

EKSPONENTIAALISESTI SOVITETUISTA MONIASKELMENETELMISTÄ

Diplomityö

Teknillinen korkeakoulu

Teknillisen fysiikan osasto

Aarne H. Sipilä

Aihe hyväksytty 28.11.1972

Tehty vs. prof. Harri Rikkosen  
johdolla tekn.tri Matti Mäkelän  
valvomana

Tämä diplomityö on tehty vs. prof. Harri Rikkosen johdolla tekn.tri Matti Mäkelän valvomana. Aihe on tri Mäkelän ehdottama. Esitän molemmille parhaat kiitokseni.

Otaniemessä 22.1.1973

*Aamu H Siijel*

## SISÄLLYS

|   | Sivu |
|---|------|
| 1. JOHDANTO   | 1    |
| 2. TEHTÄVÄ  | 4    |
| 3. INTERPOLAATIOKONSTRUKTIO   | 4    |
| 4. KONVERGENSSILAUSE  | 7    |
| 5. EKSPONENTIAALINEN SOVITUS  | 12   |
| 6. EKSPONENTIAALISESTI SOVITETTUJEN MONIASKEL-<br>MENETELMIEN STABIILISUUSOMINAISUUKSISTA | 14   |
| 6.1. Stabiilisuuskäsitteistä  | 14   |
| 6.2. Stabiilisuusalueen määrääminen   | 15   |
| 6.3. Euler-tyyppiset menetelmät   | 19   |
| 6.4. Trapetsityyppiset menetelmät   | 23   |
| 6.5. Avoimet 2-askelmenetelmät  | 27   |
| 6.6. Suljetut 2-askelmenetelmät   | 32   |
| 6.7. Rajakonstruktiotarkastelu  | 39   |
| 7. KÄYTTÖÖN SOVELTAMISESTA  | 41   |
| 7.1. Sovitusarvon valinta testiprobleemalle   | 41   |
| 7.2. Sovitusarvon valinta yleisesti   | 43   |
| 8. TIIVISTELMÄ  | 44   |
| 9. VIITTEET   | 45   |

## 1. JOHDANTO

Tavallisten differentiaaliyhtälöiden alkuarvot tehtävien numeeristen ratkaisumenetelmien tutkimuksessa on viime aikoina ollut esillä ns. kankeille (engl. stiff) yhtälöille soveltuvien menetelmien konstruointi ja analysointi. Kankeaksi kutsutaan yleisesti yhtälöä, jonka ratkaisu sisältää hyvin erilaisella nopeudella vaimenevia komponentteja. Vaikeutena on, että nopeasti vaimeneva komponentti, vaikka sen osuus ratkaisusta ajan kasvaessa pienenee varsin vähäiseksi, aiheuttaa yhtälöä ratkaistaessa stabiilisuusongelmia ellei ratkaisua suoriteta hyvin pienellä askelpituudella. Kankeita yhtälöitä ja niihin johtavia probleemoja sekä erilaisia näille kehitettyjä ratkaisumenetelmiä ovat tarkastelleet esim. Bjurel et al. [4] ja Gear [8].

Lineaaristen moniaskelman menetelmien stabiilisuusominaisuuksia on pyritty saamaan kankeiden yhtälöiden tarpeita vastaaviksi valitsemalla menetelmät siten, että ne integroivat täsmällisesti yhtälöt, joiden ratkaisu on muotoa  $p(t)e^{\lambda t}$ , missä  $p(t)$  on mielivaltainen tiettyä astetta oleva polynomi ja  $\lambda \in \mathbb{R}$  on vakio. Tällaisia menetelmiä on kutsuttu eksponentiaalisesti sovitetuiksi. Eksponentiaalisen sovituksen käsite esiintyy Liningerillä ja Willoughbylla [10], jotka analysoivat erästä tällaisten menetelmien luokkaa. Täsmällisen määritelmän ovat esittäneet Bjurel et al. [4], ja Bjurel [3] on tarkastellut melko laajasti eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien konstruoinnista erästä rajoitettua tehtäväluokkaa

varten. Historiallisesti ensimmäisen eksponentiaalisesti sovitetun menetelmän lienevät (vrt. [4] §3.3 s. 6) esittäneet Brock ja Burray [5].

Eksponentiaalisesti sovitetun menetelmän konstruointi perustuu yleensä, ks. esim. [3] tai [10], sovituksen määritelmään, ts. valitaan jokin vapaita parametreja sisältävä menetelmä ja määrätään parametrit siten, että halutut funktioluokat tulevat täsmällisesti integroiduiksi. Systemaattisemman tavan tarjoaa Mäkelän [11] esittämä interpolaatiokonstruktio, jonka käyttöä eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien konstruointiin tässä työssä aluksi tarkastellaan. Interpolaatiokonstruktion liittyvän interpolaatiotehtävän ratkaisun olemassaolokysymyksiä on tarkasteltu [13]:ssa. Laajemman menetelmäluokan, ns. heikosti epälineaaristen menetelmien, teoriaa tarkastellaan tutkimuksessa [12], tämän teorian eräänä sovellutuksena saadaan konvergenssilause konstruoitaville menetelmille.

Probleeman määrittelyn jälkeen konstruimme yleisen moniaskelmenetelmän interpolaation pohjalta. Jos interpolaatioavaruus toteuttaa tietyt ehdot, ovat saatavat menetelmät konvergentteja. Todistamme eräiden yleisten avaruuksien toteuttavan nämä ehdot. Huomaamme, että kun interpolaatioavaruus valitaan sopivasti, antaa konstruktio eksponentiaalisesti sovitettuja menetelmiä. Konstruktio havainnollistuu kun sovellamme sitä eräiden yksinkertaisten eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien konstruointiin. Interpolaatiokonstruktio antaa menetelmien kerroinfunktiot eksplisiittisinä lausekkeina, toisin kuin esim. [3]:ssa. Tar-

kastelemme yksinkertaisten menetelmien stabiilisuusominaisuuksia ja voimme näiden tarkastelujen pohjalta esittää yleisen hypoteesin eksponentiaalisesti sovitettujen moni-askelmenetelmien stabiilisuusalueen käyttäytymisestä sovituspametria ja askelpituutta vaihdeltaessa. Muutama sana eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien soveltamisesta käyttöön päättää esityksen.

## 2. TEHTÄVÄ

Oletetaan annetuksi alkuarvotehtävä

$$(2.1) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \left( ' = \frac{d}{dt} \right)$$

jolla oletetaan olevan yksikäsitteinen ratkaisu  $x(t) \in C[0, 1]$ .

Etsitään ratkaisulle approksimaatiota tasavälisessä pisteis-

tössä  $T_m = \{t_i = ih \mid i = 0, 1, \dots, m, mh = 1\}$

differenssiyhtälöllä

$$(2.2) \quad y_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i(h) y_{n-i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i(h) f(t_{n-i}, y_{n-i}).$$

Oletetaan, että tarvittavat alkuarvot antava aloitusmenetelmä on olemassa.

## 3. INTERPOLAATIOKONSTRUKTIO

Yhtälö (2.2) esittää erästä moniaskelmenetelmää sovellettuna tehtävään (2.1). Yleisesti hyväksyttyä täsmällistä moniaskelmenetelmän määritelmää ei ole esitetty (eräitä määritelmiä ks. [6], [12]), tämän työn puitteissa riittää nimittää itse yhtälöä (2.2) moniaskelmenetelmäksi. Menetelmä määräytyy, kun valitaan  $k$  ja kerroinfunktiot  $\alpha_i(h)$ ,  $i=1, \dots, k$ ,  $\beta_i(h)$ ,  $i=0, \dots, k$ .

Menetelmiä on usein mielekästä luokitella ja valita sen pe-

rusteella, mitkä funktiot ne integroivat täsmällisesti. Menetelmän sanotaan integroivan täsmällisesti funktion  $u(t)$ , jos

$$(3.1) \quad -u(t_n) + \sum_1^k \alpha_i(h)u(t_{n-i}) + h \sum_0^k \beta_i(h)u'(t_{n-i}) = 0,$$

kun  $n=k, \dots, m$  ja  $t_i \in T_m$ .

Mäkelä [11] on esittänyt menetelmän, jolla voidaan konstruoida tietyt ehdot toteuttavan funktioavaruuden  $U$  kaikki alkiot täsmällisesti integroiva moniaskelmenetelmä. Menetelmä perustuu Hermite-Birkhoff-interpolaatiotehtävän ratkaisemiseen. Ratkaisun olemassaolon takaamiseksi  $U$ :lle asetettavia ehtoja on tutkittu erikseen, ks. [13], oletamme jatkossa, että ratkaisu on olemassa. Seuraavassa sovellamme tätä konstruktio menetelmää yhtälön (2.2) tyyppiä olevien lineaaristen moniaskelmenetelmien konstruointiin.

Olkoon askelpituus  $h > 0$ . Olkoon annettu matriisi  $E = (e_{ij})$  ( $i = 0, 1, \dots, p; j = 0, 1$ )  $e_{ij} = 0$  tai  $1$  ja  $\sum_{i,j} e_{ij} = r$ . Kutsumme  $E$ :tä osumamatriisiksi. Olkoon  $U$  annettu funktioavaruus, jonka eräs kanta on  $\{u_s : [-kh, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid s = 0, 1, \dots, r-1\}$ . Koska pyrimme konstruoimaan menetelmän, jonka kerroinfunktiot eivät riipu argumentista  $t$  vaan pelkästään askelpituudesta  $h$ , vaadimme  $U$ :lta translaatioinvarianssiominaisuuden eli, että

$$(3.2) \quad U|_{[-kh, 0]} = \tau_a U|_{[a-kh, a]},$$

kaikilla  $a \in [0, 1]$ .  $\tau_a$  on translaatio-operaattori:  $\tau_a u(t) = u(t-a)$ .  $U$ :ta kutsumme interpolaatioavaruudeksi.  $E$  määrittelee HB-interpolaatiotehtävän: on löydettävä  $u \in U$  siten, että



$$(3.3) \quad u^{(j)}(t_{n-i}) = y^{(j)}(t_{n-i})$$

kaikille  $(i,j)$ , joille  $e_{ij} = 1$ . Tässä olemme merkinneet  $y(t_{n-i}) = y_{n-i}$ ,  $y'(t_{n-i}) = f_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i})$ . (HB-interpolatiotehtävän yleistä määrittelyä ks. [13] s. 2).

Oletamme siis, että  $E$  ja  $U$  ovat sellaiset, että tehtävällä on ratkaisu. Kun tehtävä on ratkaistu voidaan interpoloidaan funktiota  $u$  käyttää differentiaaliyhtälön ratkaisun ennustamiseen pisteessä  $t_n$ ,  $y(t_n) = u(t_n)$ .

Translaatioinvarianssin perusteella voidaan  $u$  esittää  $u(t_{n-i}) = \sum_0^{r-1} c_s u_s(-ih)$ . Ehdoista (3.3) saadaan nyt yhtälöryhmä

$$Ac = g,$$

missä  $c = (c_0, c_1, \dots, c_{r-1})^T$ ,  $A$  on  $r \times r$ -matriisi, joka koostuu riveistä  $(u_0^{(j)}(-ih), u_1^{(j)}(-ih), \dots, u_{r-1}^{(j)}(-ih))$ , joilla  $e_{ij} = 1$  ja  $g$  on  $r$ -vektori, jonka alkioina ovat ne  $y^{(j)}(t_{n-i})$ , joilla  $e_{ij} = 1$ .  $T$  tarkoittaa transpoosia.

Nyt siis

$$c = A^{-1} g$$

ja

$$(3.4) \quad y_n = u(t_n) = v^T A^{-1} g,$$

kun merkitään  $v = (u_0(0), u_1(0), \dots, u_{r-1}(0))^T$ .

Yhtälö (3.4) määrittelee differenssiyhtälön, joka on samaa muotoa kuin yhtälö (2.2). Niiden  $y^{(j)}(t_{n-i})$ , joilla  $e_{ij}=0$ , kerroinfunktiot kaavassa (2.2) on näinollen valittu 0:ksi. Muiden kerroinfunktiot ovat vektorin  $v^T A^{-1}$  elementteinä ja ne riippuvat vain askelpituudesta, ei siis  $t_n$ :stä.

Konstruoitu menetelmä integroi täsmällisesti kaikki U:n funktiot. Näin on, koska HB-tehtävän ratkaisun olemassaolo takaa sen yksikäsitteisyyden, ks. esim. [13] s. 5.

Esimerkkinä mainittakoon, että valitsemalla  $U = \pi_{r-1}$ , eli kaikkien korkeintaan  $r-1$  -astetta olevien polynomien joukko, saadaan konstruktiosta vakiokertoimisia moniaskelmenetelmiä (ks. [11] s. 19). Nämä integroivat  $r-1$  -asteiset polynomit täsmällisesti ja ovat siis kertaluvultaan (ks. esim. [8] s. 118)  $r-1$ .

Jatkossa oletamme avaruudella U olevan ominaisuuden (3.2).

#### 4. KONVERGENSSILAUSE

Moniaskelmenetelmän käyttö differentiaaliyhtälön ratkaisun approksimaation hakemiseen on mielekäästä vain mikäli saatavat approksimaatiot konvergoivat yhtälön ratkaisua kohti. Interpolaatiokonstruktiolla muodostettujen moniaskelmenetelmien konvergenssitarkastelu pohjautuu heikosti epälineaaristen moniaskelmenetelmien tarkasteluun. Näitä käsitellään tutkimuksessa [12]. Esitämme tässä yhteydessä konvergenssilauseen ja todistamme lemmän, jonka avulla lauseen todistus palautuu em. tarkasteluun.

Lause 1. Olkoon  $U$  sellainen, että sille voidaan löytää kan-  
ta  $B(U) = \{u_s(t) \mid s=0,1,\dots,r-1\}$ , jolla on ominai-  
suudet

$$u_s(t) = t^s + O(t^{s+1}), \text{ kun } s = 0,1,\dots,r-1,$$

$$u'_s(t) = st^{s-1} + O(t^s), \text{ kun } s = 1,2,\dots,r-1$$

$$\text{ja } u'_0(t) = O(t).$$

Tällöin on interpolaatiokonstruktiolla annetun  $E:n$   
suhteen  $U$ :sta muodostettu moniaskelmenetelmä kon-  
vergentti jos ja vain jos saman  $E:n$  suhteen  $\pi_{r-1}$ :stä  
muodostettu moniaskelmenetelmä on sitä, edellyttä-  
en että molemmat ovat olemassa.

Lemma 1. Toteuttakoon  $U$  lauseen 1 oletukset. Tällöin ovat  
annetun  $E:n$  suhteen  $U$ :sta muodostetun moniaskelme-  
netelmän kerroinfunktiot muotoa

$$(4.1) \quad \begin{cases} \alpha_i(h) = \alpha_i + O(h), & i = 1,2,\dots,k, \\ \beta_i(h) = \beta_i + O(h), & i = 0,1,\dots,k, \end{cases}$$

missä  $\alpha_i$  ja  $\beta_i$  ovat saman  $E:n$  suhteen  $\pi_{r-1}$ :stä muo-  
dostetun (vakiokertoimisen) moniaskelmenetelmän  
kertoimet. Jälleen edellytämme, että molemmat me-  
netelmät ovat olemassa.

Todistus:

Interpolaatiokonstruktion matriisi  $A$  koostuu nyt riveistä  
 $(u_0^{(j)}(-ih), u_1^{(j)}(-ih), \dots, u_{r-1}^{(j)}(-ih))$  sen mukaan miten  
valittu  $E$  määrää. Kirjoitetaan  $A$  nyt ottaen huomioon oletet-  
tu esitystapa.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 + O(-h) & -h + O(h^2) & \cdots & (-h)^{r-1} + O(h^r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + O(-kh) & -kh + O(k^2h^2) & \cdots & (-kh)^{r-1} + O((kh)^r) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 + O(-kh) & 1 + O(-kh) & \cdots & (-kh)^{r-2} + O((kh)^{r-1}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -h & \cdots & (-h)^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -kh & \cdots & (-kh)^{r-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & -h & \cdots & (-h)^{r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & -kh & \cdots & (-kh)^{r-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(h) & O(h^2) & \cdots & O(h^r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O(h) & O(h^2) & \cdots & O(h^r) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ O(h) & O(h) & \cdots & O(h^{r-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O(h) & O(h) & \cdots & O(h^{r-1}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

missä summan ensimmäinen termi on matriisi, joka vastaa A-matriisia suoritettaessa interpolaatiokonstruktio  $\pi_{r-1}$ :stä. Merkitään tätä matriisia P:llä. Merkitkään O mitä tahansa matriisia, jonka jokainen elementti on  $O(h)$ . Näin siis kirjoitamme

$$A = P + O.$$

$A^{-1}$  on olemassa ja se on muotoa

$$A^{-1} = P^{-1} + O.$$

(Tämä nähdään esim. ajattelemalla  $A^{-1}$  muodostetuksi alideterminanttien avulla.)

Vektori  $v$  on sama,  $v^T = (1, 0, \dots, 0)$ , olipa konstruktio suoritettu U:n tai  $\pi_{r-1}$ :n suhteen, joten

$$v^T A^{-1} = v^T P^{-1} + O.$$

Näin on lemma todistettu.  $\square$

Lemman 1 mukaan ovat interpolaatiolla vaaditun kaltaisista avaruuksista  $U$  konstruoidut menetelmät juuri niitä, joita [12] käsittelee. Lause 1 vastaa siten täsmälleen vastaavaa lausetta mainitussa tutkimuksessa.

Seuraavaa lemmaa varten tarvitsemme Markoff- (ks. [13] ss. 5-7) eli ECT-systeemin (ks. [9] s. 375) käsitettä. Merkitään  $W(u_0, u_1, \dots, u_k)$ :lla funktioiden  $u_0(t), u_1(t), \dots$ , ja  $u_k(t)$  Wronskin determinanttia. Sanomme funktiojoukkoa  $\{u_s(t) \in C^{r-1}(I) \mid s=0, 1, \dots, r-1\}$   $M_r^r$ - tai ECT-systeemiksi jos  $W(u_0, u_1, \dots, u_k)(t) \neq 0$  kaikilla  $t \in I$  kun  $k = 0, 1, \dots, r-1$  (vrt. [9] s. 379).

Lemma 2. Olkoon  $U$  välillä  $I \ni 0$  määritelty  $M_r^r$ -systeemin  $\{u_s(t) \mid s=0, 1, \dots, r-1\}$  virittämä funktioavaruus. Oletetaan, että systeemin funktiot ovat  $r$ -kertaa derivoituvia ja  $u_0(t) \equiv 1$ . Tällöin on  $U$ :lla lauseessa 1 vaadittu ominaisuus.

### Todistus:

$u_s(t)$  voidaan Taylorin lauseen (esim. [2] s. 96) mukaan esittää muodossa

$$u_s(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_{sk} t^k + \frac{1}{r!} u_s^{(r)}(\zeta) t^r,$$

missä  $\zeta \in I$  ja  $t \in I$ .

$U$ :lle voidaan valita uusi  $M_r^r$ -systeemi  $\{v_s(t) \mid s=0, 1, \dots, r-1\}$  kannaksi siten, että  $v_s^{(p)}(0) = 0$  kun  $p=0, 1, \dots, s-1$ ;  $s=1, 2, \dots, r-1$  (ks. [9] s. 379 remark 1.2). Uuden kannan funktioilla on vastaava esitys

$$v_s(t) = \sum_{k=s}^{r-1} b_{sk} t^k + \frac{1}{r!} v_s^{(r)}(\xi) t^r, \quad \xi \text{ ja } t \in I.$$

$b_{sj} = 0$  kun  $j < s$  em. valinnan johdosta.

Nyt  $b_{ss} \neq 0$ ,  $s = 1, \dots, r-1$ , sillä jos jollain  $s$ ,  $b_{ss} = 0$  niin  $v_s^{(s)}(0) = 0$  ja  $W(v_0, v_1, \dots, v_s)(0) = 0$  eikä uusi kanta olisi-  
kaan  $M_r^r$ -systeemi. Siis normeeraamalla funktiot  $v_s(t)$  saadaan  
avaruudelle  $U$  lauseen 1 oletuksien mukainen kanta

$$\hat{u}_s(t) = \frac{1}{b_{ss}} v_s(t), \quad s = 1, \dots, r-1 \quad \text{ja}$$

$$\hat{u}_0(t) = u_0(t). \quad \square$$

Esimerkiksi joukon  $\Lambda = \{t^j e^{\lambda_i t} \mid j=0, 1, \dots, p_i; i=0, 1, \dots, h, \sum_0^h (p_i+1) = r-1, \lambda_0=0\}$  virittämä avaruus toteuttaa lemmän 2 oletukset. Tätä erikoistapausta tulemme jatkossa yksinomaan käyttämään interpolaatioavaruuksena.

Todettakoon vielä jatkoa varten, että eräillä varsin yleisillä ehdoilla osumatriisille  $E$  on interpolaatiokonstruktion liittyvällä tehtävällä aina ratkaisu  $\Lambda$ :n suhteen, ks. [13] s. 16 Theorem 6. Yma

## 5. EKSPONENTIAALINEN SOVITUS

Kankeille differentiaaliyhtälöille sopivia numeerisia ratkaisumenetelmiä haettaessa on syytä kysyä, mitkä funktio-  
luokat menetelmät halutaan integroimaan täsmällisesti. Va-  
kiokertoimiset menetelmät, kuten edellä todettiin, integroi-  
vat täsmällisesti kertalukunsa asteiset polynomit. Eksponen-  
tiaalisesti sovitettuihin moniaskelmenetelmiin päädytään, kun  
vaaditaan menetelmän integroivan täsmällisesti jonkin edellä  
määritellyn  $\Lambda$ -joukon virittämän avaruuden funktiot. Määrit-  
telemme eksponentiaalisen sovituksen (vrt. [4] § 3.35 ja [3]  
s. 143):

Määritelmä: Moniaskelmenetelmä on eksponentiaalisesti so-  
vitettu pisteessä  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jos se integroi täsmäl-  
lisesti kaikki funktiot  $p(t)e^{\lambda t}$ , missä  $p(t)$   
on mielivaltainen, korkeintaan  $p$ -asteinen  
polynomi. Sovituksen kertaluvun sanotaan ole-  
van  $p$ .

Rajoitumme tässä tarkastelussa reaalisiin sovituspamet-  
rin  $\lambda$  arvoihin. Yleistys kompleksitasoon ei vaikuta käsit-  
telyyn olennaisesti, mutta sen mielekkyys ei tunnu kovin  
suurelta.

Bjorel [3] ja Lininger ja Willoughby [10] toteuttavat sovi-  
tuksen sijoittamalla määritelmän funktion yhtälöön (3.1) ja  
määräämällä etukäteen valitsemansa menetelmän vapaat para-  
metrit siten, että yhtälö toteutuu.

Eksponentiaalisen sovituksen määritelmä suorastaan jo viit-

taa siihen, että luontevin tapa sovituksen toteuttamiseen on interpolaatiokonstruktio. Jos haluamme menetelmän sovitetuksi  $p$ -kertaisesti pisteessä  $\lambda$ , niin valitaan  $U$  siten, että  $\{t^i e^{\lambda t} \mid i = 0, 1, \dots, p\} \subset U$ .

Esimerkiksi tunnettu trapetsikaava saadaan interpolaatiokonstruktiolla valitsemalla  $U$ :n kanta  $B(U) = \{1, t, t^2\}$  ja

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eksponentiaalisesti sovitettu versio saadaan valitsemalla  $B(U) = \{1, t, e^{\lambda t}\}$  ja sama  $E$ .

Huomattakoon, että koska eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien konstruoidaan em.  $\Lambda$ -joukon pohjalta niiden ominaisuudet askelpituuden lähestyessä nollaa, so. stabiiliisuus, konsistenssi ja konvergenssi, ratkeavat lauseen 1 mukaan. Tarkastellessa siis saman osumamatriisin suhteen muodostettujen vakio- ja konvergenssin menetelmien ominaisuuksia. Käytännössä valitsemme  $E$ :n siten, että sen suhteen konstruktio onnistuu sekä  $U$ :lle että  $\pi_{r-1}$ :lle ja  $\pi_{r-1}$ :stä konstruoitu menetelmä on konvergentti. Tässä esityksessä esimerkiksi valitsemme  $E$ :n samaksi kuin vakio- ja konvergenssin menetelmillä (ks. esim. [8] ss. 104-113).

Edellisen mukaan on tarkasteltavien menetelmien käyttäytymisen  $h$ :n lähestyessä nollaa tunnettua, sijaan on syytä tarkastella niiden stabiilisuusominaisuuksia kun  $h \geq h_0 > 0$ .



## 6. EKSPONENTIAALISESTI SOVITETTujen MONIASKELMENETELMIEN STABIILISUUSOMINAISUUKSISTA

### 6.1 Stabiilisuuskäsitteistä

Ahonen ([1] ss. 40,41) tarkastelee stabiilisuutta kiinteällä askelpituudella määrittelemänsä tehtäväluokan suhteen. Samaan tapaan me tarkastelemme stabiilisuutta tehtävän

$$(6.1) \quad \begin{cases} x' = qx, & q \in \mathbb{C} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

suhteen. Otamme käyttöön Dahlquistin ([7] s. 27) määrittelemät polynomit

$$(6.2) \quad \begin{cases} \rho(\xi, h) = \sum_0^k \alpha_i(h) \xi^{k-i}, & \alpha_0(h) \equiv -1 \\ \sigma(\xi, h) = \sum_0^k \beta_i(h) \xi^{k-i}. \end{cases}$$

Perustamme tarkastelumme Gearin ([8] s. 128) määrittelemälle absoluuttisen stabiilisuuden käsitteelle.

Määritelmä: Moniaskelmenetelmä on absoluuttisesti stabiili siinä  $h$ -tason alueessa, jossa yhtälön

$$(6.3) \quad \rho(\xi, h) + qh\sigma(\xi, h) = 0$$

juuret ovat itseisarvoltaan  $\leq 1$ . Kutsumme ko. aluetta<sup>x)</sup> stabiilisuusalueeksi.

---

x) Ei välttämättä ole alue.

Eräs tärkeä erikoistapaus on Dahlquistin historiallisesti aikaisemmin määrittelemä A-stabiilisuus, ks. [7] s. 29. Menetelmä on A-stabiili silloin kun yhtälön (6.3) juuret ovat itseisarvoltaan  $< 1$  koko vasemmassa puolitasossa (ks. [7] s. 29).

Esitettyjen käsitteiden motivaatiota ks. esim. [8], [1]. Toteamme tässä yhteydessä, että stabiilisuusalue havainnollisesti on se alue, johon kuuluvilla arvoilla  $h$  häiriö yhdessä arvossa  $y_n$  ei aiheuta askel askeleelta kasvavaa virhettä myöhemmissä arvoissa ([8] s. 9).

Erilaisten moniaskelmenetelmien stabiilisuusalueita on tutkittu paljonkin. Perustavaa laatua ovat Dahlquistin A-stabiilisuutta koskevat tulokset. Hän osoitti, että A-stabiili menetelmä voi integroida täsmällisesti korkeintaan toista astetta olevat polynomit ([7] s. 31). Tällaisista menetelmistä pienin katkaisuvirhe on trapetsikaavalla. Dahlquist osoitti myös, ettei avoin kaava  $(\beta_0(h) \equiv 0)$  voi olla A-stabiili ([7] s. 30).

## 6.2. Stabiilisuusalueen määrittäminen

Stabiilisuusalueen raja eli yhtälön (6.3) itseisarvoltaan 1:n suuruisten juurten ura  $h$ -tasossa voidaan määrätä ratkaisemalla (6.3):sta  $h$  ja asettamalla  $\xi = e^{i\theta}$  eli

$$(6.4) \quad hq(\theta) = \frac{-\rho(e^{i\theta}, h)}{\sigma(e^{i\theta}, h)}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Ura on siis askelpituudesta riippuvainen. Voidaan kysyä, miksi ei näinollen tarkastella stabiilisuusaluetta esim.  $q$ -tasossa  $hq$ -tason asemasta. Vakiokertoimisilla menetelmillä ura ei  $hq$ -tasossa riipu  $h$ :sta ja pelkästään vertailunkin vuoksi kannattaa näille menetelmille vakiintunut käytäntö säilyttää. Myöhemmin havaitaan, että  $hq$ -tason tarkastelu eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien kohdalla on sinänsä motivoitua. Tällöin tulee nimittäin ura olemaan  $\lambda h$ :n funktio ( $\lambda$  on sovituspiste).

Mielivaltaiselle lineaariselle moniaskelmenetelmälle saadaan uran yhtälö (6.4) muotoon

$$(6.5) \quad hq(\theta) = \frac{\sum_0^k \sum_0^k \alpha_r^k(h) \beta_s(h) \cos[(s-r)\theta] + i \sum_0^k \sum_0^k \alpha_r^k(h) \beta_s(h) \sin[(s-r)\theta]}{\sum_0^k \beta_r^k(h)^2 + 2 \sum_0^k \sum_{r+1}^k \beta_r^k(h) \beta_s(h) \cos[(s-r)\theta]},$$

joka on helposti ohjelmoitavissa rajakäyrien piirtämistä varten.

Kun yhtälöä (6.4) kuvaava urakäyrä on jollekin menetelmälle määrätty, on vielä selvitettävä, miten ko. ura jakaa  $hq$ -tason stabiiliin ja epästabiiliin alueeseen. Polynomien juuret ovat kertoimien jatkuvia funktioita, eivätkä niiden itseisarvot näinollen voi muuttua ykköstä suuremmiksi tai pienemmiksi muualla kuin ko. uralla. Yhtälön (5.3) juuret  $hq$ -tason pisteessä  $\infty$  ovat samat kuin yhtälön  $\sigma(\xi)=0$  juuret. Jos nämä kaikki ovat itseisarvoltaan ykköstä pienemmät, on stabiili alue se tason osa, joka sisältää pisteen  $\infty$ , siis esim. suljetun rajakäyrän ulkopuoli. Jos näin ei ole, on

tutkittava jotain muuta tason pistettä, esim. suljetun rajakäyrän sisäpuolelta, ja näin pääteltävä, onko stabiili alue toisessa osassa tasoa vai ehkä vain pelkällä urakäyrällä. A-stabiili on menetelmä siis silloin, jos stabiilisuusalueen raja on imaginääriakseli ja stabiili alue on sen vasen puoli.

Kappaleen 5 lopussa mainitsimme tarkastelevamme lähemmin Adams-tyyppisiä menetelmiä. Tällä tarkoitamme sitä, että suljettua kaavaa muodostaessamme valitsemme osumamatriisin

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja avointa muodostaessamme

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tyyppiä olevaksi.  $\pi_{r-1}$ :stä saamme interpolaatiokonstruktiolla näiden matriisien suhteen edellä jo mainitut tunnetut Adams-menetelmät. Eksponentiaalisesti sovitettuja menetelmiä konstruoidaksemme olemme valinneet interpolaatioavaruudeksi joukon  $\Lambda$  virittämän lineaariavaruuden. Näinollen ovat lauseen 1 oletukset voimassa ja lemmän 1 mukaan lähestyvät kerroinfunktiot vastaavan Adams-menetelmän kertoimia, kun  $h$  lähestyy nollaa. Eksponentiaalisesti sovitettujen menetelmien stabiilisuusalue lähestyy siis vastaavan vakiokertoimisen moniaskelmenetelmän stabiilisuus-

aluetta kun  $h \rightarrow 0$ . Alueen käyttäytyminen  $h$ :n kasvaessa eräillä yksinkertaisilla menetelmillä on tarkemman mielenkiintomme kohteena.

Tarkastellaan vielä kerran yhtälöä (6.5). Imaginaariosa on nolla ainakin kun  $\theta = 0$  tai  $\pi$ . Kun  $\theta = 0$  häviää myös reaali-osa mutta ei nimittäjä, joten kaikki urat kulkevat  $h_q$ -tason origon kautta. Kun  $\theta = \pi$  leikkaa ura reaaliakselin pisteessä

$$(6.6) \quad h_q(\pi) = \frac{-\sum_0^k \sum_0^k \alpha_r(h) \beta_s(h) (-1)^{s-r}}{\left[ \sum_0^k \beta_r(h) (-1)^{k-r} \right]^2}$$

Kun kaikilla yhtälön (2.2) esittämällä menetelmillä  $\alpha_0(h) \equiv -1$  ja Adams-tyyppisillä eksponentiaalisesti sovitetuilla lisäksi saadaan  $\alpha_1(h) \equiv 1$  ja  $\alpha_i(h) \equiv 0$  kun  $i = 2, 3, \dots, k$ , niin

$$h_q(\pi) = \frac{2 \sum_0^k \beta_s(h) (-1)^s}{\left[ \sum_0^k \beta_r(h) (-1)^{k-r} \right]^2}$$

ja tästä saamme

$$(6.7) \quad h_q(\pi) = \frac{2}{\sum_0^k \beta_r(h) (-1)^r}$$

Tämä lauseke ilmoittaa siis yhden reaaliakselin leikkauspisteen. Jos stabiilisuusalueen rajakäyrä on suljettu käyrä, joka ei leikkaa itseään, kuten vakiokertoimisilla Adams-menetelmillä, ei käyrä voi leikata reaaliakselia

muualla kuin em. pisteessä ja origossa. Joka tapauksessa kuvaa tämän leikkauspisteen sijainti tietyllä tavoin stabiilisuusaluetta.

### 6.3 Euler-tyyppiset menetelmät

Tarkastelemme aluksi yksiaskelmenetelmiä, joilla  $U$ :n dimensio  $r=2$ . Sovitus voidaan suorittaa yhdessä pisteessä, so. valitaan  $B(U) = \{1, e^{\lambda t}\}$ . Suljettu kaava saadaan valitsemalla osumamatriisi

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Interpolaatiokonstruktion matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda h} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

ja

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & -e^{-\lambda h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektori  $v = (u_0(0), u_1(0))^T = (1, 1)$  ja siis

$$(\alpha_1(h), h\beta_0(h)) = v^T A^{-1} = \left(1, \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda h})\right).$$

Menetelmä on siis

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda h}) f_n.$$

Stabiilisuusalueen rajakäyrän ja reaaliakselin leikkauspisteet ovat 0 ja yhtälön (6.7) mukaan

$$\frac{2}{\beta_0(h)} = \frac{2\lambda h}{1 - e^{-\lambda h}} \geq 0$$

Kaikilla  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tässä tapauksessa on mahdollista tarkastella stabiilisuusaluetta lähtien yhtälöstä (6.3), joka saa muodon

$$-\xi + 1 + qh\beta_0(h)\xi = 0,$$

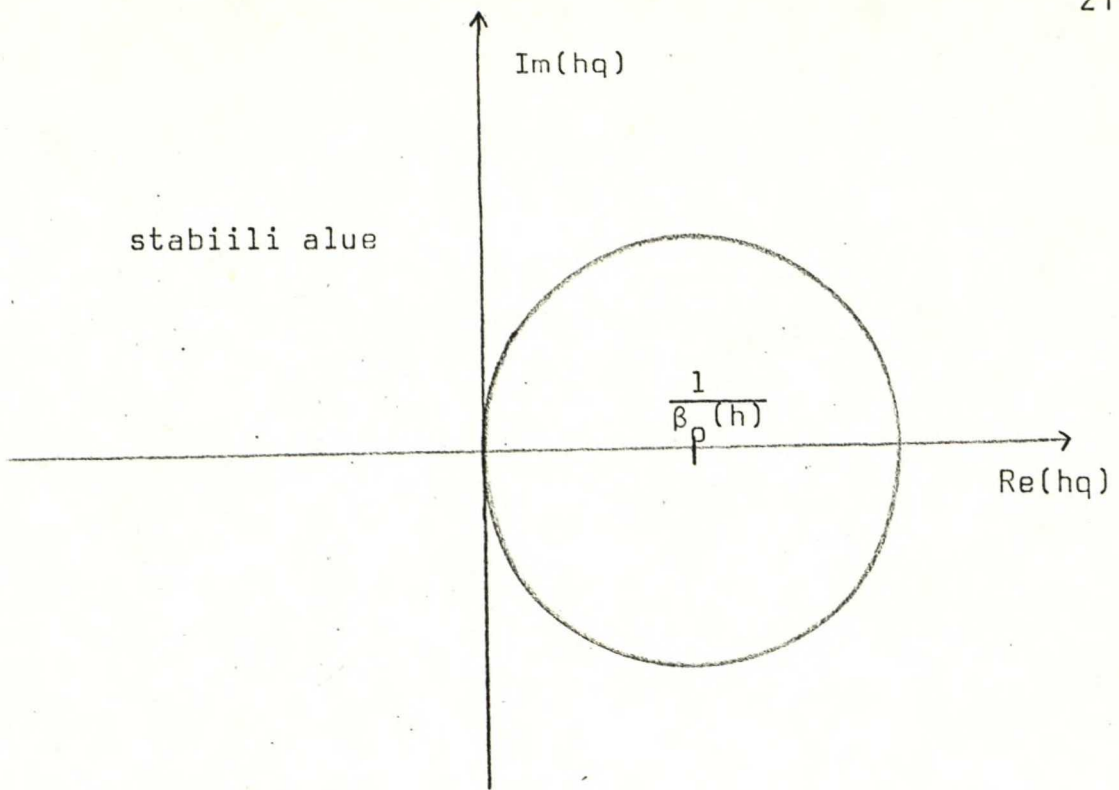
mistä ratkaistaan

$$\xi = \frac{1}{1 - qh\beta_0(h)}.$$

Stabiili alue määräytyy ehdosta  $|\xi| \leq 1$ , eli nyt

$$|1 - qh\beta_0(h)| \geq 1,$$

joka toteutuu  $qh$ -tasosaa origon kautta kulkeva  $1/\beta_0(h)$ -keskisen ja säteisen ympyrän kehällä ja sen ulkopuolella, ks. kuva 1.



Kuva 1.

Tämä ympyrä on siis aina oikeassa puolitasossa, joten menetelmä on aina A-stabiili, kuten on vastaava vakiokertoiminen menetelmäkin, ns. backward-Euler -menetelmä, jossa  $\beta_0 = 1$  (ks. esim. [8] s. 212).

Avoin kaava saadaan valitsemalla  $E = (1 \ 1)$ . Nyt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda h} \\ 0 & \lambda e^{-\lambda h} \end{pmatrix}$$

ja

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda h}} \begin{pmatrix} \lambda e^{-\lambda h} & -e^{-\lambda h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektori  $v$  on sama kuin edellä ja  $(\alpha_1(h), h\beta_1(h)) = (1, \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda h} - 1))$ .

Menetelmä on siis



$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda h} - 1) f_{n-1}.$$

Rajakäyrän ja reaaliakselin leikkauspisteet ovat 0 ja yhtälöstä (6.7) ( $\beta_0(h) \equiv 0$ )

$$-\frac{2}{\beta_1(h)} = \frac{2\lambda h}{1 - e^{\lambda h}} \leq 0$$

kaikilla  $\lambda h \in \mathbb{R}$ . Kuten edellä yhtälö (6.3) saa nyt muodon

$$-\xi + 1 + qh\beta_1(h) = 0,$$

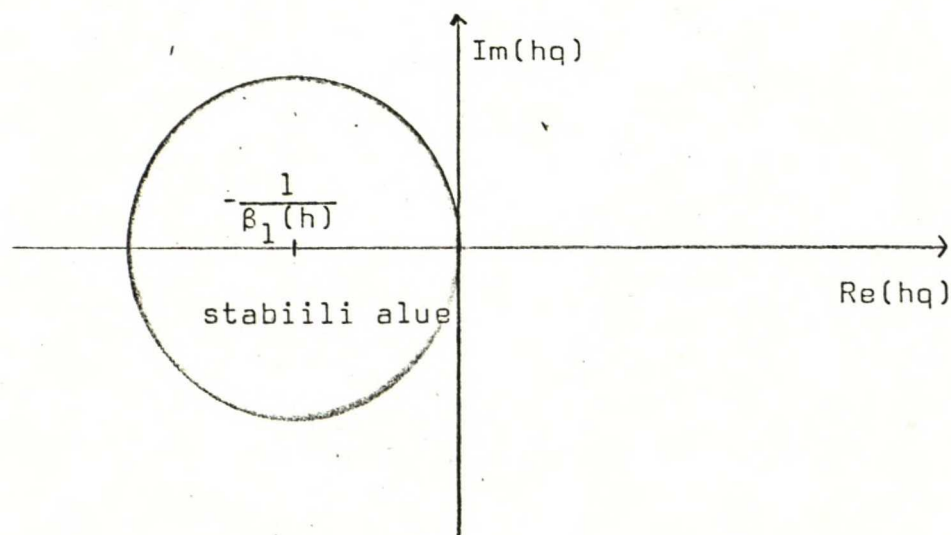
mistä ratkaistaan

$$\xi = 1 + qh\beta_1(h).$$

Stabiilissa alueessa toteutuu nyt ehto

$$|1 + qh\beta_1(h)| \leq 1.$$

Stabiilialue on siis origon kautta kulkevan  $-1/\beta_1(h)$  -keskisen ympyrän kehä ja sisäpuoli, ks. kuva 2.



Kuva 2.

Stabiilisuusalue on siis rajoitettu ja on mielenkiintoista tutkia, voidaanko sitä sopivalla sovituksella laajentaa. Tarkastellaan reaaliakselin ja rajakäyrän leikkauspistettä, joka  $\lambda h$ :n funktiona on

$$r(\lambda h) = \frac{2\lambda h}{1 - e^{\lambda h}}.$$

Nyt

$$\lim r(\lambda h) = \begin{cases} -\infty, & \text{kun } \lambda h \rightarrow -\infty \\ -2, & \text{kun } \lambda h \rightarrow 0 \\ 0, & \text{kun } \lambda h \rightarrow \infty, \end{cases}$$

joten stabiilisuusalue voidaan tehdä mielivaltaisen laajaksi sovittamalla pisteessä  $\lambda$ , joka on riittävän negatiivinen.

#### 6.4. Trapetsityyppiset menetelmät

Trapetsityyppisiksi kutsumme menetelmiä, jotka saadaan valitsemalla osumamatriisi

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nämä ovat siis suljettuja menetelmiä

$$y_n = y_{n-1} + h [\beta_0(h)f_n + \beta_1(h)f_{n-1}].$$

Tarkastellaan jälleen yhtälöä (6.3), joka nyt on

$$-\xi + 1 + hq [\beta_0(h)\xi + \beta_1(h)] = 0,$$

mistä

$$\xi = \frac{1 + \beta_1(h)hq}{1 - \beta_0(h)hq}.$$

Merkitään nyt  $hq = x + iy$  ja tarkastellaan rajakäyrän yhtälöä

$$\left| \frac{1 + \beta_1(h)x + i\beta_1(h)y}{1 - \beta_0(h)x - i\beta_0(h)y} \right| = 1,$$

josta saadaan

$$[\beta_1(h)^2 - \beta_0(h)^2] x^2 + 2[\beta_1(h) + \beta_0(h)] x + [\beta_1(h)^2 - \beta_0(h)^2] y^2 = 0.$$

Jos  $\beta_1(h) = \beta_0(h)$  niin  $x = 0$  eli rajakäyrä on imaginaari-akseli ja stabiili alue tällöin vasen puolitaso, jos  $\beta_1(h) = -\beta_0(h)$  niin  $\xi = 1$  ja stabiili alue on koko taso (tällöin ei menetelmä kuitenkaan ole A-stabiili). Muulloin saadaan rajakäyrä

$$\left[ x - \frac{1}{\beta_0(h) - \beta_1(h)} \right]^2 + y^2 = \frac{1}{[\beta_0(h) - \beta_1(h)]^2},$$

joka on  $1/[\beta_0(h) - \beta_1(h)]$ -keskinen origon kautta kulkeva ympyrä. Reaaliakselin rajakäyrä leikkaa pisteissä 0 ja

$$\frac{2}{\beta_0(h) - \beta_1(h)},$$

joka olisi saatu myös suoraan yhtälöstä (6.7).

Yhtälön  $\sigma(\xi) = 0$  juuri on nyt

$$\xi_{\sigma} = - \frac{\beta_1(h)}{\beta_0(h)} .$$

Siis jos halutaan A-stabiili menetelmä on vaadittava, että ympyrä on oikeassa puolitasossa eli  $\beta_0(h) - \beta_1(h) \geq 0$  ja lisäksi, että stabiilisuusalue on sen ulkopuolella eli  $|\xi_{\sigma}| \leq 1$ . Yhteensä A-stabiilisuuden ehdoiksi saadaan

$$\begin{cases} \beta_0(h) - \beta_1(h) \geq 0 & \text{ja} \\ \beta_0(h) + \beta_1(h) \geq 0 & . \end{cases}$$

Konstruktioilla  $\pi_2$ :sta saadaan em. matriisin E suhteen ns. trapetsikaava, jossa  $\beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$ . Tämän stabiilisuusalue on edellisen mukaan vasen puolitaso, kuten on vanhastaan tunnettua.

Erilaisia sovitushetkimähdollisuuksia on nyt kolme:

- 1)  $B(U) = \{1, t, e^{\lambda t}\}, \lambda \neq 0,$
- 2)  $B(U) = \{1, e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}, \lambda \neq 0,$
- 3)  $B(U) = \{1, e^{\lambda t}, e^{\mu t}\}, 0 \neq \lambda \neq \mu \neq 0.$

Suorittamalla interpolaatiokonstruktio kappaleen alussa mainitun E:n suhteen saadaan taulukossa 1 esitetyt kerroin-funktiot.

Taulukko 1. Trapetsityyppisten menetelmien kerroinfunktiot

| Menetelmä | $\beta_0(h)$   | $\beta_1(h)$   |
|-----------|--|--|
| 1         | $\frac{1 + \lambda h - e^{\lambda h}}{\lambda h(1 - e^{\lambda h})}$                                     | $\frac{e^{\lambda h} - 1 - \lambda h e^{\lambda h}}{\lambda h(1 - e^{\lambda h})}$   |
| 2         | $\frac{e^{-\lambda h} + \lambda h - 1}{\lambda^2 h^2}$   | $\frac{e^{\lambda h} - \lambda h - 1}{\lambda^2 h^2}$  |
| 3         | $\frac{\lambda - \mu + \lambda e^{\mu h} + \mu e^{\lambda h}}{\lambda \mu h(e^{\lambda h} - e^{\mu h})}$ | $\frac{\mu e^{\mu h} - \lambda e^{\lambda h} + (\lambda - \mu)e^{(\lambda + \mu)h}}{\lambda \mu h(e^{\lambda h} - e^{\mu h})}$ |

Sijoittamalla nämä kertoimien lausekkeet edellä esitettyihin A-stabiilisuuden ehtolausekkeisiin voidaan tutkia, mitä ehtoja sovituspisteille  $\lambda$  ja  $\mu$  on asetettava, jotta saatava menetelmä olisi A-stabiili. Epäyhtälöistä saadaan taulukossa 2 esitetyt ehdot.

Taulukko 2. A-stabiilisuuden ehdot

| Menetelmä | Ehto A-stabiilisuudelle                         |
|-----------|---|
| 1         | $\lambda h \leq 2$                              |
| 2         | $\lambda < 0$<br>välttämätön ehto:              |
| 3         | $\lambda + \mu \leq 0$<br>(olet. myös riittävä) |

Näillä ehdoilla on stabiilisuusalue kuvan 1 esittämän alueen kaltainen, ympyrän keskipiste on

$$\frac{1}{\beta_0(h) - \beta_1(h)}$$

Eräs mielenkiintoinen erikoistapaus tyyppin 3 menetelmästä saadaan kun valitaan  $\mu = -\lambda$ . Tällöin

$$\beta_0(h) = \beta_1(h) = \frac{\cosh(\lambda h) - 1}{\lambda h \sinh(\lambda h)}$$

ja menetelmä on A-stabiili.

Tässä yhteydessä voimme myös todeta, että jos edellä A-stabiilisuudelle esitetyn ehdon sijasta olisi jollekin käsiteltävää tyyppiä olevalle menetelmälle voimassa ehto

$$\begin{cases} \beta_0(h) - \beta_1(h) \leq 0 & \text{ja} \\ \beta_0(h) + \beta_1(h) \leq 0 \end{cases}$$

niin menetelmä olisi ns. kankeasti stabiili, ks. [8] s. 213, ts. menetelmä olisi stabiili kun  $\operatorname{Re}(hq) \leq 2/[\beta_0(h) - \beta_1(h)]$ . Tällaisia menetelmiä ei kuitenkaan tällä konstruktiolla saatane.

#### 6.5. Avoimet 2-askelmenetelmät

Tarkastellaan menetelmiä, jotka saadaan valitsemalla

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Menetelmät ovat avoimia, tyyppiä

$$y_n = y_{n-1} + h[\beta_1(h)f_{n-1} + \beta_2(h)f_{n-2}].$$

Yhtälö (6.3) on nyt toista astetta, joten juurten ratkaiseminen ja itseisarvojen tutkiminen stabiilisuusalueen löytämiseksi on hyvin hankalaa. Tyydymme siihen, että tunnemme rajakäyrän yhtälön muodossa (6.4). Reaaliakselin leikkauspisteiksi saamme, origon lisäksi, kaavasta (6.7)

$$\frac{2}{\beta_2(h) - \beta_1(h)}.$$

Suorittamalla interpolaatiokonstruktion  $\pi_2$ :sta saamme Adams-Bashfordin menetelmän, jossa  $\beta_1 = \frac{3}{2}$  ja  $\beta_2 = -\frac{1}{2}$ . Reaaliakselin rajakäyrä leikkaa siis pisteensä  $-1$  ja stabiili alue on suljetun käyrän sisäpuolella (ks. kuva 3 merk. AB).

Sovitusmahdollisuuksia on jälleen kolme, samat kuin kohdassa 6.4, ja niistä interpolaatiokonstruktiolla saatavien menetelmien kerroinfunktiot on esitetty taulukossa 3.

Taulukko 3. Avoimien 2-askelmenetelmien kerroinfunktiot

| Menetelmä | $\beta_1(h)$   | $\beta_2(h)$   |
|-----------|--|--|
| 1         | $\frac{e^{\lambda h} - 1 - \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h(1 - e^{-\lambda h})}$   | $\frac{1 + \lambda h - e^{\lambda h}}{\lambda h(1 - e^{-\lambda h})}$                                      |
| 2         | $\frac{e^{-\lambda h}(1 - \lambda h) + 2\lambda h - 1}{\lambda^2 h^2 e^{-\lambda h}}$  | $\frac{e^{\lambda h} - \lambda h e^{\lambda h} - 1}{\lambda^2 h^2 e^{-\lambda h}}$                         |
| 3         | $\frac{\lambda e^{-\lambda h} - \mu e^{-\mu h} + \mu e^{(\lambda - \mu)h} - \lambda e^{(\mu - \lambda)h}}{\lambda \mu h(e^{-\mu h} - e^{-\lambda h})}$ | $\frac{\mu - \lambda - \mu e^{\lambda h} + \lambda e^{\mu h}}{\lambda \mu h(e^{-\mu h} - e^{-\lambda h})}$ |

Menetelmien stabiilisuusalueet lähestyvät em. vakiokertomisen menetelmän stabiilisuusaluetta kun  $\lambda h \rightarrow 0$ . (Kuten havaitaan ovat kertoimet  $\lambda h$ :n ja  $\mu h$ :n funktioita.)

Tarkastellaan stabiilisuusalueiden käyttäytymistä  $\lambda h$ :n kasvaessa. Tässä mielessä tarkastellaan reaaliakselin leikkauspisteen käyttäytymistä. Esim. menetelmällä 1

$$r(\lambda h) = \frac{2}{\beta_2(h) - \beta_1(h)} = \frac{2\lambda h(1 - e^{-\lambda h})}{-2e^{\lambda h} + 2 + \lambda h + \lambda h e^{-\lambda h}}$$

Kun nyt  $\lambda h \rightarrow \infty$  niin

$$r(\lambda h) \rightarrow \frac{2}{\frac{-2}{\lambda h} e^{\lambda h} + \frac{2}{\lambda h} + 1} \rightarrow 0$$

ja kun  $\lambda h \rightarrow -\infty$

$$r(\lambda h) \rightarrow \frac{-2}{\frac{-2}{\lambda h} e^{2\lambda h} + \frac{2}{\lambda h} e^{\lambda h} + e^{\lambda h} + 1} \rightarrow -2$$

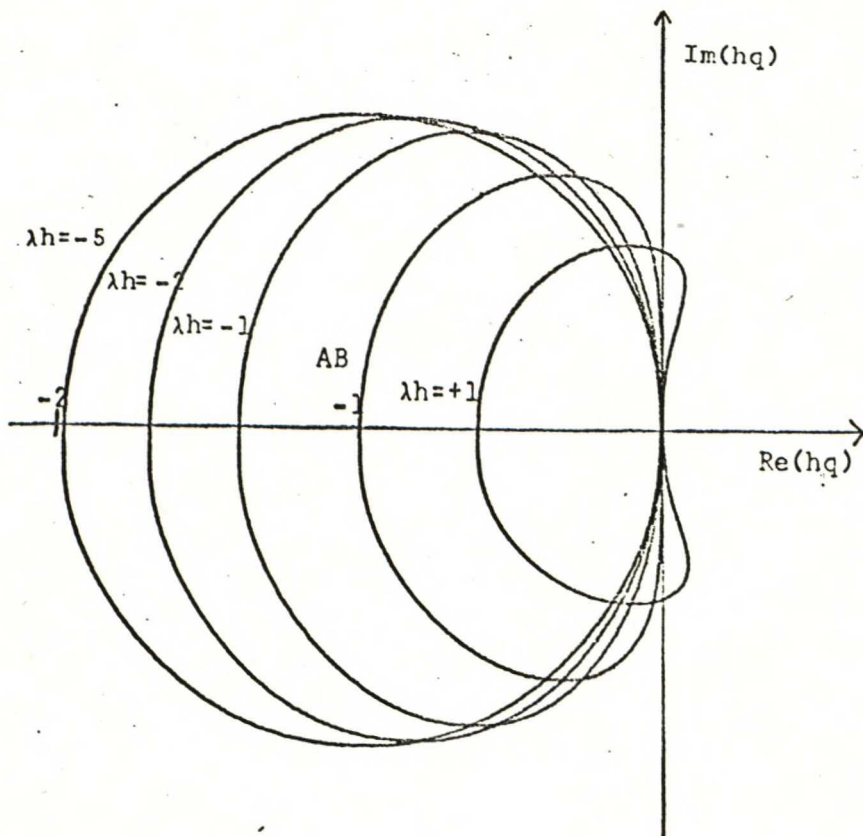
ja jo tiedettiin, että kun  $\lambda h \rightarrow 0$ ,  $r(\lambda h) \rightarrow -1$ . Samoin voidaan tutkia myös menetelmien 2 ja 3 käyttäytymistä. Tulokset on koottu taulukkoon 4.



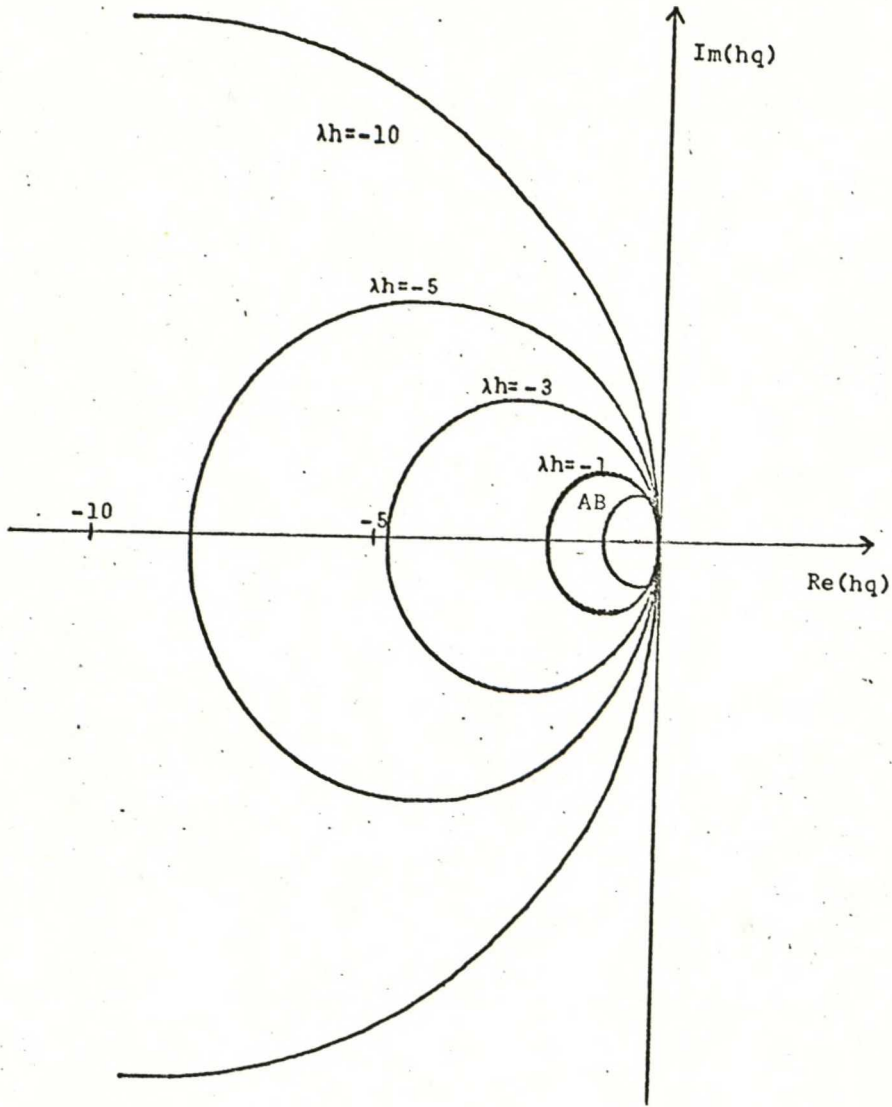
Taulukko 4. Reaaliakselin leikkauspisteen käyttäytyminen

| Menetelmä | $\lim_{\lambda h \rightarrow -\infty} r(\lambda h)$ | $\lim_{\lambda h \rightarrow +\infty} r(\lambda h)$ |
|-----------|---|---|
| 1         | -2  | 0   |
| 2         | $-\infty$   | 0   |
| 3         | $\frac{2\mu h}{1-e^{\mu h}}$                        | 0   |

Menetelmien 2 ja 3 stabiilisuusalue voidaan siis tehdä mielivaltaisen suureksi valitsemalla  $\lambda h$  ja  $\mu h$  sopivasti. Sen sijaan menetelmän 1 stabiilisuusaluetta ei voida oleellisesti kasvattaa. Menetelmän 1 stabiilisuusalueen rajakäyrät on tietokoneen avulla piirretty eräillä  $\lambda h$ :n arvoilla kuvassa 3. Kuvassa 4 vastaavia käyriä menetelmän 2 osalta.



Kuva 3. Menetelmän 1 stabiilisuusalueita.



Kuva 4.

### 6.6. Suljetut 2-askelmenetelmät

Tarkastellaan vielä menetelmiä, jotka saadaan kun valitaan matriisi

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nämä ovat suljettuja menetelmiä:

$$y_n = y_{n-1} + h[\beta_0(h)f_n + \beta_1(h)f_{n-1} + \beta_2(h)f_{n-2}] .$$

Stabiilisuusalueen rajakäyrä leikkaa reaaliakselin origossa ja yhtälön (6.7) mukaan pisteessä

$$\frac{2}{\beta_0(h) - \beta_1(h) + \beta_2(h)} .$$

$\pi_3$ :sta muodostettu menetelmä on Adams-Moultonin kolmannen kertaluvun menetelmä, jossa  $\beta_0 = \frac{5}{12}$ ,  $\beta_1 = \frac{8}{12}$  ja  $\beta_2 = -\frac{1}{12}$ . Reaaliakselin leikkauspiste on siis -6 (ks. kuva 5 merk. AM).

Erilaisia sovitushmahdollisuuksia on nyt kuusi kappaletta:

- 1)  $B(U) = \{1, t, t^2, e^{\lambda t}\}, \lambda \neq 0,$
- 2)  $B(U) = \{1, t, e^{\lambda t}, e^{\mu t}\}, \lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu,$
- 3)  $B(U) = \{1, t, e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}, \lambda \neq 0,$
- 4)  $B(U) = \{1, e^{\lambda t}, e^{\mu t}, e^{\eta t}\}, \lambda, \mu, \eta \neq 0, \lambda \neq \mu \neq \eta,$
- 5)  $B(U) = \{1, e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, e^{\mu t}\}, \lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu$  ja
- 6)  $B(U) = \{1, e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}\}, \lambda \neq 0.$

Näistä interpolaatiokonstruktiolla saatavien menetelmien kerroinfunktiot on esitetty taulukossa 5. Kuten havaitaan, ovat kerroinfunktiot jo tässä tapauksessa varsin monimutkaisia. Erityisesti on pantava merkille, että ne ovat funktioita sovituspisteiden ja askelpituuden tuloista  $\lambda h$ ,  $\mu h$  ja  $\eta h$ . Näin on ollut aiemmissakin konstruktioissa, itse asias-

sa kaikissa tutkituissa interpolaatiokonstruktiolla muodostetuissa eksponentiaalisesti sovitetuissa menetelmissä.

Stabiilisuusalueiden käyttäytymisen tarkastelu analyytisesti on kerroinfunktioiden monimutkaisuuden vuoksi hyvin hankalaa. Kaikki taulukossa 5 esiintyvät funktiot onkin ohjelmoitu tietokoneeseen ja laskettu kerroinfunktioiden arvoja eri arvoilla  $\lambda h$ ,  $\mu h$  ja  $\eta h$ . Näiden perusteella on tietokonepiirturin avulla piirretty stabiilisuusalueen rajakäyriä, joiden käyttäytymisestä näin on saatu kvalitatiivinen kuva. (Käytetyt tietokoneohjelmat ovat tekijältä saatavissa.)

Kaikissa tapauksissa stabiilisuusalue kasvaa, kun  $\lambda h$  tulee negatiivisemmaksi. Käyttäytyminen voi olla kahdenlaista. Menetelmän 1 stabiilisuusalueen rajakäyriä on esitetty kuvassa 5. Stabiili alue on suljetun käyrän sisäpuolella.

Taulukko 5. Suljettujen 2-askelmenetelmien kerroinfunctiot

| Menetelmä | $\beta_0(h)$   |
|-----------|--|
| 1         | $\frac{2+2\lambda h+\lambda h(1-e^{-\lambda h})-2e^{\lambda h}}{4\lambda h[1-\cosh(\lambda h)]}$   |
| 2         | $\frac{\lambda-\mu+\mu e^{-\mu h}-\lambda e^{-\lambda h}+\lambda\mu h(e^{-\mu h}-e^{-\lambda h})+\mu e^{\lambda h}(1-e^{-\mu h})+\lambda e^{\mu h}(e^{-\lambda h}-1)}{2\lambda\mu h\{\sinh(\lambda h)-\sinh(\mu h)+\sinh[(\mu-\lambda)h]\}}$   |
| 3         | $\frac{(e^{\lambda h}-2)(1-\lambda h)+e^{-\lambda h}(1-\lambda h-\lambda^2 h^2)}{2\lambda^2 h^2[1-\cosh(\lambda h)]}$  |
| 4         | $\frac{\lambda(\mu-\eta)e^{-\lambda h}+\mu(\eta-\lambda)e^{-\mu h}+\eta(\lambda-\mu)e^{-\eta h}+\mu\eta e^{\lambda h}(e^{-\eta h}-e^{-\mu h})+\lambda\eta e^{\mu h}(e^{-\lambda h}-e^{-\eta h})+\lambda\mu e^{\eta h}(e^{-\mu h}-e^{-\lambda h})}{2\lambda\mu\eta h\{\sinh[(\lambda-\eta)h]+\sinh[(\mu-\lambda)h]+\sinh[(\eta-\mu)h]\}}$ |
| 5         | $\frac{e^{-\lambda h}+\mu(1-\lambda h)(e^{(\lambda-\mu)h}-1)+\lambda\mu h-\lambda^2 h e^{(\mu-\lambda)h}-\mu e^{-\mu h}}{2\lambda^2 \mu h^2\{1-\cosh[(\lambda-\mu)h]\}}$   |
| 6         | $\frac{e^{-\lambda h}(2-\lambda h)-2+3\lambda h-2\lambda^2 h^2}{-2\lambda^3 h^3}$  |

Menetelmä  $\beta_1(h)$

$$1 \quad \frac{-4-4\lambda h \cosh(\lambda h)-2\lambda h \sinh(\lambda h)+4e^{\lambda h}}{4\lambda h [1-\cosh(\lambda h)]}$$

$$2 \quad \frac{\mu \sinh(\mu h) - \lambda \sinh(\lambda h) + \lambda \mu h \sinh((\mu-\lambda)h) - \mu e^{\lambda h} \sinh(\mu h) + \lambda e^{\mu h} \sinh(\lambda h)}{\lambda \mu h (\sinh(\lambda h) - \sinh(\mu h)) + \sinh[(\mu-\lambda)h]}$$

$$3 \quad \frac{2\lambda h(\lambda h-1) + 1 - e^{2\lambda h} + e^{\lambda h}(1+\lambda h) - e^{-\lambda h}(1-\lambda h)}{2\lambda^2 h^2 [1 - \cosh(\lambda h)]}$$

$$4 \quad \frac{\mu \eta \sinh[(\mu-\eta)h] + \eta \lambda \sinh[(\eta-\lambda)h] + \lambda \mu \sinh[(\lambda-\mu)h] + \mu \eta e^{\lambda h} \sinh[(\eta-\mu)h] + \lambda \eta e^{\lambda h} \sinh[(\lambda-\eta)h] + \lambda \mu e^{\eta h} \sinh[(\mu-\lambda)h]}{\lambda \mu \eta h \{ \sinh[(\lambda-\eta)h] + \sinh[(\mu-\lambda)h] + \sinh[(\eta-\mu)h] \}}$$

$$5 \quad \frac{2\mu \sinh[(\lambda-\mu)h] + 2\lambda \mu h \cosh[(\lambda-\mu)h] + (\mu-2\lambda\mu h+2\lambda^2 h) e^{\mu h} - \mu e^{(2\lambda-\mu)h} - 2\lambda^2 h}{2\lambda^2 \mu h^2 [1 - \cosh(\lambda-\mu)h]}$$

$$6 \quad \frac{4(1-\lambda h)e^{\lambda h} + 2\lambda^2 h^2 - 4}{-2\lambda^3 h^3}$$

## Taulukko 5. jatkoa

Menetelmä  $\beta_2(h)$ 

$$1 \quad \frac{2 + 2\lambda h - \lambda h (1 - e^{\lambda h}) - 2e^{\lambda h}}{4\lambda h [1 - \cosh(\lambda h)]}$$

$$2 \quad \frac{\mu - \lambda + \lambda e^{\lambda h} - \mu e^{\mu h} + \lambda \mu h (e^{\lambda h} - e^{\mu h}) + \mu e^{\lambda h} (e^{\mu h} - 1) + \lambda e^{\mu h} (1 - e^{\lambda h})}{2\lambda \mu h \{ \sinh(\lambda h) - \sinh(\mu h) + \sinh[(\mu - \lambda)h] \}}$$

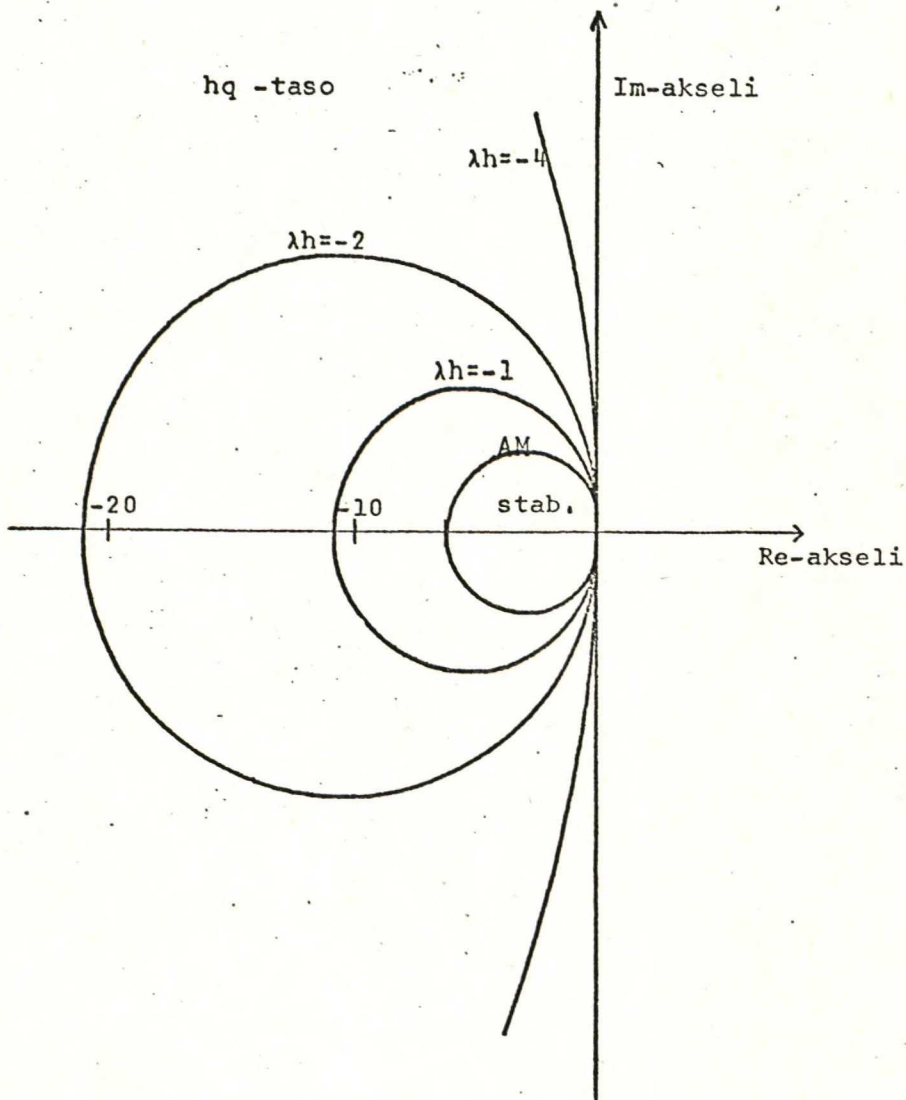
$$3 \quad \frac{e^{2\lambda h} - e^{\lambda h} (2 + \lambda^2 h^2) + 1}{2\lambda^2 h^2 [1 - \cosh(h)]}$$

$$4 \quad \frac{\lambda(\eta - \mu)e^{\lambda h} + \mu(\lambda - \eta)e^{\mu h} + \eta(\mu - \lambda)e^{\eta h} + \mu\eta e^{\lambda h} (e^{\mu h} - e^{\eta h}) + \lambda\eta e^{\mu h} (e^{\eta h} - e^{\lambda h}) + \lambda\mu e^{\eta h} (e^{\lambda h} - e^{\mu h})}{2\lambda\mu\eta h \{ \sinh[(\lambda - \eta)h] + \sinh[(\mu - \lambda)h] + \sinh[(\eta - \mu)h] \}}$$

$$5 \quad \frac{(\lambda^2 h^2 - \mu - \lambda\mu h)(e^{\lambda h} - e^{(\lambda + \mu)h}) + \mu e^{2\lambda h}}{2\lambda^2 \mu h^2 [1 - \cosh((\lambda - \mu)h)]}$$

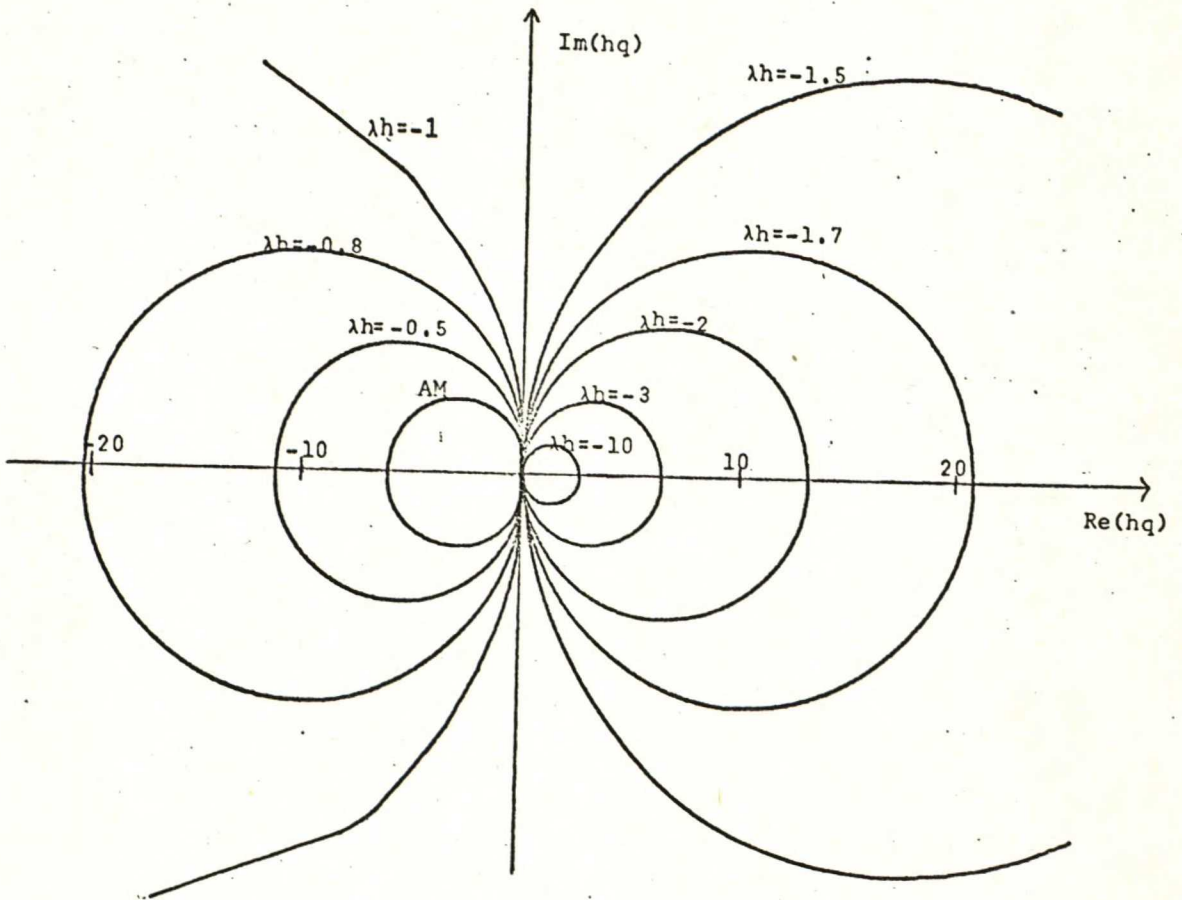
$$6 \quad \frac{e^{\lambda h} (2 + \lambda h) + e^{2\lambda h} (\lambda h - 2)}{-2\lambda^3 h^3}$$

Kun  $\lambda h \rightarrow -\infty$  lähestyy stabiilisuusalue vasenta puolitasoa mutta ei kuitenkaan tule rajoittamattomaksi millään äärellisellä arvolla  $\lambda h$ . Menetelmästä 3 on vastaava kuvio kuvassa 6. Stabiili alue on vasemmassa puolitasossa olevien käyrien sisäpuolella ja oikeassa puolitasossa olevien ulkopuolella. Eräällä arvolla  $\lambda h$  on funktiolla  $\beta_0(h) - \beta_1(h) + \beta_2(h)$  nollakohta ja stabiilisuusalue tulee rajoittamattomaksi.



Kuva 5. Menetelmän 1 stabiilisuusalueita.

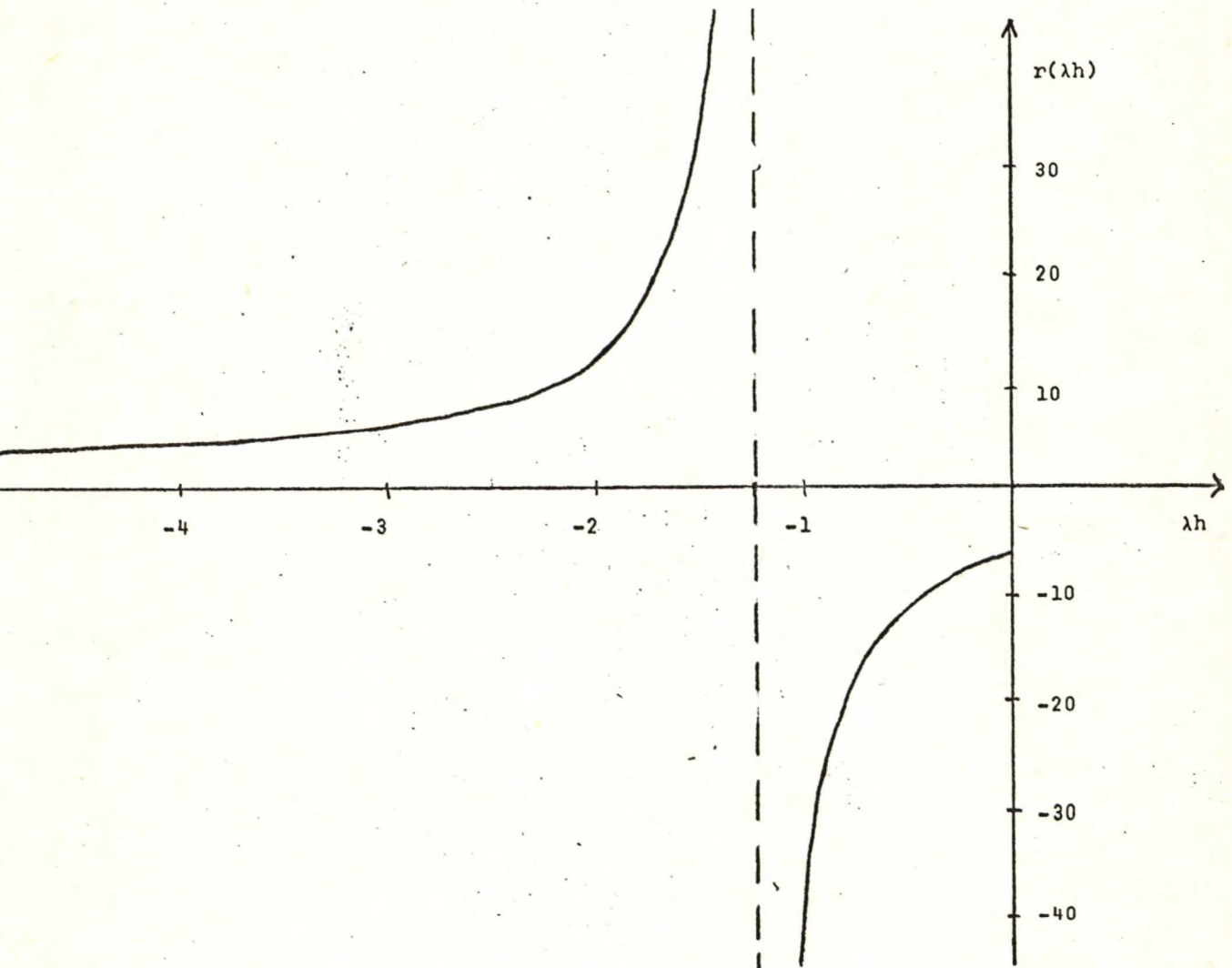




Kuva 6. Menetelmän 3 stabiilisuusalueita.

Kuviin on selkeyden vuoksi valittu tarkasteltaviksi vain yhden sovitusparametrin sisältävät menetelmät. Laadullisesti käyttäytyvät useampia parametrejä sisältävät menetelmät samaan tapaan kuin kuvassa 6 esitetty menetelmä 3, stabiilisuusalueen kasvamisnopeus tietysti riippuu muiden sovitusparametrien arvoista, samoin rajakäyrä, jota oikeassa

puolitasossa lähestytään. Menetelmällä 6 ei tällaista rajakäyrää ole, vaan epästabiili alue supistuu kohti origoa, kun  $\lambda h \rightarrow -\infty$ . Stabiilisuusalueen käyttäytymistä havainnollistaa vielä kuva 7, jossa on esitetty menetelmän 3 stabiilisuusalueen rajakäyrän ja reaaliakselin leikkauspiste funktiona  $\lambda h$ :sta.



Kuva 7.  $r(\lambda h)$ :n kuvaaja.

## 6.7 Rajakonstruktio tarkastelu

Edellisten yksityiskohtaisten tarkastelujen pohjalta voimme pyrkiä luomaan käsitystä siitä, miten stabiilisuusalue yleisesti riippuu valitusta sovitustavasta. Perustamme tarkastelun itse interpolaatiokonstruktion tarkasteluun.

Tarkastellaan esimerkiksi edellisen kappaleen menetelmää 1. Tällöin oli valittu  $B(U) = \{1, t, t^2, e^{\lambda t}\}$ . Kun  $\lambda h \rightarrow -\infty$  niin  $e^{\lambda h} \rightarrow 0$  ja voidaan ajatella, että  $B(U) \rightarrow \{1, t, t^2, 0\} = \{1, t, t^2\}$ . Interpolaatioavaruuden dimensio olisi siis rajalla pudonnut yhdellä. Konstruktiota ei myöskään voida enää suorittaa kuin kolmen pisteen kautta. Valitusta osumamatriisista

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on nyt jätettävä yksi ykkönen pois. Menetelmän luonnetta muuttamatta (so. menetelmä säilyy suljettuna Adams-tyyppisenä menetelmänä) voidaan jättää pois vain vanhinta derivaatan arvoa vastaava ykkönen. Saadaan

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja sen suhteen  $\pi_2$ :sta, joksi U nyt on muuttunut, konstruoitu menetelmään on tunnetusti trapetsikaava (vrt. kpl 6.4). Kun  $\lambda h \rightarrow -\infty$  lähestyy menetelmän 1 stabiilisuusalue vasenta puolitasoa, joka on trapetsikaavan stabiilisuusalue. Toi-

saalta esim. menetelmää 3 tarkasteltaessa on pois jätettävä kaksi pistettä, sillä tällöin  $B(U) \rightarrow \{1, t\}$  ja on valittava

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tässä tapauksessa rajakonstruktio antaa siis backward-Euler-menetelmän (vrt. kpl 6.3), jonka stabiilisuusaluetta (1-keskeinen ympyrä, kuva 1) menetelmän 3 stabiilisuusalue lähestyy (ks. kuva 6).

Edellisen kaltaisella tarkastelulla voimme selvittää kaikkien edellä tutkittujen menetelmien stabiilisuusalueiden käyttäytymiset. Päätelyn matemaattisen oikeutuksen tutkiminen ja tarkastelutavan laajentaminen muihin kuin Adams-tyyppisiin menetelmiin on tutkimuskohteena jatkossa, mutta ei kuulu tämän työn piiriin. Oletetaan, että edellä kuvattu rajakonstruktio tarkastelu antaisi oikeat tulokset interpolatioavaruuden dimensiosta riippumatta eksponentiaalisen sovituksen ollessa kysymyksessä. Tällöin se tarjoaisi helpon tavan etukäteen arvioida konstruoitavan menetelmän stabiilisuusalueen käyttäytymistä. Esimerkiksi voitaisiin päätellä suljettujen kaavojen osalta, että mikäli halutaan mielivaltaisen suuri stabiilisuusalue voi  $U$  sisältää korkeintaan toista astetta olevat polynomit. Jos halutaan rajoittamaton stabiilisuusalue äärellisellä arvolla  $\lambda h$  voi  $U$  sisältää korkeintaan ensimmäisen asteen polynomit eksponentiaalisten funktioiden lisäksi. Jos avoimessa kaavassa ha-

lutaan mielivaltaisen suuri stabiilisuusalue ei  $B(U)$  saa sisältää polynomiaalisia funktioita paitsi vakion. Raja-konstruktio antaa tällöin menetelmän  $y_n = y_{n-1}$ , joka tietenkin on stabiili koko tasossa.

## 7. KÄYTTÖÖN SOVELTAMISESTA

### 7.1 Sovitusarvon valinta testiprobleemalle

Eksponentiaalisesti sovitettujen moniaskelmenetelmien stabiilisuusalueita voidaan, kuten edellä on havaittu, muuntaa sovitusparametrin sopivalla valinnalla. Asian hyväksikäytön havainnollistamiseksi tarkastellaan jälleen testiprobleemaa (6.1)

$$\begin{cases} x' = qx \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

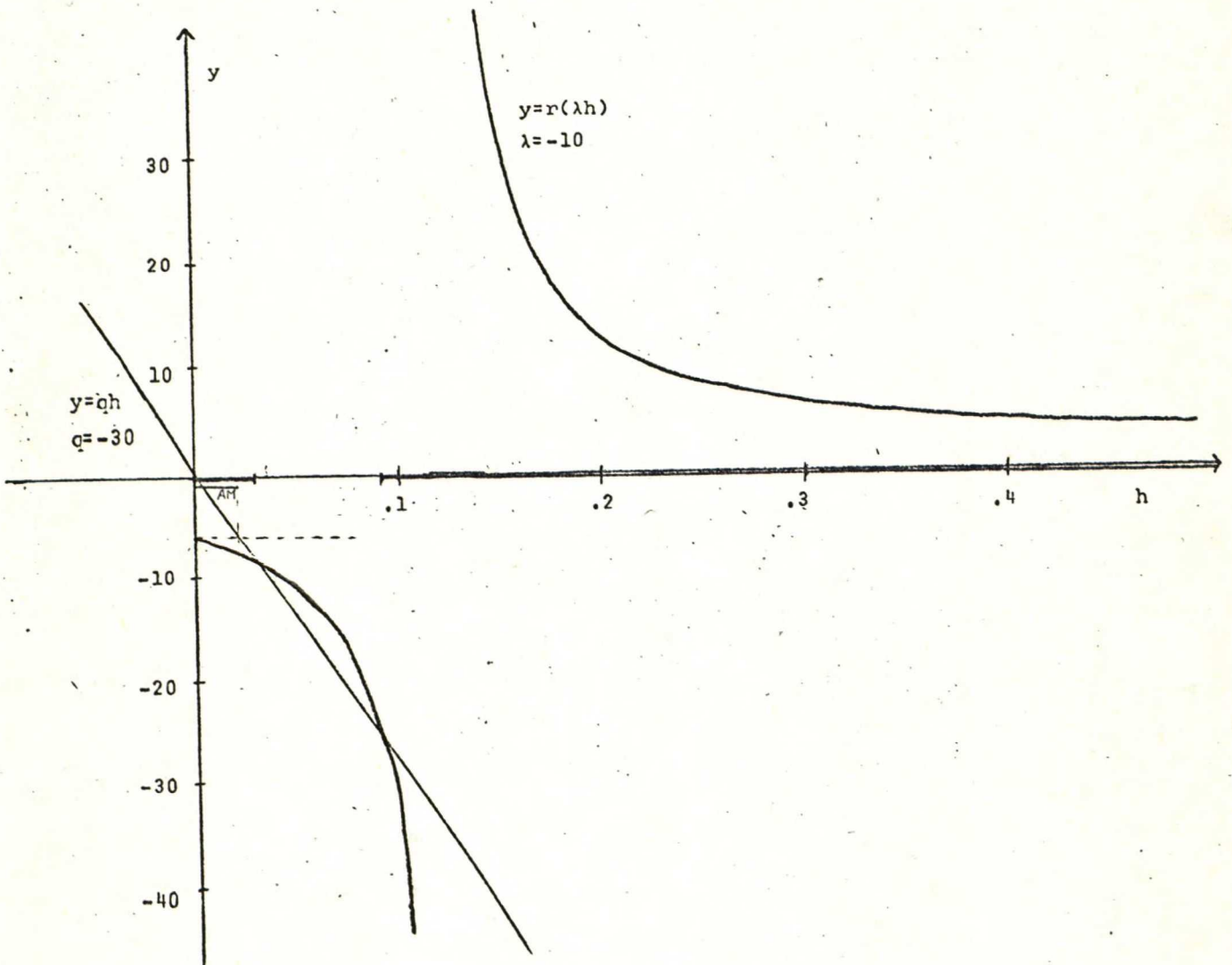
jossa nyt rajoitetaan  $q \in \mathbb{R}$ . Olkoon nyt annettu testiprobleema eräällä  $q < 0$ . Olkoon  $r(\lambda h)$  tutkittavan moniaskelmenetelmän stabiilisuusalueen ja reaaliakselin leikkauspiste. Jotta menetelmä testiprobleemaan sovellettuna olisi stabiili on  $h$  valittava siten, että

$$(7.1) \quad hq \leq r(\lambda h).$$

Otetaan esimerkiksi kappaleen 6.6 menetelmä 3. Kuvassa 7 on  $r(\lambda h)$ :n kuvaaja kun  $\lambda h \leq 0$ . Ajatellaan nyt  $\lambda < 0$  kiinnite-

tyksi ja piirretään vastaava kuvaaja  $h$ :n funktiona,  $h \geq 0$ .

Samaan kuvioon piirretään vielä suora  $qh$ . Kuvio on kuvana 8.



Kuva 8.

Kuviosta nähdään suoraan ne  $h$ -akselin osat, joissa epäyhtälö (7.1) on voimassa. Ne on merkitty kuvioon paksummalla viivalla. Vertailun vuoksi on merkitty myös vastaavan vakiokertoimisen menetelmän, Adams-Moultonin kolmannen kertaluvun menetelmän, ko. alue. Kuten kuviosta havaitaan, on sovitetulla menetelmällä mahdollista valita  $h$  paljon

laajemmalla alueella kuin vakiokertoimisella menetelmällä. Erityisesti voidaan, kun  $q$  on kiinteä, löytää sellainen  $\lambda < 0$ , että suoralla  $qh$  ja käyrällä  $r(\lambda h)$  ei ole lainkaan leikkauspistettä. Tällöin on  $h:n$  valinta stabiilisuuden puolesta vapaa.

## 7.2. Sovitusarvon valinta yleisesti

Kun halutaan ratkaista numeerisesti jokin erityinen tehtävä tyyppiä (2.1), on ensin päätettävä, onko eksponentiaalisesti sovitettu menetelmä tehtävälle sopiva, ja mikä myönteisessä tapauksessa olisi sopiva sovitustapa. Jos ennalta tiedetään ratkaisun sisältävän suunnilleen tietyllä nopeudella vaimenevia komponentteja on valinta selvä. Yleinen menetely on sovittaa  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :an, useampi dimensioisessa tapauksessa  $\frac{\partial f}{\partial x}$ -matriisin ominaisarvoihin, ks. esim. [3] s. 145, [10], s. 56.

Sovitus joudutaan tällöin yleisessä tapauksessa silloin tällöin uusimaan ratkaisun kestäessä, riippuen  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :n muuttumisnopeudesta. Jos  $f$  on reaalinen, ei ymmärtääkseni ole syytä sovittaa kompleksiseen  $\lambda$ :an. Tällöinhän saataisiin kompleksikertoimien moniaskelmenetelmä. Jos  $\frac{\partial f}{\partial x}$ -matriisin kompleksiset ominaisarvot ovat lähellä reaaliakselia, ts.

$\text{Im}\lambda/\text{Re}\lambda \ll 1$ , vaikuttaa järkevältä suorittaa sovitus ominaisarvon reaaliosaan, ks. [10] s. 56. Ominaisarvojen ollessa kaukana reaaliakselista on ratkaisu voimakkaasti värähtelevä, eikä eksponentiaalinen sovitus näiden ominaisarvojen osalta antane parannusta vakiokertoimisen menetelmän suorituskykyyn.

## 8. TIIVISTELMÄ

Työssä on tutkittu differentiaaliyhtälöiden alkuarvotehtävien numeeriseen ratkaisemiseen tarkoitettuja eksponentiaalisesti sovitettuja moniaskelmenetelmiä. Nämä ovat menetelmiä, jotka integroivat täsmällisesti yhtälöt, joiden ratkaisut ovat muotoa  $p(t)e^{\lambda t}$ , missä  $p(t)$  on polynomi.

Mainitut menetelmät konstruoidaan Hermite-Birkhoff -interpolointiin perustuvan interpolaatiokonstruktion avulla.

Menetelmien kerroinfunktiot on näin saatu eksplisiittisinä lausekkeina sovituspärametreistä ja askelpituudesta.

Konvergenssilause palauttaa konvergenssitarkastelut vastaavien vakiokertoimisten menetelmien konvergenssiin. Konstruoitujen menetelmien stabiilisuusaluetta on tutkittu erilaisissa sovitustapauksissa. Interpolaatiokonstruktion perustuen on formuloitu yleinen kriteeri, jolla voidaan etukäteen tutkia stabiilisuusalueen kvalitatiivista käyttäytymistä sovitustapaa valittaessa.



## 9. VIITTEET

- [1] AHONEN H.: Stabiilisuuskäsitteestä ensimmäisen kertaluvun tavallisten differentiaaliyhtälöiden numeeristen ratkaisumenetelmien yhteydessä, Teknillinen korkeakoulu, diplomityö, 1972.
- [2] APOSTOL T.M.: Mathematical analysis, Tokio, Addison-Wesley, 1963.
- [3] BJUREL G.: Modified linear multistep methods for a class of stiff ordinary differential equations, BIT 12 (1972) 2, ss. 142-160.
- [4] BJUREL G., DAHLQUIST G., LINDBERG B., LINDE S. & ODÉN L.: Survey of stiff ordinary differential equations, Report NA - 70.11 (1970) Dept. of Computer Science, Royal Inst. of Techn., Stockholm, Sweden.
- [5] BROCK P. & MURRAY E.J.: The use of exponential sums in step by step integration, MTAC 6 (1952), ss. 63-78, 138-150.
- [6] CHARTRES B. & STEPLEMAN R.: A general theory of convergence for numerical methods, SIAM J. Numer. Anal. 9 (1972) 3, ss. 476-492.
- [7] DAHLQUIST G.: A special stability problem for linear multistep methods, BIT 3 (1963) 1, ss. 27-43.
- [8] GEAR C.W.: Numerical initial value problems in ordinary differential equations. New Jersey, Prentice-Hall, 1971.
- [9] KARLIN S. & STUDDEN W.S.: Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics, Interscience, New York, 1966.

- [10] LININGER W. & WILLOUGHBY R.A.: Efficient integration methods for stiff systems of ordinary differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970) 1, ss. 47-65.
- [11] MÄKELÄ M.: On a generalized interpolation approach to the numerical integration of ordinary differential equations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 503, ss. 1-43, 1971.
- [12] MÄKELÄ M., NEVANLINNA O. & SIPIILÄ A.H.: On the theory of weakly non-linear multistep methods (valmisteilla).
- [13] MÄKELÄ M., NEVANLINNA O. & SIPIILÄ A.H.: On some generalized Hermite-Birkhoff interpolation problems, Helsinki Univ. of Technology, Inst. of Math. Rep. HKTKK-MAT-A 27, Otaniemi, ss. 1-21, 1972.