassung des Bauschinger Effektes durch das kinematische Verfestigungsmodell nach Prager.

Nach dem linear-elastischen Bereich folgt ein elasto-plastischer Bereich mit den Anfangsfließspannungen f_{yt0} und f_{yc0} für Zug und Druck. Die obere und untere momentane Fließgrenze berechnet sich mit der aktuellen Spannung σ_s zu

$$f_{yc} = f_{yt} - (f_{yt0} - f_{yc0}) \quad \text{mit} \quad f_{yt} = \sigma_s, \quad (3.29)$$

$$f_{yt} = f_{yc} + (f_{yt0} - f_{yc0}) \quad \text{mit} \quad f_{yc} = \sigma_s. \quad (3.30)$$

Die Modifizierung der Modellbeschreibung für das monotone Verhalten des naturharten Stahls erfolgt im plastischen Dehnungsbereich nach Kreller (1990), in dem die von Dilger (1966) angegebene Exponentialfunktion in dem Bereich $\sigma_s \geq f_{yt0}$ für das Fließplateau ergänzt wurde:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \varepsilon_{sh} + 0.002 \left(\frac{\sigma_s}{f_{yt0}} \right)^m \quad \text{für} \quad \sigma_s \geq f_{yt0} \quad \text{mit} \quad m = \frac{\ln \left(\frac{A_G}{0.002} \right)}{\ln \left(\frac{f_t}{f_{yt0}} \right)}. \quad (3.31)$$

Hierin bezeichnen f_t die Stahlfestigkeit, A_G die Gleichmaßdehnung und ε_{sh} die Anfangsdehnung der Verfestigung. Diese Modifizierung gilt lediglich für die Erstbelastung im Bereich des Fließplateaus. Nach Erreichen dieses Belastungsniveaus wird die lineare Beziehung mit der Tangentensteifigkeit E_s angesetzt:

$$E_s = E_T = \frac{f_t - f_{yt0}}{\varepsilon_u - \varepsilon_{yt0}}. \quad (3.32)$$

3.5 Verbundmodell

3.5.1 Allgemeines

Die Verbundwirkung spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse des Antwortverhaltens von Stahlbetonbauteilen. Theoretische und experimentelle Untersuchungen in diesem Bereich reichen bis in die Anfänge der wissenschaftlichen Forschungen über Stahlbeton zurück. Die Arbeiten von Rehm (1961) und Rao (1966) stellen heute die wesentlichen theoretischen Grundlagen des derzeitigen Wissenstandes dar.

Bezüglich der Auswahl der numerischen Modellierungsmethoden teilen Mehlhorn, Dinges, Keuser & Kolmar (1989) deren Feinheit in vier Stufen ein. Bei der Modellierung in der ersten Stufe wird zum Beispiel die Geometrie der Oberfläche der einzelnen Bewehrungsstäbe wirklichkeitsnah abgebildet, um das Verbundverhalten vom Beton und Stahlrippen zu analysieren. Das Bond-Link-Modell ([Ngo & Scordelis 1967]) und das Verbundelement ([Keuser 1989]) sind beispielsweise in die zweite Stufe einzuordnen. Die Modelle beider Stufen eignen sich für lokale Untersuchungen des Verbundverhaltens. Die Bewehrung wird in der dritten Stufe durch Stabelemente in Längsrichtung abgebildet. Im Vergleich dazu ist das Verbundmodell der vorliegenden Arbeit in die vierte Stufe einzuordnen. Die Finiten Elemente sind größer als der mittlere Rißabstand und die Verbundwirkung wird indirekt als Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension-Stiffening-Effekt, TS-Effekt) entweder im Betonmodell oder im Stahlmodell erfaßt. Dabei ist lediglich das globale Tragverhalten von Interesse.

Bei der Herleitung des TS-Effektes werden im allgemeinen aus Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen an einem differentiellen Stabelement Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen gewonnen. Wegen des hohen Aufwands der analytischen Herleitung wird dabei das Verbundgesetz vereinfacht und als eine konstante, lineare oder eine exponentielle Funktion approximiert.

Der Bereich der plastischen Dehnung des Stahls wird jedoch bei einer solchen Herleitung nicht berücksichtigt, obwohl der TS-Effekt dort wesentlich größer als im elastischen Dehnungsbereich ist. Der Hauptgrund für diese Tatsache ist, daß das angewendete Verbundgesetz bei der Formulierung auf analytischem Wege den großen Schlupf im plastischen Bereich des Stahls nicht darstellen kann. Mit einem Verbundgesetz, das auch den großen Schlupf erfaßt, wird die Herleitung kompliziert oder gar nicht realisierbar. Im Hinblick auf die Gebrauchstauglichkeit kann die Vernachlässigung dieses Phänomens allerdings gerechtfertigt werden, insofern der Bewehrungsstahl unter der Gebrauchlast nicht plastiziert. Die Zulassung nichtlinearer Berechnungsverfahren und die Anwendung der Plastizitätstheorie für den Nachweis der Verformungsfähigkeit bzw. der Rotationskapazität von Bauteilen nach Einführung des EUROCODE 2 (1992) war ein Auslöser für eine weitergehende Betrachtung des plastischen Dehnungsbereiches des Stahls. TS-Modelle, die den gesamten Rißbildungsbereich, einschließlich des plastischen Bereiches des Stahls umfassen, sind aber immer noch selten. Dennoch findet man sie

in Kreller (1990), CEB-FIP Model Code (1990) und Stolze (1993). Die beiden ersten Modelle sind für den plastischen Bereich identisch.

Trotz der theoretischen Herleitung mit sinnvollen Annahmen aus Wahrscheinlichkeitsüberlegungen und statistischen Auswertungen zahlreicher Versuchsergebnisse zeigt die Gegenüberstellung der Resultate der einzelnen Modelle selbst für den Fall einer monotonen Beanspruchung in Bewehrungsrichtung eine große Streubreite ([Günther 1989], [Pardey 1994]). Diese Streubreite wird noch größer, wenn der Bewehrungsgrad geringer wird, wobei der Einfluß des TS-Effektes größer wird.

Darüber hinaus wurden Untersuchungen des TS-Modells für beliebige Beanspruchungsrichtungen gegenüber der Bewehrungsrichtung, wie im Fall allgemeiner Flächentragwerke, bisher nur selten durchgeführt. Trotzdem wurde eine wichtige Grundlage zur Erfassung des TS-Effektes bei beliebigen Flächentragwerken in Kollegger (1988) gegeben: der TS-Effekt muß in Bewehrungsrichtung berücksichtigt werden.

Trotz der offenen Fragen beim TS-Ansatz sind die bisher veröffentlichten Modelle für die vorliegende Analyse von großen Naturzugkühltürmen unter monoton steigender Windbeanspruchung als ausreichend genau anzusehen. Für die Identifizierung des Schädigungszustandes nach Sturmereignissen wird jedoch ein TS-Modell unter zyklischer Beanspruchung benötigt. Während in den letzten Jahren einige Modelle für schwellende Beanspruchungen veröffentlicht wurden, ist ein auf theoretischen Überlegungen basierender TS-Ansatz für die Tragwerksanalyse unter zyklischen Beanspruchungen bisher nicht entwickelt worden.

Im folgenden Abschnitt wird daher ein TS-Modell formuliert, das sowohl die monotonen als auch die halbzyklischen Beanspruchungen (unidirectional cyclic loading) im gesamten Dehnungsbereich des Stahls erfaßt. Im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit soll die Formulierung Wert auf die Ermittlung der Rißbreite legen.

3.5.2 Verbundmechanismen

Im ungerissenen Stahlbeton ist die Dehnung von Stahl und Beton etwa gleich groß, da der Verbund die beiden Materialkomponenten schubfest verbindet. Überschreitet die Betonspannung die Betonzugfestigkeit an der schwächsten Stelle (infolge der Streuung der Betonzugfestigkeit, von Eigenspannungen, eines zufälligen Fehlquerschnitts oder durch Querschnittschwächung aufgrund der Querbewehrung), so reißt der Beton und der Stahl übernimmt die Zugkraft. Im rißnahen Bereich entstehen Verformungsunterschiede zwischen Stahl und Beton, gekennzeichnet durch die Relativverschiebungen s , die Verbundspannungen τ_b an der Oberfläche des Stahls hervorrufen. Dabei haben die Verbundspannungen die Aufgabe, die vom Stahl übernommenen Zugkräfte im Rißquerschnitt wieder in den Beton einzuleiten.

Die grundlegenden Beziehungen dieser Kraftübertragungsmechanismen zwischen Stahl, Verbund und Beton lassen sich an einem differentiellen Stabelement mathematisch formu-

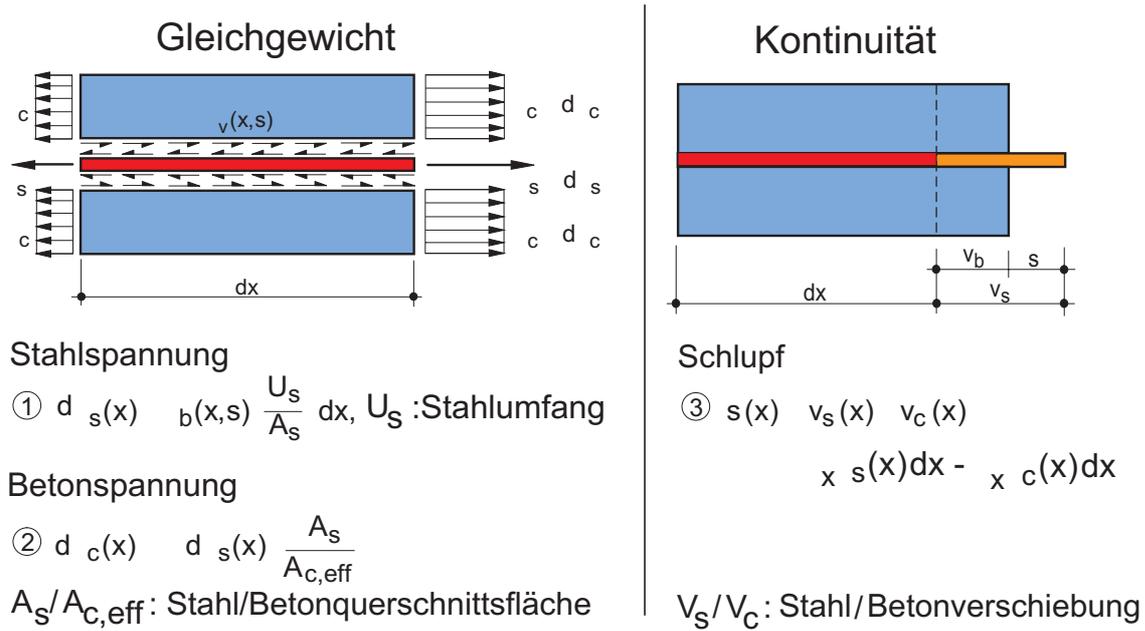


Abbildung 3.6: Stahl-Verbund-Beton-Schlupf-Beziehung

lieren. Aus der Gleichgewichtsbetrachtung (Abb. 3.6) ergeben sich folgende Beziehungen:

$$d\sigma_s(x) = \tau_b(x, s) \frac{U_s}{A_s} dx, \quad (3.33)$$

$$d\sigma_c(x) = -\tau_b(x, s) \frac{U_s}{A_c} dx = -d\sigma_s(x) \frac{A_s}{A_c} dx. \quad (3.34)$$

Die Kontinuitätsbedingung gibt die Verformungsbeziehung als Relativverschiebung (Schlupf) zwischen Stahl und Beton wieder:

$$s(x) = v_s(x) - v_c(x). \quad (3.35)$$

Die Verbundspannung $\tau_b(x, s)$, deren Verlauf von der Relativverschiebung s sowie von der Entfernung vom Rißufer x abhängt, steigt am Rißufer steil an, klingt aber rasch wieder ab. Die Verbundspannung verschwindet, wenn die Relativverschiebung Null ist. Die Länge, in der die Verbundspannung aktiv ist, wird als Einleitungslänge l_t bezeichnet. Innerhalb dieser Einleitungslänge werden die Stahlspannungen vom Rißufer her abgebaut und die Zugspannungen im Beton nehmen zu. Außerhalb der Einleitungslänge befinden sich Stahl und Beton im starren Verbund.

Prinzipielle Mechanismen dieser Spannungsübertragung in einem Rißelement sind an Hand der unten dargestellten Beziehungen in Abbildung 3.7 gezeigt. Integriert man die obigen Gleichungen (3.33), (3.34) und (3.35) über den halben Rißabstand $s_{rm}/2$, so lassen sich die Spannungsverläufe im Stahl $\sigma_s(x)$ und im Beton $\sigma_c(x)$ sowie der Schlupfverlauf $s(x)$ in einem durch zwei Risse begrenzten Bereich (Rißelement) wie folgt darstellen:

$$\sigma_s(x) = \sigma_s(x=0) + \frac{U_s}{A_s} \int_{x=0}^{s_{rm}/2} \tau_b(x, s) dx, \quad (3.36)$$

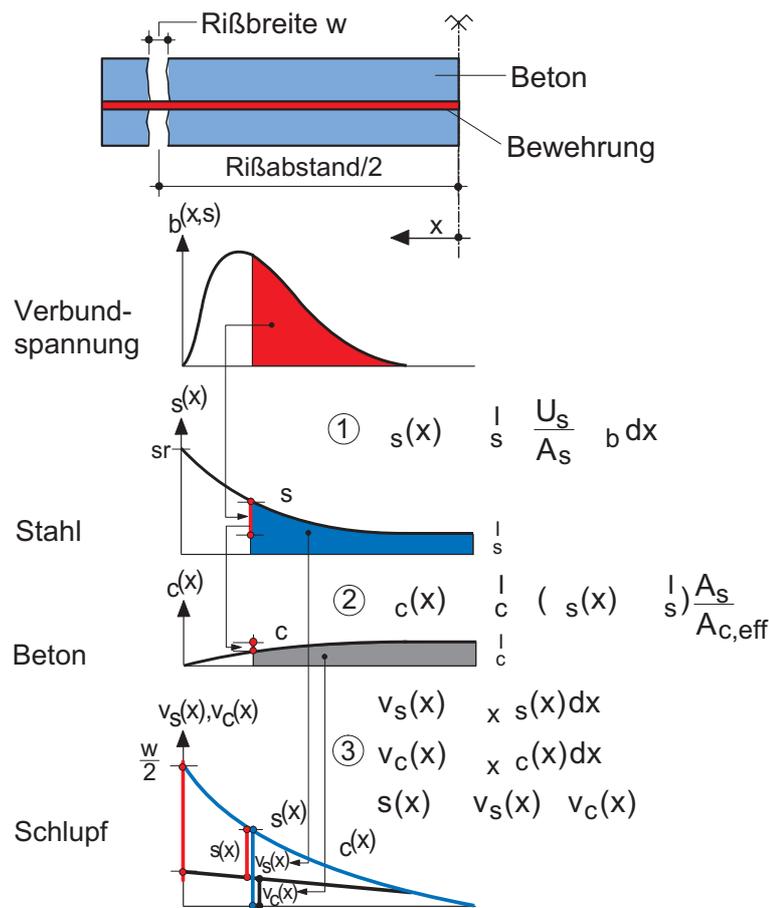


Abbildung 3.7: Prinzip der Spannungseinleitung in einem Rißelement

$$\sigma_c(x) = \sigma_c(x=0) - (\sigma_s(x) - \sigma_s(x=0)) \frac{A_s}{A_c}, \quad (3.37)$$

$$s(x) = \int_{x=0}^{s_{rm}/2} \varepsilon_s(x) dx - \int_{x=0}^{s_{rm}/2} \varepsilon_c(x) dx. \quad (3.38)$$

Im anfänglichen Rißbildungsstadium (Erstrißbildung) entstehen unregelmäßige Risse mit großen Abständen, so daß die Kraftübertragung zwischen Stahl und Beton innerhalb der Einleitungslänge durch keinen anderen Riß beeinflusst wird. Nach der sukzessiven Rißbildung bei zunehmender Beanspruchung stabilisiert sich die Rißbildung. Die Risse liegen so eng zusammen, daß an keiner Stelle mehr starrer Verbund herrscht. Die Einleitungslängen überschneiden sich (abgeschlossene Erstrißbildung). In diesem Rißbildungsstadium können sich eventuell weitere Risse ausbilden, wenn die Einleitungslänge ausreichend groß ist, so daß die sich aufbauende Betonspannung die Betonzugfestigkeit zwischen zwei Rissen überschreitet.

Betrachtet man die Stahlspannung σ_{sr} (-dehnung ε_{sr}) nicht im Rißquerschnitt, sondern im Rißelement, so ist die mittlere Stahlspannung σ_{sm} (-dehnung ε_{sm}) gegenüber derjenigen im Rißquerschnitt um das Maß der Mitwirkung des Betons $\Delta\sigma$ ($\Delta\varepsilon$) abgebaut. Somit wird

das Bauteil gegenüber der alleinigen Betrachtung des Riquerschnittes versteift (Zugversteifung, Tension-Stiffening). Bei dem oben erwähnten Kraftbertragungsmechanismus vom Stahl auf den Beton sind für das Maß des TS-Effektes in erster Linie der Rißabstand und die zugehörige Einleitungslänge im jeweiligen Beanspruchungszustand entscheidend. Diese werden unter anderem von folgenden Faktoren wesentlich beeinflt:

- Verbund: Verbundeigenschaften sind stark von der Betondruckfestigkeit f_c sowie von der bezogenen Rippenfläche f_r des Bewehrungsstahls abhängig.
- Stahldurchmesser: Ein kleinerer Stabdurchmesser bei gleicher Stahlmenge liefert eine größere Stahloberfläche, wodurch sich der Verbundeffekt vergrößert.
- Betonzugfestigkeit: Die Betonzugfestigkeit f_{ct} wird u.a. von der Betondruckfestigkeit f_c und der Bauteildicke beeinflt.
- Bewehrungsgrad: Der effektive Bewehrungsgrad ρ_{eff} definiert sich durch das Verhältnis der Bewehrungsmenge A_s zur mitwirkenden Betonfläche $A_{c,eff}$, die von der Betondeckung abhängig ist.

An dieser Stelle ist noch zu erwähnen, daß die Betonzugfestigkeit f_c und der Bewehrungsgrad ρ in Bezug auf den gesamten Querschnitt mit der Art der Beanspruchung (Biegung mit Zug oder Druck) zusammen die Rißstahlspannung bestimmen. Die Rißstahlspannung (Stahlspannung im Rißquerschnitt beim Auftreten des ersten Risses) ist ein ausschlaggebender Faktor, der den TS-Effekt vom Erstrißbildungsstadium bis zum plastischen Dehnungsbereich bestimmt.

3.5.3 Tension-Stiffening-Modell

In der vorliegenden Arbeit baut das TS-Modell auf dem Stahlmodell auf. Dabei basiert die Formulierung auf einem eindimensionalen Zugstabmodell, welches näherungsweise dem gezogenen Rand eines Biegebalkens entspricht. Die Scheibenwirkung zwischen den Rissen wird nicht berücksichtigt. Das Modell beschreibt sämtliche Ribildungsbereiche einschließlich des plastischen Bereichs des Stahls. Der Einfluß des Tension-Stiffenings infolge Ent- und Wiederbelastung nach der Plastizierung des Stahls wird nicht betrachtet, da der Einfluß im Vergleich zu dem vorhandenen Mitwirkungsma infolge der Plastizierung des Stahls und zu der gesamten Dehnung nicht von Bedeutung ist.

Für den Modellaufbau wurde das iterative Rechenkonzept von Tassios & Yannopoulos (1981), Eligehausen, Popov & Bertero (1983) herangezogen. Der wesentliche Vorteil dieses Konzeptes liegt darin, daß sich die differentielle Verbundgleichung mit beliebig komplizierten Verbundgesetzen durch sogenannte "Step-by-Step-Integration" einfach numerisch lösen läßt. Damit wird die Auswahl der anzuwendenden Verbundgesetze nicht beschränkt. Für monotone Beanspruchung wurde das ortsabhängige komplexe Verbundmodell von Kreller (1990) angewendet, das sowohl für den quasi verbundfreien rinahen Bereich als auch für großen Schlupf Gültigkeit besitzt. Damit wird die Überlegung der Länge des

verbundfreien Bereichs ($2d_s - 3d_s$), der vom Stahlspannungsniveau stark abhängig ist, überflüssig.

Für zyklische Beanspruchung hingegen wurde das Verbundmodell von Tue (1993) übernommen, da es gegenüber anderen zyklischen Verbundmodellen, wie die beispielsweise im CEB 210 (1991) vorgestellten Modelle Eligehausen, Popov & Bertero (1983), Morita & T. (1973), Tassios (1979), Hawkins (1982) und Balázs (1991), für den Gebrauchslastbereich geeignet ist.

3.5.3.1 Konzept des Modellaufbaus

Das bereits im Abschnitt 3.4 beschriebene Materialgesetz des Stahls wird als eine neue multi-lineare Spannungs- und Dehnungsbeziehung modifiziert. Dabei werden die charakteristischen Stützstellen bestimmt, die beliebig zu wählen sind. Die Stahlspannung oder -dehnung im Rißquerschnitt wird an den Stützstellen als bekannt oder vorab bestimmbar vorausgesetzt und die fehlende Größe wird durch das im nächsten Abschnitt dargestellte Berechnungsmodell iterativ ermittelt. Im anderen Fall wird mehrfacher numerischer Aufwand verlangt. Die Qualität des Modells ist von der Anzahl der gewählten Stützstellen abhängig und ist somit unmittelbar mit dem numerischen Rechenaufwand gekoppelt.

Aus diesem Aspekt wurden fünf Stützstellen für die monotone Belastung gewählt. Dies sind die Punkte $(\varepsilon_{sm}, \sigma_{sr})$ mit den Rißstahlspannungen $\sigma_{sr,5\%}$, $\sigma_{sr,50\%}$, $\sigma_{sr,95\%}$ sowie der Streckgrenze f_y und der Bruchspannung f_t . Hierin bezeichnet $\sigma_{sr,\eta\%}$ die Stahlspannung im Riß, die das Auftreten des Erstrisses beim Erreichen der $\eta\%$ -Fraktile der Betonzugfestigkeit erzeugt. Dabei wird angenommen, daß der Beton beim Erreichen der 5%-Fraktile der Betonzugfestigkeit reißt, und die Erstrißbildung beim Erreichen der 95%-Fraktile abgeschlossen wird.

Selbst bei monoton steigenden äußeren Belastungen können durch Spannungsumlagerung lokale Bereiche entlastet werden. Der Entlastungsvorgang wird durch vier charakteristische Punkte und deren lineare Verbindungen beschrieben. Die gewählten Stützstellen charakterisieren sich durch

- die Stahlspannung σ_{sr} , die mit der mittleren Spannung σ_{sm} identisch ist ($\sigma_{sr} = \sigma_{sm}$),
- die Stahlspannung $\sigma_{sr} = 0$ bei vollständiger Entlastung ,
- die in Bewehrungsrichtung transformierte Anfangskontaktdehnung ε_{rc} aus dem Betonmodell (Gl.3.25) und
- den Ursprungspunkt (0,0).

Bei der Bestimmung des ersten Punktes ($\sigma_{sr} = \sigma_{sm}$) muß die Stahlspannung aus der Bedingung $\sigma_{sr} = \sigma_{sm}$ zusätzlich aufgefunden werden. Dies erfolgt durch ineinander geschachtelte Iterationen. Bei vollständiger Entlastung $\sigma_{sr} = 0$ eines Rißelements kehren die Spannungen und Dehnungen innerhalb des Elementes nicht auf Null zurück, sondern bleiben, infolge des negativ wirkenden Reibungsverbundes, mit positivem Wert erhalten. Betrachtet man den Rißschließungsvorgang des Betons, so muß die im Rißquerschnitt

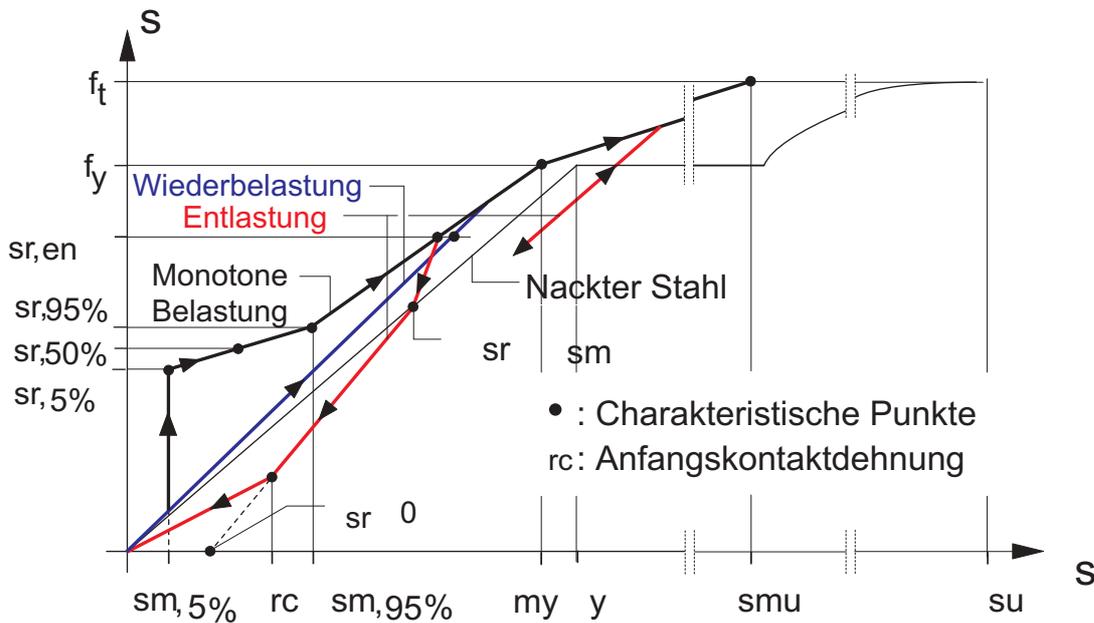


Abbildung 3.8: Modifizierte Stahlkennlinie

vorhandene momentane Kontaktspannung berücksichtigt werden. Aufgrund des komplizierten Verbundverhaltens beim Rißschließungsvorganges werden der dritte und vierte Punkt eingeführt und beide linear verbunden.

Bei Wiederbelastung wird der Punkt bestimmt, der das Spannungsniveau $\sigma_{sr,en}$ auf der Erstbelastungskurve vor der Entlastung aufweist. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ursprungspunkt (0,0) stellt den Wiederbelastungspfad dar. Beim einem höheren Spannungsniveau wird die Erstbelastungskurve weiter verfolgt.

Somit sind alle charakteristischen Stützstellen definiert, deren lineare Verbindungen die neue Spannungs- und mittlere Dehnungsbeziehung für monotone und zyklische Beanspruchung bilden. Wie oben bereits erwähnt, wird der Einfluß der Ent- und Wiederbelastung nach der Plastizierung des Stahls auf den TS-Effekt vernachlässigt. Die modifizierte Stahlkennlinie ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

3.5.3.2 Berechnungsmodell

Im folgenden wird das iterative Berechnungsmodell für die Bestimmung der im vorherigen Abschnitt definierten Stützstellen beschrieben. Durch Einführung der “Step-by-Step-Integration” für die Integralgleichungen (3.36) - (3.38) werden der Spannungs-, Dehnungsverlauf sowie der Verlauf der Relativverschiebung in einem Rißelement bestimmt. (Abb. 3.9)

Gesucht ist die mittlere Stahldehnung für das betrachtete Rißelement. Die Stahlspannung im Riß σ_{sr} und die Rißelementlänge (Rißabstand s_{rm}) werden als bekannt vorausgesetzt.

Ist der Stahlspannungsverlauf im betrachteten Rißelement bekannt, so ist auch der Dehnungsverlauf und damit die mittlere Dehnung bekannt.

Bei der numerischen Integration wird das Rißelement in äquidistante Bereiche unterteilt. Mit dem angewendeten Verbund-, Stahl- und Betonmodell wird die Integration schrittweise durchgeführt, indem die Verbundspannung bereichsweise als konstant angenommen wird, während die anderen Größen linear approximiert werden. Die geschätzte Relativverschiebung im Riß ($x = 0$) wird iterativ verbessert. Verschwindet die Relativverschiebung in der Mitte des Rißelementes ($x = s_{rm}/2$), ist die Iteration abgeschlossen. Die über die Rißelementlänge gemittelte Stahldehnung ist die gesuchte mittlere Dehnung, und der doppelte Schlupf im Riß entspricht dann der Rißbreite.

Bei der Iteration muß in jedem Berechnungspunkt kontrolliert werden, ob die Betondehnung bzw. -spannung kleiner oder gleich der Stahldehnung bzw. Betonzugfestigkeit ist. Im folgenden wird das oben beschriebene Berechnungsmodell vom Ablauf schematisch zusammengefaßt (vgl. Abb. 3.9).

Bekannt sind die Stahl- und Betonspannung im Riß ($i = 0$) $\sigma_s^0 = \sigma_{sr}$, $\sigma_c^0 = 0$ sowie der Rißabstand s_{rm} .

1. Unterteilung der halben Rißelementlänge $s_{rm}/2$ in Abstände Δx ,
2. Abschätzung des Schlupfs im Rißquerschnitt s^0 ,
3. Ablesung der Verbundspannung $\tau_b(s^0, x^0 = 0)$ vom Verbundgesetz,
4. Berechnung der Stahlspannung im Berechnungspunkt i :

$$\sigma_s^{i+1} = \sigma_s^i - \frac{U_s}{A_s} \tau_b(s^i, x^i) \Delta x, \quad (3.39)$$

5. Berechnung der Stahldehnung im Berechnungspunkt i ,
6. Berechnung der Betonspannung im Berechnungspunkt i :

$$\sigma_c^{i+1} = \sigma_c^i - (\sigma_s^{i+1} - \sigma_s^i) \frac{A_s}{A_c}, \quad (3.40)$$

7. Berechnung der Betondehnung im Berechnungspunkt i ,
8. Kontrolle, ob $\varepsilon_s \geq \varepsilon_c$ sowie $\sigma_c \leq f_{ct}$,
9. Berechnung des Schlupfs im Berechnungspunkt i :

$$s^{i+1} = s^i - (\varepsilon_s^{i+1} + \varepsilon_s^i) \frac{\Delta x}{2} + (\varepsilon_c^{i+1} + \varepsilon_c^i) \frac{\Delta x}{2}, \quad (3.41)$$

10. Kontrolle, ob $s^n = 0$. Wenn nein, zurück zu Schritt 2,
11. Berechnung der mittleren Stahldehnung ε_{sm} und der Rißbreite $2s^0$.

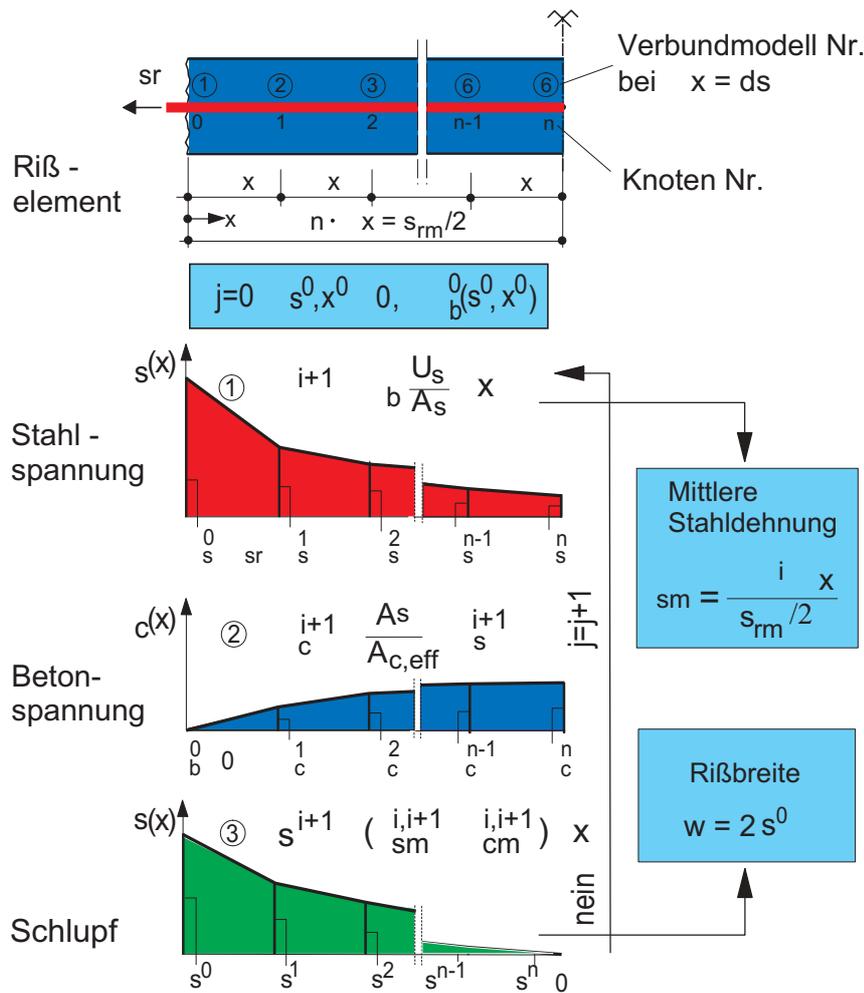


Abbildung 3.9: Rechenschema: schrittweise Integration

Für den äquidistanten Berechnungsabstand Δx wird der Stabdurchmesser d_s angesetzt, da das angewendete ortsabhängige Verbundgesetz von Kreller in Abhängigkeit von d_s dargestellt ist. Für die Betonquerschnittsfläche A_c muß die Mitwirkungszone (effektive Fläche des Betonquerschnittes) angesetzt werden. Die effektive Mitwirkungshöhe h_{eff} wurde abweichend vom Vorschlag im CEB-FIP Model Code (1990) $h_{eff} = 2.5(c + d_s/2)$ nach Gergely & Lutz (1968) mit $h_{eff} = 2.0(c + d_s/2)$ angenommen, da bei numerischen Voruntersuchungen damit bessere Ergebnisse erzielt wurden. Für die zyklische Berechnung werden der bisher maximal erreichte Schlupf und die dazugehörige Verbundspannung in jedem Berechnungspunkt abgespeichert. Beim zyklischen Vorgang wird der eingestellte Rißabstand bei der Erstbelastung festgehalten.

Im folgenden werden die im Berechnungsmodell als bekannt vorausgesetzten Eingangsgrößen Stahlspannung im Riß und Rißabstand diskutiert.

Rißstahlspannung

Die von der Betonzugfestigkeit abhängigen Rißstahlspannungen berechnen sich unter reiner Zugbeanspruchung zu

$$\sigma_{sr,\eta\%} = \frac{f_{ct,\eta\%}}{\rho} + f_{ct,5\%} \frac{E_s}{E_c}, \quad (3.42)$$

wobei der Bewehrungsgrad ρ auf den gesamten Betonquerschnitt bezogen ist.

Da bei der Anwendung des Mehrschichtenmodells der Beton, mit Ausnahme der reinen Zugbeanspruchung, nicht schlagartig wie beim Biegeversuch, sondern in Abhängigkeit von Lastinkrementen allmählich schichtenweise reißt, ist die Rißstahlspannung selbst bei reiner Biegebeanspruchung numerisch nicht klar definierbar. Darüber hinaus läßt sich auch bei kombinierten Beanspruchungen (Biegung mit Zug oder Druck) die Rißstahlspannung nicht einfach bestimmen. Obwohl die Größe der Rißstahlspannung ein ausschlaggebender Faktor ist, der den TS-Effekt vom Erstrißbildungsstadium bis zum plastischen Dehnungsbereich bestimmt, wurde darüber äußerst selten berichtet.

Das iterative Berechnungskonzept von Noakowski (1988) stellt einen zuverlässigen Weg mit akzeptablem Rechenaufwand dar. Diese Vorgehensweise findet jedoch bei der Anwendung auf die Analyse von allgemeinen Flächentragwerken ihre Grenzen. Das momentane Verhältnis von Biege- zu Normalbeanspruchung ist während der Iteration des Gleichgewichtes nicht bekannt. Das gleiche Verhältnis vom letzten Gleichgewichtszustand ist nur anwendbar, wenn sich dieses Verhältnis in Abhängigkeit der Belastungsgeschichte nur allmählich ändert. Wegen der verformungsbedingten schlagartigen Änderung des lokalen Beanspruchungszustandes bei der Schalenanalyse kann dieser Weg somit nicht beschrritten werden. Ebenso ist der Ansatz von Meiswinkel & Rahm (1999) nur bedingt anwendbar.

Basierend auf Meiswinkel & Rahm wurde hier vereinfachend die entstandene Rißtiefe t_{riss} im Erstrißbildungsstadium für die Bestimmung der Rißstahlspannung zugrunde gelegt. Mit der Betrachtung beider Grenzfälle für den Betonquerschnitt "nicht gerissen" und "durchgerissen" ist lediglich der Bewehrungsgrad ρ in der Gleichung (3.42) zu ändern. Die Abhängigkeit vom Beanspruchungszustand beinhaltet somit den auf die Rißtiefe bezogenen Bewehrungsgrad ρ_{riss} , der sich bezogen auf 1 m Breite wie folgt ergibt:

$$\rho_{riss} = \frac{a_s}{h_{riss}} \quad \text{mit} \quad h_{riss} = 0.5 h \frac{t_{riss}}{h} = 0.5 t_{riss}. \quad (3.43)$$

Da die Rißtiefe sich ständig mit der Beanspruchung ändert, wird die Rißstahlspannung im Erstrißbildungsstadium neu ermittelt. Sobald dieses Stadium verlassen wird, wird die zuletzt ermittelte Rißstahlspannung festgehalten.

Rißabstand

Für die Festlegung der Rißelementlänge wurde das Rißbildungsmodell von Kreller (1990) übernommen. Das Modell basiert auf der statistischen Herleitung des Rißab-

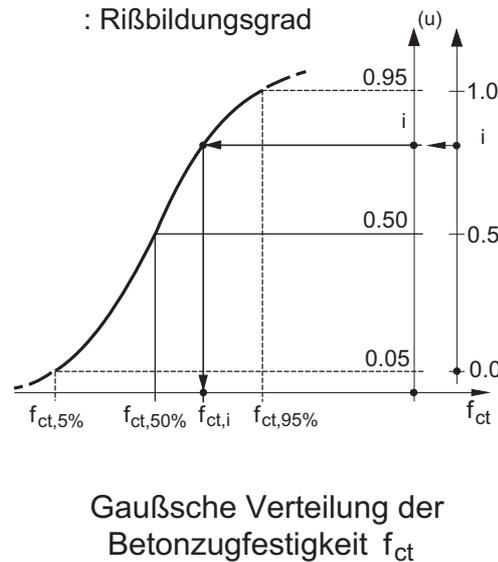


Abbildung 3.10: Zuordnung des Rißbildungsgrades nach Schwennicke (1983)

standes von Meier (1983), der Gaußschen Normalverteilung der Zugfestigkeit nach Koch (1976) sowie der Zuordnung zwischen dem Rißbildungsgrad ξ und der aktuellen Betonzugspannung von Schwennicke (1983). Nach dem in Abbildung 3.10 dargestellten Zusammenhang zwischen Rißbildungsgrad und Betonzugspannung erreicht die Betonzugspannung bei $\xi = 1$ die 95%-Fraktile der Betonzugfestigkeit $f_{ct,95\%}$, während $\xi = 0$ den Übergang vom ungerissenen Zustand hin zum Auftreten des ersten Risses bei der Betonzugspannung $f_{ct,5\%}$ darstellt.

Im Erstrißbildungsstadium entstehen Risse mit unterschiedlich großen Abständen, so daß sich die Einleitungslängen l_t teilweise überschneiden. Nach dem gedanklichen Umordnen des Rißbildes in einen ungerissenen Bereich und in einen gerissenen Bereich wird die Bestimmungsgleichung des mittleren Rißabstand zu

$$s_{rm}^I(\xi) = \frac{1}{\xi} (2.0 - 0.69\xi) l_t(\xi) \quad (3.44)$$

definiert, wobei der mittlere Rißabstand beim Erreichen der abgeschlossenen Erstrißbildung ($\xi = 1$) nach Meier zugrunde gelegt wurde:

$$s_{rm}^I(\xi = 1) = 1.31 l_t(\xi). \quad (3.45)$$

Die lastabhängige Einleitungslänge $l_t(\xi)$ in Gleichung (3.44) wird mit der bereits dargestellten Berechnung ermittelt. Die Rißelementlänge hierfür wird ausreichend groß gewählt, damit die Einleitungslänge von der gewählten Elementlänge nicht beeinflußt wird. Wenn die Iteration abgeschlossen ist, wird der Zustand $s = 0$ nicht nur in der Mitte des Rißabstandes erreicht, sondern auch in den Berechnungspunkten, die den starren Verbundzustand aufweisen. Der Abstand vom Rißufer bis zum ersten Punkt, in dem die Relativverschiebung verschwindet, stellt die Einleitungslänge l_t dar.

Ist die Erstrißbildung abgeschlossen, können weitere Risse auftreten. Für diesen Rißbildungszustand wurde eine vereinfachte Annahme getroffen, welche auf dem Rißabstand $s_{rm}^I(\xi = 1)$ und der Einleitungslänge $l_t(\xi = 1)$ beim Erreichen der 95%-Fraktile der Betonzugfestigkeit basiert. Der Rißabstand $s_{rm}^I(\xi = 1)$ wird mit dem Verhältnis der Einleitungslänge $l_t^{II}(\xi = 1)$ bei der aktuellen Stahlspannung im Riß zur Basiseinleitungslänge reduziert:

$$s_{rm}^{II} = s_{rm}^I(\xi = 1) \frac{l_t^{II}(\xi = 1)}{l_t(\xi = 1)}. \quad (3.46)$$

3.5.3.3 Monotones Verbundgesetz

Das angewendete ortsabhängige Verbundgesetz für monoton steigende Beanspruchung von Kreller (1990) ist in Abbildung **3.11** dargestellt. Die Verbundspannungs- und Schlupfbeziehung variiert in Abhängigkeit der Entfernung des Berechnungspunktes vom Rißquerschnitt. Diese Entfernung wird durch den vielfachen Stabdurchmesser dargestellt, und daraus entsteht die gesamte Beziehung aus sechs Kurven. Ab der Entfernung vom fünffachen Stahlstabdurchmesser bleibt die sechste Kurve unverändert.

Im folgenden wird die Verbundspannungs- und Schlupfbeziehung in Verbundbereich I nach DIN 1045 (1988) in der Entfernung $x \geq 5d_s$ vom Rißufer repräsentativ dargestellt:

$$\tau_l(0 \leq s \leq s_1) = \tau_{max} \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha, \quad (3.47)$$

$$\tau_l(s_1 < s \leq s_2) = \tau_{max}, \quad (3.48)$$

$$\tau_l(s_2 < s \leq s_3) = \frac{\tau_f - \tau_{max}}{s_3 - s_2} (s - s_2) + \tau_{max}, \quad (3.49)$$

$$\tau_l(s_3 < s) = \tau_f. \quad (3.50)$$

Die Parameter der einzelnen sechs Kurven sind der Abbildung **3.12** zu entnehmen.

3.5.3.4 Zyklisches Verbundgesetz

Für zyklische Beanspruchungen wurde das Verbundgesetz von Tue (1993) gewählt (Abb. **3.13**). Aufgrund der einheitlichen Formulierung des Reibungsverbundes für monotone und zyklische Belastung wurde das Verhalten des Reibungsverbundes nach Eligehausen, Popov & Bertero (1983) berücksichtigt. Die Beschreibung der Verbundspannungs- und Schlupfbeziehung lautet für den Entlastungsvorgang mit den Parametern aus Tabelle **3.1**:

$$\tau_{unl} = \tau_{max} \left(\frac{s}{s_{max}} \right)^{u1} + \tau_{fo} \frac{s_{max} - s}{s_{max}} \frac{1}{(r_n + 1)^{u2}}. \quad (3.51)$$

Dabei sind s_{max} , τ_{max} jeweils die bisher erreichten maximalen Werte des Schlupfs und der Verbundspannung im betrachteten Punkt, während τ_{fo} den maximalen negativen

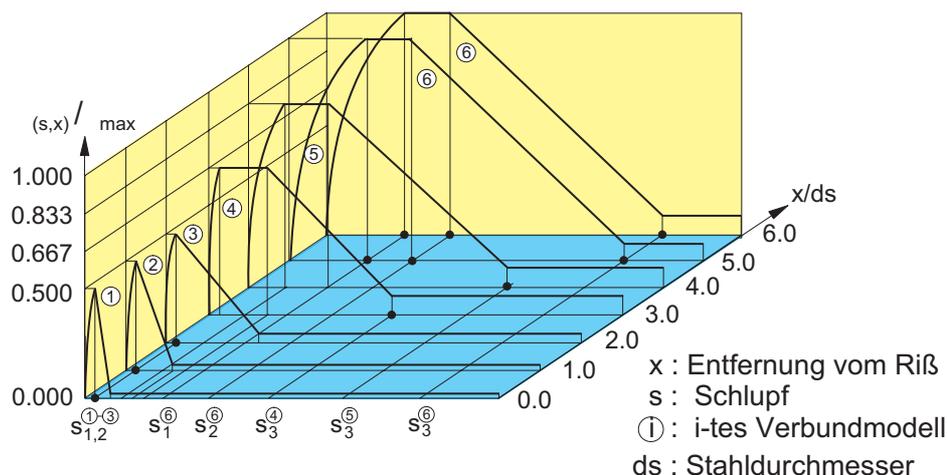


Abbildung 3.11: Lokales Verbundmodell [Kreller 1990]

Verbund- gesetz Nr.	Verbundbereich nach DIN 1045									
	I				II					
	s_1 [mm]	s_2 [mm]	s_3 [mm]	f_{\max}	s_1 [mm]	s_2 [mm]	s_3 [mm]	f_{\max}		
1	s_1^1	s_1^1	0.05	0.001	s_1^1	s_1^1	0.05	0.001		
2	s_1^2	s_1^2	0.15	0.025	s_1^2	s_1^2	0.30	0.025		
3	s_1^3	s_1^3	0.30	0.050	s_1^3	s_1^3	0.60	0.050		
4	s_1^4	s_1^4	0.1	0.55	0.150	s_1^4	s_1^4	0.2	1.45	0.150
5	s_1^5	s_1^5	0.1	0.55	0.150	s_1^5	s_1^5	0.2	1.95	0.150
6	0.25	0.35	1.0	0.150	0.40	0.60	2.50	0.150		

$\max a \sqrt{f_c}$, a 0.36 c/ds 1.28, $0.003f_c$ 0.1625 $i_{\max} i/6$ $\max \geq 0.5$ \max, s_1^i $\frac{i_{\max}}{\max}$ $\frac{1}{s_1^6}$, i 1..5
--

Abbildung 3.12: Parameter des Verbundgesetzes [Kreller 1990]

Reibungsverbund bei $s = 0$ angibt. Der Faktor r_n , der von der Lastspielzahl L_w abhängig ist, berechnet sich zu

$$r_n = \log(10L_w) + \frac{L_w}{20000} \quad (3.52)$$

Die Abminderung der Reibung infolge wiederholter Belastung wird durch den Term $(r_n + 1)^{u^2}$ berücksichtigt. Die Beschreibung der Wiederbelastung erfolgt durch die Gleichungen:

$$\tau_{rel} = \left(1 - \frac{\tau_{f0}}{\tau_{r0}}\right) \tau_{r0} + \tau_{f0} < \tau_l(s), \quad (3.53)$$

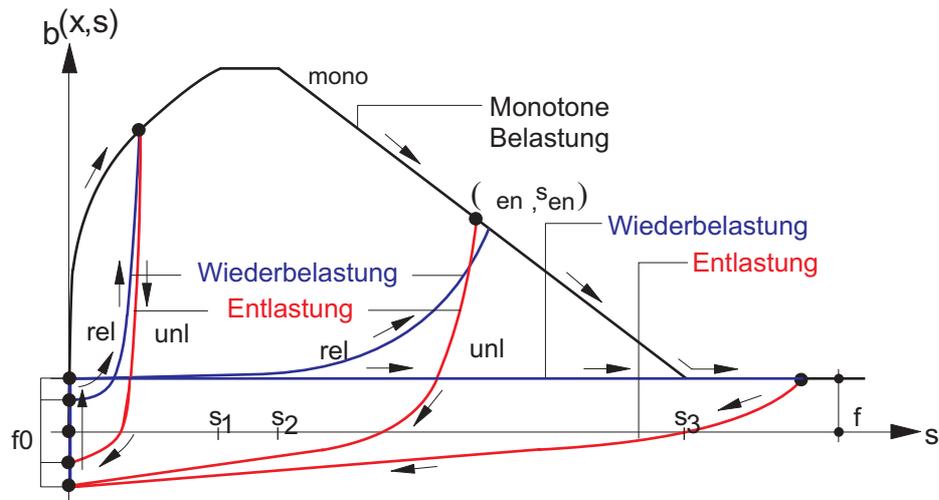


Abbildung 3.13: Zyklisches Verbundgesetz, basierend auf Tue (1993)

$$\tau_{r0} = r1 \frac{\tau_{max}}{(r_n + 1)^{r2}} \left(\frac{s}{s_{max} r3} \right)^{r4}, \quad (3.54)$$

$$\tau_{f0}(s_{max} \leq 0.5s_3) = \left(\frac{9}{5} \frac{s_{max}}{s_3} + 0.1 \right) \tau_f, \quad (3.55)$$

$$\tau_{f0}(s_{max} > 0.5s_3) = \tau_f, \quad (3.56)$$

wobei τ_f die Reibungsspannung für den Schlupf s_3 im monotonen Verbundgesetz bezeichnet.

$\beta_w [N/mm^2]$	$u1$	$u2$	$r1$	$r2$	$r3$	$r4$
24	11.20	0.03	1.06	0.06	1.01	5.60
54	4.50	0.03	1.01	0.05	1.03	2.80

Tabelle 3.1: Parameter des zyklischen Verbundgesetzes [Tue 1993]

3.5.4 Erweiterung auf 2-D

Der bisher beschriebene Modellaufbau der Stahlkennlinie basiert auf der Betrachtung des eindimensionalen Falls. Beim ebenen Spannungszustand müssen die prinzipiellen Mechanismen der Spannungsübertragung zwischen Stahl und Beton unverändert bleiben. Für die Berücksichtigung des TS-Effekts in beliebiger Beanspruchungsrichtung gegenüber der Bewehrungsrichtung müssen weitergehende Überlegungen erfolgen. Bezüglich des hier angewendeten Rechenmodells hängt die Güte der Rechenergebnisse in erster Linie von den Eingangsgrößen, der Reißstahlspannung und dem Reißabstand ab.

Nach dem angewendeten Rißkriterium entsteht ein Riß senkrecht zur Hauptzugspannungsrichtung, die von den orthogonalen Netzbewehrungsrichtungen x , y jeweils um den Winkel θ bzw. $\pi/2 - \theta$ abweicht. Vernachlässigt man vereinfachend die Dehnung in der ungerissenen zweiten Hauptspannungsrichtung, so berechnet sich im ebenen Spannungszustand die Rißstahlspannung aus der Gleichgewichtsbetrachtung im Rißquerschnitt, z.B. für die Bewehrung in x -Richtung mit einer konstanten Betonzugfestigkeit f_{ct} zu

$$\sigma_{sx} = \frac{hf_{ct} \cos^2 \theta}{a_x \cos^4 \theta + a_y \sin^4 \theta} + f_{ct} \cos^2 \theta \frac{E_s}{E_c}. \quad (3.57)$$

Dabei bezeichnet a_x die Bewehrungsmenge in x -Richtung und h die Dicke des Bauteils. Wird der auf die Rißtiefe bezogene Bewehrungsgrad ρ_{riess} (Gl. (3.43)) und die Streuung der Betonzugfestigkeit eingeführt, so kann die Gleichung (3.57) in der gleichen Form wie die Gleichung (3.42) ausgedrückt werden:

$$\sigma_{sx} = \frac{f_{ct,\eta\%}^*}{\rho_{riess,x}} + f_{ct,\eta\%}^* \frac{E_s}{E_c} \quad (3.58)$$

mit

$$f_{ct}^* = f_{ct} \cos^2 \theta, \quad \rho_{riess,x} = \frac{1}{h_{riess}} (a_x \cos^4 \theta + a_y \sin^4 \theta). \quad (3.59)$$

Die Gleichung (3.58) liefert bei $\theta = 0$ das gleiche Ergebniss wie im eindimensionalen Fall. Für die Bewehrung in y -Richtung müssen lediglich $\sin \theta$ und $\cos \theta$ miteinander vertauscht werden.

Auch die Ermittlung des Rißabstandes im vorherigen Abschnitt basiert auf dem eindimensionalen Fall, weshalb weitere Überlegungen notwendig sind. Die Bestimmungsgleichung im CEB-FIP Model Code (1990) ist nur eine grobe Näherung und der Rißabstand wird damit erheblich unterschätzt. Die angegebene Gleichung dient hauptsächlich zur Rißbreitenermittlung mit einer Nachlaufberechnung.

Im folgenden wird die grundlegende Annahme getroffen, daß die hauptbeanspruchte Bewehrungslage (Hauptlage) den Rißabstand bestimmt. Die anderen Bewehrungslagen (Sekundärlagen) müssen sich diesem Rißabstand anpassen. Den Einfluß der Sekundärlagen beinhaltet dabei die Rißstahlspannung aus Gleichung (3.58). Für die vorab bestimmte Hauptlage wird zuerst, entsprechend dem im vorherigen Abschnitt vorgestellten Rechenablauf, die modifizierte Stahlkennlinie aufgebaut. Anschließend werden die dabei ermittelten Rißabstände in den charakteristischen Punkten in die jeweiligen Richtungen der Sekundärlagen transformiert.

Entstehen zwei Risse, so läßt sich die Rißstahlspannung wie beim eindimensionalen Fall berechnen. Die obige Annahme für den Rißabstand gilt jedoch nicht mehr, weil ein solcher Fall bei den in der vorliegenden Arbeit zu untersuchenden Tragwerken vorwiegend unter Temperaturbeanspruchung auftritt, und die Risse dabei senkrecht zur Bewehrungsrichtung entstehen. Daher wurde die Entwicklung des Rißabstandes vereinfacht wie beim eindimensionalen Fall angenommen.

Die ermittelten Rißbreiten entsprechen dem doppelten Schlupf in der Bewehrungsrichtung und werden daher in die Rißrichtung transformiert.

3.6 Achsentransformation der Werkstoffgesetze

Die bisher formulierten Werkstoffgesetze sind richtungsabhängig. Das Betonverhalten wurde in Hauptspannungsrichtungen beschrieben, während die Rißrichtung in Hauptdehnungsrichtung definiert wurde. Der Bewehrungsstahl unter Berücksichtigung des Tension-Stiffening-Effekts wurde in Bewehrungsrichtung formuliert. Im folgenden werden die Vorschriften für die Hauptachsentransformation der Komponenten $(\gamma_{\alpha\beta}, \tau^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta\rho\lambda})$ der mechanischen Variablen, Verzerrungs-, Spannungs- und Werkstofftensor mit dem Winkel α angegeben:

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^\rho}{\partial\bar{\theta}^\alpha} \frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{\theta}^\beta} \gamma_{\rho\lambda}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial\bar{\theta}^\rho}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial\bar{\theta}^\lambda}{\partial\theta^\beta} \bar{\gamma}_{\rho\lambda}, \quad (3.60)$$

$$\bar{\tau}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\bar{\theta}^\alpha}{\partial\theta^\rho} \frac{\partial\bar{\theta}^\beta}{\partial\theta^\lambda} \tau^{\rho\lambda}, \quad \tau^{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\bar{\theta}^\rho} \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\bar{\theta}^\lambda} \bar{\tau}^{\rho\lambda}, \quad (3.61)$$

$$\bar{C}^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{\partial\bar{\theta}^\alpha}{\partial\theta^\nu} \frac{\partial\bar{\theta}^\beta}{\partial\theta^\varepsilon} \frac{\partial\bar{\theta}^\rho}{\partial\theta^\sigma} \frac{\partial\bar{\theta}^\lambda}{\partial\theta^\delta} C^{\nu\varepsilon\sigma\delta}, \quad C^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\bar{\theta}^\nu} \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\bar{\theta}^\varepsilon} \frac{\partial\theta^\rho}{\partial\bar{\theta}^\sigma} \frac{\partial\theta^\lambda}{\partial\bar{\theta}^\delta} \bar{C}^{\nu\varepsilon\sigma\delta}. \quad (3.62)$$

Dabei bezeichnet der Kopfzeiger $(\bar{\cdot}\bar{\cdot})$ die Variablen in den Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungsrichtungen. Die Vorschriften der Koordinatentransformationen lauten mit der Determinante A und den Komponenten der Metriktensoren A_{ij} bzw. A^{ij}

$$\frac{\partial\theta^1}{\partial\bar{\theta}^1} = \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \left(\cos\alpha - \frac{A_{12}}{\sqrt{A}} \sin\alpha \right), \quad \frac{\partial\theta^2}{\partial\bar{\theta}^1} = \sqrt{A^{22}} \sin\alpha, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial\theta^1}{\partial\bar{\theta}^2} = -\frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \left(\sin\alpha + \frac{A_{12}}{\sqrt{A}} \cos\alpha \right), \quad \frac{\partial\theta^2}{\partial\bar{\theta}^2} = \sqrt{A^{22}} \cos\alpha \quad (3.64)$$

bzw.

$$\frac{\partial\bar{\theta}^1}{\partial\theta^1} = \sqrt{A_{11}} \cos\alpha, \quad \frac{\partial\bar{\theta}^1}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{A^{22}}} \left(\sin\alpha + \frac{A_{12}}{\sqrt{A}} \cos\alpha \right), \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}^2}{\partial\theta^1} = -\sqrt{A_{11}} \sin\alpha, \quad \frac{\partial\bar{\theta}^2}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{A^{22}}} \left(\cos\alpha - \frac{A_{12}}{\sqrt{A}} \sin\alpha \right). \quad (3.66)$$

Ermittelt wird der Winkel zwischen der Koordinatenachse θ^1 und der Richtung der Hauptspannung durch

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{A}\tau_1^2}{\tau_{11} - A\tau^{22}} \quad (3.67)$$

bzw. der Hauptdehnung durch

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{A}\gamma_1^2}{\gamma_{11} - A\gamma^{22}} \quad \text{mit} \quad A = |A_{\alpha\beta}|. \quad (3.68)$$

Auch für das orthogonale Bewehrungsnetz gelten die obigen Vorschriften. Dabei bezeichnet der Winkel α den Winkel zwischen den Bewehrungslagen und der konvektiven Koordinate θ^1 .

3.7 Konzept zur numerischen Umsetzung

Die vorgestellten Werkstoffmodelle müssen in einer Programmiersprache numerisch umgesetzt werden. Das komplexe zyklische Werkstoffverhalten durch den ständigen Wechsel der Belastungsrichtungen (Erstbelastung, Entlastung und Wiederbelastung) läßt sich programmtechnisch nicht einfach programmieren. Wiederholende Abfragen der Zustandsvariablen sind oft nicht vermeidbar, jedoch wird das Programm dadurch unübersichtlich und fehlerhaft. Darüberhinaus erschwert dies eine Erweiterung des Programmes.

In dieser Arbeit wurden daher die Werkstoffmodelle nach dem wissensbasierten Konzept Hanskötter (1994) mit der Anwendung der Graphentheorie eines Teilbereichs des Expertensystems realisiert. Dabei wird nach der vorhandenen Logik der Modellbeschreibung ein logischer Graph erstellt, in dem die Belastungs- und Entlastungsbereiche sowie Randbedingungen lückenlos und eindeutig definiert sind. Mit Hilfe der Suchalgorithmen wird der gültige Bereich nach dem logischen Graphen aufgefunden. Durch das Konzept wird das Programm übersichtlich, und eine Modifikation der Modellierung läßt sich sehr einfach vornehmen. Die Abbildung 3.14 stellt repräsentativ ein Beispiel des Graphen aus Hanskötter dar.

Graph des Werkstoffmodells

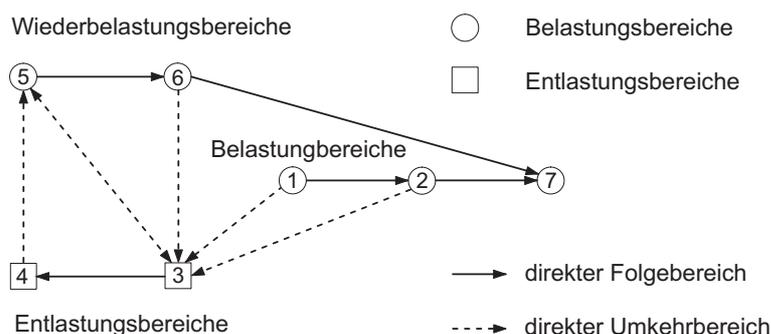


Abbildung 3.14: Graph des Werkstoffmodells [Hanskötter 1994]

3.8 Verifikation der Werkstoffmodellierung

Die bisher beschriebene numerische Modellierung des Werkstoffes Stahlbeton wird im folgenden verifiziert. Zu diesem Zweck werden verschiedene Versuche numerisch simuliert,

und deren Ergebnisse werden mit den experimentellen Meßwerten verglichen.

3.8.1 Tension-Stiffening-Modell

3.8.1.1 Versuche von Empelmann

Zur Beurteilung der Qualität des Tension-Stiffening-Modells im elastischen Bereich des Stahls wurden zwei zentrische Zugversuche von Empelmann (1995) nachgerechnet, welche die Rißbildung und Steifigkeitsentwicklung von zentrisch beanspruchten Stahlbetonzugkörpern untersuchen.

Der Versuchskörper Z4 mit einem quadratischen Querschnitt von $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ wurde jeweils in den Ecken mit einem Bewehrungsstab $\phi 8$ und mit einer Betonüberdeckung von 2 cm bewehrt. Somit beträgt der Bewehrungsgrad $\mu = 1.4\%$.

Die Kennwerte der verwendeten Materialien sind:

Beton:		Stahl:	
Würfeldruckfestigkeit	$f_{c,w} = 34.8\text{ N/mm}^2$	Streckgrenze	$f_y = 563.1\text{ N/mm}^2$
Biegezugfestigkeit	$f_{ct,b} = 4.15\text{ N/mm}^2$	Zugfestigkeit	$f_t = 599.5\text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul	$E_b = 31747\text{ N/mm}^2$	Elastizitätsmodul	$E_s = 195000\text{ N/mm}^2$

Bei der numerischen Analyse wurde die zentrische Betonzugfestigkeit nicht aus der angegebenen Biegezugfestigkeit abgeleitet, sondern aus der durch den Versuch bekannten Rißstahlspannung zurückgerechnet. Bei der Analyse wird die mittlere Betonzugfestigkeit $f_{ctm} = 2.00\text{ N/mm}^2$ mit einem Variationskoeffizient $\eta = 10\%$ angesetzt.

Die in Abbildung 3.15 dargestellte Spannungs- und Dehnungsbeziehung des Stahls sowie der mittlere Rißabstandsverlauf in Abhängigkeit der Stahlspannung zeigen gute Übereinstimmungen der numerischen Ergebnisse mit den experimentell gewonnenen Daten.

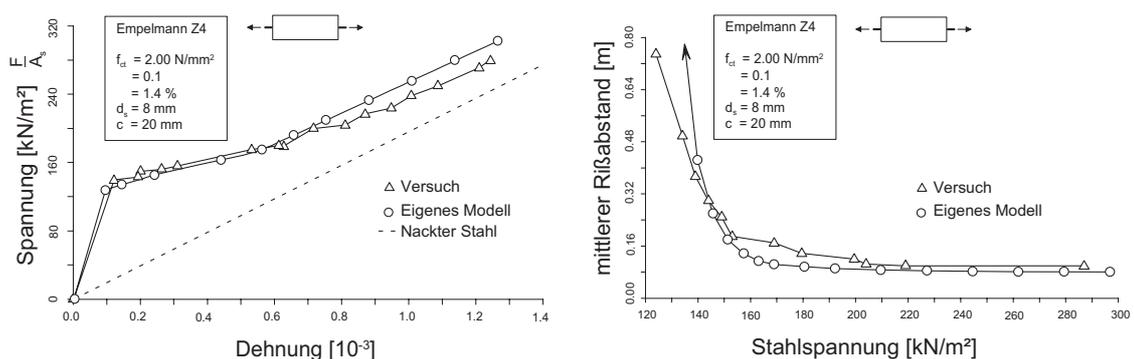


Abbildung 3.15: Simulation des Versuchs von Empelmann (1995), Z4

Der zweite Vergleich erfolgt mit dem Versuchskörper Z6, der einen doppelt so hohen Bewehrungsgrad von $\mu = 2.74\%$ aufweist. Dieser Versuchskörper weist einen quadratischen Querschnitt von $15\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ mit der Bewehrung zu $4\phi 14$ jeweils in den Ecken und

mit 2.5 cm Betonüberdeckung auf.

Die Eigenschaften des verwendeten Betons und des Stahls sind:

Beton:		Stahl:	
Würfeldruckfestigkeit	$f_w = 30.5 \text{ N/mm}^2$	Streckgrenze	$f_y = 591.7 \text{ N/mm}^2$
Biegezugfestigkeit	$f_{ct,b} = 3.90 \text{ N/mm}^2$	Zugfestigkeit	$f_z = 662.8 \text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul	$E_b = 29484 \text{ N/mm}^2$	Elastizitätsmodul	$E_s = 195300 \text{ N/mm}^2$

Die angenetzte mittlere zentrische Betonzugfestigkeit beträgt $f_{ctm} = 2.10 \text{ N/mm}^2$ mit einem Variationskoeffizient $\eta = 10 \%$.

Die Abbildung 3.16 zeigt die sehr gute Übereinstimmung von Simulation und Experiment.

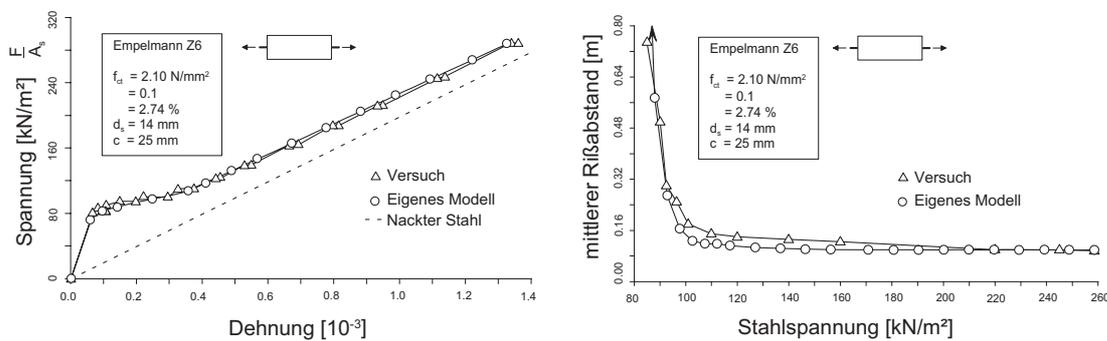


Abbildung 3.16: Simulation des Versuchs von Empelmann (1995), Z6

3.8.1.2 Versuch von Alvarez & Marti

Für die Verifikation des Tension-Stiffening-Modells im plastischen Bereich des Stahls wurden die Versuche von Alvarez & Marti (1996) nachgerechnet. Dabei werden mit unterschiedlich duktilem Stahl bewehrte Scheibenelemente zentrisch belastet. Im folgenden wird der Versuch Z3, eine Wandscheibe mit den Abmessungen von $L/H/D = 3.0/1.0/0.22 \text{ m}$, simuliert. Die Scheibe ist mit hoch duktiler Bewehrung mit einer Bruchdehnung von $\varepsilon_b = 13 \%$ bewehrt. Der Gesamtquerschnitt der Bewehrung mit Durchmesser $\phi 14$ beträgt 21.56 cm^2 ($\mu = 0.98 \%$), wobei die Betondeckung 3.8 cm aufweist.

Da die Betonzugfestigkeit, der Elastizitätsmodul des Betons bzw. Stahls von Alvarez & Marti nicht angegeben wurden, werden sie aus den Versuchsergebnissen abgeleitet. Die Variation der Betonzugfestigkeit wird mit 10 % angenommen. Die Materialparameter sind:

Beton:		Stahl:	
Würfeldruckfestigkeit	$f_w = 50.0 \text{ N/mm}^2$	Streckgrenze	$f_y = 475.0 \text{ N/mm}^2$
Zentrische Zugfestigkeit	$f_{ct,b} = 2.10 \text{ N/mm}^2$	Zugfestigkeit	$f_t = 600.0 \text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul	$E_b = 34000 \text{ N/mm}^2$	Elastizitätsmodul	$E_s = 198000 \text{ N/mm}^2$

Abweichend zu dem im Abschnitt 3.5.3 dargestellten modifizierten Stahlmodell wird das Modell für diese Simulation im plastischen Bereich durch die zusätzliche Einfügung von zwei charakteristischen Berechnungspunkten ($1.01f_y$, $(f_y + f_t)/2$) feiner abgebildet. In Abbildung 3.17 sind die Ergebnisse der numerischen Simulation mit den experimentellen Ergebnissen vergleichend dargestellt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

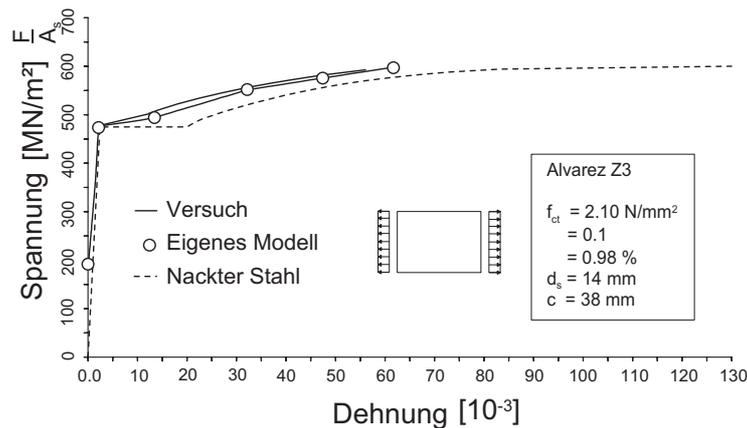


Abbildung 3.17: Simulation des Versuchs von Alvarez & Marti (1996), Z3

3.8.1.3 Versuche von Günther

Für die Untersuchung des Verbundverhaltens unter monotoner, schwellender sowie lang andauernder Belastung führte Günther (1989) zahlreiche Versuche durch. Einer der Zugversuche unter exzentrischer Belastung (E03), der eine Belastungskombination von Zug- und Biegebeanspruchung darstellt, wird im folgenden nachgerechnet. Hierbei wird ein Versuchskörper durch eine exzentrisch wirkende Zugkraft belastet.

Die in Günther angegebenen Daten für den Versuchskörper sind:

Beton:		Stahl:	
Würfeldruckfestigkeit	$f_{c,w} = 28.5 \text{ N/mm}^2$	Streckgrenze	$f_y = 420.0 \text{ N/mm}^2$
Querschnitt (H/B)	$13d_s/7d_s$	Querschnitt	$1\phi 22$
Überdeckung	$3d_s$	Exzentrizität	$3d_s$

Die Spannungs-Dehnungskurve in Abbildung 3.18(a) wurde mit einer mittleren Zugfestigkeit des Betons von 2.20 N/mm^2 berechnet, deren Variationskoeffizient η mit 20 % angenommen wurde. Der gemessene mittlere Rißabstand aus 4 Versuchsproben unter Gebrauchslastniveau, etwa bei einer Stahlspannung von 280 N/mm^2 , beträgt 285 mm , während der aus der Simulation 222 mm aufweist.

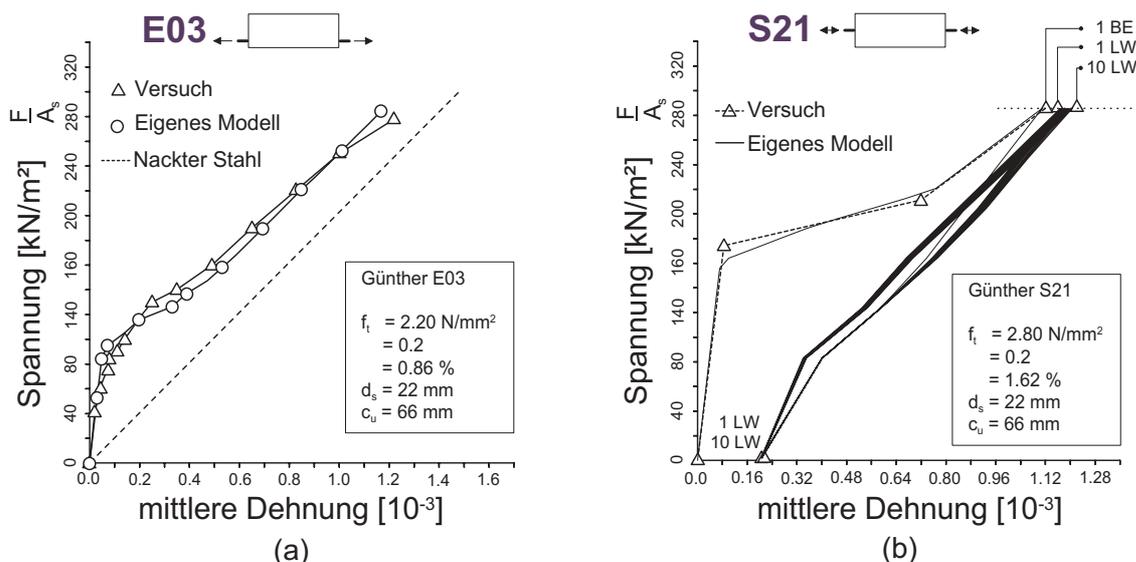


Abbildung 3.18: Simulation des Versuchs von Günther (1989), E03 und S21

Der zentrische Zugversuch (S21) unter schwellender Beanspruchung von Günther wurde für die Verifikation der zyklischen Verbundformulierung herangezogen. Neben den angegebenen Materialparametern variiert die mittlere Betonzugfestigkeit von 2.80 N/mm^2 um 20 %.

Beton:

Würfeldruckfestigkeit $f_{c,w} = 28.3 \text{ N/mm}^2$

Querschnitt (H/B) $7 d_s / 7 d_s$

Überdeckung $3d_s$

Stahl:

Streckgrenze $f_y = 420.0 \text{ N/mm}^2$

Querschnitt: $1\phi 22$

Abbildung 3.18(b) stellt die Meßwerte aus dem Experiment den numerischen Ergebnissen vergleichend gegenüber. Die zyklischen Be- und Entlastungskurven des Experimentes sind aus Übersichtlichkeitsgründen nicht dargestellt. Dargestellt sind lediglich die Umkehrpunkte nach den 1. und 10. Lastwechseln. Als mittlerer Rißabstand aus 27 Versuchsproben wurden 290 mm gemessen. Die numerische Berechnung ergibt einen mittleren Rißabstand von 264 mm .

Es ist zu bemerken, daß die sog. verbleibende Dehnung von etwa 0.2 % nach vollständiger Entlastung hauptsächlich auf die Formulierung des Rißschließungsprozesses im Betonmodell zurückzuführen ist.

3.8.1.4 Versuche von Peter

Die bisherige Überprüfung der Modellqualität erfolgte in einer Dimension, womit das reine Tension-Stiffening-Modell überprüft wurde. Bei der zweidimensionalen Analyse ist dagegen die Beurteilung der Qualität des formulierten TS-Modells nicht mehr möglich, da neben dem TS-Effekt die Schubverformung in der Scheibenebene durch die Drehung der Hauptdehnungsrichtung eine wichtige Rolle spielt.

Im folgenden werden die Versuche der Zugscheiben von Peter (1964) untersucht, wobei die Scheibe schiefwinklig mit einem Winkel α zur Bewehrungsrichtung belastet wird. Als Versuchskörper wurden quadratische Stahlbeton-Scheiben mit den Abmessungen von $1.60\text{ m} \times 1.60\text{ m}$ gewählt. Die Auswertung wurde für den mittleren Plattenbereich von $1.00\text{ m} \times 1.00\text{ m}$ vorgenommen, um den Randstörungseinfluß auszuschließen. Die Scheiben wurden mit orthogonalen isotropen Netzbewehrungen verstärkt, bei denen der Winkel zwischen Belastungs- und Bewehrungsrichtung variiert.

Im folgenden werden die Versuche für die Winkel $\alpha = 20^\circ$ (s2r20) und $\alpha = 30^\circ$ (s2r30) numerisch simuliert. Die Daten der verwendeten Materialien sind unten angegeben. Dabei weist der kaltverformte Stahl eine Bruchdehnung von 13 % auf.

Beton:		Stahl:	
Würfeldruckfestigkeit	$f_{c,w} = 34.8\text{ N/mm}^2$	Streckgrenze	$f_y = 415\text{ N/mm}^2$
Biegezugfestigkeit	$f_{ct,b} = 4.15\text{ N/mm}^2$	Zugfestigkeit	$f_t = 599.5\text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul	$E_b = 31747\text{ N/mm}^2$	Elastizitätsmodul	$E_s = 195000\text{ N/mm}^2$
Querschnitt(B/D/H)	1.00/1.00/0.08 m	Querschnitt	$\phi 8, e = 0.1\text{ m}$

Wie bei den bisherigen Nachrechnungen wurde die zentrische Betonzugfestigkeit aus den experimentellen Ergebnissen abgeleitet. Die angesetzte Betonzugfestigkeit beträgt 1.75 N/mm^2 und besitzt einen Variationskoeffizienten von 10 %.

Die Last-Stahldehnungskurven aus den Experimenten und den numerischen Analysen für die betrachteten Fälle ($\alpha = 20^\circ/30^\circ$) sind in Abbildung 3.19 und 3.20 dargestellt. Ausgewertet sind in Peter die Last-Stahldehnungsbeziehungen von drei Stahlstäben an jeweils 3 Meßstellen. Somit ergeben sich für jedes Lastniveau insgesamt 9 Meßwerte. Zur übersichtlichen Darstellung sind die experimentellen Ergebnisse durch zwei Bereichen - Mittelwert- und Grenzwertbereich - abgebildet. Der erste stellt die gemittelten Meßwerte an jedem Stahlstab unter der jeweiligen Laststufe dar, während der maximale und minimale Meßwert den Grenzbereich abbildet. In den beiden Abbildungen sind die Kurven aus den Simulationen lediglich unterhalb den gemessenen Versagenslasten dargestellt, obwohl die numerisch gewonnenen Kurven mit der ausgeprägten Plastizierung des Stahls weiter ausgedehnt sind.

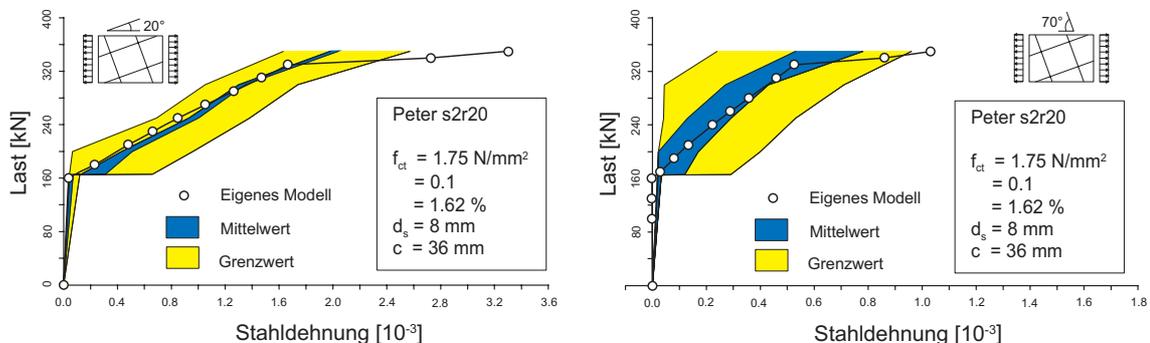


Abbildung 3.19: Simulation des Versuches s2r20 ($\alpha = 20^\circ/70^\circ$) [Peter 1964]

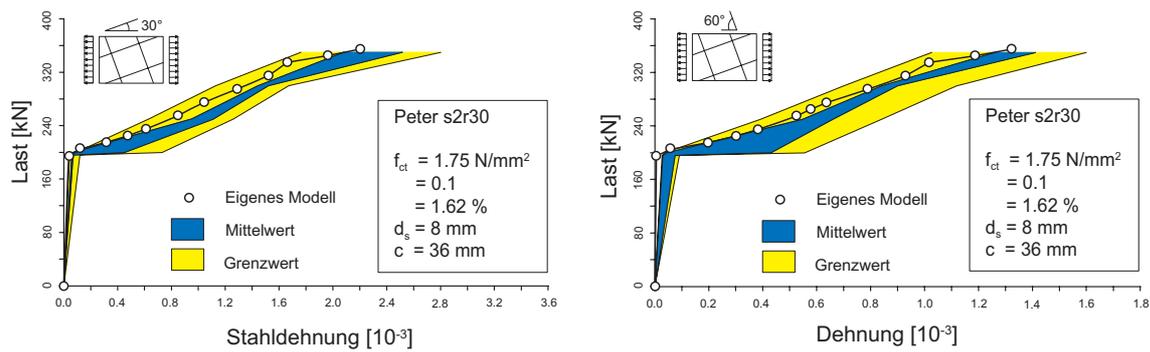


Abbildung 3.20: Simulation des Versuchs, s2r30 ($\alpha = 30^\circ/60^\circ$) [Peter 1964]

3.8.2 Stahlbetonmodell

Im folgenden werden drei experimentelle Versuche numerisch simuliert. Die Ergebnisse werden mit denen von anderen Autoren und dem Experiment verglichen. Dabei wird die in der Literatur angegebene Betonzugfestigkeit einheitlich als 5 %- Fraktilwert bei einer Variation von 10 % angesetzt. Wegen der fehlenden plastischen Eigenschaften des Bewehrungsstahls werden die Materialparameter für den plastischen Bereich sinngemäß übertragen.

3.8.2.1 Einfeldträger unter Einzellast

Bresler & Scordelis (1963) führten eine Versuchsreihe an Stahlbetonbalken durch. Aus dieser Versuchsreihe wurde der Biegebalken B3 ausgewählt. Wegen des relativ hohen Bewehrungsgrades von 5.2 % im gezogenen halben Querschnitt, ist in dem Versuch das einachsiale Betonverhalten im Vergleich zum Tension-Stiffening-Effekt maßgebend.

In Abbildung 3.21(a) sind die Abmessungen und Materialdaten angegeben, wobei in der numerischen Analyse das plastische Verhalten des Stahls mit einer 1/1000-fachen tangentialen Anfangssteifigkeit und mit einer Bruchdehnung von 5 % abgebildet wurde.

Abbildung 3.21(b) zeigt die Verformungskurven in Abhängigkeit von der Versagenslast $P_u = 79.5 \text{ Kips}$. Die Versagenslast der numerischen Analyse liegt etwa um 18 % höher als die des Experimentes. Das System wurde durch Ausnutzung der Symmetrie mit 9 Elementen über die Balkenlänge und 8 Schichten über die Querschnittshöhe diskretisiert. Die Nachrechnung von Lin (1973) mit elasto-plastischem Betonmodell wurde als Vergleichskurve gewählt. Die in der Abbildung nicht eingetragenen Rechenergebnisse von Zahlten (1990) mit einem Betonmodell nach plastischer Bruchtheorie sind quasi identisch mit denen des eigenen Modells.

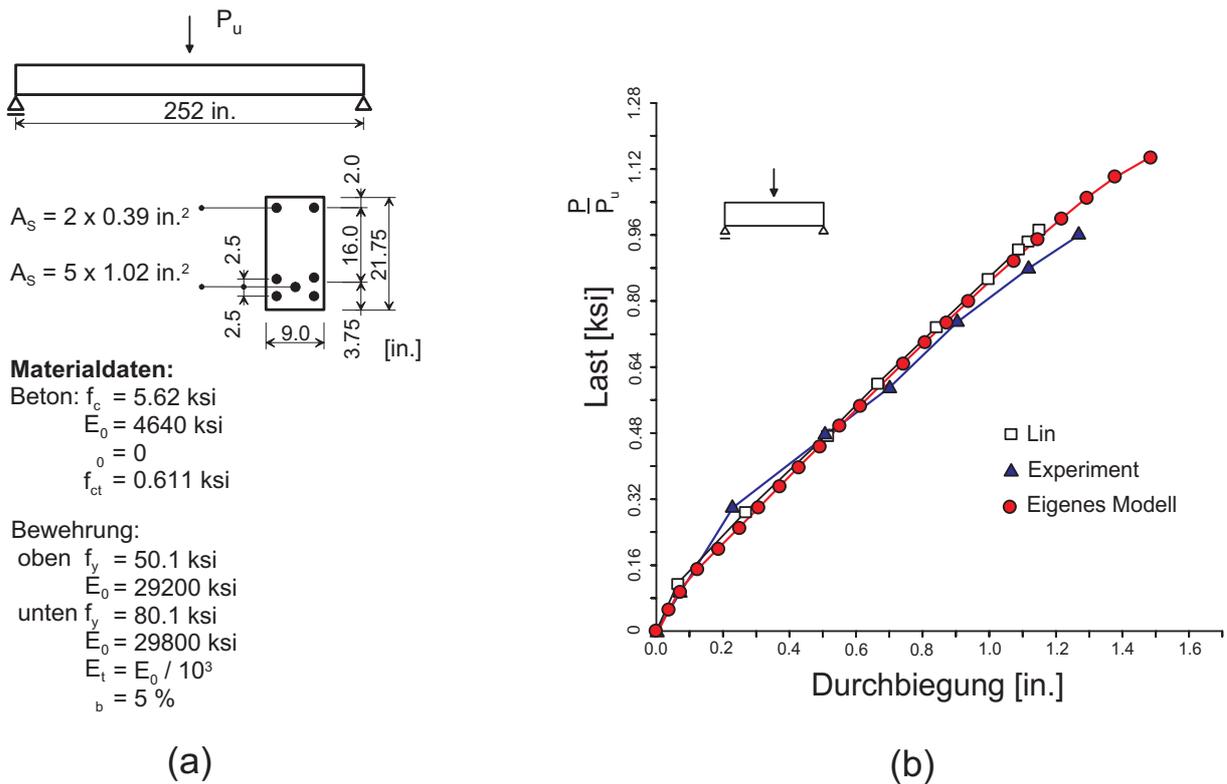


Abbildung 3.21: Simulation des Versuchs von Bresler & Scordelis (1963)

3.8.2.2 Punktweise gelagerte Platte unter Einzellast

Für die Verifikation der Modellierung des zweiachsialen Stahlbetonverhaltens wird eine quadratische Platte simuliert, die von McNeice (1967) experimentell untersucht wurde. Die Platte ist an allen vier Ecken punktuell gestützt und in Mitte der Platte durch eine Einzellast belastet. Die Stahlbewehrung in zwei Richtungen liegt parallel zu den Plattenrändern im Versuchskörper. Die Geometrie- und Materialdaten sind in Abbildung 3.22 angegeben. Bei der Simulation wurde ein Viertel der Platte mit einem Elementnetz von 6×6 Elementen mit 8 Schichten über die Querschnittshöhe berechnet.

Der Vergleich der numerischen Analyse mit den Last-Verformungskurven der Autoren Jofriet & McNeice (1971), Lin & Scordelis (1975), Gilbert & Warner (1978) und Zahlten (1990) und den Versuchsergebnissen ist in Abbildung 3.23 dargestellt. Neben der Durchbiegung an der Meßstelle sind auch die Rißbilder an der Unterseite der Platte für einige Lastintensitäten dargestellt. Der Vergleich der Ergebnisse zeigt die Leistungsfähigkeit des formulierten Werkstoffgesetzes.

3.8.2.3 Navier-gelagerte Platte unter Flächenlast

Als letztes Beispiel wird zur Verifikation des Materialmodells eine vierseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte unter einer Flächenlast untersucht. Die Platte, die Taylor,

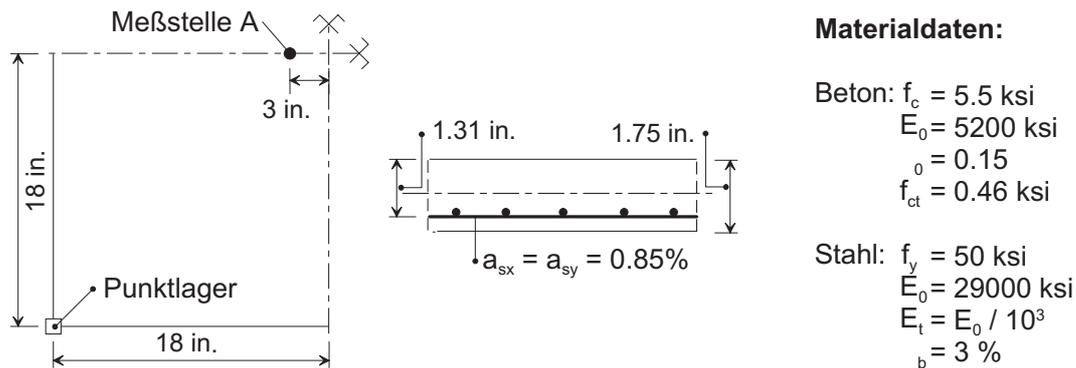


Abbildung 3.22: Versuch von McNeice (1967)

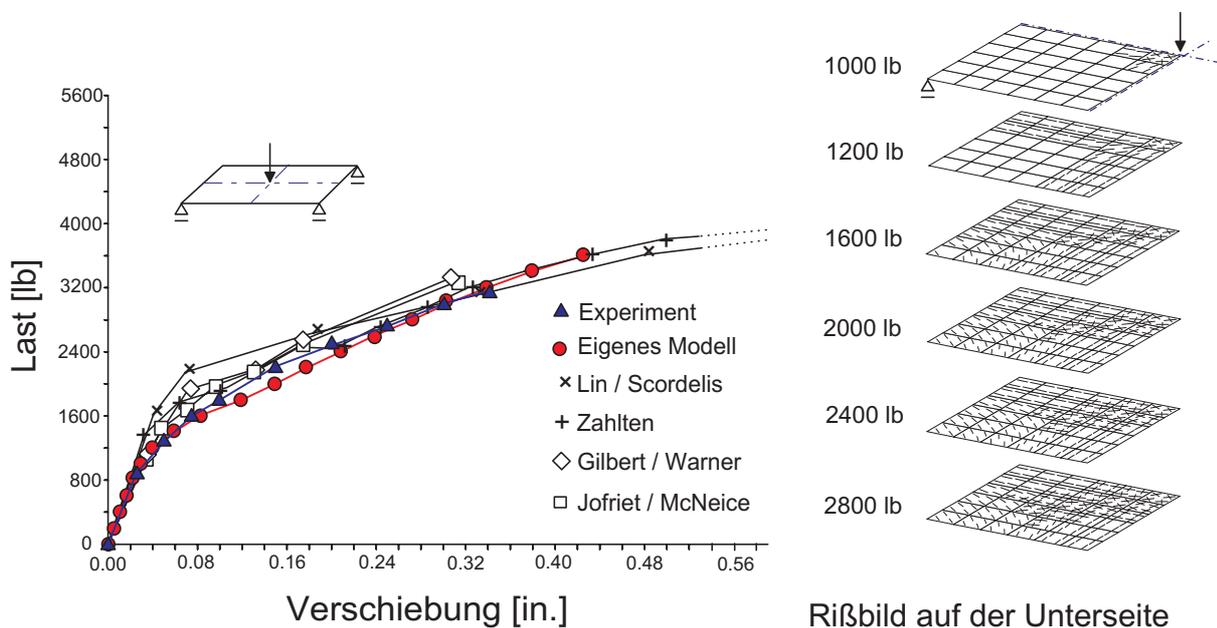


Abbildung 3.23: Simulation des Versuchs von McNeice (1967)

Maher & Hayes (1966) experimentell untersucht und von weiteren Autoren numerisch analysiert wurde, ist charakterisiert durch eine ausgeprägte Nichtlinearität der Geometrie. Die Geometrie und Materialparameter sind in Abbildung 3.24 dargestellt. Ein Viertel der Platte wurde durch ein Elementnetz von 6×6 Elementen mit einer Unterteilung des Querschnitts in 8 Schichten idealisiert.

Die in Abbildung 3.25 dargestellten Berechnungsergebnisse - Durchbiegung in Plattenmitte - wurden mit denen von van Greunen (1979), Arnesen (1979) und Zahlten (1990) verglichen. Aus dem Vergleich läßt sich eine gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit dem vorliegenden Werkstoffmodell mit den experimentellen Meßwerten erkennen. Die Rißbilder an der Ober- und Unterseite der Platte unter der Lastintensität von 4.7 psi stellen annähernd die Rißbilder dar, die sich beim Experiment ergeben. Bei der

Darstellung in Abbildung 3.25 lässt sich die Rißbreite lediglich an der Unterseite explizit ermitteln, da für die Berechnung der Rißbreite mit dem vorliegenden Werkstoffmodell das Vorhandensein der Bewehrungslage an der jeweiligen Leibung Voraussetzung ist.

Die durchgeführte Analyse bestätigt noch einmal die Leistungsfähigkeit des in der Arbeit entwickelten Stahlbetonmodells.

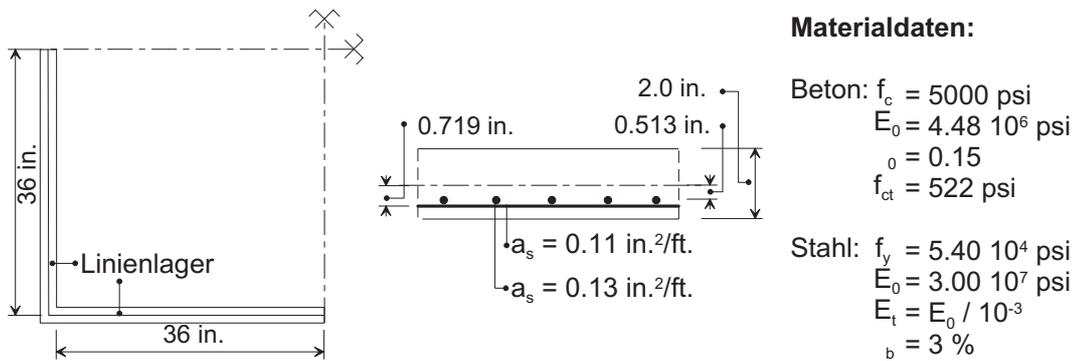


Abbildung 3.24: Versuch von Taylor, Maher & Hayes (1966)

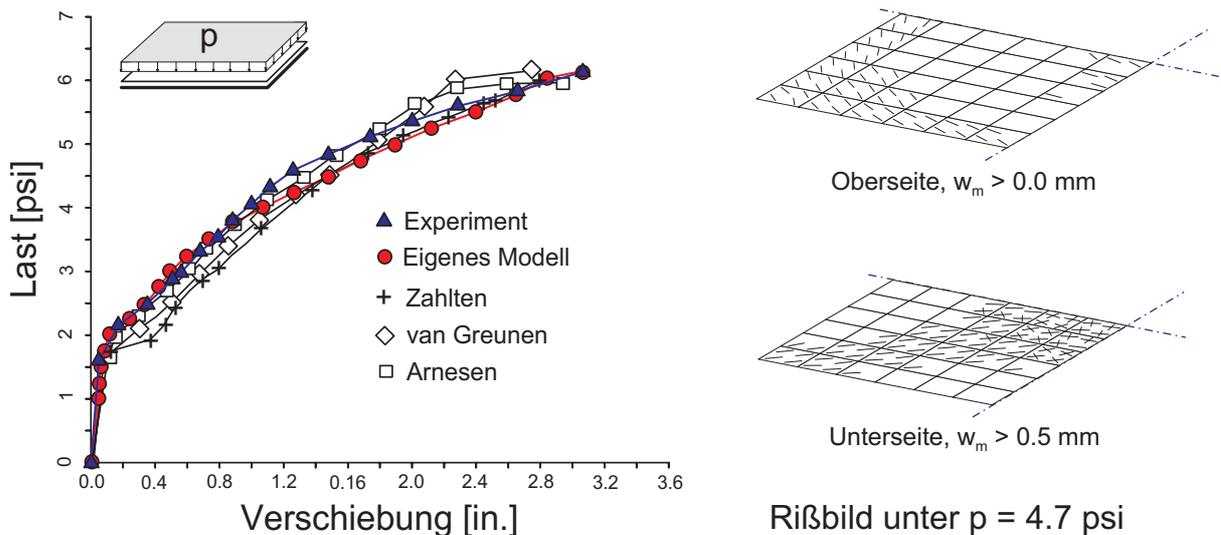


Abbildung 3.25: Simulation des Versuchs von Taylor, Maher & Hayes (1966)

Kapitel 4

Statische Analyse zweier Naturzugkühltürme

4.1 Einwirkungen

Die zur Analyse herangezogenen Einwirkungskombinationen stellen eine realitätsnahe Idealisierung der auftretenden Belastungen für einen Kühlturm unter Zugrundelegung der derzeit gültigen Richtlinie für den Entwurf und die Konstruktion von Naturzugkühltürmen in Deutschland VGB (1997) dar.

4.1.1 Eigenlast

Das Eigengewicht G des Stahlbetons ist gemäß DIN 1055 (1978), Teil 1, mit $\gamma = 25.0 \text{ kN/m}^3$ anzunehmen. Um den Einfluß der angeordneten Windrippen zu erfassen, wird die Eigenlast der Kühlturmschale auf $\gamma = 25.2 \text{ kN/m}^3$ erhöht.

4.1.2 Windlast

Die anzusetzende Winddruckverteilung für die unterschiedlichen Windlastzonen ergeben sich für den Außendruck zu

$$w_a(z, \theta) = c_{pa}(\theta) \cdot \varphi \cdot F_l \cdot q_b(z). \quad (4.1)$$

Die standortabhängige Höhenverteilung des Böenstaudruckes $q_b(z)$ erfolgt entsprechend der Windlastzone. Die Umfangsverteilung der Druckbeiwerte $c_{pa}(\theta)$ ist von der Oberflächenrauigkeit der Stahlbetonschale, d.h. von der konstruktiven Ausbildung der Windrippen abhängig. Der dynamische Überhöhungsfaktor φ berücksichtigt die Grundbeanspruchung und den resonanten Teil der Bauwerksantwort als quasi-statische Last und wird in Abhängigkeit von der kleinsten Eigenfrequenz $\min f$ und von der Geometrie der Schale ermittelt. Der Interferenzfaktor F_l berücksichtigt eine zu erwartende Beanspruchungserhöhung infolge von weiteren Kühltürmen oder hohen Kraftwerksgebäuden in der engeren Nachbarschaft zum betrachteten Kühlturm.

4.1.3 Temperatur

Für den Betriebszustand eines Naßkühlturmes sind, soweit keine ungünstigeren Werte gefordert sind, folgende Temperaturverteilungskennwerte anzusetzen:

- Außentemperatur $-15^\circ C$
- Innentemperatur $+30^\circ C$
- Wärmeübergangszahlen $\alpha_i = \alpha_a = 20.0 W/m^2K$
- Wärmeleitzahlen $\lambda = 2.1 W/mK$ für Normalbeton nach DIN 4108 (1991)

Die anzusetzende Temperaturverteilung entspricht der Lufttemperaturdifferenz im winterlichen Betriebszustand $\Delta T_2 = 45 K$ (Extremfall). Der zwischen Außen- und Innenfläche der Schale vorhandene Temperaturunterschied wird durch

$$\Delta T_w = \frac{\frac{d}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}} \cdot \Delta T \quad (4.2)$$

ermittelt, wobei d die jeweilige Schalendicke bezeichnet.

Die weiterhin anzusetzenden Temperaturdifferenzen im Betriebszustand $\Delta T_1 = 25 K$ (Normalbetrieb) und infolge einseitiger Sonneneinstrahlung $\Delta T_3 = 25 K$ (außen wärmer) bleiben im Rahmen dieser Arbeit unberücksichtigt, da die aus dem winterlichen Betriebszustand entstehenden Spannungen zu ungünstigeren Schnittgrößen führen.

4.1.4 Hygrisches Quellen

Im folgenden wurde ein neuer Lastfall “Hygrisches Quellen” definiert, der derzeit normenmäßig nicht berücksichtigt ist.

Beim hygrischen Quellen handelt es sich um eine typische Vorschädigung von Kühltürmen. Durch die ständige Befeuchtung der Innenflächen quillt der Beton, sofern er unbeschichtet ist. Durch die Beaufschlagung mit Dampfschwaden des zu kühlenden Wassers kann man auf der Innenseite von einer 100-prozentigen Wassersättigung ausgehen. Die Umgebungsbedingung an der Außenseite der Schale entspricht nach DIN 4227 (1988) dem Zustand zwischen “allgemein im Freien” und “in sehr feuchter Luft”. Danach läßt sich die mittlere relative Luftfeuchtigkeit zwischen 70 % und 90 % ansetzen.

Hygrische Effekte verursachen Vorverzerrungen, ähnlich wie bei thermischen Einwirkungen. Daher läßt sich das hygrische Quellen vereinfachend durch eine äquivalente Temperaturdifferenz erfassen. Unter der Annahme, daß ein Quellen des Betons auf der Innenseite sich mit einem Schwinden auf der Außenseite überlagert und ein Kriechen

des Betons unberücksichtigt bleibt, läßt sich der Vorgang des hygrischen Quellens in Anlehnung an DIN 4227 (1988) wie folgt beschreiben.

Das Grundswindmaß für Normalbeton beträgt

$$\epsilon_{s0} = +10 \cdot 10^{-5} \quad \text{für Bauteile im Wasser und} \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{s0} = -13 \cdot 10^{-5} \quad \text{für Bauteile in feuchter Luft.} \quad (4.4)$$

Das Quell- bzw. Schwindmaß berechnet sich zu

$$\epsilon_{s,t} = \epsilon_{s0}(k_{s,t} - k_{s,t_0}). \quad (4.5)$$

Mit einer wirksamen Körperdicke von weit über 160 *cm* (DIN 4227 (1988), Gl. 6) erhält man für ein wirksames Betonalter von ca. 30 Jahren – dies entspricht etwa der Hälfte der Nutzungsdauer eines Naturzugkühlturmes – die beiden Beiwerte zu

$$k_{s,t=30a} = 0.65, \quad (4.6)$$

$$k_{s,t_0} = 0.0. \quad (4.7)$$

Damit erhält man das Quellmaß bzw. das Schwindmaß zu

$$\epsilon_{s,30} = 10 \cdot 10^{-5} \cdot (0.65 - 0.0) = 6.5 \cdot 10^{-5}, \quad (4.8)$$

$$\epsilon_{s,30} = -13 \cdot 10^{-5} \cdot (0.65 - 0.0) = -8.45 \cdot 10^{-5}. \quad (4.9)$$

Der Dehnungsunterschied zwischen Innenseite (Quellmaß) und Außenseite (Schwindmaß) berechnet sich zu

$$\Delta\epsilon_{s,30} = 6.5 \cdot 10^{-5} - (-8.45 \cdot 10^{-5}) \cong 15 \cdot 10^{-5}. \quad (4.10)$$

Unter der Annahme einer linearen Dehnungsverteilung zwischen Innen- und Außenseite läßt sich diese Dehnungsverteilung durch eine äquivalente Temperaturdifferenz erfassen. Mit einer Temperaturdehnzahl von $\alpha_T = 10 \cdot 10^{-6}/K$ erhält man somit eine äquivalente Temperaturdifferenz von

$$\Delta T = \frac{\Delta\epsilon_{s,30}}{\alpha_T} = \frac{15 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ K}. \quad (4.11)$$

4.2 Statische Analyse

In den folgenden Abschnitten wurden im Rahmen einer statischen Analyse mit Berücksichtigung der geometrischen und stofflichen Nichtlinearität zwei real existierende, große Naturzugkühltürme analysiert.

Beim ersten Turm (Turm A) handelt es sich um einen 25 Jahre alten Kühlturm mit einem ausgeprägten Ribbild. Durch den Vergleich des realen Schädigungszustandes mit demjenigen aus der numerischen Schädigungssimulation wird das angesetzte Konzept der Analyse verifiziert. Die dabei beobachteten Schädigungsprozesse unter den unten aufgeführten Lastfällen werden ausführlich diskutiert. Basierend auf den durch diese Simulation gewonnenen Erkenntnissen wird der zweite Turm (Turm B) analysiert, der

vor kurzem fertiggestellt wurde. Diese Simulation dient zur Vervollständigung und Bestätigung der bei der ersten Simulation gewonnenen Erkenntnisse sowie der Vorhersage des zu erwartenden Schädigungszustandes im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit und eine Abschätzung der Tragreserven des nach VGB (1997) bemessenen Kühlturmes.

Ausgehend von den bereits definierten Einwirkungen (Abschnitt 4.1) werden die folgenden Lastfallkombinationen bei der Analyse zugrundegelegt:

- $G + \lambda W$ gibt den Beanspruchungszustand für einen sich außer Betrieb befindlichen Kühlturm unter monoton steigender Windlast wieder.
- $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ repräsentiert die Beanspruchung im winterlichen Betriebszustand, ebenfalls unter monoton steigender Windlast.
- $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$ berücksichtigt zusätzlich eine hygrische Beanspruchung der Kühlturmschale (vgl. Abs. 4.1.4).
- $G + \Delta T + W_{zyk}$ stellt ein Lastkollektiv dar, um eine Aussage zur Schädigungsentwicklung über die Lebensdauer beider Kühltürme treffen zu können. Eine Simulation, die der Realität mit einer Vielzahl kleiner Windbeanspruchungen nahekommt, ist aufgrund des hohen numerischen und zeitlichen Aufwands sicherlich nicht wirtschaftlich zu realisieren.

Nachdem die Vorschädigungen aus der Belastung mit der Kombination $G + \Delta T + \Delta T_{hygr} + 1.0 W$ eingetreten sind, wird die Temperaturbeanspruchung des winterlichen Betriebszustandes ΔT_{45K} auf die Temperaturbeanspruchung des Normalbetriebes ΔT_{25K} gesenkt. Anschließend wird die Windbelastung mit $1.0 W$, die der Beanspruchung durch einen 50-jährigen Sturm entspricht, heruntergefahren. Nach weiteren zwei Belastungszyklen mit $1.0 W$ wird der Turm mit monoton steigender Windlast bis zum Versagen beansprucht. Mit dem beschriebenen Belastungsszenario soll versucht werden, die in der Realität häufig vorkommenden Windbeanspruchungen kleinerer Intensität mit wenigen Belastungszyklen global zu erfassen und sie mit den mit hoher Wahrscheinlichkeit eingetretenen Temperatur- und Windbeanspruchungen sowie den ständigen Lasten zu superponieren.

Bei der jeweiligen Analyse wird das Verformungsverhalten in ausgewählten lokalen Punkten beobachtet. Beispielsweise repräsentieren die in Abbildung 4.1 dargestellten 6 Punkte das lokale Verhalten des Turms: In Meridianrichtung werden bei einem festen Winkel $\theta = 0^\circ$ der untere Drittelbereich (A), Taillenbereich (B) und der Bereich des oberen Randgliedes (C) untersucht, während in Umfangsrichtung etwa für $\theta = 30^\circ$ (D), $\theta = 60^\circ$ (E) und $\theta = 90^\circ$ (F) das Verhalten unmittelbar unterhalb des oberen Randgliedes untersucht wird. Für die gesamte Schädigungsentwicklung stehen die Ribbilder in Abhängigkeit von den oben genannten jeweiligen Lastfallkombinationen zur Verfügung.

An dieser Stelle sei noch zu erwähnen, daß das angewandte Finite Element für die Stahlbetonstützen nach der schubsteifen Stabtheorie großer Verschiebungen, jedoch kleiner

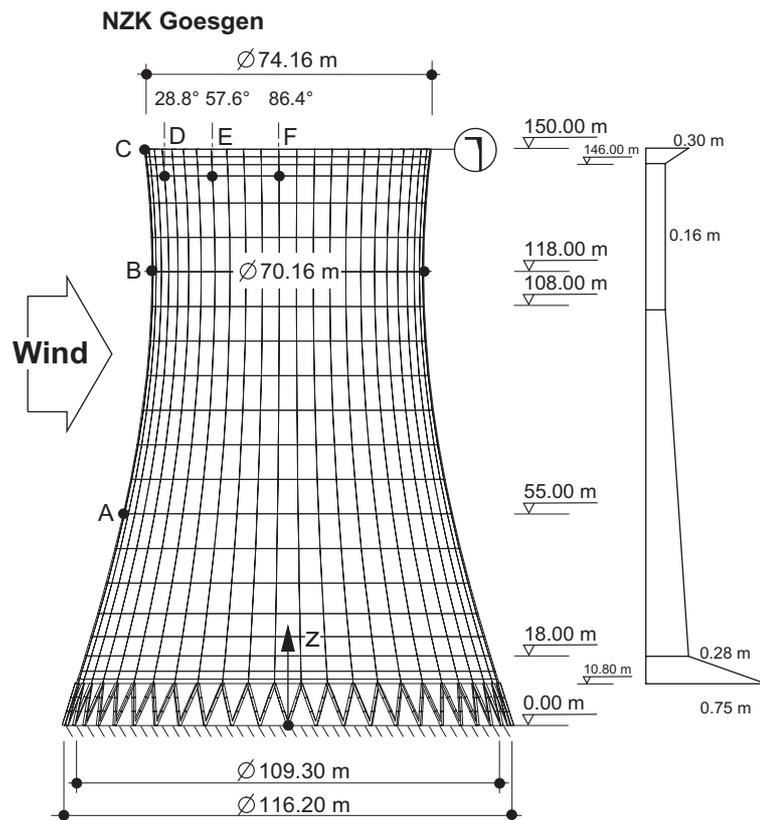


Abbildung 4.1: Schalen­geometrie und Wand­dicken­verlauf des Kühl­turmes A

Rotationen formuliert ist ([Chen 2001]). Die physikalische Nichtlinearität wurde durch ein Faserm­modell realisiert, wobei der Werkstoff in der gleichen Vorgehensweise wie beim Schalenelement formuliert wurde.

4.2.1 Turm A

4.2.1.1 Geometrie- und Materialdaten

Beim Kühl­turm A handelt es sich um den 1976 fertig­gestell­ten Naturzug­kühl­turm des Kernkraftwerkes GÖSGEN-DÄNIGEN in der Schweiz. Die Hauptabmessungen und der Wand­dicken­verlauf des Kühl­turmes A sind aus Abbildung 4.1 ersicht­lich. Diese sowie weitere Daten wurden Furrer & Mischol (1977) sowie einem Datenblatt des Bauunternehmens Heitkamp entnommen. Nicht bekannte Parameter wurden aus den gegebenen Angaben berechnet oder sinnvoll abgeschätzt.

Die Stahlbetonschale besteht aus einem rotationssymmetrischen Hyperboloid, dessen Mittel­fläche durch die allgemeine Hyperbelgleichung

$$r(z) = r_0 + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (H_T - z)^2} \quad (4.12)$$

beschrieben wird. Das Hyperboloid ist durch folgende Parameter festgelegt:

- $r_0 = -23.6939 \text{ m}$,
- $a = 58.7739 \text{ m}$,
- $b = 121.6289 \text{ m}$,
- $H_T = 118.000 \text{ m}$.

Der untere Ringträger der Schale ist durch eine Verdickung des unteren Schalenrandes auf 0.75 m realisiert. Der obere Ringträger wird durch eine innenliegende 0.30 m dicke und 1.29 m breite Kreisringplatte ausgebildet.

Das Stützenfachwerk des Kühlturmes besteht aus 50 über den Umfang verteilten V-Stützenpaaren. Die Stützenpaare sind mit einer Neigung von 17.84° zur Vertikalen ausgeführt. Dieses entspricht der Neigung am unteren Schalenrand. Die Stützenabmessung wurde mit der konstanten Breite von 0.90 m ausgeführt, und die Schalendicke von 0.75 m am unteren Rand entspricht der Dicke der Stützen.

Die Stützen leiten ihre Lasten über 50 Einzelfundamente in den Baugrund ein, je zwei Stützen teilen sich ein Fundament. Die Fundamentabmessungen ergaben sich aus einer linear elastischen Berechnung mit der angegebenen Sohlpressung von $\sigma_{bo} = 0.45 \text{ MN/m}^2$ im Gebrauchszustand zu $B/D/H = 4.00 \text{ m}/5.00 \text{ m}/1.50 \text{ m}$. Die Einzelfundamente wurden mit dem angenommenen Bettungsmodul des Baugrundes von $k = 12.0 \text{ MN/m}^3$ durch Dehn- und Drehfedern idealisiert.

Der Untergrund am Standort des Kühlturmes ist durch sandig-kiesige Talböden charakterisiert, die in einer Mächtigkeit von ca. 30 m ein bestehendes Grundgebirge überlagern. Der Bettungsmodul des Baugrundes läßt sich näherungsweise aus Tabellenwerken zu $k = 12.0 \text{ MN/m}^3$ ermitteln.

Die Kennwerte der für die Kühlturmteile verwendeten Betone können Tabelle 4.1 entnommen werden. Die mittlere Betonzugfestigkeit für die Schale wurde mit $f_{ct} = 2.675 \text{ MN/m}^2$ und für die Stützen mit $f_{ct} = 2.924 \text{ MN/m}^2$ nach [DIN 1045] angesetzt. Für die Berechnung des TS-Effektes wurde der Variationskoeffizient der Streuung der Betonzugfestigkeit zu $\eta = 10\%$ angenommen.

Bauteil	Beton	β_{w28} [MN/m^2]	E-Modul [MN/m^2]
Fundamente	BH 300	25.0	30000
Stützen	BH 450	40.0	35500
Schale	BH 300	25.0	30000

Tabelle 4.1: Verwendete Betone des Kühlturmes A

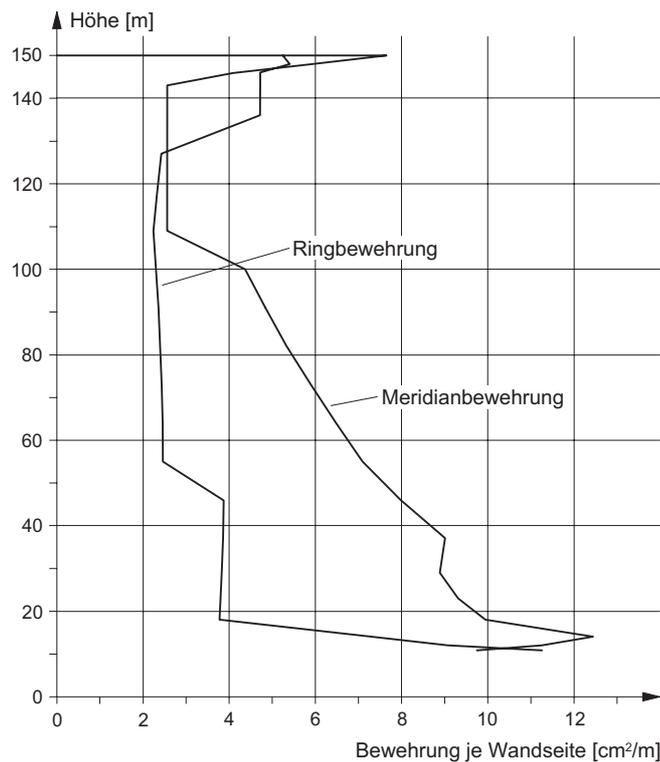


Abbildung 4.2: Vorhandene Bewehrung des Kühlturmes A

Die vorhandene Bewehrung ergab sich aus einer linearen FE-Berechnung nach der Membrantheorie unter Berücksichtigung der nach damaliger Schweizer Norm anzusetzenden Randmomente (vgl. [Furrer & Mischol 1977]). Verwendet wurde ein Stahl III (SIA 162, 1968) mit einer Fließgrenze von $f_y = 410 \text{ MN/m}^2$ und einer Festigkeit von $f_t = 460 \text{ MN/m}^2$. Die Bruchdehnung des Stahles wurde in der Analyse zu 10% angenommen. Die Bewehrungsmengen für die Meridian- sowie für die Ringbewehrung können Abbildung 4.2 entnommen werden. Die eingelegten Stabdurchmesser der Meridian- und Ringbewehrung betragen 8 – 16 mm. Wegen der fehlenden Information über die Verteilung der Stabdurchmesser, die für die Rißbreitenberechnung eine wesentliche Rolle spielen, wurde in der Analyse der Durchmesser einheitlich zu 12 mm angenommen.

Bei der Festlegung der Windlast wurden nach VGB (1997) Windlastzone I und Druckverteilungskurve K 1.0 zugrundegelegt. Der dynamische Überhöhungsfaktor ergibt sich mit $\min f = 0.750 \text{ Hz}$ zu $\varphi = 1.075$.

4.2.1.2 Schädigungszustand des Kühlturmes A

Zur Information über den zwischenzeitlich aufgetretenen Schädigungszustand der Stahlbetonschale des Kühlturmes des Kernkraftwerkes GÖSGEN-DÄNIGEN steht ein unveröffentlichter Bericht Wolfseher und Partner AG (1996) zur “Beurteilung des Einflusses der Risse auf die Tragfähigkeit” zur Verfügung.

Der Kühlturm A weist demnach einen ausgeprägten Schädigungszustand auf. Im einzelnen sind dies horizontale sowie überwiegend vertikale Risse verschiedener Charakteristika, Betonabtrag im oberen Drittel der Schaleninnenseite und unterschiedliche Setzungen im Bereich der Stützen.

Die Risse der Schale lassen sich grob in vier Kategorien unterteilen:

- Vertikale Risse ausgehend vom unteren Schalenrand, zum großen Teil von innen nach außen verlaufend, in Abständen von 2 m bis 5 m über den gesamten Umfang verteilt, mit Rißlängen von bis zu 10 m,
- vertikale Risse an der Schalenaußenseite im Bereich des oberen Schalendrittels in Abständen von 5 m bis 20 m mit Rißlängen zwischen 10 m und 50 m,
- einzelne vertikale Risse im Bereich des mittleren und unteren Schalendrittels, sowie
- horizontale Risse mit Rißlängen meist kleiner als 5 m bei Arbeitsfugen, vielfach mit Wasseraustritten.

Die gemessenen Rißbreiten schwanken zwischen 0.1 mm und 1.0 mm, wobei etwa 20% der Risse Rißweiten größer als 0.4 mm aufweisen.

Die Setzungen, die ohne Zweifel für die Risse im erstgenannten Punkt verantwortlich sind, und der Betonabtrag werden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht bzw. modelliert. Das Hauptaugenmerk in der numerischen Analyse wird auf die Risse sowie die Rißentwicklung aus Temperatur nebst hygri-scher und Windbeanspruchung gelegt.

4.2.1.3 Lastfall $G + \lambda W$

Der mit Eigengewicht G vorbelastete Turm wird durch eine steigende quasi-statische Windlast W bis zum Versagen beansprucht. Die Abbildungen 4.3 und 4.4 stellen die Lastverformungspfade der Punkte A, B und C im Staupunktmeridian und der Punkte D, E und F senkrecht zur Windrichtung dar. Erste Risse entstehen am oberen Randglied im Bereich $\theta = 180^\circ$ bei einem niedrigen Lastniveau von $\lambda = 0.7$. Die Risse vermehren sich in mehreren Bereichen, etwa bei $\theta = 30^\circ$, $\theta = 120^\circ$ und $\theta = 180^\circ$ des oberen Randgliedes. Der Kühler verhält sich bis zu einem Lastniveau von ca. $\lambda = 1.75$ im wesentlichen linear. Hohe Meridianspannungen im Luv führen zur schlagartigen Entstehung horizontaler Trennrissen im mittleren Bereich der Schale. Diese horizontalen Risse dehnen sich weiter nach oben und unten in Meridianrichtung aus. Dabei ändern sie ihre Rißwinkel und schließen sich mit vertikalen Rissen zusammen, die vom mittleren Flankenbereich bei ca. $\theta = 60^\circ$ bei einem Lastfaktor von $\lambda = 1.90$ entstehen und sich nach unten und oben in einem Bereich von $\theta = 30^\circ$ weiter fortpflanzen (vgl. Abb. 4.5-4.7).

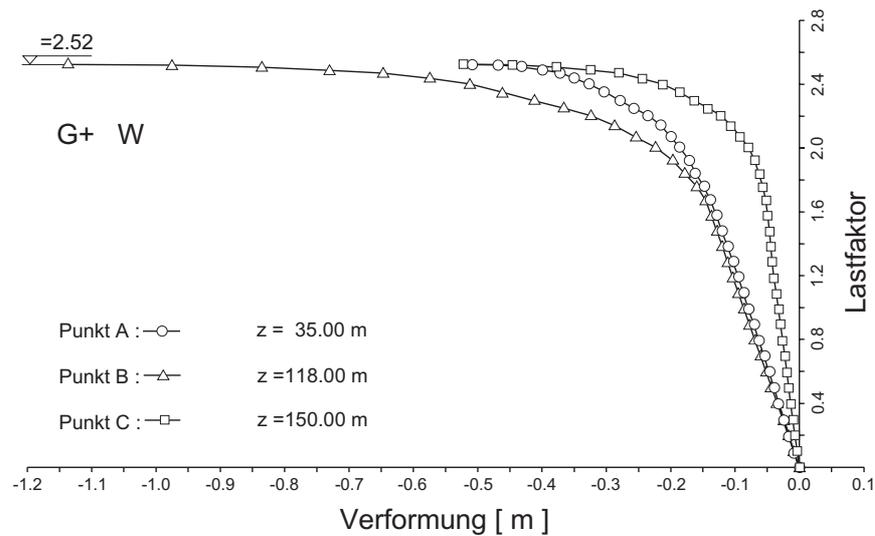


Abbildung 4.3: Last-Verformungspfade in den Punkten A, B und C

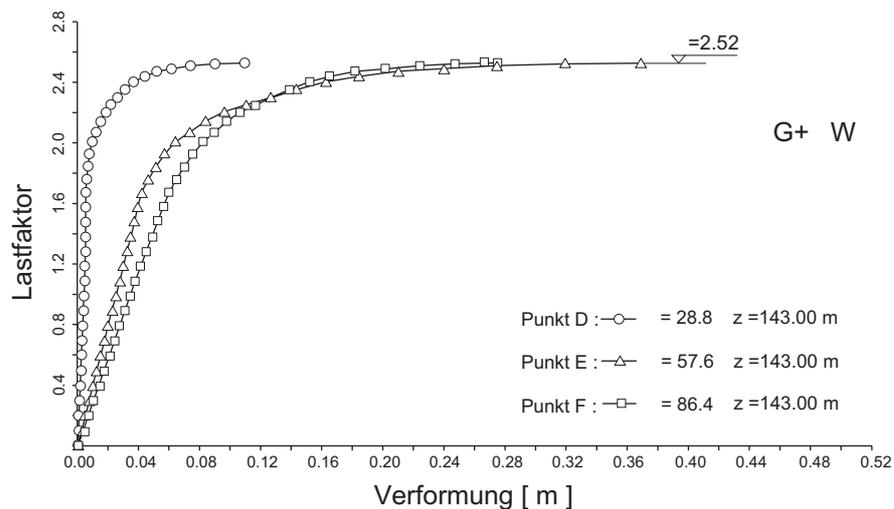
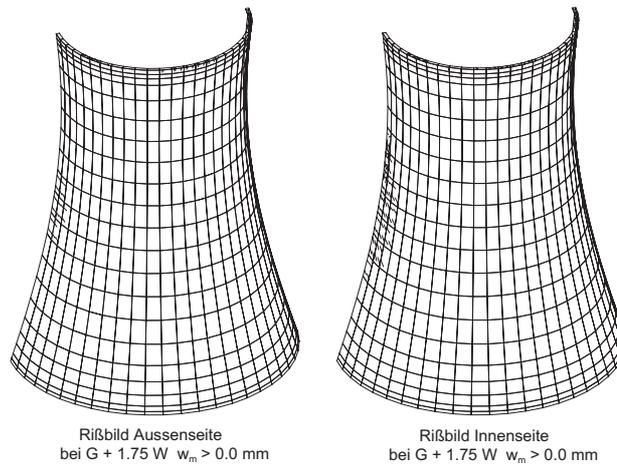
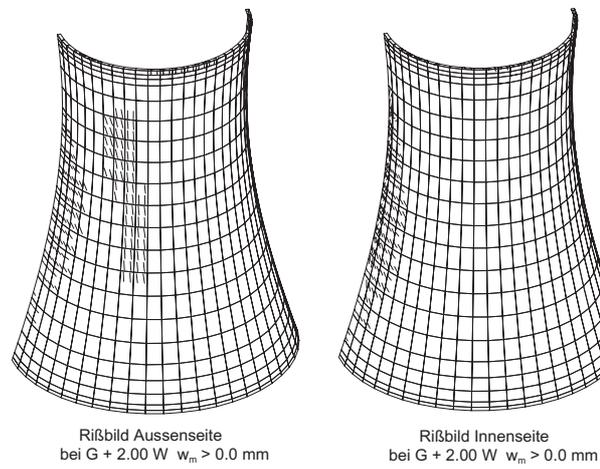
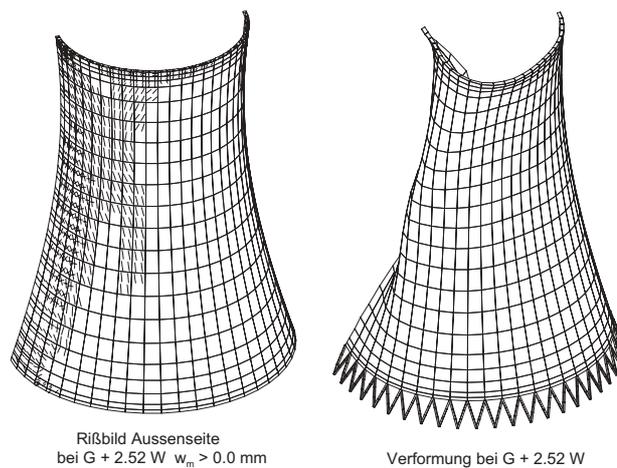


Abbildung 4.4: Last-Verformungspfade in den Punkten D, E und F

Erste Risse im Stützenfachwerk entwickeln sich bei $\lambda = 0.1$ im Bereich $\theta = 0^\circ$ an den Stützenfüßen. Bei Erreichen des Lastfaktors $\lambda = 1.0$ entstehen erste Risse im Bereich der Stützenmitte und des Stützenkopfes, die Risse an den Stützenfüßen dehnen sich bis zu einem Umfangswinkel von $\theta = 30^\circ$ aus. Die Risse im mittleren und oberen Stützenbereich entwickeln sich bei $\lambda = 1.75$ im Bereich $\theta = 0^\circ$ zu Trennrissen. Diese dehnen sich bis zum Kollaps des Turmes bis zu den Stützen im Bereich $\theta = 45^\circ$ aus. Dabei kommt es nicht zu einem Versagen der Stützen. Die Stützen im druckbeanspruchten Teil des Stützenfachwerkes verbleiben während des gesamten Belastungsvorganges im elastischen Druckbereich des Betons.

Der Kühlturm versagt nach einer maximalen Verformung von ca. 1.20 m in der Taille

Abbildung 4.5: Rißbild bei $G + 1.75 W$ Abbildung 4.6: Rißbild bei $G + 2.00 W$ Abbildung 4.7: Rißbild und Verformung bei $G + 2.52 W$

(Punkt B) und von ca. 0.38 m an der oberen Flanke (Punkt E). Das Versagen des Tragwerkes wird bei $\lambda = 1.75$ durch das Plastizieren der Meridianbewehrung in den horizontalen Trennrissen im Luvbereich des mittleren Schalendrittels eingeleitet (vgl. Abb. 4.5). Bis zum Kollaps dehnt sich dieser anfangs lokal begrenzte Bereich über die gesamte Höhe des Turmes aus. In Höhe der Schalenmitte erstreckt sich der Bereich bis zu $\theta = 30^\circ$ in Umfangsrichtung. Der Kollaps wird letztendlich durch das Reißen der Meridianbewehrung im Luv des mittleren Schalendrittels in einer Höhe von ca. 85 m bei einem Windlastfaktor von $\lambda = 2.52$ verursacht. In Abbildung 4.7 sind die verformte Struktur (30-fach überhöht) und das Reißbild des Kühlturmes kurz vor dem Kollaps dargestellt.

An dieser Stelle soll noch kurz erwähnt werden, daß das Stützenfachwerk im Rahmen der nichtlinearen statischen Analyse dieses Turmes keinen wesentlichen Einfluß auf das Versagen des Kühlturmes besitzt. Eine vorab im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte nichtlineare statische Analyse mit einem durch linear-elastische Balkenelemente diskretisierten Stützenfachwerk führte zu einer minimal erhöhten Versagenslast von $\lambda = 2.55$. Der oben beschriebene Versagensmechanismus ließ sich sowohl mit linearen als auch mit nichtlinearen Stützenmodellierung gleichermaßen erzielen.

4.2.1.4 Lastfall $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$

Nach der Vorbelastung durch Eigengewicht G und dem Temperaturgradienten $\Delta T_2 = 45 K$ wird der Turm erneut der Windlast W ausgesetzt. Die Temperaturbeanspruchung erzeugt vertikale Risse über die gesamte Außenseite der Kühlturmschale, während horizontale Risse im Bereich des oberen und unteren Drittels zu erkennen sind (Abbildung 4.10). Die horizontalen Risse unterhalb der Taille sind zum Teil durch das Eigengewicht der Schale überdrückt, dennoch entstehen horizontale Risse im unteren Schalendrittels aufgrund der größeren Schalendicke und der damit einhergehenden Vergrößerung der rißerzeugenden Spannungen sowie aufgrund der erhöhten Steifigkeit. Die überwiegenden Rißbreiten sind jedoch noch kleiner als $w_m = 0.1 mm$, insbesondere die der horizontalen Risse.

Bei steigender Windlast schreitet die Rißentwicklung an der durch die Temperaturbeanspruchung aufgeweichten bzw. vorgeschädigten Schale wesentlich schneller voran als beim "kalten" Kühlturm. Die vertikalen Risse im Flankenbereich um $\theta = 60^\circ$ sind schon bei einem Windlastfaktor von $\lambda = 1.0$ mit einer mittleren Rißbreite $w_m > 0.15 mm$ zahlreich vorhanden. Die horizontalen Trennrisse im Luvbereich des mittleren Schalendrittels treten, wie bei der Beanspruchungskombination $G + \lambda W$, wieder beim Lastfaktor $\lambda = 1.75$ auf.

Im Vergleich mit dem "kalten" Turm weist die Last-Verformungskurve des mit Temperatur beanspruchten Turmes ein frühzeitig gesteigertes nichtlineares Verhalten auf. Der durch die Temperatur hervorgerufene Steifigkeitsabfall läßt sich deutlich im Vergleich der

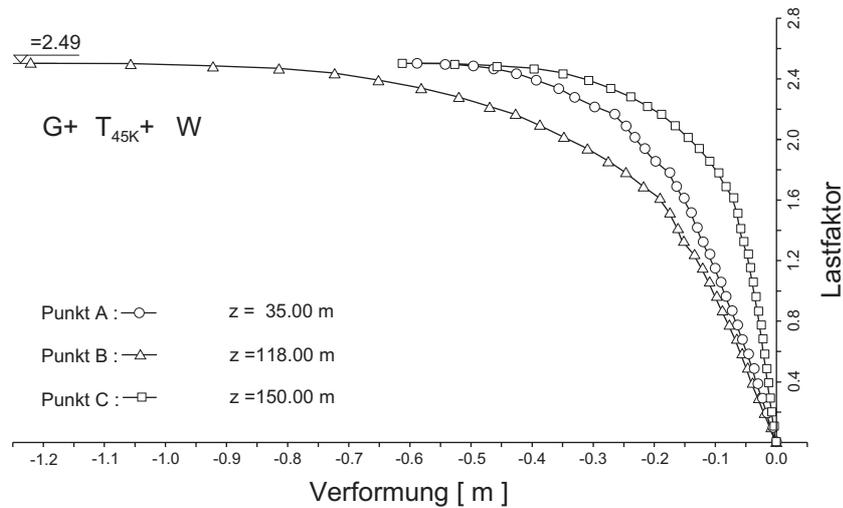


Abbildung 4.8: Last-Verformungspfade in den Punkten A, B und C

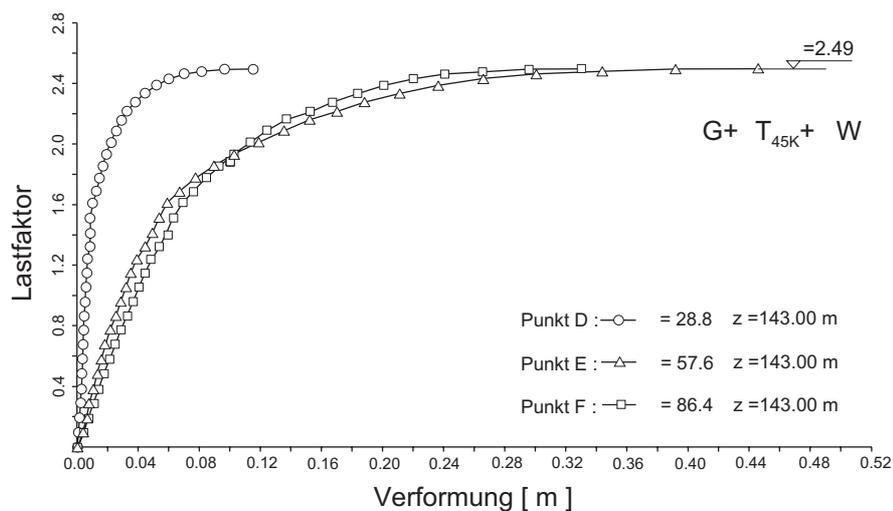
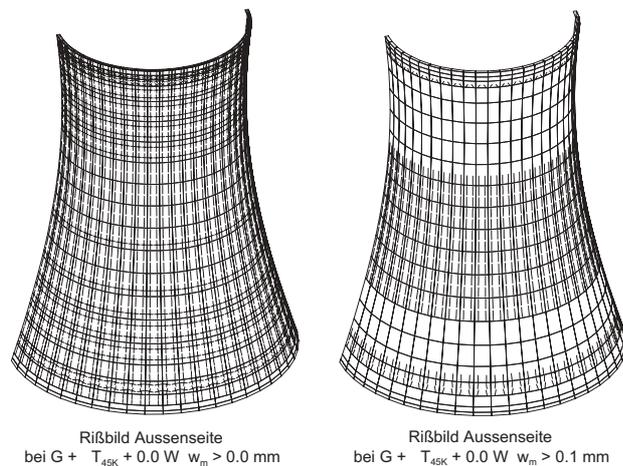
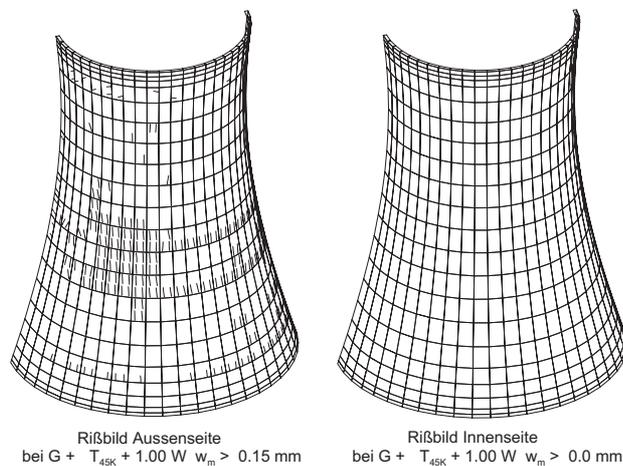


Abbildung 4.9: Last-Verformungspfade in den Punkten D, E und F

Last-Verformungspfade erkennen (Abbildungen 4.22 und 4.23).

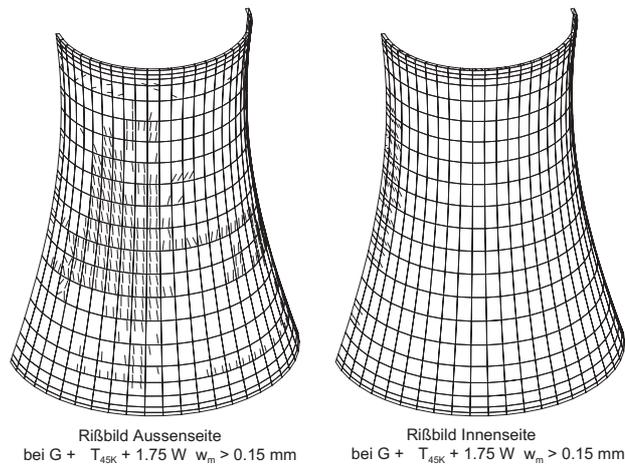
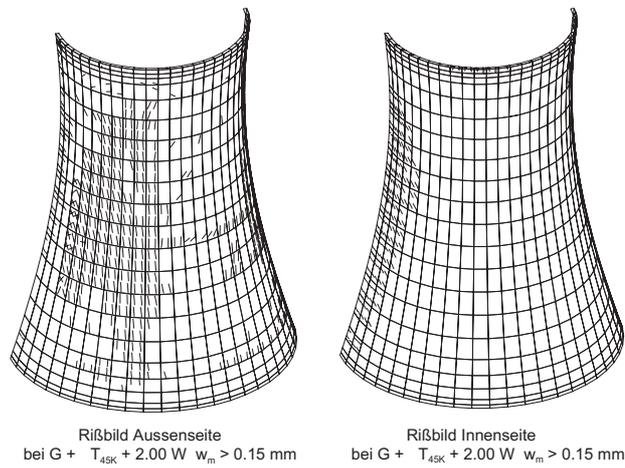
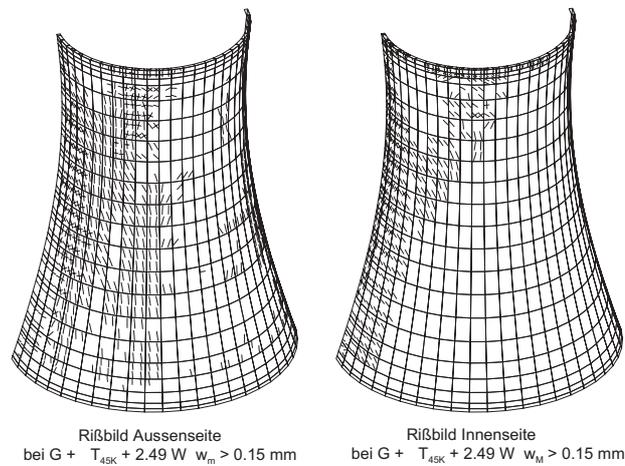
Die Verformungen weisen bis auf den versagensnahen Bereich erhebliche Unterschiede auf. Während im versagensnahen Bereich ein ähnliches Verhalten beider Türme zu beobachten ist, ist die Versagenslast von $\lambda = 2.49$ nur minimal geringer. Auch die Verformungen zeigen keinen wesentlichen Unterschied unmittelbar vor dem Versagen. Dieses ähnliche Verhalten vor dem Versagen läßt sich dadurch erklären, daß bei höheren Windlastniveaus die Rißentwicklung und damit die dadurch beeinflussten Verformungen

Abbildung 4.10: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 0.0 W$ Abbildung 4.11: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 1.0 W$

der Kühlturmschale von der Windbelastung dominiert werden.

Die Abbildungen 4.10 - 4.14 stellen die Rißbilder der Schale bei verschiedenen Windlastfaktoren dar. Um einen besseren Überblick über die Entwicklung der Rißbreiten mit steigender Windbelastung zu erhalten, sind Risse kleinerer Rißbreiten herausgefiltert. Hier ist deutlich die Analogie zwischen der Vergrößerung der Rißbreiten der an der Außenseite vorhandenen vertikalen Risse und der Rißentwicklung am kalten Turm zu erkennen.

Die Stützen des Kühlturmes verhalten sich in weiten Teilen identisch mit dem beim Lastfall $G + \lambda W$ (4.2.1.3) beobachteten Verhalten. Erste Risse entstehen bei $\lambda = 0.2$ an den Stützen im Bereich $\theta = 0^\circ$, betroffen sind zunächst wieder die Stützenfüße. Nach einer Ausdehnung des Bereiches mit gerissenen Stützen auf einen Ausschnitt von $\theta = 30^\circ$ kommt es zur Bildung von Rissen im mittleren und oberen Bereich der Stützen.

Abbildung 4.12: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 1.75 W$ Abbildung 4.13: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 2.00 W$ Abbildung 4.14: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 2.49 W$

Diese entwickeln sich bis zu einem Windlastfaktor von $\lambda = 1.5$ zu Trennrissen, wieder beginnend bei $\theta = 0^\circ$. Bis zum Kollaps weitet sich dieses Rißbild der Stützen bis auf einen Bereich von ca. $\theta = 45^\circ$ aus.

Der Kollaps des Tragwerkes wird wiederum durch das Plastizieren und Reißen der Meridianbewehrung im Luvbereich des mittleren Schalendrittels verursacht. Aufgrund der durch die Temperatur schon vorbelasteten Bewehrung kommt es schon bei $\lambda = 1.3$ zum ersten lokalen Plastizieren der Meridianbewehrung im Bereich des mittleren Schalendrittels des Luvbereiches. Dieses anfangs lokale Plastizieren der Meridianbewehrung breitet sich in der im Abschnitt Lastfall $G + \lambda W$ (4.2.1.3) beschriebenen Weise weiter aus.

4.2.1.5 Lastfall $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$

Nach der Vorbelastung durch Eigengewicht G und den Temperaturgradienten $\Delta T_2 = 45 K$ sowie der hygrischen Ersatzbelastung $\Delta T_{hygr} = 15 K$ wird die Schale weiter der Windlast ausgesetzt.

Die zusätzliche hygrische Beanspruchung ΔT_{hygr} vergrößert die an der gesamten Außenschale durch ΔT_{45K} verursachten Risse und erzeugt zusätzliche horizontale Risse, die sich jetzt über den gesamten Kühlturm verteilen.

Bei steigender Windlast schreitet die Entwicklung der Risse an dem nun offensichtlich viel stärker geschädigten Turm zunehmend fort. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Lastfällen entwickeln sich die vertikalen Risse im Bereich um $\theta = 60^\circ$ wesentlich stärker und verbreitern sich weiter im Flankenbereich ($\theta = 30^\circ - \theta = 90^\circ$). Beim Lastfaktor $\lambda = 1.0$ kommt es zu einem lokalen Plastizieren der Ringbewehrung bei $\theta = 90^\circ$ in Höhe des Punktes A (ca. 50 m). Dabei entstehen mittlere Rißbreiten bis zu $w_m = 0.45 mm$. Dieses ist in erster Linie auf die sehr geringe Ringbewehrungsmenge zurückzuführen: Der Bewehrungsgrad in diesem Bereich beträgt lediglich 0.21%. Die gesteigerte Beanspruchung durch die hygrischen Effekte führt zusätzlich zur Vergrößerung der Rißbreite. Die mittleren Rißbreiten in den übrigen Bereichen sind zum großen Teil größer als $w_m = 0.2 mm$.

Die horizontalen Trennrisse im Luvbereich des mittleren Schalendrittels treten wieder wie bei den anderen Beanspruchungskombinationen bei Windlastfaktor $\lambda = 1.75$ auf und treffen auf die sich schon vorher entwickelten vertikalen Risse aus dem Bereich um $\theta = 60^\circ$.

Das Stützenfachwerk zeigt wiederum ein ähnliches Verhalten wie unter den beiden vorangegangenen Beanspruchungskombinationen. Die Risse im Bereich der Stützenfüße entstehen bei $\lambda = 0.5$, die Risse im mittleren und oberen Bereich treten wieder bei $\lambda = 1.0$ auf. Zu den Trennrissen im mittleren und oberen Stützenbereich kommt es ab $\lambda = 1.5$.

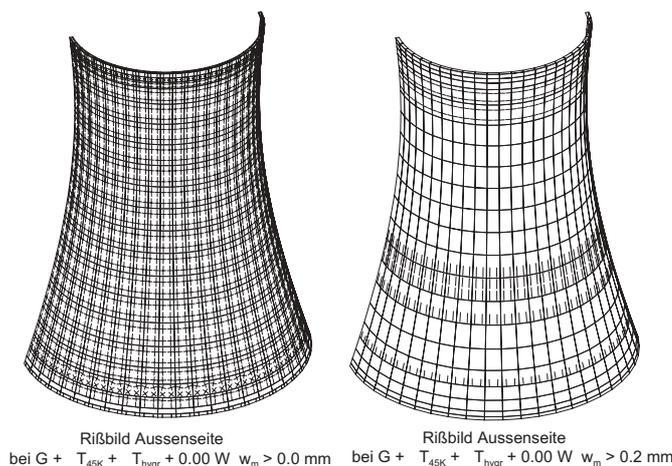


Abbildung 4.15: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 0.00 W$

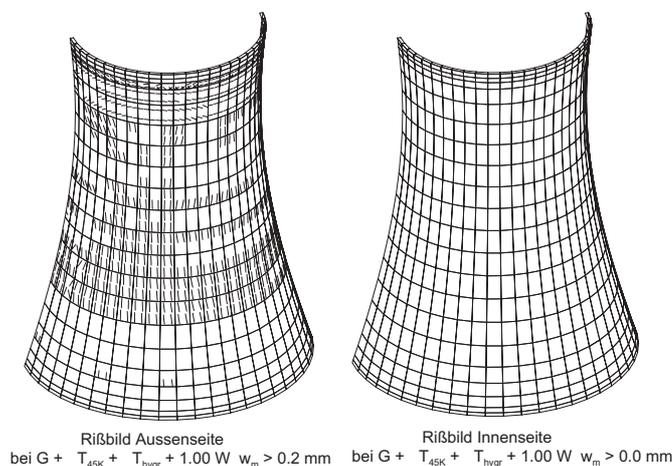


Abbildung 4.16: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 1.00 W$

Der Kollaps des Tragwerkes wird erneut durch den in den vorherigen Lastfällen beobachteten Versagensmechanismus verursacht. Das Versagen des Kühlturmes wird wiederum durch Plastizieren der Meridianbewehrung im Luvbereich des mittleren Schalendrittels bei $\lambda = 1.2$ eingeleitet. Bis zum Erreichen der Traglast erstreckt sich der Bereich mit plastizierter Meridianbewehrung über die gesamte Höhe des Luvbereiches bei $\theta = 0^\circ$, in Höhe der Schalenmitte dehnt er sich bis zu $\theta = 30^\circ$ aus. Das schon bei $\lambda = 1.0$ einsetzende Plastizieren der Ringbewehrung dehnt sich zwar weiter lokal im Bereich um $\theta = 60^\circ$ aus, führt aber nicht zum Versagen des Turmes. Das Versagen des Turmes tritt wieder durch das Reißen der Meridianbewehrung im Luv ein.

Die Last-Verformungspfade lassen gegenüber dem Lastfall $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ ein weiter gesteigertes nichtlineares Verhalten erkennen (vgl. Abbildungen 4.22 und 4.23). Die Versagenslast von $\lambda = 2.47$ liegt unterhalb der beiden anderen Lastkombinationen. Vor dem Kollaps weisen die Punkte B und E im Vergleich zu den anderen Beanspruchungskombinationen etwas kleinere Verformungen (ca. $0.90 m$ und ca. $0.37 m$) auf.

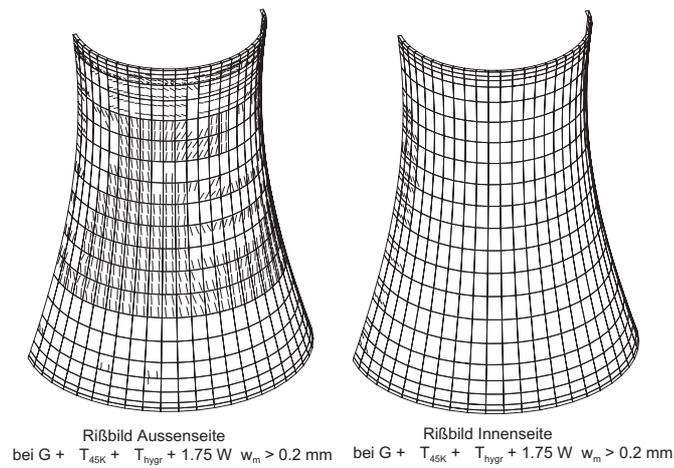


Abbildung 4.17: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 1.75 W$

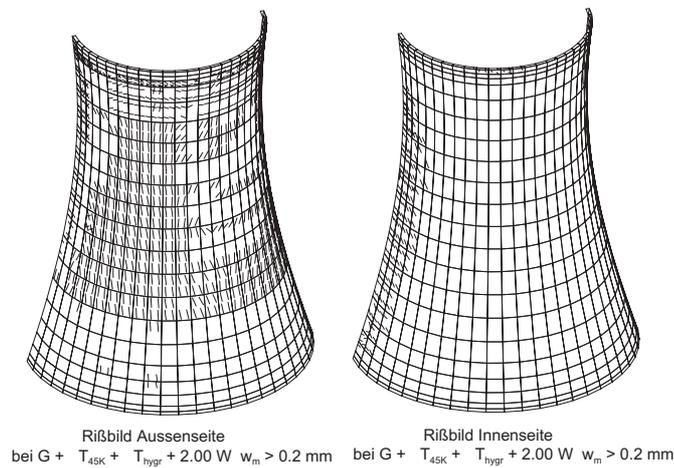


Abbildung 4.18: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 2.00 W$

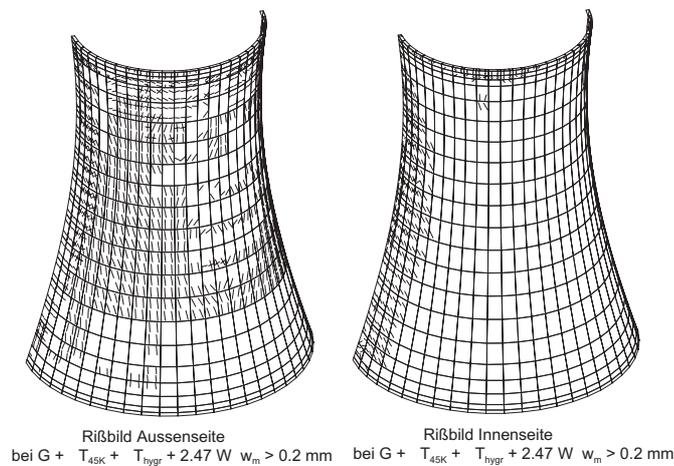


Abbildung 4.19: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 2.47 W$

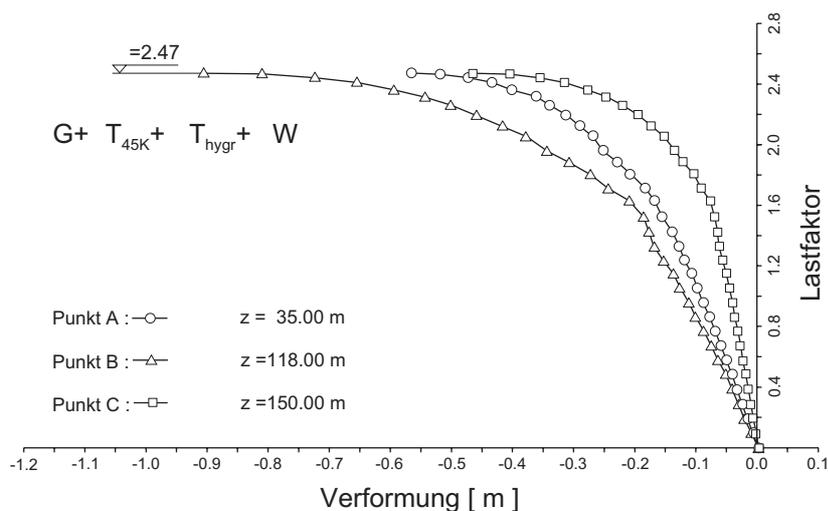


Abbildung 4.20: Last-Verformungspfade in den Punkten A, B und C

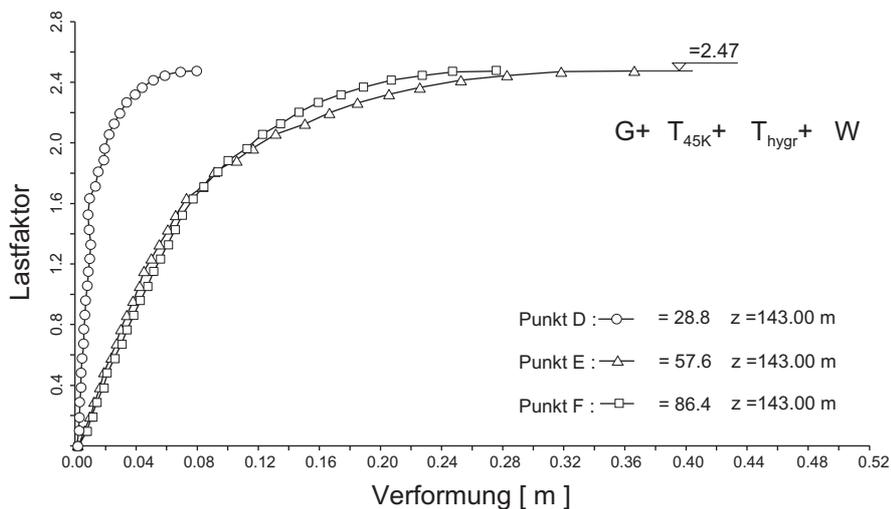


Abbildung 4.21: Last-Verformungspfade in den Punkten D, E und F

4.2.1.6 Lastfall $G + \Delta T + W_{zyk}$

Die Abbildungen 4.24 und 4.25 zeigen die Lastverformungs-Pfade der Punkte B und E für die untersuchten Beanspruchungskombinationen $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ und $G + \Delta T + W_{zyk}$ im Vergleich. Die Last-Verformungskurve des mit 3 Sturmzyklen, denen die vorschädigungserzeugenden Beanspruchungen ΔT vorausgegangen sind, belasteten Turmes zeigt irreversible Verformungen in der Belastungsgeschichte (Anfangspunkt der Lastverformungskurve).

Bei der anschließenden monotonen Windbeanspruchung bis zum Versagen ist keine wesentliche Änderung des Lastverformungs-Verhaltens bei höherer Windbeanspruchung fest-

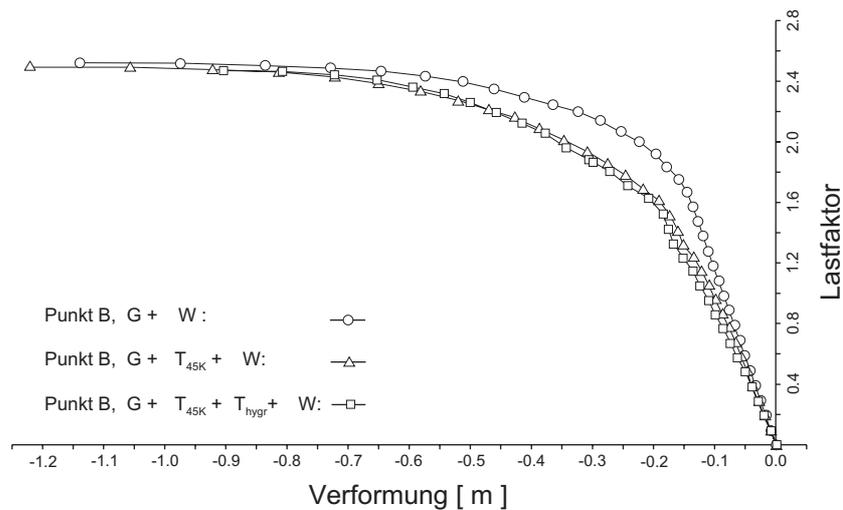


Abbildung 4.22: Last-Verformungspfade im Punkt B

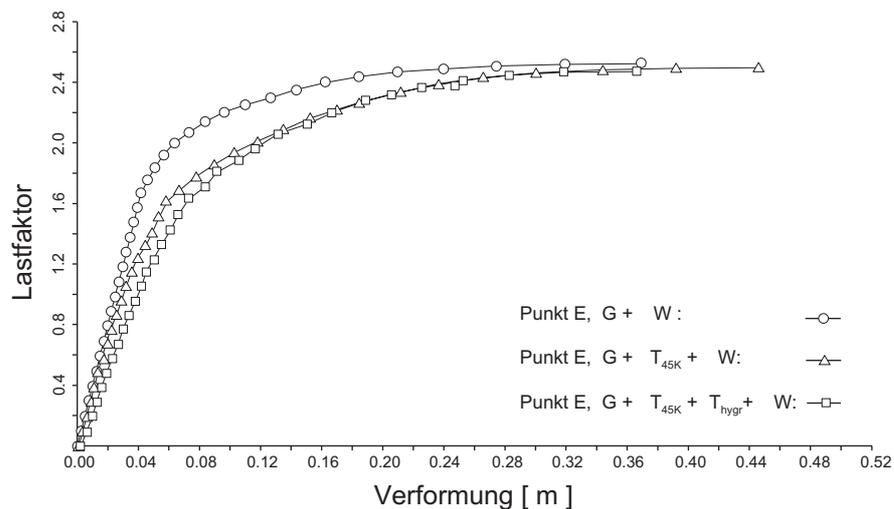


Abbildung 4.23: Last-Verformungspfade im Punkt E

zustellen. Der Turm verhält sich während der drei Sturmzyklen, die für diesen Turm eine relativ geringe Beanspruchung darstellen (vgl. Last-Verformungspfade Abbildungen 4.24 und 4.25), weitgehend linear. Dieses weitgehend lineare Verhalten ist auf die geringe Zu- und Abnahme der Stahlspannung aus Temperatur und hygri-schem Quellen zurückzuführen. Die Verformungen und die Versagenslast $\lambda = 2.49$ liegen im Bereich der Versagenslasten der Beanspruchungskombinationen $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ und $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$.

Das Rißbild der Kühlturmschale nach 3 Sturmzyklen mit den vorangegangenen Temperatureinwirkungen ΔT ist in Abbildung 4.26 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die große Anzahl von Rissen mit Rißbreiten größer $w_m = 0.2 \text{ mm}$. Vergleicht man

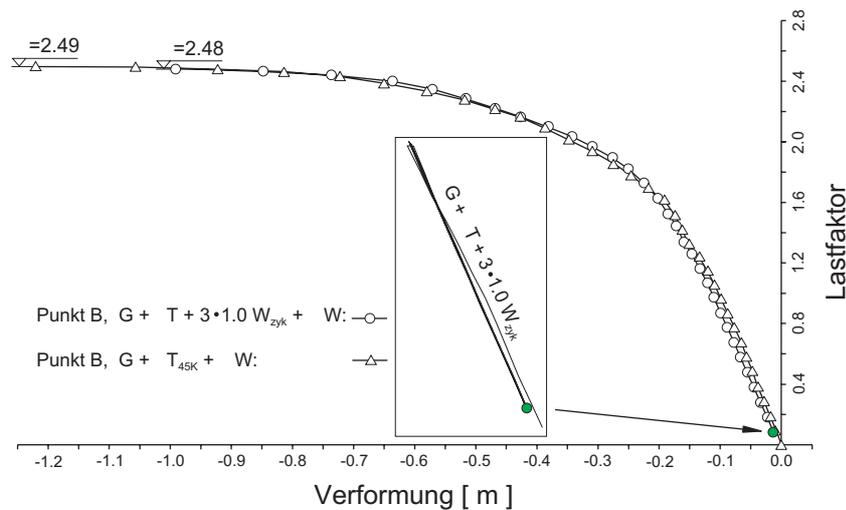


Abbildung 4.24: Vergleich der Last-Verformungspfade im Punkt B

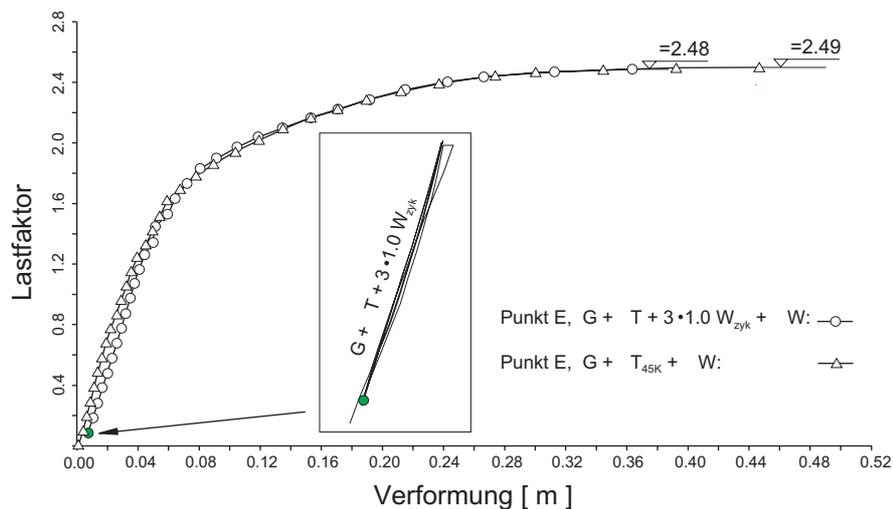


Abbildung 4.25: Vergleich der Last-Verformungspfade im Punkt E

Abbildung 4.26 mit dem Reißbild der gleichen Lastkombination ohne Windlast (Abb. 4.15), so kann man eine erhebliche Zunahme der Reißbreiten der vertikalen Risse feststellen. Die großen vertikalen Risse, die bereits bei der Windbeanspruchung mit $\lambda = 1.0$ aufgetreten sind, entstehen durch die hohen Spannungen in der Ringbewehrung: Die Ringbewehrung im Bereich um $\theta = 90^\circ$ befindet sich nahezu im Fließbereich oder ist bereits lokal plastiziert, wodurch die großen Reißbreiten hervorgerufen werden (vgl. Lastfall $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$ (4.2.1.5)). Andererseits sind die Zuwächse der Stahlspannungen der Ringbewehrung im Flankenbereich ($\theta = 30^\circ - \theta = 90^\circ$) während der Windbelastung mit $1.0 W$ gegenüber denen der Temperaturbeanspruchung noch klein, so daß sich die Reißbreiten in diesem Bereich während der Entlastung kaum ändern. Bei der anschließenden Windentlastung bleiben die vorhandenen Reißbreiten

also weitgehend erhalten und werden durch die beiden folgenden Belastungszyklen nicht wesentlich gesteigert.

Weniger plausibel ist allerdings die Entstehung von Rißbreiten w_m größer als 0.2 mm im Bereich von $\theta = 60^\circ$ im oberen Schalendrittel, die erst bei der Entlastung entstehen (vgl. Abb. 4.16). Die Rißbreite dieser Risse liegt vor der Entlastung knapp unter der Filtergrenze von 0.2 mm .

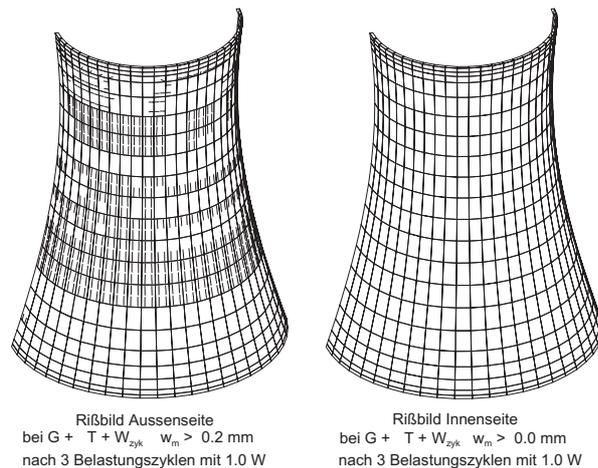


Abbildung 4.26: Rißbild bei $G + \Delta T + W_{zyk}$ nach 3 Belastungszyklen mit $1.0 W$

4.2.1.7 Auswertung der statischen Analyse

Im folgenden soll der durch die numerische Simulation gewonnene Schädigungszustand mit dem von der [Wolfseher und Partner AG 1996] beschriebenen realen Tragwerkszustand verglichen werden. Mögliche Schädigungsmechanismen und -ursachen sollen identifiziert werden.

Vergleicht man den realen Schädigungszustand mit den erhaltenen Ergebnissen aus der Simulation mit dem Belastungsszenario $G + \Delta T + W_{zyk}$, das die bisher aufgetretenen Einwirkungen auf den Kühlturm näherungsweise erfaßt, stellt man folgendes fest:

Die durch Temperatur, hygri sche Prozesse und Windwirkung entstandenen Risse bzw. Rißbreiten, die auch im entlasteten Zustand – nach den Sturmereignissen – mit großen Rißbreiten erhalten bleiben, stimmen qualitativ gut mit dem im Abschnitt 4.2.1.2 “Schädigungszustand des Kühlturmes A” beschriebenen realen Rißbild überein.

So zeigt das Rißbild in Abbildung 4.26, nach winterlichem und normalem Betriebszustand sowie nach drei Sturmzyklen mit $1.0 W$, überwiegend vertikale Risse mit Rißbreiten zum großen Teil über $w_m = 0.2 \text{ mm}$. Die numerisch ermittelte Rißbreite beträgt maximal $w_m = 0.45 \text{ mm}$ im Bereich der plastizierten Ringbewehrung im Flankenbereich der

Schalenmitte. Diese bei der Simulation gewonnenen Rißbreiten liegen im Bereich der gemessenen Rißbreiten am Turm zwischen 0.1 mm und 1.0 mm , wobei ca. 20% der Risse Rißbreiten von über 0.4 mm aufweisen. Unterstellt man eine Streuung der Rißbreiten, wie bei realen Bauteilen zwischen 1.5 – 1.8, so kann die maximale Rißbreite beispielsweise mit einem Streuungsfaktor 1.7 bei ca. $w = 0.8\text{ mm}$ liegen.

Der aufgezeichnete mittlere Rißabstand liegt im oberen Schalenbereich bei ca. 8 m und im mittleren Schalenbereich bei ca. 40 m . Dies zeigt damit, daß sich die festgestellte Rißbildung noch im Erstrißbildungsstadium befindet. Die am realen Turm vorhandene Charakteristik des Rißbildes findet man hiermit wieder. Bezieht man die unter den Abschnitten 4.2.1.3 - 4.2.1.6 gewonnen Erkenntnisse über Rißursachen und die Rißentwicklung in obige Betrachtung mit ein, so kann als grundlegendes Ergebnis der Simulation festgestellt werden, daß für nahezu alle am realen Turm vorhandenen vertikalen Risse an der Außenseite die Temperatureinwirkungen und die hygrischen Quellprozesse ursächlich sind.

Die Entwicklung der Rißbreiten unter Windeinwirkungen bis ca. 1.0 W (50-jährige Windbeanspruchung), die durch Temperatur und hygrische Prozesse initiiert wurden, kann in den Abbildungen 4.10 - 4.14 und 4.15 - 4.19 verfolgt werden. Deutlich ist zu erkennen, daß die Windwirkung zu einer erheblichen Vergrößerung der Rißbreiten bzw. zu einer erheblich größeren Anzahl von Rissen mit großen Rißbreiten führt.

Die Entstehung der großen Rißbreiten ist eindeutig auf die zu geringe Ringbewehrungsmenge zurückzuführen. Der mittlere Ringbewehrungsgrad in der gesamten Schale bis auf den Bereich des oberen Randgliedes beträgt lediglich 0.25%, während die heutige Richtlinie VGB (1997) 0.4% in der oberen Hälfte der Schale und 0.3% in der unteren Hälfte der Schale vorschlägt.

Die bisher bei der Bemessung von Kühlturmbauwerken nicht zu berücksichtigenden hygrischen Prozesse führen u.a. zu einer zusätzlichen Beanspruchung der Ringbewehrung, was die Rißbreiten zusätzlich vergrößert. Im Hinblick auf die Standsicherheit beweisen die statischen Simulationen, daß der Turm Tragreserven für etwa die 2.5-fache Bemessungswindlast besitzt.

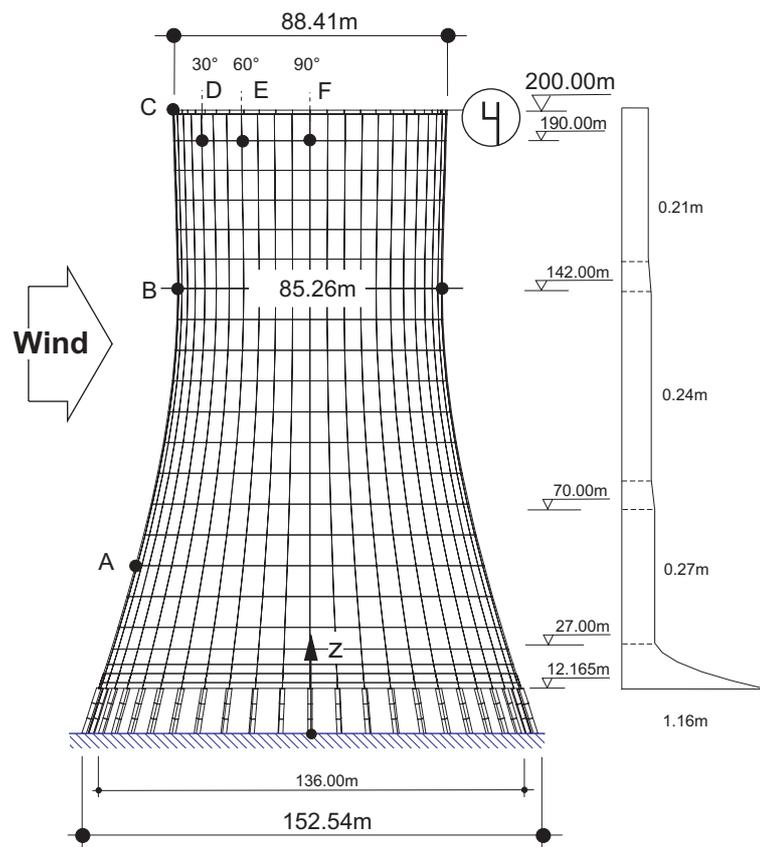


Abbildung 4.27: Schalengeometrie und Wanddickenverlauf des Kühlturmes B

4.2.2 Turm B

4.2.2.1 Geometrie- und Materialdaten

Der zweite zu analysierende Naturzugkühlturm entspricht in seiner Schalengeometrie demjenigen des Kraftwerks NIEDERAUSSEM, der durch seine gigantische Höhe von 200,00 m charakterisiert ist ([Harte, Krätzig & Montag 2001]). Wegen der Verwendung des Sonderbetons (SRB 85) für die Schale des Kühlturmes wurden die Daten zur weiteren numerischen Analyse aus Harte & Busch (1996) entnommen.

Der Kühlturm setzt sich aus zwei Hyperboloiden zusammen, deren Mittelflächengeometrien durch die allgemeine Hyperbelgleichung (Gl. 4.12) beschrieben werden. Die beiden Schalen sind durch folgende Parameter festgelegt:

untere Schale: $r_o = -7.2434$ m,	obere Schale: $r_u = 42.3703$ m,
$a = 49.8735$ m,	$a = 0.2597$ m,
$b = 114.9326$ m,	$b = 8.2940$ m,
$H_T = 142.00$ m,	$H_T = 142.00$ m.

Abbildung 4.27 gibt einen Überblick über die Schalengeometrie und den Wanddicken-

verlauf.

Die 48 rechteckigen Radialpfeiler auf den Einzelfundamenten ($B/D/H = 5.00 \text{ m}/7.00 \text{ m}/3.50 \text{ m}$) besitzen eine konstante Breite in Umfangsrichtung von 1.40 m und in Meridianrichtung eine von 3.10 m auf 1.10 m linear nach oben abnehmende Dicke. In unseren Simulationen wurden die Einzelfundamente als Dehn- und Drehfedern idealisiert; der Bettungsmodul des Baugrundes errechnet sich mit den angenommenen Bodenkennwerten $\sigma_{zul} = 1.00 \text{ MN}/\text{m}^2$ und $E_s = 100 \text{ MN}/\text{m}^2$ zu $k = 23.78 \text{ MN}/\text{m}^3$.

Die in den Analysen verwendeten Baustoffe für alle Bauteile sind Beton B 35 und Betonstahl Bst 500S. Die mittlere Betonzugfestigkeit wurde mit $f_{ct} = 2.675 \text{ MN}/\text{m}^2$ mit einem Variationskoeffizient der Streuung $\eta = 10\%$ angesetzt. Die Festigkeit und die Bruchdehnung des Stahls wurde jeweils zu $f_t = 550 \text{ MN}/\text{m}^2$ und zu 10% angenommen. Die vorhandenen Bewehrungen in Abbildung 4.28 für die nichtlineare Analyse ergaben sich aus der linearen statischen Bemessung nach der Richtlinie VGB (1997). Da die Rißbreite ein signifikantes Maß für eine Schädigung darstellt und stark vom Stabdurchmesser abhängt, wurden sämtliche Bewehrungen einheitlich mit einem Durchmesser von 12 mm angenommen.

Die angesetzte Windlast wurde nach VGB (1997) mit der Windlastzone II, der Druckverteilungskurve K 1.4 und einem dynamischen Überhöhungsfaktor von $\varphi = 1.07$ festgelegt.

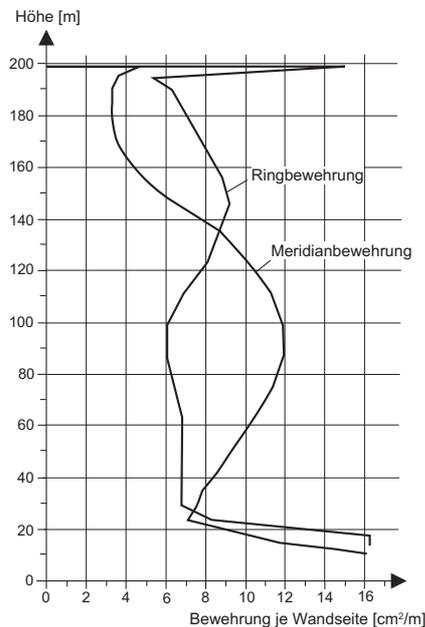


Abbildung 4.28: Vorhandene Bewehrung aus der linearen Analyse

4.2.2.2 Lastfall $G + \lambda W$

Der mit Eigengewicht G vorbelastete Turm wird durch eine ansteigende quasi-statische Windlast W bis zum Versagen beansprucht. Die Abbildungen 4.29 und 4.30 stellen die Last-Verformungspfade der Punkte A, B und C im Staupunktsmeridian und der Punkte D, E und F in der Richtung senkrecht zum Wind dar (vgl. Abb. 4.27).

Ähnlich wie beim ersten Turm (Turm A) entstehen erste Risse am oberen Ranglied bei einem niedrigen Windlastniveau von $0.6 W$. Die sich vermehrenden Risse verbleiben bis zum Windlastfaktor $\lambda = 1.20$ im Bereich des Randgliedes. Die Windlastintensität $\lambda = 1.20$ erzeugt im Luv der Schalenmitte erste horizontale Trennrisse, die sich mit steigender

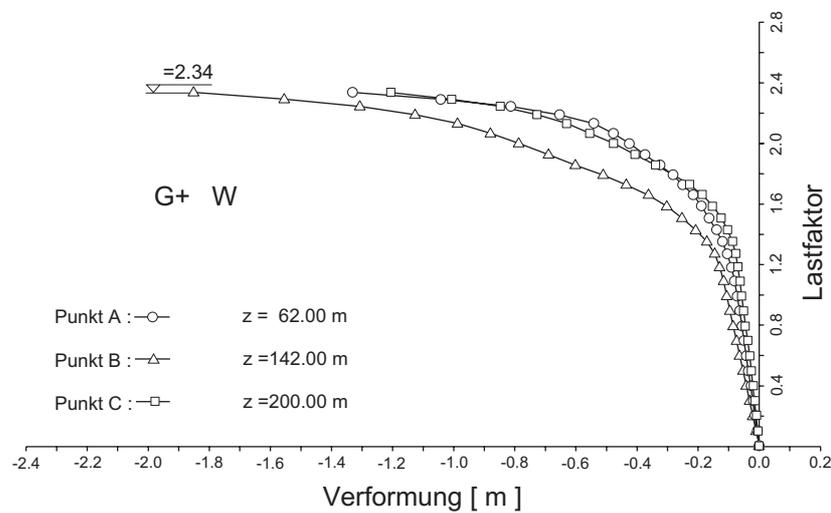


Abbildung 4.29: Last-Verformungspfade in den Punkten A, B und C

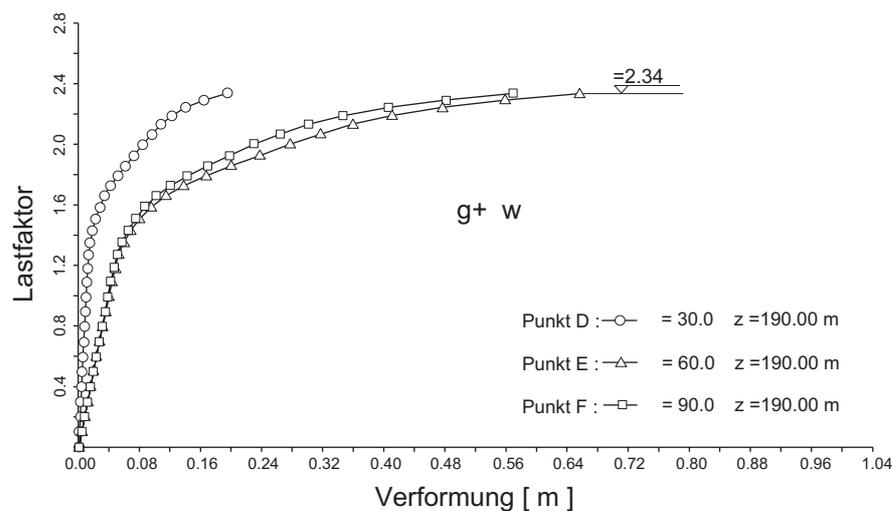
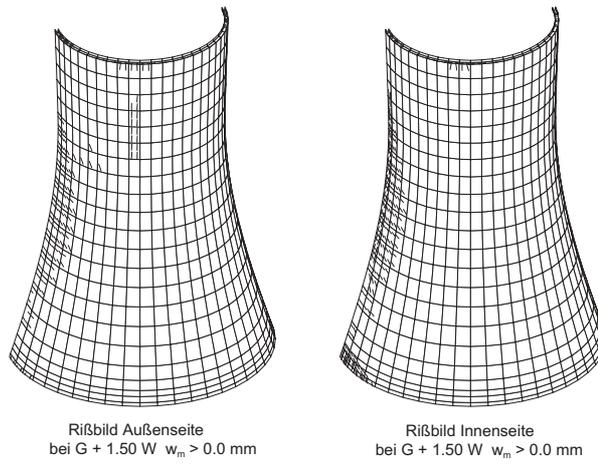
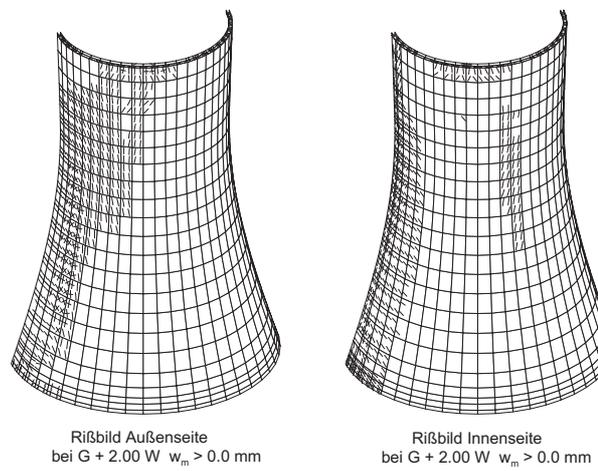
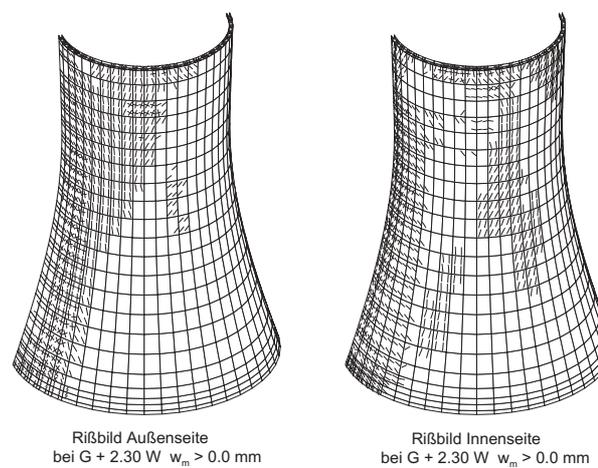


Abbildung 4.30: Last-Verformungspfade in den Punkten D, E und F

Abbildung 4.31: Rißbild bei $G + 1.50 W$ Abbildung 4.32: Rißbild bei $G + 2.00 W$ Abbildung 4.33: Rißbild bei $G + 2.30 W$

Windbeanspruchung über den gesamten Luvbereich weiter entwickeln. Etwa bei $\lambda = 1.35$ treten erste vertikale Risse im oberen Flankenbereich bei $\theta = 90^\circ$ unterhalb des Punktes E auf. Abbildung 4.32 und 4.33 zeigen die Rißentwicklung an den Innen- und Außenseiten der Schale bei hohen Windlastniveaus. Die Luvseite wurde in der gesamten Höhe durch die horizontalen Trennrisse stark geschädigt, während die vertikalen Biegerisse in der oberen Hälfte der Flankenseite, zwischen dem Punkt E und dem Punkt F, dicht verteilt sind. Der Bereich zwischen den Punkten D und E erweist sich als Übergangsbereich zwischen den horizontalen und den vertikalen Rissen.

Der oben erwähnte Rißentwicklungsprozeß ist durch das Last-Verformungsverhalten des Turmes in den beobachteten Punkten wiederzuerkennen. Nach dem Auftreten der Trennrisse bei $\lambda = 1.20$ entwickelt der Turm ein verstärkt nichtlineares Tragverhalten. Mit steigender Windlast wird der Turm zunehmend weicher. Bei $\lambda = 1.75$ plastiziert die Meridianbewehrung im Bereich der Taille (Punkt B). Bis zum endgültigen Versagen des Turmes plastiziert nahezu die gesamte Meridianbewehrung im Luv des mittleren Drittelbereichs. Der Turm versagt bei der Windlast $2.34 W$ mit einer Verformung in der Taille (Punkt B) von ca. $1.85 m$ und an der oberen Flanke (Punkt E) von ca. $0.65 m$.

Die Stützen verhalten sich prinzipiell wie beim Turm A. Beim Windlastfaktor $\lambda = 0.50$ treten Biegerisse in den Stützen im Fußpunkt bei $\theta = 0^\circ$, bei $\lambda = 0.70$ in der Stützenmitte und bei $\lambda = 1.00$ im Stützenkopf auf. Im Bereich der Stützenköpfe, an der Luvseite der Schale, kommt es bei $\lambda = 1.30$ zu Trennrissen. Die Risse entwickeln sich weiter mit steigender Windlast etwa bis in den Bereich $\theta = 60^\circ$. Die Plastizierung des Stahls beginnt bei $\lambda = 2.25$. Dabei kommt es nicht zu einem Versagen der Stützen. Die Stützen im druckbeanspruchten Teil verbleiben, wie beim Turm A, während des gesamten Belastungsvorganges im elastischen Druckbereich des Betons.

4.2.2.3 Lastfall $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$

Die thermische Einwirkung im winterlichen Betriebszustand erzeugt wieder das gleiche Rißbild wie bei Turm A in der Schale des Turmes (Abb. 4.36). Die Risse befinden sich im Erstrißbildungsstadium, und daher sind die Rißabstände sehr groß. Die mittleren Rißbreiten verbleiben noch unterhalb $w_m = 0.1 mm$.

Für einen besseren Überblick über den Rißentwicklungsprozeß mit steigender Windeinwirkung wurden in Abbildung 4.37 – 4.40 die Risse kleiner als $w_m = 0.1 mm$ herausgefiltert. Im Vergleich zu dem kalten Turm sind vertikale Risse, aufgrund der Biegebeanspruchung infolge von Temperatureinwirkung, im unteren Flankenbereich der Außenschale zu erkennen, während der kalte Turm im Bereich über die gesamte Windbelastung rißfrei bleibt. Der überwiegende Teil der vertikalen Risse im Flankenbereich an der Innenschale bleibt kleiner als $w_m = 0.1 mm$. Das simulierte Rißbild stellt für den Turm unter der winterlichen Bemessungswindlast $1.0 W$ keinen wesentlichen Schädigungszustand dar.

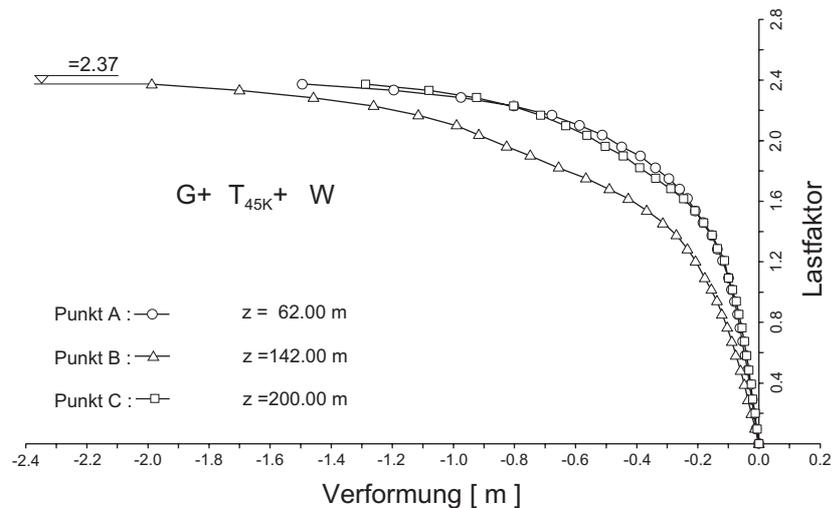


Abbildung 4.34: Last-Verformungspfade in den Punkten A, B und C

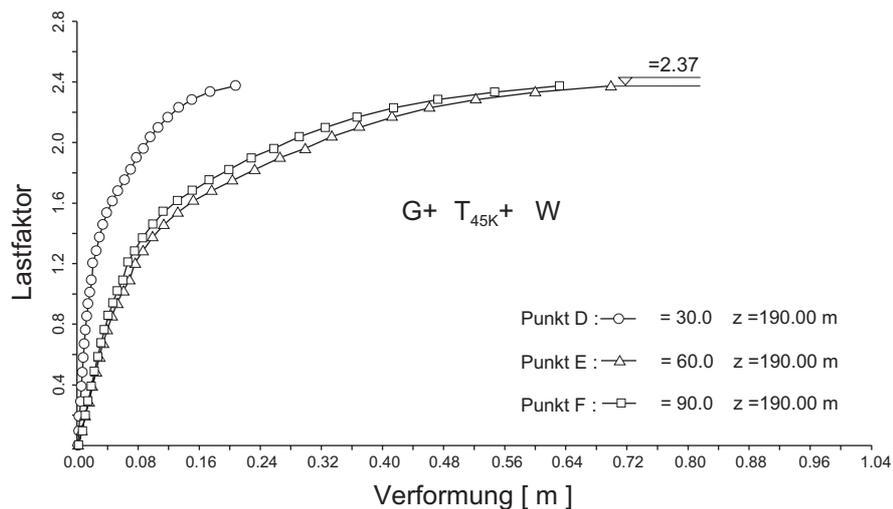
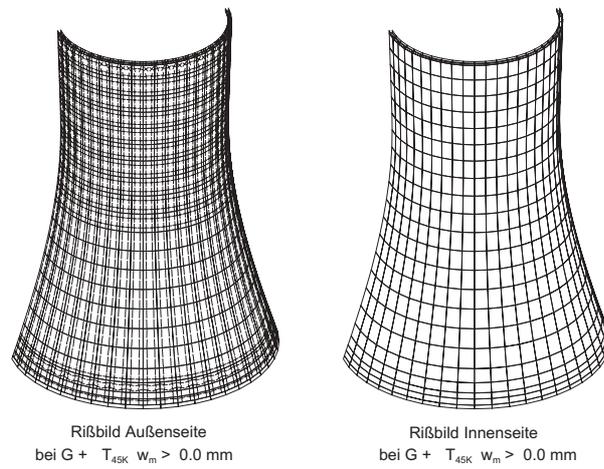
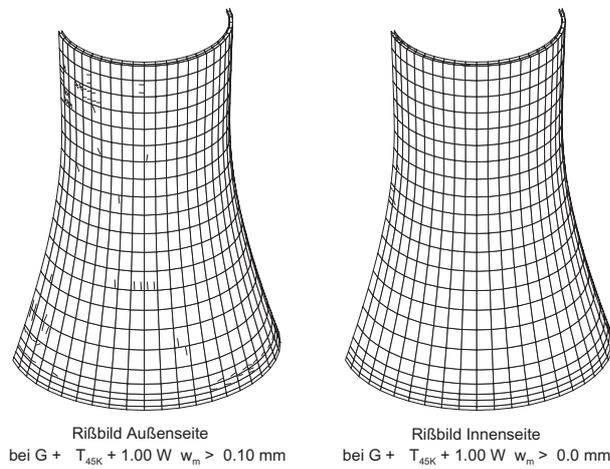
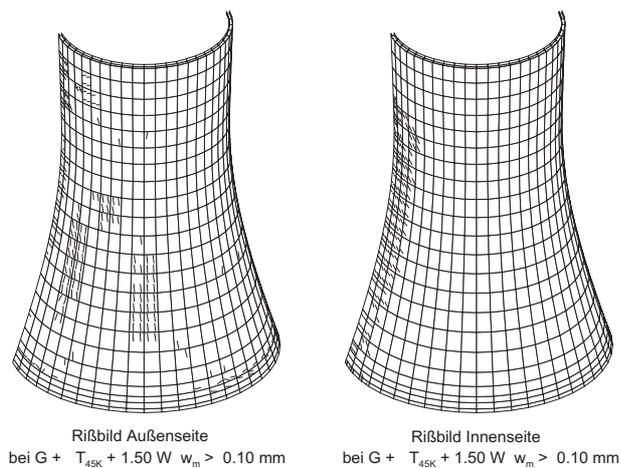
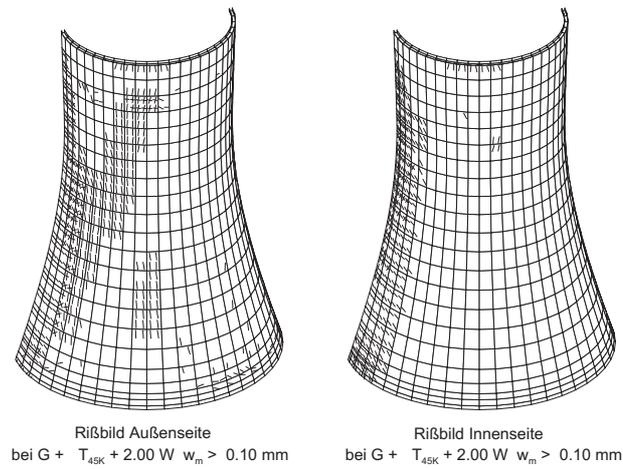
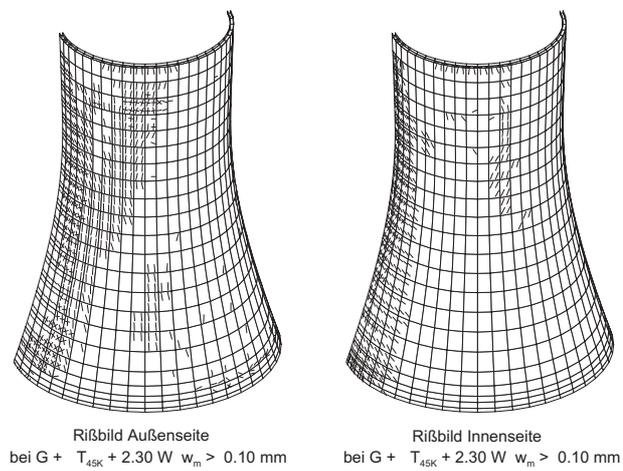
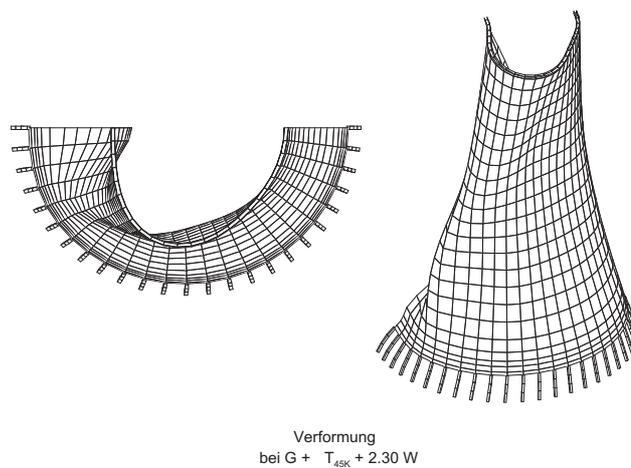


Abbildung 4.35: Last-Verformungspfade in den Punkten D, E und F

Wie beim ersten Turm erkennt man auch hier die dominierende Windwirkung durch den Vergleich der Reißbilder mit denen des kalten Turmes. Die aufgetretenen Risse dieses Turmes sind jedoch während des gesamten Belastungsprozesses erheblich kleiner als die beim ersten Turm, natürlich infolge der höheren Ringbewehrung.

Die in Abbildung 4.34 und 4.35 dargestellten Last-Verformungspfade geben den Vorschädigungseffekt aus der thermischen Beanspruchung mit einem flacheren Anstieg als beim kalten Turm wieder. Vergleicht man das Verformungsverhalten mit demjenigen des kalten Turmes (Abb. 4.48, 4.49), so stellt man wieder fest, daß sich die beiden Türme bei hohem Windlastniveau sehr ähnlich verhalten. Die Vorschädigung aus der Temperatur wird durch die zunehmende Schädigung infolge der Windbeanspruchung unterdrückt.

Abbildung 4.36: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 0.00 W$ Abbildung 4.37: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 1.00 W$ Abbildung 4.38: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 1.50 W$

Abbildung 4.39: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 2.00 W$ Abbildung 4.40: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + 2.30 W$ Abbildung 4.41: Überhöhte Verformung bei $G + \Delta T_{45K} + 2.30 W$

Jedoch verursacht diese Vorschädigung breitere Risse. Die Bewehrung beginnt bei $\lambda = 1.50$ zu plastizieren. Die Plastizierung des Stahls entwickelt sich in gleicher Weise wie beim kalten Turm. Die Versagenslast beträgt $2.37 W$. Die Abbildung 4.41 stellt die Verformungsfigur des Turmes kurz vor dem Versagen dar.

4.2.2.4 Lastfall $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$

Wie zu erwarten war, vergrößert die Beanspruchung aus hygri-schem Quellen die Vorschädigung in der gesamten Schale. Während die Rißentwicklung auf der Innenschale keine wesentliche Änderung von der unter dem vorherigen Lastfall aufweist, ist eine erhebliche Zunahme von Rißanzahl und -breite auf der Außenschale festzustellen. In Abbildung 4.42 – 4.45 sind die Risse in der Außenschale bei verschiedenen Windlastintensitäten dargestellt. Die Herausfilterung von kleineren Rissen ermöglicht es wieder, den Effekt der Windeinwirkung auf der aufgeweichten Schale zu verfolgen. Die meisten Risse bleiben bis zur Windlast $1.0 W$ kleiner als $0.20 mm$.

Die Last-Verformungskurven sind nahezu identisch mit denen unter dem vorherigen Lastfall ohne die Beanspruchung aus hygri-schem Quellen (Abb. 4.46, 4.47): Der Unterschied zeigt sich lediglich unterhalb des Windlastfaktor $\lambda = 1.0$ und ist im Flankenbereich etwas ausgeprägter als im Luvbereich (Abb. 4.48, 4.49). Dieses nahezu identische Verformungsverhalten mit und ohne hygri-schem Effekt beruht darauf, daß sich der Schädigungszustand aus beiden Zwangsbeanspruchungen noch im Erstrißbildungsstadium befindet.

Obwohl die Plastizierung der Meridianbewehrung bei $\lambda = 1.4$ etwas früher auftritt, zeigt der hygri-sche Effekt auch auf das Versagensverhalten wieder keinen Einfluß.

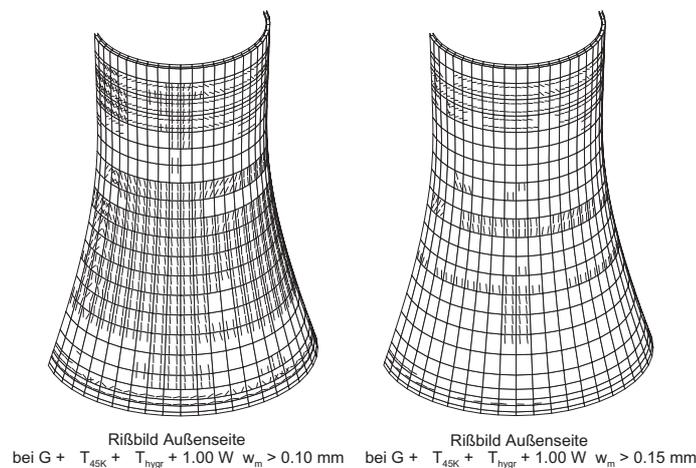


Abbildung 4.42: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 1.00 W$

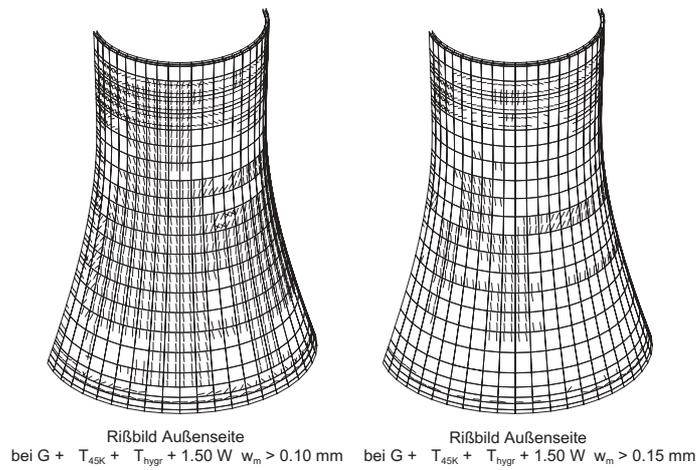


Abbildung 4.43: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 1.50 W$

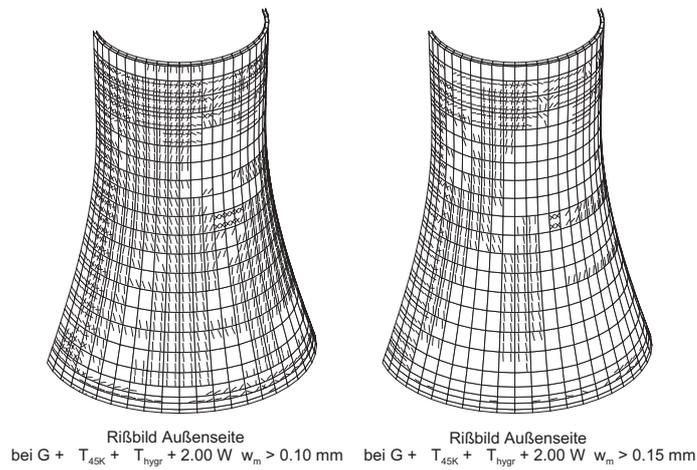


Abbildung 4.44: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 2.00 W$

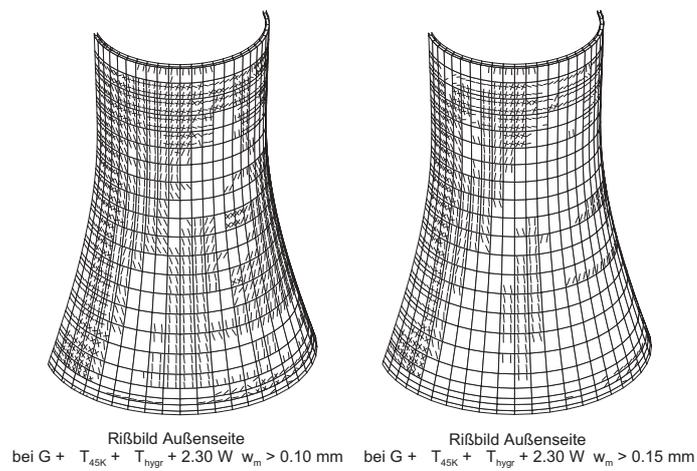


Abbildung 4.45: Rißbild bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + 2.23 W$

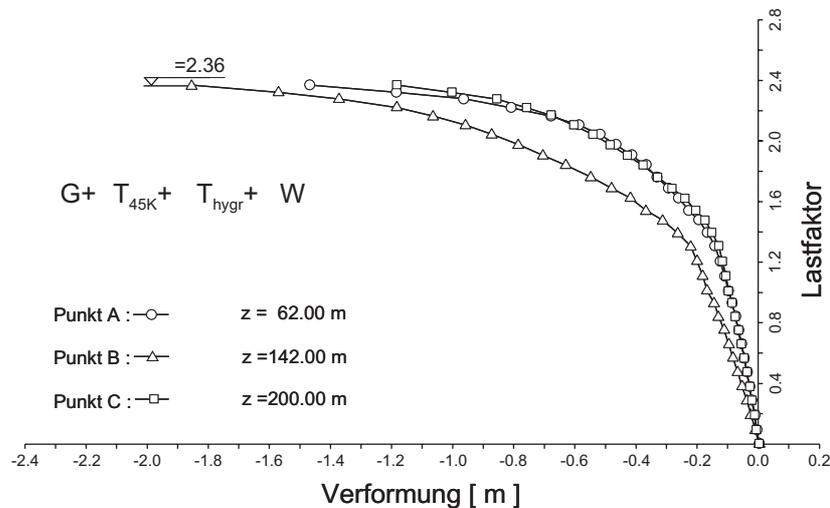


Abbildung 4.46: Last-Verformungspfade in den Punkten A, B und C

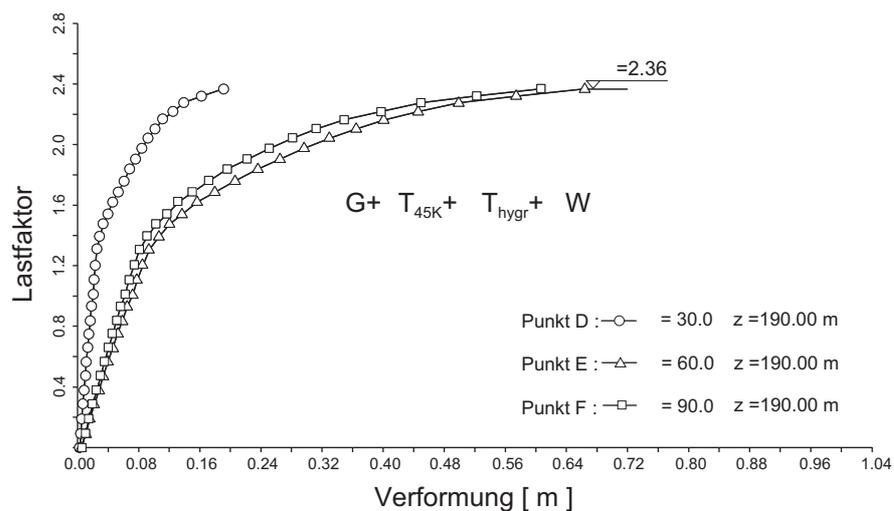


Abbildung 4.47: Last-Verformungspfade in den Punkten D, E und F

4.2.2.5 Lastfall $G + \Delta T + W_{zyk}$

Wie bereits im Abschnitt 4.2 erwähnt, wird mit diesem Lastkollektiv versucht, die Schädigungsentwicklung über die Lebensdauer des Turmes global zu simulieren.

Nach der Belastung mit der Kombination $G + \Delta T + \Delta T_{hygr} + 1.0 W$, wird die Temperaturbeanspruchung des winterlichen Betriebszustandes ΔT_{45K} auf die Temperaturbeanspruchung des Normalbetriebes ΔT_{25K} gesenkt. Anschließend wird die Windbelastung mit $1.0 W$ dreimal herunter- und hochgefahren. Der Turm wird danach

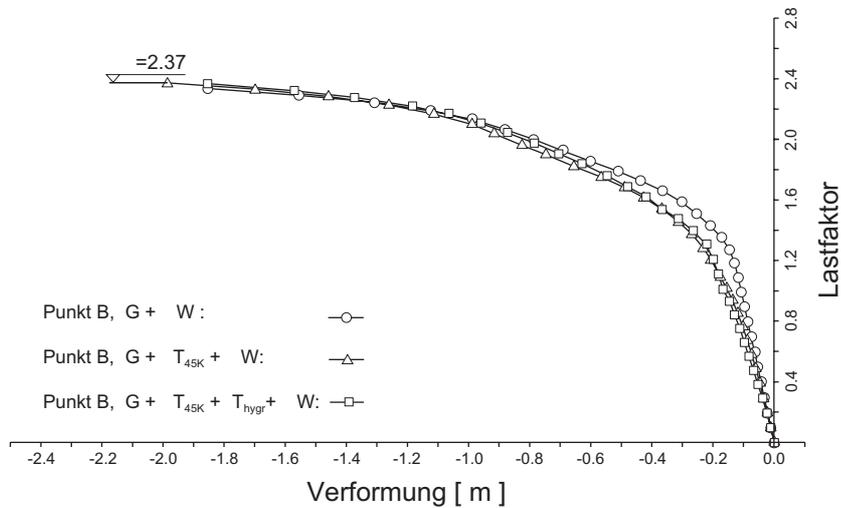


Abbildung 4.48: Vergleich der Last-Verformungspfade

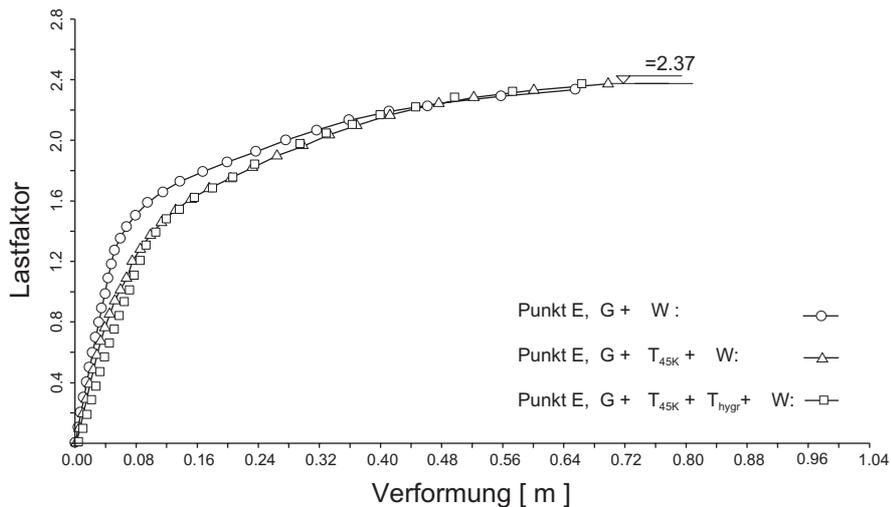


Abbildung 4.49: Vergleich der Last-Verformungspfade

mit monoton steigender Windlast bis zum Versagen beansprucht.

Das prinzipielle Verhalten des Turmes unter dieser Lastfallkombination ist ähnlich wie beim ersten Turm. Die Abbildungen 4.51 und 4.52 zeigen, wie beim Turm A, keinen wesentlichen Einfluß der zyklischen Windbeanspruchung auf das Last-Verformungsverhalten in der Taille des Turmes. Die verbleibenden Risse nach den Windlastzyklen sind in Abbildung 4.50 dargestellt. Breitere vertikale Risse befinden sich in der unteren Hälfte der Schale, jedoch kleiner als $w_m = 0.15 \text{ mm}$. Das bereits in Abschnitt 4.2.1.6 ausführlich diskutierte Verhalten gilt auch für diesen Turm.

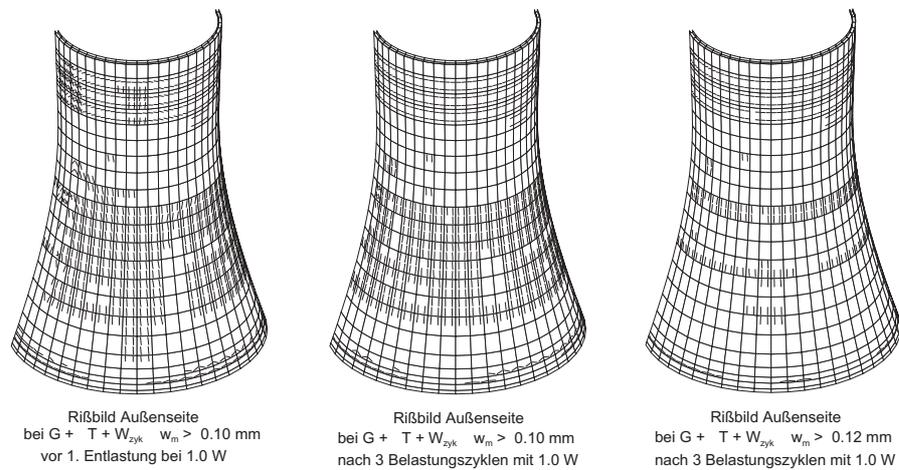


Abbildung 4.50: Rißbild nach 3 Belastungszyklen mit 1.0 W

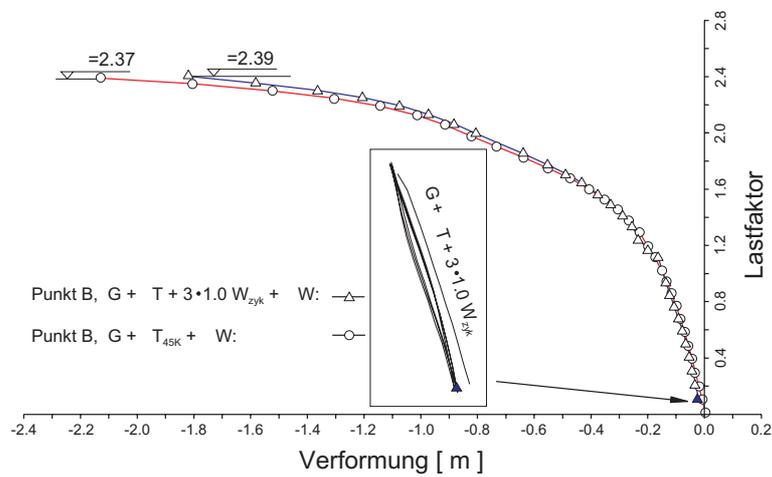


Abbildung 4.51: Vergleich der Last-Verformungspfade

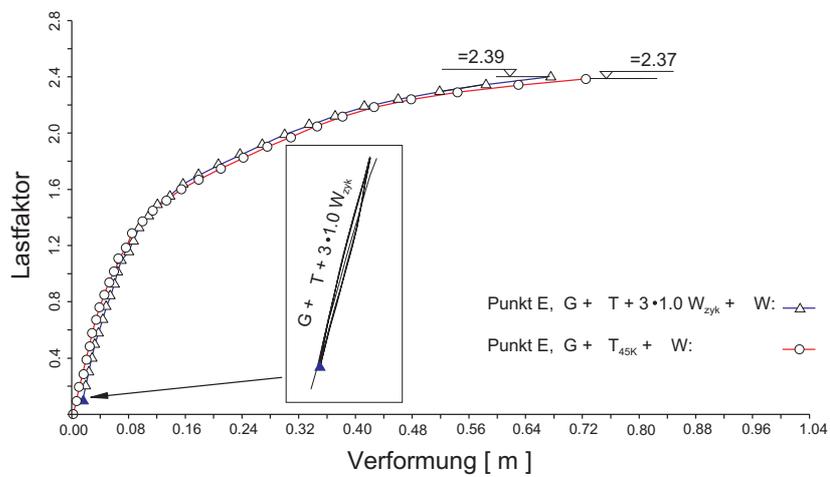


Abbildung 4.52: Vergleich der Last-Verformungspfade

4.2.2.6 Auswertung der Analyse

Aus der bisherigen statischen Schädigungsanalyse läßt sich folgende Vorhersage über die Dauerhaftigkeit und die Standsicherheit des Kühlturmes treffen.

Bei der numerischen Simulation unter den vier herangezogenen Lastfallkombinationen entsprechen die Versagenslasten etwa der 2.4-fache Bemessungswindlast: Der Kühlturm ist somit standsicher.

Im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit weist der Turm keine ausgeprägte Rißbildung auf. Aus den Rißbildern der Simulation mit dem Belastungsszenario $G + \Delta T + W_{zyk}$ läßt sich erkennen, daß die mittleren Rißbreiten im wesentlichen zwischen 0.10 mm und 0.12 mm liegen. Mit Berücksichtigung einer Streuung der Rißbreite ist eine während der Lebensdauer auftretende, maximale Rißbreite zwischen 0.2 mm und 0.25 mm zu erwarten, die gerade an der Grenze der zu beschränkenden Rißbreite liegt.

Kapitel 5

Schädigungsprozesse

5.1 Nichtlineare Schädigungsprozesse

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung der Kontinuumsdynamik wurde als allgemeine Formulierung bereits durch die Gleichung (2.61) beschrieben. Zu der bisher behandelten Formulierung des statischen Sonderfalls ($\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$) muß der Arbeitsanteil der D'ALAMBERTschen Trägheitskräfte

$$\delta W_t = - \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv \quad (5.1)$$

berücksichtigt werden. Somit läßt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebung in der Form ausdrücken:

$$\delta W = \delta W_t + \delta W_i - \delta W_a = 0. \quad (5.2)$$

Im Hinblick auf die Simulation der Schädigung läßt sich für ein beliebig diskretisiertes Tragwerk das Prinzip der virtuellen Verschiebung als folgende nichtlineare Bewegungsgleichung beschreiben:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} - \mathbf{G}(\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{P}(t). \quad (5.3)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{V} wesentliche Knotenfreiheitsgrade und \mathbf{P} korrespondierende Knotenkraftgrößen. $\dot{\mathbf{V}}$ und $\ddot{\mathbf{V}}$ stellen jeweils die Spalte der Knotengeschwindigkeiten und der Knotenbeschleunigungen dar. \mathbf{M} beschreibt die globale Massenmatrix. \mathbf{d} ist ein den Deteriorationsprozeß des Tragwerks auf der Ebene der äußeren Variablen \mathbf{V} , \mathbf{P} charakterisierender Parametersatz. Er enthält beispielsweise Lebenszeitintervalle, Zyklenzahlen und Typen von Einwirkungskollektiven, Intensität und Starkbebendauer einer seismischen Erregung oder Intensität und Anzahl singulärer Schädigungsereignisse. Die physikalische Zeit verkörpert t . Das nichtlineare Vektorfunktional \mathbf{G} beschreibt die inneren Knotenkraftgrößen infolge viskoser ($\dot{\mathbf{V}}$), elasto-plastischer (\mathbf{V}) und deteriorierender (\mathbf{d}) Tragwerksprozesse.

Um einen inkrementell-iterativen Lösungsalgorithmus herzuleiten soll die Ausgangsgleichung (5.3), analog der nichtlinearen Statik, linearisiert werden. Somit entsteht als Ergebnis die tangentielle Bewegungsgleichung ([Krätzig 1989], [Krätzig 1990]):

$$\mathbf{M} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}_T \cdot \Delta \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{V} = \mathbf{P} - \mathbf{F}_I = \mathbf{P} - \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{G}(\dot{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}, \mathbf{d}, t). \quad (5.4)$$

Dabei ist \mathbf{C}_T die tangentielle (viskose) Dämpfungsmatrix und \mathbf{K}_T die tangentielle Steifigkeitsmatrix. \mathbf{F}_I bezeichnet den inneren Knotenkraftvektor aus Trägheitswirkungen ($\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}}$) sowie aus viskosen, elasto-plastischen und deteriorierenden Tragwerksprozessen ($\mathbf{G}(\dot{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{V}}, \mathbf{d}, t)$).

Dynamische Beanspruchungsprozesse eines Tragwerks und seine Schädigungsprozesse laufen in sehr unterschiedlichen Zeitskalen ab. Erstere bewegt sich im Sekundenbereich, Deteriorationsprozesse dagegen in Lebensdauerintervallen von ca. 10^8 s. \mathbf{C}_T , \mathbf{K}_T , und \mathbf{G} können daher funktionale Bestandteile sehr unterschiedlicher zeitlicher Größenordnung enthalten. Bei den klassischen Untersuchungen zur Ermüdungsfestigkeit von Tragwerken unter hohen Beanspruchungszyklen - dem high-cycle-fatigue - werden die sich ausbildenden Deteriorationen als so lokal wirkend angesehen, daß ihre Auswirkungen auf die globale Tragwerkssteifigkeit \mathbf{K}_T und auf die inneren Knotenkraftgrößen \mathbf{G} vernachlässigbar sind. Schnittgrößen der nach geltenden Normen ausgeführten Dauer- und Betriebsfestigkeitsnachweise, für den Stahlbau in der Monographie Seeger (1996) zusammengestellt, entstammen daher stets linear-elastischen statischen (oder dynamischen) Analysen. Setzt man schließlich eine statistische Gleichverteilung der in Betriebsfestigkeitsnachweisen verwendeten Lastkollektive über einzelnen Lebensdauerintervalle eines Tragwerks voraus, so folgt aus all diesen Annahmen eine lineare Schädigungsakkumulation mit der Zeit. Dies stellt eine Voraussetzung zur Bestimmung von Tragwerkslebensdauern und Inspektionsintervallen sowie zur Planung von Rehabilitationsmaßnahmen dar.

Bei Ausbildung nichtlinearer Schädigungsprozesse sind die durch den Deteriorationsprozeß formulierten Modifikationen der Tragwerkssteifigkeit \mathbf{K}_T und der inneren Knotenkraftgrößen \mathbf{G} nicht mehr vernachlässigbar klein und verursachen daher nichtlineare Schädigungsakkumulationen. Damit verändert sich im Verlaufe des Schädigungsprozesses das Antwortverhalten des Tragwerks. Die Simulation des Tragverhaltens muß deshalb nichtlinear erfolgen, und zwar durch Integration der tangentialen Bewegungsgleichung oder für quasi-statisches Vorgehen durch iterativ-inkrementelle Lösung der tangentialen Steifigkeitsbeziehung. Voraussetzung für nichtlineare Schädigungsprozesse ist somit die Abhängigkeit von Steifigkeit $\mathbf{K}_T(\mathbf{d})$ und inneren Knotenkraftgrößen $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ von den charakterisierenden Parametern \mathbf{d} des Deteriorationsprozesses.

Besondere Aufmerksamkeit erfordern nichtlineare Schädigungsprozesse, wenn die Einwirkungen signifikant zeitabhängig sind, z.B. für Wind-, Wellen-, Maschinen- oder Verkehrserregung. Dann nämlich kann sich das Systemverhalten durch Deterioration von demjenigen des Neuzustandes entfernen: Das dynamische System verstimmt sich schädigungsgetrieben. Liegt ein breitbandiges Erregerspektrum mit ausgeprägtem Maximum vor, so können sich nur tiefabgestimmte Systeme - die dominanten Eigenfrequenzen liegen unterhalb des Erregermaximums - durch Schädigung der Beanspruchung entziehen. Steifigkeitsreduzierungen führen bekanntlich zu niedrigeren Eigenfrequenzen, wodurch jedes tiefabgestimmte System seine Neuwertposition in Richtung schwächerer Erregerdynamik verlassen kann.

Hochabgestimmte Systeme – die dominanten Eigenfrequenzen liegen oberhalb des Erregermaximums – werden sich dagegen durch Deteriorationen automatisch und fortschreitend in Bereiche stärkerer Erregung adaptieren, wodurch sich ein progressiver Schädigungsprozeß ausbildet.

Nichtlineare Schädigungsprozesse gehören wegen ihrer komplizierten Materialbeschreibungen zu den (heute noch) nicht in Echtzeit simulierbaren Tragwerksphänomenen. Daher beschränkt man sich auf die Antwortanalyse weniger Einwirkungszyklen mit nachfolgender Extrapolation oder insgesamt auf Abschätzungen der nichtlinearen Schädigungsakkumulation. Im ersten Fall muß mindestens ein gesamter Einwirkungszyklus behandelt werden, um einen Vergleich mit dem überlasteten, ungeschädigten Neuzustand zu ermöglichen.

5.2 Quantifizierung des Schädigungszustandes

Zur Quantifizierung der sich entwickelnden Schädigungen kann eine infinitesimale Dynamik auf die in statischer Analyse unter den betrachteten Lastfallkombinationen berechneten nichtlinearen Deformationszuständen eines Tragwerks superponiert werden. Somit wird der Einfluß der Steifigkeitsabnahme des Tragwerks durch die Schädigungsprozesse aus der statischen Analyse nun aus dem Verlauf der Eigenfrequenzen über unterschiedlichen Schädigungsniveaus abgelesen. Dabei dient das Eigenfrequenzspektrum als ein überaus anschauliches, nicht konstitutiv verankertes System globaler Schädigungsparameter, aus welchem Aufschlüsse über die Ursachen des Schädigungsprozesses gezogen werden können ([Harte, Krätzig, Noh & Petryna 2000]).

Bei der Eigenschwingungsanalyse werden infinitesimal kleine elastische Bewegungen um den als fixiert angenommenen, geschädigten Lösungspunkt $\mathbf{V}(t^*)$, $\dot{\mathbf{V}}(t^*)$, \mathbf{d}^* der nichtlinearen Zustandsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}_T(\mathbf{V}(t^*), \mathbf{d}^*) \cdot \Delta \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}_T(\mathbf{V}(t^*), \mathbf{d}^*) \cdot \Delta \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

gesucht, wobei die Gleichung (5.5) den ausiterierten Zustand der tangentialen Bewegungsgleichung (5.4) darstellt. Somit werden Eigenschwingungen einem kinematisch und physikalisch nichtlinear deformierten, quasi-statisch berechneten Grundzustand des Tragwerks mit unterschiedlichen beanspruchungsniveau abhängigen Schädigungszuständen superponiert.

Als Maß für quantitative Auswirkungen der Makro-Schädigungen auf das Tragverhalten lassen sich sehr anschauliche, phänomenologische Indikatoren aus der nichtlinearen FE-Analyse gewinnen. Von einem derartigen Indikator verlangt man, daß er den ungeschädigten Tragwerks-Neuzustand trennscharf von teil- oder grenzgeschädigten (unmittelbar vor dem Kollaps) Zuständen unterscheidet und letztere quantifiziert.

Alle hierzu erforderlichen Informationen sind als Folge des Simulationskonzeptes Krätzig (1997) in der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T(\mathbf{V}, \mathbf{d})$ enthalten. Somit spiegeln sie sich

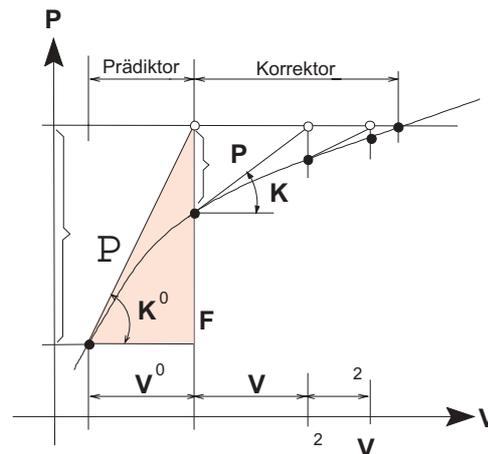


Abbildung 5.1: Schema des Newton-Raphson-Verfahrens

als m skalare, reelle Größen im Spektrum der Eigenwerte von \mathbf{K}_T oder der dämpfungs-freien Eigenfrequenzen ($\mathbf{C}_T = \mathbf{0}$) von Gleichung (5.5) wider:

$$f_1(\mathbf{V}, \mathbf{d}), f_2(\mathbf{V}, \mathbf{d}), \dots, f_i(\mathbf{V}, \mathbf{d}), \dots, f_m(\mathbf{V}, \mathbf{d}). \quad (5.6)$$

Bezieht man die Eigenfrequenzen f_i auf ihre jeweils schädigungsfreien Pendants des Tragwerks-Neuzustands $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, so läßt sich durch

$$D_i(\mathbf{V}, \mathbf{d}) = 1.00 - \frac{f_i(\mathbf{V}, \mathbf{d})}{f_i(\mathbf{V}, \mathbf{d} = \mathbf{0})}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.7)$$

ein Satz von m Schädigungsindikatoren herleiten, die in Übereinstimmung mit modernen Definitionen ([Garstka, Krätzig, Meskouris, Meyer & Stangenberg 1991]) im Neuwertzu-stand den Wert 0 annehmen und für zunehmende Deteriorationen gegen 1.00 streben. Der Bezug auf die Skalare f_i , $i = 1, \dots, m$ macht D_i vorteilhafterweise als quantitative Schwächung des geschädigten Tragwerkszustandes interpretierbar, bezogen auf eine bestimmte Eigenform i .

Ein Nachteil bei der Anwendung der oben definierten Schädigungsindikatoren besteht darin, daß die Anzahl der als signifikant angesehenen Eigenfrequenzen vorab vernünftig abgeschätzt werden muß, wobei diese Abschätzung von der Tragwerks- und Beanspruchungsart abhängig ist.

Aus diesem Grund wurde ein weiterer Indikator definiert, der mit einem einzigen Parameter den Schädigungszustand beschreibt. Der Indikator basiert auf dem Verformungszuwachs $\Delta \mathbf{V}^0$, der vorteilhaft aus den inkrementellen Gleichgewichtsiterationen bei der nichtlinearen FE-Berechnung zu erhalten ist (vgl. Abb. 5.1), und daher keinen zusätzlichen, numerischen Aufwand bereitet.

$\Delta \mathbf{V}^0$ bezeichnet das Verschiebunginkrement beim ersten Iterationsschritt z.B. im $(l+1)$ -ten Lastinkrement und stellt die tangentielle Steifigkeit des Tragwerks im Gleichgewichts-

zustandes des vorherigen Lastschrittes dar. Da die Modalformen wegen ihrer Orthogonalitätseigenschaft Basisvektoren im betrachteten Raum bilden, läßt sich das Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{V}^0$ als Linearkombination sämtlicher Modalformen darstellen:

$$\Delta \mathbf{V}^0 = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \Phi_i. \quad (5.8)$$

Analog bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen mit bekannten Modalformen ([Meskouris 1999]) kann man nun unter Anwendung des Rayleigh-Quotienten die zu dem Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{V}^0$ gehörigen Eigenwert des dynamischen Systems berechnen.

$$\bar{f}_l^2 = \frac{\Delta \mathbf{V}^{0T} \cdot \mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{V}^0}{\Delta \mathbf{V}^{0T} \cdot \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{V}^0} \quad (5.9)$$

Verwendet man weiter die Definition nach Gleichung (5.7), so läßt sich der auf der Verformung basierende Schädigungsindikator nunmehr wie folgt darstellen:

$$D_{\Delta V} = 1 - \frac{\bar{f}_l}{\bar{f}_0}. \quad (5.10)$$

Dabei bezeichnet \bar{f}_0 den Bezugsschädigungsparameter, der den Ausgangszustand des jeweilig betrachteten Lastfalles darstellt.

Kapitel 6

Schädigungsanalysen der Naturzugkühltürme

Ausgehend von der im vorherigen Kapitel ausgeführten Betrachtung der Tragwerksschädigung soll in diesem Kapitel der Schädigungszustand beider Naturzugkühltürme unter den bereits betrachteten statischen Lastfallkombinationen analysiert werden.

6.1 Analyse der Eigenschwingungen

Im folgenden werden Analysen der Eigenschwingungen beider Türme mit Berücksichtigung der Schädigungszustände in Abhängigkeit der verschiedenen Lastintensitäten durchgeführt. Der Verlauf der Eigenfrequenzen soll die Abnahme der globalen Steifigkeit widerspiegeln. Dabei wurde für einen anschaulichen Vergleich mit der statischen Analyse die Bodensteifigkeit als zeitunabhängig angenommen.

6.1.1 Turm A

Die Abbildungen (6.1), (6.2) und (6.3) zeigen die Verläufe der ersten drei Eigenfrequenzen über dem Windlastfaktor λ , die sowohl den Beanspruchungs- als auch den Schädigungszustand charakterisieren, für die drei untersuchten Lastfallkombinationen.

Die in Abbildung (6.1) dargestellten Verläufe der ersten drei Eigenfrequenzen für den Lastfall $G + \lambda W$ zeigen bis zum Einsetzen erster Rißprozesse bei $\lambda = 1.75$ weitgehend konstante Werte zwischen $f = 0.67 \text{ Hz}$ und $f = 0.74 \text{ Hz}$. Durch den Steifigkeitsabfall des Tragwerkes, den die schlagartig auftretenden horizontalen Trennrisse im Luvbereich hervorrufen, kommt es zu einem dramatischen Abfall der 1. Eigenfrequenz, auf ca. $f = 0.58 \text{ Hz}$ bei $\lambda = 2.0$ und um ca. 65% bis zum Versagen. Die 2. und 3. Eigenfrequenz verhalten sich bis zu ca. $\lambda = 2.2$ relativ konstant, danach fallen sie bis zum Versagen um ca. 30% bzw. 18%.

Die Verläufe der Eigenfrequenzen für die Beanspruchungskombination $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ zeigen eine Reduktion der Eigenfrequenzen im Vergleich zu $G + \lambda W$, durch die Vorschädigung des gesamten Kühlturmes infolge der Temperaturgradienten ΔT_{45K} und den damit einhergehenden Steifigkeitsabfall, die Reduktion beträgt für die 1. Eigenfrequenz beispielsweise 15% (vgl. Abb. **6.2**). Die 1. Eigenfrequenz verläuft leicht abfallend (um ca. 10%), ausgehend von $f = 0.58 \text{ Hz}$ bis zum Lastfaktor $\lambda = 1.75$.

Bei fortschreitender Schädigung durch die Windbelastung kommt es zu einem ähnlich starken Abfall nach $\lambda = 1.75$ und dem auftretenden Versagen bei ca. 62% wie unter $G + \lambda W$. Die 2. Eigenfrequenz reagiert ebenfalls auf die fortschreitende Schädigung durch den Wind, jedoch kommt es bei $\lambda = 1.4$ zu einem sprunghaften Abfall um 14%, danach verhält sich der Verlauf bis zu $\lambda = 2.2$ annähernd konstant und folgt dann der oben beschriebenen Charakteristik der 2. Eigenfrequenz bei $G + \lambda W$ bis zum Versagen. Die 3. Eigenfrequenz verhält sich analog zur 3. Eigenfrequenz des kalten Turmes.

Unter der Beanspruchungskombination $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$ kommt es zu einer erheblichen Reduktion der 1. Eigenfrequenz durch die zusätzliche Vorschädigung des gesamten Tragwerkes, infolge der hygrischen Beanspruchung, auf $f = 0.49 \text{ Hz}$ (vgl. Abb. **6.3**); dieses entspricht etwa einer 30-prozentigen Reduktion der ungeschädigten 1. Eigenfrequenz unter reinem Eigengewicht. Die anderen Eigenfrequenzen unterliegen zwar auch einer Reduktion, aber diese sind weniger ausgeprägt. Die Eigenfrequenzen ändern sich mit steigender Windlast tendenziell ähnlich wie bei der Lastfallkombination $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$.

Aus den Eigenfrequenzverläufen in den Abbildungen **6.2** und **6.3** zieht man folgende strukturmechanische Schlußfolgerungen: Der gesamte Turm wurde infolge der Vorschädigung bereits so stark gerissen, daß die weitere Schädigung im lokalen Bereich infolge des "niedrigen" Windlastniveaus den globalen Zustand nicht mehr stark beeinträchtigen kann. In diesem Schädigungsniveau reagieren die 2. und die 3. Eigenfrequenzen etwas sensibler auf die lokale Schädigung aus der "niedrigen" Windbeanspruchung. Die 1. Eigenfrequenzen reagieren erst nach dem starken Abfall der 2. Eigenfrequenzen auf die Windbeanspruchung. Die 2. Eigenfrequenzen setzen den Anfangstrend der 1. Eigenfrequenzen bis kurz vor dem Versagen fort. Die 3. Eigenfrequenzen verhalten sich gegenüber den 2. Eigenfrequenzen prinzipiell in gleicher Weise.

Diese Modifikation der dynamischen Eigenschaften des Turms läßt sich an Hand der Änderungen der Modalformen noch detaillierter darstellen. In Abbildungen **6.4** und **6.5** sind die Änderungsprozesse der ersten drei Modalformen repräsentativ für die Lastfallkombination $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ dargestellt. Die ersten drei Modalformen unter Eigengewicht sind drei-, fünf- und vierwellige Biegemodalformen, die sich an der oberen Hälfte der Schale signifikant ausbilden. Durch die Steifigkeitsreduktion der Außenseite der Schale infolge der thermischen Einwirkung zeigt der Turm neue Eigenschaften. Somit wird die erste Modalform mit einer Eigenfrequenz $f = 0.58 \text{ Hz}$ fünfwellig und die zweite mit $f = 0.66 \text{ Hz}$ dreiwellig, während die dritte Modalform mit $f = 0.70 \text{ Hz}$ unverändert vierwellig bleibt. Bei der Betrachtung der Lastfallkombination $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ erkennt

man, daß nach dem sprunghaften Abfall der zweiten Eigenfrequenz etwa auf dem Niveau der ersten Eigenfrequenz bei $\lambda = 1.4$ die zweite Modalform dazu tendiert, wie die erste Modalform, fünfwellig zu werden. Die Eigenfrequenz tendiert bis kurz vor dem Versagen dazu, die von der ersten Eigenfrequenz und Modalform vorgegebene Frequenz weiter zu erhalten. Somit bildet die Modalform beispielsweise bei $\lambda = 1.9$ in Abbildung 6.5 eine deutlich fünfwellige Form aus, die der ersten entspricht. Im Vergleich dazu ändert sich die vierwellige dritte Form erst bei sehr hohem Windlastniveau und nähert sich somit der fünfwelligen zweiten Modalform. Kurz vor dem Versagen gleichen die Modalformen der Versagensverformung.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Schwingungsanalyse unter der zyklischen Beanspruchungskombination $G + \Delta T + W_{zyk}$ kurz zusammengefaßt: Die angesetzten zyklischen Windbeanspruchungen mit der Intensität $\lambda = 1.0$ ändern die dynamischen Eigenschaften des Turms unwesentlich. Daher bleiben die Eigenfrequenzen des Turmes annähernd unverändert ([Harte, Krätzig, Noh & Petryna 2000]), obwohl diese Windlastzyklen zur Rißbreitenentwicklung signifikant beigetragen haben. Jedoch verhält sich der Turm bei der zyklischen Temperatureinwirkung anders: Trotz der Reduktion des Temperaturgradienten bleibt der Schädigungszustand des Turmes annähernd unverändert. Somit erhöht sich die 1. Eigenfrequenz von $f = 0.49 \text{ Hz}$ unter der Lastfallkombination $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr}$ lediglich auf $f = 0.51 \text{ Hz}$ nach der Reduzierung der Temperaturbeanspruchung um ΔT_{20K} . Der Turm schwingt bei der weiteren Reduzierung der Temperatur auf den Normalbetriebszustand mit vollständiger Entlastung der hygrischen Einwirkung $G + \Delta T_{25K}$ mit der 1. Eigenfrequenz von $f = 0.52 \text{ Hz}$. Die 2. und 3. Eigenfrequenzen verhalten sich auch in ähnlicher Weise. Das gleiche Schwingungsverhalten läßt sich auch beim zweiten Turm B feststellen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die niedrigste Eigenfrequenz eines Turmes, der den winterlichen Betrieb erlebt hat, infolge Temperatur und hygrischer Beanspruchung stark reduziert wird. Diese schädigungsbedingt reduzierte Eigenfrequenz und die zugehörige Eigenform, die nicht notwendigerweise mit der aus der linearen Analyse übereinstimmen muß, bleibt trotz der Verbesserung der thermischen Bedingungen weitergehend unverändert.

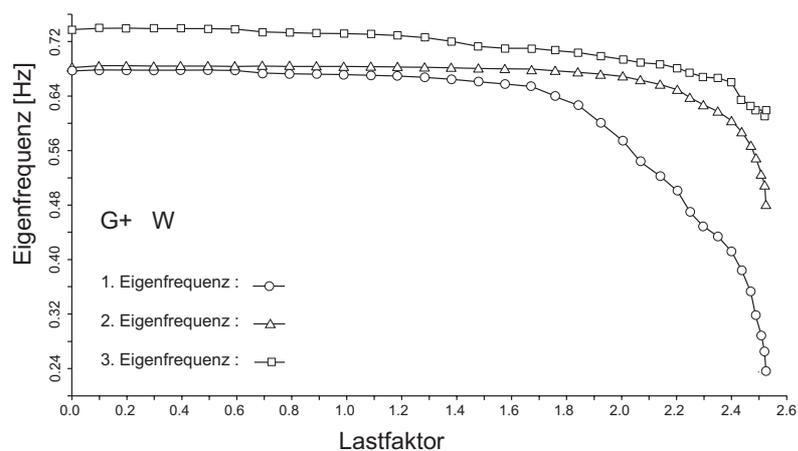


Abbildung 6.1: Verlauf der ersten drei Eigenfrequenzen bei $G + \lambda W$

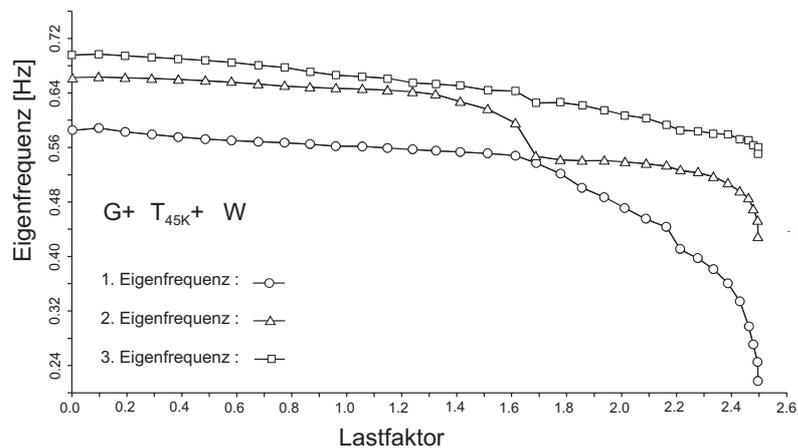


Abbildung 6.2: Verlauf der ersten drei Eigenfrequenzen bei $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$

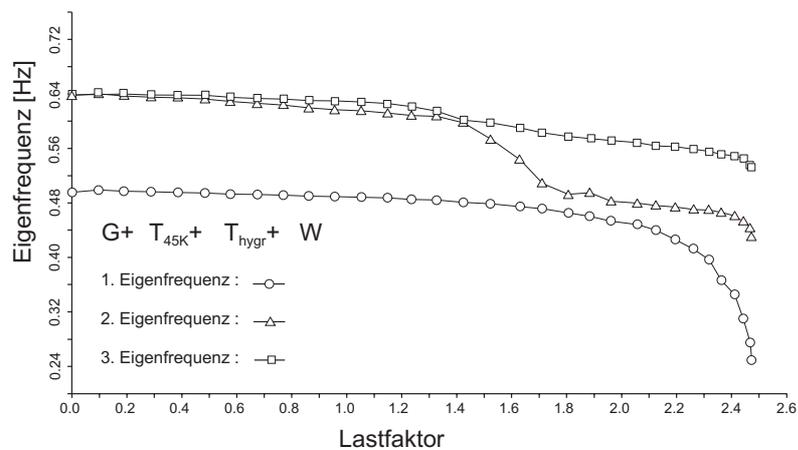


Abbildung 6.3: Verlauf der ersten drei Eigenfrequenzen bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$

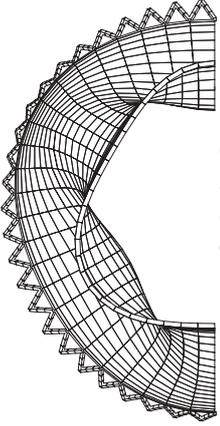
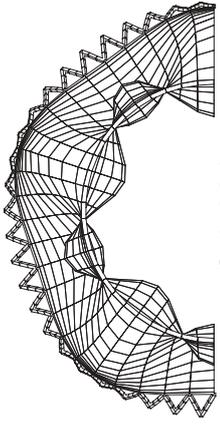
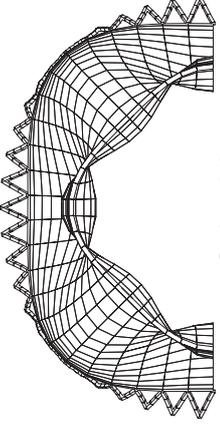
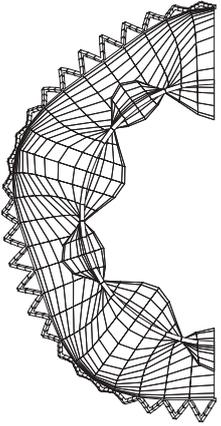
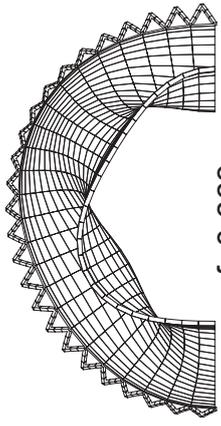
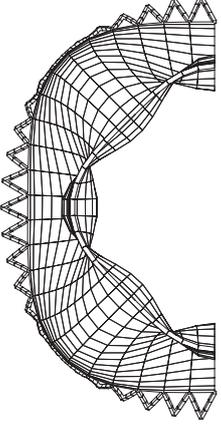
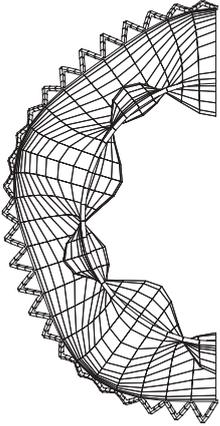
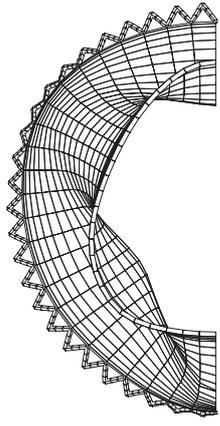
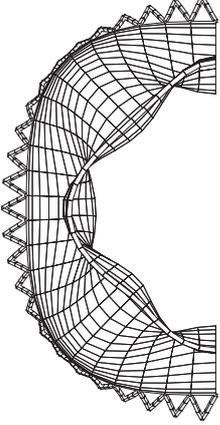
1. Modalform	2. Modalform	3. Modalform	Last
 $f=0.676$	 $f=0.681$	 $f=0.736$	G
 $f=0.585$	 $f=0.663$	 $f=0.696$	G + T _{45K}
 $f=0.553$	 $f=0.627$	 $f=0.650$	G + T _{45K} + W

Abbildung 6.4: Änderung der ersten drei Modalformen über den Lastfaktor λ

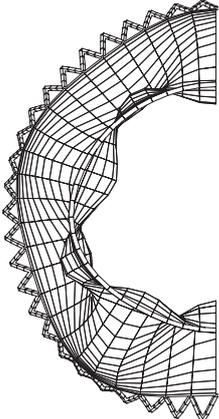
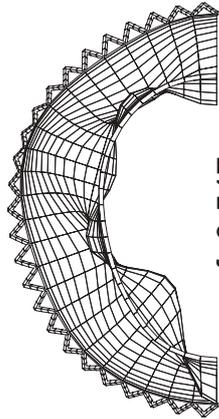
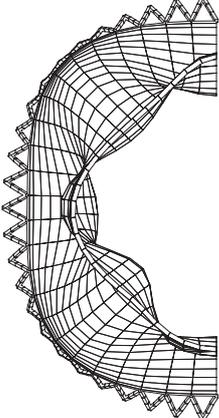
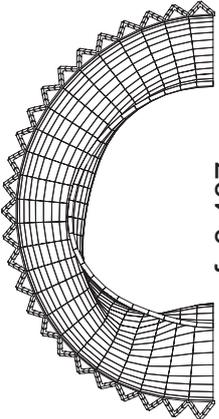
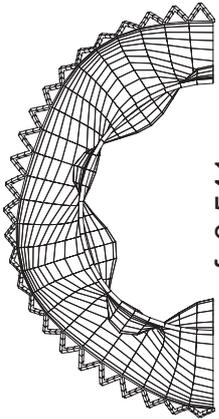
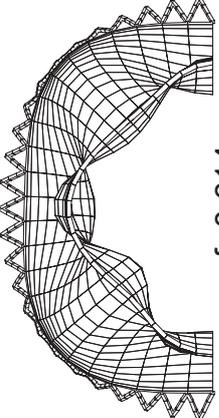
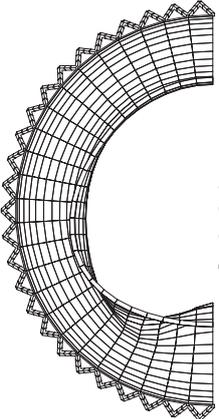
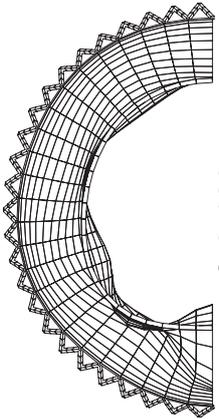
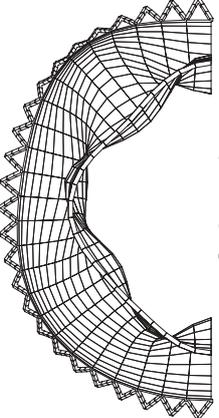
1. Modalform	2. Modalform	3. Modalform	Last
 <p>f=0.537</p>	 <p>f=0.547</p>	 <p>f=0.625</p>	$G + T_{45K} + W$
 <p>f=0.487</p>	 <p>f=0.541</p>	 <p>f=0.614</p>	$G + T_{45K} + W$
 <p>f=0.217</p>	 <p>f=0.429</p>	 <p>f=0.551</p>	$G + T_{45K} + W$



Abbildung 6.5: Änderung der ersten drei Modalformen über den Lastfaktor λ

6.1.2 Turm B

Die Eigenfrequenzen ändern sich qualitativ ähnlich wie beim ersten Turm. Jedoch beginnen die Eigenfrequenzen dieses Turmes viel früher abzusinken, was bereits aus dem Verformungsverhalten zu erkennen war (Abb. **6.6**, **6.7**, **6.8**).

Beim kalten Turm beginnt der dramatische Abfall der 1. Eigenfrequenz ab dem Windlastfaktor $\lambda = 1.3$. Während die bereits aus der Temperaturbeanspruchung um 17% reduzierte 1. Eigenfrequenz ab $\lambda = 1.1$ reagiert, beginnt diejenige unter der zusätzlichen hygrischen Beanspruchung erst etwas später bei $\lambda = 1.3$, wobei die Anfangsreduktion der 1. Eigenfrequenz ca. 24% beträgt. Bei allen drei Beanspruchungskombinationen reduziert sich die 1. Eigenfrequenz unmittelbar vor dem Versagen auf ca. 0.1 Hz.

Im Bereich der "niedrigen" Windlast bleiben die 1. Eigenfrequenzen nahezu konstant, während die anderen Eigenfrequenzen auf die Schädigung im lokal begrenzten Bereich infolge der Windbeanspruchung sensibler reagieren. Betrachtet man die Änderung der Modalformen, die in den Abbildungen **6.9** und **6.10** repräsentativ für die Beanspruchungskombination $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ dargestellt sind, läßt sich, ähnlich wie beim ersten Turm, die folgende Änderung des Schwingungsverhaltens des Turmes feststellen.

Die ersten drei Modalformen des "jungfräulichen" Turmes weisen jeweils die fünf-, drei- oder vierwellige Biegemodalform auf. Bei der Schädigung durch die Temperaturbeanspruchung der gesamten Schale bildet sich die 2. Modalform sechswellig, während die 1. und 3. Eigenform unverändert bleiben. Die drei Modalformen, jeweils mit fünf, sechs und vier Wellen, behalten ihre Formen bis zum Windlastfaktor $\lambda = 1.0$. Bei $\lambda = 1.2$ fällt die 2. Eigenfrequenz sprunghaft auf das Niveau der 1. Eigenfrequenz und die sechswellige Modalform ähnelt dabei der fünfwelligen 1. Modalform, während sich die 1. Modalform wie die Versagensverformung aus Windbeanspruchung völlig ändert. Der gleiche Änderungsvorgang der Eigenfrequenz und Modalform gegenüber der sechswelligen 2. Modalform läßt sich auch bei der vierwelligen 3. Modalform erkennen. Nach diesem Windlastniveau bemüht sich die 2. Modalform allmählich der Versagensverformung zu ähneln, während die 3. Modalform weiter versucht, sich entsprechend der fünfwelligen 2. Modalform zu ändern. Wie beim Turm A sind alle drei Modalformen kurz vor dem Versagen vollständig verändert, und die ursprünglichen Modalformen des unbeschädigten Turmes sind nicht wieder zu finden. Alle drei Modalformen gleichen der Versagensverformung (vgl. Abb. **4.41**).

Die Schädigungsprozesse unter der Betrachtung der dynamischen Eigenschaften sind bei den beiden Türmen prinzipiell gleich. Dynamische Eigenschaften der Naturzugkühltürme ändern sich signifikant und daher stimmen sie nicht mit den aus den linearen Analysen überein. Die Vorschädigungen infolge Temperatur- und hygrischen Beanspruchungen spielen dabei eine entscheidende Rolle.

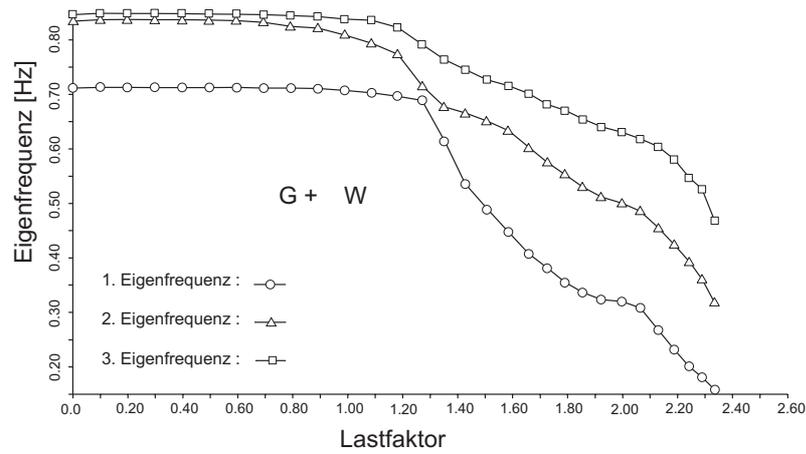


Abbildung 6.6: Verlauf der ersten drei Eigenfrequenzen bei $G + \lambda W$

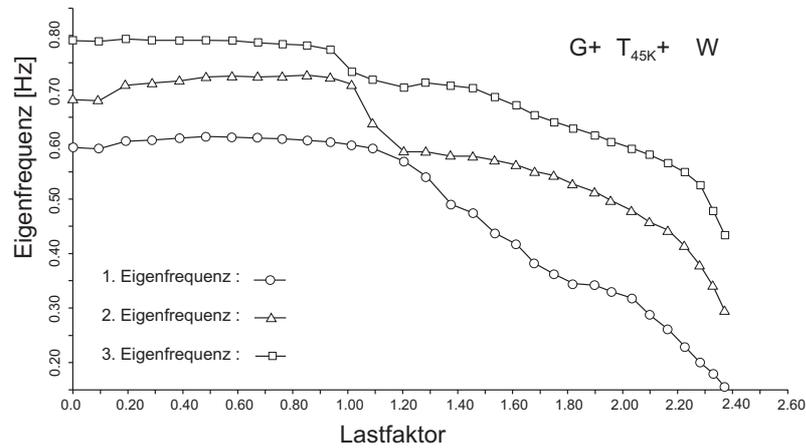


Abbildung 6.7: Verlauf der ersten drei Eigenfrequenzen bei $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$

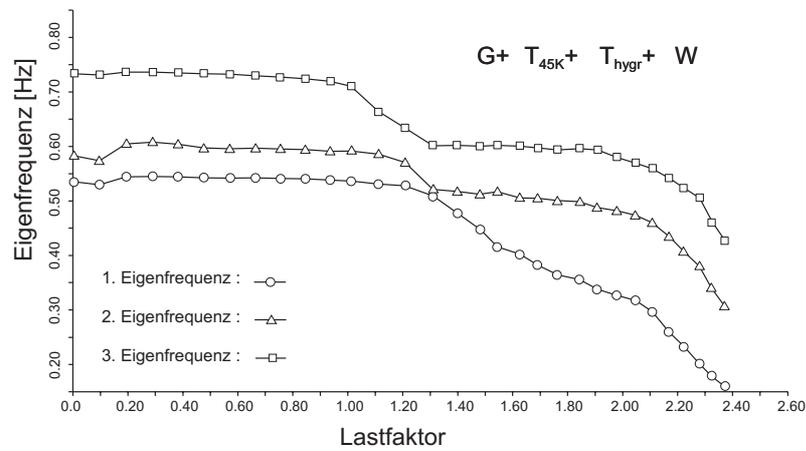


Abbildung 6.8: Verlauf der ersten drei Eigenfrequenzen bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hydr} + \lambda W$

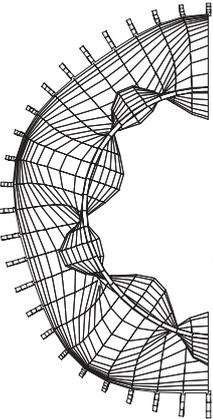
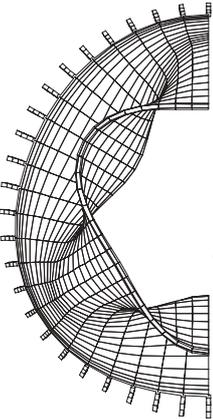
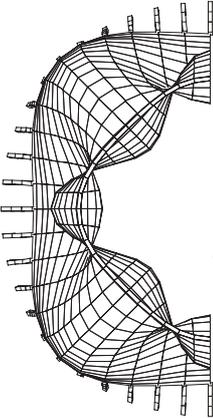
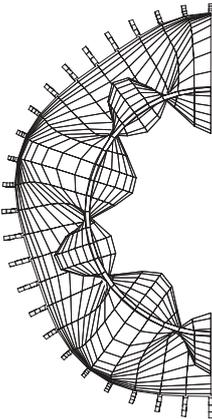
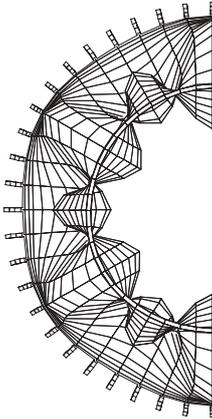
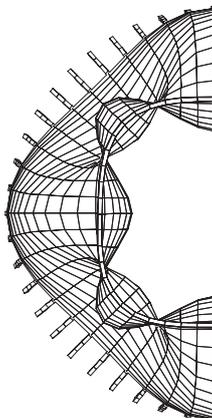
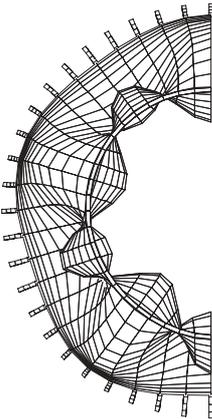
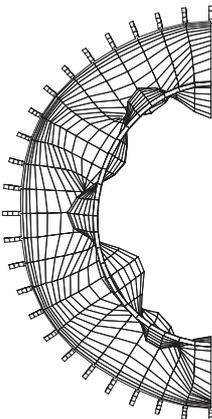
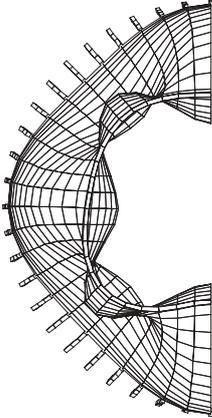
1. Modalform	2. Modalform	3. Modalform	Last
 <p>f=0.711</p>	 <p>f=0.834</p>	 <p>f=0.846</p>	G
 <p>f=0.593</p>	 <p>f=0.682</p>	 <p>f=0.790</p>	G + ΔT_{45K}
 <p>f=0.599</p>	 <p>f=0.709</p>	 <p>f=0.733</p>	G + ΔT_{45K} + 1.0 W

Abbildung 6.9: Änderung der ersten drei Modalformen über den Lastfaktor λ

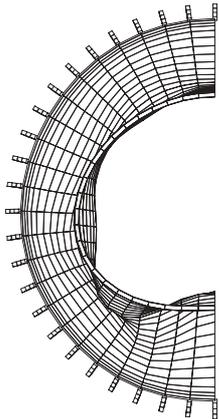
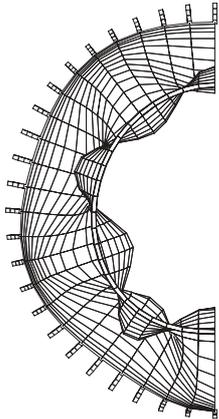
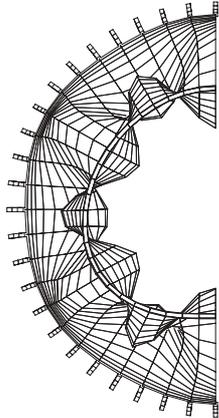
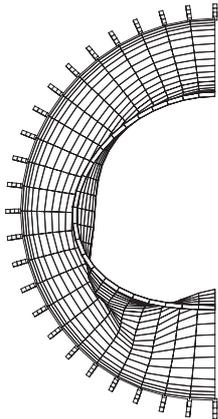
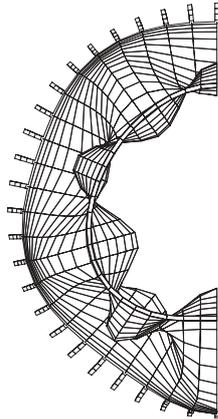
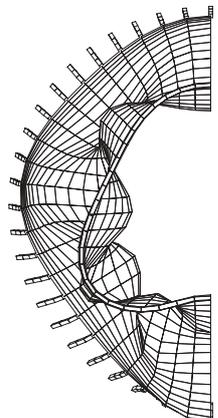
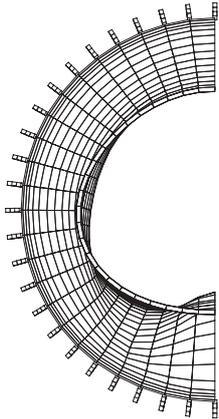
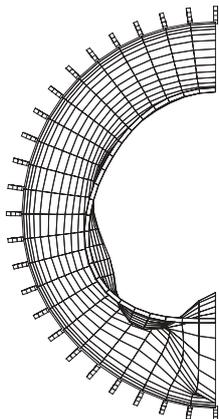
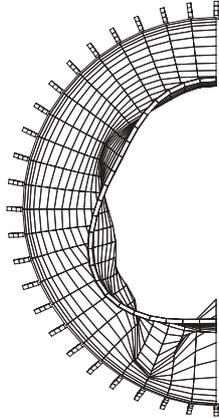
1. Modalform	2. Modalform	3. Modalform	Last
 <p>f=0.586</p>	 <p>f=0.590</p>	 <p>f=0.715</p>	$G + T_{45K} + W$
 <p>f=0.439</p>	 <p>f=0.568</p>	 <p>f=0.688</p>	$G + T_{45K} + W$
 <p>f=0.192</p>	 <p>f=0.367</p>	 <p>f=0.517</p>	$G + T_{45K} + W$



Abbildung 6.10: Änderung der ersten drei Modalformen über den Lastfaktor λ

6.2 Quantifizierung des Schädigungszustandes

Im folgenden werden die Schädigungszustände aus der statischen Analyse durch die im vorherigen Kapitel definierten Schädigungsindikatoren in Abhängigkeit des Lastniveaus der betrachteten Lastfallkombination quantifiziert.

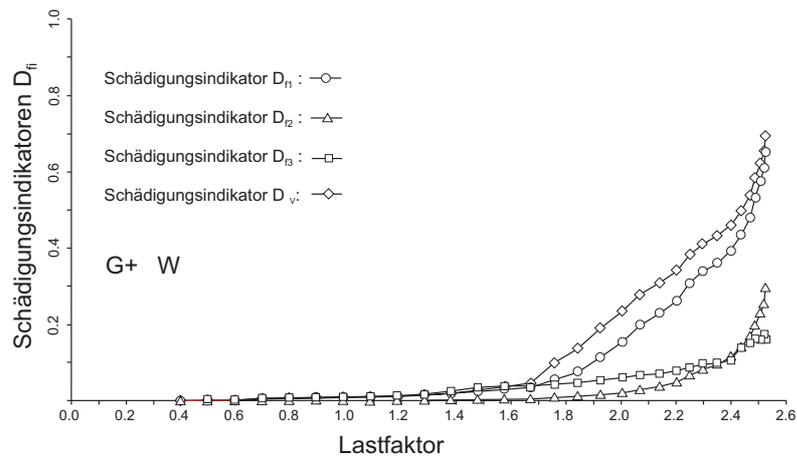
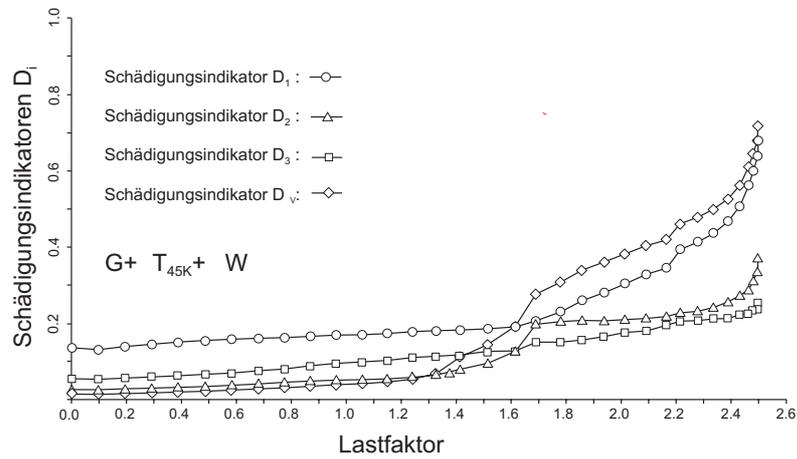
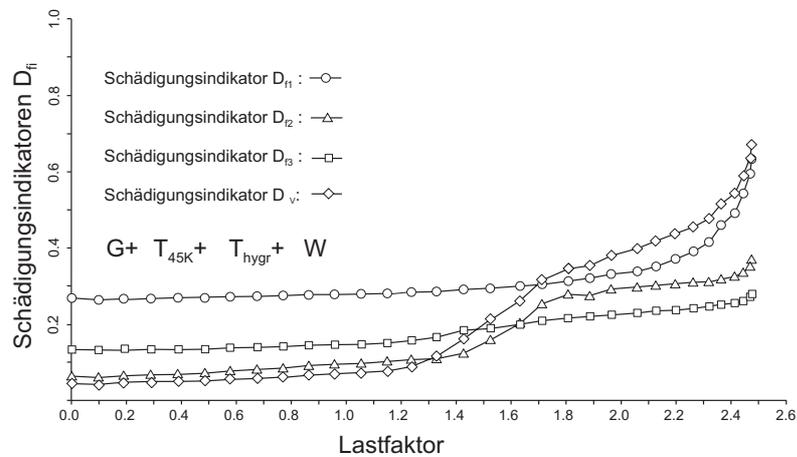
6.2.1 Turm A

In den Abbildungen **6.11** – **6.13** sind die oben definierten Schädigungsindikatoren über die Windlast λ dargestellt. Die Verläufe spiegeln die Änderung der Eigenfrequenzen infolge der Schädigung wider, wegen ihrer normierten Form sind sie jedoch anschaulicher als die bisher verwendeten.

Wie man aus den Verläufen der Eigenfrequenzen bereits erkannt hat, ist der kalte Turm bis zu einem Bereich von $\lambda = 1.75$ nahezu schädigungsfrei (vgl. Abb. **6.11**), während die mit dem Temperaturgradienten $\Delta T_2 = 45 \text{ K}$ und durch hygrisches Quellen ΔT_{hygr} vorbelasteten Türme eine erhebliche Vorschädigung aufweisen (vgl. Abb. **6.12** und **6.13**). Die Schädigungsindikatoren ergeben sich für die 1. Eigenfrequenz zu 0.135 bei der Beanspruchungskombination $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ und zu 0.265 bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$. Daraus läßt sich sehr anschaulich der Grad der Vorschädigung durch die Temperaturbeanspruchung und durch die hygrische Beanspruchung abschätzen. Die Schädigungsindikatoren der 1. Eigenfrequenz weisen für alle drei Beanspruchungskombinationen kurz vor dem Versagen Werte von ca. 0.7 auf.

Betrachtet man die Abbildungen (**6.12**) und (**6.13**), so läßt sich wieder feststellen, daß die Schädigungsindikatoren der 2. Eigenfrequenzen im Bereich der niedrigen Windbeanspruchung trennscharf sind. Der globale Schädigungszustand aus den 1. Eigenfrequenzen, verursacht durch die Temperatur und die hygrische Beanspruchung, wird maßgebend. Die 2. Schädigungsindikatoren stellen im Vergleich dazu die Entwicklung der Schädigung in lokal begrenzten Bereichen dar. Bei allen Lastfallkombinationen stellen die 1. Indikatoren den maßgebenden Schädigungszustand dar.

Vergleicht man diese Schädigungsindikatoren mit dem Indikator $D_{\Delta V}$, der auf dem Verformungszuwachs, bedingt durch die steigende Windbeanspruchung, basiert, erkennt man deutlich die lokale Schädigungszunahme aus der niedrigen Windwirkung, die den globalen Schädigungszustand nicht überschreitet. Der Verlauf des auf dem Verformungszuwachs basierten Indikators $D_{\Delta V}$ stimmt qualitativ gut mit dem Indikator, der auf Eigenfrequenzen beruht, überein – für die lokale Schädigung mit dem Indikator der 2. Eigenfrequenz und für die globale Schädigung mit dem der 1. Eigenfrequenz.

Abbildung 6.11: Entwicklung der Schädigungsindikatoren bei $G + \lambda W$ Abbildung 6.12: Entwicklung der Schädigungsindikatoren bei $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$ Abbildung 6.13: Entwicklung der Schädigungsindikatoren bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$

6.2.2 Turm B

Aus den in den Abbildungen **6.11** – **6.13** dargestellten Verläufen der Schädigungsindikatoren sind die Änderungen der Eigenfrequenzen in der normierten Form und damit der Schädigungszustand über die Windlastintensität anschaulich zu erkennen. Im Vergleich zum Turm A stellen die ausgewerteten drei Schädigungsindikatoren der Eigenfrequenzen unter den starken Vorschädigungen die Schädigungszunahme im lokalen Bereich nicht scharf dar, während der Indikator $D_{\Delta V}$ sensibler darauf reagiert. In diesem Fall müßte man weitere höhere Eigenfrequenzen mit in die Analyse einbeziehen.

Die nahezu gleichen Verläufe des Indikators $D_{\Delta V}$ und D_1 bei höheren Windlastniveaus erklären sich dadurch, daß sich die 1. Modalform bei starkem Schädigungszustand derjenigen Verformung ähnelt, auf der der Indikator $D_{\Delta V}$ basiert.

Zusammengefaßt ermöglicht die gemeinsame Anwendung der beiden Indikatoren nicht nur den globalen Schädigungszustand, sondern auch die Schädigungsentwicklung in lokalen Bereichen zu identifizieren.

6.3 Progressive Schädigungsprozesse

Eigenfrequenzen trennen nicht nur den geschädigten und den ungeschädigten Zustand scharf voneinander, sondern erlauben es auch, den Einfluß der eingetretenen Schädigungen auf die Größe der Winderregung des Tragwerkes hervorragend abzuschätzen.

Die Reduktion der Eigenfrequenzen bewirkt, daß sich das dynamische System der hochabgestimmten Schale zum spektralen Winderregermaximum hin verschiebt und dadurch seine Einwirkungskomponenten verstärkt. Um dieses zu verdeutlichen wurden in das VON-KÁRMÁN-Windspektrum in den Abbildungen **6.17** und **6.18** die 1. Eigenfrequenzen für einige repräsentative Beanspruchungs- bzw. Schädigungszustände der Kühltürme eingetragen. In diesen Abbildungen der Standarddarstellung des VON-KÁRMÁN-Windspektrums stellt S die spektrale Dichte der dynamischen Erregungskomponente des natürlichen Windes, f die jeweilige Frequenz und σ die Varianz dar. Die Spektraldichtefunktion läßt sich wie folgt ermitteln:

$$\frac{S(f) \cdot f}{\sigma^2} = \frac{4 \cdot f^*}{[1 + (8,409 \cdot f^*)^2]^{\frac{5}{6}}}, \quad f^* = \frac{L_{ux}(z) \cdot f}{\bar{u}(z)}. \quad (6.1)$$

Die in den beiden Abbildungen dargestellten Spektraldichtefunktionen besitzen Gültigkeit für offenes ebenes Gelände jeweils in Windzone I oder in Windzone II, in welchen sich die untersuchten Kühltürme befinden.

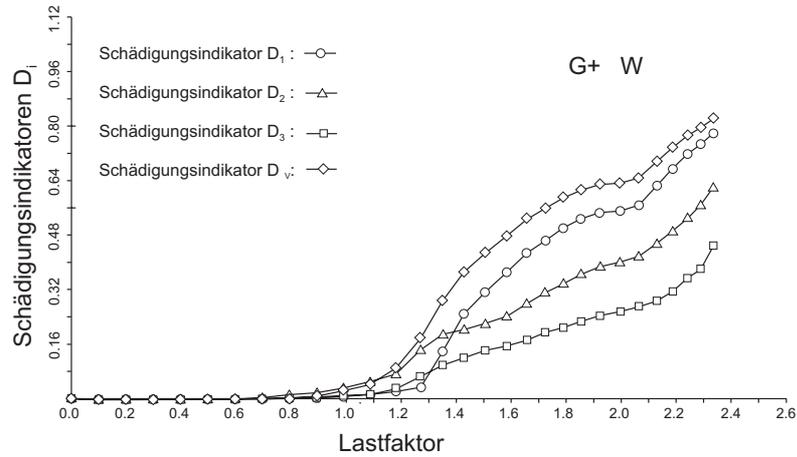


Abbildung 6.14: Entwicklung der Schädigungsindikatoren bei $G + \lambda W$

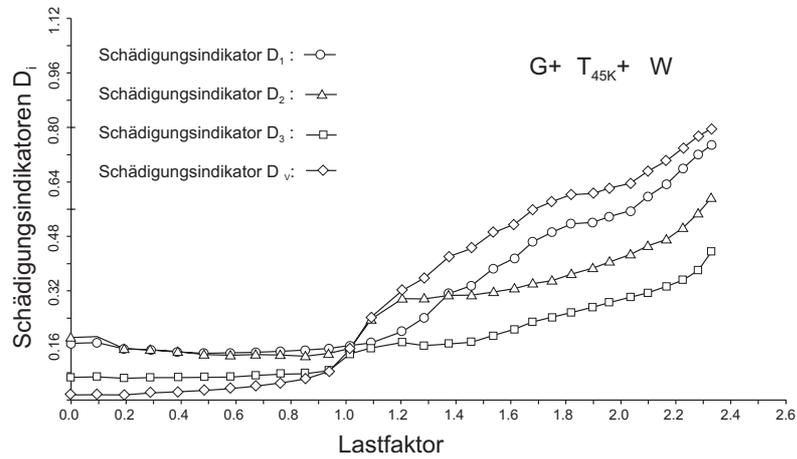


Abbildung 6.15: Entwicklung der Schädigungsindikatoren bei $G + \Delta T_{45K} + \lambda W$

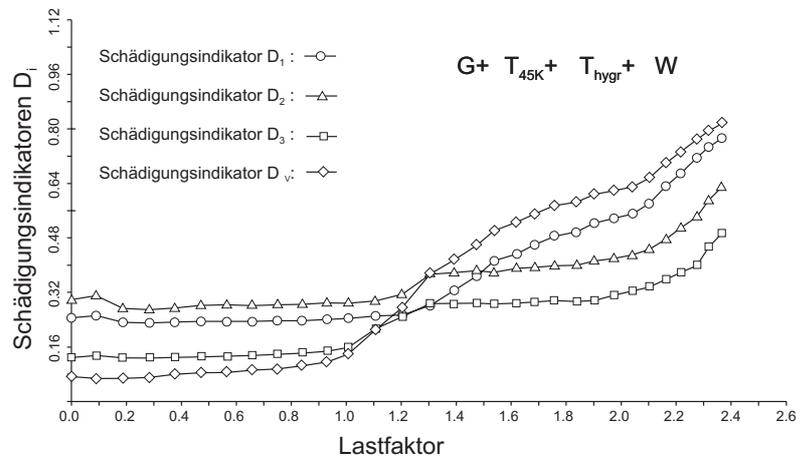


Abbildung 6.16: Entwicklung der Schädigungsindikatoren bei $G + \Delta T_{45K} + \Delta T_{hygr} + \lambda W$

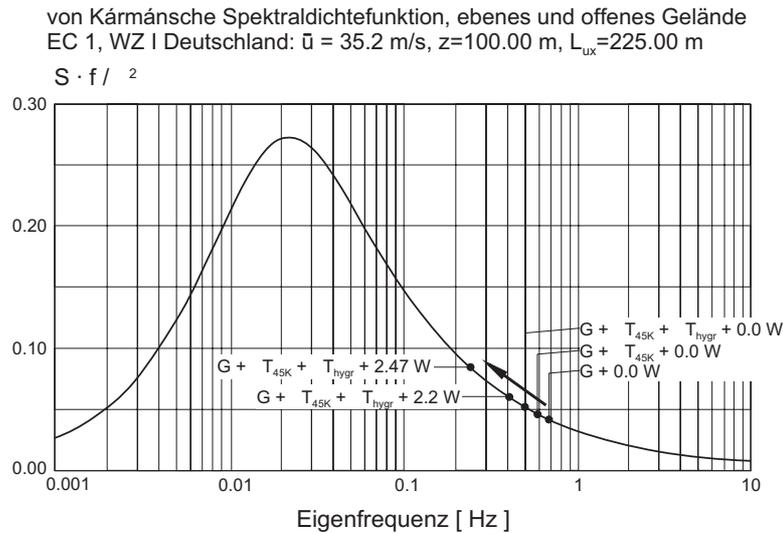


Abbildung 6.17: Schädigungsbedingte Zunahme der Windbeanspruchung: Turm A

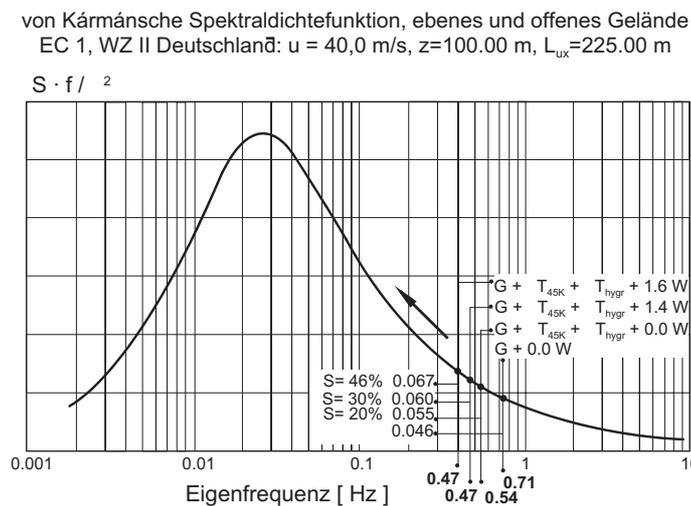


Abbildung 6.18: Schädigungsbedingte Zunahme der Windbeanspruchung: Turm B

Die Abbildungen belegen eindeutig das bereits erwähnte, von Wind, Temperatur und von hygrischen Effekten abhängige schädigungsbedingte Shiften der 1. Eigenfrequenzen aus der schädigungsfreien Situation hin zum Zentrum des Windspektrums.

Die zu den niedrigsten Eigenfrequenzen gehörige Spektraldichte wird beispielsweise beim Turm A durch die eingetretenen Vorschädigungen allein aus ΔT_{45K} im Vergleich zum schädigungsfreien Zustand ($G + 0.0 \text{ W}$) um 9% erhöht und durch die zusätzliche hygrische Vorschädigung um 23%.

Ohne vertiefte Kenntnisse der Tragwerksdynamik und ohne weitere nichtlineare dynamische Berechnungen kann man somit aus der Zunahme der spektralen Erregung auf

eine gleichgroße Zunahme der dynamischen Beanspruchung im Sinne der 1. Eigenformen schließen. Damit läßt sich die Erhöhung der Winderregung beim Turm B allein durch die Vorschädigung aus Temperatur und hygriischem Quellen um 20% und durch die sturmbedingten Schädigungen bei $\lambda = 1.40$ um 30 % der Bemessungswindlast abschätzen.

Somit wird jeder Kühlturm in höheren Windlastbereichen erheblich stärker beansprucht als durch die auf linearen Tragwerkskonzepten beruhenden Normen vorhergesagt. Die behandelte Schädigung entwickelt sich darüber hinaus progressiv über die Lebensdauer der Türme und kann deshalb nicht begrenzt werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Im Ingenieurwesen sind lineare Schädigungsprozesse seit langer Zeit bekannt. Ein typisches Beispiel ist die Ermüdung von Stahl. In jüngster Zeit sind an verschiedenen Tragwerkstypen stark nichtlineare progressive Schädigungsprozesse entdeckt worden, wie z.B. bei Bohrplattformen unter Meereswellen, Hochbaukonstruktionen unter Starkbebenbelastung sowie bei Verkehrsbrücken unter ansteigendem Schwerlastverkehr. Gemeinsam haben diese Prozesse, die Breitbanderregung der dominierenden Einwirkungen, ein hochabgestimmtes, nichtlineares Antwortverhalten sowie ein durch Deteriorationsprozesse angetriebenes, shiftendes Antwortspektrum. Unter diesen Voraussetzungen kann sich das hochabgestimmte, dynamische System, gesteuert durch die sich ausbildenden Schädigungen, automatisch und fortschreitend in höhere Beanspruchungsniveaus adaptieren: Es formiert sich ein mit dem Lebensalter nichtlinear anwachsender, progressiver Schädigungsprozeß.

Ganz erhebliche Bedeutung besitzen derartige Schädigungsprozesse für die Dauerhaftigkeit dünner Schalen von großen Naturzugkühltürmen aus Stahlbeton. Die bei vielen europäischen Kühltürmen beobachtete Ribbildung in der Kühlerschale infolge Windeinwirkungen reduziert die Steifigkeit des Tragwerks und vergrößert damit die inelastischen Verformungen. Die Temperatureinwirkung als Vorschädigung führt zusätzlich zur Steifigkeitsreduzierung. Die Steifigkeitsreduzierung führt bekanntlich zu niedrigeren Eigenfrequenzen, die sich in Richtung auf das spektrale Erregerzentrum verschieben, wodurch dynamische Beanspruchungen und damit Schädigungsprozesse intensiviert werden. Diese Schädigungsentwicklung akkumuliert damit progressiv zum Lebensalter des Kühlturms.

In der vorliegenden Arbeit wird der oben dargestellte progressive Schädigungsprozeß von Naturzugkühltürmen analysiert und eine Theorie zur Erklärung derartiger Schädigungsphänomene aufgestellt. Da solche Schädigungsprozesse hochgradig nichtlinear sind, werden geeignete Simulationswerkzeuge für die nichtlineare Schädigungsanalyse benötigt.

Ein Materialmodell für den nichtlinearen Verbundwerkstoff Stahlbeton wird formuliert,

wobei die wesentlichen Schädigungskomponenten berücksichtigt werden. Die Makroschädigungen bei den in dieser Arbeit untersuchten Kühltürmen entstehen vorwiegend durch Zugrißbildung, plastische Dehnungen des Bewehrungsstahles und Schädigungen des Verbundes zwischen Beton und Stahl. Im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit wird auf den Rißbildungsprozeß und die Rißbreitenermittlung ein besonderes Augenmerk gelegt. Der Mitwirkungseffekt zwischen den Rissen wird vom Erstrißbildungsstadium bis zum plastischen Dehnungsbereich der Bewehrung formuliert. Diese Formulierung erfaßt auch den Mitwirkungseffekt bei zyklischer Beanspruchung.

Für die Kühlerschale wird das isoparametrische “Finite Assumed Strain Element” ASE 6 nach einer Schalentheorie unter REISSNER-MINDLIN-Annahme angewendet. Die Stützen werden mittels eines neu implementierten räumlichen Stahlbeton-Balken-Elements diskretisiert, dessen geometrische Nichtlinearität gemäß einer schubsteifen Stabtheorie mit großen Verschiebungen, jedoch kleinen Rotationen berücksichtigt wird. Das Fasermodell idealisiert den Querschnitt des Balkenelements.

Im Rahmen der statischen Analyse mit Berücksichtigung geometrischer sowie stofflicher Nichtlinearität werden zwei real existierende große Naturzugkühltürme detailliert untersucht. Beim ersten Turm handelt es sich um einen 25 Jahre alten Kühlturm mit einem ausgeprägten Rißbild. Durch den Vergleich des realen Schädigungszustandes mit dem aus der numerischen Schädigungssimulation wird das angesetzte Konzept der Analyse verifiziert. Die dabei beobachteten Schädigungsprozesse unter den betrachteten Lastfallkombinationen werden ausführlich diskutiert. Basierend auf den durch diese Simulation gewonnen Erkenntnissen wird der zweite Turm analysiert. Die Simulation dient zur Vervollständigung und Bestätigung der bei der ersten Simulation gewonnenen Erkenntnisse. Zum anderen dient sie der Vorhersage des zu erwartenden Schädigungszustandes im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit und der Abschätzung der Tragreserven des nach VGB (1997) bemessenen Kühlturmes.

Die simulierten Schädigungszustände des ersten Turmes stimmen mit dem realen Zustand qualitativ gut überein, und die dabei gewonnenen Erkenntnisse ließen sich beim zweiten Turm bestätigen. Bei beiden Türmen bilden die Hauptursachen der vertikalen Biegerisse thermische und hygri sche Einwirkungen. Diese Beanspruchungen reduzieren die Biegesteifigkeit der Schale erheblich. Die danach folgenden Windbeanspruchungen vergrößern die bereits vorhandene Biegeschädigung.

Die Schwingungsanalysen ermöglichen es, die Änderungen der dynamischen Eigenschaften zu identifizieren. Durch die Untersuchung der Eigenfrequenzen und der dazugehörigen Modalformen wird die schädigungsbedingte Biegesteifigkeitsreduktion nicht nur des globalen Tragsystems, sondern auch von lokalen Bereichen festgestellt. Die Biegeeigenschaften der Türme reagieren sensibel auf die Schädigungen unter den betrachteten Beanspruchungen. Die Schädigungsprozesse unter der Betrachtung der dynamischen Eigenschaften sind bei den beiden untersuchten Türmen prinzipiell gleich. Dynamische Eigenschaften der Naturzugkühltürme ändern sich signifikant und stimmen daher nicht

mit denen aus den linearen Analysen überein.

Für quantitative Auswertungen der Schädigungen auf das Tragverhalten des Kühlturmes wurden die Eigenfrequenzen bei der Definition eines globalen Schädigungsindikators herangezogen. Zur Beurteilung dieses Indikators wird zusätzlich ein weiterer Schädigungsindikator gewählt, der auf dem Verformungszuwachs basiert. Dabei ließ sich feststellen, daß ein Satz von Schädigungsindikatoren mehrerer Eigenfrequenzen sowohl den globalen Schädigungszustand als auch die Schädigungsentwicklung im lokalen Bereich darstellen können.

Um den Einfluß der eingetretenen Schädigungen auf die Winderregung des Tragwerkes abzuschätzen, wurden die shiftenden Eigenfrequenzen in das VON-KÁRMÁN-Windspektrum eingetragen. Die Reduktion der Eigenfrequenzen bewirkt, daß sich das dynamische System der hochabgestimmten Schale zum spektralen Winderregermaximum hin verschiebt und dadurch seine Einwirkungskomponenten verstärkt. Beispielsweise vergrößert allein die Vorschädigung aus thermischer und hygrischer Beanspruchung die Biegebeanspruchung der Schale um über 20 % und führt hauptsächlich zu Biegerissen, die zu einer progressiven Schädigung führen.

Die Erkenntnisse aus dieser Arbeit bilden eine fundierte Grundlage zur Erklärung progressiver Schädigungsprozesse an Naturzugkühlern. Jedoch läßt sich noch keine quantitative Aussage über die Auswirkung der Erhöhung der Winderregung beispielsweise auf zeitvariante Schalenbiegemomente treffen. Für zukünftige Forschungstätigkeiten bieten sich daher wirklichkeitsnahe nichtlineare, winddynamische Analysen mit stochastischen Windsimulationen an, die für Tragwerke aus hochgradig nichtlinearem Stahlbeton besonders aufwendig sind.

Literaturverzeichnis

- Alvarez, M. und P. Marti (1996). Versuche zum Verbundverhalten von Bewehrungsstahl bei plastischen Verformungen. Technischer Bericht 222, Institute of Structural Engineering, ETH, Zurich.
- Arnesen, A. (1979). Analysis of reinforced concrete shells considering material and geometric nonlinearities. Div. Struct. Mech. 79-1, Norwegian Institute of Technology, The University of Trondheim.
- Balázs, G.L. (1991). Fatigue of bond. *ACI Material Journal* 88(6), 620–629.
- Basar, Y und W.B. Krätzig (1985). *Mechanik der Flächentragwerke*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
- Basar, Y und D. Weichert (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer-Verlag, Berlin.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River.
- Bazant, Z.P. (1979). Critique of orthotropic models and triaxial testing of concrete and soils. Structural Engineering Report 79-10/640c, Northwestern University, Evanston, Illinois.
- Beem, H., C. Könke, U. Montag und W. Zahlten (1996). *FEMAS 2000 - Finite Element Moduls Allgemeiner Strukturen*. Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum. Benutzerhandbuch Release 3.0.
- Bhide, S.B. und M.P. Collins (1989). Influence of axial tension on the shear capacity of reinforced concrete members. *ACI Structural Journal* 86, 570–581.
- Bresler, B. und A.C. Scordelis (1963). Shear strength of reinforced concrete beams. *ACI Material Journal* 1(60), 51–74.
- CEB 210 (1991). *Behaviour and analysis of Reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response-volume 1, CEB Bulletin d'Information 210*. Lausanne: Comité Euro-International du Béton.
- CEB-FIP Model Code (1990). *CEB-FIP Model CODE 1990 Design Code, Bulletin d'Information 195*. Lausanne: Comité Euro-International du Béton.
- Chen, F. (2001). *Inelastisches Trag-, Verformungs- und Schädigungsverhalten der Stahlbetontragwerke unter quasi-statischer Einwirkung*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.

- Chen, W.-F. und A.F. Saleeb (1982). *Constitutive equations for engineering materials, Elasticity and Modeling*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc.,.
- Darwin, D. und D.A. Pecknold (1974). Inelastic model for cyclic biaxial loading of reinforced concrete. Technischer Bericht, University of Illinois, Urbana.
- Darwin, D. und D.A. Pecknold (1977). Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 103(EM2), 229–241.
- Dilger, W. (1966). Veränderlichkeit der Biege- und Schubtragfähigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. Heft 179, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton.
- DIN 1045 (1988). Beton und Stahlbeton.
- DIN 1055 (1978). Lastnahmen für Bauten.
- DIN 4108 (1981-1991). Wärmeschutz im Hochbau.
- DIN 4227 (1988). Spannbeton.
- Dvorkin, E. N. und K.-J. Bathe (1984). A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Eng. Comp.* (1), 77–88.
- Eligehausen, R., E.P. Popov und V.V. Bertero (1983). Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. College of engineering, University of California.
- Elwi, A.A. und D.W. Murray (1979). A 3d hypoelastic concrete constitutive relationship. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 105(EM4), 623–641.
- Empelmann, M. (1995). *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stabtragwerken aus Konstruktionsbeton unter besonderer Berücksichtigung von Betriebsbeanspruchungen*. Dissertation, Lehrstuhl und Institut für Massivbau der RWTH Aachen (IMB).
- EUROCODE 2 (1992). Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken.
- Furrer, H. und L. Mischol (1977). Zur Berechnung und Konstruktion des Naturzug-Nasskühlturms für das Kernkraftwerk Gösgen-Däniken. *Schweizerische Bauzeitung* 95. Jahrgang(Heft 39).
- Garstka, B, W.B. Krätzig, K Meskouris, I.F. Meyer und F. Stangenberg (1991). Damage assessment in cyclically loaded reinforced concrete columns. In W.B. Krätzig et al (Hrsg.), *Structural Dynamics 1* (A. A. Balkema ed.), 551–556.
- Gergely, P. und L.A. Lutz (1968). Maximum crack width in reinforced concrete flexural members. In *Causes, Mechanisms and Control of Cracking in Concrete*, SP-20. Detroit: ACI.
- Gilbert, R.I. und R.F. Warner (1978). Tension stiffening in reinforced concrete slabs. *Journal of Structural Division, ASCE* 104(ST12), 1885–1900.
- Green, A.E. und W. Zerna (1968). *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, London.
- Günther, G. (1989). *Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton unter monoton steigender, schwellender und lang andauernder Belastung*. Dissertation, Gesamthochschule Kassel.

- Hanskötter, U. (1994). *Strategien zur Minimierung des numerischen Aufwands von Schädigungsanalysen seismisch erregter, räumlicher Hochbaukonstruktionen mit gemischten Aussteifungssystemen aus Stahlbeton*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Harte, R. und D. Busch (May 1996). 200m-natural draught cooling tower Frimmersdorf: A step to a new dimension in design and construction. In *Proceedings of the 4th international symposium on natural draught cooling towers*.
- Harte, R. und W.B. Krätzig (1999). Nonlinear analyses of reinforced concrete shells as a preventive measure against damages. Congress of IASS, Madrid.
- Harte, R. und W.B. Krätzig (2001). Lifetime - oriented analysis and design of large - scale cooling towers. Int Conf. SEMC, Cape Town, South Africa.
- Harte, R., W.B. Krätzig und U. Montag (2001). Shape optimization, design and construction of the 200m niederaussem cooling tower shell. Structures Congress & Exposition, Washington, U.S.A.
- Harte, R., W.B. Krätzig, S.-Y. Noh und Y.S. Petryna (2000). On progressive damage phenomena of structures. *Computational Mechanics* 25, 404–412.
- Hawkins, H.M. u.a. (1982). Local bond strength of concrete for cyclic reversed loadings. In P. Bartos (Hrsg.), *Bond in Concrete*. London: Applied Science Publishers Ltd.
- Hughes, T.J.R. (1987). *The finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Ivanyi, G. und R. Lardi (1982). Trag- und Verformungsverhalten von netzbewehrten Stahlbetonplatten. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen Heft 19, -GHS-, Essen.
- Jofriet, J.C. und G.M. McNeice (1971). Finite element analysis of reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division, ASCE* 97(ST3), 785–806.
- Karsan, I.D. und J.O. Jirsa (1969). Behavior of concrete under compressive loadings. *Journal of the Structural Division, ASCE* 95(ST12), 2543–22563.
- Keuser, M. (1989). Verbundmodelle für nichtlineare Finite Elemente Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen. *Fortschrittsberichte VDI* 4(71).
- Koch, R. (1976). *Verformungsverhalten von Stahlbetonstäben unter Biegung und Längszug im Zustand II auch bei Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Kollegger, J. (1988). *Ein Materialmodell für die Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken*. Dissertation, Gesamthochschule Kassel.
- Krätzig, W.B. (1997). Multi-level modeling techniques for elasto-plastic structural responses. In D.R.J. Owen et al. (Hrsg.), *Computational Plasticity, Part 1*, 457–468. CIMNE-Int. Center for Num. Meth. in Engng., Barcelona.
- Kreller, H. (1990). Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung. Heft 409, Deutscher Ausschluß für Stahlbeton.

- Krätzig, W.B. (1989). Eine einheitliche statische und dynamische Stabilitätstheorie für Pfadverfolgungsalgorithmen in der numerischen Festkörpermechanik. In *ZAMM* 69, 203–213.
- Krätzig, W.B. (1990). Fundamentals of numerical algorithms for static and dynamic instability phenomena. In W.B. Krätzig und E. Onate (Hrsg.), *Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells*. Springer-Verlag.
- Krätzig, W.B. und K.P. Gruber (May 1996). Life-cycle damage simulations of natural draught cooling towers. In *Proceedings of the 4th international symposium on natural draught cooling towers*.
- Krätzig, W.B., K. Gruber, K. Meskouris und W. Zahlten (1994). Computer simulations of ultimate and serviceability states of reinforced concrete shell. In *Proceedings EURO-C*, Part 2, 987–998.
- Krätzig, W.B., K. Meskouris und S.-Y. Noh (2001). On damage process of natural draught cooling towers. In W.A. Wall, K.U. Bletzinger, und K. Schweizerhof (Hrsg.), *Trends in Computational Structural Mechanics*, 338–347. CIMNE.
- Kupfer, H.B. (1973). Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. Heft 229, Deutscher Ausschluß für Stahlbeton.
- Kupfer, H.B. und K.H. Gerstle (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. *ASCE Engr. Mech. Div. 99*(EM4), 852–866.
- Kupfer, H.B., H.K. Hilsdorf und H. Rüsç (1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal* 66(8), 656–666.
- Lin, C.S. (1973). Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs and shells. Technischer Bericht UC-SESM 73-7, Dept. of Civil Engineering.
- Lin, C.S. und A.C. Scordelis (1975). Nonlinear analysis of r.c. shells of general form. *Journal of Structural Division, ASCE* 101(ST3), 523–538.
- Liu, T.C.Y., A.H. Nilson und F.O. Slate (1972). Biaxial stress-strain relations for concrete. *ASCE Struct. Div. 98*(ST5), 1025–1034.
- Marsden, J.E. und T.J.R. Hughes (1983). *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, Inc. New York.
- McNeice, G.M. (1967). Elastic-plastic bending of plates and slabs by the finite element method. Technischer Bericht, University of London.
- Mehlhorn, G., D. Dinges, M. Keuser und W. Kolmar (1989). Nichtlineare FE-Modellierung zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen. In E. Stein (Hrsg.), *Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau*, 343–376. Berlin: Springer-Verlag.
- Mehlhorn, G. und J. Kollegger (1995). Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau. In G. Mehlhorn (Hrsg.), *Rechnerorientierte Baumechanik*, Der Ingenieurbau, 293–429. Berlin: Ernst & Sohn.
- Meier, H.H. (1983). *Berücksichtigung des wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens beim Standsicherheitsnachweis turmartiger Stahlbetonbauwerke*. Dissertation, Universität Stuttgart.

- Meiswinkel, R. und H. Rahm (1999). Modelling tension stiffening in RC structures regarding nonlinear design analyses. In *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics*, Munich.
- Menzel, W. (1996). *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Meskouris, M. (1999). *Baudynamik*. Ernst & Sohn, Berlin.
- Montag, U. (1997). *Konzept zur Effizienzsteigerung numerischer Simulationsalgorithmen für elastoplastische Deformationsprozesse*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Morita, S. und Kaku T. (1973). Local bond stress-slip relationship under repeated loading. In *Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, IABSE Symposium Lisabon, 221–227.
- Nelissen, L.J.M. (1972). Biaxial testing of normal concrete. *Heron* 18(1). Netherlands.
- Ngo, D. und A.C. Scordelis (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal* 64, 152–163.
- Noakowski, P. (1988). Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rißbreite. Heft 394, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton.
- Pardey, A. (1994). Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten im Vergleich zur Bruchlinientheorie. Heft 441, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton.
- Peter, J. (1964). *Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung*. Dissertation, Lehrstuhl für Massivbau der Technische Hochschule Stuttgart.
- Rao, P.S. (1966). Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte. Heft 177, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton.
- Rehm, G. (1961). Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton. Heft 138, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton.
- Reinhardt, H.-W. (1996). Werkstoffe des Bauwesens. In G. Mehlhorn (Hrsg.), *Werkstoffe, Der Ingenieurbau*, 1–132. Berlin: Ernst & Sohn.
- Saenz, I.P. (1964). Discussions by “Equation for the stress-strain curve of concrete by Desayi and Krishnan“. *ACI Journal* 61(9), 1229–1235.
- Schwennicke, A. (1983). Zur Berechnung von Stahlbetonbalken und -scheiben im gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, TU Berlin.
- Seeger, T. (1996). *Stahlbau Handbuch 1, Teil B*, Kapitel Grundlagen der Betriebsfestigkeit, 5–123. Köln: Stahlbau-Verlagsgesellschaft.
- Simo, J.C. und D.D. Fox (1989). On a stress resultant geometrically exact shell model, part I: Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 72(9), 267–304.

- Stolze, R. (1993). *Zum Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit von den Bruchlinien abweichender Bewehrungsrichtung - Bruchlinien Rotationskapazität* -. Dissertation, Universität Fridericiana zu Karlsruhe.
- Su, X. und B. Zhu (1994). Algorithm for hysteresis analysis of prestressed-concrete frames. *Journal of Structural Engineering* 120(6), 1732–1744.
- Tassios, T.P. (1979). Properties of bond between concrete and steel and load cycles idealizing seismic actions. In *Structural Concrete Under Seismic Actions*, Bulletin d'Information 131, AICAP-CEB Symposium Rome. Comité Euro-International du Béton.
- Tassios, T.P. und P.J. Yannopoulos (1981). Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships. *ACI Journal* 78(3).
- Taylor, R., D.R.H. Maher und B. Hayes (1966). Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs. *Magazin of Concrete Research* 98(55).
- Truesdell, C. und W. Noll (1965). *The non-linear field theories of mechanics*. in: Handbuch der Physik III/3, Ed.: Flügge, S. Springer-Verlag, Berlin.
- Tue, N.V. (1993). Zur Spannungsumlagerung im Spannbeton bei der Ribbildung unter statischer und wiederholter Belastung. Heft 435, Deutscher Ausschluß für Stahlbeton.
- van Greunen, J. (1979). Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete slabs and panels. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics UC-SESM 79-3, University of California, Berkeley.
- Vecchio, F.J. und M.P. Collins (1982). The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses. Technischer Bericht 82-03, University of Toronto.
- VGB (1997). *BTR-Bautechnik bei Kühltürmen, VGB-Richtlinie für den bautechnischen Entwurf, die Berechnung, die Konstruktion und die Ausführung von Kühltürmen*. Essen: VGB Technische Vereinigung der Grosskraftwerksbetreiber e.V.
- Wittek, U. und R. Meiswinkel (May 1996). Nonlinear behaviour of RC cooling towers and its effects on the structural design. In *Proceedings of the 4th international symposium on natural draught cooling towers*.
- Wolfseher und Partner AG (1996). Beurteilung des Einflusses der Risse auf die Tragfähigkeit. Bericht Nr. 95.230.11 STO/ht, Wolfseher und Partner AG, Beratende Materialtechnologen und Bauingenieure, Baar. unveröffentlicht.
- Zahlten, W. (1990). *Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Zhu, B., M. Wu und K. Zhang (1980). A study of hysteric curve of reinforced concrete members under cyclic loading. In *Proceedings of the 7th World Conference on Earthquake Engineering*.
- Zhuang, Y. (1990). *Ein Stahlbeton-Mehrschichten-Modell zur Kollapsanalyse großer Kühltürme*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Zienkiewicz, O.C. und R.L. Taylor (1991). *The Finite Element Method* (4. Aufl.), Volume 1 und 2. London: McGraw-Hill Book Comp.

Anhang A

Ergänzende Formeln zur Schalentheorie

Differentielles Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 \\ &= (\mathbf{Z}\mathbf{A}_1 \times \mathbf{Z}\mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{Z}\mathbf{A}_3 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= \det\mathbf{Z} \underbrace{(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{A}_3}_{\sqrt{A}=\sqrt{G}|_{\theta=0}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} dv &= (\mathbf{z}\mathbf{a}_1 \times \mathbf{z}\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{z}\mathbf{a}_3 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= \det\mathbf{z} \underbrace{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3}_{\sqrt{a}=\sqrt{g}|_{\theta=0}} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Komponenten des GREENSchen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \alpha_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2}[\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta] \\ \alpha_{(\alpha 3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{d} - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{D} \} \right] \\ \alpha_{(33)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \beta_{(\alpha\beta)}^I &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}) - (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{D}_{,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}) \} \right] \\ \beta_{(\alpha 3)}^I &= 0 \\ \beta_{(33)}^I &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\beta_{(\alpha\beta)}^{II} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} H^2 (\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}) \right]$$

$$\begin{aligned}\beta_{(\alpha 3)}^H &= 0 \\ \beta_{(33)}^H &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

Linearisierung der Komponenten des GREENSchen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned}\delta\alpha_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2}(\delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\alpha \delta\mathbf{a}_\beta) \\ \delta\alpha_{(\alpha 3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ \delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{d} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{d} \} \right] \\ \delta\alpha_{(33)} &= 0\end{aligned}\tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}\delta\beta_{(\alpha\beta)}^I &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ \delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{d}_{,\beta} + \delta\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} + \mathbf{a}_\beta \cdot \delta\mathbf{d}_{,\alpha} \} \right] \\ \delta\beta_{(\alpha 3)}^I &= 0 \\ \delta\beta_{(33)}^I &= 0\end{aligned}\tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}\Delta\delta\alpha_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta\mathbf{a}_\beta + \Delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{a}_\beta) \\ \Delta\delta\alpha_{(\alpha 3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ \Delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta\mathbf{d} + \Delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{d} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta\delta\mathbf{d} \} \right] \\ \Delta\delta\alpha_{(33)} &= 0\end{aligned}\tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta\delta\beta_{(\alpha\beta)}^I &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ \delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta\mathbf{d}_{,\beta} + \Delta\mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{d}_{,\beta} + \delta\mathbf{a}_\beta \cdot \Delta\mathbf{d}_{,\alpha} + \Delta\mathbf{a}_\beta \cdot \delta\mathbf{d}_{,\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta\delta\mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \Delta\delta\mathbf{d}_{,\alpha} \} \right] \\ \Delta\delta\beta_{(\alpha 3)}^I &= 0 \\ \Delta\delta\beta_{(33)}^I &= 0\end{aligned}\tag{A.9}$$

Approximation der Komponenten des GREENSchen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned}\alpha_{(\alpha\beta)}^h &= \frac{1}{2} \left[N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \mathbf{x}_B^0 - N_{,\alpha}^A \mathbf{X}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \mathbf{X}_B^0 \right] \\ \alpha_{(\alpha 3)}^h &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H (N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N^B \mathbf{d}_B - N_{,\alpha}^A \mathbf{X}_A^0 \cdot N^B \mathbf{D}_B) \right] \\ \alpha_{(33)}^h &= 0\end{aligned}\tag{A.10}$$

$$\beta_{(\alpha\beta)}^{Ih} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H \{ (N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \mathbf{d}_B + N_{,\beta}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B \mathbf{d}_B) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -(N_{,\alpha}^A \mathbf{X}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \mathbf{D}_B + N_{,\beta}^A \mathbf{X}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B \mathbf{D}_B) \} \\
\beta_{(\alpha 3)}^{Ih} &= 0 \\
\beta_{(33)}^{Ih} &= 0
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\delta \alpha_{(\alpha \beta)}^h &= \frac{1}{2} [N_{,\alpha}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \mathbf{x}_B^0 + N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \delta \mathbf{x}_B^0] \\
\delta \alpha_{(\alpha 3)}^h &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H(N_{,\alpha}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N^B \mathbf{d}_B + N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N^B \delta \mathbf{d}_B) \right] \\
\delta \alpha_{(33)}^h &= 0
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\delta \beta_{(\alpha \beta)}^{Ih} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (N_{,\alpha}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \mathbf{d}_B + N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \delta \mathbf{d}_B \right. \\
& \quad \left. + N_{,\beta}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B \mathbf{d}_B + N_{,\beta}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B \delta \mathbf{d}_B) \right] \\
\delta \beta_{(\alpha 3)}^{Ih} &= 0 \\
\delta \beta_{(33)}^{Ih} &= 0
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \delta \alpha_{(\alpha \beta)}^h &= \frac{1}{2} [N_{,\alpha}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \Delta \mathbf{x}_B^0 + N_{,\alpha}^A \Delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \delta \mathbf{x}_B^0] \\
\Delta \delta \alpha_{(\alpha 3)}^h &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} H(N_{,\alpha}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N^B \Delta \mathbf{d}_B + N_{,\alpha}^A \Delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N^B \delta \mathbf{d}_B \right. \\
& \quad \left. - N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N^B (\delta \mathbf{d}_B \cdot \Delta \mathbf{d}_B) \mathbf{d}_B \right] \\
\Delta \delta \alpha_{(33)}^h &= 0
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \delta \beta_{(\alpha \beta)}^{Ih} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (N_{,\alpha}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \Delta \mathbf{d}_B + N_{,\alpha}^A \Delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B \delta \mathbf{d}_B \right. \\
& \quad + N_{,\beta}^A \delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B \mathbf{d}_B + N_{,\beta}^A \Delta \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B \delta \mathbf{d}_B \\
& \quad - N_{,\alpha}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\beta}^B (\delta \mathbf{d}_B \cdot \Delta \mathbf{d}_B) \mathbf{d}_B \\
& \quad \left. - N_{,\beta}^A \mathbf{x}_A^0 \cdot N_{,\alpha}^B (\delta \mathbf{d}_B \cdot \Delta \mathbf{d}_B) \mathbf{d}_B \right] \\
\Delta \delta \beta_{(\alpha 3)}^{Ih} &= 0 \\
\Delta \delta \beta_{(33)}^{Ih} &= 0
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Lebenslauf

Zur Person

Name : Noh
Vorname : Sam-Young
Geburtsdatum : 08. 12. 1960
Geburtsort : Seoul (Korea)
Fam.-Stand : Verheiratet, 2 Kinder
Staatsangehörigkeit : Koreanisch

Schulbildung

März 1967 - Feb. 1973 : Elementary school in Seoul
März 1973 - Feb. 1976 : Middle school in Seoul
März 1976 - Feb. 1979 : High school in Seoul

Studium

März 1979 - Feb. 1981 : Studium des 'Architectural Engineering' an der Universität Han-Yang in Seoul
Juli 1981 - Okt. 1983 : Militärdienst
März 1984 - Feb. 1986 : Wiederaufnahme des Studiums
Feb. 1986 : Abschluß an der Universität mit dem Titel 'Bachelorship'
April 1986 - Dez. 1986 : Deutschkurs an der Ruhr-Universität Bochum
April 1987 - Dez. 1993 : Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Dortmund
Abschluß: Diplom-Ingenieur mit Gesamtnote 'gut'

Berufliche Tätigkeit

Juni 1993 - Feb. 1994 : Freiberuflicher Mitarbeiter bei Failure Analysis Associates B.V. Niederlassung Düsseldorf
März 1994 - Okt. 1995 : Mitarbeiter der Ingenieurgesellschaft mbH Krätzig & Partner
Nov. 1995 - Mai 2000 : Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum
Seit Juni 2000 : Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baustatik und Baudynamik der RWTH Aachen

Aachen, den 12. 09. 2001

Dipl.-Ing. Sam-Young Noh