UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

LISBOA

UNIVERSIDADE DE LISBOA

APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR NUM CONTEXTO DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ESTUDANTES COSTARRIQUENHOS DO ENSINO SUPERIOR

Guillermo Enrique Ramírez Montes

Orientadoras: Prof.ª Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

Prof.ª Doutora Susana Paula Graça Carreira

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

2020

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR NUM CONTEXTO DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ESTUDANTES COSTARRIQUENHOS DO ENSINO SUPERIOR

Guillermo Enrique Ramírez Montes

Orientadoras: Prof.ª Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques
Prof.ª Doutora Susana Paula Graça Carreira

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Vogais:

- Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira, Professora Auxiliar da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora;
- Doutora Susana Paula Graça Carreira, Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, orientadora;
- Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa, Professora Auxiliar com Agregação da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;

Esta investigação foi financiada pela Universidade da Costa Rica, através da bolsa de estudo OAICE-CAB-08-125-2016

2020

Esta investigação foi financiada pela Universidade da Costa Rica, através da bolsa de estudo OAICE-CAB-08-125-2016 do *Régimen de Beneficios para el Mejoramiento Académico en el Exterior para el Personal Docente y Administrativo en Servicio*, outorgada ao investigador para levar a cabo os seus estudos de pós-graduação no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Resumo

Este estudo visa compreender as aprendizagens de conceitos de álgebra linear e as competências de modelação postas em prática por estudantes universitários da Costa Rica, no contexto de uma experiência de ensino apoiada na realização de tarefas de modelação matemática com recurso à tecnologia, em que se adota o trabalho em pequenos grupos e a realização de discussões finais na turma. O estudo surge como iniciativa do investigador de introduzir novas práticas fundamentadas no trabalho com tarefas de contextos reais, na disciplina de Álgebra Linear onde é professor. O enquadramento teórico para fundamentar o estudo aborda duas temáticas: Ensino e aprendizagem da álgebra linear e modelação matemática no ensino superior.

O estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, integrando uma vertente de experiência de ensino. Os participantes são os estudantes de uma turma da disciplina MA1004 de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica, com modalidade de laboratório de computadores. A experiência de ensino, referência central deste estudo, apoiou-se na realização de tarefas de modelação ao longo do 1.º semestre do ano letivo 2019, na disciplina referida. A recolha de dados incluiu a observação participante do trabalho dos estudantes na realização das tarefas de modelação propostas, incluindo notas de campo e gravação em áudio de episódios de sala de aula, recolha documental das suas resoluções escritas e ficheiros digitais criados por eles nas tarefas, questionário e entrevista semi-estruturada com estudantes.

Os resultados permitem concluir que na experiência de ensino os estudantes mobilizaram uma grande diversidade de conhecimentos para formular modelos matemáticos, maioritariamente conhecimentos de álgebra linear de forma analítica, enquanto outros recorrem a noções informais de conceitos de álgebra linear e a conhecimentos formais de outras disciplinas. Os estudantes também evidenciaram competências de modelação ao percorrerem diferentes rotas de modelação, mas observando-se dificuldades, maioritariamente na interpretação e validação dos resultados obtidos a partir do trabalho sobre o modelo matemático. No final, os estudantes reconhecem a importância das tarefas de modelação para fomentar a aplicabilidade dos conceitos, competências e discussões em sala de aula, embora também refiram dificuldades associadas à exigência cognitiva das tarefas.

Os resultados permitem, ainda, avaliar positivamente o papel das tarefas com tecnologia na consolidação da aprendizagem dos estudantes, sugerindo que uma experiência de ensino com as características adotadas neste estudo pode ser usada no ensino da álgebra linear para: 1) diminuir a abstração associada pelos estudantes a alguns conceitos; 2) promover competências matemáticas não mobilizadas no trabalho com tarefas de contextos de matemática pura; 3) diagnosticar possíveis dificuldades que o estudante pode evidenciar em futuras tarefas, através das rotas de modelação; e 4) aproveitar a tecnologia para ir além da simplificação de procedimentos de cálculo matemático.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Modelação matemática; Tecnologia; Ensino Superior; Experiência de ensino.

Abstract

This study aims to understand the learning of linear algebra concepts and the modelling competencies put into practice by university students in Costa Rica, in the context of a teaching experiment supported by carrying out mathematical modelling tasks using technology, in which small groups work is adopted and final discussions are made with the whole class. The study arises as an initiative of the researcher to introduce new practices, based on the work with tasks of real contexts in the Linear Algebra course where he is a teacher. The theoretical framework of this study addresses two main themes: Teaching and learning of Linear Algebra and mathematical modelling in higher education.

The study follows a qualitative and interpretive research methodology, integrating a teaching experiment. Participants are the students attending the MA1004 Linear Algebra course at the University of Costa Rica, with a computer laboratory modality. The teaching experiment, central reference of this study, was based on modelling tasks carried out throughout the 1st semester of the 2019 school year, in the referred course. Data collection includes participant observation of students work in solving the proposed modelling tasks, complemented by field notes and audio records of class episodes, and their written work and the digital files created by them in the tasks. Questionnaires and semi-structured interviews with students were also used.

The results allow to conclude that in the teaching experiment the students mobilized a great diversity of Linear Algebra knowledge to formulate mathematical models, mostly in an analytical way, while others resort to informal notions of linear algebra concepts and knowledge from other Mathematics courses. The students also demonstrated modelling competencies when performing distinct modelling routes. However, difficulties were observed mainly in the interpretation and validation of the results obtained from the work on the mathematical model. At the end, the students recognized the importance of modelling tasks to promote the applicability of concepts, the development of competencies, and class discussions, although they also referred difficulties associated with the cognitive demand of the tasks.

The results also allow a positive evaluation of the role of tasks with technology in the consolidation of students learning. A teaching experiment with the characteristics adopted in this study can be used in linear algebra teaching to: 1) decrease the abstraction that some concepts have for students; 2) promote mathematical competencies that in generally are not mobilized in tasks with only pure mathematics contexts; 3) diagnose students' difficulties in further tasks, through their modelling routes; and 4) take advantage of technology to go beyond the simplification of mathematical procedures.

Key words: Linear Algebra; Mathematical modelling; Technology; Higher Education; Teaching experiment.

Resumen

Este estudio visa comprender los aprendizajes de conceptos de álgebra lineal y las competencias de modelación puestas en prácticas por estudiantes universitarios de Costa Rica, en el contexto de una experiencia de enseñanza apoyada en la realización de tareas de modelación matemática con recurso a tecnología, en que se adopta un trabajo en pequeños grupos y la realización de discusiones finales con todo el grupo. El estudio surge como iniciativa del investigador por introducir nuevas prácticas fundamentadas en el trabajo de tareas con contextos reales, en la disciplina de Álgebra Lineal donde es profesor. El marco teórico para fundamentar el estudio aborda dos temáticas principales: Enseñanza y aprendizaje del álgebra linear y modelación matemática en la educación superior.

El estudio sigue una metodología de investigación cualitativa e interpretativa, integrando una vertiente de experiencia de enseñanza. Los participantes son los estudiantes de un grupo del curso MA1004 de Álgebra Lineal de la Universidad de Costa Rica, con modalidad de laboratorio de cómputo. La experiencia de enseñanza, referencia central de este estudio, se apoyó en la realización de tareas de modelación a lo largo del 1.º semestre del año lectivo 2019, en el curso referido. La recolección de los datos incluye la observación participante del trabajo de los estudiantes en la realización de las tareas de modelación propuestas, incluido notas de campo e grabación en audio de episodios de la clase, recolección documental de las resoluciones escritas y archivos digitales creados por los estudiantes en las tareas, cuestionario y entrevista semiestructurada con estudiantes.

Los resultados permiten concluir que en la experiencia de enseñanza los estudiantes movilizaron una grande diversidad de conocimientos para formular modelos matemáticos, mayoritariamente conocimientos de álgebra linear de forma analítica, mientras que otros recorren a nociones informales de conceptos de álgebra linear y a conocimientos formales de otras disciplinas. Los estudiantes también evidenciaron competencias de modelación al recorrer diferentes rutas de modelación, pero observándose dificultades, mayoritariamente en la interpretación y validación de los resultados obtenidos a partir del trabajo del modelo matemático. Al final, los estudiantes reconocen la importancia de las tareas de modelación para fomentar la aplicabilidad de los conceptos, competencias y discusiones en la clase, aunque también refieren dificultades asociadas a la exigencia cognitiva de las tareas.

Los resultados permiten, todavía, evaluar positivamente el papel de las tareas con tecnología en la consolidación del aprendizaje de los estudiantes, sugiriendo que una experiencia de enseñanza con las características adoptadas en este estudio puede ser usada en la enseñanza del álgebra lineal para 1) disminuir la abstracción asociada por los estudiantes a algunos conceptos; 2) promover competencias matemáticas no movilizadas en el trabajo con tareas de contextos de matemática pura; 3) diagnosticar posibles dificultades que el estudiante podría evidenciar en futuras tareas, a través de las rutas de modelación ; e 4) aprovechar la tecnología para ir más allá de la simplificación de procedimientos de cálculo matemático.

Palabras llave: Álgebra Lineal; Modelación matemática; Tecnología; Educación Superior; Experiencia de enseñanza.

Agradecimentos

Começo por agradecer à instituição académica que me formou profissionalmente como professor de Matemática, dando-me também a oportunidade de realizar os meus estudos de pós-graduação em Portugal através da bolsa de estudo que me foi atribuída, a minha querida Universidade da Costa Rica, ¡muchísimas gracias por tudo!. Agradeço igualmente a cada uma das pessoas que integram esta instituição maravilhosa e que, de alguma forma, deram-me seu apoio nesta etapa de formação. Em particular, aos funcionários da *Oficina de Asuntos Internacionales y Cooperação Externa*, professores e pessoal administrativo da *Escuela de Matemática*, também o meu sincero agradecimento por todo o apoio.

Quero também agradecer com todo o meu coração às minhas orientadoras, a Professora Doutora Ana Henriques e a Professora Doutora Susana Carreira. Sempre estarei profundamente agradecido por todo o tempo investido na minha orientação da escrita da tese, artigos e experiências académicas em geral, em que participei ao longo destes três anos do doutoramento. Muito obrigado por contribuírem para a minha formação como investigador, professoras. Deus as abençoe e multiplique por toda a orientação que me foi dada.

Agradeço também a todos os professores de Didática da Matemática do Instituto de Educação que contribuíram com o seu valioso ensino e feedback nas distintas apresentações que tive nas aulas do doutoramento. Certamente que as vossas críticas construtivas sempre me ajudaram na minha escrita da tese. Igualmente agradeço a todos os funcionários do Instituto de Educação que, com a sua amabilidade, sempre me atenderam da melhor forma possível, em particular aos funcionários dos serviços académicos, tesouraria e biblioteca. Muito obrigado!

Por último, mas não menos importante, agradeço com todo o meu coração a meus dois pilares: Deus e família. Mãe, pai, irmão, irmãs, minha noiva, tios, tias, primos, primas e amigos de toda a vida, obrigado a todos porque sempre ou em determinado momento têm estado aí me apoiando desde diferentes partes do mundo. Dios les bendiga, les amo.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo refiro os principais aspetos que foram considerados e justificam a realização deste estudo, que envolve uma experiência de ensino implementada numa disciplina de Álgebra Linear, no ensino superior. Começo por apresentar a motivação que, como professor do ensino superior, me leva à escolha do tema a investigar numa área da Matemática onde desenvolvo atividade docente. A seguir, descrevo a pertinência do estudo, particularmente no contexto do ensino superior da Costa Rica, explicitando o porquê de ser pertinente uma abordagem didática da álgebra linear em sala de aula, envolvendo tarefas de modelação matemática com recurso à tecnologia, apostando no trabalho em pequenos grupos e na discussão coletiva dos produtos finais com toda a turma. Posteriormente, apresento o objetivo do estudo e as questões de investigação a que procuro responder. Termino com uma descrição global da estrutura e organização deste estudo.

1.1 Motivações pessoais

Falar de Álgebra Linear implica mencionar uma das disciplinas de que mais gostei no meu curso de licenciatura em Ensino da Matemática, contribuindo grandemente para o meu conhecimento matemático e para a forma de ver a geometria euclidiana e o estudo de funções de um ponto de vista vetorial. Nesta disciplina encontrava uma forma diferente de trabalhar a Matemática, um mundo novo que nunca tinha indagado, apercebendo-me que alguns conceitos já conhecidos, como o conceito de distância mínima, o conceito de função linear e os conceitos de área e perímetro de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, eram trabalhados nesta disciplina numa outra perspetiva – a partir dos objetos matemáticos nomeados vetores e suas combinações em matrizes. Efetivamente, conforme a disciplina de Álgebra Linear avançava, ia percebendo que conceitos como função linear, já antes aprendidos no secundário, eram generalizados a outros tipos de domínio e contradomínio. Similarmente, o cálculo associado a distâncias mínimas entre objetos geométricos e medidas de áreas e perímetros de figuras geométricas tridimensionais, também já aprendidos em outras disciplinas do ensino superior, era facilitado quando utilizados conhecimentos de álgebra linear. Assim, por exemplo, considerava interessante poder realizar o cálculo de medidas de figuras geométricas euclidianas num ambiente tridimensional sem necessidade de recorrer à sua representação gráfica, mas antes ao tratamento algébrico de componentes das figuras. Considerava esta situação uma vantagem da álgebra linear em comparação com o seu tratamento a nível da geometria euclidiana, pois tornava-se difícil para mim, nesta minha etapa de estudante, visualizar figuras como os triângulos e quadriláteros num espaço tridimensional euclidiano e, consequentemente, calcular medidas associadas a estas e outras figuras geométricas.

Por outro lado, essa minha aprendizagem impulsionada pelo ensino tradicional ia-se consolidando num conformismo: o de aplicar procedimentos algébricos com a única finalidade de obter uma solução analítica para determinada tarefa. Esse tipo de resolução condicionava que eu fosse encorajado a refletir mais aprofundadamente sobre os conceitos matemáticos em estudo e a solução obtida no contexto da tarefa ou sobre outras estratégias de resolução. Em particular, a reflexão sobre o contexto da tarefa era comum não existir, pois o ensino na disciplina de Álgebra Linear era focado em definições formais dos conceitos, com exemplos em contextos de Matemática pura, sem oportunidade para trabalhar os conceitos em situações problematizadas da vida real. Neste sentido, a aprendizagem de conceitos lecionados na disciplina de Álgebra Linear, como por exemplo o conceito de base de um subespaço vetorial, resultava num importante contributo para minha formação matemática, mas de forma abstrata, não permitindo aprofundar o conceito e alcançar uma perceção da sua utilidade na vida quotidiana.

Atualmente, como professor de Matemática de ensino superior da Universidade da Costa Rica, tenho tido a oportunidade de lecionar diferentes disciplinas, entre as quais está a disciplina de Álgebra Linear, dirigida aos cursos de Engenharia e alguns cursos de Ciências (Física, Economia, Estatística, Meteorologia). Esta disciplina é uma das que mais gosto de lecionar, tendo tido a preocupação e oportunidade de mostrar as aplicações da álgebra linear em alguns dos tópicos lecionados em campos de estudo como a Física, a Estatística e a Engenharia. No entanto, surge-me a inquietude de transcender o currículo, não me limitando a citar aplicações da álgebra linear, mas a fomentar, no trabalho do estudante em sala de aula, a mobilização de conhecimentos de álgebra linear para resolver problemas em contextos reais.

Na minha experiência de lecionação da disciplina de Álgebra Linear também tenho tido a preocupação de compreender as dificuldades que surgem durante o processo de aprendizagem de certos conceitos, sendo de meu interesse procurar maneiras de superá-las. Especificamente, a experiência tem-me mostrado que a maior parte dos estudantes de Engenharia que frequenta esta disciplina na Universidade da Costa Rica escolhe o curso porque gosta de fazer matemática, mas apresenta dificuldade para compreender enunciados e definições de conceitos de álgebra linear quando estes são apresentados sob um tratamento formal. Para além disso, tenho observado que resulta difícil para grande parte dos estudantes o desenvolvimento de competências matemáticas relativas à utilização de modelos matemáticos, quer para responder a questões específicas de um ponto de vista conceptual, quer para demonstrar propriedades e teoremas de álgebra linear. Acredito que essas dificuldades condicionam as aprendizagens de conceitos de álgebra linear dos estudantes do ensino superior e, de certa forma, desmotivam o estudante a aprender.

Mais recentemente, na última edição da disciplina de Álgebra Linear lecionada para estes estudantes, tive a oportunidade de incorporar a utilização de *software* matemático, como o *Mathematica,* para o trabalho dos tópicos da disciplina numa perspetiva de integração das tecnologias digitais na sala de aula. Nessa altura, o ambiente implementado na sala de aula com recurso a *software* estava orientado para resolver cálculos extensos ou repetitivos e para visualizar algumas representações gráficas, ambiente que ajudou o estudante a poupar tempo em cálculos manuais, mas não a aprofundar na compreensão dos conceitos ou a promover o desenvolvimento de competências indispensáveis, como a interpretação de informação numérica. Após uma reflexão sobre a minha prática letiva na disciplina de Álgebra Linear, percebi que o meu ensino se tem limitado a trabalhar de forma muito procedimental com os estudantes, privilegiando o uso da representação analítica, o que conduz a uma aprendizagem dirigida à memorização de conceitos e cálculos traduzidos em regras, propriedades ou teoremas, onde a utilização da tecnologia, mesmo ajudando a agilizar os cálculos, não permite que os estudantes reflitam sobre os conceitos matemáticos e percebam a sua aplicação no quotidiano.

Perante a situação acima descrita, surge-me a motivação de procurar novos ambientes de sala de aula que proporcionem aos estudantes a oportunidade de consolidarem aprendizagens de álgebra linear, não só fundamentadas em trabalho procedimental com modelos matemáticos apresentados ao longo da disciplina, mas também na compreensão do conceito matemático inserido num certo contexto real, e o exercício de competências poucas vezes trabalhadas em disciplinas de Matemática.

Entre os possíveis ambientes de aprendizagem disponíveis para atender aos aspetos anteriores está a modelação matemática, entendida no contexto da Matemática como uma abordagem pedagógica em que é utilizada a matemática para resolver situações da vida real. Sendo a modelação um ambiente de aprendizagem não integrado anteriormente na minha prática letiva, realizar este estudo constitui um caminho que me entusiasma e que certamente contribui para melhorar o meu ensino e as aprendizagens dos estudantes no futuro. É também uma oportunidade para contribuir com novo conhecimento relacionado com práticas educativas na disciplina de Álgebra Linear para a instituição onde exerço as minhas práticas letivas e, em geral, para a comunidade investigativa em Educação Matemática. Finalmente, mas não menos importante, este estudo constitui um convite a pesquisar sobre a modelação matemática no ensino superior, oferecendo-me a oportunidade de seguir crescendo na minha formação como investigador e como professor na área da Educação Matemática.

1.2 Relevância e pertinência do estudo

Nas aulas de Matemática do ensino secundário é comum os professores terem a experiência de ouvir os seus estudantes perguntar: "professor, para que serve o que estamos a aprender?". No melhor dos casos, a resposta dada pelo professor refere alguns exemplos de aplicações do conceito em estudo para convencer os estudantes de que a matemática que estão a aprender vai ser de utilidade para o seu futuro, motivando-os a querer aprender o conceito lecionado. No caso do estudante que começa a sua formação no ensino superior, frequentando um curso com elevadas exigências no que respeita a competências matemáticas, é também comum aprender conceitos matemáticos sob um enfoque formal da Matemática pura, esperando-se que seja capaz de adquirir ferramentas matemáticas para o seu curso, mas sem ter experiência, em grande parte das disciplinas, de como se aplicam esses conceitos na vida real. Esta falta de contextualização dos conceitos matemáticos impede que o estudante os aprofunde, limitando-o à aprendizagem de procedimentos de cálculo que dificilmente permitem uma aprendizagem significativa do conceito e saber como se aplica na sua futura profissão.

Investigações revelam que a maior parte dos estudantes universitários se depara com dificuldades de aprendizagem de conceitos matemáticos nas suas primeiras disciplinas de Matemática, mesmo tendo tido sucesso no secundário, manifestando frequentemente que estão perante uma matemática com carácter abstrato e formal, diferente da matemática aprendida no secundário (Rach & Heinze, 2017). Esta situação revela que existe um salto significativo na aprendizagem do estudante quando avança do ensino secundário para o ensino superior, o que pode estar associado a sentir a necessidade da aplicação da matemática na vida real em algumas disciplinas como é o caso da disciplina de Álgebra Linear (Cárcamo, Gómez & Fortuny, 2016).

A aprendizagem de tópicos da disciplina de Álgebra Linear representa um grande desafio para o estudante, devido ao carácter abstrato dos tópicos com que o estudante é confrontado a trabalhar (Costa & Rossignoli, 2017) e, portanto, à maneira como se desenvolve a lecionação dos conceitos matemáticos na sala de aula, incluindo a não contextualização dos mesmos em diversas áreas de estudo (Cárcamo, Gómez & Fortuny, 2017). Tratando-se a Álgebra Linear de uma disciplina fundamental para fornecer ao estudante ferramentas matemáticas para outras disciplinas do seu curso (Cárcamo et al., 2016; Costa & Rossignoli, 2017), resulta necessário o desenvolvimento em sala de aula de metodologias que ajudem o estudante a superar dificuldades com que são confrontados e ao professor a indagar mais sobre como reage o estudante perante estas novas metodologias.

As investigações sobre o ensino e aprendizagem da álgebra linear têm aumentado nas últimas décadas (Plaxco & Wawro, 2015), embora este crescimento investigativo não seja observável no contexto da Costa Rica, onde existe a necessidade de mais estudos focados na aprendizagem da álgebra linear no ensino superior. No contexto das universidades da Costa Rica, quer públicas, quer privadas, a Álgebra Linear é vista como parte fundamental das disciplinas obrigatórias que deve incluir um curso de Engenharia e ciências, como a Matemática e a Física. No caso particular da Universidade da Costa Rica, esta disciplina é frequentada por estudantes de cursos de Engenharias, Física, Economia, Estatística e Meteorologia sob a identificação da sigla MA1004. O programa da disciplina MA1004 enfatiza três objetivos gerais de aprendizagem que podem resumir-se em: 1) contribuir para a formação matemática do estudante e promover a dedução e interpretação de resultados para trabalhar problemas próprios da Álgebra Linear; 2) fomentar a linguagem matemática formal; e 3) dominar os tópicos trabalhados (Sánchez, 2018).

O primeiro objetivo da disciplina MA1004 diz respeito à aprendizagem de conceitos e à aquisição de competências para trabalhar problemas próprios da Álgebra Linear e, consequentemente, criar e estudar modelos matemáticos que possam ser utilizados pelo estudante em outras disciplinas, onde o trabalho com modelos lineares em contextos vários é enfatizado. Embora esse primeiro objetivo saliente a importância de promover a formação matemática do estudante, a contextualização do conceito matemático em ambientes reais não é fomentada na disciplina, quando deveria ser um dos aspetos a fomentar em qualquer disciplina de Álgebra Linear para garantir esta formação matemática (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993), e um recurso que motive o estudante a querer aprender matemática significativa e que o faça sentir que o seu trabalho desenvolvido em sala de aula é relevante (Biggs & Tagg, 2011). A metodologia da disciplina MA1004 incentiva uma aprendizagem focada na memorização de definições formais, propriedades e teoremas e de procedimentos matemáticos que o estudante aplica na resolução de exercícios em contextos de Matemática. Essa metodologia assim concebida promove a linguagem matemática formal e retoma conceitos matemáticos em sala de aula, objetivos do programa da disciplina, mas não fomenta o desenvolvimento de capacidades como relacionar, explicar e teorizar informação matemática, consideradas capacidades de alta exigência cognitiva que são necessárias promover no ensino superior (Biggs & Tagg, 2011).

Noutros países, os currículos de ensino superior também têm considerado a Álgebra Linear como uma disciplina de carácter obrigatório em vários dos seus cursos, o que é justificado pela já referida importância de álgebra linear no apoio a outras disciplinas (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010). Em particular, a abordagem de conceitos referentes às temáticas de vetores, matrizes, sistemas de equações lineares, espaços vetoriais e transformações lineares têm utilidade para o trabalho com problemas, dentro e fora da Matemática, incluindo as áreas das Engenharias (Costa & Rossignoli, 2017). No entanto, nesta disciplina também se observam dificuldades que grande parte dos estudantes do ensino superior apresentam, nomeadamente para conectar ideias que envolvem os diferentes conceitos da álgebra linear que estão a aprender (Dogan-Dunlap, 2010), sendo que conceitos como espaço vetorial e transformação linear tornam-se abstratos e difíceis na aprendizagem dos estudantes, observando-se que eles não vinculam esses conceitos a diferentes situações quotidianas (Costa & Rossignolli, 2017). Considerando que "uma das características das condições de aprendizagem de alta-qualidade é que os estudantes devam ser convidados a interagir significativamente com conteúdo matemático" (Chinnippan, 2010, p. 10), a contextualização dos conceitos em situações reais torna-se uma possibilidade para motivar o estudante, através do trabalho em tarefas que sejam significativas para a sua realidade (Biggs & Tagg, 2011), favorecendo o desenvolvimento dos conceitos quando trabalhados com problemas reais apropriados (Possani et al., 2010).

Atualmente, existe a necessidade de mais estudos focados na aprendizagem da álgebra linear no ensino superior, incluindo na Universidade da Costa Rica, por não existirem estudos investigativos na base de dados do repositório SIBDI (Sistema de Bibliotecas, Documentação e Informação) da Universidade da Costa Rica referentes ao trabalho de conceitos de álgebra linear em contextos de realidade. Para além disso, considerando a necessidade de mais estudos a nível de ensino superior focados em processos de aprendizagem matemática (Rach & Heinze, 2017) e processos cognitivos do estudante associados à modelação matemática em distintos tópicos (Campbell, 2001), e também estudos que foquem no diagnóstico de dificuldades que surgem em resposta aos processos cognitivos desenvolvidos pelo estudante durante seu processo de modelação (Borromeo Ferri, 2018), torna-se pertinente realizar uma investigação na disciplina MA1004 de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica, considerando a falta de contextualização de conceitos matemáticos nesta disciplina e a evidência de dificuldades associadas a certos conceitos, conforme já referido.

Uma maneira de aprofundar o estudo e promover o trabalho com conceitos de álgebra linear em contextos de realidade na disciplina MA1004 é a modelação matemática, através de ambientes de aprendizagem que podem ajudar o estudante a superar o desafio que constitui trabalhar problemas em contextos reais (Borromeo Ferri, 2018). Os desafios da modelação matemática são de natureza distinta dos desafios de outros tipos de tarefa, requerendo capacidades de maior exigência, resultando importante o seu trabalho em sala de aula (Czocher, 2018). Explicitamente, a modelação matemática envolve um conjunto de processos cognitivos que incluem compreender um problema real, associando-o com uma situação modelo; simplificar a situação modelo em concordância com o contexto do problema para criar um modelo real apropriado; matematizar um modelo real que dê origem a um modelo matemático; aplicar procedimentos de resolução, recorrendo a conhecimentos da disciplina para a obtenção de uma possível resposta ao problema; e interpretar e validar resultados segundo o contexto do problema (Borromeo Ferri, 2010). Considerando que a educação matemática deve proporcionar ao estudante, como futuro cidadão, não só o que é sugerido no currículo, mas também o desenvolvimento de capacidades que lhe permitam um bom desempenho na sua área profissional, torna-se necessário o desenvolvimento de competências de modelação na aula de Matemática (Blum & Borromeo Ferri, 2009), isto é, capacidades necessárias para realizar processos de modelação apropriadamente e com um objetivo (Maaß, 2006). No que se refere ao diagnóstico de dificuldades que surgem em resposta aos processos cognitivos de modelação, identificar dificuldades genéricas ajuda a predizer onde o estudante poderá evidenciar bloqueios perante o trabalho em posteriores tarefas de modelação (Galbraith & Stillman, 2006).

Atendendo à problemática descrita, considero pertinente realizar uma experiência de ensino na disciplina MA1004 de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica, procurando implementar novas práticas pedagógicas dirigidas à consolidação de aprendizagens de conceitos já lecionados na disciplina, e a mobilização de processos e conceitos para resolução de problemas de contextos reais. A experiência de ensino deve confrontar o estudante com tarefas que lhe permitam o treino de competências matemáticas associadas aos processos cognitivos em curso na resolução de problemas reais. Assim, esta experiência, para além de permitir investigar como os estudantes mobilizam as suas aprendizagens de conceitos, deve permitir-lhes aprofundar os conceitos matemáticos e potencializar competências de modelação matemática (Biggs & Tagg, 2011), e considerar de alguma forma situações no contexto quotidiano do estudante para dar significado ao que estão a aprender (Flóres & Yemail, 2017).

Em resposta à procura destas novas práticas pedagógicas de ensino e aprendizagem, a modelação matemática torna-se um caminho apropriado e possível de implementar na disciplina de Álgebra Linear, sendo um tema de investigação onde ainda é preciso aprofundar a pesquisa, nomeadamente no ensino superior (Czocher, 2018), acerca da aprendizagem que envolve a criação de modelos matemáticos de situações da vida real (Niss, Blum & Galbraith, 2007). A modelação matemática permite uma abordagem diferente na disciplina de Álgebra Linear, onde o estudante é encorajado a mobilizar conhecimentos prévios e a criar novas construções conceptuais que o ajudem no tratamento de conceitos abstratos (Trigueros & Possani, 2013). Em particular, torna-se possível utilizar a modelação matemática segundo diversas perspetivas complementares: numa perspetiva educacional para consolidar aprendizagens de conceitos; numa perspetiva cognitiva, tendo em vista incentivar processos e diagnosticar dificuldades associadas; e numa perspetiva realística, para promover competências necessárias à atividade de modelação matemática (Kaiser & Sriraman, 2006).

Para proporcionar ao estudante as oportunidades referidas anteriormente e ao investigador o acesso sistemático a informação relevante, uma experiência de ensino em ambientes de modelação matemática deve integrar o trabalho continuado com tarefas de modelação. Em particular, para a análise dos processos cognitivos e, paralelamente, para a análise de competências de modelação, a identificação de *rotas de modelação*, entendidas como o processo individual de modelação do estudante ao resolver uma tarefa de modelação (Borromeo Ferri, 2007), torna-se importante para o investigador visualizar as diferentes mudanças entre fases do ciclo de modelação que o estudante experimenta, incluindo processos de retrocesso, e diagnosticar subcompetências ausentes no estudante associadas ao ciclo de modelação (Borromeo Ferri, 2018).

Por outro lado, considerando que existe uma necessidade de realizar mais estudos que investiguem práticas de ensino e aprendizagem a nível universitário, onde se incluam as tecnologias digitais no trabalho de modelação matemática (Greefrath, 2011), mostrando os efeitos dessas tecnologias no desenvolvimento de competências de modelação matemática (Blum, 2015) e na aprendizagem de diversos conceitos matemáticos (Domingos, 2003), torna-se pertinente uma experiência de ensino que considere a modelação matemática com recurso à tecnologia. A tecnologia ajuda na aprendizagem de conceitos matemáticos em contextos reais (Flóres & Yemail, 2017) e, em particular, constituem um recurso poderoso para o trabalho de tarefas de modelação matemática (Blum, 2015; Greefrath, Hertleif & Siller, 2018; Niss et al., 2007). Considerando que este estudo se enquadra no contexto duma disciplina de Álgebra Linear onde o estudante tem acesso ao computador e a programas como *Mathematica*, *GeoGebra* e *Excel*, resulta viável pensar num ambiente de modelação matemática apoiado com tecnologia. Para além disso, o estudante deve conhecer as capacidades das diferentes tecnologias com que trabalha na sala de aula e utilizá-las para o trabalho em tarefas de modelação (Galbraith & Stillman, 2006).

Para quebrar com as práticas tradicionais de professor expositor e estudante recetor e tirar o máximo partido deste ambiente de modelação matemática apoiado por tecnologia, as discussões nos grupos de trabalho e os momentos de partilha com a turma têm também um papel importante neste estudo. Estas discussões permitem ao investigador observar aprendizagens dos estudantes e processos de resolução que não se podem evidenciar nos produtos finais das tarefas (Cai et al., 2014); ao estudante permitem também compartilhar e esclarecer ideias, desenvolver a sua linguagem matemática, ser elemento ativo na sala de aula, aprender de maneira diferente e coletiva, e promover seu raciocínio de forma verbal (NCTM, 2014).

A metodologia tradicional na disciplina de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica está baseada no trabalho individual por parte dos estudantes, e a modelação matemática como ambiente de aprendizagem em contextos reais não constitui parte das práticas da disciplina. No entanto, o programa da disciplina é flexível, permitindo a possibilidade de introduzir práticas de ensino e aprendizagem que complementem os objetivos de aprendizagem da disciplina. Assim, a pertinência desta investigação emerge da necessidade de fazer investigação sobre a aprendizagem na disciplina de Álgebra Linear, particularmente no contexto da Costa Rica, onde desenvolvo as minhas práticas letivas. Para isso, opto por desenvolver uma experiência de ensino assente na modelação matemática para consolidar aprendizagens de conceitos de álgebra linear e desenvolver processos que envolvem competências de modelação, recorrendo à tecnologia, e ao trabalho em grupo na resolução das tarefas propostas. Tratando-se de uma investigação que propõe desenvolver novas práticas metodológicas na disciplina de Álgebra Linear, resulta pertinente conhecer os contributos e dificuldades que os estudantes identificam, após a implementação da experiência de ensino, em particular no que diz respeito ao trabalho desenvolvido com tarefas de modelação matemática.

1.3 Objetivos e questões do estudo

Tendo em conta a problemática do insucesso dos estudantes do ensino superior na disciplina de Álgebra Linear, pretendo com esta investigação dar visibilidade ao uso da modelação matemática com recurso à tecnologia para a melhora do ensino e aprendizagem desta disciplina. Para tal, opto por realizar uma experiência de ensino na disciplina de Álgebra Linear, com estudantes universitários de Engenharias, Física, Economia, Estatística e Meteorologia da Universidade da Costa Rica. Esta experiência tem por base a realização de tarefas de modelação matemática, envolvendo a aplicação de conceitos de álgebra linear lecionados nas unidades de sistemas de equações lineares, operações com matrizes, geometria vetorial, espaços vetoriais e transformações lineares. Propõe-se trabalhar a modelação matemática em linha com as perspetivas educacional, cognitiva e realística, de forma a considerar, respetivamente, a mobilização de aprendizagens relativas a conceitos de álgebra linear, a análise de processos cognitivos de modelação e dificuldades evidenciadas, e promover competências de modelação no estudante. Para apoiar o trabalho dos estudantes na resolução das tarefas de modelação matemática, opto por utilizar uma dinâmica de trabalho em grupo e a tecnologia como recurso, realizando discussões e partilha de resultados com toda a turma, após esse trabalho.

Atendendo ao exposto, o estudo a realizar tem o seguinte objetivo:

Compreender as aprendizagens de conceitos de álgebra linear e as competências de modelação postas em prática por estudantes universitários da Costa Rica, no contexto de uma experiência de ensino apoiada na realização de tarefas de modelação matemática com recurso à tecnologia, em que se adota o trabalho em pequenos grupos e a realização de discussões finais na turma.

Tendo em conta este objetivo, formulei as seguintes questões que orientam a investigação:

1) Que conhecimentos de álgebra linear são mobilizados pelos estudantes na resolução das tarefas de modelação matemática propostas ao longo da experiência de ensino? Que dificuldades revelam na resolução das tarefas envolvendo esses conhecimentos? Como estes conhecimentos se relacionam com as características das rotas de modelação que percorrem na resolução das tarefas?

2) Quais as competências de modelação que os estudantes evidenciam na resolução das tarefas de modelação? Que dificuldades revelam na resolução das tarefas, no que concerne a competências de modelação requeridas? Como estas competências se

relacionam com as características das rotas de modelação que percorrem na resolução das tarefas?

3) Quais os aspetos da experiência de ensino que os estudantes valorizam e reconhecem como contributos para a sua aprendizagem?

1.4 Organização do estudo

Este estudo está organizado em oito capítulos. O capítulo inicial introduz a problemática em que o estudo se enquadra, considerando o contexto do ensino superior Costarriquenho, e apresentando argumentos justificativos da sua pertinência que suportam igualmente a formulação do objetivo geral e das questões de investigação. Nos dois capítulos seguintes faço um enquadramento teórico do estudo, discutindo o ensino e aprendizagem da álgebra linear no ensino superior e a integração da modelação matemática, considerando pesquisas teóricas e empíricas desenvolvidas por autores nestas áreas da educação. Nesses dois capítulos foco aspetos referentes à álgebra linear e à modelação matemática no que respeita a: definição de conceitos e perspetivas teóricas, aspetos ligados à aprendizagem de conceitos matemáticos e dificuldades identificadas, e o papel da tecnologia. Para além disso, no segundo capítulo são abordados aspetos referentes aos ambientes de trabalho em grupo e à realização de discussões coletivas, enquanto formas de gestão da sala de aula. O capítulo da metodologia descreve e justifica as opções metodológicas, os participantes e os processos de recolha e análise de dados. Nas opções metodológicas é mencionada a abordagem seguida, que integra uma componente de experiência de ensino, e o papel do investigador nessa experiência. São também caraterizados os participantes da experiência de ensino. Finalmente, são descritos e justificados os métodos e instrumentos de recolha de dados bem como a sua análise e as categorias que a suportam. No capítulo seguinte, descrevo a experiência de ensino, nos seus princípios gerais, e refiro os aspetos essenciais da sua concretização: a preparação da experiência de ensino com base na aplicação de um estudo piloto e contributos resultantes; a planificação da experiência de ensino e das tarefas que a integram; e o trabalho desenvolvido ao longo da experiência de ensino. Nos dois capítulos subsequentes, faço uma análise dos dados recolhidos na experiência de ensino, focada nas aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear mobilizadas e nas competências de modelação evidenciadas nas resoluções das tarefas e nas discussões realizadas durante a experiência, incluindo uma apreciação sobre os contributos da experiência de ensino referidos pelos participantes. No último capítulo, apresento as principais conclusões do estudo em função das questões enunciadas e encerro com algumas reflexões e recomendações finais sobre o ensino e aprendizagem de conceitos de álgebra linear com base em tarefas de modelação, sugerindo ainda possíveis propostas para investigação futura.

CAPÍTULO 2

ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E DA ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO SUPERIOR

Neste capítulo apresento um enquadramento teórico do estudo focado em aspetos gerais de ensino e aprendizagem da matemática e da álgebra linear no ensino superior. Começo por apresentar e discutir algumas orientações gerais relativas à utilização de contextos realistas e ao desenvolvimento de competências matemáticas no ensino superior. Além disso, faço também uma revisão de investigações sobre ambientes coletivos de aprendizagem que promovem o dinamismo na sala de aula de Matemática, em particular o trabalho em grupo e as discussões coletivas. Numa segunda parte, discuto abordagens teóricas e empíricas sobre ensino e aprendizagem da álgebra linear, incluindo potencialidades da álgebra linear na formação matemática do estudante. Faço, ainda, uma revisão de investigações sobre o tratamento de conceitos de álgebra linear abordados neste estudo, incluindo dificuldades dos estudantes associadas à aprendizagem desses conceitos, e finalizo com uma revisão de investigações referentes à utilização de recursos tecnológicos para a aprendizagem da álgebra linear, em particular a utilização de programas computacionais.

2.1 Sobre a formação matemática do estudante no ensino superior

2.1.1 O contexto real e competências matemáticas na formação do estudante

A Matemática é reconhecida como uma disciplina cujos objetos, conceitos, métodos e procedimentos são abundantemente utilizados para modelar, descrever e explicar situações com as quais o ser humano se confronta no seu dia a dia (Rach & Heinze, 2017). Este carácter utilitário da matemática tem dado argumentos para que as pesquisas em Educação Matemática se tenham debruçado, nos seus campos de investigação, sobre diversas áreas da Matemática e diversos níveis de educação, incluindo o ensino superior. Neste sentido, um dos desafios da Educação Matemática consiste hoje em melhorar o rendimento académico dos estudantes nas disciplinas de Matemática no ensino superior.

Alguns autores envolvidos na investigação em Educação Matemática no ensino superior, entre os quais referimos Biggs e Tagg (2011), têm estabelecido recomendações que procuram levar a uma aprendizagem efetiva do estudante. Os autores mencionam que essa aprendizagem efetiva não se deve limitar a adquirir informação, mas implica ainda que os estudantes experimentem mudanças conceptuais que lhes permitam ver o mundo de forma diferente. Nesta linha, Biggs e Tagg mencionam quatro aspetos essenciais que o estudante deve assumir, e o professor promover, para atingir estas mudanças conceptuais, nomeadamente,

1) Conhecer previamente os benefícios a atingir com a aprendizagem de determinados tópicos e trabalhar para alcançar esses objetivos.
2) Sentir-se motivado com as tarefas a realizar.
3) Sentir-se livre de trabalhar numa tarefa como meio de aprendizagem e não como meio de avaliação.
4) Trabalhar colaborativamente e em diálogo com os outros.

Estes aspetos convidam o professor de Matemática a deixar esclarecidos pontos essenciais referentes à disciplina nas primeiras aulas lecionadas, quer quanto à avaliação sumativa da disciplina, quer quanto à avaliação formativa, mencionando as vantagens que o estudante terá com o desenvolvimento do conhecimento previsto. Falar dessas vantagens ajuda o estudante a motivar-se, sendo igualmente necessário proporcionar-lhe ambientes de aprendizagem interessantes ou que alterem a dinâmica habitual da aula de Matemática.

Como parte dos ambientes de aprendizagem que motivam o estudante, o contexto no qual se trabalha a matemática é importante, sendo que os ambientes onde a aprendizagem da matemática é contextualizada com situações reais ajudam o estudante a reter melhor o conhecimento aprendido (Domingos, 2003). Nesta linha, o contexto pode fazer a diferença entre trabalhar o conhecimento apenas de forma procedimental ou trabalhá-lo também conceptualmente, como ilustra Blum (2015) num exemplo de uma tarefa onde são evidenciadas dificuldades, a nível escolar, devido à falta de reflexão sobre o contexto da tarefa. O exemplo citado por este autor é o seguinte: “450 soldados devem ser transportados de autocarro para os seus locais de treino. Cada autocarro tem uma capacidade para transportar 36 soldados. Quantos autocarros são precisos?” (p. 79). O autor menciona que a resposta típica é 12.5 autocarros, resultado incorreto que evidencia o facto de os estudantes não analisarem o contexto do problema, pois baseiam as suas formas de pensar numa divisão que só considera os dados do enunciado, obtendo uma resposta descontextualizada da situação apresentada, onde só deveriam ser considerados números inteiros positivos como parte da solução.

O exemplo anterior deixa ver que o trabalho procedimental predomina no ensino e aprendizagem da matemática, originando falta de compreensão relacional, nomeadamente dificuldades para adaptar o conceito à resolução de novas tarefas, para ativar mais facilmente os processos matemáticos e para fazer conexões ou explorar conceitos noutras áreas, de forma independente (Skemp, 1976). Esta compreensão relacional, de natureza conceptual, constitui um repto que requer do estudante capacidades que lhe permita ligar a matemática que sabe com contextos externos à matemática, sendo que os esquemas de que dispõe no momento podem ser insuficientes para resolver uma determinada situação numa tarefa matemática (Chinnapan, 2010; Skemp, 1976).

As capacidades estão diretamente ligadas com as competências. Na investigação em Educação Matemática podemos encontrar várias definições de competência, algumas enfatizando a capacidade para superar dificuldades, como a definição de Blomhoj e Jensen (2003), aludindo à competência como uma predisposição para superar um desafio encontrado na procura de uma solução para determinada tarefa. Outros autores, como Niss (2003), aludem à competência como o domínio de um certo conhecimento necessário para dominar aspetos fundamentais da vida dentro de um determinado contexto. Neste sentido, o ensino da Matemática deve proporcionar ao estudante não só uma aprendizagem dos conteúdos matemáticos que o currículo sugere, mas também a possibilidade de realização de atividades que permitam o desenvolvimento de competências, permitindo ao estudante desenvolver-se como futuro profissional quando encorajado a utilizar o seu máximo potencial (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

Niss (2003) destaca as competências matemáticas, considerando-as como o conjunto de capacidades para trabalhar com a matemática em diversos contextos e situações, dentro e fora das disciplinas de matemática. No estudo de Niss (2003) é apresentada uma tentativa do autor para identificar as competências matemáticas necessárias para superar certos problemas e desafios colocados à Educação Matemática na Dinamarca, tentativa que nasce da sua participação no projeto dinamarquês “competências e a aprendizagem da matemática” (Projeto KOM, em dinamarquês).

O projeto KOM, promovido pelo Ministério de Educação e outros organismos oficiais da Dinamarca, no ano 2000, propôs criar uma reforma profunda da Educação Matemática a fim de atender a necessidades desde o ensino escolar até ao ensino superior. A tentativa de Niss (2003) apresenta uma organização das competências matemáticas em dois grupos, mencionando, para cada competência, ações que o estudante deve desenvolver previamente para adquirir a competência matemática. Por um lado, encontra-se o grupo de competências matemáticas associadas à capacidade para fazer e responder a questões em e com a matemática, enquanto o segundo grupo está associado a competências matemáticas associadas a utilizar e manipular linguagem e ferramentas matemáticas, apresentando cada grupo quatro competências matemáticas, conforme apresentado na tabela 2.1.

Tabela 2.1. Competências matemáticas (Niss, 2003)

Fazer e responder perguntas em e através da matemática	**Manipulação da linguagem e ferramentas matemáticas**
Pensar matematicamente	Representar entidades matematicamente.
Formular e resolver problemas matemáticos	Manipular símbolos e formalismos matematicamente.
Modelar matematicamente	Comunicar em, com e através da matemática.
Raciocinar matematicamente	Utilizar ferramentas matemáticas, incluindo Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

No que respeita à estrutura destas competências matemáticas, Niss (2003) menciona que "cada uma destas oito competências lida com processos mentais e físicos, atividades e comportamentos. Por outras palavras, o foco está naquilo que o indivíduo é capaz de fazer" (p. 9). Estas competências manifestam-se em cada tópico em diferente medida, razão pela qual as competências e os tópicos matemáticos estão relacionados de modo ortogonal, no sentido figurativo de que é possível formar uma matriz onde as filas correspondam às competências e as colunas aos tópicos, resultando cada célula desta matriz com identidade própria. Explicitando, diferentes tópicos exigirão diferentes competências ou pelo menos algumas competências em maior medida que outras. Da tabela 2.1, as competências referentes a *modelar matematicamente* são fundamentais neste estudo, sendo mencionadas e explicadas na secção 3.3, referente a modelação matemática.

Referindo-se às atividades ou capacidades que o estudante pode realizar em sala de aula, Biggs e Tagg (2011) fazem uma classificação de atividades que são importantes desenvolver no ensino superior, desde um menor a um maior nível de exigência cognitiva. Os autores definem sete níveis ou atividades de aprendizagem necessárias no ensino superior: memorizar, tomar notas, descrever, explicar, relacionar, aplicar e teorizar. Os níveis de memorizar e tomar notas correspondem a níveis de baixo compromisso académico, enquanto os outros níveis representam desafios de aprendizagem na sala de aula. Para estes autores, é importante que a aprendizagem do estudante evolua do nível de memorização para o nível de teorização, passando sucessivamente pelos outros níveis.

Estudos como o apresentado por Thomas et al. (2015) mencionam a existência de uma preocupação a nível internacional sobre as capacidades matemáticas que os estudantes trazem consigo ao entrarem na universidade, preocupação que se manifesta no decrescimento de competências matemáticas para fazer frente a provas matemáticas ou trabalhar em tarefas que requerem capacidades de carácter analítico. Estes autores realizam um questionário a professores de Matemática de diferentes universidades, obtendo respostas de 79 professores, de 21 países, via e-mail. Como parte dos resultados deste questionário, salienta-se que a maior parte dos professores (91,1%) afirma que o estudante tem problemas nas disciplinas de Matemática quando passa do ensino secundário para o ensino superior, sendo uma das causas das dificuldades o tratamento formal dos conteúdos no ensino superior por comparação com a natureza procedimental a que o estudante está possivelmente mais habituado no ensino secundário.

Esta natureza procedimental também é referida por Domingos (2003), aludindo ao termo de "cariz operacional" para se referir ao trabalho matemático destinado à manipulação de objetos matemáticos através de procedimentos mecanizados. Domingos menciona que nessa transição do ensino secundário para o ensino superior "verificam-se elevados níveis de retenção nos primeiros anos, sobretudo nas disciplinas mais viradas para a construção e compreensão dos conceitos matemáticos mais abstratos" (Domingos, 2003, p. 1), o que faz pressupor a ausência de capacidades matemáticas do estudante ao iniciar um curso universitário com alta exigência em matemática.

Congressos internacionais de relevância, como o Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), têm grupos de discussão dedicados a áreas específicas de investigação em Educação Matemática, entre os quais um grupo dedicado ao ensino superior. Os trabalhos submetidos nestes congressos mostram que há uma tendência dos investigadores em Educação Matemática para a realização de estudos empíricos centrados no ensino e aprendizagem de conteúdos, como cálculo diferencial e integral, séries infinitas e, em menor número, alguns que consideram a álgebra abstrata e a topologia (Nardi et al., 2015). Em particular, a álgebra abstrata tem um papel importante em alguns dos conteúdos da Álgebra Linear, área de conhecimento da Matemática da qual se falará na secção 3.2.

2.1.2 Ambientes coletivos de aprendizagem: o trabalho em grupo e as discussões coletivas na aprendizagem da matemática

A abordagem da matemática na sala de aula pode assumir várias dinâmicas, algumas das quais conduzem a uma maior participação do estudante, quebrando com esquemas tradicionais de aprendizagem baseados no papel passivo do estudante. Quando o ambiente de aprendizagem incorpora a participação ativa do estudante há uma interação comunicativa entre estudantes ou entre professor e estudante, sendo beneficiados ambos os atores do processo de ensino e aprendizagem. Por um lado, o professor pode ter maior acesso ao raciocínio que o estudante desenvolve na resolução de uma tarefa. Por outro, o estudante tem a oportunidade para expressar as suas opiniões, aprender em conjunto, aprofundar as suas justificações e clarificar questões sobre conceitos e processos, elementos que contribuem para a sua aprendizagem (Scherrer & Stein, 2013). Neste sentido, os grupos de trabalho e as discussões coletivas, como ambientes de ensino e aprendizagem que promovem a participação dinâmica do estudante, jogam um papel fundamental na aula de Matemática.

O trabalho em grupo no ensino e aprendizagem da matemática

No tocante à aprendizagem da matemática na sala de aula, Sofroniou e Poutos (2016) mostram que a utilização do trabalho em pequenos grupos permite resultados construtivos e benéficos para a aprendizagem do estudante, encorajando-o a enfrentar novos desafios onde deve mobilizar os seus conhecimentos prévios. Estes autores defendem que os ambientes baseados em trabalho em grupos ajudam a melhorar a aprendizagem do estudante e produzem melhor desempenho quando o estudante é encorajado a mostrar o que sabe perante outros. Para além disso, este ambiente de aprendizagem abre espaços para que o estudante supere os seus receios sobre o fazer matemática, manifestados comummente quando faz trabalho individualizado ou em ambiente mais competitivo.

Entre os tipos de ambientes de trabalho em grupos que encontramos no contexto da aprendizagem está o trabalho cooperativo e o trabalho colaborativo. No que respeita ao trabalho cooperativo, pode definir-se como o trabalho didático e instrucional desenvolvido pelos estudantes ao trabalharem conjuntamente em pequenos grupos, com o fim de maximizar a sua própria aprendizagem e a aprendizagem dos colegas (Johnson, Johnson & Smith, 1991). Similar a este tipo de trabalho em grupos está o trabalho colaborativo. Para Sofroniou e Poutos (2016), no trabalho cooperativo são atribuídas funções e responsabilidades específicas a cada integrante, pelo que o resultado final da tarefa depende de todos os membros do grupo; difere do trabalho colaborativo onde a resolução da tarefa é feita com contributos de todos, simultaneamente, não sendo atribuído tarefas específicas a cada membro.

Centrando-nos na aprendizagem sobre trabalho cooperativo, cada estudante deve promover a aprendizagem de cada um dos membros do grupo, supervisionando o trabalho dos outros colegas e apoiando-os quando for necessário, para além de ser capaz de fazer a parte de trabalho que lhe foi atribuída, utilizando o seu maior esforço, garantindo assim o bom sucesso de todo o grupo (Jonhson et al., 1991). Em termos de vantagens, Pujolàs, Riera, Pedregosa e Soldevila (2005) mencionam que o trabalho cooperativo promove a diversidade de ideias, a responsabilidade e tomada de decisões individuais e em grupo, a interdependência dos elementos do grupo e o fomento de discussões que levam à reflexão em grupo. Para além disso, quanto mais desenvolver trabalho cooperativo, mais o estudante aprenderá, melhor compreenderá o que está a aprender e mais seguro sobre si mesmo se sentirá, desenvolvendo muitas outras capacidades, em particular a comunicação, aprendendo a trabalhar com os outros (Guerreiro, Ferreira, Menezes & Martinho, 2015; Johnson et al., 1991).

Quanto ao número de estudantes que devem formar os grupos envolvidos em trabalho cooperativo, Pujolàs et al. (2005) recomendam terem no máximo cinco integrantes, sendo estudantes de diferentes perfis académicos que deverão permanecer fixos durante todo o processo de intervenção na sala de aula. Este processo de ensino e aprendizagem deve estar dirigido para uma complementaridade entre o agir do professor e o agir do estudante, sendo necessário menos orientação do professor e mais trabalho independente do estudante (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Esta forma de agir, entre professor e estudante, leva assim a que os estudantes descubram métodos por si mesmos, refletindo sobre a sua aplicação, em vez de ser o professor a disponibilizar esses métodos (Ponte, 2005), ajudando a que o estudante possa manifestar o seu máximo potencial quando enfrenta situações na sala de aula sem ajuda do professor.

Para Pujolàs et al. (2005) a aprendizagem do estudante fica regulada ou condicionada por três subestruturas: subestrutura da atividade (o que faz o estudante), subestrutura da recompensa (objetivos de aprendizagem a atingir), subestrutura da autoridade (gestão de aula e relação professor-estudante). Estas três subestruturas são exemplificadas a partir do esquema mostrado na Figura 2.1, onde se mostra uma comparação entre trabalho individual, trabalho competitivo e trabalho cooperativo a partir das subestruturas que condicionam a aprendizagem do estudante.

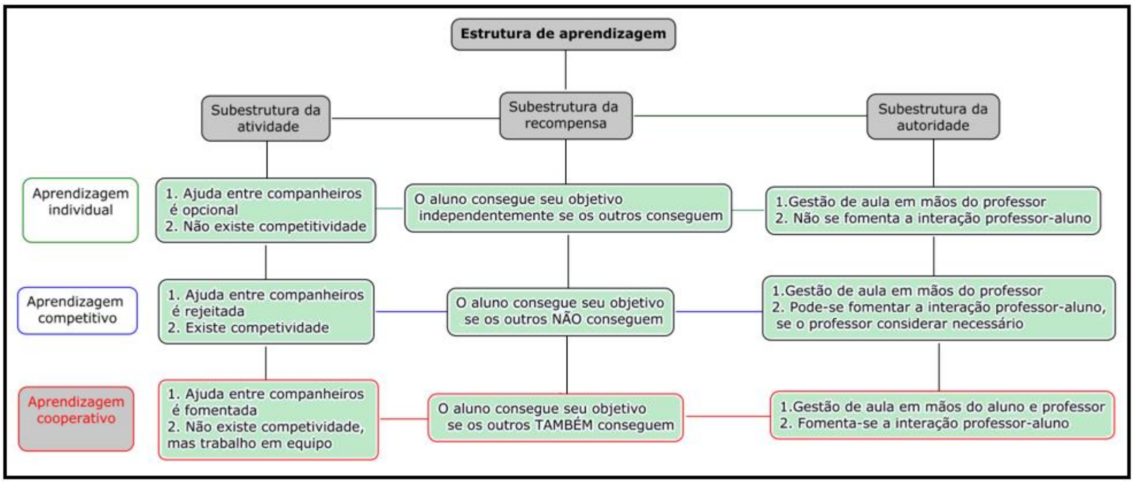


Figura 2.1. Estrutura de aprendizagem em ambientes de aprendizagem.
Adaptado de Pujolàs et al. (2005).

Em relação ao trabalho cooperativo, na Figura 2.1 pode observar-se que, a nível de atividade, existe ajuda sem competitividade entre os companheiros; a nível de recompensa todos os membros ganham; e a nível de autoridade fomenta-se a interação entre professor e estudante, pelo que o trabalho cooperativo produz maior realização do estudante quando comparado com experiências competitivas e individualistas (Pujolàs et al., 2005).

No que respeita ao ensino, um aspeto importante, quer antes quer durante o processo de resolução da tarefa, é a discussão que o professor promove sobre aspetos da tarefa que não sejam familiares para o estudante, sobre ideias matemáticas importantes que promovam a linguagem matemática no grupo de trabalho e que encorajem ou guiem o estudante na resolução da tarefa (Ponte, 2017). Em particular, durante os momentos em que os estudantes resolvem a tarefa, cabe ao professor perceber esses caminhos de resolução, confrontando o estudante com os conceitos matemáticos a trabalhar na tarefa e outros conceitos ligados (Scherrer & Stein, 2013). No caso do trabalho cooperativo, deve-se considerar o facto de alguns membros do grupo poderem não concluir a sua parte da tarefa, pelo que o professor tem o papel primordial de monitorizar e garantir que todos os membros se envolvam na tarefa, encorajando os estudantes a trabalhar (Sofroniou & Poutos, 2016).

Entre os trabalhos empíricos realizados no ensino superior para a aprendizagem através de trabalho em grupos, encontramos o estudo de Sofroniou e Poutos (2016), autores que investigam a eficácia do trabalho em grupos com estudantes de um curso de Engenharia, com o objetivo de observar se pode ser considerado um método efetivo de aprendizagem da Matemática. Os autores utilizam um grupo de controlo (não envolvido em grupos de trabalho) e um grupo experimental (trabalhando em ambientes de grupos de trabalho). Os resultados mostram que os estudantes em ambientes de trabalho em grupo conseguiram aprofundar a sua compreensão dos tópicos tratados, tendo oportunidade para discutir diversas estratégias de resolução do problema, superando as suas capacidades em trabalho individual.

Noutro estudo, Ikeda e Stephens (2001) apresentam um trabalho com três grupos de estudantes universitários japoneses, procurando investigar o papel das discussões nos ambientes de trabalho em grupo, nomeadamente como ajudam a uma melhor compreensão da modelação matemática. Na metodologia seguida, os autores propõem a dois grupos o trabalho numa tarefa com direito a discussão em grupo: um grupo com a possibilidade de fazer a discussão da tarefa inicialmente e depois trabalhando na tarefa individualmente; e outro grupo com a possibilidade de trabalhar primeiro individualmente na tarefa e depois fazer a sua discussão em grupo. No estudo também participa um terceiro grupo de estudantes, mas realizando a tarefa de forma individual, sem discussão em grupo. Os resultados evidenciam que os estudantes que tiveram a possibilidade de fazer a discussão no seu grupo de trabalho conseguiram uma melhor compreensão da tarefa. Para além disso, os estudantes que realizaram inicialmente a discussão em grupo tiveram um melhor desempenho na resolução da tarefa, dando justificações que lhes permitiram explicar as suas simplificações no processo de modelação, enquanto os estudantes que realizaram no final a discussão em grupo das suas resoluções individuais concentraram-se em observar diferenças e semelhanças entre as suas respostas, fazendo menos reflexão sobre a tarefa.

Discussões coletivas no ensino aprendizagem da matemática

Complementando o trabalho em grupos pequenos de trabalho, e como ambientes onde se pode aprofundar o trabalho desenvolvido pelos estudantes, estão as discussões coletivas na aula de Matemática, que consideram a partilha de conteúdos matemáticos, constituindo, segundo Guerreiro et al. (2015), “um ambiente comunicativo rico, intencionalmente construído, que visa suportar o desenvolvimento das aprendizagens em Matemática” (p. 289). Os autores mencionam que os momentos de realização das discussões são comumente feitos após o trabalho na tarefa, mas podem estar presentes também durante outras fases da atividade de sala de aula, incluindo durante a resolução de uma determinada tarefa, com o objetivo de observar e dinamizar aprendizagens ou esclarecer dúvidas gerais dos estudantes, semelhante ao que acontece com as discussões em grupos de trabalho.

No que respeita às vantagens destes ambientes de aprendizagem, Ponte (2005) salienta que os momentos de discussão constituem oportunidades para a aprendizagem em conjunto, onde os estudantes podem negociar os significados matemáticos, partilhando as suas estratégias de resolução e argumentos. Nesta linha, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) mencionam que as discussões coletivas têm sido assumidas como uma abordagem importante no currículo de Matemática, principalmente para o trabalho com tarefas de cunho exploratório ou investigativo, permitindo ao professor questionar o estudante, e aos estudantes questionarem-se entre si, aceitando ou rejeitando comentários. Para além disso, estes momentos de questionamento podem servir para originar desacordos, sendo importante fomentá-los na sala de aula, ainda mais em estudantes que têm dificuldades na comunicação matemática.

Orientações curriculares como as do NCTM (2014) também aludem à importância das discussões coletivas na sala de matemática, mencionando que:

> O discurso na sala de aula de matemática oferece oportunidades aos estudantes para partilhar ideias e esclarecer entendimentos, construir argumentos convincentes sobre o porquê e como as coisas funcionam, desenvolver uma linguagem para expressar ideias matemáticas e aprender a ver as coisas de outras perspetivas. (p. 29)

Nesta partilha de ideias, as discussões coletivas são um meio para tornar ativa a aprendizagem da matemática, onde se pode promover o raciocínio do estudante a partir de suas explicações verbais e através de comunicação visual ou escrita (NCTM, 2014).

Guerreiro et al. (2015), Mason (2000), Ponte et al. (2013) e Ponte (2017) referem a importância de o professor promover a discussão, dado que poucas vezes surge por iniciativa do estudante. Neste sentido, Mason (2000) menciona como aspeto importante a forma como o professor pretende incentivar a discussão, pois o estilo em que as questões são colocadas ao estudante influencia a sua aprendizagem e visão da matemática, incluindo o fortalecimento da sua linguagem matemática. Uma destas formas de questionar é fornecer ao estudante a possibilidade de se expressar de forma aberta, dando-lhe um conjunto de termos técnicos e solicitando-lhe que explique a relação entre eles.

Finalmente, deve considerar-se que na realização de discussões coletivas algumas dificuldades podem surgir, tal como menciona Ponte (2017), referindo que, por um lado, o estudante pode não conseguir continuar a ideia de um raciocínio iniciado por ele mesmo. Nesta linha, é necessário que o estudante identifique os elementos associados ao raciocínio que tenta explicar no momento e que faça conexões entre estes, quer para continuar a ideia inicial quer para reformular a ideia, mas sempre com a finalidade de explicar o mesmo raciocínio à turma toda. Por outro lado, o estudante pode tentar desviar-se do objetivo da discussão com a introdução de outras ideias, sendo necessário uma intervenção do professor, quer para aprofundar a ideia do estudante, procurando evidenciar outras sugestões e tipos de raciocínio, quer para reencaminhar o estudante para o objetivo inicial da discussão.

2.2 Álgebra linear no ensino superior

2.2.1 Ensino e aprendizagem da álgebra linear

Em Matemática, como também acontece com outras áreas de conhecimento, é possível observar um aumento de pesquisas no nível da educação superior, sendo o foco de vários grupos de investigação, na última década, a disciplina de Álgebra Linear (Trigueros & Bianchini, 2016). Parte da importância desta disciplina para os investigadores tem a sua razão de ser na aplicabilidade que a álgebra linear mostra ter em diversas profissões especializadas, como a Engenharia Mecânica, Civil ou Aeronáutica, disponibilizando ferramentas matemáticas que ajudam no estudo de situações como a estabilidade de uma estrutura, a determinação dos eixos centrais de inércia de um corpo rígido, o desenho de circuitos, a teoria de controlo moderno, entre outros (Costa & Rossignoli, 2017). Neste sentido, a álgebra linear desempenha um papel importante na formação do estudante, e em particular no ensino superior, sendo uma via de aquisição de conhecimentos necessários para o trabalho desenvolvido em outras disciplinas de cursos superiores e para sua futura profissão, onde a matemática está muito presente e a álgebra linear disponibiliza ferramentas matemáticas para o estudo de conceitos próprios desses cursos ou profissões (Cárcamo et al., 2016; Trigueros, Maturana, Parraguez & Rodríguez, 2015).

Carlson et al. (1993) integram um dos primeiros grupos de investigação sobre o ensino e aprendizagem da álgebra linear, que estabeleceu, já no princípio dos anos 90, recomendações para melhorar o ensino e aprendizagem na disciplina. Estas recomendações mantêm a sua importância na atualidade, tendo em vista os critérios a adotar na construção do currículo da disciplina. Estas recomendações consideram que:

1) O programa de Álgebra Linear e a sua implementação na sala de aula devem responder às necessidades das disciplinas de Matemática, procurando considerar exemplos de aplicações que cubram a maior parte dos campos de estudo que os estudantes irão tratar, convertendo a Álgebra numa das mais úteis disciplinas de Matemática do curso, e onde sejam considerados os conhecimentos prévios e as capacidades do estudante.
2) Os ambientes de aprendizagem devem considerar a resolução de problemas ou aplicações que motivem o estudante.
3) As necessidades dos estudantes devem ser consideradas nas aplicações a serem desenvolvidas.
4) A tecnologia deve ser um elemento a incorporar, ajudando a explorar novos conceitos, flexibilizar os cálculos e reforçar a compreensão de conceitos.

5) Em vez de uma única disciplina de Álgebra Linear em todo o curso de especialização do estudante, deveriam existir várias disciplinas de Álgebra Linear orientadas para dar uma visão mais abrangente da disciplina ao estudante.

No contexto latino-americano, Bianchini, Lima e Gomes (2019) realizaram uma pesquisa sobre os principais estudos em ensino e aprendizagem da álgebra linear frequentados por estudantes de cursos de Engenharia. Em particular, tiveram em conta estudos desenvolvidos desde o ano 2000 pelo Grupo de Educação Matemática em Educação Superior em complemento com a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, para além de considerarem estudos latino-americanos desenvolvidos por outras sociedades de pesquisa entre 2007 e 2018.

A análise feita por Bianchini et al. (2019) mostra, em termos gerais, que os estudos desenvolvidos no campo da educação em álgebra linear na América Latina têm-se focado em promover a aprendizagem de tópicos específicos, nomeadamente, o conceito de espaço vetorial e conceitos associados como (in)dependência linear e base de um subespaço, a matriz associada a uma transformação linear, valores próprios e vetores próprios, e um estudo focado na geometria de vetores e planos em IR^3. Para além desses, a pesquisa mostra estudos mais gerais, cujos temas de interesse têm sido a identificação de dificuldades na aprendizagem de conceitos lecionados de álgebra linear, a análise de livros de álgebra linear para identificar as representações de conceitos utilizadas, e a análise de programas curriculares de Álgebra Linear no ensino superior. Entre os estudos revistos, mencionam alguns que enfatizam aplicações da álgebra linear na engenharia para a contextualização dos conceitos, nomeadamente, diagonalização de matrizes para o estudo de campos eletromagnéticos, utilização de vetores próprios e valores próprios para a resolução de circuitos elétricos sofisticados e sistemas dinâmicos, como tanques de água e combinação linear de vetores para o estudo de sistemas de áudio.

Os estudos mencionados por Biachini et al. (2019) revelam uma concentração de investigações nas unidades de espaços vetoriais e transformações lineares, cujos tópicos são comummente catalogados como de bastante abstração por estudantes de ensino superior que frequentam a disciplina de Álgebra Linear (Costa & Rossignoli, 2017). Em particular, no que respeita às investigações referentes ao conceito de transformação linear, entre 1990 e 2015, Trigueros et al. (2015) mencionam que estas se têm concentrado em aspetos como identificar dificuldades, aplicar propostas didáticas para representar o conceito de transformação linear com *software* de geometria dinâmica e propostas orientadas para relacionar uma transformação linear com outros conceitos, como, por exemplo, com os conceitos de função linear ou multiplicação de matrizes.

Já no que se refere a investigações de índole teórica, a literatura mostra, por exemplo, estudos que mencionam formas de abordar o ensino e aprendizagem da álgebra linear mediante uma perspetiva centrada na compreensão dos conceitos. Podemos citar, nesta linha, o estudo de Uhlig (2002), autor que enfatiza a importância da elaboração de questões matemáticas intuitivas na disciplina de Álgebra Linear antes de ser abordado o formalismo associado aos conceitos estudados, sobretudo porque a Álgebra Linear é uma disciplina com um carácter altamente conceptual, em comparação com disciplinas como o Cálculo ou Equações Diferenciais, em que se apresentam diversos métodos matemáticos eventualmente mais técnicos.

Para Uhlig, o ensino elementar dos conteúdos de álgebra linear não tem sido abordado da melhor forma, enfatizando que desde a primeira aula há um enfoque formal baseado em axiomas e provas matemáticas, sem considerar que muitos dos estudantes que frequentam pela primeira vez a disciplina nunca tinham trabalhado em demonstrações matemáticas ou têm pouca experiência nesta atividade. Consequentemente, parece comum observar-se, no início da disciplina, que grande parte dos estudantes não se adapta ao rigor matemático com que se trabalha na disciplina.

Como proposta metodológica para enfrentar o formalismo das questões matemáticas no ensino e aprendizagem da álgebra linear, Uhlig propõe uma introdução de questões com um cariz intuitivo, baseado em perguntas exploratórias que desafiem o estudante a compreender, construir e raciocinar sobre o objeto matemático. Assim, perguntas como "o que aconteceria se…?, porque acontece isto?, como ocorrem os diferentes casos?, o que é verdadeiro aqui?" (p. 338), constituem questões que podem preparar o estudante, pouco a pouco, para enfrentar posteriormente o rigor matemático da disciplina. Uhlig menciona, a título de exemplo, que discutir como se resolve um sistema de equações lineares através da forma escalonada reduzida, antes de dar o método, pode incentivar este enfoque intuitivo da aprendizagem, servindo também para que o estudante utilize esse raciocínio para aprender e usar os conceitos de matriz inversa, subespaço vetorial, (in)dependência linear e base de um subespaço vetorial.

Por outro lado, Costa (2013) utiliza um referencial teórico baseado na teoria dos modelos mentais e na teoria da aprendizagem significativa como proposta de ensino no tópico de cálculo vetorial, que estabelece as definições básicas das operações com vetores utilizadas na área da Álgebra Linear denominada por Geometria Vetorial. Para esta autora, as representações externas devem ser promovidas na aprendizagem de conceitos de álgebra linear e, em particular, no tópico de cálculo vetorial, permitindo ao estudante a contextualização do conceito matemático para romper com a abstração associada ao mesmo. Como exemplo, Costa (2013) apresenta diferentes representações associadas ao conceito de campo vetorial gravitacional (Figura 2.2), considerando representações diversas, como a analítica e a gráfica.

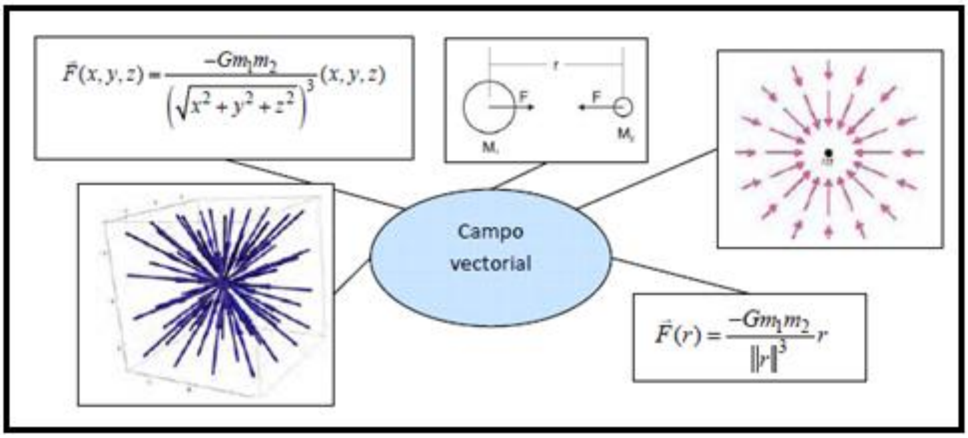


Figura 2.2. Representações do campo vetorial gravitacional (Costa, 2013, p. 513).

Assim como o conceito de campo vetorial admite várias representações, outros conceitos da álgebra linear também admitem diferentes representações. Similarmente, existem objetos matemáticos de álgebra linear que podem representar diferentes conceitos, tal como referido por Sandoval e Possani (2016), mencionando que um n-uplo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode representar um vetor em IR^n, um ponto em IR^n ou a solução de um sistema de equações lineares com n variáveis. Dessa forma, um objetivo do ensino e aprendizagem da matemática deve ser que o estudante consiga mover-se entre conceitos associados a um objeto matemático e entre representações associadas a um conceito matemático (Costa, 2013).

Em relação a investigações empíricas, encontramos trabalhos com contributos que consideram diversos conceitos de álgebra linear, abordados com diferentes instrumentos e metodologias e orientados para a formação matemática em diferentes áreas profissionais. No que se refere ao tópico de sistemas de equações lineares e matrizes, Mallet (2007) trabalha uma proposta de ensino para inspecionar o desenvolvimento da aprendizagem do tópico de sistemas de equações lineares (SEL) a partir de representações visuais, algébricas e tabulares, utilizando *software* CAS, especificamente, o *Maple*. O estudo de Mallet, desenvolvido com estudantes do primeiro ano do ensino superior, maioritariamente do curso de Matemática, procurou ajudar os estudantes a compreender o que são os SEL, o que representam os SEL e o que se entende por solução ou conjunto solução de um SEL. Neste estudo, os estudantes trabalharam num laboratório durante a lecionação da unidade de matrizes e SEL, tendo tido inicialmente um tutorial de utilização do *Maple* para saber como trabalhar com matrizes e SEL, momento a partir do qual o estudo procurou investigar a resolução de SEL com uma única solução, com infinitas soluções e sem soluções, através de diversas representações.

Os resultados da proposta de Mallet revelam que os estudantes são capazes de transferir a compreensão adquirida sobre as representações visuais como apoio ao trabalho algébrico de resolução de SEL, aludindo ao conjunto solução de um SEL com infinitas soluções em termos de pontos infinitos sobre uma reta, interseção de três planos ou a interseção de dois planos. Não obstante, na sua reflexão, os autores mencionam que as representações tabulares de dados precisariam ser mais exploradas, de modo que o estudante também consiga mover-se entre esta representação e a representação algébrica.

No tópico de geometria de vetores, Gueudet-Chartier (2006) apresenta uma análise de possíveis usos da geometria e da intuição geométrica na aprendizagem da álgebra linear, referindo-se à geometria numa perspetiva euclidiana focada em axiomas, enquanto a referência à intuição geométrica diz respeito à possibilidade de usar recursos visuais externos ou internos, e outros aspetos relativos à intuição em si mesma para facilitar a compreensão de conceitos. Gueudet-Chartier analisa um problema proposto a estudantes do curso de Matemática que frequentavam uma disciplina de Álgebra Linear. Os resultados do estudo de Gueudet-Chartier, observados na resolução do problema proposto, "encontrar o comprimento de uma diagonal de um cubo com arestas de comprimento igual a 1 em IR^n" (p. 184), revelam que aqueles estudantes que utilizam uma solução analítica para resolver a tarefa não conseguem chegar a uma resposta, ao passo que a maior parte dos estudantes que utilizam modelos geométricos têm sucesso em resolver a referida tarefa. Assim, o autor menciona que a utilização de modelos geométricos é importante, ajudando na compreensão do estudante, mesmo quando os espaços vetoriais sejam distintos de IR^2 ou IR^3. Uma compreensão do que acontece ao passar de IR^2 para IR^3 ajuda o estudante a generalizar o que pode acontecer ao passar para espaços vetoriais de maior dimensão, nomeadamente, ao passar de IR^{n-1} a IR^n. Apesar dos resultados favoráveis com modelos geométricos, Gueudet enfatiza que os modelos geométricos devem ser utilizados cuidadosamente na disciplina de Álgebra Linear pelos estudantes, para que não se perca a ligação com outros domínios de estudo, incluindo o domínio analítico.

Na unidade de espaços vetoriais, Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney e Larson (2012) propõem uma sequência instrucional de quatro tarefas, a ser implementada com estudantes dos cursos de Engenharia, Matemática e Computação, orientada para promover uma compreensão significativa do conceito de subespaço vetorial gerado pelas combinações lineares de um conjunto dado e o conceito de (in)dependência linear.

A sequência proposta por Wawro et al. (2012), chamada de "Magic Carpet Ride Sequence", oferece imagens ricas para dar sentido aos conceitos formais citados anteriormente, possibilitando que o estudante veja os conceitos matemáticos contextualizados que por norma considera abstratos. Esta sequência, baseada na utilização de contextos realistas, aproveita as experiências dos estudantes para trabalhar inicialmente os conceitos de vetor e equações com vetores, a partir das quais o estudante começa a construir os conceitos de subespaço gerado e (in)dependência linear. Para os autores, a configuração e dinâmica de trabalho das quatro tarefas que conformam a sequência instrucional foram aspetos fundamentais para promover a compreensão dos conceitos trabalhados. Essa configuração inclui 1) tarefas de carácter aberto que permitissem diferentes estratégias de solução e representações; 2) tarefas desafiantes, mas possíveis de serem trabalhadas pelos estudantes; e 3) ambiente de trabalho em grupo para incentivar discussões entre estudantes que permitissem validar as suas resoluções.

Os resultados de Wawro et al. (2012) mostram que a aprendizagem de conceitos a partir de situações significativas para o estudante e que exigem a utilização de vetores e equações com vetores (conceitos estudados em disciplinas anteriores pelos estudantes) abre as portas para facilitar a construção imaginária e formal dos conceitos de subespaço gerado e (in)dependência linear, possibilitando o desenvolvimento de explicações e justificações fornecidas pelos próprios estudantes durante o seu trabalho nas tarefas que promovem a compreensão do conceito.

Abordando o conceito de base de um subespaço vetorial, encontramos o estudo de Bagley e Rabin (2010) com estudantes universitários do primeiro ano do ensino superior. Os autores propõem uma tarefa onde se convidam os estudantes a completar uma base de IR^4 a partir de um conjunto formado por dois vetores de IR^4, visando responder à questão "em que caminhos produtivos os estudantes utilizam pensamento computacional?" (p. 84). Os autores referem três tipos de pensamento utilizados na aprendizagem de álgebra linear: o pensamento abstrato, o pensamento geométrico e o pensamento computacional.

O pensamento abstrato considera o tratamento formal dos conceitos a partir de definições, teoremas e regras, em geral, aplicáveis aos vetores em IR^n, para qualquer valor natural de n. O pensamento geométrico considera o trabalho com representações visuais em espaços euclidianos bidimensionais ou tridimensionais e, portanto, vetores vistos como representações gráficas em forma de setas orientadas. Finalmente, o pensamento computacional alude a representações simbólicas dos vetores em IR^n como n-uplos, utilizando algoritmos para obter uma determinada solução para a tarefa proposta.

Bagley e Rabin (2010) mencionam que para que o estudante tenha mais sucesso na disciplina de Álgebra Linear é necessário que desenvolva os processos de pensamento abstrato, geométrico e computacional, tendo a capacidade de recorrer a vários destes tipos de pensamento, uma ou várias vezes, na resolução de tarefas de álgebra linear. Alguns exemplos destes tipos de pensamento com conceitos de álgebra linear são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 2.2. Exemplos de processos de pensamento utilizados no tratamento de conceitos de álgebra linear (Bagley & Rabin, 2010).

Tipo de processo	**Exemplos**
Abstrato	▪ O conceito de base pensado como conjunto linearmente independente e gerador de um subespaço vetorial. ▪ Um conjunto linearmente dependente formado por dois vetores de IR^3, pensados como combinação linear um do outro. ▪ Dois vetores ortogonais pensados como n-uplos cujo produto interno é zero.
Geométrico	▪ Dois vetores dependentes em IR^3 pensados como setas colineares. ▪ Dois vetores ortogonais em IR^3 pensados como setas, cujo ângulo entre eles seja 90º. ▪ Sistemas de equações lineares com duas variáveis pensados em termos das suas equações como retas no plano ou no espaço.
Computacional	▪ O algoritmo para calcular determinantes. ▪ Um conjunto dependente de vetores pensados como n-uplos, em que um n-uplo resulta de multiplicar o outro por um escalar. ▪ Sistemas de equações lineares pensados em termos da matriz aumentada associada e operações sobre suas linhas.

Os resultados do estudo de Bagley e Rabin (2010) mostram que inicialmente alguns estudantes tentam utilizar pensamento abstrato, mas terminam todos por utilizar pensamento computacional. Este pensamento computacional é utilizado de forma produtiva, refletindo, justificando e escolhendo estratégias que permitem ao estudante simplificar e clarificar os seus cálculos, partindo da utilização de exemplos particulares, ou aplicando cálculos conhecidos que permitem avaliar o resultado obtido. Assim, os autores concluem que o pensamento computacional, mesmo sendo de carácter algébrico procedimental, possui utilidade no estudo da álgebra linear, ajudando o estudante a compreender, aprofundar e relacionar conceitos. Mesmo assim, é necessário encorajar o estudante a fazer suas próprias predições sobre os possíveis resultados que poderia obter após aplicar um determinado algoritmo, promovendo a validação de resultados reais face às suas predições, como também encorajar o estudante a considerar tratamentos geométricos e abstratos para dar sentido a resultados inesperados.

Similarmente, Thomas e Stewart (2011) e Gueudet-Chartier (2006) falam de níveis abstrato, algébrico e geométrico, definidos por Hillel (2000) como modos de descrição, pelo que o nível algébrico, onde é tratado a linguagem e conceitos da teoria da álgebra linear em IR^n, está diretamente associado ao pensamento computacional mencionado por Bagley e Rabin (2010). Para Thomas e Stewart, "formar ligações entre estes níveis abstrato, algébrico e geométrico, ou representações, é a base de muitos problemas dos estudantes, e há uma necessidade de fazer ligações explícitas entre eles" (p. 278).

Outros estudos em matéria de espaços vetoriais têm sido focados na aplicação de ferramentas tecnológicas para observar o efeito das representações sobre a compreensão de conceitos de álgebra linear, como por exemplo o estudo de Dogan-Dunlap (2010). Este autor aplica uma série de perguntas a 45 estudantes para estudar a aprendizagem do conceito de independência linear, utilizando para isso uma calculadora gráfica online como recurso tecnológico, tal como mostra a seguinte figura:

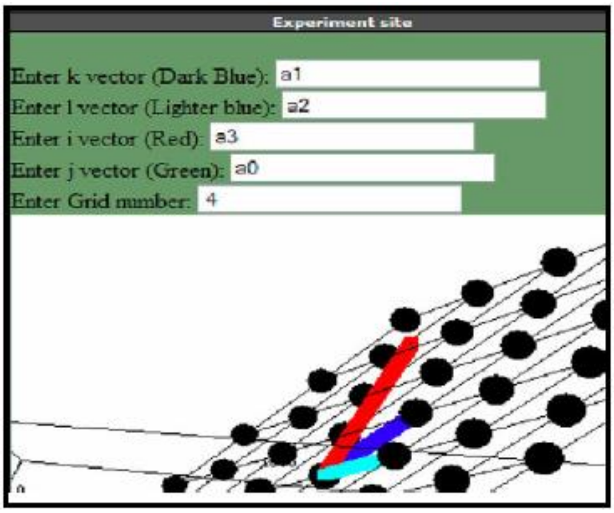


Figura 2.3. Representação de vetores em calculadora gráfica (Dogan-Dunlap, 2010, p. 2150).

Na figura 2.3 observam-se representações de vetores no espaço, procurando mostrar uma interpretação geométrica de vetores linearmente independentes. Como parte dos resultados encontrados neste estudo, o autor menciona uma tendência dos estudantes a usarem representações aritméticas e algébricas para além das gráficas, mas sendo estas últimas de ajuda às primeiras para obterem uma compreensão mais rica do conceito e articularem aspetos geométricos deste conceito.

Na unidade de transformações lineares, podemos mencionar o estudo de Ellis, Henderson, Rasmussen e Zandieh e (2012), autores que propõem explorar o raciocínio utilizado por 13 estudantes de ensino superior, na sua maioria de Engenharia, quando colocados perante tarefas com diferentes níveis de complexidade onde intervêm representações geométricas de transformações lineares. Para averiguar a compreensão que os estudantes têm das transformações lineares, os autores realizam uma entrevista semi-estruturada focada em três tipos de questões: uma questão de associação entre matrizes quadradas e possíveis representações geométricas que pode ter essa matriz como matriz associada à transformação linear nas bases canónicas; uma questão de predição da imagem geométrica, tendo o estudante previamente a matriz associada à transformação nas bases canónicas; e uma questão de criação de uma transformação linear que cumpra certas condições geométricas no conjunto imagem.

Os resultados de Ellis et al. (2012) mostram que várias estratégias de resolução foram desenvolvidas pelos estudantes à medida que avançaram nas tarefas, sem apresentarem maior dificuldade ao longo das tarefas mais complexas. Para os autores, uma possível razão pela qual o nível de complexidade das tarefas não dificultou o trabalho dos estudantes é o resultado de um possível desenvolvimento do raciocínio estrutural (associado ao trabalho a nível do conceito) desde a primeira tarefa, raciocínio que se manteve junto com o raciocínio operacional (associado ao pensamento computacional), este último evidenciado sobretudo nas questões de predição e criação. Os autores mencionam que uma das preocupações da Educação Matemática é encontrar um equilíbrio entre o conhecimento baseado nos cálculos ou procedimentos e o conhecimento baseado no raciocínio conceptual, de tal forma que ambos os raciocínios, estrutural e operacional, sejam exercitados.

Outros estudos referentes à aprendizagem de conceitos de álgebra linear suportada por ambientes de modelação matemática, alguns utilizando o recurso à tecnologia, serão considerados mais adiante nas secções 3.5 e 3.6.

2.2.2 Dificuldades na aprendizagem de álgebra linear

A aprendizagem da matemática que vai ocorrendo nas primeiras etapas do ensino superior torna-se fundamental para a aprendizagem de outros conceitos e processos matemáticos mais complexos, os quais vão sendo tratados conforme o estudante avança para outras disciplinas matemáticas do seu curso de formação. Neste transitar entre a aprendizagem adquirida e a aprendizagem de conhecimento novo, podem surgir dificuldades porque mesmo as aprendizagens adquiridas podem não ser suficientes para avançar na aquisição de novo conhecimento.

Grande parte das dificuldades surge em disciplinas cuja natureza dos conceitos é abstrata, e em cujas aulas a aplicação dos conceitos não é trabalhada (Klymchuk & Zverkova, 2001). Essas dificuldades aparecem no ensino superior inclusive antes de o estudante ter contacto com o conceito matemático, produto da mudança de uma aprendizagem frequentemente baseada em cálculos algorítmicos com alguma contextualização, no secundário, para uma aprendizagem fundamentada em processos cognitivos mais complexos e conceitos comummente descontextualizados no ensino superior, criando no estudante um estado de incerteza académica nos primeiros anos do seu curso (Rach & Heinze, 2017). Neste sentido, algumas das causas que dão origem a essa incerteza académica traduzem-se na necessidade de os estudantes precisarem de ver a matemática aplicada, sendo que ao chegarem ao ensino superior sentem também a necessidade de aprender matemática significativa (Biggs & Tagg, 2011).

No caso da disciplina de Álgebra Linear, esta falta de aplicabilidade é muitas vezes enfatizada pelos estudantes, principalmente por aqueles que estão nos primeiros anos, conforme afirmam Thomas e Stewart (2011):

> O estudante universitário do primeiro ano que não tem nenhum entendimento prévio de álgebra linear tem um longo caminho a percorrer antes de ser capaz de compreender o quadro completo. A disciplina parece-lhes muito intensa, com ideias e definições introduzidas muito rapidamente, com pouca conexão com o que eles já sabem da matemática escolar e conseguem fazer com ela. (p. 275)

Quer para o estudante que frequenta pela primeira vez a disciplina de Álgebra Linear, quer para aquele que já tem algum conhecimento de álgebra linear, uma das maiores dificuldades evidenciadas na literatura é a abstração dos conceitos por eles sentida (Dogan-Dunlap, 2010). Esta abstração dos conceitos tende a dificultar a aprendizagem a nível conceptual, deixando o estudante sem saber, por vezes, o que tem de fazer quando são apresentados enunciados que enfatizam uma definição e não cálculos computacionais.

> Estes estudantes, frequentemente não estão preparados para o alto nível de abstração das disciplinas de Álgebra Linear. Eles ficam tão perdidos em grande parte da abstração que até mesmo as ideias mais simples se tornam difíceis de compreender, criando desânimo e grande stress. (Dogan-Dunlap, 2010, p. 2142)

A abstração dos conceitos fomentada na Álgebra Linear chega, nalguns casos, a levar a que os estudantes abandonem a disciplina mesmo antes de terminar o ciclo letivo, parte deles sem saberem ainda os conceitos básicos da disciplina. Mais ainda, os estudantes que chegam à conclusão da disciplina dificilmente sabem como aplicar o conhecimento matemático em situações da sua vida diária (Carlson et al., 1993).

Para Dogan-Dunlap (2010), a abstração dos conceitos percebida pelo estudante tem origem na linguagem utilizada na sala de aula, pois "o alto formalismo em Álgebra Linear faz com que os estudantes apresentem a sensação de lacunas conectivas com o que eles já sabem de matemática" (p. 2142). O problema deste formalismo é que o estudante não está familiarizado com o mesmo, havendo excesso de linguagem simbólica sem interpretação física ou geométrica (Costa & Rossignoli, 2017); como consequência, torna-se difícil para o estudante reconhecer e utilizar diferentes representações associadas ao conceito, representações que poderiam ser utilizadas para aprofundar a compreensão do mesmo (Dogan-Dunlap, 2010). Nesta linha, Bagley e Rabin (2010) declaram:

> Grande parte da literatura sobre a aprendizagem da álgebra linear documenta dificuldades dos estudantes em resolverem problemas básicos, em deslocar-se de forma flexível entre representações, em usar teoremas abstratos em situações concretas, e até em falar ou escrever na linguagem básica da álgebra linear coerentemente. Apesar de muita busca sobre as causas das suas dificuldades e de sugestões pedagógicas criativas, a impressão geral permanece pessimista. (p. 84)

Segundo Rodriguez (2011), a natureza da álgebra linear faz com que o seu ensino em sala de aula siga um padrão de muita teoria e pouca prática, tornando-se necessária a utilização de problemas contextualizados que, mediante uma orientação pertinente, permitam ao estudante uma aprendizagem fundamentada na descoberta e no aprofundamento dos conceitos. O mesmo autor refere outro tipo de dificuldades que devem considerar-se, que são as dificuldades associadas à falta de conhecimentos prévios e específicos para a aprendizagem de conceitos trabalhados na Álgebra Linear.

Rodriguez realiza um diagnóstico sobre a disciplina de Álgebra Linear oferecida na Universidade dos Andes, trabalhando com estudantes universitários de idades entre 18 e 20 anos dos cursos de Engenharia, Economia e Administração. O objetivo do estudo, que era determinar as principais dificuldades que se apresentam no processo de ensino e aprendizagem da álgebra linear, foi atingido após a realização de um diagnóstico através de observações de sala de aula, inquéritos aplicados e uma oficina de formação desenvolvida com ajuda do *software* matemático *Cabri II Plus* aos estudantes.

Como parte dos produtos do estudo de Rodriguez, o autor realiza um quadro de dificuldades e erros associados à aprendizagem da álgebra linear (Tabela 2.3), utilizando para isso a classificação geral mencionada por Dorier e Sierpinska (2001), que contempla dificuldades conceptuais e dificuldades cognitivas. As dificuldades conceptuais estão associadas à natureza da álgebra linear, designadamente, ao carácter abstrato e formal que possuem os conceitos, enquanto que as dificuldades cognitivas estão associadas aos tipos de raciocínio ou competências necessárias para compreender a álgebra linear.

Tabela 2.3. Dificuldades associadas ao processo de ensino e aprendizagem na álgebra linear (Rodríguez, 2011).

Dificuldades conceptuais	Dificuldades cognitivas
1. Erros de linguagem	3. Erros por associações incorretas
2. Erros em conceitos prévios	4. Erros em obter informação espacial
5. Erros por aplicação de estratégias irrelevantes	

Os resultados do estudo de Rodríguez (2011) mostram que o erro de tipo 1 predomina, sendo a causa associada ao alto nível de formalismo utilizado pelo professor na sala de aula, dado que o estudante não se adapta facilmente às demonstrações formais e elementos da lógica matemática necessários para interpretar a linguagem formal utilizada no tratamento dos conceitos.

Por outro lado, Costa e Rossignoli (2017) realizam um estudo com estudantes de cursos de Engenharia que frequentaram a disciplina de Álgebra Linear durante o 1.º semestre de 2015 e de 2016. Com o objetivo de identificar a origem de dificuldades na aprendizagem da álgebra linear, os autores aplicam um questionário, identificando que os estudantes tendem a reconhecer maiores dificuldades nos temas de espaços vetoriais e transformações lineares, encontrando como causas a natureza epistemológica da álgebra linear (carácter abstrato dos temas), a linguagem matemática utilizada para representar os diferentes conceitos e a falta de tempo para trabalhar tantos conceitos. Por seu lado, os tópicos em que os estudantes sentem menos dificuldade correspondem a operações com matrizes, sistemas de equações lineares, determinantes e diagonalização de matrizes a partir de valores e vetores próprios. Algumas das sugestões dadas pelos autores para superar estas dificuldades são: 1) limitar o estudo dos conteúdos de espaços vetoriais a representações geométricas, especificamente, no estudo de subespaços vetoriais de IR^n; e 2) relacionar os tópicos de espaço vetorial e transformação linear com tópicos menos abstratos, como o conceito de sistema de equações lineares.

Especificamente aludindo ao tópico de sistemas de equações lineares (SEL) e matrizes, o estudo de Mallet (2007), baseado na abordagem de SEL sob representação algébrica, representação visual e representação tabular, revelou que alguns estudantes apresentam dificuldades para se mover entre a representação tabular e a representação algébrica, dificuldade devida ao facto de preferirem as representações visuais em vez de aproximações que teriam de fazer a partir de representações em tabelas de dados numéricos. Para além disso, o autor enfatiza que, quando a exploração de um conjunto solução de um SEL com infinitas soluções fica limitada à representação algébrica, a aprendizagem construída pelo estudante sobre o conjunto solução torna-se fraca, devido à existência de certa dificuldade que os estudantes apresentam em assimilar os vetores solução parametrizados que configuram este tipo de solução.

Fazendo referência à unidade de geometria vetorial, Sandoval e Possani (2016) realizam um estudo com três turmas de estudantes de ensino superior que frequentam uma disciplina introdutória de Álgebra Linear, a maior parte em cursos de Matemática, Ciências Atuariais, Economia e Engenharia. Os autores utilizam como referencial teórico a teoria de Duval (2006) dos campos cognitivos, com o objetivo de analisar dificuldades que os estudantes apresentam quando se defrontam com atividades onde intervêm diferentes representações de vetores, planos e interseções entre estes. A teoria de Duval é utilizada no estudo de Sandoval e Possani (2016) para investigar o papel que jogam as representações associadas aos conceitos anteriormente mencionados e as dificuldades em que o estudante se vê envolvido. Para a análise de representações, os autores recorrem aos registos de representação (Duval, 2006), enfatizando os tratamentos (transformações que surgem dentro do mesmo registo) e conversões (transformações que surgem entre diferentes registos).

A proposta de atividades de avaliação no estudo de Sandoval e Possani considera atividades cujos enunciados são dados em diferentes tipos de registo (geométrico, verbal, algébrico, aritmético), de forma a identificar os registos e transformações mais usados pelos estudantes. Os resultados revelam que os estudantes apresentam dificuldades, quer para trabalhar dentro do mesmo registo, quer para se deslocarem de um registo para outro, principalmente para fazerem conversões entre o registo algébrico e o registo geométrico. Associada a essas dificuldades é identificada uma insuficiência de flexibilidade cognitiva dos estudantes para articular diferentes representações quando trabalham com representações de vetores, planos e suas interseções.

Em referência à unidade de espaços vetoriais, Rodriguez (2011) menciona que o estudo de conceitos referentes a esta unidade requer especial cuidado, sendo necessário que o estudante tenha certo domínio de lógica que lhe permita superar possíveis dificuldades relativas ao simbolismo matemático. Mais concretamente, o trabalho de Wawro et al. (2012) revela que os estudantes apresentam dificuldades para interpretar geometricamente uma combinação linear de k vetores como um objeto matemático capaz de gerar todo um subespaço $S \subseteq IR^n$, em especial quando as coordenadas $c_1, c_2, \dots, c_k$, que estruturam a combinação linear $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k$, podem ter todos os valores possíveis em IR.

Complementando a ideia anterior, os resultados do estudo de Dogan-Dunlap (2010) mostram que existe maior dificuldade em passar informação da representação geométrica de vetores linearmente independentes para a representação algébrica, comparativamente com o caminho inverso de passar da representação algébrica para a geométrica, pelo que a representação geométrica não substitui a tendência dos estudantes a quererem trabalhar mediante representações algébricas no tópico de (in)dependência linear.

Trigueros e Possani (2013) fazem referência a ambos os conceitos de combinação linear e (in)dependência linear, mencionando que estes conceitos geram dificuldade para o estudante devido à abordagem formal e abstrata com que são tratados os conceitos na sala de aula. Para além disso, estes autores salientam que uma aprendizagem destes conceitos limitada à representação algébrica e à representação geométrica apenas com vetores em IR^2 ou IR^3 não permite o trabalho com outros tipos de espaços vetoriais mais gerais, como por exemplo, espaços vetoriais de funções ou polinómios, razão pela qual se devem estudar combinações lineares e dependência linear de subespaços vetoriais de IR^n também para casos de $n \geq 4$.

Ainda com referência ao conceito de independência linear, mas acrescentando o conceito de base de um subespaço V de vetores e o conceito de espaço vetorial gerado por um conjunto V de vetores, este último denotado por $Span\ (V)$, Stewart e Thomas (2010) fazem uma proposta de ensino baseada na teoria APOS (Actions-Processes-Objects-Scheme) e na teoria dos três mundos de aprendizagem da Matemática (Tall, 2004) no ensino superior.

A teoria APOS procura descrever as construções e mecanismos mentais que são necessários para a aprendizagem de um determinado conceito matemático, utilizando para isso um modelo hipotético, denominado de decomposição genética (DG). O modelo hipotético considera "um conjunto de ações, processos, objetos e esquemas construídos previamente e relacionados, consciente ou inconscientemente, na mente de um indivíduo numa estrutura coerente, que são postos em jogo para a resolução de problemas" (Trigueros et al., 2015, p. 98). Por seu lado, a teoria de aprendizagem da Matemática dos três mundos refere três formas de desenvolvimento cognitivo de pensamento matemático para trabalhar os conceitos, nomeadamente: 1) desenvolvimento de conceitos a partir de atributos visuais associados ao conceito, incluindo representações icónicas; 2) desenvolvimento do conceito a partir de representações simbólicas, onde são incluídas as representações algébricas e as representações em forma matricial; e 3) desenvolvimento do conceito a partir de linguagem formal, onde se incluem as propriedades dos objetos matemáticos a partir de axiomas e teoremas, e provas de proposições.

O estudo de Stewart e Thomas corresponde a um estudo de caso com dois grupos de estudantes de segundo ano da Universidade de Auckland (Nova Zelândia), estudantes do curso de Gestão e Economia. Enquanto que num dos grupos foi enfatizado o ensino dos conceitos a partir de atributos visuais do objeto matemático e o relacionamento dos conceitos, no outro grupo a ênfase foi na álgebra simbólica sem relacionamento entre os conceitos. Foi apresentada uma série de 14 questões aos estudantes no final das aulas, obtendo-se como resultados que ambos os grupos de estudantes apresentaram dificuldade para fazer a conexão entre o conceito de independência linear e o conceito de espaço vetorial gerado e, portanto, para construir o conceito de base. Parte dos estudantes apresentou bastante dificuldade para construir o $Span\ (V)$ e identificar a independência linear de vetores, sendo o conceito de independência linear de maior dificuldade do que o conceito de $Span\ (V)$. Os autores destacam que o facto de os estudantes preferirem trabalhar procedimentalmente o conceito de base a partir da redução de matrizes, não ajudou no processo de compreensão do conceito, sendo pertinente considerar a necessidade de mais tempo de trabalho destinado a desenvolver essa compreensão.

No que se refere à unidade de transformações lineares, Trigueros et al. (2015) desenvolveram um questionário com estudantes universitários chilenos dos cursos de licenciatura e pedagogia em Matemática, escolhidos para a condução de um estudo de caso em três universidades distintas. Inicialmente, os autores realizaram uma análise das respostas dadas pelos estudantes, para depois aprofundarem as respostas dadas por alguns desses estudantes através de uma entrevista. A configuração das questões dessa entrevista esteve enquadrada na teoria APOS, procurando estudar as construções e mecanismos mentais necessários que surgem na aprendizagem do teorema da matriz associada a uma transformação linear.

Os resultados do estudo de Trigueros et al. (2015) revelaram que alguns estudantes são capazes de determinar o vetor de coordenadas $[T(v)]_B$ e a matriz $[T]_B^B$ associada à transformação linear, porém não são capazes de reconhecer que estes dois elementos servem para ser utilizados na relação $[T(v)]_B = [T]_B^B \cdot [v]_B$, evidenciando que a determinação do vetor $[T(v)]_B$ e da matriz $[T]_B^B$ não garante a identificação da relação $[T(v)]_B = [T]_B^B \cdot [v]_B$ como relevante na resolução de uma tarefa. Os autores concluem que estas dificuldades decorrem do facto de que os estudantes aprendem a trabalhar com as matrizes de forma mecânica, deixando para segundo plano a transformação como uma função, o que os impede de dar o passo para a compreensão da relação expressa no teorema da matriz associada a uma transformação linear. Esta dificuldade está em linha com a falta de reflexão sobre os conceitos, mencionada por Oktaç (2018), ao salientar que alguns estudantes precisam de ter o critério da transformação linear no enunciado ou calculá-lo previamente, antes de começarem a trabalhar na tarefa, mesmo quando o critério não é necessário para a resolução, o que está associado ao facto de o estudante tender a trabalhar sob o efeito de cálculos que evitam refletir na natureza conceptual da tarefa.

Bagley, Rasmussen e Zandieh (2015) também falam de dificuldades relativas às transformações lineares e ao seu tratamento como funções. Estes investigadores desenvolveram um estudo baseado em entrevistas com estudantes universitários dos cursos de Engenharia, Matemática, Economia e Ciências da Computação que frequentavam uma disciplina de Álgebra Linear. Com o objetivo de explorar as relações, semelhanças e diferenças que os estudantes estabelecem entre os conceitos de função e de transformação linear, os autores entrevistaram dez estudantes no final do semestre, nas últimas aulas da disciplina, colocando perguntas que enfatizavam os conceitos de inversa, composição e identidade.

Tendo em conta a definição usual de transformações lineares como "funções de um espaço vetorial a outro, comummente de IR^n a IR^m, com propriedades particulares (preservam adição e multiplicação por escalar)" (Bagley et al., 2015, p. 36), os autores identificaram no seu estudo que todos os estudantes foram incapazes de predizer o resultado da composição de uma função com a sua função inversa, afirmando tipicamente que equivale a 1. Os autores concluem que estas dificuldades se devem à aproximação entre o conceito de inversa de uma função e o conceito de inverso multiplicativo, sendo que conhecimentos anteriores influenciam conhecimentos novos, pois os estudantes associam a lei de recíprocos inversos $x \cdot x^{-1} = 1, x \neq 0$ para inferir, erradamente, que a mesma lei se aplica ao caso de uma função e da sua função inversa, isto é, $f(f^{-1})(x) = f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$. Os resultados de Bagley et al. (2015) também revelaram dificuldades devidas ao tratamento contrário, aliás, à influência de novos conhecimentos (transformações lineares) para trabalhar conhecimentos anteriores (funções reais de variável real), pois para o estudante a relação matricial de composição de transformações $A_{ToT^{-1}} = A_T * A_{T^{-1}}$ implica, incorretamente, a relação de composição de funções $f(f^{-1})(x) = f(x) \cdot f^{-1}(x)$.

2.2.3 Aprendizagem da álgebra linear com recurso à tecnologia

Até inícios do presente século XXI muito pouco se sabia sobre a utilização da tecnologia no ensino superior (Domingos, 2003), mas com o passar dos anos esta tem vindo a assumir um papel cada vez mais preponderante nos cursos de ensino superior que integram a matemática como parte dos seus programas de estudo. Esta importância assumida pela tecnologia tem levado os departamentos de Matemática a preocupar-se por incluí-la no ensino de conceitos matemáticos associados geralmente a temas como o cálculo, equações diferenciais e álgebra linear (Oliveira, 2001), vendo nesta uma ferramenta útil para promover ambientes dinâmicos e interativos que, entre outras funções, permitem abordar situações reais associadas aos conceitos matemáticos (Flores & Yemail, 2017).

Apesar de estarmos imersos num contexto educativo onde a tecnologia é destacada em alguns dos programas curriculares universitários como um elemento necessário para o ensino e aprendizagem, o processo formativo continua tendencialmente a resistir à sua utilização, preferindo-se optar por métodos tradicionais de ensino. Como consequência disso, é possível observar estudantes que tendem a resistir ao trabalho com tecnologia, revelando incapacidade para trabalhar de forma criativa e com sentido crítico com meios tecnológicos (Sánchez, 2007), inferindo-se que a incorporação da tecnologia na sala de aula não garante uma aprendizagem fundamentada na compreensão do conceito matemático, pois a sua utilização requer um bom contexto de aprendizagem (Biggs & Tagg, 2011).

Para Lesh (2012), os objetivos curriculares do ensino da matemática devem orientar-se para a utilização da tecnologia como uma ferramenta necessária na sala de aula, utilizando-a para o trabalho em tarefas que requerem cálculos extensos ou cálculos que não possam ser realizados através de procedimentos analíticos. Por seu lado, Galbraith e Stillman (2006) falam sobre a importância de o estudante conhecer as capacidades que têm diferentes tecnologias utilizadas na sala de aula para sua aprendizagem, de forma a saber as potencialidades de um tipo de recurso em relação a outros, procurando assim o maior aproveitamento da tecnologia à sua disposição.

Entre os diferentes recursos tecnológicos ao dispor do estudante, destaca-se a importância, no ensino superior, da utilização de *software* matemático como um meio para o estudante ver a aplicabilidade da matemática através da tecnologia. Neste sentido, Siller e Greefrath (2010) sugerem o uso do computador para trabalhar com *software* matemático, referindo vantagens deste recurso para alterar a dinâmica da sala de aula e a visão do estudante para com a matemática. Os autores destacam que:

> Através do uso de computadores na educação, é mais fácil discutir problemas que podem ser retirados do contexto da vida dos estudantes. Através de tais discussões, a

> motivação para a Educação Matemática pode ser alcançada porque os estudantes reconhecem que a matemática é muito importante na vida cotidiana. (p. 2138)

Para lograr aproveitar esta potencialidade do computador, a utilização de *software* que permita trabalhar em Matemática é fundamental, sendo que existem vários recursos tecnológicos que permitem a aproximação da realidade dos estudantes (Kripka et al., 2017). Dentro destes recursos, existe uma diversidade de *software* para potenciar a resolução de problemas de álgebra linear que requerem cálculo numérico de grandes magnitudes, devendo o estudante ser orientado pelo professor a dar maior ênfase à utilização do *software* para reforçar a interpretação, exploração e relações matemáticas entre objetos matemáticos (Carlson et al., 1993).

Para promover estas relações matemáticas, a aprendizagem através do *software* deve utilizar múltiplas representações do conceito matemático, permitindo ao estudante construir pontes entre as diferentes representações e, desse modo, aprofundar a compreensão do conceito.

Greefrath et al. (2018) destacam que a utilização de *software* dinâmico se torna importante para encorajar o estudante na descoberta de relações matemáticas e mencionam que a descoberta destas relações é facilitada pelas representações, pois

> As ferramentas digitais permitem que várias representações distintas sejam construídas, permitindo que os utilizadores simplesmente alternem entre representações. Além disso, múltiplas representações interactivamente conectadas podem ser geradas simultaneamente. (p. 234)

Em particular, deve-se promover na disciplina de Álgebra Linear *software* que facilite a compreensão do conceito, utilizando representações em duas e três dimensões (Mallet, 2007). Alguns dos *softwares* que permitem esse trabalho sobre conceitos, utilizando objetos matemáticos em duas e três dimensões, são o *Mathematica*, o *Matlab* e o *GeoGebra*.

No caso do *Mathematica* e do *Matlab* trata-se de *software* tipo CAS (Computer Algebra Systems), permitindo resolver, representar graficamente e manipular expressões matemáticas em forma analítica. No que diz respeito ao *Matlab*, este constitui um *software* matemático relevante para o ensino das ciências e engenharia, tendo sido utilizado amplamente para o ensino da álgebra linear (Han, 2008), incluindo para demostrar conceitos de álgebra linear (Chang, 2011). Para além disso, o *Matlab* dispõe de módulos computacionais eficientes de álgebra linear que outros *software* matemáticos não possuem, como, por exemplo, a descomposição de matrizes. Permite ainda visualizar objetos de álgebra linear de forma interativa, em conexão com os resultados de código algébrico obtidos (Han, 2008), embora estes modelos ou operações devam ser programadas pelo estudante. Por seu lado, o

Mathematica dispõe de diversas operações de álgebra linear já programadas, sendo que as operações não definidas podem ser programadas para então serem utilizadas; permite a comunicação com outros pacotes de *software*, como o editor de texto Word, e permite o cálculo simbólico (González, 1998).

No caso do *GeoGebra*, este constitui um programa dinâmico criado para trabalhar inicialmente a geometria, mas dispondo atualmente de vista gráfica, algébrica e de cálculo. O *GeoGebra* permite trabalhar a aprendizagem significativa de conceitos de álgebra linear e é um recurso para a mediação dessa aprendizagem por meio da exploração das ferramentas de que dispõe. Tais ferramentas constituem elementos essenciais para trabalhar a representação de situações problema que envolvam tópicos como sistemas de equações lineares (Kripka et al., 2017) ou aprofundar o conceito de transformação linear do ponto de vista de transformações de figuras no plano (Havelková, 2013). Para além disso, o *GeoGebra*, diferencia-se de outros programas dinâmicos, tendo, por exemplo, uma folha de cálculo incorporada, com a qual é possível usar várias funções disponíveis numa folha de cálculo comum, como o *Excel*.

No que toca às folhas de cálculo, autores como Chaamwe e Shumba (2016) mencionam a capacidade da folha de cálculo *Excel* para manipular fórmulas e executar diferentes operações que são utilizadas no ensino e aprendizagem da Matemática, em particular, "o uso de folhas de cálculo permite aos estudantes explorar processos alternativos de solução que vão além da manipulação simbólica, e dotar os estudantes de compreensão aprofundada dos conceitos envolvidos no problema" (p. 570), permitindo inclusive desenvolver o aprofundamento dos conceitos por meio da modelação e simulação de situações no estudo de sistemas de equações lineares e matrizes.

No que concerne ao programa curricular da disciplina MA1004, o programa destaca uma metodologia de sala de aula focada no ensino expositivo por parte do professor, mas mencionando-se a possibilidade de se aplicarem outras metodologias na sala de aula que envolvam mais o estudante na sua aprendizagem. Entre as metodologias sugeridas pelo programa está a utilização de *software* matemático que faz parte das tecnologias inovadoras (Sánchez, 2018).

CAPÍTULO 3

MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresento um enquadramento teórico do estudo focado nos ambientes de trabalho em tarefas de modelação matemática na sala de aula. Começo por referir aspetos gerais referentes à modelação matemática, como definições de conceitos associados aos ambientes de modelação matemática discutidos na literatura, tendências de pesquisa e perspetivas de integração de modelação na educação matemática e potencialidades destes ambientes de modelação para a aprendizagem do estudante. A seguir apresento alguns estudos teóricos e empíricos referentes à presença da modelação matemática na aprendizagem da álgebra linear, incluindo dificuldades associadas aos ambientes de aprendizagem com modelação e à utilização de TIC como recurso para a aprendizagem de conceitos em atividades de modelação matemática.

3.1 Tendências e perspetivas de modelação na Educação Matemática

A modelação matemática, ou simplesmente modelação, constitui um ambiente de aprendizagem que tem vindo a assumir um papel de relevância a nível investigativo dentro da área da Educação Matemática (Blum, 2015; Chinnappan, 2010). Este aspeto tem tido repercussões positivas no currículo matemático de todo o mundo, onde professores e demais decisores no âmbito da educação formal têm encontrado na modelação um ambiente e um tipo de atividade para a aula que pode promover a educação STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) e dar significado à matemática na vida real (Czocher, 2018).

Podemos encontrar várias definições sobre modelação matemática, algumas descrevendo-a como um processo de transição entre o mundo real e a matemática, e vice-versa (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2018). Outros autores definem-na como um processo que envolve um conjunto de fases e subprocessos afins que fazem parte do bem conhecido *ciclo de modelação* (Niss et al., 2007). Por seu lado, autores como Trigueros (2009) definem-na, aludindo a capacidades que vão para além de desenvolver os subprocessos do ciclo de modelação, nomeadamente mencionando que a modelação matemática consiste na "utilização da matemática para descrever e analisar o mundo, para desenvolver técnicas e tecnologias que intervêm sobre este ativamente" (p. 77). Já Barbosa (2006) distingue a modelação matemática realizada por modeladores a nível profissional e a modelação matemática desenvolvida na sala de aula pelo estudante, salientando que na sala de aula a modelação matemática está orientada para analisar e relacionar os elementos de uma situação real com base na matemática que o estudante conhece, interpretando os resultados encontrados e confrontando-os com os fenómenos em estudo. Neste sentido, "a modelação matemática não significa ter um "problema pseudo realistico", no qual todos os dados são fornecidos, ou unicamente ter de exercitar algoritmos" (Borromeo Ferri, 2018, p. 13).

Um elemento fundamental da modelação matemática são os objetos nomeados de modelos matemáticos, a partir dos quais se objetiva fazer uma descrição exata ou aproximada da situação em estudo. Muitas são as situações do dia a dia que estão definidas por meio de modelos matemáticos: os modelos de cálculo de preço de uma chamada telefónica; os modelos financeiros de juros compostos; os modelos de regulação de tráfego; os modelos de sondagens eleitorais; entre outros. A maior parte destes e de outros modelos matemáticos são comummente desconhecidos para o indivíduo; mesmo assim acreditamos que funcionam, conformismo que traz consigo desconhecimento de características importantes que rodeiam a situação real modelada (Matos, 1995). Em termos formais pode definir-se o modelo matemático como um termo matemático (D, M, f) que representa uma realidade simplificada (Niss et al., 2007), no sentido em que o modelo pode ser visto como a expressão analítica resultado de uma relação f entre um conjunto D do mundo real, ou extra-matemático, e um conjunto M do mundo matemático (Figura 3.1).

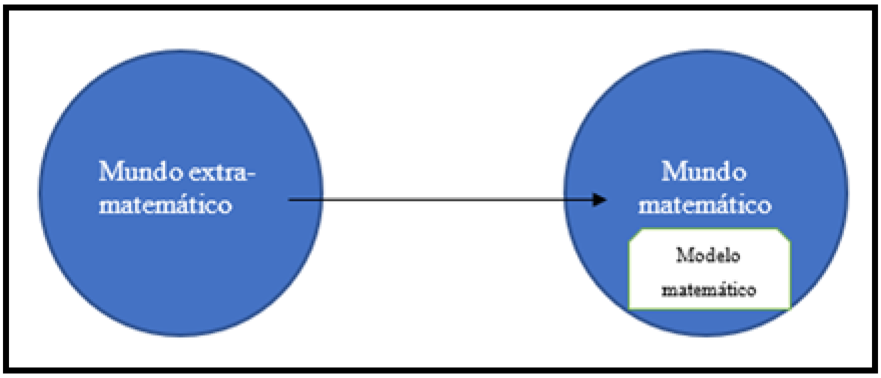


Figura 3.1. Modelo matemático como correspondência.

Outras definições consideram mais o carácter educativo dos modelos matemáticos, considerando-os como "ferramentas pedagógicas elaboradas para facilitar o entendimento e a compreensão do funcionamento de sistemas que são retirados da realidade" (Rosa & Orei, 2012, p. 269). Em qualquer dos casos, o modelo matemático torna-se um meio através do qual o modelador procura perceber o mundo real, quer de um sistema simples, quer de um sistema complexo. A partir da construção do modelo generaliza-se um padrão que descreve o comportamento de todos os elementos do sistema, visando responder a questões comummente colocadas na vida real, as quais surgem de situações que envolvem diversas áreas de conhecimento (Borromeo Ferri, 2010).

Do ponto de vista da investigação em Educação Matemática, Niss (2001) faz um estudo sobre investigações desenvolvidas na temática de modelação antes dos anos 90, mencionando orientações que seguiam, nomeadamente: 1) aspetos a considerar no currículo, extraídos da modelação e aplicações; 2) utilização de recursos para o ensino e aprendizagem das aplicações e modelação, incluindo material escrito e uso das TIC; 3) meios para avaliar a relevância das aplicações e modelação; e 4) explicação e descrição das fases do ciclo de modelação. Niss menciona igualmente as temáticas investigadas antes dos anos 90, a saber:

1) Definição e clarificação de conceitos através da modelação matemática.
2) Dificuldades, estratégias e atividade metacognitiva ao trabalhar com tarefas de modelação.
3) Noções, crenças e perceções do estudante e do professor sobre a modelação.
4) O efeito do contexto nos registos do estudante ao trabalhar em tarefas de modelação.
5) O discurso do estudante e do professor em atividades de modelação.
6) Implementação da modelação na formação de professores.
7) Formas de avaliar o trabalho de modelação.
8) Competências matemáticas requeridas em ambientes de trabalho não matemáticos.
9) Modelação como domínio de estudo na Educação Matemática.

Já em estudos mais recentes, Geiger (2017) refere a orientação que tem assumido a investigação em modelação matemática até à década atual, afirmando que:

> As pesquisas em modelação e aplicações matemáticas têm mantido o foco em como melhorar a capacidade dos estudantes para usar a matemática aprendida na escola, para resolver problemas dentro ou derivados do mundo real, assim como em perceber como o processo de modelação em si é executado enquanto se tentam resolver problemas do mundo real. (p. 2)

Nesta mesma linha, investigações apresentadas em congressos de relevância a nível internacional em Educação Matemática, como o CERME, ratificam as tendências de investigação mencionadas por Geiger (2017), enfatizando outros temas em matéria de modelação matemática que também são investigados pelos seus participantes. Explicitamente, evidenciam-se investigações orientadas para tópicos como: perspetivas e conceptualizações de modelação matemática existentes na educação; conexões entre modelação matemática, resolução de problemas, trabalho projeto e etnomatemática; utilização de boas tarefas de modelação matemática e suas dificuldades na sala de aula; papel da modelação matemática nas provas dos estudos do PISA; contextos e ambientes de modelação matemática; aspetos didáticos da modelação matemática e das atividades de modelação dos estudantes; e questões referentes ao ensino e aprendizagem da modelação matemática (Carreira, Barquero, Kaiser, Lingefjard & Wake, 2015).

Se bem que a modelação matemática esteja ligada à resolução de problemas e às aplicações matemáticas, estes termos não devem confundir-se, pois representam diferentes situações. Trigueros (2009) destaca que a diferença entre a modelação matemática e a resolução de problemas incide na utilização do contexto real, sendo no caso da modelação matemática um elemento que se torna a "fonte do processo de aprendizagem" para trabalhar os conceitos e conectar a matemática com a realidade envolvente, ao passo que na resolução de problemas o contexto da tarefa não tem de incluir necessariamente qualquer referência a uma situação da vida real.

Villa-Ochoa e Ruiz (2009) também referem o contexto como um critério que diferencia a modelação matemática e a resolução de problemas, mas acrescentam outros critérios, nomeadamente o propósito, o processo e os argumentos. Estes autores enfatizam que a modelação matemática e a resolução de problemas procuram promover uma aprendizagem significativa do estudante, sendo que o propósito da modelação matemática, que pressupõe a experimentação, a obtenção de dados e a simplificação, tende a ser mais significativo. Ao invés disso, na resolução de problemas estes três processos ficam geralmente limitados pelo contexto dado e pela forma como é apresentado o enunciado. Quanto ao processo, na modelação matemática existe uma validação interna e externa que diz respeito à validação dos resultados no mundo matemático e na situação real, respetivamente, enquanto que na resolução de problemas esta validação fica por vezes limitada à validação interna. Finalmente, no que toca aos argumentos, a modelação matemática centra-se em mostrar ao estudante como se aplica a matemática, enquanto que a resolução de problemas se centra na construção do conhecimento matemático.

Por outro lado, Niss et al. (2007) salientam a diferença entre modelação matemática e aplicações matemáticas, enfatizando que enquanto a modelação se concentra nos processos que são desenvolvidos, partindo de uma realidade e dirigindo-se para o mundo matemático, as aplicações concentram-se nos objetos envolvidos, partindo da matemática existente e dirigindo a sua utilização para certa realidade; portanto, o modelo matemático já existe no trabalho de aplicação da matemática. Assim, a modelação procura descrever a realidade utilizando a matemática, enquanto que a aplicação da matemática procura pôr em evidência como os conceitos matemáticos, as suas representações e outros elementos formais podem levar-se para um problema no contexto quotidiano. Neste sentido, a modelação matemática responde à questão “onde posso encontrar alguma matemática para me ajudar com este problema?” (Niss et al., 2007, p. 10), enquanto as aplicações respondem à questão “onde posso utilizar esta parte de conhecimento matemático?” (Niss et al., 2007, p. 11).

Em referência às perspetivas de modelação matemática, autores como Kaiser e Sriraman (2006) classificam a modelação matemática em várias perspetivas: realística, contextual, educacional, socio-critica, epistemológica e cognitiva. Em particular, a perspetiva educacional diferencia-se entre modelação educacional didática e modelação educacional conceptual, sendo que a modelação educacional didática corresponde a uma visão pedagógica da modelação para promover a estruturação e promoção de processos de aprendizagem, enquanto a modelação conceptual procura introduzir e consolidar conceitos.

Aludindo à perspetiva educacional, Galbraith e Stillman (2006) mencionam que o professor tem a oportunidade de olhar para as atividades mentais que os estudantes desenvolvem durante as diferentes fases do ciclo de modelação, incluindo as competências de modelação que o estudante desenvolve, enquanto Heuvel-Panhuizen (2003) referem que os modelos têm de ter pelo menos duas características: serem baseados na realidade e serem flexíveis para ser aplicados ao nível da turma. A primeira característica destacada por Heuvel-Panhuizen tem a ver com a necessidade de propor metodologias que fomentem o estudo de problemas da vida quotidiana conhecidos pelo estudante, enquanto a segunda se refere ao nível de complexidade das tarefas, sendo necessário escolher situações problemáticas adequadas, cujo nível desafie o estudante, mas que ao mesmo tempo permitam ao estudante ser capaz de resolver a tarefa, considerando sobretudo os seus conhecimentos prévios.

Ligada à perspetiva educacional está a perspetiva cognitiva, a qual procura analisar processos cognitivos e estilos de pensamento matemático, para o qual se faz uma descrição das trajetórias seguidas e conhecimentos ativados pelo modelador no desenvolvimento do modelo matemático (Kaiser & Sriraman, 2006). Concretamente no campo da educação, a perspetiva cognitiva procura estudar como o estudante lida com o modelo matemático, enquanto cumpre objetivos pedagógicos e curriculares esperados na disciplina (Czocher, 2018), podendo assumir o ponto de vista de análise diagnóstica de processos cognitivos do estudante quando se desloca pelo ciclo *ideal* de modelação matemática e de análise das dificuldades ocorridas em tais processos, bem como para promover estilos de pensamento matemático (Borromeo Ferri, 2018). Segundo esta perspetiva cognitiva, “o foco está nos processos de pensamento (individuais) que são mais ou menos expressos através de ações durante o processo de modelação" (Borromeo Ferri, 2007, p. 2081), pelo que diferentes registos de informação, nomeadamente, verbal, escrita e gráfica, constituem elementos importantes para perceber a forma como o estudante pensa quando se vê envolvido em atividades de modelação.

3.2 Tarefas de modelação: ciclo e rotas de modelação matemática

Um elemento importante da modelação matemática são as tarefas de modelação, caraterizadas por Blum e Borromeo Ferri (2009) como tarefas com uma grande exigência de processos cognitivos envolvidos no ciclo de modelação matemática, podendo ajudar no treino de atividades associadas ao processo de modelação que se tornam frequentemente dificuldades com que o estudante se confronta na sala de aula de Matemática.

O nível de exigência destas tarefas relaciona-se com a sua natureza problemática ou desafiante, podendo ser categorizadas, dependendo da abordagem, como problemas ou investigações (Ponte, 2005). Para além disso, sem importar se a tarefa constitui um problema ou uma investigação, as tarefas de modelação tornam-se também ferramentas de avaliação de aprendizagens, permitindo ter uma melhor compreensão do estudante, no sentido em que constituem ambientes diagnóstico de dificuldades referentes a aprendizagens e processos de resolução envolvidos pelo estudante no seu processo de modelação (Borromeo Ferri, 2007).

A nível de estrutura, as tarefas de modelação envolvem a realização de certos passos, atividades ou subprocessos que conformam o chamado ciclo de modelação, isto é, propostas *idealizadas* ou teóricas dos passos a seguir para resolver uma tarefa de modelação, sendo que, na realidade, o processo de modelação desenvolvido pelo estudante nem sempre segue estes passos na ordem enfatizada por um determinado ciclo de modelação (Borromeo Ferri, 2018).

De um ponto de vista didático ou pedagógico, este ciclo apresenta quatro fases que se desenvolvem a partir de quatro subprocessos ou atividades de modelação (Borromeo Ferri, 2018), conforme a seguinte figura:

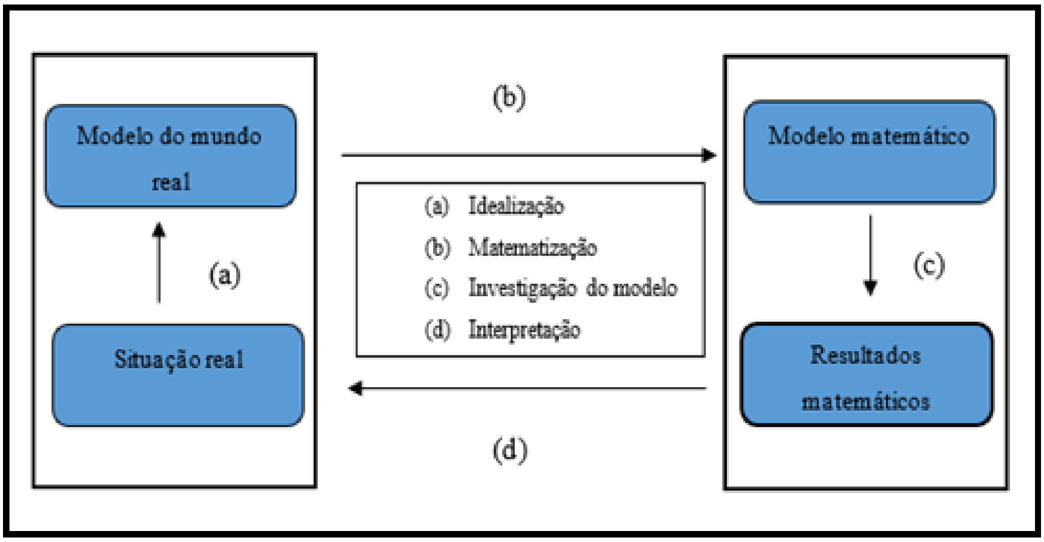


Figura 3.2. Ciclo de modelação numa perspetiva didática (Borromeo Ferri, 2018).

Na figura anterior observam-se as quatro fases (caixas cor azul) e os passos, atividades ou subprocessos (caixa sem cor) a desenvolver-se para ir de uma fase à fase seguinte, de acordo com a perspetiva didática. O estudante começa por idealizar a situação real apresentada na tarefa para construir um modelo real que lhe permita trabalhar a situação, pelo que neste passo o seu conhecimento extra-matemático é fundamental. Posteriormente, deve construir um outro modelo mediante linguagem matemática, o que corresponde a matematizar o modelo real para construir um modelo matemático. A seguir, o modelo deve ser trabalhado (investigado) para gerar resultados matemáticos. Finalmente, estes resultados devem ser interpretados a nível da situação real.

Por outro lado, podemos encontrar o enfoque cognitivo da modelação, cuja proposta apresenta mais fases e subprocessos de modelação, seis fases (figuras geométricas) e seis passos, atividades ou subprocessos de transição (numeradas na margem direita), conforme apresenta Borromeo Ferri (2010) na seguinte figura:

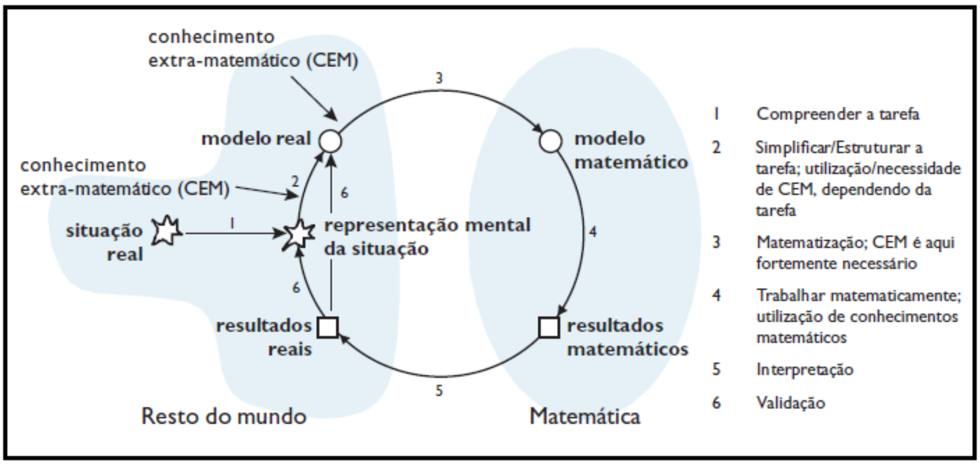


Figura 3.3. Ciclo de modelação numa perspetiva cognitiva (Borromeo Ferri, 2010).

A estrutura esquemática do ciclo de modelação mostrado na Figura 2.5 apresenta duas vantagens em comparação com outros modelos (Blum & Borromeo Ferri, 2009), nomeadamente, porque:

1) O ciclo considera o primeiro passo ou atividade (compreensão da tarefa) como um processo de construção individual, marcando o início do ciclo, e sendo este passo trabalhado uma única vez.
2) Todos os passos do ciclo, em geral, enfatizam atividades que podem constituir dificuldades para o estudante avançar de uma fase à seguinte, pelo que estas atividades se tornam elementos que assinalam competências necessárias para que o estudante tenha sucesso na tarefa de modelação.

Na perspetiva cognitiva, o modelo matemático torna-se um sistema conceptual usado para descrever, interpretar ou fazer predições sobre uma situação real (Czocher, 2018), sendo os esquemas estabelecidos pelo estudante, isto é, "grupo de conhecimentos que contêm informação sobre conceitos base, as relações entre estes conceitos e conhecimento sobre como e quando usar estes conceitos" (Chinnappan, 2010, p. 10), elementos que guiam a construção do modelo e permitem a sua incorporação em novos contextos.

O ciclo de modelação segundo a perspetiva cognitiva começa no cenário nomeado de "Resto do mundo", com a *situação real*, relativa à situação do problema, podendo ser um texto, uma imagem ou uma combinação de ambos. Posteriormente, o indivíduo deve estabelecer uma *representação mental da situação* que lhe permita compreender a situação problema, o que também é chamado por outros autores como modelo da situação (Blum, 2015). Para Borromeo Ferri (2006), esta representação mental "descreve o tipo de processos internos, respetivamente, a imagem mental de um indivíduo após/durante a leitura da tarefa de modelação (complexa) fornecida" (p. 87), pelo que está diretamente ligada à situação real proposta na tarefa, permitindo ao investigador ou professor observar a compreensão que o estudante tem da tarefa. Esta representação pode ser diferente para diferentes indivíduos, dependendo do estilo de pensamento matemático, nomeadamente estilos visuais associados à informação externa não disponibilizada no problema, mas baseada nas experiências do estudante, ou estilos analíticos associados ao tratamento da informação disponibilizada no enunciado a partir de processos matemáticos estabelecidos na aprendizagem do estudante (Borromeo Ferri, 2006).

Seguidamente, o indivíduo deve tomar decisões para estruturar e simplificar o problema, influenciando o seu caminho de seleção da informação para dar um passo em direção a um *modelo real*, este construído geralmente a nível mental. Para autores como Galbraith e Stillman

(2006), a fase da construção da representação mental/situação modelo está implícita na construção do modelo real, pelo que os autores não distinguem entre estas duas fases, mas definem uma fase nomeada de "construção do problema real" cujas atividades de transição para chegar a ela, a partir da situação real, são as atividades associadas à construção da representação mental/situação modelo e do modelo real anteriormente mencionadas.

Após a construção do modelo real, sucede-se a construção do *modelo matemático,* através de representações externas (fórmulas, diagramas, tabelas, etc.) que requerem igualmente conhecimento extra-matemático (CEM), referido como "uma forma útil de indicar essa parte do 'mundo real' mais amplo que é relevante para a questão ou problema particular" (Niss et al., 2007, p. 4). Com a criação do modelo matemático o indivíduo introduz-se no cenário nomeado de "Matemática", momento no qual ele deve utilizar o seu conhecimento matemático prévio (quer propriamente da disciplina em estudo, quer de outras disciplinas) para trabalhar matematicamente sobre o modelo até obter *resultados matemáticos*.

Posteriormente, o indivíduo deve voltar ao "Resto do mundo", neste caso para interpretar os resultados matemáticos a nível da situação real, de modo a obter os *resultados reais*. Estes resultados reais deverão ser validados no contexto da situação real, para finalmente, sendo aceites os resultados, considerar um sétimo passo (não considerado dentro da perspetiva cognitiva de modelação) que consiste em responder às questões apresentadas na tarefa, isto é, *fazer o relatório* (Galbraith & Stillman, 2006). Na atividade de validação, pode acontecer que os resultados se ajustem ou não se ajustem, parcialmente ou totalmente, àquilo que é solicitado na situação real, pelo que será necessário o indivíduo refletir sobre os seus resultados reais e, portanto, sobre começar um novo ciclo de modelação para melhorar o seu modelo matemático (Galbraith & Stillman, 2006).

Investigadores como Borromeo Ferri (2006) refletem sobre alguns resultados da atividade de validação com estudantes do secundário após trabalharem tarefas de modelação. Especificamente a autora identifica dois tipos de validação: validação baseada no conhecimento, em que o estudante valida conscientemente o modelo sobre a situação real; e validação baseada na intuição, em que o estudante valida inconscientemente, sob o sentimento de que seus resultados não podem estar totalmente corretos.

Outros investigadores, como Czocher (2018), já abordam estudos a nível do ensino superior. Para Czocher, "validar um modelo – examinar se (ou até que ponto) é adequado – é essencial para o processo de modelação porque um modelo inadequado é de uso limitado" (p.

137), isto é, a construção do modelo determina quão acertada pode ser a resposta dada pelo modelador à situação problema. Czocher desenvolve um estudo centrado na atividade de validação, nomeadamente focado no papel e caraterização da validação no processo de modelação desenvolvido por estudantes de engenharia, nos Estados Unidos. No estudo, a autora realizou entrevistas áudio e vídeo-gravadas enquanto os estudantes trabalhavam na resolução da tarefa sem limite de tempo. Os resultados do estudo revelam que a atividade de validação é caraterizada por cinco tipos de validações, conforme representado na Figura 3.4 com as setas descontinuas.

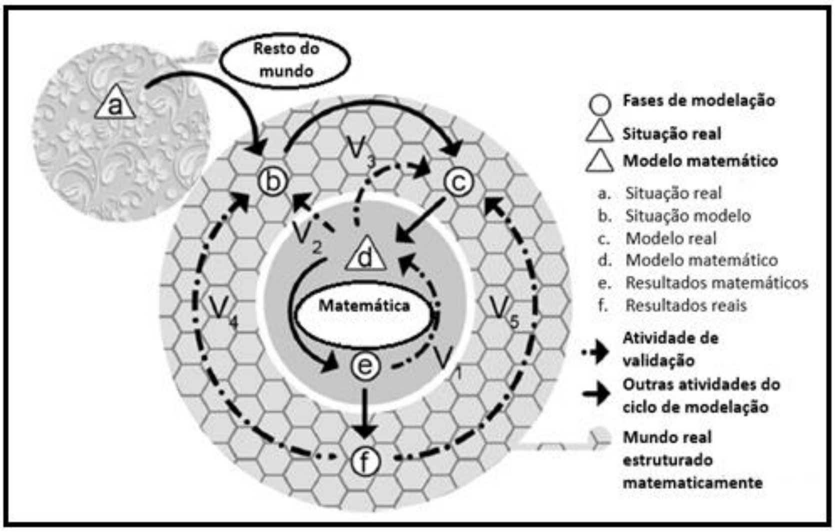


Figura 3.4. Ciclo de modelação numa perspetiva cognitiva: tipologia da atividade de validação. Adaptado de Czocher (2018).

A figura 3.4 mostra uma modificação do ciclo de modelação numa perspetiva cognitiva observado em Borromeo Ferri (2010). Em particular, apresenta o resto do mundo como contendo unicamente a fase da situação real, enquanto as outras fases que pertencem ao resto do mundo no ciclo de Borromeo Ferri (2010) são consideradas para Czocher como parte do que chama de *mundo real estruturado matematicamente*. Cada tipo de validação do estudante observado por Czocher considera um objeto de partida (lado inicial da seta) que o estudante tende a comparar ou revisar com um padrão de validação (lado final da seta), para discernir quão adequado é o seu modelo proposto. Como parte desta tipologia Czocher destaca a atividade de validação como uma atividade que ajuda o estudante a validar produtos finais e monitorizar os seus modelos, podendo a validação ser uma atividade que afeta a construção do modelo matemático a partir da análise do modelo matemático (V_1) ou a partir do alinhamento existente entre representações matemáticas obtidas com a situação real da tarefa ($V_2 - V_5$).

Segundo a perspetiva didática (Figura 3.2), os quatro passos que o modelo propõe estão claramente organizados de forma a que sejam suficientes para o estudante perceber o que é a modelação matemática, enquanto que o modelo que inspira a perspetiva cognitiva (Figura 3.3) pode resultar mais difícil de perceber para o estudante, sendo o seu fim mais adequado a evidenciar processos cognitivos (Borromeo Ferri, 2018). Em qualquer caso, ambos os ciclos de modelação, didático e cognitivo, apresentam fases que fazem parte do "resto do mundo" ou "realidade" e fases que fazem parte do "mundo matemático" ou "matemática", podendo o estudante deslocar-se várias vezes entre o "mundo matemático" e "o resto do mundo" quando encorajado a resolver a tarefa de modelação.

Lesh e Lehrer (2003) fazem referência à importância de o estudante transitar entre uma e outra fase do ciclo de modelação para exercitar processos de pensamento matemático, pois

> À medida que os estudantes atravessam uma série de ciclos de modelação durante uma tarefa de modelação, o que se espera é observar o surgimento de uma série de caminhos de pensamento sistematicamente diferentes, referentes à natureza dos objetos, relações, operações, e padrões ou regularidades referentes à resolução do problema. (p. 112)

Neste sentido, conforme os estudantes passam de uma a outra fase no ciclo de modelação, eles vão descrevendo uma rota de modelação, pelo que diferentes ações desenvolvidas por diferentes estudantes determinam diferentes caminhos ou trajetórias de resolução para dar resposta a uma situação problema, o que Borromeo Ferri (2007, 2018) designa como rotas de modelação. Esta autora, numa das comunicações apresentadas no grupo de modelação e aplicações matemáticas do CERME 5, analisa segundo a perspetiva cognitiva os processos de modelação desenvolvidos por dois estudantes de 10.º ano ao trabalharem numa tarefa no contexto de estimação da altura de montes de fardos de palha, proporcionando no seu estudo uma definição de rota de modelação (*modelling routes*):

> Uma rota de modelação é o processo individual de modelação a nível interno ou externo. O indivíduo começa este processo durante uma certa fase, de acordo com as suas preferências, e então atravessa diferentes fases várias vezes ou uma vez só, focando-se numa certa fase ou ignorando outras. (p. 265)

Desta definição de rota de modelação pode observar-se que o processo de modelação não é linear, mas formado de diferentes processos individuais que cada estudante poderá seguir de maneira iterativa e idiossincrática. Aliás, o modelador pode decidir repetir a sua transição por fases do ciclo de modelação já transitadas (caso veja que o seu modelo precisa ser melhorado), retroceder para fases anteriores, ou pular algumas das fases (Czocher, 2018; Galbraith & Stillman, 2006). Assim, do ponto de vista educativo, uma rota de modelação permite evidenciar as direções que segue um determinado estudante, desde o começo da leitura da situação problema apresentada na tarefa até reportar as suas respostas finais relativas às questões apresentadas na situação problema.

As rotas de modelação estão influenciadas por três fatores: 1) estilos de pensamento matemático (visual, analítico, integrado), 2) experiências e conhecimento extra-matemático e 3) competências matemáticas de que o estudante dispõe. Por estilos de pensamento matemático entende-se "o modo como uma pessoa gosta de compreender e aprender matemática, e não à sua capacidade de compreender a matemática" (Borromeo Ferri, 2018, p. 34).

No que se refere aos estilos de pensamento, alguns estudantes gostam mais de aprender a partir de dados numéricos e procedimentos algébricos, sendo o seu estilo de pensamento analítico, ao passo que aquelas pessoas que gostam de aprender e têm mais facilidade para aprender a partir de imagens, gráficos ou qualquer representação visual, terão um estilo de pensamento matemático visual. Nos resultados obtidos por Borromeo Ferri (2007), a autora identifica que um estudante com estilo de pensamento analítico comummente permanece a trabalhar e dar respostas dentro do contexto da própria matemática, enquanto que um estudante com estilo de pensamento visual tende a deslocar-se entre a realidade e a matemática que conhece, influenciado em parte por suas experiências vividas.

O conhecimento extra-matemático (CEM) também se torna um fator de influência nas rotas de modelação, sendo presumivelmente um conhecimento diferente para cada estudante, segundo as suas experiências pessoais vividas. Esse conhecimento extra-matemático é vital naqueles casos em que existe informação que não é proporcionada ao estudante, situação em que o estudante deverá pesquisar dita informação ou utilizar o seu conhecimento extra-matemático para aceder à mesma (Borromeo Ferri, 2018).

No que diz respeito às competências matemáticas de que o estudante dispõe, as competências de modelação constituem a base para o trabalho em tarefas de modelação, sendo capacidades de alta exigência cognitiva que contribuem para a aprendizagem do estudante e para exercitar sua prática matemática (Blum, 2015). Embora se espere que o estudante desenvolva estas competências de modelação quando trabalha numa tarefa, deve considerar-se que nem sempre é assim, pois, por exemplo, Borromeo Ferri (2006) menciona que a atividade de validação poucas vezes é atingida pela maior parte dos indivíduos, sendo que para muitos "validar significa *calcular* um resultado através do modelo matemático. Eles não conectam os resultados com a situação, e consequentemente com a realidade que é dada na situação" (p. 93), razão que justifica umas das causas pelas quais as tarefas de modelação podem tornar-se difíceis para o indivíduo, sobretudo se não tiver experiência neste tipo de tarefa.

3.3 Competências de modelação matemática

Na literatura podemos encontrar diferentes definições para o termo competência de modelação matemática (Blomhøj & Jensen, 2003; Blum, 2015; Maaß, 2006; Niss, 2003; Niss et al., 2007), sendo discutido nos últimos anos como um tema recorrente em países do noroeste da europa (Blomhøj & Jensen, 2007), onde são mencionados os termos "mathematical modelling competence" e "mathematical modelling competency".

Autores como Blomhøj e Jensen (2003) aludem ao termo "mathematical modelling competence" para definir uma competência de modelação matemática como "ser capaz, de forma autónoma e perspicaz, de levar a cabo todos os aspetos de um processo de modelação matemática dentro de um certo contexto" (p. 126). Os autores salientam que esta definição considera três características importantes: a necessidade de disposição para agir ante uma situação; o aspeto de estar envolvido com um contexto; e o carácter subjetivo e socio-cultural associado à competência de cada pessoa.

Blomhøj e Jensen (2003) mencionam a existência de duas posições extremas que podem ser encontradas na prática em relação a adquirir "mathematical modelling competence". A primeira posição (aproximação holística) refere que o processo de modelação do estudante deve concentrar-se em desenvolver subcompetências de modelação necessárias para que o estudante atravesse o ciclo ideal de modelação por completo. A segunda posição (aproximação atomística) propõe que o processo de modelação do estudante deve concentrar-se em alcançar subcompetências que lhe permitam fundamentalmente realizar os passos da matematização e análise do modelo. Para Blomhøj e Jensen deve existir um equilíbrio entre a aproximação holística e atomística quando o desejado é desenvolver "mathematical modelling competence". Por um lado, a posição holística exige muito tempo da parte do estudante a trabalhar sobre a situação real, deixando pouco tempo para a matematização e análise do modelo. Por outro, a aproximação atomística simplifica muito o processo de modelação do estudante, limitando o fortalecimento de outras competências que este pode ser capaz de desenvolver.

Na mesma linha de competências de modelação de Blomhøj e Jensen, autores como Niss (2003) aludem ao termo "mathematical competence", referido como "capacidade de compreender, julgar, fazer e usar a matemática em uma variedade de contextos e situações intra e extra-matemáticos nos quais a matemática desempenha ou poderá desempenhar um papel"

(p. 119); consequentemente, “mathematical modelling competence” seria a capacidade de compreender, julgar, fazer e usar processos de modelação em diversos contextos ou situações. Ambas as definições, de Blomhøj e Jensen (2003) e de Niss (2003), referem-se ao termo “mathematical modelling competence” como uma competência de modelação matemática, em termos gerais, de tal forma que “mathematical modelling competence” refere-se a ser capaz de trabalhar o processo de modelação matemática numa determinada situação contextualizada, não sendo necessário percorrer todos os passos de um ciclo ideal de modelação matemática, mas sim lograr o objetivo de concretizar a tarefa.

Por outro lado, aludindo ao termo “mathematical modelling competency”, Niss et al. (2007) definem-no como:

> A capacidade de identificar perguntas relevantes, variáveis e relações numa dada situação do mundo real, transportá-las para dentro da matemática e interpretar e validar a solução do problema matemático resultante em relação à situação dada, assim como também a capacidade para analisar ou comparar modelos dados, investigando as suposições que se fizeram, revendo propriedades de determinado modelo e o alcance do modelo dado. (p. 12)

Neste sentido, o termo “mathematical modelling competency” refere-se às capacidades de que o indivíduo precisa para realizar as diferentes atividades ou subprocessos que envolvem o processo de modelação, capacidades que às vezes não são suficientes para que o estudante trabalhe com sucesso em problemas do mundo real, sendo necessário a utilização de outras “competencies”, tais como representar objetos matemáticos, argumentar ou justificar as simplificações, bem como competências sociais ligadas ao trabalho cooperativo, etc. (Niss et al., 2007).

Maaß (2006) também se refere às competências de modelação no sentido de Niss et al. (2007), e acrescenta que as “modelling competencies” podem ser classificadas em cinco grupos de subcompetências: 1) subcompetências para desenvolver cada subprocesso individual do ciclo de modelação; 2) subcompetências para estruturar problemas do mundo real e trabalhar com um sentido para uma solução; 3) subcompetências de modelação cognitivas; 4) subcompetências para argumentar em relação ao processos de modelação; e 5) subcompetências para ver as possibilidades matemáticas de solução para um problema do mundo real e considerar ditas possibilidades como positivas ou negativas.

No que se refere ao primeiro grupo de subcompetências, Maaß (2006) menciona que “existe uma forte conexão entre a conceção de processo de modelação matemática e competências de modelação” (p. 114). Para esta autora, cada subprocesso de modelação associado ao ciclo de modelação, segundo a perspetiva cognitiva, tem associado competências de modelação de que o estudante precisa para ter sucesso no respetivo subprocesso cognitivo. Esta relação entre subcompetências e subprocessos observa-se na seguinte tabela:

Tabela 3.1. Subcompetências para desenvolver cada subprocesso do ciclo de modelação (Maaß, 2006, p. 116-117).

Competências de modelação	**Competências para…**	**Subprocessos cognitivos**
Para compreender o problema real e estabelecer um modelo baseado na realidade	Fazer suposições sobre o problema e simplificar a situação; reconhecer quantidades que influenciam a situação, identificar variáveis-chave; construir relações entre as variáveis; procurar informações disponíveis e fazer a diferenciação entre informações relevantes e irrelevantes.	(1) Compreender a tarefa (2) Simplificar/ estruturar a tarefa
Para criar um modelo matemático a partir do modelo real	Matematizar quantidades relevantes e suas relações; simplificar as quantidades relevantes e suas relações, se necessário, e reduzir seu número e complexidade; escolher notações matemáticas apropriadas e representar situações graficamente.	(3) Matematizar o modelo
Para resolver questões matemáticas dentro deste modelo matemático	Usar estratégias heurísticas, como a divisão do problema em problemas parciais, estabelecendo relações com problemas semelhantes ou análogos, reformulando o problema, visualizando o problema de uma forma diferente, variando as quantidades ou os dados disponíveis, etc; usar o conhecimento matemático para resolver o problema.	(4) Trabalhar matematicamente no modelo
Para interpretar resultados matemáticos em uma situação real	Interpretar resultados matemáticos em contextos extra-matemáticos; generalizar soluções que foram desenvolvidas para uma situação especial; visualizar soluções para um problema usando linguagem matemática apropriada e/ou para se comunicar sobre as soluções.	(5) Interpretar resultados matemáticos
Para validar a solução	Verificar criticamente e refletir sobre as soluções encontradas; revisar algumas partes do modelo ou passar novamente pelo processo de modelagem se as soluções não se ajustarem à situação; refletir sobre outras maneiras de resolver o problema ou se as soluções podem ser desenvolvidas de maneira diferente; geralmente questionam o modelo.	(6) Validar resultados dentro da situação real

As competências anteriores, para além de constituírem capacidades que devem ser desenvolvidas para se obter sucesso no processo de modelação, podem ser vistas como critérios para avaliar o desenvolvimento do estudante na resolução de tarefas de modelação. Jensen (2007) refere que no momento de avaliar se alguém tem “mathematical modelling competency”, devem ser avaliados três aspetos: 1) o grau de abrangência, referente às partes (subprocessos) do processo de modelação em que o estudante consegue trabalhar e o nível de reflexão feito em cada uma dessas partes; 2) o raio de ação, referente ao domínio de situações em que consegue desenvolver o processo de modelação; e 3) o nível técnico, referente aos conceitos matemáticos e processos associados a esses conceitos que o estudante é capaz de mobilizar.

Considerando os dois termos associados à competência de modelação matemática, percebemos que os termos "mathematical modelling competency" e "mathematical modelling competence" estão claramente ligados, sendo que se quiséssemos analisar a distinção entre ambos diríamos que "mathematical modelling competence" é gerada a partir de um conjunto de "mathematical modelling competencies" (Jensen, 2007) ou, dito doutra forma, o desenvolvimento de "modelling competency" contribui para o desenvolvimento de "mathematical competence" (Niss et al., 2007).

3.4 Potencialidades da modelação matemática na sala de aula

A modelação matemática pode ser utilizada em diferentes campos do conhecimento, entre os quais a Educação Matemática. Através da modelação matemática o estudante é encorajado a trabalhar em questões de alto nível cognitivo que comummente não surgem em aulas tradicionais, mobilizando a aprendizagem de conceitos e facilitando a criação de conexões entre conceitos matemáticos e elementos associados à tarefa, à medida que o modelo matemático é trabalhado (Borromeo Ferri, 2010; Chinnappan, 2010). A alta exigência cognitiva ajuda a que o estudante desenvolva novos hábitos de trabalho que o levem a desenvolver um espírito crítico em situações quotidianas do seu dia a dia (Viseu & Menezes, 2014), e à construção do seu próprio conhecimento matemático (Rosa & Orei, 2012). Nessa construção do conhecimento, a modelação matemática também pode tirar partido da utilização da tecnologia na sala de aula, contribuindo para uma aproximação à educação STEM (Niss et al., 2007).

Para Barbosa (2006) a modelação matemática funciona como um ambiente de aprendizagem escolar onde o estudante é convidado a explorar e investigar situações da vida real, fazendo uso de conhecimentos matemáticos e contribuindo para o desenvolvimento do seu pensamento crítico. Neste sentido, a modelação matemática requer que o estudante analise criticamente um modelo matemático, em vez de se limitar a modelos já construídos previamente em sala de aula.

A modelação matemática também ajuda a que o estudante dê significado aos conceitos matemáticos trabalhados em sala de aula e se veja motivado a querer trabalhar com conceitos matemáticos quando convidado a ver a matemática aplicada a situações específicas da sua vida real (Cárcamo et al., 2017; Flóres & Yemail, 2017). Nesta linha, Flóres e Yemail (2017) defendem que:

> As principais vantagens do processo de modelação estão em permitir que os estudantes tenham um maior grau de compreensão dos conteúdos desenvolvidos na área da Matemática, para além de aumentar o seu interesse por esta quando encontram a relação com a realidade no momento de aplicar os modelos matemáticos construídos para a solução de problemas. (p. 32)

Essa ligação da matemática com a realidade, que a modelação matemática permite, ajuda a que o estudante trabalhe as dificuldades associadas ao formalismo dos conceitos matemáticos, porque o obriga a procurar conceitos matemáticos que lhe permitam trabalhar sobre uma certa realidade (Niss et al., 2007). Portanto, a modelação matemática ajuda o estudante a consolidar conceitos ainda não compreendidos totalmente ou, mesmo se compreendidos, ajuda-o a ver como se aplicam os conceitos em contextos reais. Blum e Borromeo Ferri (2009) também defendem o contributo para a aprendizagem de conceitos, e acrescentam a promoção de competências matemáticas (necessárias para a criação de modelos matemáticos) como outro aspeto importante da modelação matemática.

Blum (2015) destaca quatro razões primordiais para justificar o trabalho com tarefas de modelação, nomeadamente, 1) o *aspeto pragmático*, porque as tarefas de modelação ajudam a compreender situações do mundo real, ao trabalhar exemplos de modelação; 2) o *aspeto formativo*, pois estas tarefas fomentam competências que se trabalham no processo de modelação; 3) o *aspeto cultural*, referido à importância deste tipo de tarefa para adquirir conhecimento da matemática como elemento que faz parte de vários contextos; e 4) o *aspeto psicológico*, associado à motivação do estudante quando trabalha matemática em contextos da vida quotidiana em que podem ser aplicados os conceitos aprendidos. Estes quatro aspetos afastam-se drasticamente da aula tradicional de Matemática, baseada comummente em exercícios dentro da Matemática Pura. Em contrapartida, as tarefas de modelação põem em ação o aspeto pragmático para motivar o estudante e mostrar a utilidade da matemática e, ao mesmo tempo, fomentam competências como a simplificação de situações reais e a validação de resultados matemáticos, dificilmente trabalhadas através de exercícios em contextos estritamente matemáticos.

A modelação matemática pode também desempenhar várias funções no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente, introduzir ou consolidar conceitos, ensinar o processo de modelação matemática (Kaiser & Sriraman, 2006), promover metodologias inovadoras de aprendizagem onde se requerem modelos matemáticos, promover processos cognitivos necessários para a vida quotidiana (Blum, 2015; Blum & Borromeo Ferri, 2009), oferecer ao estudante distintas representações de um determinado conceito matemático e favorecer a leitura rigorosa e a comunicação de ideias e estratégias de resolução de problemas (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

3.5 Aprendizagem da álgebra linear através de modelação matemática

Na literatura encontramos algumas investigações empíricas que evidenciam um pouco daquilo que se tem feito, a nível do ensino superior, na disciplina de Álgebra Linear através de ambientes de modelação matemática. Podemos começar mencionando o estudo de Possani et al. (2010), autores que apresentam uma proposta de ensino utilizando a perspetiva *models and modelling*, isto é, recorrendo a atividades de *modelling-elliciting* (Lesh, 2012). Estes autores utilizam uma tarefa de modelação no contexto do fluxo de trânsito para trabalhar o tópico de sistemas de equações lineares (SEL) com estudantes universitários de Engenharia, Ciências Sociais e Economia. Na tarefa é disponibilizado um esquema com sentidos e quantidades de fluxo de trânsito médio, por hora, em vários sectores de uma cidade, tendo os estudantes que encontrar os possíveis valores de fluxo não disponibilizados no esquema, para predizer o comportamento do trânsito pelas diferentes faixas de rodagem. Os resultados do estudo de Possani et al. (2010) revelam que a situação apresentada na tarefa é significativa e de alta exigência cognitiva para o estudante, em comparação com tarefas tradicionais trabalhadas na aula de Álgebra Linear sob a configuração de exercícios práticos. Para além disso, os resultados do estudo revelam o desenvolvimento de espaços de discussão em que os estudantes puderam refletir sobre os conceitos de SEL, matriz aumentada, conjunto solução de um SEL e matriz inversa, com base nos quais foram construídos e utilizados modelos matemáticos para dar resposta à situação problema do fluxo de trânsito.

Investigando outros conceitos, Trigueros e Possani (2013) realizam um estudo com estudantes universitários mexicanos de diferentes cursos (Engenharia, Economia, Ciências Atuariais e Matemática Pura) com o objetivo de introduzir os conceitos de combinação linear, independência linear e conceitos associados a espaços vetoriais. O contexto apresentado na tarefa de modelação teve por base o tópico da procura na produção de três fábricas diferentes geridas por uma empresa, apresentando tabelas com valores de procura interna e externa de produtos para as três fábricas. Os autores utilizam a modelação matemática em complemento com a teoria APOS (Action-Process-Object-Schema), tendo identificado ciclos que os estudantes realizam no trabalho de modelação. Os resultados mostram que os estudantes revelam dificuldades iniciais para abordar o problema, mas, conforme o vão explorando, com representações gráficas e depois algébricas, conseguem responder às questões levantadas na tarefa, alcançando um reconhecimento dos conceitos de combinação linear, dependência e independência linear, com a utilização dos dados apresentados na situação real.

Também relativamente a estudos sobre espaços vetoriais, Cárcamo et al. (2017) fazem uma proposta de ensino com modelação matemática para introduzir os conceitos de conjunto gerador e espaço vetorial gerado. O estudo, realizado em Espanha com estudantes de Engenharia, utiliza um referencial teórico baseado na trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995) e nos modelos heurísticos emergentes (Gravemeijer, 2007) para desenharem uma tarefa de modelação matemática relativa à criação de senhas utilizadas nas páginas web.

A trajetória hipotética de aprendizagem considera três componentes: o objetivo de aprendizagem a atingir no currículo, as atividades de aprendizagem e um caminho de aprendizagem que propõe uma previsão do caminho de resolução a seguir pelo estudante na atividade. No que respeita aos modelos heurísticos, a tarefa é abordada em quatro partes, referentes ao desenvolvimento dos níveis de atividade propostos por Gravemeijer (2007), nomeadamente, nível situacional, nível referencial, nível general e nível formal. Os modelos heurísticos emergentes agem como intermediários de conhecimento, permitindo criar uma sequência de aprendizagem onde o estudante utiliza a matemática que sabe para a construção de processos de "modelo de" (pensamento informal), orientados para construir um "modelo para" (pensamento mais formal). Neste sentido, os modelos emergentes heurísticos procuram que o estudante faça relações entre o modelo construído de uma situação real e o modelo matemático formal associado à situação real, incluindo identificar situações várias onde pode ser utilizado esse mesmo modelo. Os resultados do estudo de Cárcamo et al. (2017) evidenciaram que a proposta didática dos autores ajudou à construção dos conceitos de conjunto gerador e espaço vetorial gerado e, ao mesmo tempo, permitiu evoluir de um nível informal para um nível formal dos conceitos tratados.

No que se refere ao tópico de transformações lineares, Trigueros e Bianchini (2016) apresentam uma proposta didática trabalhada com dois grupos de estudantes, um grupo brasileiro e um grupo mexicano, de cursos de Engenharia e Matemática Aplicada. A tarefa, construída no marco da modelação matemática com complementação da teoria APOS, procurou promover a compreensão do conceito de transformação linear, relacionando a representação geométrica com a representação algébrica associada a certa transformação linear. Os autores utilizam um contexto de modelação geométrico, onde utilizam um desenho de um ser humano em cima de uma bicicleta, localizado em diferentes figuras mediante diferentes posições que evidenciam transformações geométricas. Nesta tarefa os estudantes são convidados a encontrar modelos que descrevam as diferentes transformações que acontecem de uma figura para outra. Os resultados do estudo de Trigueros e Bianchini mostram que ambos os grupos de estudantes utilizam vetores e tabelas numéricas para tentar encontrar o critério algébrico associado a uma transformação, facilitando a sua exploração das transformações apresentadas, de cisalhamento e translação, mas não da transformação de rotação. Para além disso, o contexto da tarefa levou os estudantes a considerar a tarefa interessante e importante para a compreensão do conceito de transformação linear, permitindo-lhes refletir sobre as propriedades geométricas associadas às diferentes transformações lineares e identificar se uma determinada transformação era ou não transformação linear, em particular, identificar que as translações não são transformações lineares.

3.6 Dificuldades no trabalho com modelação matemática na disciplina de Álgebra Linear

Já vimos, a partir dos estudos anteriores, que o trabalho apoiado em tarefas de modelação matemática torna a aula de Matemática, e de Álgebra Linear em particular, um ambiente de aprendizagem desafiador e motivador. No entanto, o carácter desafiante das tarefas traz consigo, em muitas ocasiões, a presença de dificuldades para o estudante. Esta presença de dificuldades é rapidamente observável sobretudo quando o estudante nunca trabalhou com ambientes de modelação matemática, pois não está familiarizado com processos, como formular hipóteses, explorar conceitos, interpretar informação, por si mesmo, e validar soluções matemáticas (Sokolowski, 2015). Esta falta de familiaridade e experiência repercute-se no tempo gasto na tarefa trabalhada, pois tipicamente o estudante precisa de mais tempo para a resolução desse tipo de tarefa do que aquele que habitualmente gasta na resolução de outras tarefas que não envolvem modelação matemática (Oliveira, 2001).

O alto nível de exigência cognitiva das tarefas de modelação, o desconhecimento do contexto da realidade que envolve a tarefa, bem como pôr em prática competências que não são habitualmente trabalhadas na sala de aula representam também dificuldades comuns que o estudante evidencia ao trabalhar em tarefas de modelação (Blum & Borromeo Ferri, 2009).

Para Blum (2015), é normal muitos estudantes apresentarem dificuldades logo na primeira atividade ou passo do ciclo de modelação matemática (compreender a situação do problema), resistindo a fazerem suposições (simplificar e estruturar), e a maior parte dos estudantes tem dificuldade para verificar se as suas soluções matemáticas fazem sentido no contexto do problema (validação). Nesta mesma linha, Viseu e Menezes (2014) mencionam que "visto que na construção de um modelo matemático é necessário ter em conta vários aspetos simultaneamente, aumenta a complexidade na compreensão da experiência e na interpretação de resultados" (p. 356). Por seu lado, Galbraith e Stillman (2006) afirmam que a atividade de matematizar constitui umas das transições mais difíceis que o estudante deve enfrentar ao realizar tarefas de modelação.

A nível do ensino superior, Klymchuk e Zverkova (2001) realizam um questionário a estudantes de primeiro e segundo ano universitário que frequentam disciplinas de matemática como parte do seu programa de curso. O questionário foi respondido por estudantes de 14 universidades diferentes em 9 países (Reino Unido, Nova Zelândia, Austrália, Rússia, Ucrânia, Finlândia, França, África do Sul e Espanha), procurando perceber o que pensam os estudantes sobre a modelação matemática e identificar os passos do ciclo de modelação em que apresentam maiores dificuldades. Os resultados do estudo mostram que 75% dos estudantes manifestam dificuldade para fazer conexões entre o enunciado do problema e um modelo matemático que servirá para resolver o mesmo, isto é, dificuldades em compreender e estruturar a tarefa. Como consequência, apresentam também dificuldades para formular um modelo matemático, aliás, trabalhar o processo de matematização (Blum & Leiß, 2007), dificuldade que pode estar associada a que os estudantes estejam habituados a resolver tarefas onde prevalece o cálculo e a realização de procedimentos, sem reflexão e atribuição de significado.

Outras dificuldades que se poderiam evidenciar no processo de modelação do estudante universitário, associadas não necessariamente com as atividades de transição entre etapas do ciclo de modelação, têm a ver com: o facto de o modelador ser incapaz de notar que algum dos seus procedimentos está errado, embora saiba executá-lo bem; possa encontrar erros onde não existem; possa dar respostas inadequadas; e possa mudar o problema para adaptá-lo a seu conhecimento (Czocher, 2018).

Dificuldades relativas a tópicos específicos de álgebra linear podem ser encontradas, por exemplo, no estudo de Trigueros e Possani (2013), no contexto de produção de fábricas geridas por uma empresa. Embora já tenham sido mencionados alguns resultados positivos da implementação desta tarefa de modelação matemática, aplicada por Trigueros e Possani, os resultados também evidenciaram que, mesmo para os estudantes que tinham experiência com o trabalho em SEL, foi-lhes difícil compreender o enunciado da tarefa, não sabendo inicialmente que dados utilizar e apresentando dificuldade para identificar um modelo real que lhes permitissem a criação do modelo matemático, uma evidência que confirma os resultados do questionário de Klymchuk e Zverkova (2001). Para além disso, a maior parte dos grupos de estudantes desse estudo, na sua tentativa de criar um SEL com combinações lineares associadas às produções das fábricas, não considera explicitamente o significado das variáveis utilizadas no modelo matemático, sendo necessária a intervenção do professor para guiar a descrição destas variáveis.

O estudo de Possani et al. (2010) também revelou dificuldades apresentadas pelos estudantes ao trabalharem numa tarefa de fluxo de tráfego automóvel, incluindo dificuldades para utilizarem a informação do enunciado para a formulação do modelo, conforme identificado em Trigueros e Possani (2013). Outras dificuldades próprias da natureza da tarefa, como identificar variáveis relevantes para utilizar como parâmetros e expressar as soluções matemáticas como funções dependentes de parâmetros, foram também identificadas pelos autores na tarefa de fluxo de tráfego, o que aponta dificuldades para estruturar e simplificar a situação modelo e trabalhar matematicamente sobre o modelo matemático, respetivamente.

Por seu lado, a tarefa de criação de senhas, proposta por Cárcamo et al. (2017), revelou dificuldades para alguns estudantes, principalmente no momento de expressarem o espaço vetorial gerado em notação matemática, observando-se estudantes que identificam conjuntos geradores de um determinado subespaço V, mas escrevem a sua combinação linear como se o resultado fosse um vetor de outro subespaço vetorial. A título de exemplo, identificam-se estudantes que escrevem em notação matemática um vetor de IR^2 como resultado de uma combinação linear de vetores de IR^4, associando esta combinação linear a um modelo matemático de senhas formadas por vetores com quatro coordenadas. Esta dificuldade evidencia a existência de estudantes que não reconhecem a natureza conceptual de uma combinação linear. Para além disso, o estudo mostra a presença de dificuldades associadas a processos de cálculo desenvolvidos pelo estudante, nomeadamente, saber como encontrar um conjunto gerador para um subespaço V.

No caso da unidade de transformações lineares, o estudo de Trigueros e Bianchini (2016) revelou que os estudantes brasileiros apresentaram dificuldades inicialmente para reconhecer uma transformação linear como uma função, e ambos os grupos de estudantes (brasileiros e mexicanos) apresentaram problemas na escrita em linguagem matemática quando tentaram escrever relações entre objetos matemáticos de diferentes naturezas. Por exemplo, debateram-se com a escrita da expressão de uma transformação linear e com o espaço vetorial em que se encontra o conjunto imagem dessa transformação. Para além disso, a maior parte dos estudantes de ambos os grupos apresentou dificuldades para encontrar a expressão de uma transformação linear a partir das figuras e tabelas de valores efetuadas, resultado que pode estar associado à utilização das razões trigonométricas que não são observáveis diretamente a partir de tabelas de valores.

Desta forma, a literatura permite constatar que a modelação matemática ajuda na aprendizagem de conceitos matemáticos de álgebra linear, promovendo o uso de processos cognitivos mais exigentes em relação a outras tarefas, mas isso abre também a possibilidade para a presença de dificuldades do estudante ao trabalhar na tarefa, principalmente quando não está habituado a considerar situações reais, bem como a utilizar outros recursos ou a vivenciar outras metodologias de trabalho na sala de aula. Na secção seguinte, aborda-se o papel da tecnologia, e do *software* em particular, no trabalho com tarefas de modelação, considerando alguns estudos focados na aprendizagem da álgebra linear.

3.7 A tecnologia como recurso no trabalho com tarefas de modelação matemática

Autores como Galbraith e Stillman (2006) salientam que a tecnologia deve ser incluída no trabalho de tarefas de modelação sempre que seja possível, ajudando no tratamento dos dados. Para o ensino e aprendizagem da Matemática com a integração de modelação matemática torna-se apropriado o recurso ao computador, permitindo modelar problemas mais complexos, onde a construção do modelo pode não estar ao alcance do estudante de outra forma (Matos, 1995). Neste sentido, Greefrath (2011) defende que

> A crescente introdução de tecnologias suportadas por CAS (Sistema algébrico computacional) nas principais salas de aula de matemática evidencia que há uma necessidade de entender as implicações dessa tecnologia para todos os aspetos da prática de sala de aula, incluindo nas aplicações e modelação matemática. (Greefrath, 2011, p. 306)

Neste sentido, Campbell (2001) enfatiza que é necessário investigar o uso do computador e da tecnologia, em geral, para perceber, avaliar, extrair características e agir sobre os modelos matemáticos que a tecnologia permite manipular. Matos (1995) utiliza o termo "modelação apoiada por computador" para se referir ao uso de representações formais de uma determinada situação real proporcionada pelos computadores. O autor apresenta algumas vantagens de utilizar esta abordagem de modelação apoiada pelo computador na Educação Matemática, entre as quais se destacam:

1) Obriga o estudante a conhecer a situação que está a modelar com recurso ao computador.

2) A construção do modelo através do uso do computador permite que o estudante se dedique a avaliá-lo, reconstruindo-o após essa avaliação se for necessário.
3) O estudante tem acesso a diferentes representações de uma situação, podendo observar diferentes características da mesma com cada uma das representações.

Siller e Greefrath (2010) salientam que a modelação apoiada pela tecnologia ajuda a simplificar os procedimentos que o estudante deve desenvolver no processo de modelação matemática, tais como: visualizar processos, explorar, organizar ou avaliar uma grande quantidade de dados. Para além disso, os autores apresentam uma extensão do ciclo de modelação para incorporar a componente tecnológica (Figura 3.5), mencionando que "a integração de tecnologia no ciclo de modelação pode ser útil, levando a uma aplicação intensiva da tecnologia na educação" (p. 2137). Esta mesma extensão é também apresentada por Greefrath et al. (2018) na Figura 3.6, utilizando como base o ciclo de modelação de Blum e Borromeo Ferri (2009) para incorporar a componente tecnológica.

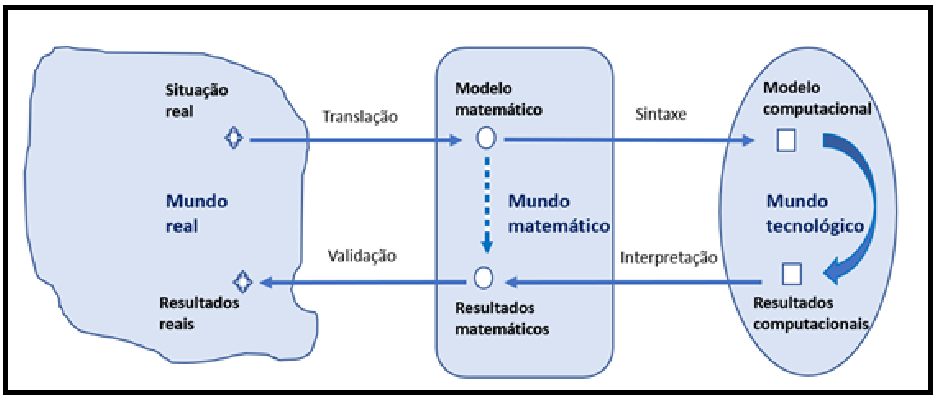


Figura 3.5. Extensão do ciclo de modelação incorporando a tecnologia, proposto por Siller e Greefrath (2010).

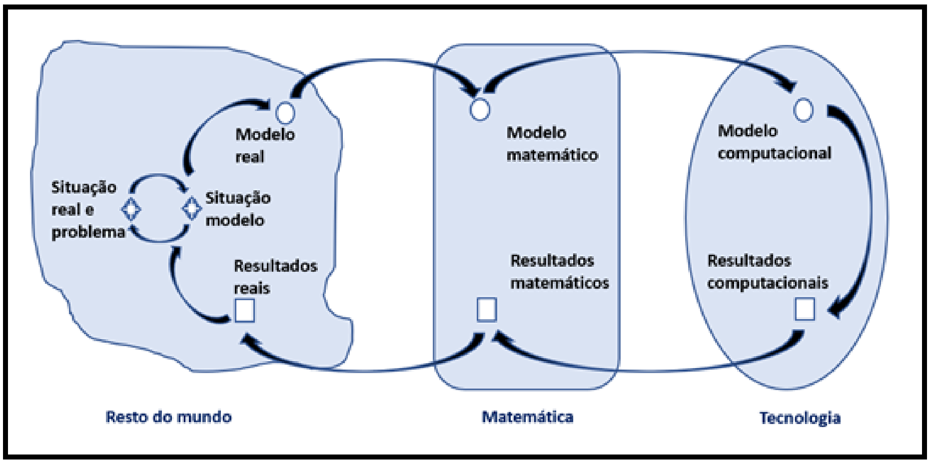


Figura 3.6. Extensão do ciclo de modelação incorporando a tecnologia, proposto por Greefrath et al. (2018).

Para Siller e Greefrath (2010), a incorporação da tecnologia mediante este modelo permite observar que a construção do modelo matemático depende do conhecimento matemático (*Matemática*) e das opções tecnológicas disponíveis para o desenvolvimento de tal modelo (*Tecnologia*), tendo a tecnologia um papel fundamental na construção daqueles modelos que não podem ser construídos sem o recurso da tecnologia. No entanto, deve-se considerar a limitação de que o acesso a este "mundo tecnológico" requer do estudante o conhecimento e habilidades para utilizar as ferramentas tecnológicas.

Com o objetivo de definir, testar e redefinir um marco teórico para identificar possíveis bloqueios que pode evidenciar o estudante ao transitar pelo ciclo *ideal* de modelação, Galbraith e Stillman (2006) trabalham tarefas de modelação com utilização de tecnologia, com estudantes de secundário. Os autores definem aspetos que o estudante deve desenvolver para ter sucesso ao transitar entre etapas sucessivas do ciclo de modelação, aspetos que podem ser considerados como bloqueios em caso de o indivíduo não contar com competências suficientes. A diferença que se encontra na proposta de Galbraith e Stillman (2006) relativamente à integração da tecnologia, comparativamente com as anteriores, é que os últimos não fazem distinção entre o modelo matemático e o modelo computacional, considerando o mundo tecnológico como parte do mundo matemático e, portanto, a utilização da tecnologia como parte do trabalho matemático sobre o modelo matemático.

Entre os estudos empíricos em que se utiliza a modelação matemática apoiada por tecnologia encontramos o estudo de Greefrath et al. (2018), autores que trabalham com o *GeoGebra* para observar, a partir de um estudo com 709 estudantes de secundário, se a sua utilização favorece o desenvolvimento da matematização, que é um sub-processo presente no ciclo de modelação matemática. No estudo, foi utilizado um grupo de controlo, a trabalhar sem tecnologia, e um grupo experimental, a trabalhar com o *GeoGebra*, obtendo-se como resultados que ambos os grupos evidenciaram melhorias no desenvolvimento da matematização após trabalharem com tarefas de modelação, não havendo diferenças significativas entre ambos os grupos. Nas conclusões, os autores mencionam que tecnologias, como o *GeoGebra*, são adequadas para desenvolver competências, tais como a matematização de modelos matemáticos, mas que deve ser necessário propor tarefas onde seja indispensável o uso da tecnologia para a resolução da tarefa, de modo que se possa olhar para as vantagens da tecnologia em relação a tarefas ordinárias sem utilização de tecnologia.

Noutro estudo, Geiger (2017) apresenta um exemplo de uma tarefa de modelação (Algal Bloom Problem) como parte das atividades de um projeto envolvendo tecnologia. O autor analisa a tarefa, considerando seis princípios que foram identificados pelo professor depois dos estudantes finalizarem as tarefas propostas no projeto. Estes princípios são apresentados na tabela 3.2, sendo considerados como as características que o *design* de tarefas de modelação matemática integrando tecnologia deve considerar para promover experiências de aprendizagem efetivas nos estudantes.

Para Geiger (2017), a tecnologia funcionou como um elemento essencial para permitir a integração dos seis princípios de design de tarefas de modelação, sendo necessária mais investigação sobre "como as ferramentas digitais podem possibilitar a melhor implementação desses aspetos do design" (p. 15).

Tabela 3.2. Características de tarefas de modelação integrando tecnologia (Geiger, 2017, p. 292).

Princípios	**Descrição**
Conformidade com o programa curricular	A tarefa deve atender aos requisitos do plano curricular quanto ao conhecimento de conteúdo e dimensões relacionadas com aplicações e tecnologia.
Autenticidade e relevância	As tarefas devem ser definidas num contexto autêntico ou relacionado com a vida real. A tarefa deve ser interessante para o professor e ser de potencial interesse para o estudante.
Carácter aberto	A matemática necessária para resolver o problema colocado na tarefa não deve ser imediatamente evidente. A tarefa deve ter uma natureza aberta, proporcionando a oportunidade de múltiplos caminhos de resolução.
Conetividade	Idealmente, a tarefa deve fazer conexões entre diferentes áreas de conteúdo dentro do programa curricular.
Acessibilidade	A tarefa deve fornecer oportunidade para os estudantes se conectarem com as suas aprendizagens prévias.
Desenvolvimento	A tarefa deve fornecer desafio e encorajar os estudantes a ir além do que atualmente sabem e podem fazer através do processo de modelação. O envolvimento dos estudantes com a tarefa deve fornecer feedback ao professor sobre o desenvolvimento da sua compreensão.

Num terceiro estudo, Domínguez-García, García-Planas e Taberna (2016) apresentam uma abordagem à modelação matemática na Universidade de Catalunha durante o período 2014-2015. Os autores utilizam uma metodologia de projeto com portefólio virtual para fomentar a aprendizagem de álgebra linear em estudantes de Engenharia. Os resultados evidenciam uma tendência dos estudantes a permanecerem até ao final do semestre, e com menos estudantes a reprovarem na disciplina de Álgebra Linear, em comparação com os anos anteriores, mostrando desta forma uma efetividade da abordagem da modelação matemática com a utilização da tecnologia.

Desta forma, observa-se que a utilização de recursos, como as tecnologias na sala de aula, funciona como apoio ao trabalho em tarefas de modelação matemática e facilita a aprendizagem do estudante, incluindo a aprendizagem de conceitos na disciplina de Álgebra Linear. No entanto, deve considerar-se que, tal como revela o estudo de Greefrath et al. (2018), as tarefas de modelação propostas aos estudantes devem requerer a utilização da tecnologia, tornando-a um recurso útil no trabalho de modelação. Finalmente, a utilização de tecnologia, e do computador em particular, pode ajudar a promover as discussões na sala de aula, tal como é referido por Siller e Greefrath (2010), pelo que a sua integração no trabalho com tarefas de modelação matemática também é importante, promovendo a interação entre estudantes quando estes são encorajados a utilizar o computador para trabalhar no modelo matemático.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

Neste capítulo começo por referir as opções metodológicas gerais do estudo, em termos de abordagem e paradigma de investigação, opções metodológicas da experiência de ensino e o papel do investigador. Descrevo a seguir os participantes do estudo, isto é, o grupo de estudantes que participou na experiência de ensino. Continuo com a descrição dos métodos e instrumentos que caracterizam a recolha e análise dos dados. Finalmente, apresento alguns aspetos de ética considerados para a investigação.

3.1 Opções metodológicas

3.1.1 Abordagem qualitativa e paradigma interpretativo

A Educação é um campo abrangente, que tem por base um conjunto de aprendizagens que incluem conhecimentos de várias áreas mas também múltiplas competências, algumas das quais mais específicas e outras mais transversais. Grande parte destas aprendizagens e competências é necessária para que o estudante possa enfrentar com confiança os diversos problemas e situações que têm lugar no mundo atual, razão pela qual a investigação dirigida para o estudo das aprendizagens e competências que ocorrem na sala de aula se torna prioritária.

Considerando que o objetivo e as questões de investigação deverão articular-se com a abordagem metodológica adotada, e que esta investigação tem por objetivo compreender as aprendizagens de conceitos de álgebra linear e as competências de modelação postas em prática por estudantes universitários da Costa Rica, no contexto de uma experiência de ensino apoiada na realização de tarefas de modelação matemática, opto por uma abordagem qualitativa, de natureza interpretativa (Cohen, Manion & Morrison, 2011).

Para Sampieri, Fernandez e Baptista (2010), "a investigação qualitativa proporciona profundidade aos dados, dispersão, riqueza interpretativa, contextualização do ambiente, detalhes e experiências únicas" (p. 17). Neste sentido, a abordagem qualitativa ajusta-se ao estudo pretendido, sendo a interpretação de dados recolhidos e o contexto de sala de aula centrados na realidade social de um grupo particular de estudantes universitários. Assim sendo, os contributos de todos os participantes da investigação têm importância, desde o papel do investigador ao ambiente de sala de aula onde trabalham os participantes (Taylor & Bogdan, 1987).

Bogdan e Biklen (1994) mencionam certas características de uma investigação qualitativa, entre as quais se identificam neste estudo as seguintes:

1) *A investigação é descritiva*. Neste estudo recorre-se a descrições do trabalho realizado pelos estudantes nas distintas atividades implementadas em sala de aula. Estas descrições focam-se no trabalho desenvolvido pelos estudantes nas suas resoluções das tarefas propostas durante a experiência de ensino, nas transcrições de discussões nos grupos e na turma, na entrevista realizada pelo investigador, e nas respostas a um questionário. Os distintos fragmentos de trabalho dos participantes não são escolhidos ao acaso, mas com um fim que é o de obter a maior quantidade de informação relativa aos focos do estudo. Para além disso, todas as descrições são interpretadas para lograr obter resultados que permitam atingir o objetivo do estudo e, consequentemente, responder às questões de investigação.
2) *O investigador preocupa-se mais com o processo do que com os resultados ou produtos*. Tratando-se de uma investigação qualitativa, o meu interesse de pesquisa está centrado nos processos de resolução dos estudantes, a partir dos quais procuro identificar os conhecimentos mobilizados relativamente à disciplina de Álgebra Linear e as competências de modelação dos estudantes no decurso dos seus processos de modelação. No entanto, isto não quer dizer que não sejam considerados alguns resultados que surgem dos processos de resolução dos estudantes ou dados quantitativos que expressem resultados gerais, mas sim que estes resultados adquirem um papel secundário, nomeadamente complementar a informação dos processos evidenciados. Efetivamente, neste estudo são considerados alguns resultados quantitativos específicos provenientes de um questionário aplicado, resultados que ajudaram a complementar a análise qualitativa referente aos contributos da experiência de ensino mencionados pelos estudantes. Para aprofundar os processos de resolução dos estudantes quando resolvem tarefas de modelação, o investigador faz uma caraterização das rotas de modelação, de modo a obter uma visão das aprendizagens e competências de modelação que os participantes evidenciam.
3) *Os participantes são de importância vital para atingir os objetivos*. Do mesmo modo que o investigador é fundamental para a recolha de dados, o desempenho dos estudantes que participarão neste estudo é fundamental para responder ao objetivo da investigação, tornando-se a fonte direta dos dados a serem recolhidos.

Para além das características anteriores, a investigação qualitativa permite uma certa flexibilidade sobre as questões e os métodos e instrumentos de recolha de dados (Robinson & Savenye, 2001), no sentido em que o investigador tem a possibilidade de melhorar e aprofundar esses elementos da investigação durante todo o processo investigativo. Esta característica é importante, pois ajusta-se às características da metodologia seguida, nomeadamente a aplicação de um estudo piloto com métodos e instrumentos de recolha de dados específicos que foram ajustados para a planificação de uma experiência de ensino que se implementará na sala de aula para obter e analisar os dados que respondem às questões de investigação.

No que se refere à natureza da investigação, o facto de não me limitar a descrever o que fazem os estudantes, mas também interpretar essas descrições, torna legítimo abraçar um paradigma interpretativo que implica, por parte do investigador, compreender os significados atribuídos pelos estudantes nas distintas produções que realizam no ambiente de aprendizagem estabelecido, neste caso na experiência de ensino, pelo que a interação entre investigador e investigado é fundamental (Coutinho, 2011). Assim, o paradigma interpretativo propõe que o investigador analise como pensa o indivíduo investigado para compreender a sua experiência nas distintas práticas em estudo (Cohen et al., 2011). Neste caso, a compreensão de tais experiências gira em torno do estudante, nomeadamente: dos conhecimentos de álgebra linear que por ele são ativados; das competências de modelação por ele desenvolvidas na resolução das tarefas de modelação; das dificuldades que possa apresentar ao trabalhar nas tarefas; e da sua experiência relativamente ao trabalho em tarefas de modelação na disciplina de Álgebra Linear.

3.1.2 A experiência de ensino

O termo ‘experiência de ensino’ designa a realização de uma proposta educativa de ensino que difere das práticas de ensino habitualmente desenvolvidas num certo contexto, conduzida frequentemente com um pequeno número de estudantes, os quais são imersos nesse contexto de aprendizagem distinto do usual. Envolve uma monitorização cuidada por parte do investigador de forma a captar o processo de aprendizagem ‘em ação’ e os aspetos que distinguem as práticas de ensino vigentes das práticas propostas (Borasi, 1992). Neste sentido, a experiência de ensino oferece ao professor uma oportunidade para transcender o currículo tradicional e observar contributos de práticas que não são habitualmente adotadas numa determinada disciplina para melhorar o ensino ou as aprendizagens do estudante, enquanto possibilita que o investigador pesquise como essas práticas podem levar à criação de um novo conhecimento no campo de investigação existente.

A experiência de ensino neste estudo está centrada na aprendizagem dos estudantes, tendo uma natureza interventiva focada na aplicação de tarefas de modelação baseadas em diferentes contextos reais. Para garantir a qualidade das tarefas de modelação a serem aplicadas na experiência de ensino (Geiger, 2017), foi decidido conduzir um estudo piloto, prévio à realização da experiência de ensino, constituído pela aplicação de três tarefas de modelação (*Anexo A*). Este estudo piloto procurou contribuir para o desenho da experiência de ensino, sendo descrito no capítulo 5 que refere os seus aspetos metodológicos essenciais, os principais resultados obtidos e os seus contributos para a preparação da experiência de ensino.

3.1.3 Papel do investigador

Na investigação qualitativa o investigador é considerado um elemento que faz parte integrante do processo de investigação e que se preocupa em compreender o participante, interagindo com ele de modo natural, e embora não possa eliminar os seus efeitos sobre as pessoas que estuda, tenta reduzir ao mínimo estes efeitos ou pelo menos entendê-los em suas interpretações, a fim de não causar perturbações nos dados analisados (Taylor & Bogdan, 1987).

Inicialmente, teve de haver um acordo entre professor e investigador para o desenvolvimento da experiência de ensino, visando encaixar as distintas sessões da intervenção com as aulas teóricas lecionadas pelo professor da turma. Explicitamente, o professor realiza a lecionação formal dos conteúdos da disciplina na forma usualmente seguida na disciplina, cedendo períodos letivos para o investigador aplicar as tarefas de modelação e outros instrumentos de recolha de dados, mas sempre após a introdução formal de conceitos de álgebra linear. Antes do início da experiência de ensino, o investigador e o professor da turma discutiram e concordaram sobre aspetos relacionados com a experiência de ensino, tais como: a sequência das tarefas, tempos de resolução e discussão por tarefa; o conteúdo matemático, o contexto real de cada problema, as questões a serem formuladas nas tarefas; e os aspetos éticos sobre autorizações dos estudantes para participarem da investigação.

Neste estudo, o investigador assume um papel fundamental como observador participante na sala de aula, assumindo o papel de professor na aplicação de todas as tarefas de modelação e sendo observador dos processos em que o estudante atribui significados aos conceitos matemáticos e da interação social que surge entre os estudantes no ambiente de trabalho construído (Coutinho, 2011). Este último ponto é de real importância para observar como se envolvem os estudantes nos ambientes baseados em trabalho em grupo e nas discussões que se estabelecem em torno da resolução das tarefas de modelação com eventual recurso à tecnologia. O facto de o investigador ter de atribuir significado ao trabalho dos estudantes durante as discussões em grupo ou coletivas, e também às suas resoluções das tarefas de modelação, torna-o um intérprete da informação proporcionada pelos estudantes nos distintos meios de recolha de dados. Desta forma, o investigador assume o papel de observador que participa na discussão com os estudantes durante e após a resolução de cada tarefa.

3.2 Participantes do estudo

Os participantes nesta investigação correspondem aos 20 estudantes (13 rapazes e 7 raparigas) envolvidos na experiência de ensino, realizada durante o 2.º semestre do ano letivo de 2018/19 numa turma da disciplina MA1004 de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica, os quais frequentavam a disciplina como parte do programa estudos do seu curso. Estes estudantes tiveram aulas sobre conceitos formais de álgebra linear, constantes do programa curricular, prévias ao trabalho em cada tarefa de modelação.

O critério fundamental para a escolha dos estudantes que participaram na experiência de ensino foi o de considerar estudantes matriculados na disciplina MA1004 durante o semestre referido que fossem parte de uma mesma turma e que estivessem interessados em participar da experiência e aceitassem colaborar na recolha de seus dados. Para além disso, estes estudantes faziam parte da única turma da disciplina MA1004 de Álgebra Linear que utilizou a metodologia de laboratório no 1.º semestre de 2019, nomeadamente única turma onde os estudantes, para além de receber a lecionação normal da teoria de álgebra linear, utilizam computador para aprender a trabalhar exercícios matemáticos referentes a diferentes conceitos matemáticos da disciplina. Este aspeto foi determinante na escolha desta turma, já que a utilização da tecnologia representa um elemento fundamental a contemplar na resolução das tarefas de modelação. Outros critérios foram ainda: a facilidade do investigador em se deslocar à instituição onde os estudantes estavam a frequentar presencialmente a disciplina; a flexibilidade da instituição e do professor da turma para permitir que o investigador implementasse a experiência de ensino com os estudantes, sem afetar o cumprimento dos objetivos do programa da disciplina; a disponibilidade de um laboratório de computadores para os estudantes poderem trabalhar com *software* matemático; e as experiências vividas pelo investigador em anos anteriores, como professor, com estudantes que frequentaram a disciplina MA1004.

Os estudantes que fazem parte deste estudo pertencem às áreas das Engenharias, Física, Economia, Estatística e Meteorologia e, em geral, estavam acostumados a aulas de natureza expositiva no papel de recetores de conhecimento transmitido pelo professor. Não tinham trabalhado com tarefas de modelação anteriormente à experiência de ensino, conforme referiram no questionário aplicado no final da experiência de ensino. O questionário também revelou que os estudantes: têm idades compreendidas entre 18 e 24 anos, tendo a maioria idade entre 18 e 19 anos; dedicam entre 2 e 4 horas por semana para estudar álgebra linear em casa; frequentam pela primeira vez a disciplina de Álgebra Linear; e obtiveram aprovação na disciplina MA1001 de Cálculo I antes de frequentar a disciplina de Álgebra Linear. Desta forma, a maioria dos participantes destaca-se por ter ingressado na universidade no ano de 2019 ou 2018 e também pelo facto de não ter tido contato com a álgebra linear anteriormente.

3.3 Métodos e instrumentos de recolha de dados

A utilização apropriada dos instrumentos de recolha de dados é fundamental para recolher dados claros e úteis que permitam responder às questões do estudo. No que se refere a este estudo, os dados necessários para a análise dos diferentes aspetos a analisar foram recolhidos a partir de: 1) observação participante com registo em áudio de discussões dos estudantes e com o professor nos grupos de trabalho e discussões coletivas; 2) recolha documental das resoluções escritas dos estudantes e dos ficheiros digitais por eles criados nas tarefas de modelação e antecipação; 3) respostas dos estudantes obtidas na aplicação de um questionário; e 4) respostas dadas por estudantes no decurso de uma entrevista semiestruturada, com registo em áudio.

Observação participante. No decorrer da experiência de ensino recorro à observação participante com diferentes objetivos (Cohen et al., 2011), tais como ter uma aproximação ao trabalho da turma ou registar contribuições significativas de conversas durante o trabalho dos estudantes na resolução das tarefas (Guest, Namey & Mitchell, 2013). A observação participante também permite aceder a aspetos significativos sobre o trabalho em sala de aula que precisem de ser considerados para o desenvolvimento de posteriores intervenções.

As observações foram realizadas durante todas as tarefas de modelação da experiência mas iniciou-se antes da experiência de ensino. Essa observação anterior foi feita com o objetivo de observar aspetos como: nível da turma em geral, modo habitual de trabalho por parte dos estudantes e professor e ritmo de participação dos estudantes nas discussões em sala de aula.

Para registar os momentos de observação anteriormente salientados, recorri à utilização de notas de campo (Anderson & Arsenault, 1998). Estas notas de campo são acompanhadas de registos em áudio das diferentes discussões em grupo em que o investigador participa junto dos estudantes e das discussões em sala de aula. Com efeito, tratando-se de vários grupos de trabalho a resolver tarefas simultaneamente, não seria possível aceder a toda a informação proporcionada pelos vários estudantes apenas tomando notas. Estas gravações são posteriormente transcritas em papel, sendo utilizados momentos específicos das discussões de trabalho em grupo e coletivas para a análise de aprendizagens de álgebra linear e competências de modelação, bem como de eventuais dificuldades evidenciadas pelos estudantes.

Recolha documental. Na investigação em Ciências Sociais os documentos têm muita importância na recolha de dados, podendo ser a sua fonte escrita, visual (imagens, artefactos, etc) ou sonora (Denscombe, 2003). Neste estudo, a principal fonte de recolha de dados provém de fontes escritas, nomeadamente das resoluções escritas dos estudantes das tarefas de antecipação (*anexo B*) e das tarefas de modelação (*anexo C*) propostas em sala de aula ao longo da experiência de ensino. Estas resoluções escritas são recolhidas quando os estudantes terminam a resolução de cada tarefa, sendo digitalizadas posteriormente pelo investigador.

Como parte do trabalho solicitado nessas tarefas, os estudantes também recorreram ao trabalho com tecnologia, dando origem a produções digitais que também foram recolhidas. Essas produções digitais foram elaboradas pelos estudantes em programas computacionais utilizados pelo professor para a lecionação da disciplina de Álgebra Linear (*Geogebra*, *Mathematica*, *Excel*). Nos momentos de utilização do programa computacional, é solicitado ao estudante a gravação de extratos específicos de seu trabalho com o programa, em formato de imagem. As produções digitais incluem cálculos e operações matemáticas, gráficos de objetos matemáticos, construções de modelos matemáticos, ou qualquer outra utilização dada ao programa por parte do estudante. Estas produções digitais são submetidas pelos estudantes na plataforma digital "Mediación Virtual". A plataforma é utilizada pelo professor da turma para submeter material de apoio para as aulas teóricas e pelo investigador para aceder às produções digitais dos estudantes, disponibilizar propostas de resolução das tarefas (após respetiva resolução) e aceder às respostas dadas pelos estudantes a uma parte de um questionário aplicado composto por respostas fechadas.

Questionário. Para Gil (1999), o questionário pode ser definido como "a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, etc." (p. 128). Para este estudo, as situações vivenciadas pelos estudantes são de grande importância, permitindo aceder às suas perspetivas sobre os contributos do trabalho de tarefas de modelação para a aprendizagem da álgebra linear.

Devido à sua facilidade de aplicação, por meio físico ou digital, o questionário representa um dos instrumentos de recolha de dados com mais baixo custo, sendo sua principal finalidade a comparação de informação (Martín, 2004). O questionário (*anexo D*) foi aplicado no final da experiência de ensino, posteriormente ao trabalho nas tarefas de modelação e previamente à aplicação da entrevista, tendo sido aplicado uma parte por meio físico e duas partes por meio digital. Assim, a estrutura deste questionário integra três partes: 1) uma primeira parte formada por questões fechadas de múltipla escolha e dicotómicas (sim ou não), objetivando descrever quantitativamente aspetos da caracterização demográfica dos estudantes; 2) uma segunda parte formada por questões fechadas dicotómicas, objetivando quantificar as perspetivas dos estudantes sobre a experiência no que respeita à aprendizagem da álgebra linear, à modelação matemática e à utilização de tecnologia; e 3) uma terceira parte formada por questões abertas que procuram aprofundar mais alguns dos aspetos da segunda parte do questionário.

A primeira e a segunda parte do questionário, correspondentes às questões fechadas, foram disponibilizadas aos estudantes em forma digital, através da plataforma "Mediación Virtual", procurando também promover objetivos académicos, nomeadamente permitir que os estudantes explorassem mais a plataforma virtual da disciplina. A terceira parte, correspondente às questões abertas, foi aplicada aos estudantes presencialmente, na sala de aula, após a aplicação das duas primeiras partes, sendo recolhidos os dados em papel como respostas escritas. Para facilitar uma leitura fluida dos dados, no capítulo da análise dos dados, foi decidido, posteriormente, apresentar as respostas selecionadas como transcrições literais das respostas escritas pelos estudantes no papel.

Entrevista. Considera-se uma técnica de recolha de dados muito utilizada em investigações qualitativas, requerendo a utilização de técnicas de comunicação com base num guião elaborado com um objetivo específico (Martín, 2004). Neste estudo, a entrevista constitui um instrumento cujo guião é definido após considerar o trabalho feito pelos estudantes durante a resolução das tarefas de modelação, com o objetivo de aprofundar a perspetiva do participante quanto à experiência de ensino, considerando sentimentos, opiniões, relatos e outras informações que comummente não são reveladas pelo participante no trabalho que lhe é proposto durante a experiência (Fernández, 2001). A gravação da entrevista é transcrita, sendo utilizados extratos específicos para complementar as respostas de todos os estudantes obtidas no questionário, nomeadamente para aprofundar as suas opiniões referentes aos contributos do trabalho desenvolvido na experiência de ensino.

A entrevista é realizada com quatro estudantes, sendo o critério de seleção a representatividade de género e a diversidade de grupos que representam. Explicitamente, são escolhidos dois estudantes do sexo masculino e duas estudantes do sexo feminino, representantes de quatro grupos de trabalho diferentes escolhidos na última sessão de trabalho com tarefas de modelação. Estes estudantes participam voluntariamente da entrevista, sendo importante a disponibilidade simultânea de todos num mesmo horário fora das aulas da disciplina de Álgebra Linear. Os estudantes participantes são dispostos em forma circular junto com o investigador para responder e fazer comentários a uma série de seis questões abertas direcionadas por um roteiro previamente elaborado pelo investigador, num formato de entrevista semi-estruturada (Belei, Gimeniz-Paschoal, Nascimento & Matsumoto, 2008). Quanto ao conteúdo das questões da entrevista, consideram-se aspetos que o investigador identifica necessários discutir, como: vantagens e desvantagens reconhecidas do trabalho com tarefas de modelação para a aprendizagem da álgebra linear; as tarefas de modelação consideradas mais significativas e de maior dificuldade para o estudante e porquê; e opiniões sobre o papel do trabalho em grupo e a utilização da tecnologia no trabalho com tarefas de modelação.

3.4 Análise de dados

No que se refere à análise de dados, este estudo segue uma linha de análise descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009), em que o investigador faz descrições e interpretações relativamente ao trabalho desenvolvido pelos estudantes, integrando e articulando os diferentes dados recolhidos com base nos métodos e instrumentos de recolha já referidos. A triangulação dos dados, recorrendo a diferentes fontes de informações visa assegurar a sustentação das interpretações e a fiabilidade dos dados, pois uma proposta baseada na combinação de diferentes métodos torna mais rigorosa a validade dos dados analisados (Duarte, 2009).

Para realizar a descrição e interpretação dos dados, o processo essencial de análise na investigação qualitativa consiste em usar dados mais ou menos estruturados, os quais devem de ser organizados segundo unidades, categorias e tópicos de interesse (Sampieri et al., 2010). Neste sentido, como investigador, realizo primeiramente uma categorização para os dados recolhidos que atendam ao objetivo e questões da investigação e, portanto, a tópicos de interesse a analisar, baseado na fundamentação teórica que apoia o estudo. Em particular, o facto de uma categorização de análise ter de considerar informação suficiente para responder às perguntas da investigação (Cohen et al., 2011) leva-me a optar por uma categorização conformada por quatro categorias: 1) aprendizagem de conhecimentos de álgebra linear; 2) competências de modelação; 3) dificuldades relativas às aprendizagens de competências de modelação; e 4) contributos da experiência de ensino para o estudante.

Para além de uma categorização, o processo de análise de dados numa investigação qualitativa requer um esquema ou "coreografia" própria de análise (Sampieri et al., 2010), pelo que defino dimensões e critérios para cada uma das quatro categorias de análise. Para isso realizo uma identificação de tipos de dados disponíveis a partir dos dados recolhidos e da teoria investigada, classificando-os como elementos específicos de análise (um critério de análise) e subcategorias de análise que envolvem tais elementos (uma dimensão de análise). Nesta linha, cada uma das categorias fica formada por dimensões, e por sua vez cada dimensão fica descrita por critérios de análise.

No que se refere à categoria de aprendizagem de conhecimentos de álgebra linear (tabela 4.1), as dimensões de análise correspondem aos distintos conceitos da disciplina de Álgebra Linear trabalhados, enquanto os critérios de análise correspondem aos objetivos específicos de aprendizagem da disciplina relativos aos tópicos curriculares envolvidos nas tarefas propostas ao longo da experiência de ensino.

Tabela 4.1. Categoria de análise da aprendizagem dos conceitos de álgebra linear.

Dimensões de análise	**Critérios de análise**
Sistemas Lineares de Equações	*Objetivo de aprendizagem*: Aplicar a álgebra de matrizes à resolução e análise dos sistemas de equações lineares. *Critérios de análise a considerar*: • Evidencia conhecer o conceito de matriz aumentada de um sistema de equações lineares e como se utiliza na resolução de um sistema de equações lineares. • Evidencia conhecer o conceito de solução de um sistema de equações lineares, identificando apropriadamente o domínio dos parâmetros que constituem o conjunto solução de um sistema de equações lineares com infinitas soluções.
Operações com matrizes e matriz invertível	*Objetivo de aprendizagem*: Conhecer a álgebra de matrizes *Critérios de análise a considerar*: • Evidencia reconhecer o conceito de matriz como organização de dados. • Evidencia reconhecer operações elementares associadas às matrizes (soma, subtração, produto por escalar, multiplicação matricial, inversa de uma matriz) e é capaz de realizar adequadamente essas operações.

Geometria Vetorial	*Objetivo de aprendizagem*: Conhecer a geometria de $\boldsymbol{IR^n}$. *Critérios de análise a considerar*: • Evidencia reconhecer o conceito de vetor em $\boldsymbol{IR^2}$ como segmento orientado. • Evidencia conhecer operações elementares associadas aos vetores em $\boldsymbol{IR^2}$ (soma, subtração, produto por escalar, produto por matriz) e é capaz de realizar adequadamente essas operações para determinar algebricamente novos vetores. • Evidencia saber localizar representações visuais (geométricas) de vetores em $\boldsymbol{IR^2}$ após operar vetores entre si, com escalares ou com matrizes: adição e subtração de vetores, produto de vetor e escalar, produto de vetor e matriz. • Evidencia conhecer propriedades dos vetores em $\boldsymbol{IR^n}$ utilizadas no cálculo de ângulos entre vetores posição e utiliza-as adequadamente para determinar o ângulo entre dois vetores.
Espaço vetorial	*Objetivo de aprendizagem*: Determinar se um conjunto de vetores é uma base. *Critérios de análise a considerar*: • Evidencia conhecer o conceito de vetor em $\boldsymbol{IR^n}$ e é capaz de realizar apropriadamente operações algébricas sobre vetores. • Evidencia conhecer o conceito de combinação linear e utiliza-o apropriadamente na construção de novos vetores. • Evidencia conhecer o conceito de conjunto gerador de um subespaço vetorial e utiliza-o para determinar subespaços vetoriais. • Evidencia conhecer o conceito de base de um subespaço vetorial e utiliza-o no contexto de situações particulares para determinar bases de subespaços vetoriais.
Transformações Lineares	*Objetivo de aprendizagem*: Determinar transformações lineares entre espaços de dimensão finita. *Critério de análise a considerar*: • Evidencia conhecer o conceito de transformação linear. • Evidencia reconhecer o conceito vetorial de distância entre dois pontos.

Para a categoria de competências de modelação (tabela 4.2), considero dimensões de análise, cada uma constituída por critérios que referem as distintas subcompetências de modelação necessárias para desenvolver cada subprocesso do ciclo de modelação, segundo a proposta de Maaß (2006), mostrados na tabela 3.1.

Tabela 4.2. Categoria de análise das competências de modelação.

Dimensões de análise	Critérios de análise
Competências para compreender o problema real	Mobiliza competências para todos ou alguns dos seguintes aspetos: reconhecer quantidades e variáveis que influenciam a situação; procurar informações disponíveis e fazer a diferenciação entre informações relevantes e irrelevantes.
Competências para estabelecer um modelo baseado na realidade	Mobiliza competências para todos ou alguns dos seguintes aspetos: fazer a diferenciação entre informações relevantes e irrelevantes; fazer suposições sobre o problema e simplificar a situação; identificar variáveis-chave; construir relações entre as variáveis.

Competência para criar um modelo matemático a partir do modelo real	Mobiliza competências para todos ou alguns dos seguintes aspetos: matematizar quantidades relevantes e suas relações; simplificar as quantidades relevantes e suas relações, se necessário, e reduzir o seu número e complexidade; escolher notações matemáticas apropriadas e representar situações graficamente.
Competências para resolver questões matemáticas dentro do modelo matemático	Mobiliza competências para todos ou alguns dos seguintes aspetos: usar estratégias heurísticas, como a divisão do problema em problemas parciais, estabelecendo relações com problemas semelhantes ou análogos, reformulando o problema, visualizando o problema de uma forma diferente, variando as quantidades ou os dados disponíveis, etc; usar o conhecimento matemático para resolver o problema.
Competência para interpretar resultados matemáticos em uma situação real	Mobiliza competências para todos ou alguns dos seguintes aspetos: interpretar resultados matemáticos em contextos extra-matemáticos; generalizar soluções que foram desenvolvidas para uma situação especial; visualizar soluções para um problema usando linguagem matemática apropriada e/ou para se comunicar sobre as soluções.
Competência para validar a solução	Mobiliza competências para todos ou alguns dos seguintes aspetos: verificar criticamente e refletir sobre as soluções encontradas; revisar algumas partes do modelo ou passar novamente pelo processo de modelação se as soluções não se ajustarem à situação; refletir sobre outras maneiras de resolver o problema ou se as soluções podem ser desenvolvidas de maneira diferente; questionar globalmente a adequação do modelo.

Para a organização em dimensões e critérios de análise da categoria de dificuldades evidenciadas pelos estudantes quanto às aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear, aos processos de modelação e ao uso da tecnologia, considero uma adaptação da categorização apresentada por Rodriguez (2011) para descrever dificuldades associadas ao processo de ensino e aprendizagem da álgebra linear (apresentada anteriormente na tabela 2.3). As adaptações nas dimensões e critérios de análise surgem considerando não apenas as questões da investigação, mas também a consonância com os dados recolhidos. Esta adaptação acrescenta uma dimensão que corresponde às dificuldades de manipulação tecnológica. Para além disso, acrescenta-se na categoria de dificuldades cognitivas as dificuldades referentes à execução dos processos de modelação matemática (Blum, 2015).

Tabela 4.3. Categoria de análise das dificuldades.

Dimensões de análise	**Critérios de análise**
Dificuldades conceptuais	• Utilização incorreta da linguagem matemática ou de conceitos e procedimentos de álgebra linear. • Utilização incorreta da linguagem do contexto real. • Utilização incorreta de conhecimentos matemáticos prévios.

Dificuldades cognitivas	• Dificuldades para obter informação ou de visualização. • Dificuldades associadas aos subprocessos de modelação: compreender a situação problema, estruturar e simplificar a situação para criar um modelo real, matematizar o modelo, trabalhar matematicamente o modelo, interpretar e validar soluções.
Dificuldades de manipulação tecnológica	• Desconhecimento do código de entrada ou das ferramentas tecnológicas associadas a um *software* matemático. • Incompreensão do código de saída proporcionado pelo *software* matemático.

Cabe salientar que a análise das aprendizagens de álgebra linear (Tabela 4.1), competências de modelação (Tabela 4.2) e dificuldades (Tabela 4.3) ficam centradas nas resoluções das tarefas de modelação, embora se faça um resumo dos resultados principais do trabalho desenvolvido pelos estudantes nas tarefas de antecipação a partir dos dados recolhidos. Posteriormente, os resultados encontrados nas tarefas de antecipação são relacionados com os resultados evidenciados no trabalho desenvolvido pelos estudantes nas tarefas de modelação. Neste sentido, a análise dos aspetos relativos às três primeiras categorias é desenvolvida para cada tarefa de modelação. Assim, para cada uma das tarefas de modelação, analisam-se aprendizagens, competências de modelação, rotas de modelação e sua relação com as aprendizagens e competências, e dificuldades evidenciadas seguindo uma ordem de análise fundamentada no processo de modelação ideal, sob uma perspetiva cognitiva (Borromeo Ferri, 2018).

Deste modo, a estrutura de análise de cada tarefa consta de três partes: resumo de resultados principais da resolução da tarefa de antecipação, análise das aprendizagens, competências de modelação e dificuldades evidenciadas na tarefa de modelação, e análise de rotas de modelação específicas. Para efeitos de apresentação dos dados, excertos da resolução dos estudantes de tarefas de antecipação e tarefas de modelação são apresentados mediante figuras, utilizando a codificação de TA para me referir a uma tarefa de antecipação e TM para me referir a uma tarefa de modelação.

No caso da categoria de contributos da experiência de ensino para a aprendizagem do estudante, as dimensões e critérios emergem dos dados recolhidos no questionário, sendo a análise feita por questões, correspondentes às questões abertas do questionário. Integram-se aqui também as opiniões dadas pelos estudantes na entrevista, que complementarão os dados recolhidos no questionário, sendo que por meio dessas opiniões poderão clarificar-se melhor algumas respostas ao questionário dadas pelos estudantes. Assim, com as respostas ao questionário e as opiniões dos estudantes na entrevista faço uma análise dos contributos da experiência de ensino na perspetiva dos estudantes (tabela 4.4), atendendo a vantagens e desvantagens manifestadas por diferentes estudantes sobre contributos e dificuldades da experiência de ensino para a sua formação no âmbito da álgebra linear.

Tabela 4.4. Categoria de análise dos contributos da experiência de ensino

Dimensões de análise	Critérios de análise
Contributos da disciplina de Álgebra Linear para o curso do estudante	Álgebra linear para: ● a resolução de problemas matemáticos; ● o pensamento lógico-matemático; ● ferramentas matemáticas relevantes para o curso específico do estudante.
Contributos das tarefas de modelação para a aprendizagem da álgebra linear	Tarefas de modelação para: ● a aprendizagem de conceitos; ● a aplicabilidade dos conceitos; ● competências de modelação; ● dinâmicas de trabalho em grupo; ● motivação do estudante.
Contributos do trabalho com tecnologia para a aprendizagem da álgebra linear	Trabalho com tecnologia para: ● processos de cálculo matemático; ● representações visuais de conceitos; ● modelação de situações reais.
Dificuldades associadas à aprendizagem da álgebra linear	Dificuldades devidas a: ● abstração dos conceitos matemáticos; ● quantidade de conteúdos do programa; ● conhecimentos prévios insuficientes.
Dificuldades associadas ao trabalho com tarefas de modelação	Dificuldades devidas a: ● tempo dedicado ao trabalho nas tarefas; ● subprocessos específicos do processo de modelação; ● conhecimentos prévios insuficientes; ● conceitos e procedimentos de álgebra linear.
Dificuldades associadas ao trabalho com tecnologia	Dificuldades em: ● utilização do *Excel*, *GeoGebra*, *Mathematica*; ● comandos de programação; ● utilização de plataformas virtuais.

Para efeitos de leitura dos dados, diferentes contributos da experiência de ensino mencionados pelos estudantes são apresentados utilizando a codificação E#Q#, querendo referir-me à resposta dada pelo estudante E# no questionário QA ou QF, isto é, respetivamente, na parte do questionário formada por perguntas abertas ou perguntas fechadas.

A seleção das resoluções a utilizar para toda a análise fica determinada por contributos representativos, no sentido em que a resolução de um estudante pode representar a resolução de um conjunto de estudantes que seguiram a mesma ideia, sendo então suficiente apresentar uma única resolução entre todo o conjunto. Para efeitos de salvaguardar a integridade do estudante, utilizam-se nomes fictícios em toda a descrição e interpretação dos dados.

3.5. Questões éticas

Em toda a investigação educativa devem considerar-se um conjunto de orientações éticas que guiem e regulem o processo de pesquisa do investigador, de forma a tornar o estudo o mais transparente possível para os participantes envolvidos e para os leitores do estudo, isto é, informar o mais explicitamente possível a forma como se seleciona e desenvolve cada aspeto metodológico do estudo (Gehrig et al., 2014). Neste sentido, o presente estudo tem em consideração vários aspetos de natureza ética relacionados com os participantes e com o meu papel enquanto investigador, os quais são orientados pelo código de ética da AERA (2011) e pela Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL, 2016).

Quanto ao consentimento informado, o investigador, de maneira verbal e mediante um documento formal, informa os participantes envolvidos no estudo sobre os objetivos do estudo e implicações pessoais e educacionais. Em particular, informa os estudantes e o professor da turma sobre a metodologia adotada durante as intervenções letivas e o processo de recolha de dados. Para além disso, respeitando a hierarquia organizacional, são solicitadas autorizações para a realização do estudo e respetiva recolha de dados aos organismos institucionais (Sañudo, 2006), nomeadamente, a Oficina de Assuntos Internacionais e Cooperação Externa (OAICE) da Universidade da Costa Rica, encarregada de permitir a minha deslocação à Costa Rica para a recolha de dados, e a Escola de Matemática da Universidade da Costa Rica, sede Rodrigo Fácio, contexto institucional onde se realiza a implementação da experiência de ensino. Posteriormente à sua aprovação, solicita-se de autorização ao professor responsável pela lecionação da disciplina de Álgebra Linear na turma onde se realiza a experiência de ensino e aos participantes do estudo, neste caso os estudantes.

Quanto ao consentimento dos participantes (*Anexo E*), há liberdade para participarem voluntariamente no estudo, ficando registadas em documentos todas as assinaturas dos estudantes, após concordarem com as condições de participação que foram definidas e informadas no início da intervenção e que se mantiveram até ao final, estando conscientes de que podem decidir sair do estudo a qualquer momento, ao longo da intervenção.

Nesta investigação são garantidas a confidencialidade e a privacidade dos participantes, mediante o anonimato de suas identidades e a utilização de seus dados de forma confidencial, exclusivamente para os fins da investigação. Para além disso, no que respeita à proteção física e moral dos participantes, o investigador garante e promove o respeito pelas diferentes opiniões que possam surgir por parte dos estudantes durante o trabalho em pequeno grupo e nas discussões coletivas, promovendo também o respeito entre estudantes. Nas implicações educacionais é garantido que os estudantes não serão prejudicados nas suas aprendizagens pelas intervenções da experiência de ensino, dado que as mesmas tratam conteúdos que estão incluídos no programa da disciplina de Álgebra Linear e são enquadradas na planificação global das aulas sem prejudicar o cumprimento de conteúdos e objetivos a desenvolver na disciplina. Neste sentido, as intervenções da experiência de ensino pretendem contribuir para a consolidação de aprendizagens e consecução dos objetivos considerados no programa de Álgebra Linear.

No que respeita ao investigador e sua conduta ética, garanto honestidade e integridade na realização do estudo. Nomeadamente, garanto que todos os dados que integram este documento são originais, produto da recolha feita nas diferentes intervenções. Por último, como investigador, estou consciente da importância de tornar público e divulgar o conhecimento que emerge dos resultados deste estudo, contribuindo com conhecimento novo que se espera relevante para o próprio e para outros investigadores, professores e estudantes da área da educação matemática.

CAPÍTULO 5

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Neste capítulo apresento a experiência de ensino, começando por fazer referência ao contexto e aspetos gerais da disciplina onde a mesma se realizou. Depois apresento o estudo piloto, detalhando o seu objetivo, as opções metodológicas e de gestão de aula consideradas, bem como os resultados obtidos que foram considerados na preparação da experiência de ensino que serve de base a este estudo e que descrevo a seguir. Finalmente, é descrita a experiência de ensino, considerando o seu objetivo, a planificação cronológica da experiência que inclui a descrição das tarefas propostas, além da gestão de aula desenvolvida.

5.1 Contexto e aspetos gerais da disciplina de Álgebra Linear

A disciplina de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica é identificada a nível curricular como a disciplina matemática designada por MA1004. Esta disciplina é oferecida semestralmente pela Universidade de Costa Rica como parte das disciplinas do departamento de Matemática Aplicada da Escola de Matemática para estudantes dos cursos de Engenharias, Física, Economia, Estatística e Meteorologia. A disciplina é de carácter teórico-prático, o que significa que o professor apresenta a teoria correspondente aos conteúdos estipulados no programa e realiza exercícios matemáticos que exemplificam os diferentes conteúdos conforme vai avançando com a teoria.

O programa da disciplina enfatiza três objetivos gerais: 1) o trabalho com modelos lineares para a resolução de problemas próprios do contexto da Matemática pura, mas que possam ser aplicados posteriormente pelo estudante noutras disciplinas, em contextos vários; 2) a utilização correta de linguagem matemática e do simbolismo formal da álgebra linear de forma adequada; 3) e o domínio dos conceitos e processos matemáticos lecionados. Quanto à metodologia, o programa de MA1004 menciona a possibilidade de incluir estratégias que não se limitem à exposição do professor, as quais podem incluir leitura individual ou coletiva de material recomendado, com explicações e exemplificações dos conceitos; acesso individual a vídeos sobre conceitos, provas resolvidas de semestres anteriores e outros recursos digitais disponíveis na plataforma MOODLE (utilizada pelo coordenador da disciplina) ou “Mediación Virtual” (utilizada pelo professor da turma), além da utilização de tecnologias, como calculadoras e *software* (Sánchez, 2018).

A disciplina admite uma quantidade aproximada de 20 turmas por semestre, com uma média de 25 a 35 estudantes por turma no caso de disciplinas regulares, e 20 a 25 estudantes por turma no caso das disciplinas com modalidade laboratório. No que se refere ao ambiente físico, a aula de laboratório onde é desenvolvido o estudo piloto e a experiência de ensino é mostrada na figura 5.1, sendo um ambiente onde os estudantes estão distribuídos por mesas, cada uma com espaço para até três estudantes e todos têm acesso a computador.

Figura 5.1. Ambiente físico de trabalho na experiência de ensino.

Os estudantes que frequentam a disciplina MA1004 são de diferentes cursos, tornando-a um ambiente favorável para observar distintas formas e ritmos de aprendizagem. A experiência docente do investigador mostra que alguns estudantes abandonam a disciplina antes de terminar o semestre, o que resulta em parte das dificuldades na compreensão de conceitos de álgebra linear já referidas na revisão de literatura. O único requisito para frequentar a disciplina é ser estudante inscrito na Universidade da Costa Rica e pertencer a algum dos cursos mencionados acima. Assim, o estudante pode-se matricular na disciplina MA1004 desde que ingressa no primeiro ano. No entanto, esta disciplina é requisito para outras disciplinas matemáticas como Cálculo III e Equações Diferenciais, o que implica que a maior parte dos estudantes que se matriculam estão no primeiro ou segundo ano do seu curso.

Em termos de tempo de trabalho em sala de aula, o estudante deve assistir duas vezes por semana a aulas presenciais, o que corresponde a 4h30min por semana durante dezasseis semanas letivas, ao longo das quais estão distribuídas as dez unidades de tópicos de álgebra linear a lecionar sequencialmente de acordo com o programa (Sánchez, 2018): 1) Matrizes; 2) Sistemas Lineares de Equações; 3) Matrizes Invertíveis; 4) Determinantes; 5) Geometria de Vetores; 6) Espaços Vetoriais; 7) Transformações Lineares; 8) Ortogonalidade; 9) Diagonalização de matrizes; 10) Curvas e superfícies quadráticas.

Os estudantes realizam um total de três testes ao longo da disciplina, cuja classificação contribui 90% para a nota final nas disciplinas com modalidade de laboratório, como é o caso do contexto da disciplina de Álgebra Linear utilizada neste estudo. Os restantes 10% da nota final são avaliados através de minitestes ou práticas que são trabalhadas pelos estudantes através de utilização da tecnologia, especificamente com programas como *Mathematica*, *Matlab*, *GeoGebra* e *Excel*.

Quanto ao contexto particular da turma onde se realizou o estudo, lecionaram-se duas aulas por semana, sendo uma teórica (1h50 min), numa sala sem tecnologia, e outra em laboratório de computador (2h40 min), onde se avança com a teoria na primeira aula e dedica-se o tempo restante à prática dos conceitos lecionados com tecnologia e a trabalhar as tarefas da experiência de ensino. Nos três testes de avaliação, a modelação matemática dentro de um contexto da vida real não foi considerada, mas apenas na determinação e utilização de equações algébricas num contexto de Matemática pura, cujo modelo já era disponibilizado pelo professor. A tecnologia é trabalhada em laboratório de computador a partir de minitestes (tarefas de antecipação), onde o professor ensina primeiro ao estudante, com metodologia tradicional expositiva, a utilizar o programa tecnológico para obter cálculos que envolvem algoritmos de álgebra linear ou para visualizar representações bidimensionais ou tridimensionais dos conceitos matemáticos dentro do contexto da Matemática pura.

5.2 Preparação da experiência de ensino: o estudo piloto

5.2.1 Objetivo

Previamente à preparação de uma experiência de ensino, é essencial que o investigador considere o conhecimento inicial dos estudantes e as metodologias de ensino e aprendizagem adequadas para ajudar a promover as aprendizagens esperadas (Molina, Castro, Molina & Castro, 2011). No caso de o investigador ser o professor da turma, pode apoiar-se na sua experiência profissional, nomeadamente no conhecimento do desempenho académico dos seus estudantes e outras características de interesse do contexto escolar, para o ajudar a planificar a experiência de ensino. Noutros casos, em que o investigador não é o professor da turma, a planificação da experiência de ensino, considerando os objetivos investigativos desejados e as características da disciplina e participantes alvo do estudo, apresenta-se mais difícil, requerendo que o investigador, em algum momento prévio à planificação da experiência, recorra a uma primeira aproximação aos participantes alvo do estudo. Neste estudo, o investigador não é o professor da turma, pelo que opto pela realização de um estudo piloto que pretende estabelecer uma conexão entre a conceptualização teórica do estudo e a realização da experiência de ensino, contribuindo para a definição das suas principais características. O objetivo do estudo piloto é avaliar tarefas de modelação matemática com recurso à tecnologia que serão usadas na experiência de ensino e o modo da sua implementação, visando melhorar aspetos relativos à sua estrutura e conteúdo e à dinâmica de sala de aula a implementar.

Assim, o resultado deste estudo piloto permite ao investigador obter um conhecimento geral dos estudantes alvo e do seu trabalho num contexto de aprendizagem com as características propostas, e confirmar que o uso de tarefas de modelação matemática com recurso à tecnologia permite aceder ao desempenho dos estudantes relativamente às aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear e competências de modelação, e identificar dificuldades que evidenciam ao trabalhar nas tarefas. Esta informação serve de base para o investigador perceber as potencialidades das atividades propostas e, portanto, preparar a sua proposta de experiência de ensino, tendo noção de que os processos de resolução das tarefas são uma fonte rica de evidências para a investigação que pretende realizar.

5.2.2 Contexto e aspetos metodológicos

O estudo piloto foi realizado durante o primeiro semestre de 2018 com 24 estudantes (13 masculinos e 11 femininos) de uma turma da disciplina MA1004 de Álgebra Linear lecionada num laboratório de computadores da Universidade da Costa Rica. As características dos estudantes são semelhantes às características dos participantes da experiência de ensino. O estudo foi realizado num total de 9 aulas, cada uma de 40 minutos, onde foram trabalhadas três tarefas de modelação em diferentes contextos reais (2 aulas/tarefa), para além de aplicada previamente às tarefas uma observação da turma toda (2 aulas) e uma entrevista semi-estruturada após o trabalho das tarefas (1 aula).

O papel do investigador durante as aulas foi o de observador participante, tendo nas primeiras duas aulas a função de observar o trabalho habitual que decorria em sala de aula, para além de informar a turma sobre objetivos do estudo piloto e obter as autorizações formais para a recolha de dados. Nas seguintes seis aulas, o investigador assumiu também o papel de professor e a observação focou-se no trabalho autónomo dos estudantes durante a resolução das tarefas de modelação e nos contributos que surgiam das discussões em grupos de trabalho e coletivas. Finalmente, na última aula, o investigador teve o papel de observador e, simultaneamente, de entrevistador.

Antes da aplicação da primeira tarefa o professor solicita aos estudantes que formem grupos de três elementos, ficando formado um total de oito grupos, que permaneceram fixos até ao final do estudo. Quanto à dinâmica da aula com tarefas de modelação, o professor dá diretrizes quanto à forma de trabalharem a tarefa (trabalho autónomo em grupo), recursos de que dispõem (folha em branco para a escrita das resoluções, lápis, caneta e computador) e a forma como a resolução da tarefa deve ser entregue (uma resolução por grupo, com os respetivos nomes dos integrantes). A seguir, é entregue o enunciado da tarefa aos estudantes de cada grupo, brevemente apresentada em termos gerais pelo professor, e os estudantes trabalham autonomamente na sua resolução durante 60min. No decurso da resolução de cada tarefa, o professor monitoriza o trabalho dos estudantes, intervindo quando considera necessário, quer para esclarecer dúvidas quanto ao enunciado, quer para promover discussões de aspetos interessantes observados. Dez minutos antes do tempo previsto para a discussão da tarefa, o professor faz um aviso para os estudantes finalizarem e arrumarem as suas resoluções, e de seguida recolhe as resoluções para começar a discussão coletiva, dedicando a esta atividade entre 15min a 20min.

Na tabela 5.1 apresento um resumo dos aspetos principais considerados na preparação, implementação e pós-implementação do estudo piloto.

Tabela 5.1. Aspetos considerados para o desenvolvimento do estudo piloto.

Estudo piloto (fases)	**Aspetos considerados**
Preparação da implementação em sala de aula	• Investigação teórica sobre: Programa da disciplina MA1004 no I semestre 2018, trabalhos empíricos sobre aprendizagem e dificuldades associados a álgebra linear e a modelação matemática com TIC, ambientes de discussões matemática na sala de aula. • Encontros com o professor da turma para coordenar momentos de implementação das tarefas e informar sobre a metodologia de trabalho. • Calendarização do estudo piloto (entre 15 de maio e 15 de junho de 2018). • *Contexto*: preparação da sala de computadores arrumada para o trabalho das tarefas de modelação em trios, com discussões em pequeno e grande grupo. • *Recolha de dados*: desenho de métodos e instrumentos de recolha de dados.
Implementação em sala de aula	• Observação inicial e informação formal sobre o estudo piloto.

	• Aplicação das tarefas: recolha das resoluções escritas e extratos do trabalho desenvolvido com tecnologia. • Realização da entrevista.
Pós-implementação em sala de aula	*Análise de dados*: Análise dos dados recolhidos a partir dos instrumentos utilizados e reflexão sobre contributos para a preparação da experiência de ensino.

Tal como a experiência de ensino, o estudo piloto segue uma abordagem metodológica qualitativa de paradigma interpretativo, sendo o papel do investigador de relevância (Cohen et al., 2011), quer para identificar e interpretar aprendizagens relativas a conceitos de álgebra linear e competências de modelação, quer para identificar dificuldades evidenciadas pelos estudantes no seu trabalho nas tarefas e nas dinâmicas de sala de aula propostas. A recolha de dados inclui: 1) recolha documental das resoluções escritas dos estudantes em três tarefas de modelação e extratos do seu trabalho com tecnologia; 2) observação participante com recurso a notas de campo e gravação de áudio de discussões em grupo desenvolvidas entre estudantes e estudante-professor durante o trabalho das tarefas e discussões coletivas após o trabalho de cada tarefa; e 3) uma entrevista semi-estruturada com recurso a gravação de áudio realizada a dois estudantes de diferente sexo e grupo de trabalho após a aplicação das três tarefas.

As observações realizadas nas discussões de trabalho em grupo tiveram o mesmo objetivo que assumiram na experiência de ensino, nomeadamente aprofundar a informação sobre as aprendizagens dos estudantes. As discussões coletivas são guiadas a partir de questões planificadas pelo professor previamente à tarefa, considerando questões como: 1) principais dificuldades que o estudante enfrentou; 2) potencialidades que reconhecem na tarefa; 3) utilização dada à tecnologia em comparação com tarefas que costumam trabalhar em sala de aula; 4) questões relativas ao solicitado em cada questão da tarefa; e 5) discussão de aprendizagens de conceitos. Após considerar a discussão dos aspetos anteriores, procede-se a encorajar o estudante para relacionar o trabalho feito na tarefa com conceitos de álgebra linear trabalhados na sala de aula, dando fim à discussão coletiva.

A entrevista teve como objetivo aceder a informação relevante sobre a experiência do estudante no trabalho com tarefas de modelação e, em geral, sobre a dinâmica de sala de aula proposta no estudo piloto. A entrevista foi realizada com dois estudantes, sendo critérios de seleção a escolha de um estudante masculino e uma estudante feminina, um dos quais com participação intensa durante as discussões e o outro com participação reduzida ou quase nula, procurando obter informação relevante a partir dessa heterogeneidade.

A análise de dados, de natureza descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009), focou-se nas categorias de análise também consideradas na experiência de ensino, nomeadamente, aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear, competências de modelação, e dificuldades evidenciadas nas resoluções das tarefas e nas discussões em grupo e coletivas, assim como nos contributos referidos pelos estudantes quanto ao trabalho com tarefas de modelação implementadas no estudo piloto. Esta análise é orientada para a interpretação dos dados descritos e para a tomada de decisões sobre as tarefas, que serão consideradas na experiência de ensino e a forma de as dinamizar.

No que respeita a questões éticas, seguem-se os mesmos princípios éticos desenvolvidos para a experiência de ensino, tendo sido solicitada autorização de recolha de dados aos estudantes e ao professor da turma, tendo o investigador garantido o anonimato dos participantes e a confidencialidade dos dados apresentados no estudo.

5.2.3 Principais resultados

Nesta secção apresento os principais resultados da análise realizada após a implementação do estudo piloto, com foco no desempenho dos estudantes e nas características das tarefas, que permitem decidir posteriormente quais os aspetos que emergem deste estudo e que devem ser considerados na experiência de ensino.

A primeira tarefa (Anexo A1) apresentava um problema contextualizado sobre o abastecimento de água a cinco casas a partir de um sistema de tubagens, esperando que o estudante construísse um modelo algébrico de sistema de equações lineares (SEL) para decidir sobre fluxos máximos e mínimos em cada trajeto do sistema de tubagens. Os estudantes evidenciam conhecimentos de SEL, embora alguns formulem um SEL baseado em modelos reais que não se enquadram no contexto da situação problema e grande parte tem dificuldades na interpretação do conjunto solução do SEL construído. Em particular, as dificuldades ocorrem em interpretar os parâmetros matemáticos do conjunto solução obtido no contexto real da situação problema. Todos os estudantes da turma conseguem mobilizar competências de modelação como a construção de um modelo real, a matematização do modelo e trabalhar matematicamente no modelo. No entanto, poucos estudantes utilizaram o *Matlab* para o trabalho na tarefa, sendo a função do *software* sobretudo agilizar cálculos para trabalhar matematicamente o modelo. Outras competências, como a interpretação da solução de um SEL a nível do contexto do problema que é evidenciada por poucos estudantes e a validação de resultados reais que não é realizada por nenhum estudante, devem ser alvo de uma preocupação para reforçar a interpretação de resultados matemáticos, tal como a formulação de um SEL que represente as condições de um contexto real.

Na segunda tarefa (Anexo A2), que apresentava um problema contextualizado sobre trajetórias de movimento de drones, o objetivo era que o estudante mobilizasse conhecimentos de espaços vetoriais e construísse um modelo algébrico a partir de uma combinação linear de vetores base em IR^2 ou IR^3 para descrever e analisar a trajetória translacional de um drone. Os estudantes mostram saber como resolver a tarefa, reconhecendo que o conceito de base de um subespaço vetorial está implícito na tarefa. Também são capazes de mobilizar todas as competências requeridas para percorrer o ciclo de modelação, incluindo interpretar resultados matemáticos no contexto da situação problema com base em explicações gráficas ou algébricas e propor soluções validadas que respondem aos requisitos do modelo solicitado na tarefa, embora não recorram à utilização da tecnologia no seu processo de modelação, tendo resolvido a tarefa manualmente. Verificou-se igualmente que a tarefa não levanta dificuldades conceptuais para o estudante, e que a situação problema apresentava baixo desafio cognitivo, devendo considerar-se, na planificação da experiência, que a simplicidade da situação problema pode levar a que todos os estudantes resolvam a tarefa manualmente, não precisando de utilização de tecnologia em nenhum momento, o que significará uma necessidade de adaptação desta tarefa para que seja mais pertinente integrar a tecnologia.

Por último, a terceira tarefa (Anexo A3) apresentava um problema contextualizado sobre codificação de mensagens através de código ASCII (Código Padrão Americano para a troca de Informação), pretendendo que o estudante mobilizasse conhecimentos de operações com matrizes e, em particular, que construísse um modelo algébrico a partir de adições ou produtos de matrizes para codificar e decodificar mensagens textuais com base nas operações definidas. Poucos estudantes foram capazes de utilizar produtos matriciais para resolver o problema. Os que o fizeram associam a resolução do problema proposto com o cálculo de composição de transformações lineares ou produto de matrizes; os outros estudantes utilizam operações de adição de matrizes como modelo. Em relação às competências de modelação, só metade dos estudantes consegue construir um modelo matricial, dos quais poucos conseguem trabalhar matematicamente no modelo utilizando o *Matlab* para o cálculo de matrizes invertíveis. Assim, os estudantes que optam por escolher um produto matricial como modelo matemático reconhecem que este requer mais trabalho manual do que o modelo de adição, pelo que utilizam o computador para facilitar o subprocesso de trabalho matemático com o modelo. Outras competências como interpretação e validação de resultados não são mobilizadas, pelo que são poucas as competências de modelação evidenciadas pelos estudantes, sendo necessário orientá-los melhor na resolução do problema e nas questões apresentadas.

As discussões em grupo e coletivas ajudaram na interpretação de informação obtida nas resoluções das tarefas. Explicitamente, a partir de tais discussões foi possível evidenciar que: na primeira tarefa, os estudantes pensam em vários conhecimentos algébricos para identificar quais devem mobilizar para resolver o problema, interpretando-se que os estudantes mobilizam competências para estruturar e matematizar o modelo real de diversas formas; na segunda tarefa, existem estudantes que analisam modelos mais ou menos complexos, isto é, modelos com pouca ou grande quantidade de obstáculos físicos na trajetória do drone, mostrando competências para simplificar o modelo real de diversas formas; e na terceira tarefa, observa-se estudantes que manifestam verbalmente a sua escolha de um modelo matricial como produto de matrizes. Alguns associam os seus cálculos com a composição de transformações lineares e outros com operações elementares sobre matrizes, o que evidencia os conceitos matemáticos que os estudantes relacionam para um mesmo objeto matemático, neste caso, as matrizes. O facto de haver mais de uma maneira de relacionar a situação problema com o conhecimento matemático, como referido nas discussões em grupo mas não muito evidenciado nas suas resoluções escritas, veio dar sentido aos processos de modelação não lineares de vários grupos de estudantes, o que mostrou a importância de analisar rotas de modelação que os estudantes seguem, em paralelo com as competências de modelação e aprendizagens de conhecimentos desenvolvidas.

Para além disso, a partir das discussões em grupo foi possível identificar dificuldades manifestadas pelos estudantes, incluindo a dificuldade em compreender a linguagem coloquial e também a linguagem matemática utilizada no enunciado da tarefa, indicando a necessidade de incluir no enunciado orientações mais explícitas sobre aquilo que têm de fazer. Portanto, as discussões desenvolvidas no trabalho em grupo e coletivamente ajudaram a ter informação mais abrangente sobre as dificuldades, aprendizagens de conhecimentos e processos de modelação dos estudantes, a partir dos caminhos de resolução que seguiram, nomeadamente as suas rotas de modelação.

Na entrevista, os participantes manifestaram que, embora as tarefas de modelação trabalhadas fossem motivadoras para trabalhar na sala de aula, os conceitos de Álgebra Linear lecionados na disciplina eram muito abstratos para o nível do curso em que se encontram, tornando difícil o trabalho com problemas contextualizados em situações reais. Também referiram o facto de não estarem familiarizados com questões colocadas em contextos reais, que consideraram ser uma dificuldade das tarefas de modelação. Neste sentido, a entrevista permitiu interpretar vantagens e desvantagens do trabalho com as tarefas de modelação implementadas no estudo piloto, interpretando-se globalmente que os estudantes acharam importante a contextualização real dos conceitos, mas sentem a necessidade de um equilíbrio entre o conteúdo formal na disciplina e o trabalho com tarefas em contextos reais.

Considerando o anteriormente exposto, pode-se concluir que a primeira e a terceira tarefa do estudo piloto foram as que geraram maiores dificuldades aos estudantes, ao passo que a segunda tarefa foi de fácil resolução, mas sem provocar a mobilização de tecnologia. As discussões desenvolvidas nos grupos e coletivamente ajudaram a aprofundar a identificação de aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear e competências de modelação, levantando também a possibilidade de considerar o estudo de rotas de modelação na experiência de ensino. A entrevista, por sua vez, ajudou a identificar contributos da intervenção realizada com três tarefas de modelação, permitindo também refletir sobre a necessidade de complementar a investigação com outros instrumentos de recolha de dados para chegar a uma maior quantidade de contributos para o estudo.

5.2.4 Contributos do estudo piloto

Os resultados da análise apresentados anteriormente revelam o potencial das tarefas de modelação para aceder às aprendizagens dos estudantes mas levam a refletir sobre a reformulação de alguns aspetos destas três tarefas, a considerar na planificação da experiência de ensino, designadamente procurando diminuir as dificuldades evidenciadas pelos estudantes e promover a utilização da tecnologia na experiência de ensino. Assim, no que se refere às tarefas, serão tomadas as seguintes opções:

Tarefa 1

1) Diminuir a dificuldade do problema:

   - propondo um problema que requeira um modelo algébrico mais simples, isto é, a formulação de um SLE com menor número de equações, facilitando a construção do modelo matemático e, sobretudo, a sua análise. Consequentemente, o modelo matemático a propor passará a ser um modelo onde o estudante deva analisar só um parâmetro, em vez de dois;

   - propondo um contexto diferente da situação a modelar, procurando familiarizar mais o estudante com os termos do contexto da tarefa para evitar dificuldades de entendimento da linguagem coloquial. Neste sentido, propõe-se trocar o contexto de fluxos pelo contexto de trânsito automóvel;

- acrescentando informação às questões do problema, que possa guiar mais o estudante no que tem de fazer, facilitando-lhe o processo de interpretação do resultado matemático;

- eliminando a questão 3, incorporando parte da resposta pretendida como informação guia para a solução das outras questões.

2) Acrescentar um trabalho com tarefas de exercícios previamente à aplicação da tarefa de modelação, para reforçar conhecimentos relativos ao estudo de sistemas de equações, incluindo conhecimentos prévios que não são comummente parte do programa da disciplina de Álgebra Linear, como o trabalho com inequações lineares. A nível de estrutura, estes exercícios devem promover a determinação e análise do conjunto solução de um sistema, para além da análise de parâmetros em inequações lineares.

Tarefa 2

1) Reformular o contexto real da tarefa:

- propondo uma situação real que leve a um modelo algébrico que faça sentido ser trabalhado pelo estudante com utilização de tecnologia;

- propondo um contexto diferente da situação a modelar, procurando familiarizar mais o estudante com os termos do contexto da tarefa para evitar dificuldades associadas à compreensão da linguagem coloquial. Neste sentido, propõe-se trocar o contexto de drones pelo contexto de senhas bancárias.

2) Acrescentar um trabalho com tarefas de exercícios previamente à aplicação da tarefa de modelação, para reforçar conhecimentos relativos ao estudo de espaços vetoriais, incluindo conhecimentos que sejam necessários para o trabalho da tarefa de modelação. A nível de estrutura, estes exercícios devem promover a determinação de bases de um subespaço vetorial e conhecimentos relacionados, como independência linear e conjunto gerador de um subespaço vetorial.
3) Reformular as condições solicitadas no enunciado e acrescentar, como parte da informação, a utilização de tecnologia para trabalhar o modelo matemático e obter resultados matemáticos.

Tarefa 3

1) Reformular a pergunta 1 para:
   - esclarecer o que se solicita ao estudante;
   - não restringir o problema à utilização de uma tabela de codificação associada ao exemplo apresentado.
2) Acrescentar um trabalho com tarefas de exercícios previamente à aplicação da tarefa de modelação, para reforçar conhecimentos relativos ao estudo de matrizes, incluindo conhecimentos que sejam necessários para o trabalho da tarefa de modelação. A nível de estrutura, estes exercícios devem promover o trabalho com equações matriciais que envolvam propriedades de operações matriciais e os conceitos relativos ao cálculo da matriz inversa de uma matriz invertível, levando o estudante a recorrer mais à utilização de tecnologia.
3) Mudar a ordem de implementação da tarefa, considerando trabalhá-la como a segunda tarefa de modelação da experiência de ensino, procurando restringir as aprendizagens à unidade de matrizes, e deixando a mobilização de aprendizagens como transformações lineares para o trabalho com outra tarefa de modelação.

Em termos de instrumentos e métodos de recolha de dados, na experiência de ensino optarei por incorporar um questionário para complementar a informação recolhida a partir da entrevista, permitindo aceder a uma maior quantidade de dados que ajudem a identificar contributos da experiência de ensino e outros aspetos já referidos no capítulo 4. Para além disso, em termos de recolha documental, serão incorporadas mais duas tarefas de modelação matemática na intervenção, procurando alargar e diversificar as aprendizagens matemáticas a serem mobilizadas pelos estudantes e a familiarização com o processo de modelação, nomeadamente a promoção de competências de modelação como a interpretação e validação de resultados. Ainda relativamente à recolha documental, serão incorporadas cinco tarefas de exercícios matemáticos, nomeadas de tarefas de antecipação, para o estudante ter oportunidade de consolidar os seus conhecimentos de álgebra necessários para a realização da tarefa de modelação.

Em termos de dinâmica de aula, a experiência de ensino mantém o trabalho em grupo e as discussões coletivas, mas dando maior ênfase na recolha de dados às discussões nos grupos de trabalho, de modo a enfatizar nas discussões coletivas o aspeto mais formativo sobre o trabalho de modelação, focado em diferentes propostas de modelos matemáticos construídos pelos estudantes e uma solução proposta pelo investigador, considerando o objetivo da transição por todo o ciclo de modelação matemática.

5.3 Planificação da experiência de ensino

5.3.1 Objetivos de aprendizagem

A experiência de ensino está enquadrada curricularmente nos objetivos gerais, objetivos de aprendizagem e tópicos matemáticos definidos no programa da disciplina de Álgebra Linear (Sánchez, 2018) na qual se realizou o estudo. A tabela 5.2 apresenta uma sequência de unidades temáticas (UT) de Álgebra Linear que foram trabalhadas na experiência de ensino e os respetivos testes em que os estudantes são avaliados em termos de aprendizagens destas unidades na disciplina MA1004.

Tabela 5.2. Unidades de temas da disciplina MA1004 de Álgebra Linear.

Unidade temática (UT)	Teste em que se avalia
UT1: Sistemas de equações lineares	I teste
UT2: Matrizes (operações com matrizes e matriz invertível)	I teste
UT3: Geometria de vetores	II teste
UT4: Espaço vetorial	II teste
UT5: Transformações lineares	II teste

Em cada unidade temática é proposta uma tarefa de modelação após a exploração da respetiva tarefa de antecipação, procurando atingir os objetivos de aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear mostrados na tabela 5.3.

Tabela 5.3. Objetivos específicos de aprendizagem da experiência de ensino de acordo com o programa de Álgebra Linear MA1004 (Sánchez, 2018).

Objetivos específicos de aprendizagem
1. Aplicar algoritmos adequados para resolver e expressar corretamente o conjunto solução de sistemas de equações lineares (UT1).
2. Conhecer a álgebra de matrizes e cálculo de determinantes, e aplicá-la corretamente na resolução e análise dos sistemas de equações lineares (UT2).
3. Conhecer e aplicar a geometria vetorial em diferentes tipos de problemas (UT3).
4. Conhecer a estrutura de espaço vetorial e compreender IR^n a partir desse conceito (UT4).
5. Identificar se um conjunto de vetores é uma base (UT4).
6. Conhecer as propriedades básica das transformações lineares e a sua relação com a álgebra de matrizes (UT5).

7.	Determinar se uma função de IR^n em IR^m é uma transformação linear e representar uma transformação desse tipo mediante uma matriz (UT5).
8.	Determinar transformações lineares entre espaços de dimensão finita (UT5).

Para além dos objetivos de aprendizagem, a experiência de ensino procura integrar eixos curriculares transversais que são considerados no programa de Matemática do Ensino Básico e Secundário do currículo da Costa Rica (MEP,2012), nomeadamente: a resolução de problemas; a contextualização ativa como componente pedagógica específica; o uso inteligente e visionário das tecnologias digitais; e a promoção de atitudes e crenças positivas em relação à Matemática (p. 17). Estes eixos são considerados transversais e devem guiar a formação nos diferentes temas matemáticos para que o estudante, como cidadão, possa enfrentar com êxito os obstáculos com que se depara. Neste sentido, estes eixos são relevantes não só para os níveis escolares básico e secundário, mas também para o ensino superior, tendo em consideração as recomendações de Carlson et al. (1993) para o ensino e aprendizagem da álgebra linear, especialmente o facto de os estudantes sentirem a necessidade de aprender matemática significativa no ensino superior (Biggs & Tagg, 2011). Isto acontece também com os estudantes universitários da Costa Rica que participam na experiência de ensino.

A resolução de problemas é necessária para "assumir estândares cuja conveniência para a Educação Matemática tem sido amplamente comprovada na escala internacional" (MEP, 2012, p. 17), enquanto a contextualização ativa como uma componente que complementa a resolução de problemas se torna necessária para promover um papel ativo do estudante e comprometido com sua aprendizagem quando trabalha com modelos matemáticos (MEP, 2012). Estes dois eixos disciplinares são fomentados a partir do trabalho com tarefas de modelação, sendo tarefas que encorajam o estudante a desenvolver competências para trabalhar problemas em contextos reais e ao mesmo tempo trabalhar na consolidação de aprendizagens matemáticas.

No que se refere ao uso da tecnologia, considera-se uma prática que faz parte do mundo atual e, consequentemente, uma exigência de conhecimento que a sociedade em que vivemos impõe. No que se refere às práticas educativas na aula de Matemática,

> O trabalho com problemas adquire uma perspetiva vigorosa quando se realiza em contextos reais e se usa a modelação. A utilização de tecnologias digitais trabalha na mesma direção, pois não só oferece meios que intervêm como apoio, mas também meios para modificar o significado de algumas fases e objetivos no trabalho de problemas. (MEP, 2012, p. 32)

Neste sentido, a tecnologia possibilita ao participante da experiência de ensino escolher outros caminhos de resolução da tarefa que permitam facilitar o seu processo de modelação ou inclusive avançar além de uma determinada fase do ciclo de modelação matemática, abrindo igualmente espaços para os estudantes refletirem, nos grupos de trabalho, sobre a melhor forma de utilizar a tecnologia para elaborarem os modelos matemáticos pretendidos.

Por último, a promoção de atitudes e crenças positivas sobre a Matemática refere-se à necessidade de práticas educativas que permitam que o estudante perca o medo da Matemática e queira aprendê-la, pois "quando os estudantes sentem essa necessidade de saber, eles automaticamente tentam concentrar-se em significados subjacentes, em ideias principais, temas, princípios ou aplicações bem-sucedidas" (Biggs & Tagg, 2011, p. 26). Neste sentido, a utilização de contextos reais e o recurso à tecnologia procuram ser aspetos promovidos nas tarefas de modelação da experiência de ensino que poderão ser motivadores do processo de ensino e aprendizagem quando trabalhados apropriadamente.

Os quatro eixos disciplinares estão articulados com os objetivos de aprendizagem presentes na experiência de ensino, pelo que no trabalho realizado durante cada intervenção com tarefas de modelação é trabalhado um objetivo de aprendizagem e simultaneamente os quatro eixos disciplinares. Ao finalizar a experiência de ensino, espera-se que o estudante seja capaz de trabalhar os conceitos matemáticos de forma criativa em contextos reais particulares que o incentivem a refletir sobre quando, onde e como aplicar esses conceitos, podendo aprofundar a sua compreensão da álgebra linear. Para além disso, espera-se que o estudante adquira competências de modelação que lhe permitam posteriormente trabalhar tarefas que envolvam conceitos de álgebra linear em contextos não exclusivamente matemáticos.

5.3.2 Princípios orientadores

A planificação de uma proposta didática deve obedecer a um conjunto de interesses do investigador e ao mesmo tempo responder às aprendizagens que devem ser promovidas no estudante. Neste sentido, o desenvolvimento de pesquisa na universidade deve ajudar a que a investigação desenvolvida permita responder aos objetivos da investigação e, simultaneamente, possa promover a aprendizagem da Matemática pelos estudantes.

Tendo em conta os pontos anteriores, a planificação desta experiência de ensino pretende propor uma abordagem pedagógica que considere dois pontos essenciais: objetivos de aprendizagem e contexto de sala de aula. Por um lado, a planificação enquadra-se dentro dos objetivos de aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear e as aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear que se pretendem investigar e promover. Por outro, a utilização de contextos reais na experiência de ensino enquadra-se como parte das práticas alternativas de ensino e aprendizagem a propor na disciplina de Álgebra Linear e como elemento determinante da investigação para assumir uma proposta didática de modelação matemática para o desenvolvimento de competências de modelação.

Tendo em consideração que as tarefas iniciais devem partir de um nível de dificuldade acessível para o estudante, para subsequentemente se ir aumentando esse nível (Oliveira, 2001), considero duas primeiras tarefas com trabalho sobre conteúdos que geram menos dificuldade para o estudante. A partir da distribuição das unidades temáticas que foi mostrada na tabela 5.4 e as dificuldades observadas na literatura e na experiência do investigador em anos anteriores, referentes ao desempenho dos estudantes, foi possível identificar as unidades onde os estudantes costumam apresentar menor e maior dificuldade, sendo critério para a escolha da sequência de tarefas da experiência de ensino. A planificação considera três tarefas de modelação relativas a conceitos que tenho identificado como de carácter abstrato na minha prática docente, com base nas manifestações dos estudantes e nas investigações teóricas. Considera igualmente duas tarefas de modelação com conceitos que, embora não sejam comummente geradores de dificuldades, foi necessário considerar na experiência de ensino para os estudantes começarem a trabalhar tarefas de modelação com conceitos de menor grau de dificuldade, para além de abordarem contextos ricos para o trabalho de situações da vida real e se adaptarem ao cronograma de tempos previstos na experiência de ensino. Na tabela 5.2 foi observado que os conceitos correspondentes às unidades de matrizes e SEL são avaliados no primeiro teste e os conceitos correspondentes às unidades consideradas na literatura de carácter abstrato e difícil são avaliados no segundo teste. Desta forma, a experiência de ensino tem o seu maior peso no trabalho com conceitos de álgebra linear que geram dificuldade para o estudante, o que tem a ver com um princípio de design procurado pelo investigador para favorecer uma contextualização real desses conceitos e permitir que o estudante rompa com o carácter abstrato que lhe atribui.

Para além das cinco tarefas de modelação mencionadas, a experiência também considera a realização de cinco tarefas de antecipação, as quais consistem em tarefas de exercícios ou problemas matemáticos, em contextos da Matemática Pura. Estas tarefas incluem entre duas e quatro questões, algumas a serem trabalhadas com utilização de computador e outras manualmente. Os exercícios ou problemas que estruturam as tarefas correspondem a adaptações de atividades matemáticas de um dos livros que faz parte das fontes bibliográficas de estudo da disciplina de Álgebra Linear (Arce, Castillo & González, 2014). Os conhecimentos matemáticos envolvidos nestas tarefas de antecipação são conhecimentos da disciplina de

Álgebra Linear que são requeridos para trabalhar com êxito nas tarefas de modelação. Neste sentido, as tarefas de antecipação têm como objetivo avaliar e reforçar conhecimentos prévios para o trabalho com tarefas de modelação na experiência de ensino.

Antes de começar o trabalho com as tarefas de antecipação e modelação foi decidido realizar uma sessão de intervenção formativa com uma tarefa de modelação que trabalha o conceito de função afim (*Anexo F*), objetivando capacitar o estudante sobre o que implica executar o processo de modelação matemática segundo a perspetiva cognitiva (Borromeo Ferri, 2007, 2018). Para além disso, são propostas duas tarefas para os estudantes explorarem antes de começarem o trabalho com as tarefas de antecipação e modelação (*Anexo F*). Para continuar esta apropriação do processo de modelação, após o trabalho em cada tarefa de modelação e durante as discussões coletivas, é apresentado ao estudante uma proposta de resolução da tarefa dividida por subprocessos de modelação que enfatiza o ciclo ideal de modelação. Assim, a capacitação dos estudantes para levarem à prática o processo de modelação também faz parte dos princípios da experiência.

A experiência de ensino também considera as seguintes características de cenários que promovem um bom contexto de aprendizagem no ensino superior, citadas por Biggs e Tagg (2011), nomeadamente:

1) *Aprendizagem reflexiva*: a partir do trabalho em grupo e das discussões geradas entre estudantes e estudante-professor durante o trabalho nas tarefas, procura-se que o estudante possa refletir sobre sua aprendizagem.

2) *Atividades de aprendizagem relevantes*: a metodologia da experiência baseada na resolução de tarefas de modelação permite que o estudante se envolva em diferentes modalidades de atividades de sala aula que fomentam a utilização do conhecimento matemático, a contextualização no quotidiano, a tecnologia, e a comunicação de ideias como aspetos relevantes para o futuro cidadão e, portanto, para a aprendizagem do estudante, encorajando-o a potenciar competências e conhecimentos de Álgebra Linear que deve aprender na disciplina.

3) *Feedback formativo*: as discussões coletivas estão pensadas para informar os estudantes sobre os distintos modelos criados e as dificuldades evidenciadas, mas também partilhar com eles uma proposta possível de resolução da tarefa, apresentada pelo investigador, que lhes permita fazer uma auto-avaliação do seu próprio trabalho, onde o feedback sirva como “ponte para reduzir a distância entre aquilo que os estudantes fazem e o que deveriam fazer” (p. 64).

4) *Motivação apropriada*: três pontos a considerar que são essenciais: i) as tarefas de modelação propostas são desafiadoras, mas também com um nível possível de resolução para o estudante, permitindo-lhe enfrentar um obstáculo capaz de ser superado; ii) as tarefas de modelação procuram ser significativas para a realidade do estudante, considerando contextos reais conhecidos pessoalmente ou na sua formação académica; e iii) o ambiente de sala de aula proposto na experiência de ensino visa promover a confiança do estudante para se desenvolver com o seu maior potencial, em particular, trabalhando em grupos e com a liberdade de escolha de utilizar o recurso tecnológico nas tarefas de modelação dentro da sala de aula.

5) *Base de conhecimento interligado*: a experiência de ensino parte dos conhecimentos matemáticos que o estudante já sabe, não da reformulação total do seu conhecimento, procurando que o estudante ligue o conhecimento baseado no contexto real com o seu conhecimento matemático para criar relações entre ambos os mundos, o real e o matemático, que o ajudem na consolidação das suas aprendizagens e desenvolvimento de competências de modelação.

6) *Aprendizagem social*: como consequência dos ambientes de modelação, surge a aprendizagem de trabalho em grupo, procurando que o estudante desenvolva sua capacidade comunicativa, o trabalho cooperativo e aprenda com os outros quando discute a nível de grupo e da sala de aula contribuições de diversas resoluções das tarefas.

7) *Ensino de qualidade*: "se os estudantes estão a aprender ideias complexas, eles necessitarão de apresentações variadas. Onde o mesmo conceito seja apresentado de diferentes formas, usando diferentes exemplos" (p. 69). Embora o professor da turma se encarregue de introduzir os conceitos matemáticos ao estudante mediante apresentações em Power Point ou com a escrita no quadro, o contexto real das tarefas permite que os estudantes tenham outra maneira de visualizar o conceito, sendo também questionados no final de cada tarefa sobre outros contextos onde poderiam utilizar o conceito matemático em causa.

Em relação a estes sete princípios, e à componente tecnológica em particular, a experiência de ensino considera os critérios de tarefas de modelação integrando tecnologia salientados por Geiger (2017). A tecnologia funciona como recurso obrigatório no trabalho com tarefas de antecipação e como recurso de apoio facultativo para o trabalho em tarefas de modelação. Nas tarefas de antecipação os estudantes trabalham com *Geogebra* e *Mathematica*, ficando ao critério do professor da turma o *software* matemático específico com o qual se trabalha em certas questões de cada tarefa de antecipação. Nas tarefas de modelação o estudante tem a opção de trabalhar com qualquer *software* ou programa disponível no laboratório, à exceção da quarta tarefa de modelação em que é solicitado especificamente ao estudante trabalhar com o *Excel* para obter resultados matemáticos.

Esta abordagem tenta quebrar o esquema tradicional de sala de aula da disciplina MA1004 de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica, querendo envolver o estudante em ambientes de aprendizagem inovadores, como a modelação matemática, com apoio de ambientes dinâmicos de sala de aula fundamentados na tecnologia e em discussões coletivas e trabalho em grupo.

5.3.3 Planificação das atividades

Como parte de todo o processo de investigação baseado na introdução de práticas de ensino e aprendizagem em sala de aula, a realização de uma experiência de ensino requer uma planificação das atividades a serem trabalhadas com os estudantes. Esta planificação é apresentada na tabela 5.4, onde se apresenta a sequência das diferentes atividades e as respetivas técnicas e instrumentos de recolha de dados. Nesta tabela é utilizada a codificação TA# para referir as tarefas de antecipação e TM# para referir as tarefas de modelação.

Tabela 5.4. Planificação das atividades da experiência de ensino.

Data-2019	Atividade desenvolvida
15 de março	• Informação sobre o estudo investigativo à turma e entrega de autorização para recolha de dados (10 min). • Observação inicial da turma e do contexto de sala de aula (50 min).
22 de março	• Introdução, por parte do professor, do ciclo de modelação e resolução de tarefa de modelação *¿lo compro aqui o allá?* (30 min). • Designação de trabalho em casa das tarefas *El hombre y la casa* e *¿qué edad tiene mi tío?*
26 de março	• Discussão da tarefa *El hombre y la casa* e da tarefa *¿qué edad tiene mi tío?*, apresentando possível resolução para ambas as tarefas (10 min). • Aplicação de TA1 (30min).
2 de abril	• Explicação de contexto de tarefa TM1 (5 min). • Aplicação de TM1: *Tránsito preventivo* (55 min).
9 de abril	Aplicação de TA2 (30min).
30 de abril	• Discussão da tarefa TM1, apresentando possível resolução (10 min). • Explicação do contexto de tarefa TM2 (5 min). • Aplicação de TM2: *Cifrado y descifrado de códigos* (55 min).

7 de maio	Aplicação de TA3 (30min).
14 de maio	• Discussão da tarefa TM2, apresentando possível resolução (10 min). • Explicação do contexto da tarefa TM3 (5 min). • Aplicação de TM3: *Bordado de girasol en camisas académicas* (55 min).
21 de maio	Aplicação de TA4 (30min).
28 de maio	• Discussão da tarefa TM3, apresentando possível resolução (10 min). • Explicação do contexto da tarefa TM4 (5 min). • Aplicação de TM4: *Contraseñas de acceso bancario* (55 min).
4 de junho	Aplicação de TA5 (30min).
11 de junho	• Discussão da tarefa TM4, apresentando possível resolução (10 min). • Explicação do contexto da tarefa TM5 (5 min). • Aplicação de TM5: *Contraseñas de acceso bancario* (55 min).
18 de junho	• Discussão da tarefa TM5, apresentando possível resolução (10 min). • Aplicação de questionário (10min).
21 de junho	Aplicação de entrevista semi-estruturada (20min).

Como observado na tabela, a experiência de ensino é desenvolvida de 15 de março a 21 de junho de 2019, havendo aproximadamente uma intervenção por semana por parte do investigador durante as aulas em que o trabalho é realizado no laboratório de computador, que correspondem às aulas com 2h40min de duração.

5.4 Planificação das tarefas

Como parte de uma experiência de ensino, as tarefas representam um papel muito importante, contribuindo para as aprendizagens a desenvolver pelo estudante. Assim, a planificação das tarefas deve responder a uma estrutura sequencial que se ajuste aos objetivos de aprendizagem e, na medida do possível, aos tempos estabelecidos para irem sendo introduzidos os diferentes conceitos na disciplina matemática. Biggs e Tagg (2011) mencionam que para que as tarefas sejam significativas para o estudante é necessário que façam sentir o seu trabalho importante para eles, isto é, tarefas relacionadas com aquilo que estão a exercer. Neste sentido, as tarefas a propor na sala de aula devem considerar não só a variedade de tópicos, mas elementos significativos, quer para os efeitos da investigação quer para motivar o estudante na sua aprendizagem. No que segue são referidas as características gerais que possuem as tarefas que servem de base à experiência de ensino e posteriormente a descrição da composição estrutural e resultados esperados para cada tarefa implementada.

5.4.1 Características gerais das tarefas

As tarefas de antecipação avaliam aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear lecionados em aulas anteriores, onde são incluídas questões focadas nos conceitos e procedimentos que desafiam o estudante a mobilizar as aprendizagens de propriedades de conceitos matemáticos para além de cálculos requeridos para ter êxito nas diferentes tarefas de modelação. Para além disso, o desenho das tarefas de antecipação inclui pelo menos uma questão a ser trabalhada com tecnologia, visando avaliar a capacidade do estudante para recorrer a ferramentas computacionais aprendidas em aulas anteriores que o ajudem na redução de certos procedimentos matemáticos ou mesmo a encontrar resultados matemáticos que deem resposta à questão colocada.

Em relação ao desenho das tarefas de modelação, estas consideram as seis características de tarefas de modelação integrando tecnologia mencionadas por Geiger (2017), nomeadamente:

1) *Conformidade com o programa curricular*: a tarefa atende aos requisitos do plano curricular quanto a trabalhar conceitos matemáticos estabelecidos no programa da disciplina MA1004 e a utilização da tecnologia para o trabalho desses conceitos.
2) *Autenticidade e relevância*: os contextos propostos nas tarefas de modelação referem situações que não foram trabalhadas pelos estudantes no âmbito da álgebra linear antes da experiência de ensino e que explicitamente requerem aplicar conceitos matemáticos em contextos reais, o que faz com que as tarefas sejam de potencial interesse para o estudante e ao mesmo tempo um desafio a ser superado. Para além disso, as tarefas são relevantes para o estudante, introduzindo-o no contexto como se fosse parte dele, apresentando-lhe situações conhecidas do panorama nacional e que se relacionam com o dia a dia do estudante (TM1, TM3, TM4) ou contextos enquadrados por factos internacionais conhecidos pelo estudante através da sua formação académica, em disciplinas curriculares anteriores (TM2, TM5).
3) *Carácter aberto*: os contextos apresentados nas tarefas permitem que o estudante tenha mais de uma forma para resolver a tarefa, o que está relacionado com a diversidade de modelos reais que a tarefa permite criar. Este carácter aberto permite que o investigador identifique diferentes modelos matemáticos e diferentes rotas de modelação desenhadas

pelos estudantes, e ao estudante permite-lhe trabalhar a tarefa conforme os modelos que considere mais adequados para facilitar ou aprofundar o seu trabalho de resolução.

4) *Conetividade*: cada tarefa permite fazer conexões com diferentes áreas temáticas do programa curricular de Álgebra Linear (tabela 5.4). Assim, por exemplo, a primeira tarefa permite que o estudante faça conexões entre a unidade temática de matrizes e a unidade temática de SEL, enquanto a última permite que o estudante faça conexões entre a unidade temática de transformações lineares e a unidade temática de espaço vetorial.
5) *Acessibilidade*: os contextos das tarefas de modelação encorajam o estudante a mobilizar aprendizagens de Álgebra Linear, sendo significativos para o estudante porque ajudarão na consolidação dessas aprendizagens e permitirão encontrar utilidade nos conteúdos que fazem parte da disciplina.
6) *Desenvolvimento*: O carácter desafiador das tarefas permite que os estudantes se vejam frente à necessidade de utilizar o seu potencial de aprendizagem num nível maior do que aquele utilizado na resolução de exercícios puramente matemáticos, tendo de refletir e de se questionar sobre relações necessárias para ligar a matemática que sabem com uma situação real. Este facto fornece oportunidades para que os estudantes possam ir mais além do que atualmente sabem e para praticarem competências de modelação que não costumam desenvolver na aula tradicional de Álgebra Linear.

5.4.2 Descrição das tarefas

Tarefas de instrução formativa

Três tarefas foram trabalhadas antes de dar início ao trabalho com as tarefas de modelação e respetivas tarefas de antecipação. As tarefas de instrução formativa, com as denominações de "*¿lo compro aqui o allá*?", "*el hombre y la casa*", e "*¿qué edad tiene mi tío?*", consistem em tarefas destinadas a introduzir o processo de modelação ao estudante mediante a referência a contextos reais onde são necessários conhecimentos matemáticos mas não necessariamente específicos de álgebra linear.

A tarefa *¿lo compro aqui o allá*? consiste numa adaptação de uma das tarefas mencionadas por Blum (2015), onde o estudante tem de recorrer aos seus conhecimentos matemáticos sobre funções para criar um modelo matemático que expresse o custo de combustível pago em função da quantidade de quilómetros percorridos. A tarefa descrita por Blum (2015) foi adaptada para criar a tarefa *¿lo compro aqui o allá*?, sendo utilizado um contexto conhecido pelos estudantes, em relação às cidades da Costa Rica. Na tarefa, o modelador tem de construir modelos matemáticos que descrevam o custo a pagar ao deslocar-se para duas cidades diferentes a partir de um ponto fixo e utilizando diferentes meios de transporte.

Para a resolução da tarefa é proposto utilizar o *Google Maps* para calcular distâncias entre cidades, conforme a figura 5.2.

Figura 5.2. Representação de cidades referidas na tarefa *¿lo compro aqui o allá*?

A partir das distâncias encontradas e valores estimados a pagar pela distância percorrida em diferentes meios de transporte formulam-se modelos matemáticos que ajudam a decidir sobre a melhor forma de deslocamento, esperando-se que o modelador recorra a conceitos de função afim para a formulação dos modelos matemáticos.

Já a tarefa *el hombre y la casa* consiste numa adaptação da tarefa mencionada no estudo de Borromeo Ferri (2010), onde o estudante tem de utilizar os seus conhecimentos matemáticos de proporcionalidade direta para encontrar a altura de um homem e de uma casa na vida real. A tarefa *el hombre y la casa* utiliza a figura 5.3, onde aparece o homem num primeiro plano junto a uma criança e um cão, e o mesmo homem num segundo plano junto a uma casa.

Figura 5.3. Imagem referida na tarefa *el hombre y la casa*.
Reproduzida de Borromeo Ferri (2010, p. 21).

Na tarefa é esperado que o modelador estime medidas para a altura da criança, a partir da qual possa determinar a altura do homem trabalhando no primeiro plano. A partir da altura, e trabalhando no segundo plano, é possível obter a altura da casa. Para ambos os casos, espera-se que o modelador recorra a modelos analíticos baseados em proporcionalidade direta.

Quanto à tarefa *¿qué edad tiene mi tío?*, apresenta-se uma situação no contexto de descoberta de idades de pessoas, referindo relações matemáticas existentes entre ambas as idades utilizando linguagem coloquial. A tarefa está desenhada para que o modelador formule um modelo matemático baseado em sistemas lineares de equações que possam ser trabalhados sob métodos simples, não necessariamente métodos de álgebra linear.

Tarefas de antecipação

***Tarefa 1*:** Esta tarefa corresponde a exercícios a serem trabalhados antes da primeira tarefa de modelação, na qual são colocados quatro diferentes tipos de exercícios. Os primeiros dois exercícios são de carácter conceptual, enquanto os outros dois são de carácter procedimental a serem trabalhados com *software* matemático. No primeiro exercício é apresentado um conjunto solução de um determinado SEL em termos de parâmetros a,b,c, sendo solicitado os valores destes parâmetros para o conjunto solução estar definido em IR^{+}, querendo avaliar o conhecimento que o estudante tem sobre o conceito matemático de conjunto solução. O segundo exercício é destinado a encontrar um SEL que tenha por conjunto solução o conjunto apresentado no primeiro exercício, querendo tratar o conceito de SEL e conjunto solução de um SEL, simultaneamente, para identificar relações entre ambos os conceitos para alcançar o objetivo. Em relação ao terceiro exercício, o estudante é convidado a utilizar o *GeoGebra* para estudar a consistência de um SEL 2×3 através das representações gráficas das equações lineares que estruturam o SEL. No quarto exercício o estudante é convidado a trabalhar com o *Mathematica*, para encontrar o conjunto solução de um SEL e valores de parâmetros que o estruturam e para os quais o sistema é inconsistente. Neste sentido, as últimas duas questões são desenvolvidas querendo exercitar a análise de parâmetros e desenvolvimento de procedimentos matemáticos, esperando que o estudante utilize este tipo de análise posteriormente na primeira tarefa de modelação.

***Tarefa 2*:** Esta tarefa, correspondente a exercícios a serem trabalhados previamente à segunda tarefa de modelação, nomeada “cifrado e descrifrado de códigos”, propõe três exercícios, sendo um de carácter conceptual, um de carácter procedimental sem utilização de tecnologia e outro de carácter procedimental com utilização de *software* matemático.

No primeiro exercício é apresentada uma equação matricial, sendo solicitado ao estudante justificar se a equação tem solução, procurando promover aprendizagens referentes a propriedades de matrizes e condições necessárias para realizar operações com matrizes. O segundo exercício convida o estudante a utilizar o *Mathematica* para determinar a inversa de uma matriz que depende de parâmetros, procurando que o estudante mobilize propriedades de independência linear de vetores ou de determinantes de matrizes para encontrar valores do parâmetro que tornem a matriz invertível para, seguidamente, obter a matriz inversa usando a tecnologia para facilitar o cálculo. No terceiro exercício é apresentado um SEL 5×5, sendo solicitado ao estudante encontrar o conjunto solução sem utilizar o método Gauss-Jordan, objetivando que o estudante recorra a determinantes para utilizar a regra de Cramer e consequentemente relacionar matrizes invertíveis com a consistência de um SEL com única solução.

***Tarefa 3*:** Esta tarefa, correspondente a exercícios a serem trabalhados antes da terceira tarefa de modelação, nomeada "bordado de girasol en camisas académicas", contém três exercícios, um de carácter conceptual, um de carácter procedimental sem utilização de tecnologia e outro de carácter procedimental com utilização de *software* matemático.

No primeiro exercício são apresentados quatro pontos pertencentes a IR^3, sendo sugerido utilizar o *GeoGebra* para calcular o perímetro do quadrilátero formado pelos pontos segundo a ordem definida no enunciado, procurando que o estudante recorra a geometria de vetores para encontrar as medidas dos diferentes lados do quadrilátero, usando o conceito de norma de um vetor para depois determinar o perímetro. No segundo exercício é apresentada a representação gráfica de dois vetores pertencentes a IR^2 e a propriedade $\|\vec{a}\| = \|2\vec{b}\|$, sendo solicitado ao estudante a direção e sentido do vetor $\vec{a} + -2\vec{b}$, procurando identificar aprendizagens no estudante referentes ao conceito de vetor e propriedades geométricas que resultam quando é operado com outros vetores. O terceiro exercício apresenta três pontos pertencentes a IR^2 por meio de pares ordenados, sendo solicitado encontrar a medida de um dos ângulos internos do triângulo determinado pelos três pontos. Neste exercício, de carácter procedimental, espera-se que o estudante recorra a propriedades da geometria de vetores para encontrar o valor do ângulo solicitado, em vez de determinar este valor mediante geometria euclidiana.

***Tarefa 4*:** A tarefa inclui dois exercícios a serem trabalhados antes da tarefa de modelação, nomeada, "contraseñas de accesso bancario". A tarefa é composta por um exercício de carácter conceptual-procedimental e por outro de carácter procedimental a ser trabalhado com *software* matemático.

No primeiro exercício é apresentado um conjunto formado por cinco vetores pertencentes a IR^5, alguns deles dependendo de um parâmetro k. No exercício pede-se para determinar os valores de k que tornam o conjunto numa base de IR^5, procurando que o estudante estabeleça relações entre independência linear, dimensões de subespaços vetoriais e o conceito de base de um espaço vetorial. No segundo exercício, de carácter conceptual-procedimental, é apresentado um subespaço de matrizes 2×2, o espaço $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, IR): c - 5a - b = 0; 3a - 2b - d = 0 \right\}$, sendo solicitada uma base para S. Este exercício pretende que o estudante relacione o conceito de independência linear e conjunto gerador com o conceito de base, utilizando procedimentos adequados para determinar a independência linear de vetores e identificar um conjunto gerador de S.

***Tarefa 5*:** Esta tarefa, correspondente a exercícios a serem trabalhados previamente à última tarefa de modelação, nomeada "visita al Big Ben", avalia quatro exercícios, dois de carácter conceptual e outros dois de carácter procedimental. A utilização de tecnologia para este último exercício fica à escolha do estudante, para perceber se tem a iniciativa de a usar quando tal não é explicitamente indicado. Nesta tarefa é inicialmente proporcionada uma expressão analítica de uma transformação, a partir da qual são formulados os quatro exercícios. A expressão analítica da transformação é dada a seguir:

$$T: IR^2 \to IR^4, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y - 2x \\ x + y \\ y - x \end{pmatrix}$$

No primeiro exercício é solicitado ao estudante demonstrar que T corresponde a uma transformação linear, procurando identificar se o estudante conhece as propriedades que definem uma transformação linear e os procedimentos necessários para demonstrar a linearidade. No segundo exercício é pedida uma base para $Img(T)$, o espaço imagem de T, procurando que o estudante mobilize conhecimentos de espaços vetoriais e transformações lineares para trabalhar o conceito de base de um subespaço vetorial. Nos exercícios de carácter conceptual, pede-se ao estudante que averigue se T é uma transformação injetiva e sobrejetiva, sem necessidade de fazer cálculos, mas considerando as suas resoluções dos dois primeiros exercícios. No último exercício pede-se ao estudante que determine se T é invertível. Estes dois exercícios procuram que o estudante mobilize conceitos e propriedades de transformações lineares e matrizes sem necessidade de recorrer a procedimentos matemáticos para obter uma solução.

Tarefas de modelação

***TM1*: "tránsito preventivo"**

A tarefa "tránsito preventivo" é uma adaptação em contexto e estrutura matemática da tarefa encontrada no estudo de Possani et al. (2010). Nesta tarefa propõe-se um problema sobre trânsito automóvel com cruzamentos, onde se indica a partir de uma tabela a quantidade aproximada de veículos que circulam em cada hora por certos trajetos de uma zona da capital da Costa Rica.

A tarefa inclui seis questões, onde o estudante é convidado a criar um modelo matemático que permita analisar o comportamento do trânsito pelos setores que rodeiam a região definida. Espera-se que o estudante seja capaz de formular um modelo matemático baseado num SEL formado por quatro equações a partir dos fluxos de entrada e saída que passam por cada interseção. As primeiras três questões da tarefa foram formuladas para encorajar o estudante a construir o modelo matemático, enquanto as últimas três procuram que o estudante utilize o modelo matemático construído para obter resultados matemáticos que atendam a certos casos específicos da situação real, procurando que o estudante interprete e valide o seu modelo. A tarefa está desenhada para que o estudante tenha a possibilidade de recorrer à utilização de *software* matemático para agilizar o processo de resolução do SEL ou para representar graficamente as equações que conformam o SEL e analisar o modelo a partir daí.

***TM2*: "cifrado y descifrado de códigos"**

Nesta tarefa, apresenta-se um problema sobre codificação de mensagens, em que é mencionado um dado histórico sobre encriptação de mensagens ocorrido durante a Primeira Guerra Mundial. Como parte do contexto da tarefa, faz-se referência a uma carta escrita no contexto histórico referido, sendo solicitado ao estudante a encriptação de uma das frases que a conformam, a frase "The settlement".

A tarefa inclui quatro questões, em que estudante é convidado a criar um modelo matemático que permita codificar a frase "The settlement" com bastante segurança e utilizando matrizes. Espera-se que o estudante seja capaz de criar tabelas de codificação para codificar a frase "The settlement" e, posteriormente, que utilize matrizes para organizar a informação e realizar uma segunda codificação que permita dar maior segurança à mensagem. As primeiras três questões da tarefa foram formuladas para encorajar o estudante a construir um modelo matemático específico para a encriptação da frase mencionada. A última questão procura que o estudante analise o modelo matemático construído em termos de codificação e descodificação da mensagem, procurando que o estudante interprete e valide o seu modelo. A tarefa está desenhada para que o estudante tenha a possibilidade de recorrer à utilização de *software* matemático, ou ao *Excel* para fazer correspondências entre letras e símbolos numéricos que lhe permitam codificar a mensagem, como também realizar as operações que intervêm no trabalho matemático sobre o seu modelo.

Diferentemente do enunciado considerado na tarefa do estudo piloto, nesta tarefa de modelação espera-se que o estudante seja menos dependente de esclarecimentos do professor sobre a situação real que permita ao estudante criar os seus modelos de codificação ou pesquisar tabelas padrão na Web que possam ser utilizadas, não restringido a utilização da tecnologia ao trabalho matemático.

***TM3*: "bordado de girasol en camisas académicas"**

Nesta tarefa, a situação coloca um problema sobre a rotação de um brasão que será bordado em camisolas para a academia, de forma a que a posição do brasão represente determinado grau académico. A figura a ser representada no brasão refere-se a um girassol localizado numa das paredes dos edifícios da Universidade da Costa Rica.

A tarefa é composta por três questões, na qual o estudante é convidado a criar um modelo matemático que permita rodar o brasão com a imagem do girassol, segundo um certo ângulo. As primeiras duas questões da tarefa foram formuladas para encorajar o estudante a construir um modelo matemático, enquanto a última procura que o estudante utilize o modelo matemático construído para ser adaptado a outra situação real, procurando que interprete e valide seu modelo. A tarefa está desenhada para que ele tenha a possibilidade de recorrer à utilização de *software* matemático como o *GeoGebra* ou o *Mathematica* para representar vetores rotacionados que permitam validar o modelo quando introduzidas as coordenadas do vetor original e do vetor rotacionado.

***TM4*: "constraseñas de acceso bancário"**

A quarta tarefa é uma adaptação em contexto e estrutura matemática da tarefa da que surge no estudo de Cárcamo et al. (2017). Na tarefa é proposto um problema sobre a geração de senhas provisórias que os bancos estatais da Costa Rica fornecem aos seus clientes. A tarefa é composta por seis questões, onde o estudante é convidado a criar um modelo matemático que permita gerar senhas formadas por caracteres alfanuméricos com o máximo de dez algarismos. Espera-se que o estudante seja capaz de criar um modelo de geração de senhas bancárias recorrendo a conjuntos geradores de subespaços de IR^n, $n \leq 10$, e em particular a bases associadas a estes subespaços. As primeiras quatro questões da tarefa foram formuladas para encorajar o estudante a construir um modelo matemático que satisfaça as condições do problema, enquanto as duas últimas procuram que o estudante analise o modelo matemático construído quando impostas outras condições sobre o tipo de algarismos a incluir nas senhas geradas. Como parte das indicações desta tarefa é solicitado ao estudante a utilização do *Excel* para gerar um conjunto de 20 senhas a partir do modelo matemático construído, pelo que a tecnologia nesta tarefa se torna um elemento exigido e não de livre escolha.

***TM5*: "visita al Big Ben"**

Nesta tarefa, propõe-se ao estudante um problema sobre escalas, onde são fornecidas duas fotografias do relógio Big Ben, um símbolo de Londres, Inglaterra. Nestas duas imagens observa-se no lado esquerdo o relógio Big Ben numa menor escala do que aparece no lado direito.

A tarefa inclui quatro questões, onde o estudante é convidado a criar um modelo matemático que permita localizar as coordenadas de um ponto de uma das imagens a partir das coordenadas do ponto homólogo na outra imagem. Espera-se que o estudante possa identificar que escalas diferentes em ambas imagens do relógio estão associadas a processos de redução ou ampliação de escala que podem ser trabalhados mediante transformações lineares. Em particular, sendo determinada a razão entre os comprimentos de elementos homólogos de ambas as imagens, é possível determinar um fator de aumento ou redução entre imagens para construir a expressão analítica de uma transformação linear de escala. As primeiras três questões da tarefa foram formuladas para encorajar o estudante a construir um modelo matemático, enquanto a última procura que o estudante analise o modelo matemático para comparar objetos reais e imagens de objetos em diferente escala, procurando que o estudante interprete e valide o seu modelo. Nas primeiras três questões, espera-se que o estudante possa medir o diâmetro do relógio da imagem da esquerda e da imagem à direita utilizando régua ou recorrendo à utilização de *software* matemático, e a seguir determine a razão entre diâmetros, obtendo assim a escala de aumento (razão de semelhança) a considerar no modelo de transformação linear esperado. Semelhantemente, na última questão, dirigida à análise do modelo, o estudante deverá utilizar o seu modelo matemático, adaptando o fator de escala primeiramente para obter a altura real estimada do Big Ben. A tecnologia nesta tarefa é fundamental, considerando que o enunciado da tarefa é disponibilizado digitalmente aos estudantes. Em particular, será conveniente a utilização do *GeoGebra* ou do *Mathematica* para permitir realizar medições de distâncias entre dois pontos em ambas imagens do Big Ben para posteriormente encontrar a razão de semelhança ou fator de escala.

Em todas as cinco tarefas de modelação, para além das questões ligadas diretamente ao contexto do problema, o estudante deve fazer um relatório da tarefa, onde é solicitado: mencionar as estratégias utilizadas para resolver a tarefa, outras estratégias discutidas nos grupos de trabalho, dificuldades que teve ao trabalhar na tarefa e sugerir outras situações reais para as quais poderia ser adaptado o modelo matemático construído.

5.5 Realização da experiência de ensino

Na primeira sessão, antes de dar início à experiência de ensino, realizei uma observação da turma trabalhando em ambiente natural com o professor em sala de aula, tendo observado uma tendência dos estudantes a permanecerem em silêncio, escrevendo nos seus cadernos enquanto o professor explicava a teoria. Os estudantes só se dirigiam ao professor quando este os questionava sobre processos a seguir na resolução de um certo exercício, embora fossem sempre os mesmos a participar, comummente os estudantes que estavam sentados à frente do quadro. No final da aula houve uma apresentação do investigador para informar os estudantes sobre os objetivos da experiência de ensino a realizar nas próximas sessões e para recolher a autorização formal escrita para participação no estudo e recolha de dados. Após apresentar os objetivos da experiência de ensino aos estudantes, o investigador esclareceu dúvidas, sendo que um dos estudantes perguntou sobre o papel avaliativo das tarefas nos testes da disciplina, evidenciando-se certa preocupação sobre como a experiência de ensino iria afetar os objetivos de aprendizagem a serem avaliados na disciplina.

A segunda sessão deu início à resolução das tarefas de instrução formativa. As diferentes intervenções da experiência de ensino ocorrem, a partir deste momento, a seguir ao período habitual destinado à lecionação de conceitos pelo professor da turma. Terminada a sua parte da lecionação, o professor cede a turma ao investigador para implementar a experiência de ensino. Assim, na segunda sessão é trabalhada a tarefa "*lo compro aqui o allá*", tendo os estudantes acesso à tarefa em formato digital através da plataforma "Mediación Virtual". Nesta plataforma são também submetidos os enunciados das tarefas de antecipação e de modelação e as respetivas propostas de resolução conforme se vão trabalhando ao longo da experiência de ensino.

Na intervenção da tarefa formativa *lo compro aqui o allá* o investigador explica aos estudantes como resolver o problema com base no ciclo de modelação matemática, utilizando para isso um projetor de vídeo. À medida que o investigador vai avançando na explicação do processo de modelação, ele vai interagindo com os estudantes, questionando-os em determinados momentos sobre possíveis decisões que tomariam perante determinadas situações. A participação dos estudantes nesta primeira sessão foi reduzida e concentrada nos mesmos estudantes que participam reiteradas vezes, expondo respostas, total ou parcialmente corretas, às questões formuladas pelo investigador. Ao finalizar a explicação da tarefa são disponibilizadas as tarefas "*El hombre y la casa*" e *"¿qué edad tiene mi tío?"* para serem trabalhadas pelos estudantes, seguindo os passos do ciclo de modelação discutidos na sala de aula.

Na terceira sessão, quando questionados sobre as tarefas dadas, só uma minoria de estudantes manifesta ter resolvido ambas as tarefas, enquanto os demais referem não ter acabado por estarem em semana de testes, por terem de estudar para outras disciplinas e porque se debruçaram apenas sobre a tarefa TA1 a realizar naquela sessão. Os poucos estudantes que resolvem as tarefas formativas demonstram saber chegar a uma solução matemática, mas mostram não saber o que significa estabelecer um modelo real e validar os resultados no contexto de ambas as tarefas.

A partir desta terceira sessão dá-se início ao trabalho com tarefas de antecipação e tarefas de modelação. Em geral, a gestão de aula da experiência de ensino, a partir deste momento e até ao trabalho com a última tarefa de modelação, segue uma estrutura baseada na seguinte sequência: 1) o professor da turma realiza a introdução formal de conceitos matemáticos; 2) os estudantes trabalham na tarefa de antecipação, correspondente aos conceitos matemáticos lecionados na semana anterior e sob supervisão do professor da turma; 3) na sessão seguinte os estudantes trabalham a tarefa de modelação em grupos de 2 ou 3 elementos (10 grupos no total), focados nos conceitos matemáticos trabalhados na tarefa de antecipação anterior e sob supervisão do investigador; e 4) realiza-se uma discussão do trabalho realizado na tarefa de modelação, a nível coletivo, na sessão seguinte. O professor disponibiliza na plataforma "Mediación Virtual" os enunciados das tarefas a partir do momento em que começam a ser resolvidas na sala de aula.

Embora se estimasse que na primeira TA os estudantes demorassem no máximo 20min, os vários grupos não conseguiram terminar a resolução de todas as questões nos 30min disponibilizados, e mesmo dando mais 5min a esses grupos não conseguiram terminar completamente. Caso similar aconteceu na segunda tarefa TA, motivo pelo qual as três últimas tarefas de antecipação tendem a apresentar menor número de questões comparativamente com as duas primeiras tarefas, e questões baseadas em conceitos matemáticos ou procedimentos de resolução menos extensos.

No que respeita às tarefas de modelação, a primeira TM mostrou ser complicada para os estudantes, conforme se antecipava, tendo o investigador que intervir várias vezes nos diferentes grupos para tentar guiar os estudantes sem lhes indicar como resolver a tarefa. Nesta primeira tarefa, vários grupos (a maioria) de estudantes demoraram até 30min para conseguir estabelecer a relação entre a situação problema e conhecimentos matemáticos que podiam mobilizar para trabalharem no problema. No final dos 55min destinados ao trabalho desta tarefa poucos estudantes tinham conseguido o objetivo de trabalhar matematicamente sobre o modelo formulado, sendo consequência do tempo que dedicaram para a compreensão e estruturação da tarefa. Neste sentido, foi decidido pelo investigador que a partir daquele momento iria ser disponibilizado o enunciado da tarefa no dia anterior à sessão de TM, permitindo que os estudantes pudessem pensar em casa sobre como abordar a tarefa casa e investir mais tempo na mobilização das restantes competências associadas ao ciclo de modelação e, consequentemente, terminar a tarefa na sala de aula no tempo definido. A partir da TM2 os estudantes foram mostrando mais autonomia e competências de modelação, com menos necessidade de chamar o investigador, evidenciando-se bastante diálogo entre os membros de cada grupo a trabalharem cooperativamente na resolução da tarefa.

No que se refere às discussões coletivas, a participação por parte dos estudantes foi escassa quando questionados pelo professor sobre dúvidas na tarefa de modelação, sobre os modelos que construíram, e outros possíveis contextos reais onde poderiam utilizar os modelos criados. Assim, estas discussões coletivas estiveram concentradas na exposição dos diferentes modelos matemáticos que o investigador identificou nas resoluções dos estudantes, na apresentação de uma possível forma de resolver a tarefa de modelação, e daquilo que se esperava com a tarefa. Como é natural, as resoluções desenvolvidas pelos estudantes nas diferentes tarefas de modelação diferiram muito da forma como o investigador esperava que os estudantes resolveriam a tarefa, sendo utilizados em cada tarefa uma grande diversidade de modelos reais, à exceção da TM4, onde vários estudantes recorreram a um modelo matemático de matriz de rotação anteriormente explicado pelo professor na componente teórica, ao invés de criarem eles próprios um modelo.

Após o trabalho com todas as tarefas de modelação é realizado um questionário na sala de aula, pedindo-se aos estudantes que acedam à plataforma virtual e preencham o questionário *online* disponibilizado, correspondente a uma primeira parte de questões fechadas. Em seguida o investigador entrega em papel uma segunda parte com questões abertas a serem respondidas igualmente por cada estudante, recolhendo no final todos os questionários. O investigador tem a possibilidade de aceder à plataforma da disciplina como administrador, assim como o professor da turma.

Finalmente, em relação à entrevista, os quatros estudantes que participam ficam sentados de maneira a criar um círculo, sendo o investigador quem começa a propor uma pergunta dirigida a qualquer dos participantes. Nesta entrevista, os participantes fizeram diversos comentários, mostrando-se participativos e querendo falar todos ao mesmo tempo, comunicando com o investigador e entre eles durante o tempo destinado a tal atividade.

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DE APRENDIZAGENS DE CONCEITOS E TÉCNICAS DE ÁLGEBRA LINEAR E COMPETÊNCIAS DE MODELAÇÃO

No que se segue são apresentadas as análises das cinco tarefas de modelação que integraram a experiência de ensino implementada. Na análise de cada tarefa, é feita inicialmente um breve inventário dos conhecimentos de álgebra linear tratados numa tarefa de antecipação, colocada num contexto estritamente matemático que permitiu identificar algumas das aprendizagens de conceitos e técnicas mobilizadas e dificuldades sentidas relativamente a esses conceitos. Em seguida, o foco recairá sobre a tarefa de modelação relacionada, procurando perceber como os diferentes grupos de estudantes desenvolveram os seus processos de modelação matemática, incluindo as aprendizagens reveladas e as competências de modelação que evidenciaram. São identificadas e caraterizadas as diversas rotas de modelação executadas no decurso do trabalho sobre a tarefa. Depois de tipificadas as rotas de modelação, são esquematizadas e escrutinados detalhadamente exemplos específicos de diferentes tipos de rotas encontradas.

Finalmente, é feita uma comparação entre as aprendizagens ocorridas na tarefa de antecipação e as ocorridas na tarefa de modelação.

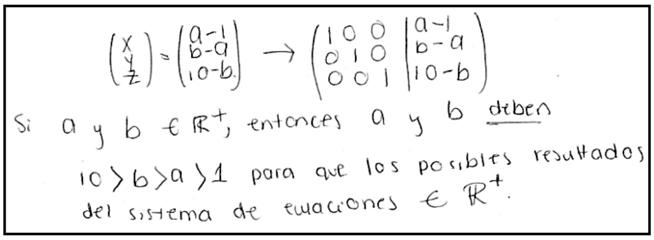
6.1 Tarefa TM1: trânsito preventivo

6.1.1 Tarefa de antecipação

Na primeira tarefa de antecipação (Anexo B1) pretendia-se que os estudantes trabalhassem os conceitos de matriz associada a um sistema de equações lineares (SEL) e de conjunto solução de um SEL, identificando, neste caso, elementos gráficos que o validam ou expressões algébricas que estabelecem o domínio dos parâmetros que determinam o conjunto solução de um SEL com infinitas soluções. As resoluções desta tarefa revelaram que todos os estudantes foram capazes de reconhecer a matriz aumentada associada a um SEL, e o conjunto solução de um SEL a partir da sua representação geométrica, utilizando *software* informático, nomeadamente o *GeoGebra*. No entanto, só seis grupos de estudantes evidenciaram reconhecer o conceito de conjunto solução de um SEL a partir de representações algébricas do sistema.

As dificuldades evidenciadas pelos estudantes relativas ao conceito de conjunto solução de um SEL estão essencialmente na definição do domínio dos parâmetros que integram o conjunto solução do sistema (três grupos) e na obtenção do conjunto solução a partir de uma das matrizes equivalentes à matriz aumentada associada ao SEL (um grupo).

Como exemplo destas aprendizagens e dificuldades, considera-se os casos de Fátima e Heitor e de Edite e Tiago. O primeiro grupo de estudantes evidencia aprendizagens referentes ao conceito de matriz aumentada e conjunto solução de um SEL, conforme mostra a sua resolução da questão 1 (Q1) na figura 6.1:



[Se a e $b \in \mathbb{R}^+$, então a e b devem satisfazer $10 > b > a > 1$ para que os possíveis resultados do SEL $\in \mathbb{R}^+$]

Figura 6.1. Trabalho de antecipação de Fátima e Heitor na Q1.

Na figura 6.1 é possível observar como Fátima e Heitor relacionam o conjunto solução do SEL com a expressão matricial associada a um SEL na forma reduzida, identificando corretamente, a partir da hipótese que lhes foi dada, que os parâmetros a e b ficam restringidos ao intervalo $]1,10[$, com $b > a$.

Edite e Tiago são o único grupo que evidencia dificuldades para identificar o conjunto solução a partir de uma das matrizes equivalentes à matriz aumentada do SEL. Na resolução da figura 6.2 observa-se como Edite e Tiago estabelecem incorretamente o conjunto solução de um SEL, indicando um conjunto de três soluções formadas a partir das linhas da matriz aumentada do SEL.

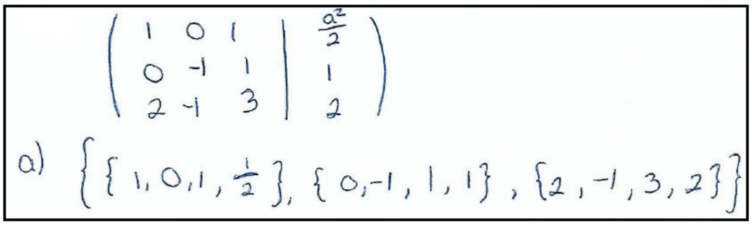


Figura 6.2. Trabalho de antecipação de Edite e Tiago na Q4.

Assim, torna-se evidente que estes estudantes não têm consolidado o conceito de conjunto solução de SEL, não sendo capazes de refletir sobre a natureza do sistema, nomeadamente, se terá só uma solução, infinitas soluções ou nenhuma solução em IR^n, dependendo da matriz que lhe está associada.

6.1.2 Competências de modelação e aprendizagem de conceitos

Compreensão e simplificação/estruturação da tarefa

Inicialmente, por não terem experiência com tarefas desta natureza, os estudantes demoraram bastante tempo para compreender a tarefa de modelação proposta no que respeita à interpretação do enunciado e à estratégia de resolução a seguir, discutindo entre eles, nos grupos de trabalho, como começar e, em alguns momentos, solicitando também ajuda do investigador, na sua função de professor, para tentarem esclarecer interpretações do enunciado, como evidenciado na seguinte interação durante o trabalho autónomo de resolução da tarefa:

> ***Heitor*:** Professor, temos uma dúvida. Não sabemos se este fluxo de 500 vai mesmo antes desta interseção (sinalizando a parte da via em baixo da interseção determinada pela rua 1 e avenida 14).
> ***Investigador*:** Tem sentido, no âmbito da situação problema, o fluxo ficar aqui?
> ***Fátima*:** Não, porque senão a seta indicaria o contrário do indicado no enunciado.
> ***Heitor*:** Sim, então em teoria nós devemos deslocar estes 500 veículos para que transitem depois da interseção. No caso destes 2000 carros, eles poderiam viajar nesta direção (sinalizando a direção norte-sul, entrando na interseção), porque não tem setas estabelecidas aqui (sinalizando o trajeto acima da interseção determinada pela rua 1 e avenida 14).

Do diálogo anterior, é possível observar a dificuldade de Heitor para interpretar a frase do enunciado “500, sul-norte, saindo da interseção”. Embora inicialmente Heitor considere que este valor corresponde ao fluxo de trânsito no sentido sul-norte que entra na interseção, Fátima acaba por perceber que essa interpretação não faz sentido, pois no trajeto determinado entre as duas interseções da rua 1 só pode circular trânsito no sentido norte-sul, conforme especificado nas condições estabelecidas no enunciado da tarefa. Esta dificuldade inicial na compreensão da situação real foi evidenciada por parte de Fátima e Heitor e pelos restantes grupos da turma, tendo algumas implicações na elaboração seguinte do modelo real.

As resoluções escritas dos estudantes revelam que, após as suas discussões em grupo sobre a situação problema, durante o trabalho autónomo na realização da tarefa, e as interações do investigador com alguns destes grupos, a maioria dos estudantes (seis grupos) evidencia competências necessárias para compreender e simplificar/estruturar a tarefa, estabelecendo corretamente pelo menos um modelo real. Em geral, as simplificações destes estudantes apresentam modelos reais baseados em esquemas para visualizar os dados, utilizando segmentos de reta para simbolizar os trajetos de ruas e avenidas, números relativos aos dados disponibilizados do enunciado com setas dirigidas para simbolizar o sentido e a quantidade do trânsito a percorrer um trajeto particular. Nalguns casos, também incluem variáveis para as quantidades de fluxo de trânsito desconhecidas, como mostra o exemplo da figura 6.3.

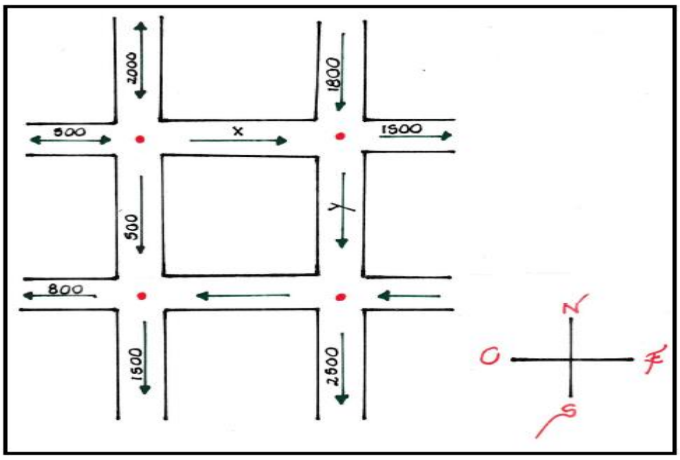


Figura 6.3. Modelo real proposto por Emiliana e Francela.

Neste modelo real de Emiliana e Francela é possível observar algumas setas com dois sentidos, representando a existência de um fluxo de veículos da mesma magnitude em ambos os sentidos do trajeto correspondente. No entanto, este modelo revela que as estudantes não interpretaram corretamente a frase "500, sentido sul-norte, saindo da interseção", pois esta implica considerar, na primeira interseção, fluxos em ambos os sentidos, mas com diferentes quantidades, nomeadamente, 2000 no sentido norte-sul e 500 sul-norte, e não 2000 veículos em ambos os sentidos, conforme elas assumem. Estas estudantes fazem parte dos quatro grupos que não estabeleceram modelos reais ajustados à situação, devido aos pressupostos sobre o fluxo de trânsito que são assumidos na criação do modelo, que não vão ao encontro das condições indicadas na tarefa. Emiliana e Francela assumem como conhecido o fluxo de 500 veículos entre as duas interseções localizadas a oeste da região encerrada, outros dois grupos (Martim e Fabiana, Edite e Tiago) não consideram fluxo variável no sentido Oeste-Este na interseção superior esquerda da região e o grupo de Henrique e Diogo considera fluxos iguais a zero no trajeto Sul e fluxo constante no trajeto Norte da região encerrada. Estes pressupostos, resultantes de interpretações incorretas dos dados da tarefa, viriam a afetar posteriormente a formulação adequada do modelo matemático devido à formulação inadequada do respetivo modelo real.

Em geral, nas resoluções dos estudantes, foram identificados dois tipos de modelos reais: os que apresentam um único sentido de fluxo em cada um dos trajetos da faixa de rodagem na situação real; e os que apresentam dois sentidos de fluxo em alguns trajetos da faixa de rodagem. Como exemplo, considera-se o caso do grupo de Marcelino e Estela, os únicos estudantes que propõem dois modelos reais: um modelo (A), não totalmente correto, em que consideram o caso de cada faixa de rodagem ter só um sentido de trânsito, exceto o fragmento superior da interseção entre a rua 1 e a avenida 14 (Figura 6.4a), e um modelo (B), correto, em que consideram dois sentidos em cada trajeto da faixa de rodagem (Figura 6.4b).

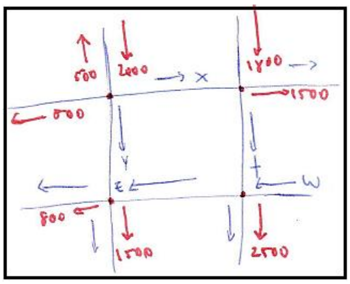


Figura 6.4a. Modelo real A proposto por Marcelino e Estela.

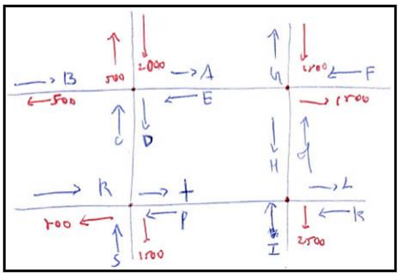


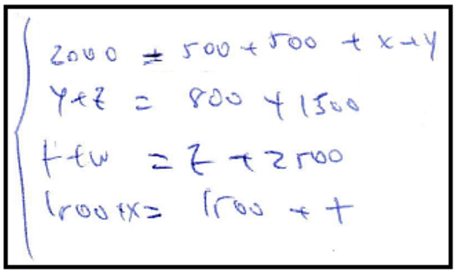
Figura 6.4b. Modelo real B proposto por Marcelino e Estela.

Ambos os modelos propostos por Marcelino e Estela revelam a capacidade dos estudantes para simplificar a situação real, usando variáveis para simbolicamente representar os fluxos desconhecidos e assinalando com setas as direções dos diferentes fluxos de trânsito médio indicados no enunciado da tarefa, conforme também observado nas resoluções de outros grupos que evidenciam compreender o problema. Embora o segundo modelo real de Marcelino e Estela esteja adequadamente formulado, eles não observam que na estruturação do seu primeiro modelo deveriam considerar mais um fluxo na primeira interseção (rua 1 e avenida 14), de forma a que os 500 veículos a transitar no sentido sul-norte tenham de onde vir, dificuldade que foi evidenciada também no único modelo real proposto por Edite e Tiago. Desta forma, identifica-se que estes grupos de estudantes evidenciam competências para simplificarem a tarefa, embora não a tenham compreendido totalmente, o que denota uma necessidade de maior reflexão sobre a situação problema apresentada.

Matematização e trabalho sobre o modelo matemático

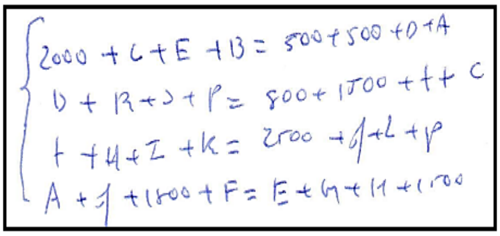
No que concerne à formulação do modelo matemático, quase todos os estudantes (nove grupos) criam modelos baseados em conhecimentos de álgebra linear, nomeadamente SEL, embora só quatros grupos consigam criar SEL corretos, isto é, matematizar corretamente o modelo real proposto. Os restantes estudantes da turma (um grupo) propõem modelos baseados em estimativas numéricas de fluxos.

No que se refere a modelos matemáticos que fazem corresponder a situação real com a formulação de um SEL, encontramos, como exemplo, o caso do grupo de Marcelino e Estela, estudantes que conseguem criar modelos matemáticos (Figura 6.5a e 6.5b) para ambos os modelos reais (Figuras 6.4a e 6.4b).



$$\begin{cases} 2000 = 500 + 500 + x + y \\ y + z = 800 + 1500 \\ t + w = z + 2500 \\ 1800 + x = 1500 + t \end{cases}$$

Figura 6.5a. Modelo matemático A proposto por Marcelino e Estela.



$$\begin{cases} 2000 + C + E + B = 500 + 500 + D + A \\ D + R + S + P = 800 + 1500 + T + C \\ T + H + I + K = 2500 + J + L + P \\ A + J + 1800 + F = E + M + H + 1500 \end{cases}$$

Figura 6.5b. Modelo matemático B proposto por Marcelino e Estela.

Nestes modelos matemáticos é possível identificar aprendizagens relativas ao conhecimento formal do conceito de SEL. Estes estudantes formulam cada equação fazendo somas de fluxos de entrada e de saída numa mesma interseção, para depois igualar ambos os fluxos e formar assim a equação. Isto é também evidenciado quando mencionam, na sua resolução escrita, que "deve sair a mesma quantidade de veículos que entra, numa determinada interseção". Este é, portanto, o pressuposto fundamental que guia a construção do modelo matemático, na forma de um conjunto de equações lineares que devem verificar-se simultaneamente. Para além disso, observa-se que o modelo matemático que admite faixas de rodagem com um só sentido (Figura 6.5a) apresenta menos variáveis do que o modelo matemático que contempla dois sentidos (Figura 6.5b), o que é coerente com o facto de o seu primeiro modelo real (Figura 6.4a) apresentar um menor número de incógnitas, isto é, de fluxos desconhecidos, em relação ao seu segundo modelo real (Figura 6.4b).

Marcelino e Estela são também o único grupo que trabalha o modelo matemático utilizando o método de substituição, obtendo resultados matemáticos só para o primeiro modelo (Figura 6.5a), mas sem interpretar o conjunto solução do SEL obtido. No caso do seu segundo modelo (6.5b), estes estudantes trabalham um pouco sobre o modelo, transformando as equações iniciais mas sem conseguirem obter resultados matemáticos, provavelmente dado o grande número de incógnitas que torna menos eficaz recorrer ao método de substituição (Figura 6.5c).

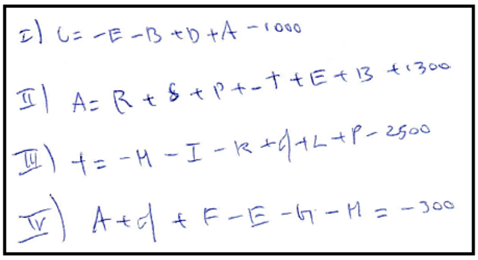


Figura 6.5c. Trabalho matemático (modelo B) de Marcelino e Estela.

A resolução anterior evidencia que Marcelino e Estela apenas tentam expressar, em cada equação, um dos fluxos em função dos outros, o que pode estar associado a não saberem que variáveis designar como parâmetros. Assim, interpreta-se que os modelos reais criados por estes estudantes tiveram consequências na construção do modelo matemático e na sua aplicação. É de supor que lhes faltam competências suficientes para usarem o método de substituição num sistema que envolve mais incógnitas, isto é, que as suas competências de resolução de um SEL ficam limitadas aos casos em que este possui poucas incógnitas.

Outros estudantes, que propõem SEL como modelos matemáticos, utilizam o método de redução Gauss-Jordan de matrizes aumentadas associadas aos SEL para trabalhar sobre o modelo matemático. Como exemplo, encontramos o caso de Mateus e Xavier, estudantes que criam um modelo real apropriado, considerando a menor quantidade possível de fluxos desconhecidos (Figura 6.6a). Na resolução escrita de Mateus e Xavier é possível observar o trabalho matemático realizado sobre as equações do seu SEL (Figura 6.6b), organizando-as para identificar a matriz aumentada associada ao seu SEL. Este facto evidencia a mobilização de aprendizagens relativas ao conceito de matriz associada a um SEL, conforme identificado também nos outros dois grupos de estudantes que também utilizam corretamente o método de redução Gauss-Jordan para trabalhar matematicamente sobre o modelo.

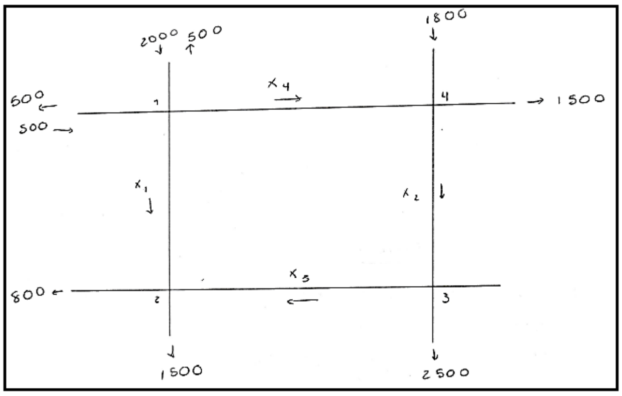


Figura 6.6a. Modelo real proposto por Mateus e Xavier.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \Rightarrow -x_1 - x_4 = 500 + 500 - 2000 \\ 2 \Rightarrow x_1 + x_3 = 1500 + 800 \\ 3 \Rightarrow x_2 - x_3 = 2600 \\ 4 \Rightarrow x_4 - x_2 = 1500 - 1800 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Matriz} \\ 4 \times 5 \end{array}$$

Figura 6.6b. Trabalho matemático de Mateus e Xavier.

Quanto aos estudantes que não evidenciam competências necessárias para formular corretamente modelos matemáticos com base em SEL, foram identificadas dificuldades que se prendem com a mobilização do conceito de matriz associada a um SEL. Fazem parte destes estudantes o grupo de Martim e Fabiana (Figura 6.7a), o único grupo que nesta tarefa utiliza o apoio tecnológico do programa *Mathematica* como meio para simplificar cálculos (Figura 6.7b).

x	y	z	w		
-2000	-800	-2500	-1800	=	0
500	-1500	0	1500	=	0
-500	0	0	0	=	0

Figura 6.7a. Modelo matemático produzido por Martim e Fabiana.

```
In[2]:= Matrixform[RowReduce[( -2000  -800  -2500  -1800  0
                                 500  -1500     0   1500  0
                                -500     0      0      0  0 )]]

Out[2]= Matrixform[{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, -1, 0}, {0, 0, 1, 26/25, 0}}]
```

Figura 6.7b. Trabalho matemático no *Mathematica* produzido por Martim e Fabiana.

Apesar destes estudantes usarem corretamente o *Mathematica*, para realizarem operações elementares sobre uma matriz, utilizando a ferramenta *Rowreduce*, eles formulam incorretamente a matriz associada a um SEL, tal como evidencia o diálogo a seguir:

> ***Investigador:*** Poderiam explicar-me como surgiu este modelo?
> ***Fabiana:*** Daqui professor, este é o mapa [sinalizando o modelo real], estes são os pontos cardeais. Nós fizemos uma matriz, onde as quantidades que estão negativas é porque levam direções opostas, como em física, porque vão para o sul ou oeste, e as positivas porque vão nas direções definidas. Então agora só temos de encontrar a solução da matriz.
> ***Martim:*** Igualados a zero para que não exista engarrafamento, isto é, que tudo o que entra tenha de sair, para que o trânsito se mantenha fluido.

No diálogo, Martim e Fabiana evidenciam uma compreensão aparente da situação problema. Contudo, parecem falhar na identificação do significado das variáveis e dos valores numéricos utilizados. Ao construírem a matriz associada a um SEL, usam os valores como coeficientes das incógnitas, o que não corresponde matematicamente à sua ideia de que os fluxos em sentidos opostos terão de ter soma igual a zero. Assim, estes estudantes revelam dificuldade relativa ao conceito de matriz associada a um SEL, cuja construção incorreta é influenciada pelos dados numéricos apresentados no enunciado da tarefa em forma tabular. Isto reflete a dificuldade destes estudantes para representar uma matriz associada a um SEL, quando não é dado o SEL explicitamente em forma analítica, consequência de não terem uma compreensão clara de como definir as entradas de uma matriz associada a um SEL.

No caso dos estudantes que estabelecem modelos matemáticos não analíticos, encontramos o caso de Edite e Tiago, cujo modelo real (Figura 6.8) não revela qualquer tentativa de identificação de variáveis, razão pela qual criam um modelo não algébrico que utilizam como base de um processo numérico de tentativa e erro.

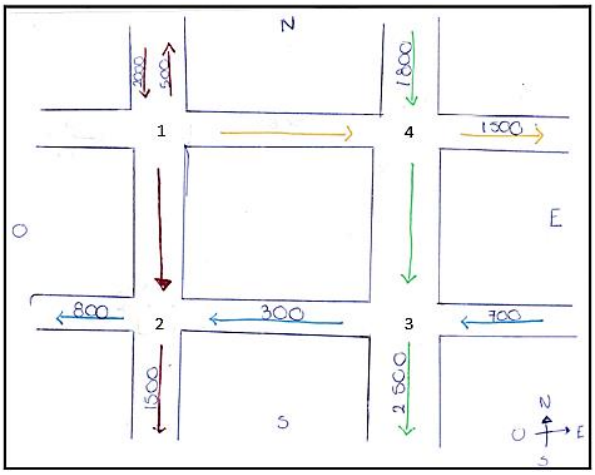


Figura 6.8. Modelo real proposto por Edite e Tiago.

Edite e Tiago tentam obter a solução para o problema, experimentando possíveis valores numéricos para os fluxos desconhecidos e testando esses valores para verificarem se cumprem as condições impostas nalgumas das interseções, observando-se assim uma noção informal do conceito de SEL. Quando questionados pelo investigador sobre a sua resolução, durante o trabalho na tarefa, Tiago responde

> O que estávamos pensando era dizer que, de um ponto a outro, por exemplo aqui (do ponto 3 ao 2), passam 300 veículos por hora. Depois, procurar os valores que completam o fluxo constante, fazendo as diferenças entre entradas e saídas de veículos.

Do comentário de Tiago interpreta-se que este grupo de estudantes parece conhecer o conceito de solução de um SEL, sendo que o seu comentário remete para encontrar valores que mantenham igual o fluxo de saída e entrada nas quatro interseções, simultaneamente, o que significa, portanto, encontrar uma solução de um SEL. No entanto, a sua proposta de resolução não revela mobilização de conhecimento necessário para encontrar a solução completa do SEL, pois consideram, incorretamente, que satisfazendo as equações das interseção 2 conseguem satisfazer automaticamente as equações das interseções 1, 2 e 4, facto que se evidencia com a omissão de valores entre as interseções 1 e 2, 1 e 4, e 3 e 4. Para além disso, a escolha de uma única proposta de solução revela que não é claro para estes estudantes o conceito de conjunto solução de um SEL, o que justificará a sua ideia incorreta de que o problema teria um número finito de soluções.

Interpretação e validação dos resultados matemáticos

Parte da incorreção da solução anterior, identificada no modelo de Edite e Tiago, tem a ver com o facto de estes estudantes não verificarem que os valores estimados não satisfazem simultaneamente as quatro equações que resultam das quatro interseções de fluxos de trânsito. Com efeito, a suposição dos 300 veículos a entrar na interseção 2 obriga os 2000 veículos da interseção 1 a seguirem diretamente até à interseção 2 para que o fluxo de trânsito permaneça constante. Consequentemente, o fluxo de trânsito no trajeto norte é zero e não permanece constante o fluxo na interseção 3, resultando 1000 veículos a entrar e 2800 a sair desta interseção. Assim, constata-se que Edite e Tiago apresentam dificuldades relacionadas com a falta de validação dos valores propostos, competência de validação também não evidenciada nos restantes grupos, não chegando nenhum deles a validar os resultados obtidos à luz da situação real.

Nos modelos matemáticos trabalhados, as resoluções escritas revelam que apenas dois grupos de estudantes (Fátima e Heitor, Artur e Hugo) evidenciam competências para interpretar os resultados matemáticos obtidos. As seguintes matrizes (Figura 6.9 e Figura 6.10), associadas a um modelo matemático de SEL e expressas na forma de matriz escalonada reduzida, apresentam diferentes números de colunas, evidenciando que os modelos reais diferem no número de fluxos a encontrar e, portanto, que os dois grupos de estudantes propõem distintos modelos reais.

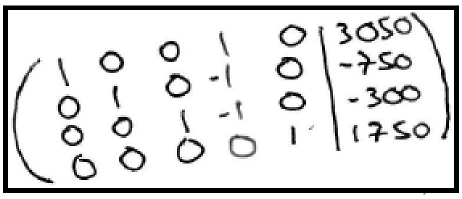


Figura 6.9. Resultado do trabalho matemático de Fátima e Heitor.

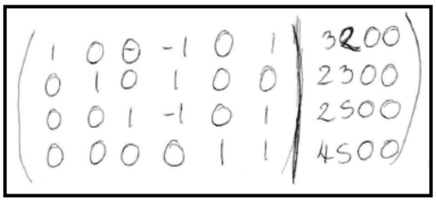


Figura 6.10. Resultado do trabalho matemático de Artur e Hugo.

Ambos os grupos obtêm resultados matemáticos a partir das matrizes anteriores, embora a interpretação em termos da situação real não esteja correta. No caso de Fátima e Heitor, para além de obterem resultados matemáticos e de os interpretarem, eles também são capazes de responder às questões da tarefa (Figuras 6.11a, 6.11b e 6.11c), embora sem os interpretarem devidamente no contexto real da tarefa.

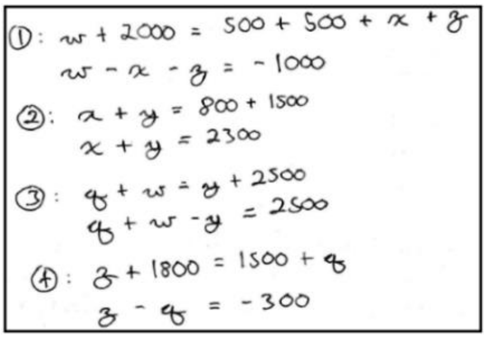
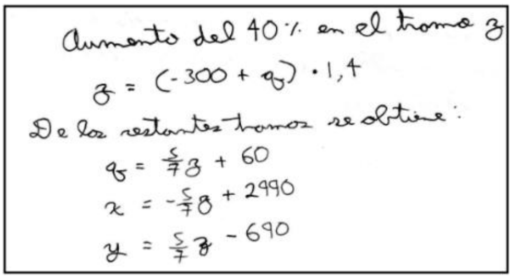
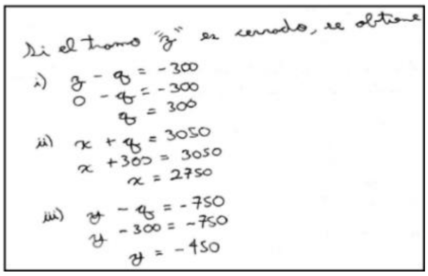


Figura 6.11a. Modelo matemático de Fátima e Heitor.



[aumento de 40% no trajeto z…
Dos restantes trajetos obtém-se…]

Figura 6.11b. Resultados matemáticos para a questão 2 apresentados por Fátima e Heitor.



[Se o trajeto z for encerrado,
obtém-se…]

Figura 6.11c. Resultados matemáticos para a questão 1 apresentados por Fátima e Heitor.

Fátima e Heitor recorrem ao modelo matemático (Figura 6.11a) para encontrar resultados que lhes permitam responder às últimas três questões da tarefa, nomeadamente saber o que acontece se o fluxo aumentar em 40% num dos trajetos (Figura 6.11b) e o que acontece se um trajeto for encerrado (Figura 6.11c), neste caso, se $z = 0$. No caso do aumento de tráfego, Fátima e Heitor optam por analisar o trajeto associado à variável z, mencionando, na sua resolução escrita e em termos da situação problema, que "as equações descrevem o fluxo dos distintos trajetos dependendo de z, tendo por base a condição estabelecida. Estes trajetos terão de diminuir de fluxo para que z aumente". Embora estes estudantes percebam que alguns trajetos serão afetados por este aumento de fluxo em z, não identificam a partir das equações encontradas (Figura 6.11b) que uma diminuição de fluxo em q não implica um aumento de fluxo em z, dado que z e q determinam uma relação afim onde um aumento em z implica um aumento em q. De modo semelhante, quando respondem na sua resolução escrita à situação problema acerca do trajeto a encerrar, Fátima e Heitor manifestam que "é necessário analisar o valor obtido em cada trajeto. Se resultar negativo, isso indica que o fluxo correspondente pode ser incrementado. Se o trajeto ficar com um valor excessivo [referindo-se a valor positivo], indica que o fluxo correspondente deve ser diminuído". Apesar de correta para valores em IR, esta afirmação não é muito rigorosa para o contexto da situação real, uma vez que os valores de fluxo são números inteiros positivos. Desta forma, interpreta-se que Fátima e Heitor, e também o grupo de Artur e Hugo, evidenciam aprendizagens relativas ao conceito formal de SEL, ao conceito de matriz associada a um SEL e ao conceito de conjunto solução, embora apresentem insuficientes competências que lhes permitam interpretar e validar resultados no contexto da situação problema, conforme também identificado nos restantes grupos de estudantes.

6.1.3 Rotas de modelação

Nas resoluções da tarefa, foram identificadas diferentes rotas de modelação, podendo ser agrupadas em cinco tipos: 1) rotas não lineares que terminam no mundo matemático (G2); 2) rotas não lineares que terminam no resto do mundo (G7); 3) rotas lineares que terminam no mundo tecnológico (G5); 4) rotas lineares que terminam no mundo matemático (G1, G3, G6, G9, G10); e 5) rotas lineares que terminam no resto do mundo (G8, G4). Como exemplo, apresento uma rota não linear (G7) e uma rota linear (G5), sendo rotas que mostram também a diferença da utilização (G5) ou não (G7) de um recurso tecnológico.

Nos dois grupos que seguiram rotas não lineares, encontramos o caso de Fátima e Heitor (G7), cujo trabalho se distingue dos restantes grupos da turma por terem sido os únicos a responder a todas as questões da tarefa, evidenciando-se a construção de mais de um modelo real e a proposta de trabalhar o modelo matemático recorrendo a duas estratégias de resolução diferentes, conforme se apresenta na figura 6.12.

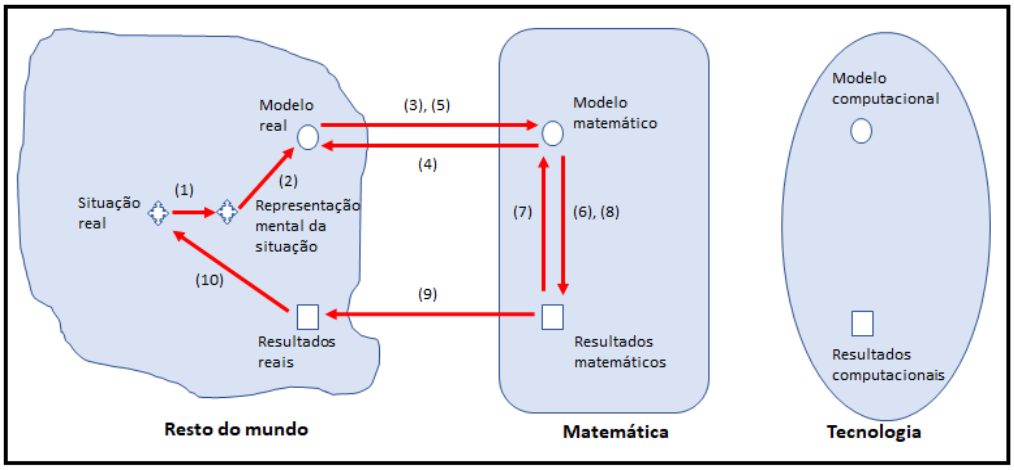


Figura 6.12. Rota de modelação de Fátima e Heitor.

A rota de modelação de Fátima e Heitor, sinalizada através da sequência de setas na cor vermelha, mostra que estes estudantes avançam e retornam à etapa prévia em alguns dos momentos do ciclo de modelação, por exemplo do modelo matemático para o modelo real, sendo modificado o modelo real (processos P3 e P4) em pelo menos uma ocasião, conforme referido por estes estudantes na sua resolução escrita da tarefa: "Para a realização do modelo analisaram-se distintas condições, algumas eram inconsistentes e outras complicavam muito o problema, pelo que não se consideraram". Observando a resposta anterior e o modelo matemático destes estudantes (Figura 6.11a), é possível interpretar que puderam pensar inicialmente em modelos reais que incluíam dois sentidos para o fluxo de trânsito, optando no final por um modelo real com um só sentido nos trajetos de fluxo desconhecido, sendo que, para estes estudantes, o modelo com dois sentidos ou algum outro semelhante "complicavam muito o problema". No que se refere a estratégias a usar no trabalho com o modelo, os estudantes consideraram duas opções, conforme referido na sua resolução escrita: "Para a simplificação ou obtenção de soluções do SEL construído pensou-se em utilizar a substituição, mas decidiu-se utilizar matrizes e o método de Gauss-Jordan".

O facto de Fátima e Heitor terem pensado inicialmente no método de substituição para trabalhar no modelo matemático (P6) permite interpretar que pensaram resolver o modelo sem aplicação de métodos de álgebra linear, mas acabaram por se aperceber de que a presença de cinco variáveis no modelo complicava os cálculos, optando por começar de novo o trabalho matemático (P7), desta vez recorrendo ao método de redução de Gauss-Jordan (P8). Fátima e Heitor trabalharam matematicamente sobre o modelo de forma correta (Figuras 6.11b e 6.11c), mobilizando aprendizagens sobre o conceito formal de SEL, de matriz associada e conjunto solução de um SEL para obterem resultados matemáticos, conforme também identificado no outro grupo que apresenta rotas não lineares (Marcelino e Estela). No entanto, as aprendizagens anteriores não foram suficientes para que validassem os seus resultados reais, ocorrendo uma interpretação incorreta dos resultados reais (P9) para responder à situação problema, sem passar pelo processo de validação desses resultados (P10).

No que se refere ao tipo de rotas lineares em que é utilizado um recurso tecnológico, encontramos o grupo de Martim e Fabiana, cuja rota é apresentada na figura 6.13 a seguir:

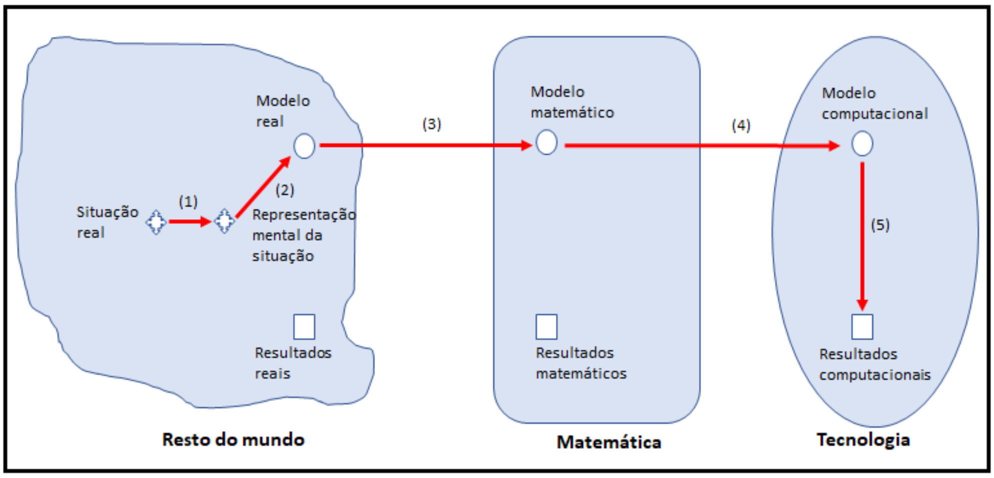


Figura 6.13. Rota de modelação de Martim e Fabiana.

Na figura 6.13 observamos que o processo de modelação segue uma rota linear, diferente da rota de Fátima e Heitor, pois os estudantes não retornam a etapas prévias em nenhum dos momentos do ciclo de modelação. A formulação incorreta de um modelo matemático por Martim e Fabiana (P3), já referida na figura 6.7a, juntamente com o comentário exposto na resolução da tarefa "para resolver este problema pensámos numa matriz homogénea, já que igualámos todas as equações a zero para que não exista engarrafamento", evidencia que existe uma compreensão da tarefa (P1), nomeadamente que a diferença entre fluxos de entrada e saída numa mesma interseção deve ser zero. No entanto, tal como outros grupos que seguem modelos lineares (G1, G3, G6, G9, G10), estes estudantes apresentam dificuldades para estruturar o modelo real (P2) e para obter o conjunto solução de um SEL, contrariamente aos grupos que seguem rotas não lineares, que apresentam pelo menos um modelo real bem estruturado.

O trabalho matemático de Martim e Fabiana atravessa o mundo tecnológico (P4), obtendo resultados computacionais (P5) (Figura 6.7b) que não conseguem interpretar como resultados matemáticos, nomeadamente perceber o conjunto solução do modelo proposto. Portanto, o recurso tecnológico ajuda-os a simplificarem cálculos, mas não a interpretá-los. A dificuldade anterior pode estar relacionada com uma insuficiente aprendizagem para relacionar uma matriz com um SEL, mas também com o facto de não serem capazes de extrair informação sobre o conjunto solução de um SEL a partir da matriz obtida, usando o *Mathematica*.

Em geral, as rotas de modelação identificadas apresentam as seguintes características:

a) Rotas não lineares (G2, G7): Os estudantes destas rotas transitam do resto do mundo ao mundo da matemática, e vice-versa, atravessando duas vezes a fase do modelo real e do modelo matemático, o que se explica com a consideração de dois modelos reais e duas formas de trabalhar no modelo matemático: substituição e Gauss-Jordan. Quanto à última fase que atravessam, uma das rotas termina na fase dos resultados matemáticos (G2), enquanto a outra rota termina na fase da situação real (G7), evidenciando ambos os grupos aprendizagens sobre o conceito de SEL, matriz associada a um SEL e conjunto solução de um SEL. No entanto, um dos grupos não interpreta os resultados matemáticos no contexto da situação problema (G2) e nenhum deles atravessa a fase de validação.

b) Rotas lineares (G1, G3, G4, G5; G6, G8; G9, G10): Estes estudantes transitam só uma vez por cada fase, tendo terminado as suas rotas no mundo matemático com a construção de um modelo matemático (G1, G3, G9), no mundo tecnológico com o trabalho matemático sobre o modelo mas sem obter resultados matemáticos completos para todos os fluxos desconhecidos (G5, G6, G10), ou no resto do mundo com resultados que não respondem ao estipulado na situação problema (G4, G8). A nível de aprendizagens, os resultados revelam que todos os estudantes mobilizam aprendizagens sobre SEL em forma analítica ou mediante estimativas numéricas para construir um modelo matemático, embora a maior parte evidencie dificuldades para obter um conjunto solução de um SEL (G1, G3, G5, G6, G9, G10). Os grupos que obtêm o conjunto solução de um SEL interpretam resultados matemáticos, embora tenham criando modelos reais inapropriados (G4) ou estabelecido hipóteses incorretas sobre os parâmetros do conjunto solução (G8).

6.1.4 Síntese

O trabalho dos estudantes na realização da tarefa “trânsito preventivo” permitiu observar as rotas lineares e não lineares que desenvolveram, tendo seguido maioritariamente rotas lineares. Os estudantes que realizam rotas não lineares, ao trabalharem na tarefa, evidenciam competências suficientes que lhes permitem transitar, mais de uma vez, por diferentes fases do ciclo de modelação, como por exemplo: 1) elaborar diferentes modelos reais, uns que envolvem poucas variáveis e outros que acrescentam mais variáveis ao modelo inicial; 2) matematizar quantidades relevantes de fluxos de veículos referidos na tarefa e suas relações com fluxos desconhecidos; 3) descrever e representar algebricamente as relações anteriores como um SEL, usando notações matemáticas apropriadas; e 4) visualizar formas diferentes de trabalhar o modelo matemático; 5) interpretar resultados matemáticos em termos de fluxos de veículos.

No caso dos grupos com rotas lineares, as competências 2), 3), 5) são também identificadas, mas não as competências 1) e 4), produto destes estudantes não pensarem em mais de um modelo real ou mais de uma forma de trabalhar o modelo matemático. Para além disso, a competência 5) é parcialmente desenvolvida por ambos os tipos de grupos, sendo que existem evidências de interpretação, mas estas interpretações não são feitas considerando a totalidade de condições do contexto da tarefa. Os modelos reais dos estudantes com rotas lineares mostram ser menos corretos, por comparação com os dos estudantes que seguem rotas não lineares, com modelos reais que não se adequam totalmente ao contexto da tarefa devido a interpretações incorretas do problema. Todos os estudantes da turma evidenciam competências para compreender, estruturar/simplificar a tarefa, e construir um modelo matemático, mas precisaram de discutir bastante nos respetivos grupos de trabalho para as mobilizarem, revelando terem desenvolvido essas competências a partir do trabalho realizado na tarefa de modelação e não como consequência de competências que já costumavam pôr em prática. Os modelos matemáticos construídos pelos estudantes têm por base duas abordagens: sistemas lineares de equações (SEL) e o método de tentativa e erro, este último identificado num dos grupos com rotas lineares. No entanto, nenhum dos estudantes evidenciou competências para validar os resultados obtidos, possivelmente por ser uma atividade com a qual os estudantes têm pouca experiência na sala de aula.

Os grupos que percorrem rotas não lineares revelam aprendizagens de conceitos e procedimentos algébricos, em particular, o requerido conceito de matriz associada a um SEL, que lhes permitiu formular adequadamente um SEL e a matriz aumentada associada, e encontrar o seu conjunto solução. Estes grupos são capazes de formular um SEL de forma analítica, considerando variáveis e dados numéricos corretos a partir do enunciado da tarefa, para construir um modelo matemático baseado nesse SEL. Posteriormente, trabalham no SEL recorrendo ao método de substituição ou ao método de Gauss-Jordan, considerando ambas as opções para o trabalho matemático no modelo, mas optando no final por um só método de resolução. No caso particular dos grupos que optam pelo método de Gauss-Jordan, os estudantes trabalham apropriadamente, aplicando operações elementares sobre as linhas da matriz até obterem uma matriz reduzida. Todos os grupos são capazes de obter um conjunto solução para pelo menos um dos modelos reais propostos.

No que respeita aos grupos que desenvolvem rotas de modelação lineares, também todos evidenciam aprendizagens sobre o conceito de SEL. A maioria sabe formular analiticamente um SEL mas a partir de modelos reais que não se articulam totalmente com o contexto do problema, e um grupo evidencia dificuldades para construir analiticamente o SEL por não conseguir distinguir entre fluxos constantes e fluxos variáveis. Outros estudantes recorrem a noções informais de SEL, baseadas em métodos de tentativa e erro onde procuram satisfazer numericamente apenas algumas igualdades entre fluxos de entrada e saída associadas ao contexto real. A maior parte dos estudantes evidencia ainda dificuldades para identificar o conjunto solução de um SEL. No caso dos estudantes que utilizam SEL expressos analiticamente estas dificuldades têm a ver com: 1) não serem capazes de interpretar resultados matemáticos, nomeadamente, a matriz escalonada reduzida em termos algébricos; ou 2) não serem capazes de trabalhar o modelo matemático por falta de tempo, investindo a maior parte do tempo em outras atividades do processo de modelação, principalmente a compreensão e estruturação da tarefa. Quanto aos estudantes que trabalham numericamente com base no método de tentativa e erro, embora evidenciem competências para trabalhar matematicamente, o método não permite obter um conjunto solução mas apenas uma solução que não satisfaz todas as condições de fluxo de trânsito do problema, e que depois também não chegam a validar.

No que se refere à tecnologia, nesta tarefa de modelação só foi utilizada por um grupo como apoio ao trabalho matemático sobre o modelo, nomeadamente para facilitar o processo de cálculo de uma matriz reduzida. No entanto, não ajudou os estudantes a interpretarem os resultados obtidos computacionalmente, devido à sua formulação inapropriada do seu modelo real. Assim, nesta tarefa, o conhecimento da tecnologia utilizada para trabalhar no modelo matemático não levou a aprendizagens formais sobre o conceito de SEL e de matriz associada. A pouca utilização da tecnologia parece ser devida: 1) à não utilização de representações geométricas para trabalhar os modelos analíticos, sendo que esse trabalho requeria que os estudantes utilizassem o computador para interpretar o conjunto solução, como ocorreu na tarefa de antecipação; ou 2) à quantidade de fluxos desconhecidos definidos pelos estudantes, sendo que modelos reais "simples" estão associados a poucas variáveis em jogo e, consequentemente, a modelos cuja resolução analítica é simples.

Confrontando as resoluções da tarefa de antecipação com as da tarefa de modelação, observa-se que embora na tarefa de antecipação todos os estudantes tenham mobilizado aprendizagens para construir algebricamente uma matriz associada a um SEL, este facto não garante que os estudantes saibam construir a matriz associada a um SEL quando a informação é apresentada em problemas contextualizados. Para além disso, o facto de a maior parte dos estudantes (seis grupos) mobilizar aprendizagens para encontrar o conjunto solução de um SEL de forma analítica na tarefa de antecipação, parece ter contribuído para que alguns desses estudantes obtivessem resultados matemáticos na tarefa de modelação, como é o caso dos grupos que desenvolveram rotas não lineares. Aqueles estudantes que evidenciaram dificuldades para obter o conjunto solução de um SEL de forma analítica na tarefa de antecipação também apresentam essa dificuldade na tarefa de modelação. Em particular, o facto de o grupo G5 recorrer à tecnologia e o grupo G6 recorrer ao método de tentativa e erro na tarefa de modelação parece de acordo com o facto de ambos os grupos terem tido dificuldades para obter o conjunto solução de um SEL de forma analítica na tarefa de antecipação. Assim, a obtenção do conjunto solução de um SEL poderá ter levado estes estudantes a pensarem em processos de modelação que evitem o trabalho analítico sobre o modelo matemático. Em parte, estes resultados podem explicar-se se for tido em conta que foi a primeira tarefa de modelação trabalhada pelos estudantes. Conforme deram a entender alguns dos estudantes, nas discussões coletivas, ainda não estavam suficientemente familiarizados com o conceito e com a resolução de SEL recorrendo a métodos baseados em matrizes.

6.2 Tarefa TM2: codificação de senhas

6.2.1 Tarefa de antecipação

A segunda tarefa de antecipação (Anexo B2) pretendia que os estudantes trabalhassem propriedades das operações elementares com matrizes, nomeadamente os pressupostos a considerar nas matrizes para cumprir a definição de adição, subtração, e produto de matrizes, e também as propriedades requeridas para uma matriz ser invertível. Para além disso, encorajava-se o estudante a utilizar a regra de Cramer para relacionar o conceito de matriz inversa e determinante de uma matriz com o conceito de SEL, utilizando o *Mathematica* para os respetivos cálculos.

As resoluções desta tarefa revelaram que todos os estudantes foram capazes de mobilizar conhecimentos de álgebra linear para reconhecer a não existência de solução para a equação matricial $B^T * X^{-1} = cA + D + I_2$, com $B_{2\times2}$, $A_{2\times3}$, $D_{3\times2}$. As justificações dos estudantes referem-se de maneira correta à impossibilidade de ser efetuada a adição matricial do lado direito da equação ou à impossibilidade de serem efetuados alguns produtos que vão surgindo na tentativa de resolver a equação, ambos os aspetos devido a terem dimensões não compatíveis com as operações. Por exemplo, Mateus e Xavier argumentam na sua resolução escrita que "a operação $cA + D + I_2$ não se pode realizar, pois as dimensões das matrizes são diferentes entre si, portanto, a matriz X não se pode determinar", interpretando-se que estes estudantes percebem que as matrizes A e D devem ser matriz de dimensão 2×2, para ficar definida a adição entre elas e com a matriz identidade I_2. Outros grupos, como Marcelino e Estela, argumentam com base na definição de produto matrizes:

> Para encontrarmos X, a primeira coisa é que B^T tem de ser invertível. Para além disso, o produto de $(B^T)^{-1}$ com a matriz D deve estar definido, mas isto não é possível, devido às dimensões das matrizes.

Neste sentido, Marcelino e Estela observam que mesmo sendo B^T invertível, o produto matricial ${(B^T)^{-1}}_{2\times2} \times D_{3\times2}$, que advém de aplicar a propriedade distributiva do produto de $(B^T)^{-1}$ sobre a soma $cA + D + I_2$, origina um produto não definido por causa das dimensões das matrizes, impossibilitando resolver a equação.

No que refere à relação entre determinantes, matrizes invertíveis e SEL, a maior parte dos estudantes da turma (oito grupos) evidenciam reconhecer que o facto do determinante de uma matriz ser diferente de zero implica que a matriz seja invertível, sendo capazes de utilizar esta propriedade para encontrar valores de parâmetros que permitem uma matriz ser invertível e utilizar o determinante para resolver o SEL usando a regra de Cramer. Quanto aos grupos que evidenciam dificuldades, Fabrício e Maurício formam o único grupo que evidencia dificuldade para interpretar a propriedade associada aos determinantes e matrizes em termos de conjunto solução, como mostra a sua resolução apresentada na figura 6.14.

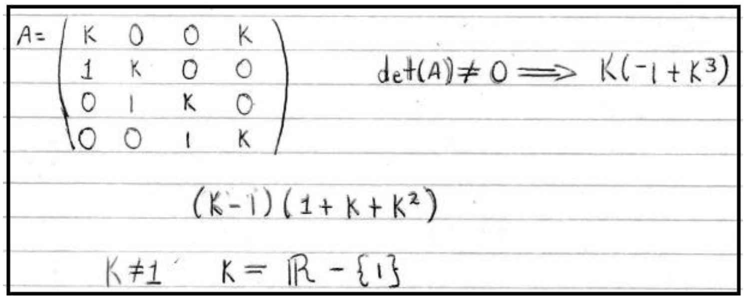


Figura 6.14. Trabalho de antecipação de Fabrício e Maurício na Q2.

Fabrício e Maurício, tal como os restantes estudantes da turma, utilizam o *Mathematica* para calcularem a expressão do determinante da matriz A em termos do parâmetro k, conforme solicitado no enunciado da tarefa, obtendo o valor $k(-1+k^3)$. Na figura 6.14 evidencia-se que Fabrício e Maurício reconhecem que a matriz A é invertível quando o seu determinante é diferente de zero, nomeadamente quando $k(-1+k^3) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ e $k \neq 1$. No entanto, na sua resposta só consideram a resposta de $k \neq 1$, razão que pode estar relacionada com um lapso na factorização da expressão polinomial. Contudo, estes estudantes não parecem ter reparado que tanto a 1ª linha como a 4ª coluna da matriz se anulavam se o valor de k fosse zero, imediatamente indicando uma matriz não invertível. Para além disso, estes estudantes não obtêm a expressão da matriz inversa de A, solicitada para algum dos valores para os quais a matriz seria invertível, o que pode ser interpretado como o seu desconhecimento do código em *Mathematica* para o cálculo da matriz inversa.

Diferentemente de Fabrício e Maurício, o grupo de Fátima e Heitor evidenciam dificuldade para associar as condições que deve cumprir o determinante da matriz para que esta seja invertível, ao responderem na Q2 “Para que uma matriz seja invertível o seu determinante deve ser igual a zero: $det(A) = 0$”, embora não mostrem dificuldades quando relacionam determinantes e SEL para encontrar soluções do sistema (Figura 6.15).

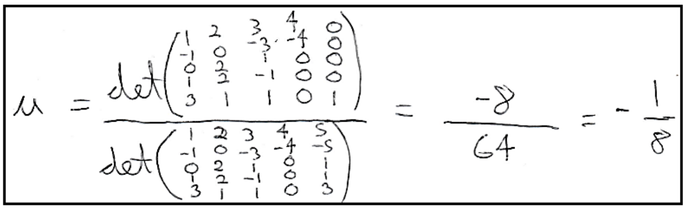


Figura 6.15. Trabalho de antecipação de Fátima e Heitor na Q3.

Nesta figura, as resoluções de Fátima e Heitor evidenciam uma aplicação apropriada da regra de Cramer para encontrar o valor da variável u de um SEL. No entanto, considerando a resposta dada na Q2, parece que estes cálculos são feitos de maneira procedimental, isto é, sem considerar as condições que o determinante da matriz associada ao SEL deve satisfazer. Fátima e Heitor evidenciam não saber que uma condição para aplicar a regra é que a matriz associada ao SEL deve ser invertível. Efetivamente, a resposta dada por eles em Q2 refere que uma matriz é invertível quando $det(A) = 0$, o que implicaria uma divisão por zero no quociente do valor de u (Figura 6.15), consequentemente esse valor não poderia ser determinado.

6.2.2 Competências de modelação e aprendizagem de conceitos

Compreensão e simplificação/estruturação da tarefa

A resolução desta segunda tarefa de modelação (Anexo C2) foi mais rápida para a turma toda em comparação com a primeira tarefa. Este facto tem a ver com uma maior facilidade dos estudantes para compreenderem a situação problema apresentada, mas também com a decisão tomada pelo investigador, após o trabalho com a primeira tarefa de modelação, de assumir que cada estudante faria em casa uma primeira leitura do enunciado das tarefas de modelação seguintes, previamente ao trabalho em sala de aula. Assim, os tempos dedicados a compreender a situação problema foram reduzidos.

As resoluções escritas mostram que todos os estudantes compreendem a situação problema em termos de operações entre duas matrizes: uma matriz onde deve ser incluída cada letra de uma frase da mensagem, utilizando dados numéricos (matriz de código) e uma outra matriz criada de forma livre para ser operada com a primeira (matriz de segurança). Assim, por exemplo, Artur e Hugo, quando questionados sobre a estratégia utilizada para trabalhar a tarefa, respondem na sua resolução escrita:

> A estratégia utilizada foi fazer uso de matrizes, pois as letras de um texto podem ser trocadas por números e, por sua vez, estes números ser trocados por matrizes. Escolheu-se esta estratégia porque se tinha conhecimento prévio de matrizes e, para além disso, um dos elementos já tinha visto certas coisas sobre criptografia, o que foi de ajuda na resolução.

A resposta de Artur e Hugo revela dois factos importantes. Por um lado, o conhecimento matemático prévio, em particular de álgebra linear, que os estudantes têm para abordarem a tarefa, que foi importante para o poderem relacionar com o contexto da tarefa e, por outro lado, a experiência quotidiana dos estudantes que facilita a compreensão da situação problema quando têm um ponto de partida relativo à situação apresentada.

Ainda que Artur e Hugo, tal como a restante turma, interpretem a situação problema recorrendo ao seu conhecimento de matrizes, três grupos de estudantes criam modelos reais que revelam uma compreensão parcial da situação problema. Por um lado, identificam-se dois grupos que, embora considerando condições adequadas de codificação para cada uma das matrizes utilizadas, fazem uma interpretação incorreta de como se devem articular entre si estas matrizes para construir o modelo matemático que serve de base à codificação da mensagem, obtendo ambos os grupos um modelo matemático na forma $M + C = T$, com T a matriz de código e C a matriz de segurança. Fazem parte desta categoria Inês e Casimiro, estudantes que compreendem a situação como a codificação de uma mensagem através de uma única matriz T, tendo de criar posteriormente matrizes M e C cuja soma coincida com T. Este modelo assim pensado não fixa a matriz de segurança C, pois variando os valores da matriz M variarão os valores da matriz C, independentemente de que T seja uma matriz única. Assim, em vez de obtermos uma única matriz de segurança C para qualquer matriz de código T, conforme solicitado na situação problema, Inês e Casimiro, tal como aconteceu com Edite e Tiago, criam um modelo matemático que codifica mensagens individuais, isto é, para cada mensagem final M enviada ao recetor da mensagem vai ser necessário uma matriz C distinta.

Por outro lado, evidencia-se um terceiro grupo, o grupo de Fabrício e Maurício, que tenta formular matrizes de segurança embora sem considerar a mensagem que devem codificar (Figura 6.16).

$$
\begin{array}{ccc}
T & & C \\
\begin{pmatrix}
1 & 7 & 12 & 16 & 19 & 21 \\
22 & 2 & 8 & 13 & 17 & 20 \\
27 & 23 & 3 & 9 & 14 & 18 \\
31 & 28 & 24 & 4 & 10 & 15 \\
34 & 32 & 29 & 25 & 5 & 11 \\
36 & 35 & 33 & 30 & 26 & 6
\end{pmatrix}
& - &
\begin{pmatrix}
1-A & 7-B & 12-C & 16-D & 19-E & 21-F \\
22-G & 2-H & 8-I & 13-J & 17-K & 20-L \\
27-M & 23-N & 3-\tilde{N} & 9-O & 14-P & 18-Q \\
31-R & 28-S & 24-T & 4-U & 10-V & 15-W \\
34-X & 32-Y & 29-Z & 25-\sqcup & 5-. & 11-, \\
36-- & 35-: & 33-' & 30-`` & 26-? & 6-''
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Figura 6.16. Modelo matemático proposto por Fabrício e Maurício.

A diferença em relação aos dois grupos anteriores é que Fabrício e Maurício criam uma matriz de segurança C e uma matriz de código T que faz menção à codificação inicial da mensagem. No entanto, olhando para a matriz T observa-se que os valores nas diagonais correspondem a números consecutivos, cujas entradas vão em aumento desde 1 até 21 na região triangular superior da matriz, e também em aumento de 22 até 36 na região triangular inferior. Assim, a matriz T não corresponde a uma codificação de alguma mensagem, mas a uma tentativa dos estudantes organizarem valores em forma ordenada, como meio para obter a mensagem final traduzida por uma matriz formada por letras, pois procuram que o resultado de $T - C$ produza uma matriz formada pelas letras do alfabeto e alguns sinais de pontuação.

Na formulação do modelo real, todos os estudantes revelam competência para simplificar/estruturar a tarefa, embora conforme referido, três grupos não compreendam totalmente a tarefa, formulando modelos reais parcialmente válidos. Em geral, as simplificações dos estudantes fazem referência a modelos reais baseados na formulação de duas matrizes que, após serem trabalhadas através de operações de adição, subtração ou produto de matrizes, permitem uma codificação final da mensagem a ser enviada. As simplificações incluem também a utilização de tabelas criadas pelos próprios estudantes para codificar inicialmente a mensagem “The settlement” em alguma das matrizes do modelo, embora também existam grupos que utilizam a tabela de código ASCII (Anexo C2a), proporcionada no enunciado da tarefa como elemento de contextualização da situação problema. Neste sentido, os diferentes modelos criados seguem uma estrutura na forma $X \Delta Y = Z$, sendo Δ uma das operações matriciais mencionadas. Na turma, cinco grupos recorrem à adição de matrizes como operação elementar, dois grupos à subtração, e três grupos ao produto matricial.

Entre os grupos que recorrem a modelos reais com base na operação de adição, o grupo de Martim e Fabiana revela um modelo fora do usual. Estes estudantes explicam na sua resolução escrita da tarefa: “Construiu-se uma matriz T com o código estandardizado ASCII para a mensagem “THE SETTLEMENT”, e logo procedemos à realização de uma adição de uma matriz C como segurança, criando assim uma matriz M.”

Estes estudantes criam a matriz de segurança C a partir de uma matriz invertível e uma outra matriz com as mesmas dimensões de T. Embora a resposta de Martim e Fabiana pareça referir que C deve ser o produto de duas matrizes, o seu modelo real (Figura 6.17) revela que a matriz C realmente é uma organização formada por duas matrizes.

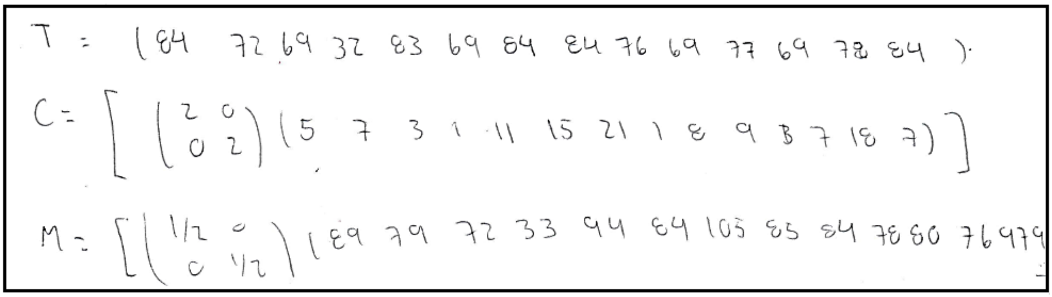


Figura 6.17. Modelo real proposto por Martim e Fabiana.

A matriz T da figura 6.17 contém a mensagem "THE SETTLEMENT" codificada com a tabela ASCII e a matriz M contém a mesma mensagem codificada a partir de operações sobre T e C, nomeadamente a primeira matriz que aparece em M corresponde à matriz inversa da primeira matriz definida em C, enquanto a segunda matriz que aparece em M corresponde a adição de T com a segunda matriz que aparece em C. Neste sentido, embora o modelo real de Martim e Fabiana se possa assumir como um modelo que recorre à operação de adição de matrizes, é um modelo que envolve as operações de adição de matrizes e matriz inversa.

No caso dos restantes quatro grupos que utilizam a operação adição, evidencia-se também a tabela ASCII para criar a matriz T, enquanto nos dois grupos que utilizam a operação subtração, a matriz T é construída a partir de tabelas próprias, como sucedeu no caso mencionado de Fabrício e Maurício (Figura 6.16). Em ambos os casos, a matriz C é criada corretamente com a mesma dimensão de T e utilizando matrizes "simples" criadas de forma aleatória.

Nos grupos que utilizam modelos reais recorrendo ao produto de matrizes, Mateus e Xavier distinguem-se dos outros dois por não utilizarem tecnologia no decurso da tarefa e por proporem um modelo real baseado no produto de matrizes envolvendo a ideia de operações elementares sobre as linhas de uma matriz, conforme mencionam no diálogo desenvolvido numa das discussões com o investigador:

> ***Investigador*:** O que estão comentando?
> ***Mateus*:** Eu estava dizendo-lhes (referindo-se ao grupo de trabalho) que podemos utilizar uma matriz elementar. Por exemplo, inventamos primeiramente alguma tabela, fazemos uma matriz e aplicamos-lhe operações elementares, e depois pegamos nessa matriz operada e nomeamo-la por matriz B, sendo B a matriz codificada o resultado de multiplicar a matriz original com a matriz produto de matrizes elementares. Poderíamos também definir uma soma, mas seria muito fácil, então uma multiplicação parece-nos algo mais interessante.

Do diálogo interpreta-se que Mateus e Xavier pensam na criação de uma tabela própria de codificação para criar a matriz inicial de código T. A seguir multiplicam esta matriz por uma matriz $E = E_1 * E_2 * \cdots * E_n$, sendo E_k alguma matriz resultante de aplicar operações elementares sobre as filas de T, para obter finalmente a matriz $B = T * E$, interpretada como a matriz final de codificação M. Neste sentido, Mateus e Xavier mobilizam conhecimentos da disciplina de Álgebra Linear associados ao processo de cálculo para encontrar uma matriz na forma escalonada dada pelo método Gauss-Jordan, interpretando-se que a matriz final de codificação M é obtida a partir deste método, embora não precisamente até obter a forma escalonada.

Matematização e trabalho sobre o modelo matemático

Na formulação do modelo matemático e no trabalho sobre o mesmo, todos os estudantes evidenciam competências para matematizar o modelo real e trabalhar no modelo, obtendo resultados matemáticos. O trabalho matemático sem utilização de *software* é desenvolvido por sete grupos, enquanto os restantes três grupos utilizam o *Mathematica*.

Referente ao trabalho sem uso de *software*, na figura 6.18 observa-se a matriz final de codificação M obtida pelo grupo de Mateus e Xavier.

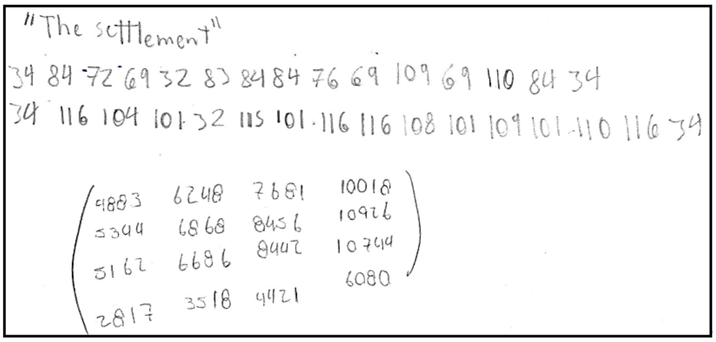


Figura 6.18. Trabalho matemático produzido por Mateus e Xavier.

Embora no diálogo apresentado acima se tenha observado que Mateus propõe a opção de criar uma tabela própria, a resolução escrita dos estudantes mostra que utilizaram a tabela de código ASCII para codificar a mensagem inicial, o que é evidente através da observação das duas linhas de números em baixo da frase “The settlement” (Figura 6.18) que revelam a codificação da frase, respetivamente, em maiúsculas (“THE SETTLEMENT”) e minúsculas (“The settlement”). Isto pode ser interpretado como uma tentativa dos estudantes para definir a matriz de código T. A matriz final de codificação M definida pelos estudantes considera uma destas duas alternativas, a mensagem com todas as letras em maiúsculas ou todas em minúsculas. Os estudantes não especificam qual foi a matriz de operações elementares (matriz de segurança C) que definiram, mas é possível obtê-la a partir da relação do produto matricial $T * C = M$ uma vez organizados os números da linha escolhida (codificação de letras maiúsculas ou minúsculas) numa matriz T de dimensão 4×4 e desde que T seja invertível.

Quanto aos grupos que utilizam a adição ou subtração no trabalho do seu modelo matemático, é destacável o modelo de Marcelino e Estela por utilizarem uma tabela própria para criar a matriz de código (Figura 6.19a) e uma matriz de segurança definida mediante uma função por ramos (Figura 6.19b).

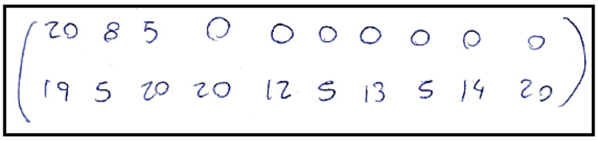
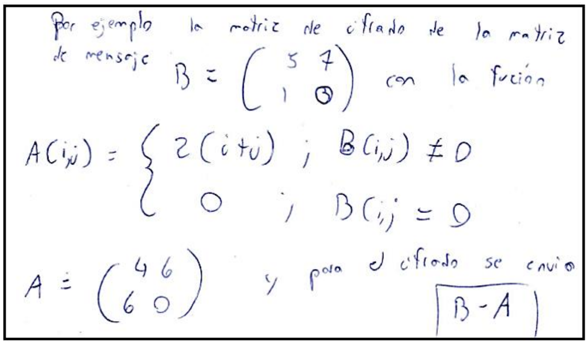


Figura 6.19a. Modelo matemático proposto por Marcelino e Estela.



[Por exemplo, a matriz de segurança da matriz de código $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com a função $A(ij)$ é $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, e para a codificação final envia-se $B - A$]

Figura 6.19b. Modelo matemático de Marcelino e Estela.

Da exemplificação dada pelos estudantes na figura 6.19b, interpreta-se que o modelo matemático proposto tem a forma $B - A = M$, onde B corresponde à matriz de código inicial, A corresponde à matriz de segurança, e M à matriz de codificação final. Observando a matriz de código evidencia-se que estes estudantes fazem uma codificação própria entre letras e números baseada na ordem em que aparecem as letras no abecedário, colocando na primeira linha a codificação da palavra “The” junto com espaços representados por zeros, e na segunda linha da matriz a codificação da palavra “settlement”. Assim, a matriz inicial (matriz de código) é codificada seguindo a correspondência $a \to 1, b \to 2, \dots, z \to 26, espaço \to 0$. Para definirem a matriz de segurança os estudantes dão um exemplo com uma matriz $B_{2\times 2}$. A matriz de segurança fica definida a partir de uma função por ramos, atribuindo o valor de zero em A àquelas entradas cujo valor é zero na matriz B, e no resto dos casos atribuindo às entradas da matriz A o dobro do valor correspondente à soma de i e j, indicadores da posição respetiva na matriz A. Desta forma, Marcelino e Estela, tal como Martim e Fabiana, evidenciam conhecimentos apropriados sobre operações com matrizes e sobre matrizes especiais que podem ser definidas para formar as matrizes de segurança.

No que se refere ao trabalho com tecnologia, Emiliana e Francela formam parte dos grupos desta categoria, sendo o seu modelo real particular (Figura 6.20a) pelo facto de utilizarem uma tabela de codificação própria com números inteiros no intervalo $[2{,}10]$, sendo o seu modelo matemático baseado na operação de multiplicação de matrizes (Figura 6.20b) e processado com o *Mathematica* (Figura 6.20c).

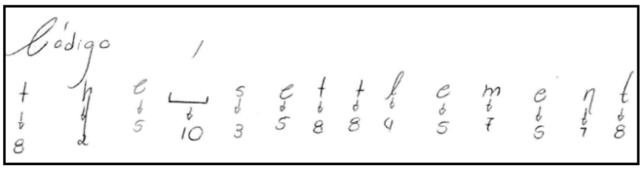


Figura 6.20a. Modelo matemático de Emiliana e Francela.

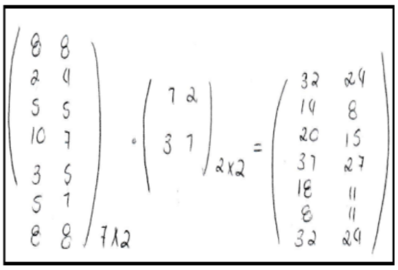


Figura 6.20b. Resultados matemáticos obtidos por Emiliana e Francela.

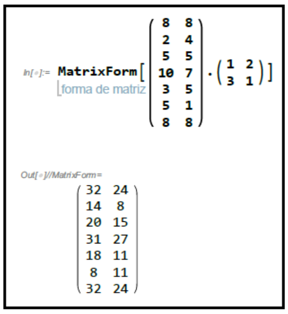


Figura 6.20c. Resultados computacionais obtidos por Emiliana e Francela.

Emiliana e Francela, quando questionadas sobre seu modelo matemático na resolução da tarefa, mencionam:

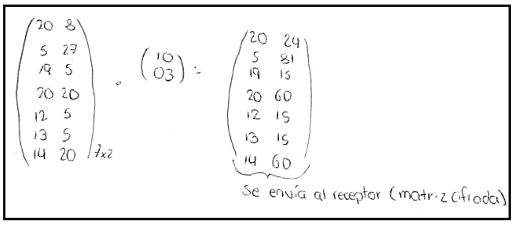
> Utilizou-se a estratégia de substituir as letras da frase por números aleatórios. Também quisemos considerar a tabela de números proporcionada no enunciado da tarefa para gerar a matriz de código, não obstante, preferimos codificar a frase com outros números não pertencentes a esta tabela.

Da resposta anterior, interpreta-se que existe uma preferência por criar um modelo matemático fora do habitual, e embora estas estudantes não mencionem o porquê de optarem por números do intervalo $[2{,}10]$, supõe-se que a escolha se deve a quererem utilizar números aleatórios com um só algarismo para as letras e dois algarismos para caracteres que não correspondam a letras, como por exemplo, os espaços. Emiliana e Francela trabalham no modelo matemático, substituindo a matriz de código e a matriz de segurança pelos seus respetivos valores (Figura 6.20b), recorrendo ao uso da tecnologia para simplificar cálculos (Figura 6.20c), conforme também evidenciado nos outros dois grupos que recorrem à utilização do *Mathematica*. Para além disso, observa-se que a matriz de segurança é uma matriz invertível, facto que também foi observado na forma como Mateus e Xavier definiram a matriz de segurança (Figura 6.18), e em geral nos três grupos que propõem modelos matemáticos utilizando o produto matricial.

Interpretação e validação dos resultados matemáticos

A definição de matrizes invertíveis, e consequentemente quadradas, por parte dos três grupos que utilizam produtos matriciais para a formulação do modelo matemático, evidencia a mobilização de aprendizagens associadas a condições que as matrizes devem possuir para serem invertíveis e também competências de validação associadas a garantir a descodificação da mensagem final. No geral, cinco grupos evidenciam competências para interpretar resultados matemáticos, entres estes os três grupos que definem modelos matemáticos baseados em produtos de matrizes. No entanto, só uma pequena parte dos estudantes da turma valida resultados, nomeadamente dois dos grupos que utilizam o produto matricial no seu modelo matemático, resultado que parece estar associado à complexidade da operação de produto matricial para descodificar a mensagem, em comparação com a adição ou subtração de matrizes, onde os estudantes não sentem a necessidade de validar os resultados.

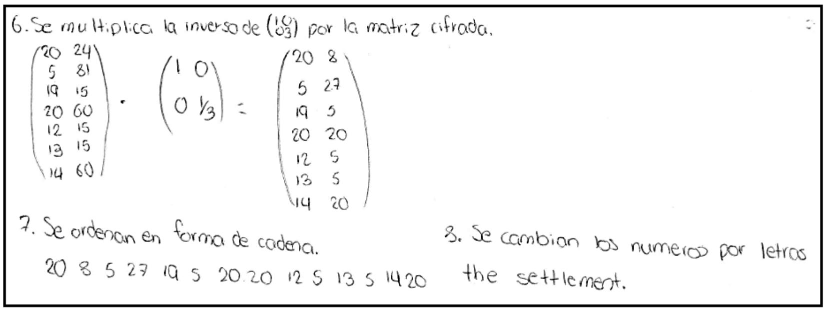
Entre os grupos de estudantes que mostram competências para interpretar e validar resultados, encontramos o grupo de Artur e Hugo, os quais mobilizam aprendizagens de multiplicação de matrizes (Figura 6.20a) e resolução de equações com matrizes (Figura 6.20b) para mostrar seu processo de descodificação da mensagem.



[Envia-se ao recetor (matriz codificada)]

Figura 6.21a. Resultados matemáticos obtidos por Artur e Hugo.

Após estes estudantes obterem resultados matemáticos (Figura 6.21a), indicam na parte inferior da matriz final a frase "envia-se ao recetor", o que evidencia um processo cognitivo de interpretação de resultados. A escolha da matriz de segurança de Artur e Hugo parece ser definida com a finalidade de facilitar o cálculo da matriz inversa ou de manter a primeira coluna invariante em ambas as matrizes, isto é, de código e final (esta última nomeada de "matriz codificada" pelos estudantes). Na figura 6.22b pode observar-se como a escolha da matriz de segurança definida por estes estudantes lhes facilitou o cálculo da matriz inversa.



[6. Multiplica-se a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pela matriz codificada.

7. Ordenam-se em forma de cadeia: 20 8 5 27 19 5…5 14 20

8. Trocam-se números por letras: The settlement]

Figura 6.21b. Processo de validação de resultados desenvolvido por Artur e Hugo.

Artur e Hugo multiplicam pela matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ambos os lados da igualdade apresentada na figura 6.21b, realizando nalgum momento a operação $A * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ com A a matriz de código e M a matriz final de codificação, num ato que dá início ao seu processo de validação de resultados. Estes estudantes sinalizam em três passos o seu processo de validação, nomeadamente obter a matriz de código a partir da matriz final de codificação e a matriz inversa da matriz de segurança (6.); organizar as entradas da matriz resultante como uma cadeia de caracteres (7.); e finalmente associar cada carácter numérico com o respetivo carácter alfabético para verificar que a cadeia numérica origina a frase original da mensagem "The settlement". Desta forma, o processo de validação de Artur e Hugo evidencia a consideração da situação real até à etapa final de resolução.

6.2.3 Rotas de modelação

Nas resoluções da tarefa, foram identificados três tipos de rotas de modelação: 1) rotas não lineares que terminam no resto do mundo (G2, G4, G8, G9); 2) rotas lineares que terminam no mundo matemático (G3, G6); e 3) rotas lineares que terminam no resto do mundo (G1, G5, G7, G10). Nas duas primeiras categorias observa-se que há grupos que passam pelo mundo tecnológico (G6, G8, G9), sendo utilizado o *Mathematica* como ferramenta para a simplificação de operações de adição e multiplicação de matrizes. Como exemplo, apresento uma rota não linear (G8) e uma rota linear (G1), sendo rotas que mostram a utilização (G8) ou não utilização (G1) de um recurso tecnológico.

Entre os grupos que seguiram rotas não lineares, encontramos o caso de Artur e Hugo (G8), cujo trabalho de modelação evidencia a consideração de dois modelos reais, nomeadamente a utilização de matrizes de segurança com diferentes dimensões. A rota de modelação deste grupo é apresentada na figura 6.22a.

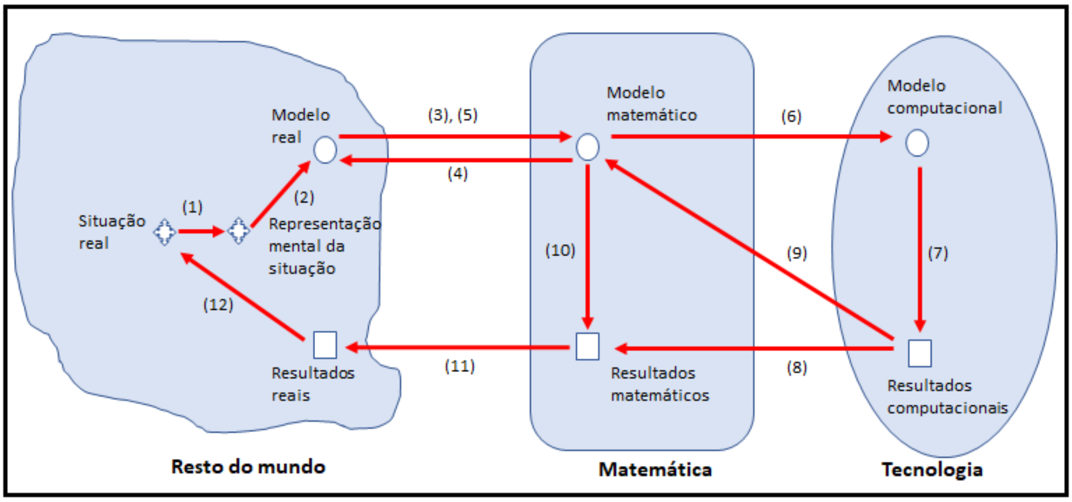


Figura 6.22a. Rota de modelação de Artur e Hugo.

A rota de modelação de Artur e Hugo começa na situação real ou situação problema, com a compreensão da tarefa em termos do uso de matrizes para codificar mensagens (P1). A seguir estes estudantes estruturam e simplificam a situação (P2), decidindo utilizar a operação de multiplicação entre matrizes para obter a matriz codificada que deverá ser enviada a um possível recetor da mensagem, e utilizar o alfabeto para a codificação inicial da mensagem (Figura 6.22b).

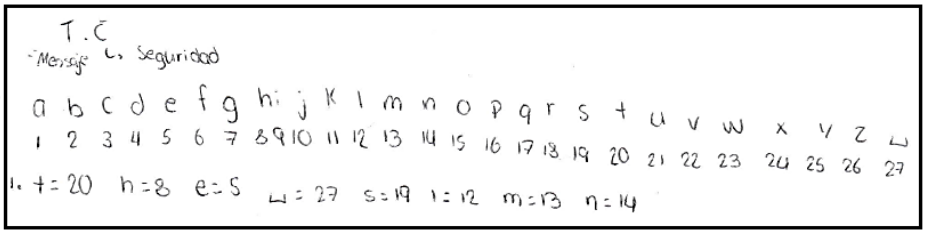


Figura 6.22b. Modelo real e matemático de Artur e Hugo.

A tabela de codificação utilizada por estes estudantes para a matriz inicial é a mesma que é utilizada pelo grupo G2, que desenvolve também uma rota de modelação não linear, embora utilizando a operação de subtração de matrizes para definir o seu modelo matemático (Figura 19c). Artur e Hugo utilizam as letras T e C para referirem as matrizes de mensagem inicial e de segurança (Figura 6.22b), o que revela simplificações sobre a situação problema consideradas por estes estudantes. Para além disso, a expressão $T \cdot C$ define a sua matematização do modelo, pois a multiplicação expressa faz referência ao produto de duas matrizes para obter a matriz final que enviarão ao recetor, ou seja, definem o modelo matemático $T \cdot C = M$.

Um aspeto sobre o qual Artur e Hugo não refletem ao iniciarem a criação do seu modelo real é nas dimensões adequadas da matriz de segurança que permitam posteriormente a descodificação da mensagem, sendo necessário a intervenção do investigador, como evidencia o seguinte diálogo nesse grupo de trabalho:

> ***Investigador:*** A escolha da matriz C depende da escolha da matriz T? E porquê?
> ***Hugo*:** Sim, depende. Devemos considerar a ordem das matrizes, pois com a operação definida (produto de matrizes) teremos matrizes com distinta ordem.
> ***Artur*:** Não importa os números que tenha a matriz de segurança desde que tenha a dimensão adequada. Aqui temos que a matriz T é $7x2$, logo a matriz C tem de ser $2x7$, no caso de definirmos a multiplicação, pelo que a matriz inversa de C teria de ser $7x2$.
> ***Investigador*:** C tem necessariamente de ser de dimensão $2x7$?
> ***Artur*:** Bom, dois por algo.
> ***Investigador*:** Certo, e sendo assim, como se faz para descodificar a mensagem?
> ***Hugo*:** Multiplicando pela inversa de C.
> ***Investigador*:** E o que significa isso?
> ***Hugo*:** Que o determinante da matriz C tem de ser distinto de zero… ahhhh, a matriz C tem de ser quadrada.
> ***Artur*:** Então a matriz C tem de ser $2x2$.
> ***Investigador*:** Seria uma possibilidade. Vejam se existe outra possibilidade de definir C sem ser matriz quadrada.

Observando o diálogo anterior, é possível inferir que estes estudantes interpretam inicialmente o modelo matemático como a relação matricial $T_{7\times 2} \times C_{2\times 7} = M_{7\times 7}$ (P3). Esta relação, embora mostre conhecimento das propriedades que devem ter duas matrizes para realizar o seu produto matricial, não responde ao contexto da situação problema, pois a matriz $C_{2\times7}$ permite a codificação da mensagem final quando operada com a matriz de código T, mas como C assim definida não é invertível, isso não permite descodificar a mensagem final para obter a mensagem original. Artur e Hugo reconhecem que precisam da inversa da matriz de segurança para descodificar a mensagem, e ao serem questionados pelo investigador apercebem-se de que a matriz C deve ser quadrada, pois quando Hugo menciona que "o determinante da matriz C tem de ser distinto de zero" estabelece a condição que a função determinante só pode ser aplicada sobre matrizes quadradas. Este aspeto marca um retorno dos estudantes para o modelo real (P4), vendo-se obrigados a modificar as dimensões da matriz C. No diálogo, Artur menciona que "a matriz C tem de ser $2x2$" para consertar o problema detetado, embora o investigador os encoraje a indagar outras possibilidades com a intenção de pensarem também em mudar as dimensões da matriz T, procurando matrizes quadradas de segurança com dimensões maiores.

Parte da resolução escrita da tarefa (Figura 6.21a) evidencia que, no final, os estudantes decidiram definir a matriz de segurança como uma matriz de dimensão $2x2$, talvez por facilitar o processo de cálculo da matriz inversa de C, acabando por definir o modelo matemático $T_{7\times2} \times C_{2\times2} = M_{7\times2}$ (P5) para trabalhar sobre este com utilização do *Mathematica* (P6, P7) e obter assim os resultados matemáticos (P8) apresentados na figura 6.22c.

In[∘]:= MatrixForm[
forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 5 & 28 \\ 20 & 5 \\ 21 & 21 \\ 12 & 5 \\ 13 & 5 \\ 14 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}]$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 5 & 84 \\ 20 & 15 \\ 21 & 63 \\ 12 & 15 \\ 13 & 15 \\ 14 & 63 \end{pmatrix}$$

Figura 6.22c. Resultados computacionais obtidos por Artur e Hugo.

Artur e Hugo transcrevem os resultados obtidos com o *Mathematica* para o papel (P9, P10), procedendo imediatamente à interpretação dos resultados matemáticos (P11) e à validação dos respetivos resultados reais associados à matriz final de codificação (P12). Estas duas últimas transições foram analisadas na secção das aprendizagens e competências, quando referido o trabalho evidenciado pelos estudantes na figura 6.21a e figura 6.21c.

No que se refere às rotas lineares, encontramos o grupo de Inês e Casimiro (G1), cuja rota é apresentada na figura 6.23a.

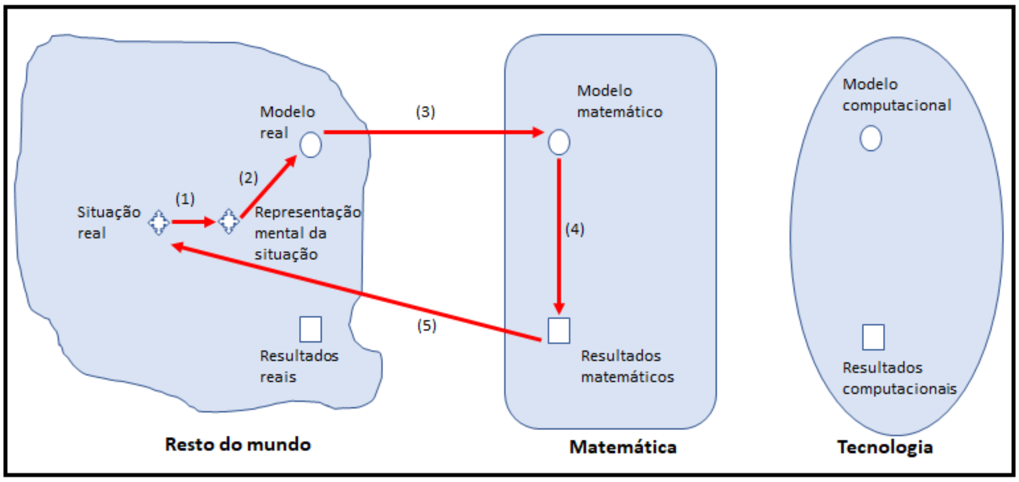


Figura 6.23a. Rota de modelação de Inês e Casimiro.

Inês e Casimiro, e outros dois grupos de estudantes (G3, G7) que também seguem rotas lineares, evidenciam uma compreensão parcial da situação problema (P1), conforme já analisado na secção de competências e aprendizagens, especificamente na subsecção de *compreensão e simplificação/estruturação da tarefa*. Inês e Casimiro codificam a mensagem em termos de matrizes, mas sem definir adequadamente a matriz de segurança na criação do seu modelo real (P2), nomeadamente criando o modelo matemático $M + C = T$ (P3), que não responde ao contexto da tarefa, conforme analisado antes, nos grupos que propõem modelos reais parcialmente corretos. Estes estudantes mencionam na sua resolução escrita que "só é preciso que o recetor realize a soma para obter o código". Da afirmação de Inês e Casimiro interpreta-se que a matriz que o recetor deve descodificar é a matriz T, obtendo os resultados matemáticos (P4) da figura 6.23b.

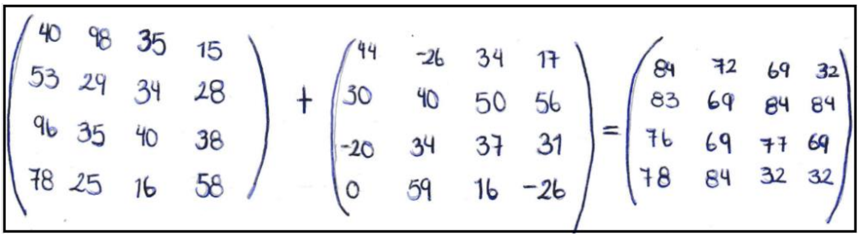


Figura 6.23b. Resultados matemáticos obtidos por Inês e Casimiro.

No trabalho matemático evidenciado nesta figura é possível observar que as matrizes da esquerda da igualdade não seguem nenhum padrão de construção individualizado, mas que apenas devem satisfazer a condição de que quando adicionadas deem como resultado a matriz T, enquanto a matriz da direita da igualdade é codificada com a tabela de código ASCII. Isso implica que a matriz de segurança pode ser definida de muitas formas e que a matriz final de codificação não passa antes por um processo de segunda codificação, o que não está de acordo com o problema proposto.

Quer Inês e Casimiro, quer os outros dois grupos mencionados com compreensão parcial da situação problema que criam modelos baseados em adição e subtração de matrizes, terminam a sua resolução da tarefa apresentando resultados no contexto real (P5), embora sem interpretar o significado de cada um dos valores obtidos na matriz T em termos da mensagem e também sem validar o modelo. Assim, a utilização das operações de adição e subtração parece criar nesses estudantes um conformismo de não interpretarem nem validarem devido à simplicidade das operações de adição e subtração, consequentemente parecem acreditar não terem erros no cálculo da matriz final de codificação.

Em geral, os três grupos de rotas de modelação identificados apresentam as seguintes características:

a) <u>Rotas não lineares</u> (G2, G4, G8, G9): Os estudantes destas rotas transitam do resto do mundo ao mundo da matemática, e vice-versa, atravessando duas vezes a fase do modelo real e do modelo matemático, o que se explica com a construção de dois modelos reais: 1) um modelo inicial considerando matrizes de segurança não quadradas e um modelo final com matrizes quadradas (G8,G9); 2) um modelo inicial considerando matrizes de segurança que não consideram espaços e sinais de pontuação na mensagem e um modelo final que os considera (G2); um modelo inicial utilizando uma tabela de codificação própria para a matriz código e um modelo final utilizando código ASCII (G4). Quanto à última fase que atravessam, todas as rotas terminam na fase da situação real, evidenciando aprendizagens sobre o conceito de matriz como organização de dados (G2, G4, G8, G9), aprendizagens sobre a multiplicação de matrizes (G8, G9), subtração de matrizes, envolvendo com funções que usam índices das entradas (G2) e adição de matrizes (G4). Todos estes grupos consideram em algum momento uma tabela própria para a matriz inicial, sendo modificada no final só por este último grupo de estudantes. Dos quatro grupos três evidenciam competências para interpretar resultados matemáticos (G4, G8, G9) e dois para validar esses resultados reais (G8, G9). Estes últimos dois grupos constroem modelos matemáticos que utilizam a multiplicação de matrizes.

b) Rotas lineares (G1, G3, G5, G6, G7, G10): Estes estudantes transitam só uma vez por cada fase do ciclo de modelação, terminando com a apresentação de resultados na situação real (G1, G5, G7, G10) ou com a apresentação de resultados matemáticos (G3, G6). Em relação às aprendizagens, os grupos mobilizam aprendizagens para criar modelos matemáticos baseados em multiplicação de matrizes (G10), subtração de matrizes (G3) ou adição de matrizes (G1, G5, G6, G7). No entanto, nem todos os grupos mobilizam estas aprendizagens adequadamente no contexto da situação problema (G1, G3, G7). Na codificação da matriz de código, todos os grupos utilizam a tabela de código ASCII, o que resulta numa limitação no desenvolvimento de competências matemáticas, pois não optam por construir tabelas próprias que os levem a relacionar letras com números de outra forma. Os dois grupos que interpretam os resultados matemáticos (G5, G10) evidenciam aprendizagens sobre o conceito de matriz invertível. No entanto, nenhum dos grupos desta categoria de rotas evidencia competências para validar resultados reais.

6.2.4 Síntese

O trabalho dos estudantes na realização da tarefa "cifrado e descifrado de códigos" permitiu observar que os grupos percorreram maioritariamente rotas lineares. Os estudantes que realizam rotas não lineares evidenciam competências suficientes que lhes permitem transitar, mais de uma vez, por diferentes fases do ciclo de modelação, e terminar o seu processo de modelação com a exposição de resultados na situação real. Estas competências incluem: 1) elaborar diferentes modelos reais, discriminando entre matrizes quadradas e não quadradas para construir uma matriz de segurança adequada ao contexto da tarefa, que permita a validação dos resultados matemáticos, como também modelos que discriminam entre quantidades relevantes e irrelevantes na hora de definir a dimensão da matriz de código; 2) simplificar modelos baseados em matrizes quadradas com a utilização de matrizes 2×2; 3) matematizar codificações de mensagens a partir de tabelas de codificação de desenho próprio e com a utilização de matrizes; 4) usar o conhecimento matemático de multiplicação, adição e subtração de matrizes adequadamente; 5) visualizar o problema de subtração de matrizes de forma diferente, nomeadamente utilizando funções por ramos para definir uma das matrizes à custa da outra; 6) interpretar resultados matemáticos a partir da matriz obtida na operação matricial utilizada; e 7) refletir sobre a matriz final de codificação obtida, verificar criticamente se tal matriz pode ser descodificada a partir do modelo matemático construído. Os modelos reais destes estudantes mostram ser mais poderosos comparativamente com os dos estudantes que seguem rotas lineares e cujos modelos reais não se adequam totalmente ao contexto da tarefa devido a interpretações incorretas do seu enunciado. Todos os estudantes evidenciam competências para compreender, estruturar/simplificar a tarefa, construir um modelo matemático, e trabalhar sobre o modelo matematicamente. Os modelos matemáticos mais complexos, com cálculos mais elaborados e com tabelas de codificação de desenho próprio, estão baseados em produtos matriciais e adição de matrizes com funções por ramos construídas por estes estudantes. Embora só metade destes grupos de estudantes tenha validado resultados, esses evidenciaram competências para o efeito, o que está associado a terem utilizado modelos matemáticos baseados na multiplicação de matrizes; consequentemente, sentiram maior necessidade de verificar se as operações realizadas estavam bem definidas quer para codificar quer para descodificar uma mensagem.

Os grupos que desenvolvem rotas de modelação lineares recorrem a modelos matemáticos mais simples, a maior parte deles utilizando modelos baseados em adições e subtrações de matrizes e a tabela de codificação proporcionada no enunciado da tarefa para formular a matriz inicial de codificação. Estes estudantes evidenciam competências para compreender, estruturar/simplificar a tarefa, construir um modelo matemático, e trabalhar no modelo matematicamente, embora alguns tendo dificuldades para estruturar a tarefa, nomeadamente estabelecendo modelos reais que mobilizam o conceito de matriz, mas considerando parcialmente o contexto da tarefa. Contrariamente aos grupos que realizaram rotas não lineares, a maior parte dos estudantes das rotas lineares não interpretam resultados, por não sentirem a necessidade de fazê-lo devido à “simplicidade” dos seus modelos. Para além disso, nenhum destes grupos mostra competências para validar resultados, o que também pode estar associado a esta característica da “simplicidade” dos seus modelos matemáticos.

No que toca às aprendizagens de álgebra linear, todos os estudantes mobilizam aprendizagens que envolvem adição, subtração e multiplicação de matrizes, evidenciando conhecerem as dimensões que devem ter duas matrizes para estar bem definida a operação matricial e também o procedimento de cálculo da matriz resultante. Especificamente, os estudantes revelam saber que duas matrizes podem ser somadas ou subtraídas se têm as mesmas dimensões, sendo a matriz resultante obtida pela soma ou subtração de entradas associadas à mesma posição na matriz. Quanto à multiplicação de matrizes, os estudantes revelam saber que o produto de duas matrizes fica definido quando o número de colunas da primeira matriz corresponde ao mesmo número de linhas da segunda matriz que desejam operar, realizando corretamente a operação. Os estudantes com rotas não lineares mobilizam também o conceito de função por ramos, procurando desenhar modelos mais complexos, isto é, com codificações mais seguras.

A tecnologia é utilizada por estudantes de ambas as categorias, quer para agilizar operações com matrizes, quer para calcular matrizes inversas. Evidencia-se que os estudantes que formulam modelos matemáticos baseados em multiplicação de matrizes recorrem mais ao uso da tecnologia, possivelmente por se sentirem menos seguros quando realizam este tipo de operação por comparação com a adição ou subtração de matrizes. No caso dos grupos com rotas não lineares, a última transição pelo modelo real obedece a uma adaptação na matriz de segurança, nomeadamente passar de matriz não quadrada para matriz quadrada e invertível, utilizando o *Mathematica* para simplificar cálculos, quer da operação multiplicação de matrizes quer do cálculo da inversa de uma matriz para descodificar a mensagem. Por sua vez, dos grupos com rotas lineares, só um deles transita pelo mundo tecnológico, utilizando o *Mathematica*, embora para calcular uma adição de matrizes, cujos dados posteriormente não são interpretados. Neste sentido, a tecnologia é mobilizada sobretudo no caso dos grupos que percorrem rotas não lineares.

No que se refere aos resultados da tarefa de antecipação em comparação com os resultados da tarefa de modelação, as aprendizagens mobilizadas por todos os grupos na tarefa de antecipação, nomeadamente as capacidades dos estudantes para identificarem características que definem adequadamente as operações adição, subtração e multiplicação de matrizes, assim como o respetivo cálculo, foram também mobilizadas na tarefa de modelação, pelo que tais aprendizagens foram consolidadas pela turma toda. Por sua vez, observa-se que os únicos dois grupos que têm dificuldades para interpretar o significado de $det(A) = 0$ na tarefa de antecipação correspondem aos dois grupos que não evidenciam competências para interpretar resultados matemáticos na tarefa de modelação. Assim, as aprendizagens mobilizadas e dificuldades encontradas na tarefa de antecipação são reproduzidas no trabalho com a tarefa de modelação.

Por último, deve ser referido que na segunda tarefa todos os estudantes trabalharam muito rapidamente em contraste com a primeira tarefa, o que pode ser fruto de os estudantes terem tido a oportunidade de ler e consequentemente refletir sobre a tarefa antes de esta ser resolvida na sala de aula; mas essa melhora no tempo de resolução poderá ter sido consequência de terem maior facilidade para relacionar matrizes com o contexto de codificação de mensagens, que parece ser um contexto mais familiar para alguns estudantes.

6.3 Tarefa TM3: bordado de girassol em camisolas académicas

6.3.1 Tarefa de antecipação

A terceira tarefa de antecipação (Anexo B3) pretendia que os estudantes trabalhassem a geometria de vetores para: determinar distâncias entre pontos em IR^3 com o *GeoGebra*, em particular medidas dos lados de um quadrilátero; determinar a representação gráfica de operações entre vetores para localizar vetores no plano cartesiano, atividade indispensável para estruturar visualmente o problema da tarefa de modelação; e determinar a medida de ângulos de figuras geométricas em IR^2 para ser usado posteriormente na tarefa de modelação. Para além disso, nesta tarefa os estudantes são novamente solicitados a utilizar a tecnologia, neste caso o *GeoGebra*, para representar um quadrilátero em IR^3 e determinar o seu perímetro.

As resoluções desta tarefa revelaram que todos os estudantes são capazes de utilizar o *GeoGebra* para determinar perímetros de figuras geométricas em IR^3, como é o caso de Henrique e Diogo (Figura 6.24).

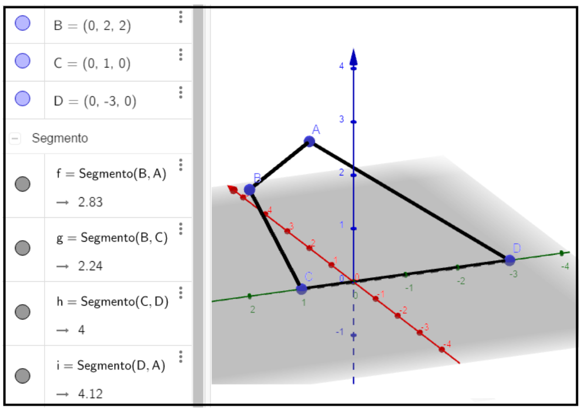


Figura 6.24. Trabalho de antecipação de Henrique e Diogo na Q1.

À semelhança de Henrique e Diogo, todos os estudantes traçam os pontos A, B, C, D no *GeoGebra* e unem-nos para formar o quadrilátero *ABCD*, obtendo o seu perímetro quando determinadas as medidas dos segmentos. Na figura 6.24 é possível observar as medidas dos segmentos obtidas por Henrique e Diogo a partir do *GeoGebra*, sem utilização de procedimentos algébricos.

No que se refere à questão da representação geométrica de uma adição de vetores, trabalhada sem exigência de utilizar *software* matemático, o grupo de Emiliana e Francela foi o único que evidenciou dificuldades para determinar geometricamente o vetor adição, como se infere da figura 6.25a.

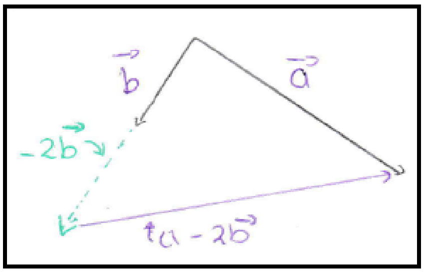


Figura 6.25a. Trabalho de antecipação de Emiliana e Francela na Q2.

Primeiramente, Emiliana e Francela mostram não ser capazes de interpretar o sentido do vetor $-2\vec{b}$ a partir da representação geométrica do vetor $\vec{b}$, pois traçam $-2\vec{b}$ corretamente como um vetor com dupla norma e direção de $\overrightarrow{b}$ mas com sentido incorreto, isto é, $-2\vec{b}$ deveria ter sentido oposto a $\overrightarrow{b}$. Em segundo lugar, no momento de realizarem a adição geométrica $\vec{a}-2\vec{b}$, observa-se que estas estudantes não seguem a lei do paralelogramo, mas uma lei geométrica incorreta onde assumem que a adição geométrica de dois vetores é dada pelo vetor formado pelas extremidades dos vetores que intervêm na adição. Assim, interpreta-se que Emiliana e Francela não têm conhecimento consolidado sobre a representação geométrica de operações com vetores.

Na última pergunta da tarefa, todos os estudantes demonstram conhecimento necessário para calcular medidas de ângulos em IR^2, embora dois grupos (Inês e Casimiro e Edite e Tiago) recorram às propriedades da trigonometria para determinar a medida do ângulo requerido, utilizando a geometria de vetores só para calcular as normas dos segmentos que formam o triângulo. Para além disso, o grupo de Emiliana e Francela evidencia dificuldade na interpretação dos resultados, como se observa na figura 6.25b.

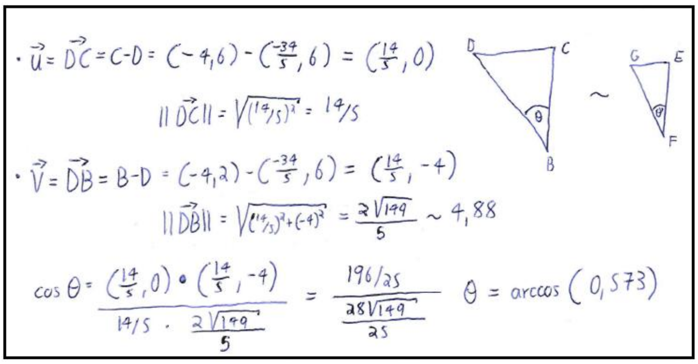


Figura 6.25b. Trabalho de antecipação de Emiliana e Francela na Q3.

Na resolução apresentada na Figura 6.25b pode observar-se que Emiliana e Francela determinam corretamente, e com base na geometria de vetores, a medida do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{DB}$, embora o solicitado seja a medida do ângulo θ, isto é, o complementar do ângulo encontrado por Emiliana e Francela.

6.3.2 Competências de modelação e aprendizagens de conceitos

Diferentemente das tarefas anteriores, onde todos os estudantes constroem os seus modelos matemáticos utilizando conhecimentos prévios, nesta tarefa (Anexo C3) a maior parte dos estudantes (seis grupos) recorrem a um modelo matemático construído em aulas anteriores pelo professor da turma na lecionação da unidade de Geometria Vetorial, nomeadamente o modelo de rotação de vetores envolvendo uma matriz de rotação. É importante salientar que embora estes estudantes recorram a uma matriz de rotação na resolução desta tarefa de modelação, não se tinha ainda introduzido o conceito de transformação linear em aulas anteriores, pelo que a construção desta matriz foi desenvolvida pelo professor três semanas anteriores ao momento em que foi trabalhada a tarefa de modelação, utilizando a geometria de vetores em IR^2 quando representado um vetor $\vec{v}$ e esse mesmo vetor rodado por um ângulo α para obter o vetor $\overrightarrow{v_\alpha}$, como na figura 6.26.

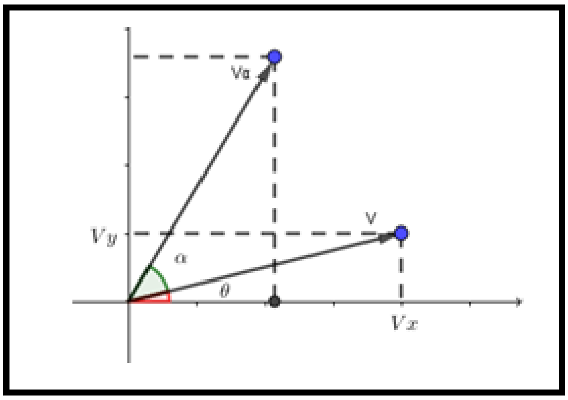


Figura 6.26. Vetor original e vetor rotado um ângulo α.

A partir do esquema representado na figura 6.26 e a expressão vetorial do vetor $\overrightarrow{v_\alpha}$ em termos do ângulo α e θ, nomeadamente $\overrightarrow{v_\alpha} = (\|v\| \cos(\theta+\alpha), \|v\| sen(\theta+\alpha))$, o professor desenvolve a expressão de $\overrightarrow{v_\alpha}$ utilizando identidades trigonométricas até obter o modelo de rotação $\overrightarrow{v_\alpha} = A * \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$, definindo a matriz A como a matriz de rotação de ângulo α.

Compreensão e simplificação/estruturação da tarefa

Na resolução da tarefa de modelação todos os estudantes evidenciam compreender a situação problema, revelando competências necessárias para relacionar a rotação de bordados em camisolas académicas (brasão em forma de girassol) com a rotação de vetores pertencentes a IR^2. Entre as respostas dadas pelos estudantes, quando questionados sobre como poderiam dar solução ao problema de desenho, em termos matemáticos, Marcelino e Estela mencionam corretamente na sua resolução escrita:

> Primeiramente, considera-se que uma imagem é um conjunto de pontos e cada ponto pode ser expresso como um vetor, isto é, ao rodar os vetores correspondentes a cada ponto da imagem esta se rodará. Para que a imagem tenha sempre o mesmo ângulo de diferença e a última imagem seja igual à original deve-se dividir o círculo em três, e, portanto, o ângulo de rotação deve ser $\frac{2\pi}{3}$.

Da explicação de Marcelino e Estela observa-se que estes estudantes identificam informação relevante no enunciado da tarefa para determinarem a medida do ângulo entre o bordado que está associado a um grau académico específico (bacharelato, licenciatura, pós-graduação) e o grau posterior ou anterior. Para além disso, a expressão “cada ponto pode ser expresso como um vetor”, evidencia aprendizagens associadas ao conceito de vetores em IR^n. Em particular, Marcelino e Estela, e os demais grupos de estudantes, mobilizam o conceito de vetores pertencentes a IR^2 no contexto de bordado do girassol, reconhecendo que fixado um vetor no girassol, o problema de o bordado de pós-graduação do girassol ter de coincidir com o bordado original, reduz-se a considerar um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ entre qualquer vetor da figura e o vetor homólogo no girassol rodado.

Uma das dificuldades iniciais evidenciadas na compreensão da tarefa por um dos grupos, formado por Mateus e Xavier, foi identificar qual o vetor a utilizar como referência para proceder às rotações, conforme se deduz do diálogo seguinte desenvolvido na discussão realizada entre o investigador e este grupo:

> ***Investigador*:** Alguém pode explicar-me o modelo que estão formando?
> ***Mateus*:** Esta é a rotação que nós demos, onde colocámos um vetor no girassol que fosse nosso principal, criámo-lo com ângulo zero para que esse já fosse o nosso vetor associado ao grau de pós-graduação, e depois rodar em ângulos equitativos o vetor, porque isso é solicitado. Só nos faltaria procurar os ângulos, mas o nosso modelo achamos que está bem.
> ***Investigador*:** O que aconteceria se vocês tomassem outro vetor principal que não fosse com ângulo zero?
> ***Mateus*:** Digamos, como? Localizá-lo em 90^0?
> ***Investigador*:** Por exemplo, sim.

***Mateus*:** Nesse caso o vetor associado ao grau de pós-graduação teria de ter o mesmo lado terminal com o vetor localizado em 90^0.
***Investigador*:** E esse modelo também serviria como modelo de rotação para o girassol?
***Xavier*:** Acho que não, porque teríamos de mudar os ângulos de rotação, mas não temos a certeza.
***Investigador*:** Pensem um bocadinho nisso.

Do diálogo, interpreta-se que Mateus e Xavier propõem um vetor da forma $\vec{v} = (d, 0)$ no girassol original para ser rodado, isto é, um vetor sobre o eixo das abcissas. Este modelo real foi também proposto pelos outros estudantes. Esse vetor, chamado de principal por Mateus e Xavier, tem a vantagem de simplificar a construção do modelo matemático e a interpretação dos resultados matemáticos, uma vez que a determinação dos outros vetores rodados terão um ângulo associado múltiplo de $\frac{2\pi}{3}$, consequentemente as suas coordenadas cartesianas serão facilmente obtidas a partir dos conhecimentos dos estudantes sobre triângulos especiais com ângulo agudo $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$. No entanto, uma desvantagem desse modelo tem a ver com os estudantes não se questionarem sobre casos mais complexos, conforme se observa na resposta de Xavier, quando o investigador lhes pergunta se o modelo inicialmente pensado será afetado pela escolha de outro "vetor principal". Assim, evidencia-se uma certa dificuldade nestes estudantes na compreensão da tarefa, pois nenhum dos dois menciona com determinação que o modelo não se iria alterar perante essa escolha.

Na resolução escrita de Mateus e Xavier foi possível observar que na construção do seu modelo real (Figura 6.27) supõem a "arbitrariedade" do vetor a rodar no girassol original, conforme se observa na seguinte figura:

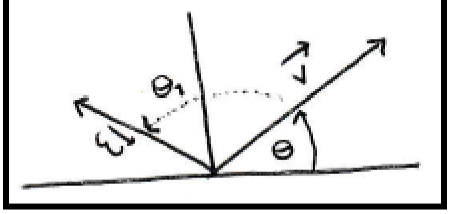


Figura 6.27. Modelo real proposto por Mateus e Xavier.

O modelo real de Mateus e Xavier mostra a designação de variáveis $\vec{v}$ e $\vec{w}$ para se referirem, respetivamente, a um vetor no girassol original e ao mesmo vetor no girassol quando rodado por um ângulo θ. Assim, evidenciam-se competências por parte destes estudantes para estruturar e simplificar a situação problema em termos de vetores rodados em IR^2. Mateus e Xavier mencionam que "o vetor $\vec{v}$ é arbitrário, pois pode encontrar-se em qualquer posição. O vetor $\vec{w}$ é o vetor originado pela rotação. Deve rodar $\frac{2\pi}{3}$ até chegar ao vetor original". A explicação destes estudantes evidencia que a discussão estabelecida com o investigador e, possivelmente entre eles mesmos depois, ajudou-os a ultrapassar a dificuldade sobre a posição do "vetor principal". No entanto, Mateus e Xavier fundamentam-se em observações visuais que referem características gerais dos vetores, mas sem explicar o porquê da formulação do modelo matemático a ser criado não ser afetada pela escolha arbitrária de $\vec{v}$. Tal como Mateus e Xavier, outros cinco grupos de estudantes que utilizam modelos reais baseados em matrizes de rotação em coordenadas cartesianas, parecem aceitar a arbitrariedade do vetor original sem justificar o porquê na sua resolução escrita. As resoluções dos estudantes não mostram evidência deles reconhecerem esta arbitrariedade do vetor $\vec{v}$, possivelmente por não sentirem a necessidade de se questionarem sobre as condições desse vetor, quer por terem assumido que o vetor deve ser arbitrário, como o caso de Mateus e Xavier, ou por terem assumido tal arbitrariedade como aspeto mencionado pelo professor em aulas anteriores durante a construção do modelo de matriz de rotação.

Quanto aos restantes grupos de estudantes, os modelos reais propostos estão baseados em coordenadas polares, sendo que essa escolha é associada a conhecimentos prévios de outras disciplinas como Cálculo II. Como exemplo, apresenta-se nas figuras 6.28a e 6.28b o modelo proposto por Edite e Tiago:

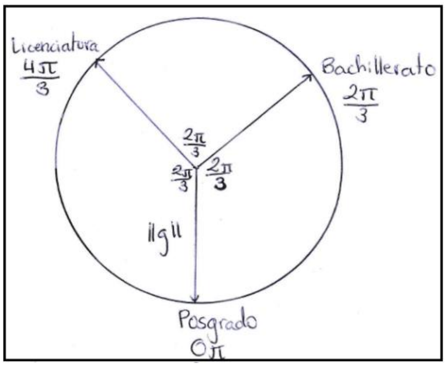


Figura 6.28a. Modelo real proposto por Edite e Tiago.

[Se se colocar a figura desta maneira]

Figura 6.28b. Desenho concretizado do modelo real proposto por Edite e Tiago.

Na figura 6.28a observa-se o traçado de três vetores, nomeados de pós-graduação, bacharelato e licenciatura, cada um representando uma das três possíveis orientações do desenho do girassol, conforme a figura 6.28b. O facto de estes vetores terem sido desenhados pelos estudantes como raios de um círculo e com ângulos associados, mostra que querem enfatizar os vetores como parte de um sistema de coordenadas. Junto a cada vetor está sinalizado um ângulo, o qual representa a coordenada angular do vetor no sistema de coordenadas polares definido, e junto a um destes vetores a expressão $\|g\|$ para denotar a norma dos vetores. Neste sentido, interpreta-se que $(\|g\|, 0)$, $\left(\|g\|, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\|g\|, \frac{4\pi}{3}\right)$ correspondem às coordenadas dos vetores associados aos diferentes níveis académicos que os estudantes tentam definir, modelo que satisfaz a condição do bordado original e do bordado de pós-graduação coincidirem.

O modelo baseado em coordenadas polares facilita a formulação do modelo matemático e a interpretação dos dados, em relação ao modelo de rotação de matrizes escolhido por Mateus e Xavier e pelos outros cinco grupos de estudantes. O modelo de coordenadas polares não precisa que o estudante faça cálculos robustos, mas só aritméticos, e a interpretação dos resultados surge da mesma definição das coordenadas polares, aliás a coordenada angular permite interpretar a posição do vetor e a coordenada radial a longitude do ponto escolhido. Por sua vez, a estrutura matemática do modelo de rotação de matrizes, baseada em coordenadas cartesianas, obriga o estudante primeiramente a fazer cálculos de substituição na matriz de rotação para obter a posição cartesiana do vetor rodado.

Matematização e trabalho sobre o modelo matemático

Em relação aos modelos matemáticos, a escolha de modelos baseados em matrizes de rotação em coordenadas cartesianas e modelos baseados em coordenadas polares levou ao desenvolvimento de três tipos de modelos matemáticos: os que utilizam uma única matriz de rotação numérica para obter o bordado dos três níveis académicos; os que utilizam uma matriz de rotação numérica diferente para cada grau; e os que utilizam coordenadas polares para descrever o processo de formação dos três bordados. Por um lado, os modelos matemáticos construídos a partir de uma única matriz de rotação resultam num maior trabalho matemático por parte dos estudantes para obter a posição dos diferentes vetores rodados, em comparação com os modelos matemáticos que utilizam diferentes matrizes de rotação, cujo trabalho matemático se simplifica em termos de multiplicação de matrizes. No entanto, este segundo modelo matemático requer que o estudante calcule mais valores de razões trigonométricas $\cos(\theta)$ e $\operatorname{sen}(\theta)$, em comparação com o primeiro tipo de modelo, cujo cálculo se reduz a saber os valores das razões $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e sen $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Contudo, os modelos baseados em coordenadas polares facilitam mais os cálculos do que os dois modelos anteriores, o que se deve ao contexto de rotações da tarefa facilitar a escrita da posição de vetores em coordenadas polares.

Três grupos optam pela primeira categoria de modelos matemáticos, entre estes o grupo de Mateus e Xavier (Figura 6.29), cujo modelo matemático mostra a utilização correta das variáveis definidas no seu modelo real (Figura 6.27).

$$\boxed{\vec{w} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\,\theta_1 \\ \text{sen}\,\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \vec{v}}$$

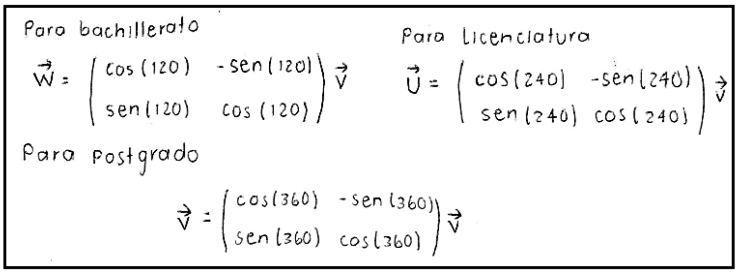
Figura 6.29. Modelo matemático de Mateus e Xavier.

Mateus e Xavier e os outros dois grupos utilizam o mesmo processo para trabalhar no modelo matemático, nomeadamente obter os diferentes vetores associados aos diferentes níveis académicos (bordado do girassol nas diferentes posições) mediante multiplicações sucessivas da matriz de rotação criada (Figura 6.29) com os vetores que se vão originando após efetuar cada multiplicação. Para isso, os três grupos tomam $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, sendo este o ângulo constante entre um vetor e o vetor que representa a rotação seguinte do girassol. Nas palavras do grupo de Marcelino e Estela:

> Isto deve aplicar-se para cada um dos vetores que formam a imagem que se deseja rodar, para a seguinte rotação basta voltar a multiplicar pela mesma matriz. Isto funciona devido à rotação de um vetor ser dada por esta função.

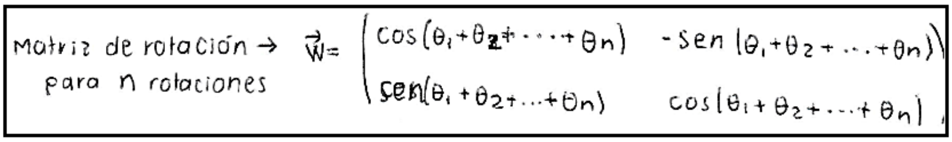
A resposta de Marcelino e Estela faz referência a um processo matemático associado a uma sucessão definida recursivamente. Neste sentido, definido um vetor principal $\vec{v}_1$ no bordado de girassol original e a matriz de rotação M, os três grupos fazem o produto $M\vec{v}_1$ para obter o vetor rotado $\vec{v}_2$, correspondente ao bordado de girassol original após aplicada uma rotação de $\frac{2\pi}{3}$. A seguir fazem $M\vec{v}_2$ para obter o vetor $\vec{v}_3$, aplicando ao bordado de girassol a rotação $\frac{4\pi}{3}$. Finalmente, fazem $M\vec{v}_3$ para obter o vetor $\vec{v}_4$, este último coincidindo com a posição original do bordado de girassol.

No que se refere aos grupos que constroem um modelo matemático baseado em diferentes matrizes de rotação encontramos quatro grupos de estudantes, entre estes Fabrício e Maurício, único grupo desta categoria que, para além de propor o modelo com as três matrizes de rotação (Figura 6.30a), generaliza o seu modelo para n rotações do bordado de girassol (Figura 6.30b).



[Para bacharelato…, para licenciatura, …, para pós-graduação]

Figura 6.30a. Modelo matemático de Fabrício e Maurício.



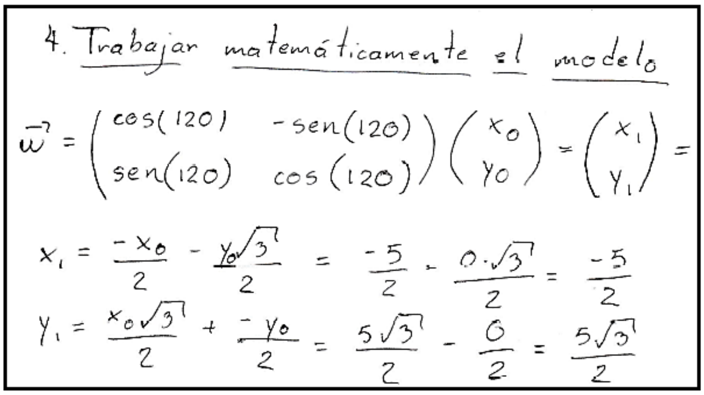
[Matriz de rotação para n rotações]

Figura 6.30b. Modelo matemático de Fabrício e Maurício.

Fabrício e Maurício definem os vetores $\vec{w}, \vec{u}$, e $\vec{v}$ como os vetores correspondentes aos níveis académicos de bacharelato, licenciatura e pós-graduação, dependendo cada resultado do vetor principal $\vec{v}$ associado ao bordado original e do ângulo desejado para a rotação do vetor $\vec{v}$. A diferença entre este modelo (Figura 6.30a) e o da primeira categoria de modelos matemáticos já referida (Figura 6.29), é que esta segunda categoria revela de forma explícita o ângulo do vetor resultante da rotação, não tendo de ser o vetor resultante necessariamente com argumento múltiplo de $\frac{2\pi}{3}$, como acontece com a categoria de modelos baseados numa única matriz de rotação. O aspeto anterior permite que Fabrício e Maurício possam construir o modelo matemático para n rotações consecutivas de um vetor (Figura 6.30b), sendo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ os valores dos ângulos das n rotações não necessariamente todos múltiplos de θ_1.

A formulação generalizada do modelo matemático de Fabrício e Maurício (Figura 6.30b), para além de evidenciar competências para matematizar o modelo real a partir de notações matemáticas envolvendo sequências de ângulos, matrizes e vetores, revelam competência para estabelecer relações com situações de rotação semelhantes à situação da tarefa, como a rotação de um vetor para n distintos ângulos. No entanto, salienta-se que a notação matemática utilizada do lado esquerdo da igualdade no modelo matemático não é a mais adequada, pois a notação $\vec{w}$ na escrita formal refere-se a um vetor pertencente a IR^n, não a uma matriz, evidenciando dificuldades referentes a uma utilização incorreta da linguagem matemática.

O modelo matemático utilizado pelos sete grupos em termos de matrizes de rotação evidencia uma mobilização de aprendizagens referentes a vetores em IR^2, incluindo a realização correta do produto entre matriz e vetor, e a localização do vetor resultante a partir do conceito de rotação. Para além disso, os sete grupos evidenciam competência para trabalhar no modelo matemático, substituindo corretamente os valores do ângulo de rotação na matriz e realizando a respetiva multiplicação da matriz pelo vetor, uma vez definido um vetor principal $\vec{v}$ particular. Evidência desse trabalho matemático é observada na figura 6.31, extrato da resolução escrita de Artur e Hugo.



4. Trabajar matemáticamente el modelo

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos(120) & -\text{sen}(120) \\ \text{sen}(120) & \cos(120) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$$

$$x_1 = \frac{-x_0}{2} - \frac{y_0\sqrt{3}}{2} = \frac{-5}{2} - \frac{0\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$y_1 = \frac{x_0\sqrt{3}}{2} + \frac{-y_0}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{0}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

[Trabalhar matematicamente o modelo]

Figura 6.31. Resultados matemáticos obtidos por Artur e Hugo.

Artur e Hugo substituem o valor de 120^0 na matriz de rotação, obtendo o valor do correspondente vetor rotacionado em termos de x_0 e y_0, coordenadas do vetor principal do bordado de girassol original. Depois substituem na expressão do vetor rodado, como caso particular, o vetor $(5,0)$, obtendo corretamente o resultado matemático $\left(\frac{-5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ correspondente ao vetor principal rodado 120^0.

No que respeita aos restantes três grupos de estudantes da turma com modelos matemáticos em termos de coordenadas polares, encontramos o caso de Edite e Tiago (Figura 6.32a, Figura 6.32b) e Emiliana e Francela (Figura 6.33), modelos que se diferenciam pela forma de escrita das coordenadas polares, respetivamente, como par ordenado ou como coordenadas cartesianas parametrizadas em função das coordenadas polares.

$$\left(\|f\|, \frac{G\,2\pi}{n} \right)$$

Figura 6.32a. Modelo matemático de Edite e Tiago.

Grado	#
Bachillerato	1
Licenciatura	2
Posgrado	3

[Bacharelato1, licenciatura2, pós-graduação3]

Figura 6.32b. Modelo matemático de Edite e Tiago.

$$\vec{W} \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}\,(\theta) \end{cases}$$

Figura 6.33. Modelo matemático de Emiliana e Francela.

No modelo de Edite e Tiago as coordenadas polares são utilizadas para localizar a posição do bordado de girassol associado a cada grau académico, sendo feita a sua leitura também em termos de coordenadas polares. Por seu lado, no modelo de Emiliana e Francela e do outro grupo dos três desta categoria, são utilizadas as equações de transformação de coordenadas polares em coordenadas cartesianas, devendo assim os resultados matemáticos ser interpretados em termos de coordenadas cartesianas. Ambos os modelos utilizam coordenadas polares para trabalhar matematicamente, nomeadamente $\|f\|$ e r representam o valor da coordenada que define a norma do vetor posição, e $\frac{G\cdot 2\pi}{n}$ e θ representam o valor da coordenada angular. No caso particular da coordenada angular do modelo de Edite e Tiago, o valor fica definido em termos dos parâmetros G e n, sendo G um contador associado ao grau académico requerido (Figura 6.32b) e n o número total de graus académicos ou rotações que se desejam numa volta completa. Neste sentido, Edite e Tiago constroem um modelo matemático mais robusto e associado especificamente à situação problema da tarefa, enquanto os outros modelos utilizam coordenadas polares de uma forma generalizada de onde não se deduz por si só o modelo matemático que resolve o problema. Portanto, os estudantes desta categoria de modelos evidenciam competências para matematizar o modelo real com coordenadas polares e trabalhá-lo a partir da parametrização discreta (Edite e Tiago) ou contínua das coordenadas utilizadas (Emiliana e Francela, Martim e Fabiana).

Interpretação e validação de resultados matemáticos

A turma no seu conjunto evidencia ser capaz de interpretar resultados matemáticos, mencionando o grau académico associado ao resultado matemático obtido, como por exemplo Artur e Hugo que, referindo-se ao resultado matemático da Figura 6.31, mencionam na sua resolução escrita: "Uma vez realizada a primeira rotação do vetor (referindo-se ao vetor principal), o encontraríamos no ponto $w = \left(\frac{-5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$, o qual indica que o vetor original avançou 120^0 em relação à posição original, sendo o desenho para estudantes de bacharelato". Esta resposta de Artur e Hugo é correta e pontual e os restantes estudantes da turma seguem o mesmo raciocínio para cada um dos resultados obtidos.

No entanto, a validação de resultados é uma competência evidenciada só por Edite e Tiago, que utilizam o *GeoGebra* para verificarem as posições dos vetores rodados gerados pelo seu modelo matemático (Figura 6.34).

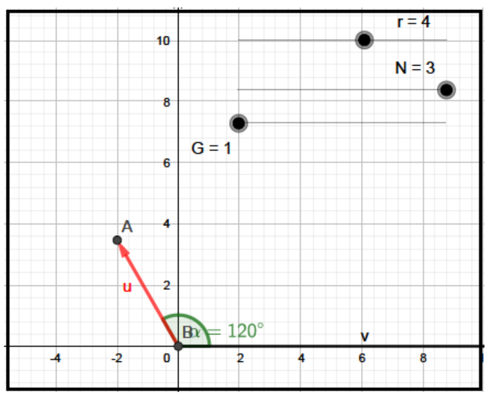


Figura 6.34. Modelo computacional desenvolvido por Edite e Tiago.

Na Figura 6.34 é possível observar seletores (r, N, G) criados no GeoGebra por Edite e Tiago para verificarem o seu modelo, geometricamente, ao variarem os valores de G (conforme a Figura 6.32b) e fixarem os valores de r (norma do vetor) e N (número total de graus académicos ou posições do bordado de girassol). O modelo computacional criado por estes estudantes é coerente com o solicitado na situação problema e, embora não seja uma verificação algébrica, constitui uma forma válida e criativa de validar o modelo matemático, e evidencia competências suficientes para o trabalho na tarefa com o *GeoGebra*.

6.3.3 Rotas de modelação

As rotas de modelação nesta tarefa podem ser agrupadas em dois tipos: 1) rotas não lineares que terminam no resto do mundo (G3, G10, G6); e 2) rotas lineares que terminam no resto do mundo (G1, G2, G4, G5, G7, G8, G9). Na primeira categoria encontramos o único grupo que transita pelo mundo tecnológico, utilizando o *GeoGebra* como ferramenta para validar o seu modelo matemático. Em ambas as rotas evidencia-se a transição dos estudantes por todas as fases do ciclo de modelação, terminando na situação real com a apresentação de resultados. Como exemplo, analisa-se uma rota não linear (G6) e uma rota linear (G4), que se caraterizam e diferenciam, respetivamente, pela utilização de tecnologia e coordenadas polares no modelo matemático (G6) e pela não utilização de tecnologia e uso de coordenadas cartesianas no modelo matemático (G4).

O grupo de Edite e Tiago (G6), para além de ser o único a utilizar tecnologia, tem a particularidade de ser o único a evidenciar competências para a validação dos resultados obtidos. A rota de modelação deste grupo é apresentada na figura 6.35 seguinte.

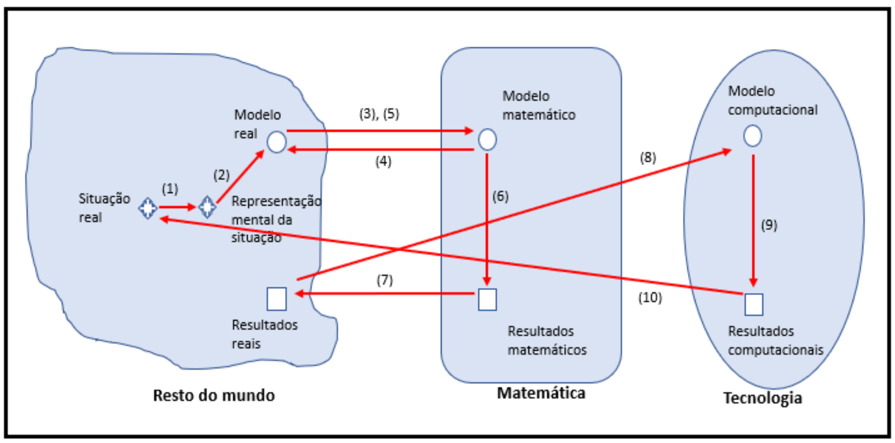


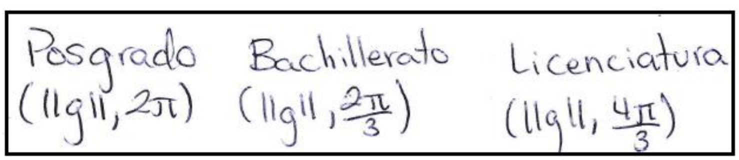
Figura 6.35. Rota de modelação de Edite e Tiago.

A rota de modelação de Edite e Tiago começa na situação real, com a compreensão do problema em termos de rotação de um vetor pertencente a IR^2 (P1). A seguir, estes estudantes estruturam a tarefa em termos de coordenadas cartesianas (P2), optando por utilizar o modelo matemático da matriz de rotação (P3), utilizado pela maior parte dos estudantes da turma. No entanto, Edite e Tiago terminam desistindo do modelo com a matriz de rotação (P4), mencionando na discussão coletiva, após ser questionada a turma toda sobre os modelos pensados e o porquê, o seguinte:

Escolhemos usar coordenadas polares, pois oferecem uma maneira cómoda e simples de descrever a posição de um vetor, da sua rotação. Durante a discussão sobre a resolução deste problema ficou claro que era necessário determinar um modelo matemático para determinar a rotação da figura. No princípio pensou-se utilizar coordenadas cartesianas com a matriz de rotação, mas como a figura roda sobre um só eixo consideramos que utilizar coordenadas polares era mais apropriado.

A resposta dada por Tiago evidencia o seu pensamento sobre a natureza da tarefa, nomeadamente que trabalhar com coordenadas polares é mais simples do que trabalhar com coordenadas cartesianas quando se trata de estudar o traço de curvas associadas a rotações. Assim, estes estudantes voltam ao modelo real, desta vez revelando competências para representar graficamente a situação problema em coordenadas polares e definir notações para os parâmetros envolvidos no modelo (Figura 6.28a), e procedem então para a construção do modelo matemático em termos de coordenadas polares (P5), conforme observado nas figuras 6.32a-A e 6.32b.

Posteriormente, Edite e Tiago obtêm os resultados matemáticos (P6) e interpretam-nos (P7), conforme evidencia a figura 6.36, onde se mostram os respetivos vetores associados a cada grau académico do bordado de girassol.



[Pós-graduação $(\|g\|, 2\pi)$, Bacharelato $(\|g\|, \frac{2\pi}{3})$, licenciatura $\left(\|g\|, \frac{4\pi}{3}), \right)$]

Figura 6.36. Resultados matemáticos obtidos por Edite e Tiago.

Tendo obtido resultados reais, estes estudantes apoiam-se no *GeoGebra* para validar resultados (P8), obtendo três representações geométricas dos vetores associadas às diferentes posições do bordado de girassol (P9), entre estas a representação geométrica associada ao ponto com coordenadas $(\|g\|, \frac{2\pi}{3})$ para $g = 4$ (figura 6.36). Finalmente, Edite e Tiago dão-se por satisfeitos e respondem às perguntas solicitadas na tarefa (P10).

No que concerne às rotas lineares, o grupo de Henrique e Diogo (G4) fazem a mesma rota de modelação que os restantes seis grupos que desenvolvem rotas lineares. A rota de Henrique e Diogo é apresentada na figura 6.37.

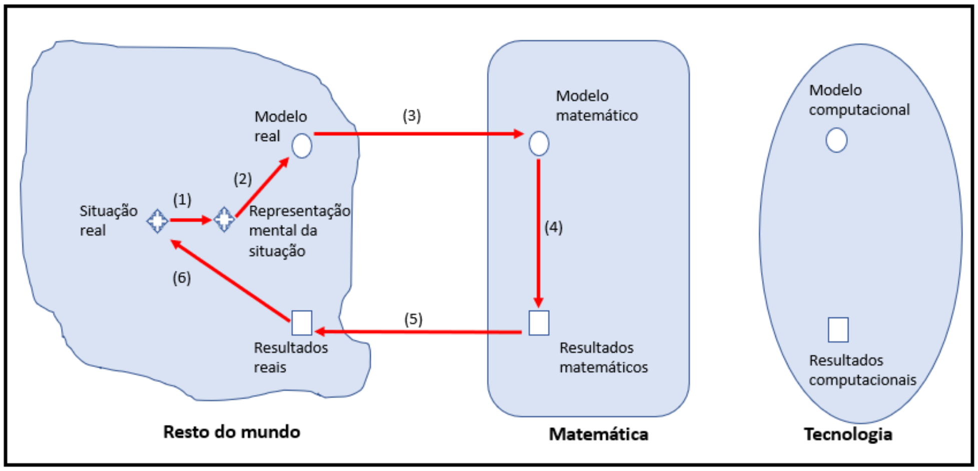


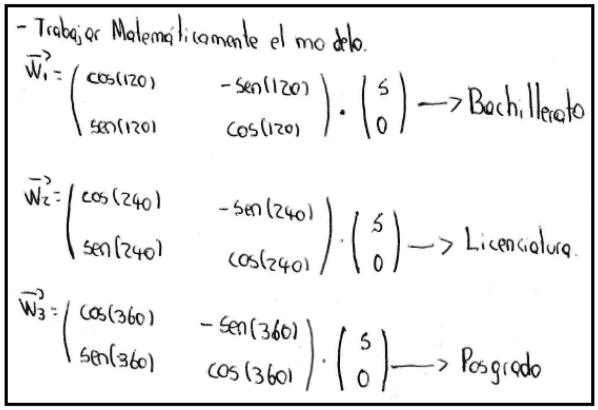
Figura 6.37. Rota de modelação de Henrique e Diogo.

Henrique e Diogo começam por compreender a situação problema, conforme o resto da turma (P1), fazendo referência a vetores pertencentes a IR^2, mencionando na sua resolução escrita:

> A intenção é fazer uma rotação de uma figura que implica o avanço no grau académico de cada estudante. Para isso, definiram-se três vetores posição com a mesma magnitude e um outro vetor que indica a posição inicial. Este vetor deve ser multiplicado por uma matriz de rotação A para gerar os três vetores a partir dos ângulos associados.

Esta resposta deixa clara a intenção de utilizar diferentes matrizes numéricas de rotação para gerar cada vetor correspondente aos graus académicos e evidencia aprendizagens associadas ao conceito de vetor em IR^n, nomeadamente quando se referem ao termo "vetor posição". Embora toda a turma evidencie conhecer o conceito de vetor em IR^n, só estes estudantes fazem referência ao termo vetor posição, o que estaria associado a terem previamente conhecimento do significado físico que se pode associar a um vetor em IR^n.

Uma vez compreendido como trabalhar a tarefa, Henrique e Diogo realizam simplificações sobre o modelo pensado (P2), designando o vetor inicial por $\vec{v}$ e os outros vetores gerados pela rotação deste vetor inicial por $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$, e definindo os valores $120^0, 240^0, 360^0$ para os ângulos a serem utilizados na matriz de rotação A. Depois, fazem a matematização desse modelo real (P4), definindo o modelo por $\vec{w}_0 = A \cdot \vec{v}$. Neste modelo pode interpretar-se que o vetor $\vec{w}_0$ corresponde a algum dos vetores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$. Na figura 6.38 pode observar-se como estes estudantes trabalham matematicamente no modelo (P4), substituindo as diferentes medidas de ângulos e o valor do vetor inicial $\vec{v}$ para obter as coordenadas cartesianas dos diferentes vetores resultantes da rotação.


- Trabajar Matemáticamente el modelo.

$$\vec{W_1} = \begin{pmatrix} \cos(120) & -\mathrm{sen}(120) \\ \mathrm{sen}(120) & \cos(120) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Bachillerato}$$

$$\vec{W_2} = \begin{pmatrix} \cos(240) & -\mathrm{sen}(240) \\ \mathrm{sen}(240) & \cos(240) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Licenciatura.}$$

$$\vec{W_3} = \begin{pmatrix} \cos(360) & -\mathrm{sen}(360) \\ \mathrm{sen}(360) & \cos(360) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Posgrado}$$

[Trabalhar matematicamente o modelo: bacharelato, licenciatura, pós-graduação]

Figura 6.38. Rota de modelação de Henrique e Diogo.

Da Figura 6.38 também é possível observar a utilização particular do vetor $(5{,}0)$ como vetor inicial associado ao girassol original e a interpretação de resultados feita pelos estudantes através da associação entre resultados matemáticos e graus académicos (P5). O seu processo de modelação termina com a apresentação de resultados no contexto da situação real (P6), mas sem previamente validarem os resultados reais.

Em geral, as rotas de modelação identificadas na resolução desta tarefa apresentam as seguintes características:

a) Rotas não lineares (G3, G6, G10): As rotas destes grupos terminam na situação real com a apresentação de resultados. Os três grupos evidenciam rotas que atravessam a formulação do modelo real e o modelo matemático em duas ocasiões, sendo o segundo modelo matemático uma generalização do primeiro modelo para n rotações. Dois dos grupos formulam modelos matemáticos baseados em matrizes de rotação com coordenadas cartesianas (G3, G10), enquanto um grupo (G6), o único da turma a passar pelo mundo tecnológico, com recurso ao *GeoGebra*, formula um modelo baseado em coordenadas polares. Este último grupo é o único que valida resultados reais, embora os três grupos interpretem resultados matemáticos em termos dos resultados reais, associados aos graus académicos do bordado de girassol. As aprendizagens de conceitos mobilizadas têm a ver com: o conceito de vetor em IR^2 como segmento orientado em coordenadas cartesianas e polares; a parametrização de coordenadas; o conceito de produto entre matriz e vetor em IR^2; e a determinação de representações geométricas de vetores em IR^2 por parte dos três grupos para esquematizar o modelo real.

b) Rotas lineares (G1, G2, G4, G5, G7, G8, G9): Estes estudantes transitam só uma vez por cada fase, terminando com a apresentação de resultados na situação real. Cinco grupos propõem modelos matemáticos baseados em matrizes de rotação em coordenadas cartesianas, enquanto dois propõem modelos matemáticos baseados em coordenadas polares. Todos os grupos evidenciam competências para obter resultados matemáticos e interpretá-los, mas não assim para validar os resultados. Estes grupos não transitam pelo mundo tecnológico, pelo que as representações geométricas obtidas (G5, G8) são elaboradas em papel. As aprendizagens de conceitos mobilizadas referem-se às mesmas aprendizagens mobilizadas pelos grupos que percorrem rotas não lineares.

6.3.4 Síntese

Os resultados analisados na tarefa "bordado de girassol em camisolas académicas" evidenciou um maior desenvolvimento de rotas de modelação lineares, observando-se que todos os grupos terminam seu processo de modelação na situação real com a exposição de resultados no contexto da tarefa. Tanto os estudantes que realizam rotas não lineares como lineares evidenciam competências para compreender a tarefa em termos de vetores rotacionados em IR^2, identificando informação relevante, como os ângulos a serem utilizados no modelo, e modelos possíveis, utilizando coordenadas cartesianas ou polares. A matematização do modelo matemático é também evidenciada em todos os grupos de estudantes e em ambas rotas, através de modelos matemáticos baseados em matrizes de rotação com coordenadas cartesianas e modelos baseados na utilização de coordenadas polares. Os modelos diferenciam-se entre a formulação de modelos básicos de rotação de vetores (rotas lineares) ou modelos matemáticos que vão mais além do modelo básico (rotas não lineares). A utilização dos modelos baseados em matrizes obedece a modelos já estudados em aulas anteriores, vendo os estudantes a oportunidade para os utilizar na tarefa. Por seu lado, os modelos baseados em coordenadas polares surgem duma análise dos estudantes mais focada na natureza da tarefa, ao reconhecerem que o cálculo de coordenadas polares é uma maneira simples de traçar lugares geométricos equidistantes de um ponto em comum, o eixo de rotação.

Os grupos que desenvolvem rotas não lineares evidenciam matematizar o modelo transitando pela fase do modelo real e pelo modelo matemático em duas ocasiões, resultado de optarem na sua segunda transição por utilizar modelos mais robustos para generalizar os seus modelos a situações com mais rotações ou enfatizar no modelo matemático inicial as rotações que se podem gerar a partir da utilização de parâmetros. Por sua vez, os grupos de estudantes com rotas lineares evidenciam matematizar o modelo a partir dos mesmos modelos reais utilizados pelos estudantes com rotas não lineares, isto é, modelos matemáticos usando coordenadas cartesianas ou polares, mas sem ir além do modelo matemático base de matriz de rotação e coordenadas polares.

Em ambos os tipos de rotas observa-se estudantes que evidenciam competências para obter resultados matemáticos, usando o conhecimento associado ao cálculo de razões trigonométricas e multiplicação de matrizes para obter resultados matemáticos a partir da rotação de matrizes ou a partir de operações aritméticas no caso da utilização de coordenadas polares. Para além disso, estes resultados são interpretados por todos os grupos, comunicando o significado das coordenadas cartesianas ou polares obtidas para diferentes vetores rodados no contexto da tarefa. No entanto, só num grupo, pertencente aos grupos de rotas não lineares, é evidenciada a validação de resultados, utilizando o *GeoGebra* para verificar que distintos valores de um parâmetro geram os distintos vetores rodados associados aos distintos graus académicos mencionados no contexto da tarefa. A falta de validação de resultados por parte da maioria dos estudantes da turma está associada à natureza do modelo escolhido, pois os estudantes que utilizam um modelo de matrizes de rotação confiam em que este modelo esteja bem construído, por ter sido facilitado pelo professor da turma em aulas anteriores. Por sua vez, os estudantes que constroem modelos baseados em coordenadas polares não sentem a necessidade de validar o modelo, porque seus resultados matemáticos já especificam o ângulo de rotação.

Em termos de aprendizagens, a turma toda evidencia aprendizagens referentes ao conceito de vetor em IR^2 como segmento orientado em coordenadas cartesianas ou polares. Aprendizagens referentes a operações entre vetor e matriz são mobilizadas pela maior parte da turma e as aprendizagens sobre coordenadas polares são evidentes nos restantes estudantes. A utilização de representações geométricas de vetores é mobilizada por metade dos estudantes da turma para esquematizar o modelo real, sabendo localizar vetores adequadamente para ângulos específicos. No entanto, aprendizagens referentes à determinação da medida do ângulo entre dois vetores a partir das suas coordenadas cartesianas não foram evidenciadas na tarefa de modelação, o que se repercutiu em que a maior parte da turma não validasse resultados reais, mesmo sabendo como calcular o ângulo. Para além disso, os estudantes que mobilizam aprendizagens para trabalhar matrizes de rotação não refletem sobre a arbitrariedade do vetor $\vec{v}$ na equação $\vec{w} = A\vec{v}$, assumindo que $\vec{v}$ pode ser qualquer vetor, mas sem dar justificações adequadas. Essa falta de reflexão está associada a tomarem um modelo já construído em aulas anteriores sem uma compreensão total por parte do estudante das condições consideradas na construção desse modelo. Para além disso, um grupo evidencia dificuldades na escrita matemática, confundindo a notação de vetor com a notação de uma matriz, possivelmente por ser a matriz referida como matriz de rotação, a qual está associada a vetores.

A tecnologia, que foi mobilizada só por um grupo, foi utilizada com uma funcionalidade diferentemente das tarefas anteriores, nomeadamente para validar resultados reais e, portanto, o modelo matemático construído. Embora o modelo matemático utilizado por estes estudantes seja simples e não seja necessário utilizar tecnologia para verificar a validade do modelo matemático, os estudantes mobilizam a tecnologia mais como um meio de exploração do *software*, para aprenderem a utilizar tecnologia para modelar. Portanto, nesta tarefa a tecnologia teve uma funcionalidade mais formativa ligada ao desenvolvimento de competências para modelar com *software* e não como ferramenta de ajuda para simplificar cálculos como nas tarefas anteriores.

No que se refere aos resultados da tarefa de antecipação em contraponto com os resultados da tarefa de modelação, o facto de todos os estudantes terem mostrado aprendizagens para calcular o ângulo entre dois vetores em coordenadas cartesianas na tarefa de antecipação, reforça a circunstância de não terem validado resultados reais na tarefa de modelação. Especificamente, sabem determinar o ângulo entre dois vetores, mas não sentem a necessidade de calcular ângulos para validar resultados por confiarem num modelo que foi proporcionado pelo professor.

Por último, o facto de todos os estudantes conseguirem evidenciar competências para interpretar resultados matemáticos e terminarem o seu processo de modelação com a exposição desses resultados, mesmo sem serem validados em vários grupos, permite inferir que nesta tarefa os estudantes evidenciam uma maior mobilização de competências de modelação em relação às tarefas anteriores. Isso poderá estar associado ao facto de terem construído modelos matemáticos que não requerem cálculos difíceis, mas também à experiência adquirida no processo de modelação após duas tarefas trabalhadas previamente.

6.4 Tarefa TM4: senhas de acesso bancário

6.4.1 Tarefa de antecipação

A quarta tarefa de antecipação (Anexo B4) pretendia que os estudantes trabalhassem com vetores em IR^5 dependentes de um parâmetro e com subespaços de matizes 2×2, objetivando mobilizar os conceitos de conjunto gerador de um subespaço vetorial, combinação linear, independência linear, e relações entre os conceitos anteriores para identificar uma base do subespaço. A resolução da tarefa, conformada por uma questão com utilização de tecnologia (Q1) e uma questão sem utilização desta (Q2), evidenciou a capacidade de toda a turma para trabalhar apropriadamente com o *Mathematica*, utilizando-o para determinar vetores base de subespaços de IR^n. A título de exemplo, apresenta-se um extrato da resolução de Mateus e Xavier (Figura 6.39a, 6.39b), estudantes que, da mesma forma que os restantes grupos, utilizam corretamente o *Mathematica* para encontrar os valores do parâmetro k que definem uma base para o espaço coluna da matriz da tarefa.

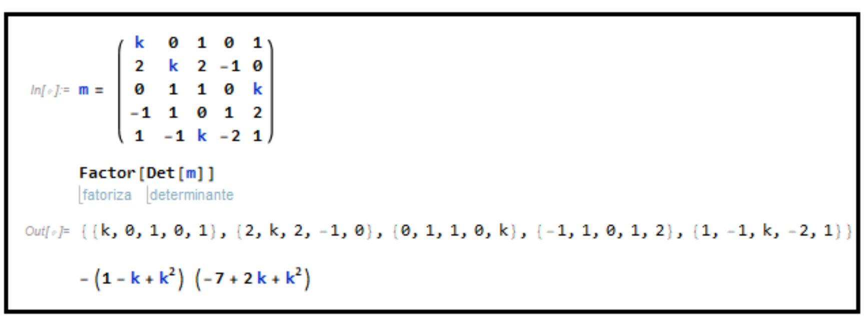
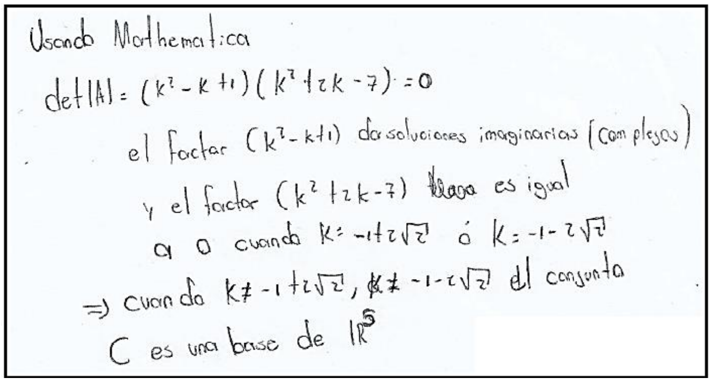


Figura 6.39a. Trabalho de antecipação de Mateus e Xavier na Q1.



Usando Mathematica

$det|A| = (k^2 - k + 1)(k^2 + 2k - 7) = 0$

el factor $(k^2 - k + 1)$ da soluciones imaginarias (complejos)

y el factor $(k^2 + 2k - 7)$ es igual

a 0 cuando $k = -1 + 2\sqrt{2}$ ó $k = -1 - 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ cuando $k \neq -1 + 2\sqrt{2}$, $k \neq -1 - 2\sqrt{2}$ el conjunto

C es una base de IR^5

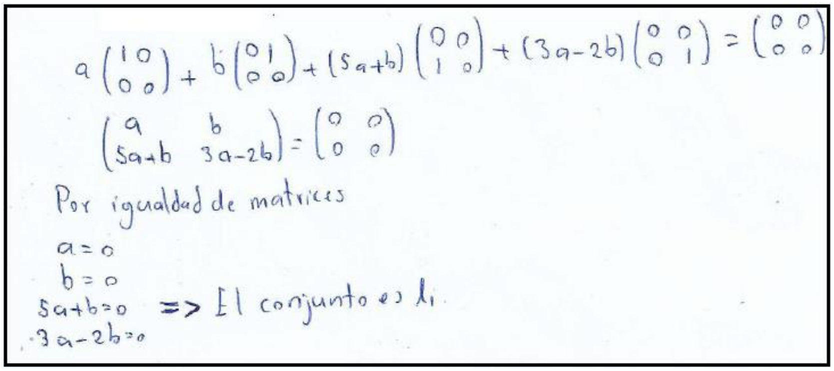
[Usando *Mathematica*, $det(A) = (k^2 - k + 1)(k^2 + 2k - 7) = 0\ldots$
$\Rightarrow$ quando $k \neq 1 + 2\sqrt{2}$, $k \neq -1 - 2\sqrt{2}$ o conjunto C é uma base de IR^5]

Figura 6.39b. Trabalho de antecipação de Mateus e Xavier na Q1.

Mateus e Xavier utilizam as ferramentas *Det[ ]* e *Factor[ ]* do *Mathematica* para calcular o determinante da matriz *"m"* e expressá-lo em forma fatorizada (Figura 6.39a), simplificando sobretudo o cálculo demorado do determinante da matriz. Posteriormente, estes estudantes continuam seu trabalho sem utilização de tecnologia (Figura 6.39b), definindo a expressão $(k^2 - k + 1)(k^2 + 2k - 7) = 0$ para encontrar os valores que anulam o determinante, dando fim à sua resolução após mencionarem acertadamente que "quando $k \neq +1 + 2\sqrt{2},\ k \neq -1 - 2\sqrt{2}$ o conjunto C é uma base de IR^5". O facto de toda a turma encontrar estes valores de k, que fazem das colunas da matriz m uma base de IR^5, evidencia dois aspetos: 1) os estudantes dominam propriedades que relacionam a independência linear de vetores em IR^n com o determinante da matriz conformada pelos vetores em colunas, em particular, $det(A) = 0$ implica dependência linear de vetores; e 2) os estudantes reconhecem que cinco vetores linearmente independentes pertencentes a IR^5 formam uma base para IR^5. Neste sentido, identifica-se que todos os estudantes mobilizam conhecimentos associados a propriedades ou teoremas da álgebra linear que conectam conceitos da unidade de Espaços Vetoriais com outras unidades, como a unidade de Determinantes, para determinar quando um conjunto de vetores é uma base.

Em referência à segunda questão, orientada para encontrar uma base de um subespaço de matrizes $2x2$, quatro grupos de estudantes são capazes de definir um conjunto gerador para o subespaço de matrizes apresentado na tarefa; sete grupos são capazes de reconhecer independência linear de matrizes; e oito grupos evidenciam reconhecer bases para o subespaço de matrizes, referindo terem um conjunto gerador linearmente independente.

Assim, a maioria de estudantes recorre novamente a teoremas de espaços vetoriais para definir uma base de um subespaço, embora se deduza dos dados anteriores que a maioria dos estudantes não sabe definir conjuntos geradores para subespaços de matrizes. Tal é o caso de Marcelino e Estela, cuja resolução é mostrada na figura 6.40.



[Por igualdade de matrizes $a = 0, b = 0, 5a + b = 0, 3a - 2b = 0$
⇒ o conjunto é linearmente independente]

Figura 6.40. Trabalho de antecipação de Marcelino e Estela na Q2.

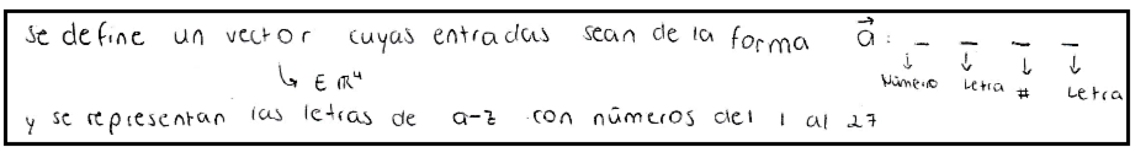
Marcelino e Estela definem incorretamente a base canónica do espaço vetorial $M(IR, 2x2)$ como sendo a base requerida para o subespaço de matrizes $2x2$ apresentado na tarefa, pois não apercebem de que as matrizes canônicas do espaço $M(IR, 2x2)$ não satisfazem as condições $c = 5a + b, d = 3a - 2b$ definidas para o subespaço de matrizes para o qual se quer encontrar uma base. Assim, evidencia-se uma dificuldade associada à entidade matemática do conceito de conjunto gerador, em particular em reconhecer que os elementos de um conjunto gerador devem pertencer ao subespaço vetorial gerado.

6.4.2 Competências de modelação e aprendizagens de conceitos

Compreensão e simplificação/estruturação da tarefa

A turma evidencia competências necessárias para compreender a tarefa (Anexo C4) em termos de vetores em IR^n, associando as componentes do vetor aos algarismos de senhas de acesso bancário. Os estudantes mencionam o tipo de caracteres que poderiam ser utilizados com a ajuda dos vetores, alguns incluindo só letras e números, outros incluindo também símbolos e mais ou menos caracteres, no modelo de senha bancária. Neste sentido, a consideração ou não das distintas estruturas escolhidas para o modelo real facilita ou complica a criação do modelo matemático e ao mesmo tempo modelos reais com mais caracteres envolvem uma maior quantidade de combinações entre os caracteres que conformam a senha bancária. Logo envolvem a criação de senhas bancárias de maior segurança dentro do contexto da situação problema.

Dentro dos grupos que decidem formular modelos reais com distintos tipos de caracteres está o grupo de Fabrício e Maurício, mencionando na sua resolução da tarefa: “pensámos na criação de um sistema de variáveis que contenha números, símbolos e letras (maiúsculas, minúsculas) operados mediante vetores, dando como resultado uma senha diferente por operação”. Na resposta dada por esses estudantes na resolução escrita, identifica-se uma associação feita entre senhas e vetores para armazenar, pelo menos, números e letras, conforme solicitado na situação problema. Fabrício e Maurício mencionam “operar mediante vetores” para se referirem à criação de algum tipo de modelo real que lhes permita obter diferentes senhas mediante conceitos que envolvam vetores em IR^n. Percebe-se que estes estudantes pensam na mobilização do conceito de combinação linear para adicionar diferentes vetores e criar assim vetores novos a partir dos quais definirão as senhas. De facto, a mobilização do conceito de vetor veio em conjunto com o conceito de combinação linear e conjunto gerador, conceitos que, de maneira implícita ou explícita, todos os grupos utilizam para obter as diferentes senhas, à exceção do grupo de Martim e Fabiana, estudantes que se limitam a usar o ao conceito de vetor, conforme mostra a figura 6.41.



[define-se um vetor cujas entradas sejam da forma a: _, _, _, _
e representam-se as letras de a até z com os números de 1 até 27]

Figura 6.41. Modelo real e matemático de Martim e Fabiana.

Martim e Fabiana mobilizam vetores em IR^4 para guardar informação aleatória, gerando assim senhas com quatro caracteres, compostos por números e letras, nomeadamente fazendo corresponder a primeira e terceira componente numérica do vetor com números aleatórios entre 1 e 9, e a segunda e quarta componente numérica do vetor com números aleatórios entre 1 e 27, os quais posteriormente são codificados com letras do abecedário. Este modelo, embora satisfazendo as condições de senhas do problema, limita a mobilização de conhecimentos dos estudantes, pois conceitos vitais como o conceito de combinação linear e base de um subespaço vetorial ficam esquecidos, tornando a tarefa pobre em relação com o que se esperava da sua resolução e que sim conseguiram fazer os outros estudantes.

Em geral, a compreensão da situação problema foi uma atividade bem-sucedida em pouco tempo pelos estudantes, evidenciando-se reconhecerem informação relevante do enunciado para fazer suposições sobre as componentes de um vetor associado ao seu modelo real. Neste sentido, a compreensão da situação problema não gerou dificuldade para os estudantes, o que pode estar associado a vários aspetos: 1) terem adquirido já certa maturidade no trabalho com tarefas de modelação ao chegar à quarta tarefa de modelação; 2) ser solicitado no enunciado da tarefa utilizar vetores para a resolução da tarefa; 3) terem lido e refletido sobre o enunciado da tarefa previamente ao trabalho de resolução na sala de aula; e 4) já terem vivido uma experiência semelhante com a segunda tarefa de modelação, nomeadamente serem convidados a codificar.

Com exceção de Martim e Fabiana, os estudantes estruturam a tarefa utilizando um conjunto gerador de vetores, a maior parte (cinco grupos) recorrendo a bases canônicas dos espaços vetoriais $IR^4,\ IR^5,\ IR^6$ ou a bases não canónicas dos espaços $IR^2,\ IR^3,\ IR^6$. Neste sentido, a maior parte opta por modelos que os levam a formular senhas bancárias com maior probabilidade de segurança, dado que as bases correspondem, em geral, a espaços de maior dimensão, logo as senhas geradas têm maior quantidade de algarismos, portanto, um maior número de combinações para a mesma variedade de caracteres utilizados.

O modelo de Fátima e Heitor faz parte da categoria de modelos reais que aludem a bases canónicas de espaços vetoriais. Parte da configuração do modelo criado por estes estudantes é observada através da resposta dada por eles na resolução escrita da tarefa, nomeadamente: "as senhas gerar-se-ão mediante a combinação linear dos elementos da base canônica de IR^6, as primeiras três entradas dos vetores do conjunto gerado como letras do abecedário previamente definidas". Na resposta de Fátima e Heitor identifica-se uma estrutura já definida sobre o modelo matemático que desejam, vetores gerados pela base canónica de IR^6 e cuja codificação das componentes resulta em vetores senha constituídos por três letras e três números. Para além disso, evidencia-se a mobilização do conceito de combinação linear, base de um subespaço vetorial e o conceito de subespaço gerado, os três mencionados em forma explícita, embora este último mencionado explicitamente só por este grupo, pois os restantes estudantes utilizam linguagem coloquial para se referir ao subespaço gerado. No modelo real de Fátima e Heitor os estudantes mencionam a utilização de letras associadas às primeiras três entradas numéricas do vetor, sendo estas definidas conforme a correspondência observada na figura 6.42.

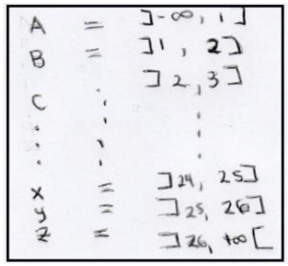


Figura 6.42. Simplificações sobre o modelo real, propostas por Fátima e Heitor.

Interpreta-se da Figura 6.42 que parte das simplificações de Fátima e Heitor sobre seu modelo real referem a utilização de números reais para as primeiras três componentes do vetor, sendo posteriormente transformado o resultado numérico numa letra específica do alfabeto, segundo a correspondência definida entre letras e intervalos numéricos.

No que se refere aos grupos, os quais propõem bases não canónicas de espaços vetoriais, encontramos o grupo de Mateus e Xavier, cuja base é a única formada por vetores em IR^3, especificamente o conjunto $B = \{(1,-2,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$. Mateus e Xavier, de forma semelhante aos outros três grupos que propõem bases não canônicas, fazem uma escolha da base com certa intenção de desenho do modelo real, conforme se pode deduzir do comentário de Mateus e Xavier na resolução escrita da tarefa:

> Tem-se em consideração que ao realizar as somas dos vetores não fiquem valores como $\alpha + 4$, sendo α um carácter alfabético, pois isto seria um erro. Por isso a última fila está formada por dois zeros e um número um.

A explicação sobre a formação do modelo real por estes estudantes refere-se à escolha específica dos vetores da base proposta. A base B contém dois vetores cujas primeiras duas componentes são diferentes de zero e a última é zero, e um terceiro vetor cujas primeiras duas componentes são zero e a última diferente de zero. A observação anterior permite interpretar que Mateus e Xavier procuram no vetor $(0,0,1)$ a codificação de letras do alfabeto e nas combinações lineares dos vetores $(1,-2,0)$ e $(1,1,0)$ resultados numéricos. Desta forma, definida a combinação linear $v = \beta(1,-2,0) + \gamma(1,1,0) + \alpha(0,0,1)$, a terceira componente do vetor gerado sempre corresponderá ao valor α, não havendo cruzamentos entre letras e números que compliquem a codificação das senhas, como por exemplo a expressão "$\alpha + 4$", referida pelos estudantes. Os outros três grupos também tiveram este cuidado de definir apropriadamente o modelo, evidenciando-se assim competências por parte dos quatro grupos que utilizam bases não canônicas para refletir sobre a validade do modelo matemático no contexto real da tarefa.

Outro aspeto também identificado nos quatro grupos que formulam modelos com bases não canónicas é a mobilização de teoremas da álgebra linear para identificar bases de subespaços. Por exemplo, Mateus e Xavier mobilizam teoremas que relacionam a linearidade dos vetores do conjunto B com o valor do determinante da matriz formada pelos vetores, pois, referindo-se aos vetores desse conjunto, mencionam na sua resolução escrita que "calculam seu determinante para determinar a independência linear". Neste sentido, interpreta-se que Mateus e Xavier calculam o determinante formado pelos vetores da base e obtêm um valor diferente de zero, permitindo-lhes identificar que o conjunto escolhido é linearmente independente. Posteriormente, para afirmarem que o conjunto B é uma base de IR^3, deduz-se que os estudantes mobilizam aprendizagens sobre teoremas que ligam a independência linear com o número de elementos do conjunto, nomeadamente conjuntos de vetores linearmente independentes com n elementos formam bases para IR^n e, em particular, para $n = 3$ uma base de IR^3.

No que corresponde a dificuldades evidenciadas na atividade de estruturação e simplificação do modelo real, foi identificado inicialmente no grupo de Henrique e Diogo uma utilização informal do conceito de base, conforme pode inferir-se do diálogo desenvolvido na discussão grupal realizada entre eles e o investigador:

> ***Henrique:*** O que fizemos foi um vetor base (sinalizando o primeiro vetor na expressão $v \triangle w$), e este outro vetor w vai possuir os caracteres. Aqui pode ir qualquer operação matemática (sinalizando o símbolo $\triangle$), e aqui vai o conjunto de senhas gerado (sinalizando o resultado da operação $v \triangle w$). Para obter caracteres alfanuméricos o que fazemos é que alguns números vão ter letras atribuídas, então na hora de realizar a operação matemática utilizamos os números em vez das letras.
> ***Investigador:*** Vamos ver. O vetor v é uma base?
> ***Henrique:*** Sim, é a base.
> ***Investigador:*** Porque o consideras uma base?
> ***Henrique:*** Se eu tomar um vetor e lhe realizar operações matemáticas com outro vetor, isso vai gerar-me o conjunto de senhas.

Investigador: Então não estás referindo o facto de o vetor v ser uma base.
Henrique: Pois, não…não é uma base, é só vetor base, um vetor fundamental que vai ser operado com outro vetor para gerar as senhas.

Do diálogo anterior evidencia-se uma tentativa de Henrique utilizar o conceito de base como um vetor que sob alguma operação permite gerar outros vetores, não tendo de ser a construção com a operação escolhida uma combinação linear de vetores precisamente. Neste sentido, o conceito de base de Henrique não é o conceito formal de base de um subespaço vetorial, mas um conceito informal que evidencia o desenvolvimento de competências para a construção de um modelo real, mas também algumas dificuldades ligadas à utilização da linguagem matemática de álgebra linear.

Matematização e trabalho sobre o modelo matemático

Todos os modelos matemáticos que são formulados referem-se a vetores em IR^n, sendo o valor de n que faz a diferença entre as distintas propostas de modelos matemáticos, conforme aos modelos reais já referidos. A maior parte dos estudantes formulam modelos matemáticos com vetores de IR^5 e IR^6, enquanto uma minoria utiliza vetores de IR^2, confirmando-se assim uma maior tendência dos estudantes a optarem por modelos matemáticos que fornecessem senhas bancárias com maior segurança.

Excetuando o grupo de Marcelino e Estela, todos os estudantes trabalham o modelo matemático utilizando tecnologia, nomeadamente a folha de *Excel*, conforme solicitado no enunciado da tarefa. Esta indicação no enunciado da tarefa resultou num convite para que os estudantes utilizassem ferramentas do *Excel* para calcular um número determinado de senhas a partir do seu modelo matemático, evidenciando-se que isso fez com que os estudantes simulassem diferentes combinações lineares a partir da base de vetores definida por eles, para desta forma obter resultados matemáticos e, no caso de quatro grupos, as senhas associadas a tais resultados matemáticos.

Olhando para os modelos matemáticos propostos pela maior parte da turma encontramos o grupo de Artur e Hugo (Figura 6.43), com vetores de IR^6, enquanto que olhando para o outro extremo encontramos o único modelo construído com utilização de vetores de IR^2, proposto pelo grupo de Emiliana e Francela (Figura 6.44).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$$

Figura 6.43. Modelo matemático de Artur e Hugo.

$$S = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

α_1 [2,6] y α_2 [1,10]

$$\underbrace{\begin{array}{llll} a=1 & h=8 & ñ=15 & v=23 \\ b=2 & i=9 & o=16 & w=24 \\ c=3 & j=10 & p=17 & x=25 \\ d=4 & k=11 & q=18 & y=26 \\ e=5 & l=12 & r=19 & z=27. \\ f=6 & m=13 & s=20 & \\ g=7 & n=14 & t=21 & \\ & & u=22 & \end{array}}_{\in [1,27]}$$

Figura 6.44. Modelo matemático de Emiliana e Francela.

Nas Figuras 6.43 e 6.44 é possível observar que os modelos de ambos os grupos utilizam uma quantidade determinada de valores para os vetores coordenadas das respetivas bases, isto é, quer Artur e Hugo quer Emiliana e Francela, restringem, respetivamente, os valores dos vetores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e (α_1, α_2). Isso pode ser interpretado como uma tentativa de obter resultados matemáticos em forma de vetores com a mesma dimensão e sem repetição de senhas para distintos vetores coordenadas.

No caso de Artur e Hugo, o modelo matemático considera as seguintes simplificações mencionadas pelos estudantes na sua resolução escrita:

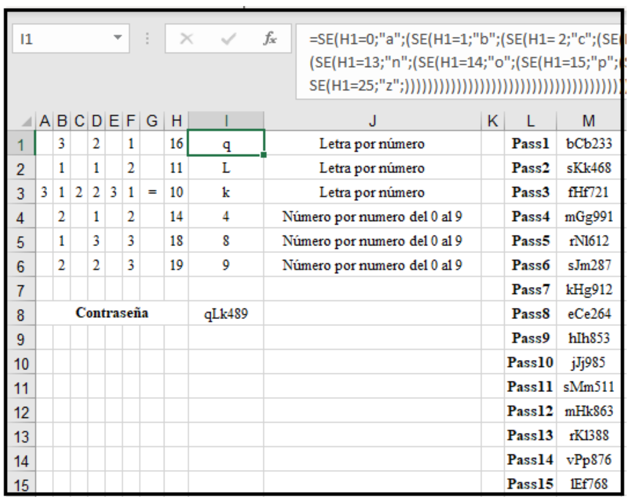
> Para o resultado de x, atribui-se uma letra minúscula do alfabeto de acordo com a ordem; para y, uma letra maiúscula do alfabeto de acordo com a ordem; para z, uma letra minúscula do alfabeto de acordo com a ordem; para u, v, w, atribui-se o dígito no local das unidades.

Neste sentido, interpreta-se que as primeiras três componentes do vetor gerado pelo modelo matemático de Artur e Hugo são números que posteriormente são codificados como letras do abecedário, enquanto às últimas três componentes correspondem a números com um algarismo. Ainda mais, observando a restrição feita por Artur e Hugo sobre os valores do vetor de coordenadas (Figura 6.43), é possível deduzir que os valores numéricos mínimos das componentes do vetor gerado ocorrem quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, obtendo-se o vetor (0,0,0,0,0,0), enquanto os valores numéricos máximos das componentes do vetor gerado ocorrem quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4$, obtendo-se o vetor $(24{,}16{,}16{,}20{,}28{,}28)$. Assim, considerando que os vetores da base são linearmente independentes, o alfabeto tem 26 letras, e a primeira componente dos vetores gerados terão valores entre 0 e 24, infere-se que distintos valores de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ geram distintos vetores senha. Neste sentido, Artur e Hugo evidenciam o desenvolvimento de competências de matematização para definir um modelo matemático adequado ao contexto da situação problema que não repete senhas de acesso bancário, consequentemente um modelo matemático que liga fortemente a matemática e a realidade.

No que respeita ao modelo matemático de Emiliana e Francela, fazendo uma análise similar com os valores mínimos e máximos das componentes do vetor gerado, observa-se que o mínimo valor gerado pela combinação linear dos vetores da base $C = \{(1,6), (3,6)\}$ corresponde ao vetor $(5,18)$ e o máximo valor corresponde ao vetor $(36,96)$. Ora, a tabela de codificação apresentada por Emiliana e Francela (Figura 6.44) foi desenhada para codificar a primeira componente do vetor resultante como uma letra, mantendo a segunda componente como o carácter numérico, pelo que caberia a possibilidade de que a primeira componente do vetor gerado fosse um número inteiro no intervalo $[28,36]$. Nesta linha, a tabela criada por Emiliana e Francela seria insuficiente para gerar senhas para todas as combinações lineares, pois os valores inteiros do intervalo $[28,36]$ não possuem letras associadas na sua tabela de codificação. Assim, poderia interpretar-se que Emiliana e Francela pensaram em recomeçar a sequência do abecedário para os valores no intervalo $[28,36]$, ou eventualmente não analisaram todos os possíveis vetores que o seu modelo matemático permitia criar, consequentemente não se apercebem da necessidade de acrescentar correspondências entre números e letras na sua tabela.

Embora a não codificação de certos valores numéricos em letras resulte numa limitação do modelo de Emiliana e Francela, elas são capazes de mobilizar aprendizagens acerca da independência linear de vetores para formar o conjunto $C = \{(1,6), (3,6)\}$. Efetivamente, Emiliana e Francela variam a primeira componente dos vetores do conjunto C e fixam a segunda componente, garantindo desta forma a independência entre os vetores do conjunto C, os quais sendo dois vetores formam uma base para IR^2. Para além disso, a escolha dos valores do vetor de coordenadas (α_1, α_2), associados à base C ajudou a que a segunda componente do vetor gerado ficasse formada por números com dois algarismos, garantindo que os resultados reais, ou seja, as senhas, ficassem todas formadas por três caracteres: uma letra seguida de dois algarismos numéricos.

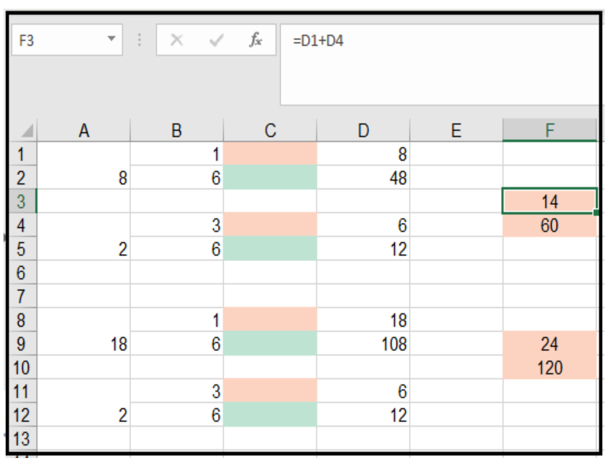
Os modelos matemáticos de todos os estudantes consideraram alguma tabela própria para codificar algumas das componentes dos vetores gerados, gerando assim as senhas bancárias formadas, pelo menos, por números e letras. Para gerar esses vetores, e, portanto, trabalhar sobre o modelo matemático para obter resultados matemáticos, a utilização da folha de *Excel* foi fundamental, permitindo aos estudantes desenvolver competências para trabalhar com tecnologia na geração de várias senhas. Nas figuras 6.45 e 6.46 pode observar-se, respetivamente, os modelos computacionais desenhados pelo grupo de Artur e Hugo e pelo grupo de Emiliana e Francela.



I1 =SE(H1=0;"a";(SE(H1=1;"b";(SE(H1= 2;"c";(SE
(SE(H1=13;"n";(SE(H1=14;"o";(SE(H1=15;"p";
SE(H1=25;"z";))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		3		2		1		16	q	Letra por número		**Pass1**	bCb233
2		1		1		2		11	L	Letra por número		**Pass2**	sKk468
3	3	1	2	2	3	1	=	10	k	Letra por número		**Pass3**	fHf721
4		2		1		2		14	4	Número por numero del 0 al 9		**Pass4**	mGg991
5		1		3		3		18	8	Número por numero del 0 al 9		**Pass5**	rNl612
6		2		2		3		19	9	Número por numero del 0 al 9		**Pass6**	sJm287
7												**Pass7**	kHg912
8				**Contraseña**					qLk489			**Pass8**	eCe264
9												**Pass9**	hIh853
10												**Pass10**	jJj985
11												**Pass11**	sMm511
12												**Pass12**	mHk863
13												**Pass13**	rKl388
14												**Pass14**	vPp876
15												**Pass15**	lEf768

Figura 6.45. Modelo matemático de Artur e Hugo.



F3 =D1+D4

	A	B	C	D	E	F
1		1		8		
2	8	6		48		
3						14
4		3		6		60
5	2	6		12		
6						
7						
8		1		18		
9	18	6		108		24
10						120
11		3		6		
12	2	6		12		
13						

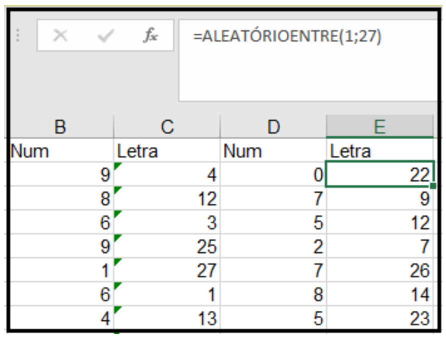
Figura 6.46. Modelo matemático de Emiliana e Francela.

O modelo computacional de Artur e Hugo mostra os vetores da base definida nas colunas B, D, F da célula de *Excel* multiplicados pelas componentes do vetor de coordenadas associado à base definida nas colunas A, C, E. As componentes do vetor de coordenadas são geradas com a função aleatória de *Excel*, dando origem a um vetor numérico gerado pela combinação linear (coluna H) e ao mesmo tempo a uma senha associada ao vetor numérico gerado (coluna I). Os estudantes vão obtendo diferentes senhas ao mudarem os valores aleatórios do vetor de coordenadas e copiam os valores das senhas obtidas na coluna M até criarem vinte senhas, conforme solicitado na tarefa. Analogamente, o modelo de Emiliana e Francela utiliza a função aleatória do *Excel* para obter os valores das componentes do vetor de coordenadas (coluna A) na base definida (coluna B), embora, neste caso, gerando vários vetores numéricos simultaneamente (coluna F), ainda que sem gerar senhas no *Excel*. Desta forma, ambos grupos evidenciam desenvolver modelos computacionais suficientemente eficientes para a determinação rápida de vários vetores numéricos gerados pela combinação linear dos vetores da base definida no seu modelo matemático (Figura 6.43, Figura 6.44). Observa-se certa vantagem e limitação de um modelo sobre o outro em termos de resultados reais, nomeadamente: cálculo direto de senhas bancárias, mas não cálculo simultâneo de mais duma senha (Figura 6.45); cálculo simultâneo de mais de um vetor numérico, mas não cálculo direto de senhas bancárias (Figura 6.46).

Em geral, dos nove grupos de estudantes que utilizam o *Excel* para obter resultados matemáticos, cinco grupos formulam modelos computacionais que fornecem simultaneamente resultados reais, isto é, senhas bancárias, evidenciando-se a mobilização de ferramentas da folha de *Excel* por parte da maior parte dos estudantes para ir mais além de simplificar o cálculo de operações matemáticas. Contudo, alguns dos grupos de estudantes que utilizam tecnologia manifestam terem tido dificuldade inicialmente para trabalhar com a folha de *Excel*; tal foi o caso de Fabrício e Maurício, mencionando no relatório da sua resolução que “a utilização do *Excel* foi uma dificuldade, pois não se tinha utilizado antes durante a disciplina”. Neste sentido, o *Excel* foi visto como uma dificuldade por não saberem que ferramentas do *software* mobilizar para a programação do modelo matemático. No final, esta dificuldade foi ultrapassada por este grupo e pelos outros que também a manifestaram, pois o conhecimento compartilhado entre os distintos membros dos grupos de trabalho sobre as ferramentas do *Excel* ajudaram a que estes grupos pudessem realmente programar os seus modelos computacionais.

Interpretação e validação de resultados

A interpretação de resultados matemáticos foi uma competência evidenciada por todos os grupos, com exceção do grupo de Martim e Fabiana, único grupo que obtém resultados computacionais através da folha de *Excel* (Figura 6.47), mas sem chegar a interpretá-los como senhas bancárias.



=ALEATÓRIOENTRE(1;27)

B	C	D	E
Num	Letra	Num	Letra
9	4	0	22
8	12	7	9
6	3	5	12
9	25	2	7
1	27	7	26
6	1	8	14
4	13	5	23

Figura 6.47. Modelo computacional desenvolvido por Martim e Fabiana.

O modelo computacional de Martim e Fabiana utiliza a função *Aleatórioentre(;)* para calcular números inteiros no intervalo [0,9] nas colunas B e D, e números inteiros no intervalo [1,27] nas colunas C e E, tendo que ser os números destas últimas colunas codificados posteriormente como letras segundo o modelo matemático proposto (Figura 6.41), aspeto não realizado pelos estudantes. Assim, Martim e Fabiana terminam o seu processo de modelação com a geração dos resultados computacionais, evitando uma interpretação de resultados que, embora simples de seguir, não foi efetuada. Talvez a "simplicidade" do modelo matemático seja a razão pela qual Martim e Fabiana não sentem a necessidade de interpretar resultados computacionais em termos de senhas, sendo essa a diferença para com os restantes modelos matemáticos que são criados a partir de combinações lineares de vetores.

No que corresponde à validação de resultados reais, só quatro grupos validam senhas bancárias no contexto da situação problema, embora todos os modelos matemáticos construídos produzam senhas em concordância com as condições propostas na situação problema. Esse facto ficou evidenciado nas resoluções escritas dos estudantes e também durante a discussão coletiva da tarefa conduzida pelo investigador:

***Investigador*:** Observei que todos vocês definiram distintos modelos matemáticos. Acham que esses modelos poderiam servir se, por exemplo, fosse solicitado senhas com a metade ou o dobro da quantidade de caracteres pedido nesta tarefa?
***Tiago*:** Eu acho que sim, teríamos só de reduzir a quantidade de entradas dos vetores da combinação linear se quiséssemos senhas com menos caracteres, ou aumentar a quantidade de entradas se quiséssemos senhas com mais caracteres.
***Emiliana*:** Sim, realmente é só adaptarmos os vetores da base como diz o companheiro ou o range dos “alfas” (referindo-se ao vetor de coordenadas da base).

A resposta dada pelos estudantes evidencia estarem conscientes de que o modelo matemático deve ser adaptado, quer modificando os vetores do conjunto gerador, quer modificando o intervalo das componentes do vetor de coordenadas, referido por Emiliana como “alfas”. Tiago faz parte dos grupos que não chegou a validar o seu modelo matemático, embora a resposta mencionada por ele no diálogo mostra competências para validar o modelo matemático proposto. Neste sentido, ele e os seus colegas que não validaram os resultados reais não sentiram necessidade de confirmar de forma escrita as senhas obtidas no contexto da tarefa, mas fazem uma validação do seu modelo a nível interno ou conceptual.

6.4.3 Rotas de modelação

As rotas de modelação das resoluções desta tarefa são agrupadas em três classes: 1) rotas não lineares que terminam no resto do mundo (G1, G3, G4, G6, G7, G8, G9, G10); 2) rotas lineares que terminam no mundo da tecnologia (G5); e 3) rotas lineares que terminam no resto do mundo (G2). Dentro da primeira categoria encontramos a maior parte dos grupos, desenvolvendo rotas que transitam pela fase do modelo real e do modelo matemático duas vezes e a passagem pelo mundo da tecnologia numa ocasião, terminando a rota na situação real. Na segunda categoria, encontramos só um grupo, o qual não mobiliza aprendizagens de combinações lineares de vetores no seu modelo matemático, transitando pelo mundo da tecnologia com uso da folha de *Excel*, mas sem ir mais além da obtenção de resultados computacionais. Por último, na categoria das rotas lineares que terminam no resto do mundo encontramos o único grupo que não transita pelo mundo da tecnologia para trabalhar no seu modelo, terminando a sua rota na fase dos resultados reais. Como exemplo, analisa-se uma das rotas não lineares (G8) e uma rota linear (G5), sendo rotas que se caraterizam, respetivamente, por transitar pelo mundo tecnológico e validar resultados, e, contrariamente, não transitar pelo mundo tecnológico nem validar resultados.

Artur e Hugo (G8) conformam um dos grupos com rotas de modelação não lineares, sendo também um dos grupos que utiliza vetores que pertencem ao espaço vetorial com a maior dimensão, IR^6. A rota de modelação destes estudantes é mostrada na figura 6.48.

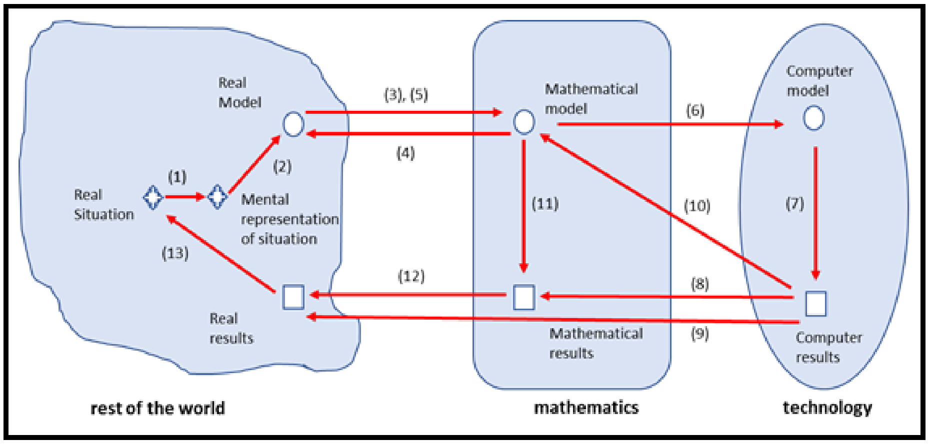


Figura 6.48. Rota de modelação de Artur e Hugo.

O processo de modelação de Artur e Hugo começa com a compreensão da situação de criação de senhas bancárias (P1). Estes estudantes, na resolução escrita, mencionam uma frase que evidencia a compreensão da situação problema: "Nesta situação, é necessário criar um gerador de senhas a partir do conhecimento algébrico que temos. Essas senhas devem ter pelo menos números e letras do alfabeto". A frase referida evidencia que Artur e Hugo identificam informação relevante na situação problema, o que responde a competências para compreender a tarefa.

A seguir, utilizando seu "conhecimento algébrico", formulam um modelo real (P2), pensando inicialmente em matrizes e nos vetores que a conformam para criar senhas, conforme mencionado em seu relatório escrito: "A partir do que possuímos, é possível criar uma matriz que, uma vez decomposta em seus vetores, e multiplicados estes por um escalar, podem ser obtidos diferentes resultados associados a senhas". Neste sentido, o modelo real proposto por Artur e Hugo refere a utilização de uma combinação linear dos vetores coluna de uma matriz, sendo os resultados destas combinações lineares transformados em senhas, pelo que existe uma mobilização de conceitos de álgebra linear para trabalhar a tarefa e evidência de competências para simplificar e estruturar o modelo real. Em particular, como parte das simplificações realizadas antes de matematizar o modelo, Artur e Hugo propõem utilizar vetores em IR^6 para gerar as distintas combinações lineares, sendo codificados os vetores numéricos obtidos como senhas que respeitam a correspondência seguinte:

Primeiro carácter: $0 \to a, 1 \to b, 2 \to c, 3 \to d, 4 \to e, 5 \to f, \dots, 25 \to z$
Segundo carácter: $0 \to A, 1 \to B, 2 \to C, 3 \to D, 4 \to E, 5 \to F, \dots, 25 \to Z$
Terceiro carácter: $0 \to a, 1 \to b, 2 \to c, 3 \to d, 4 \to e, 5 \to f, \dots, 25 \to z$
Quarto carácter: $0 \to 0, 1 \to 1, \dots, 9 \to 9,\ u \geq 10 \to u\ mod\ (10)$
Quinto carácter: $0 \to 0, 1 \to 1, \dots, 9 \to 9,\ v \geq 10 \to v\ mod\ (10)$
Sexto carácter: $0 \to 0, 1 \to 1, \dots, 9 \to 9,\ w \geq 10 \to w\ mod\ (10)$

Nesta correspondência o termo $v\ mod\ (10)$ lê-se como função resto em módulo 10, o que significa que o modelo real de Artur e Hugo propõe que a quarta, quinta e sexta componente dos vetores gerados sejam codificados como números com um algarismo: o resto da divisão dos números u, v, w por dez.

Feitas as simplificações anteriores, Artur e Hugo matematizam o seu modelo real (P3), dando origem ao modelo matemático que foi apresentado na figura 6.43. Embora estes estudantes não mencionem a independência linear, a maneira como utilizam arranjos dos números 1, 2, 3 na matriz de vetores escolhida, sugere uma intenção de procurar uma independência linear dos vetores coluna. Antes de utilizarem a folha de *Excel* para programar o seu modelo matemático, Artur e Hugo voltam ao modelo real para pensar em acrescentar mais colunas ao modelo (P4), embora desistam desta possibilidade (P5), tal como ficou evidenciado numa das discussões em grupo:

***Investigador*:** Pensaram alguma outra proposta de modelo?
***Hugo*:** Sim, pensámos em acrescentar mais colunas, mas consideramos que isso tornaria mais complexo resolver o problema.

Interpreta-se da resposta de Hugo que acrescentar colunas à matriz definida ocasionaria mais cálculos e, portanto, mais trabalho que preferem evitar, decidindo prosseguir e transitar pelo mundo da tecnologia com base no seu modelo matemático inicial (Figura 6.43). Artur e Hugo criam um modelo computacional na folha de *Excel* (Figura 6.45-) que evidencia esse transitar pela tecnologia (P6), gerando diferentes números aleatórios como parte do trabalho que realizam com o modelo computacional (P7). Com cada terno de números aleatórios, isto é, cada vetor de coordenadas associado à base de vetores coluna, logram criar um vetor numérico (P8) e, simultaneamente, uma senha (P9), conseguindo criar várias senhas (coluna M Figura 6.45) quando mudam os valores do vetor de coordenadas.

Garantido o trabalho de gerar senhas com o *Excel*, Artur e Hugo retornam ao modelo matemático (P10), utilizando-o para exemplificar como se realiza a geração de senhas obtidas com a folha de *Excel* (Figura 6.49).

$$0\begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\\3\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\\5\\9\\8\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}e\\F\\e\\5\\9\\8\end{pmatrix}$$

$$3\begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\\3\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\7\\8\\10\\12\\13\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}m\\H\\i\\0\\2\\3\end{pmatrix}$$

Figura 6.49. Resultados matemáticos e reais obtidos por Artur e Hugo.

Artur e Hugo trabalham matematicamente sobre o modelo (P11), com o caso particular do vetor de coordenadas $(0,1,2)$, obtendo o resultado matemático $(4,5,4,5,9,8)$. Este resultado é imediatamente interpretado (P12) a partir das correspondências de codificação salientadas atrás, para assim obter a senha $(eFe598)$. De modo análogo, os estudantes obtêm a senha $(mHi023)$ com outro vetor numérico, evidenciando também competências para validar estes resultados reais quando mencionam na sua resolução escrita que “considerando as etapas anteriores e o modelo proposto, pode-se dizer que o uso de vetores colunas multiplicados por escalares cumpre o objetivo de encontrar possíveis vetores que podem ser usados para gerar senhas diferentes”. Assim, Artur e Hugo refletem sobre o seu modelo matemático, sendo capazes de construir um modelo consistente que permite gerar senhas de acordo com os requisitos da situação problema.

No que respeita à rota linear de Martim e Fabiana, mostrada na figura 6.50, observa-se um processo de modelação que termina no mundo da tecnologia.

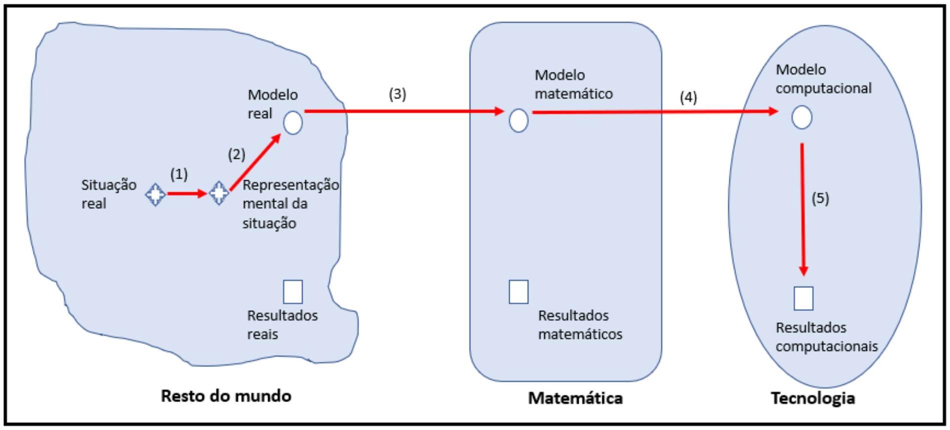


Figura 6.50. Resultados matemáticos e reais obtidos por Martim e Fabiana.

O processo de modelação destes estudantes começa com a compreensão da situação real: compreendem o problema e interpretam-no em termos de vetores (P1); fazem simplificações sobre as componentes do vetor que desejam utilizar (P2), neste caso vetores em IR^4 com componentes geradas mediante números aleatórios; e matematizam o modelo real (P3). O modelo matemático construído por estes estudantes (Figura 6.41) é o único que não utiliza combinações lineares de vetores, pelo que as aprendizagens mobilizadas se reduzem ao conhecimento do conceito de vetor em IR^{n}. Martim e Fabiana chegam a programar o modelo matemático no *Excel* (P4) e obter vinte vetores diferentes (P5), alguns destes mostrados na figura 6.47, embora não interpretam estes vetores em termos de senhas bancárias, o que poderá estar associado à simplicidade do modelo matemático já referida.

Em geral, os três grupos de rotas de modelação identificados apresentam as seguintes características:

a) Rotas não lineares (G1, G3, G4, G6, G7, G8, G9, G10): As rotas destes estudantes incluem duas transições pelo modelo real e pelo modelo matemático, o que é fruto de os estudantes pensarem em duas propostas de modelo matemáticos com vetores em IR^2, IR^3, IR^4, IR^5 ou IR^6. Todos estes grupos atravessam o mundo tecnológico utilizando a folha de *Excel* para obter resultados matemáticos e/ou resultados reais de senhas bancárias, conforme solicitado na tarefa. Estas rotas de modelação terminam na fase da situação real (G1, G3, G4, G8, 10), com a exposição de resultados ou na fase dos resultados reais (G6, G7, G9). As aprendizagens mobilizadas referem-se aos conceitos de: vetor em IR^n; combinação linear; base de um subespaço vetorial; e, associado ao conceito de base, o de independência linear. Todos estes grupos evidenciam interpretar resultados matemáticos, e quatro deles validam os resultados.

b) Rotas lineares (G2, G5): As duas rotas lineares identificadas evidenciam modelos matemáticos baseados em vetores de IR^4 (G5) ou IR^5 (G2). A rota de um dos grupos (G5) atravessa pelo mundo da tecnologia com a utilização da folha de *Excel*, mas sem ir mais além dos resultados computacionais; enquanto a rota do outro grupo (G2) não atravessa o mundo da tecnologia, mas termina na fase dos resultados reais. Em qualquer caso, as rotas aludem a modelos baseados na utilização de modelos matemáticos simples, nomeadamente utilização de combinações lineares de vetores canónicos (G2) ou utilização de vetores com componentes criadas de maneira aleatória (G5). As aprendizagens evidenciadas por estes grupos de estudantes envolvem o conceito de vetor em IR^n (G2, G5) e os conceitos de combinação linear de vetores e de base de um subespaço vetorial (G2). Um destes grupos chega a interpretar resultados matemáticos, embora não valide esses resultados.

6.4.4 Síntese

Os resultados analisados na tarefa "contraseñas de acceso bancario" mostraram um maior desenvolvimento de rotas de modelação não lineares do que de rotas lineares. Estas rotas não lineares são caraterizadas pela transição, de todos os grupos, por todas as fases do processo de modelação, evidenciando-se a transição pelo modelo real e pelo modelo matemático mais de uma vez, e a transição pelo mundo tecnológico em algum momento do processo de resolução da tarefa. As diferentes transições de ida e volta desenvolvidas pelos grupos nestas rotas não lineares permitem evidenciar um maior desenvolvimento de competências de modelação, entre as quais encontramos competências para: 1) procurar informação disponível e relevante da tarefa para associá-la com a utilização de vetores em IR^n; 2) construir relações entre valores numéricos e letras do abecedário, desenhando tabelas de codificação, para serem utilizadas na interpretação de resultados; 3) fazer suposições sobre a quantidade de algarismos que deverão ter as senhas a serem geradas para maximizar a segurança das senhas referidas na situação problema; 4) reduzir a complexidade da situação problema definindo vetores base apropriados e limitando os vetores de coordenadas na base escolhida a intervalos adequados de números; 5) matematizar o modelo real baseado em vetores utilizando notações matemáticas adequadas e mobilizando conceitos de espaços vetoriais; 6) obter resultados matemáticos variando quantidades definidas para os vetores de coordenadas, quer no papel, quer utilizando tecnologia, em particular a folha de *Excel*; 7) interpretar os valores obtidos a partir do modelo matemático como senhas específicas a partir das tabelas de codificação desenhadas. Para além disso, metade destes grupos evidenciam desenvolver competências para validar resultados, refletindo criticamente sobre os valores que devem ter as distintas entradas dos vetores base utilizados para que o resultado matemático esteja bem definido como senha válida no contexto real da tarefa.

No que respeita aos grupos com rotas lineares, as competências de 1) a 7) são também evidenciadas num dos dois grupos, embora sem evidência de competências para trabalhar com tecnologia. O outro grupo evidencia competências para trabalhar com tecnologia, em particular com o *Excel*, embora só revele a mobilização das competências listadas de 1) a 3). Contudo, nenhum destes grupos de rotas lineares mostra competências claras nos processos de validação dos resultados. Assim, considerando que todos os grupos da turma conseguem construir modelos matemáticos adequados ao contexto real da tarefa e baseados em vetores pertencentes a $IR^n, n \in \{2,3,4,5,6\}$, para além de obter resultados matemáticos, parece existir um processo de validação interna ou mental desenvolvido por toda a turma, mesmo não sendo evidenciada a atividade de validação explicitamente pela maior parte dos estudantes.

Em questão de aprendizagens evidenciadas, todos os grupos evidenciam conhecimento sobre vetores em IR^n, utilizando-os como objetos de codificação de senhas, uma vez definidas tabelas de codificação alfanuméricas para fazer corresponder diferentes vetores numéricos com diferentes senhas bancárias. A maior parte da turma evidencia conhecimento sobre o conceito de combinação linear e base de um subespaço vetorial, à exceção de um dos grupos que percorrem rotas lineares. A mobilização dos conceitos anteriores envolve uma maior quantidade de modelos matemáticos utilizando bases canónicas de subespaços de IR^n, com valores restringidos para os vetores de coordenadas, buscando a geração de um número finito e diferente de senhas bancárias. Os estudantes que propõem modelos matemáticos com bases não canónicas são de grupos que percorrem rotas não lineares, definindo conjuntos geradores de vetores com independência linear e aplicando, para além dos conceitos matemáticos mobilizados pelos outros grupos, teoremas de álgebra linear que relacionam a independência linear e a dimensão do conjunto gerador para decidir se constitui uma base.

No que refere às dificuldades, um grupo evidencia encontrar obstáculos no conceito de base, associando o termo "vetor base" a um conceito imperfeito de "vetor fundamental ou principal" e não ao conceito formal de base de um subespaço vetorial.

No que respeita à tecnologia, embora vista como uma dificuldade por alguns grupos que não conheciam bem o *Excel*, não foi um impedimento para avançarem no seu processo de modelação, tornando-se por fim num meio de ajuda para obter resultados matemáticos, aliás permitido criar vários vetores numéricos gerados por combinações lineares de vetores base. Por sua vez, o único grupo que não utiliza tecnologia consegue também obter resultados matemáticos, embora só um vetor numérico. Neste sentido, a folha de *Excel* constituiu um recurso relevante para que os estudantes pudessem mobilizar mais conhecimentos de álgebra linear e pudessem obter mais senhas bancárias, consequência da facilidade de fazerem cálculos na folha de *Excel* uma vez criado o modelo computacional. Para além disso, a utilização do *Excel* permitiu que alguns dos grupos que desenvolveram rotas não lineares mostrassem competências para obter resultados reais por meio do modelo computacional programado, os quais foram gerados a par dos resultados matemáticos provenientes de distintas combinações lineares de vetores.

No que corresponde à tarefa de antecipação e à sua comparação com os resultados da tarefa de modelação, verificou-se que o conceito de combinação linear e base de um subespaço vetorial não foram mobilizados por um grupo de estudantes na tarefa de modelação, embora isso sim tenha acontecido esta mobilização na tarefa de antecipação. Neste sentido, a maneira como os estudantes definem o modelo matemático com vetores conformados por componentes de números aleatórios não é consequência de carecerem de aprendizagens de conceitos de álgebra linear, mas de optarem por modelos mais simples. Por outro lado, na tarefa de antecipação a maior parte da turma não foi capaz de determinar conjuntos gerados para subespaços de matrizes 2×2, e dois grupos não mobilizaram corretamente o conceito de combinação linear e base de um subespaço vetorial de matrizes 2×2. No entanto, estes grupos revelaram aprendizagens sobre conjuntos geradores, combinação linear e base de subespaços de IR^n, quer na tarefa de antecipação quer na tarefa de modelação, interpretando-se que a tarefa de modelação ajudou a consolidar essas aprendizagens relativas a espaços vetoriais em IR^n, não assim a espaços de matrizes.

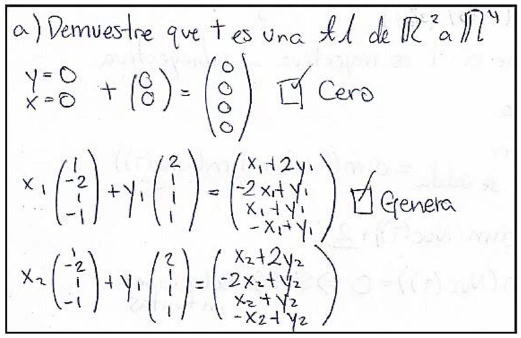
Por último, é de referir que esta foi a primeira tarefa onde se evidenciou maior número de rotas de modelação não lineares desenvolvidas e mesmo um reduzido número de rotas de modelação lineares. A familiaridade com o contexto real de senhas bancárias apresentado na tarefa, juntamente com o convite de utilizar da tecnologia para obter resultados matemáticos, fez com que os estudantes tivessem idas e vindas no processo de modelação, promovendo, consequentemente, uma mobilização de vários conceitos matemáticos associados à unidade de Espaços Vetoriais em quase toda a turma.

6.5 Tarefa TM5: Visita ao Big Ben

6.5.1 Tarefa de antecipação

Na quinta e última tarefa de antecipação (Anexo B5) os estudantes trabalharam sobre o conceito de transformação linear. A tarefa propunha quatro questões referidas a uma transformação $T: IR^2 \to IR^4$, tendo os estudantes de aplicar propriedades de linearidade que definem a uma transformação linear para demonstrar a linearidade da transformação T; mobilizar novamente o conceito de base para determinar uma base para o espaço imagem de T, e mobilizar os conceitos de transformação injetiva, sobrejetiva e bijetiva para determinar se a transformação T é invertível. Nas resoluções escritas dos estudantes foram evidenciadas as aprendizagens anteriores, embora evidenciando-se dificuldades em algumas das questões.

No que se refere à primeira questão, todos os grupos de estudantes mobilizam conhecimentos sobre as propriedades de linearidade que definem a uma transformação linear, nomeadamente verificando que $T(\vec{0}) = \vec{0}$ e $T(\alpha\vec{v} + \vec{w}) = \alpha T(\vec{v}) + T(\vec{w})$, à exceção do grupo de Edite e Tiago, que em vez de demonstrar a propriedade $T(\alpha\vec{v} + \vec{w}) = \alpha T(\vec{v}) + T(\vec{w})$ demonstram que qualquer imagem mediante a transformação T pode ser escrita como uma combinação linear de vetores base do espaço imagem de T, como confirma a resolução do grupo mostrada na figura 6.51.

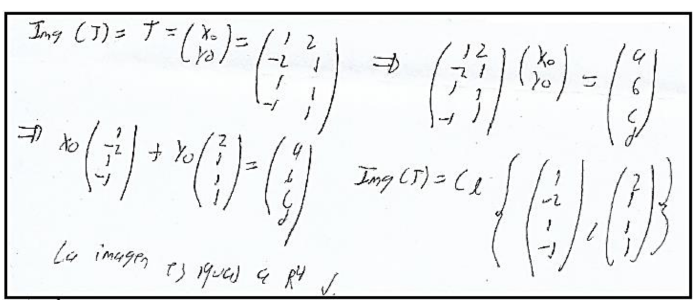


[Demonstra que T é uma transformação linear de $IR^2 \to IR^4$… ■zero… ■gera]

Figura 6.51. Trabalho de antecipação de Edite e Tiago na Q1.

Edite e Tiago provam que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, e em vez de provarem que $T(\alpha\vec{v} + \vec{w}) = \alpha T(\vec{v}) + T(\vec{w})$, demonstram que $T(\vec{v}) = xv_1 + yv_2 = A * \vec{v}$, pelo que se interpreta que estes estudantes mobilizam conhecimentos sobre teoremas ou propriedades de transformações lineares para demonstrar a linearidade da transformação T, evitando assim um maior trabalho, em comparação com os demais estudantes que demonstram a relação $T(\alpha\vec{v} + \vec{w}) = \alpha T(\vec{v}) + T(\vec{w})$.

No que respeita ao conceito de base, oito grupos de estudantes conseguem encontrar uma base para o conjunto imagem da transformação T, evidenciando-se aprendizagens para obter a base solicitada a partir dos vetores coluna da matriz associada à transformação T na base canónica. No caso dos grupos que evidenciam dificuldades, como o grupo de Henrique e Diogo, determinam bem o conjunto base, mas respondem incorretamente, conforme se pode inferir da figura 6.52.

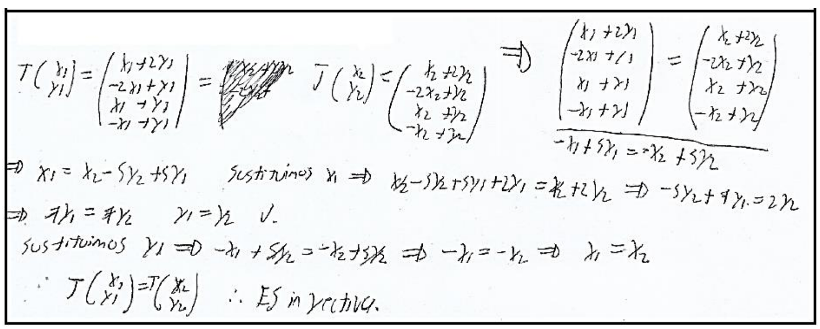


[A imagem é igual a IR^4]

Figura 6.52. Trabalho de antecipação de Henrique e Diogo na Q2.

Henrique e Diogo começam de forma igual aos outros estudantes da turma, tomando as colunas da matriz associada a T nas bases canónicas para posteriormente concluir apropriadamente que tais colunas formam um conjunto gerador de vetores para o conjunto imagem de T. No entanto, contrastando com os restantes grupos que logram encontrar uma base, Henrique e Diogo concluem precipitadamente que o conjunto imagem de T é IR^4, conclusão incorreta que evidencia dificuldades sobre o conceito de base de um subespaço vetorial, nomeadamente que uma base de IR^4 requer quatro vetores.

No que se refere à terceira questão, cinco grupos demonstram ter feito aprendizagens que lhes permitem identificar transformações injetivas e sobrejetivas, e cinco grupos evidenciam dificuldades em algum destes dois conceitos. Entre os grupos que verificam que T é uma transformação injetiva mas não sobrejetiva, destaca-se o grupo de Henrique e Diogo, único grupo que utiliza a definição de função injetiva para identificar que T é injetiva (Figura 6.53), isto é, demonstram que T é injetiva se $T(\vec{v}) = T(\vec{w}) \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.



[∴ É injetiva]

Figura 6.53. Trabalho de antecipação de Henrique e Diogo na Q3.

Os outros estudantes utilizam teoremas sobre dimensões de subespaços para identificar transformações injetivas e sobrejetivas. Entre os grupos que têm dificuldade para mostrar que T é injetiva mas não sobrejetiva está o grupo de Artur e Hugo, que após calcularem apropriadamente uma base para o conjunto imagem da transformação T, respondem na sua resolução escrita:

> Não é sobrejetiva (referindo à transformação T), pois a dimensão do espaço de partida não é igual a dimensão do espaço de chegada, pelo que o conjunto imagem $Img(T)$ não gerará o espaço de chegada. Não é injetiva (referindo-se novamente à transformação T), pois a transformação vai de IR^2 a IR^4, o que não permite que se tenha uma nulidade igual a zero.

Do relatório, pode observa-se que Artur e Hugo recorrem a propriedades ou teoremas de álgebra linear para identificar transformações injetivas e sobrejetivas a partir de dimensões de espaços vetoriais. Embora a afirmação mencionada pelos estudantes de que T é sobrejetiva esteja correta, não é verdadeira a afirmação de que também é injetiva, pois pode verificar-se que a transformação T satisfaz que $Kern(T) = \{\vec{0}\}$, isto é, a nulidade ou núcleo de T fica formado pelo vetor nulo. Interpreta-se que a resposta de Artur e Hugo, sobre uma transformação de IR^2 a IR^4 não poder ter "nulidade igual a zero", remete incorretamente para a ideia de que ambos os espaços, de partida e chegada, tem de ter a mesma dimensão para que T seja injetiva.

Em relação à quarta e última questão da tarefa de antecipação, a turma toda evidencia aprendizagens que lhes permitem determinar que a transformação T não é invertível, justificando com o facto de T não ser injetiva e sobrejetiva simultaneamente, consequentemente aludindo a teoremas que relacionam o facto de uma transformação ser bijetiva se e só se a transformação é invertível.

6.5.2 Competências de modelação e aprendizagens de conceitos

Compreensão e simplificação/estruturação da tarefa

A tarefa de modelação "visita ao Big Ben" (Anexo C5) foi bem compreendida por todos os estudantes, identificando-se uma compreensão da situação problema em três vertentes: 1) geometria de vetores paralelos (cinco grupos); 2) transformações lineares de escala (dois grupos); 3) transformações lineares gerais de $IR^2 \rightarrow IR^2$ (três grupos). Estas formas de compreender a tarefa trazem certas vantagens e desvantagens na fase de trabalhar sobre o modelo matemático. Por um lado, o trabalho com vetores paralelos e transformações de escala levou os estudantes a simplificarem bastante o trabalho matemático do modelo mas a mobilizarem poucos conhecimentos de álgebra linear. Por outro lado, o trabalho com transformações lineares de $IR^2 \rightarrow IR^2$, por meio de um critério algébrico, levou os estudantes a mobilizarem vários conhecimentos associados à unidade de Espaços Vetoriais, embora tenha feito com que os estudantes investissem muito mais tempo no trabalho matemático sobre o modelo.

A maior parte dos estudantes compreende a tarefa em termos de geometria vetorial em IR^2, nomeadamente como uma situação que envolve segmentos orientados (vetores em IR^n) cuja norma muda proporcionalmente para todos os segmentos associados a pontos de uma mesma imagem. Entre estes grupos, encontramos o de Inês e Casimiro, estudantes que, quando questionadas sobre os elementos necessários para resolver a tarefa, mencionam na sua resolução escrita: "é necessário considerarmos o tamanho da imagem original, assim como também o fator que permite transformar a imagem original para a imagem de tamanho desejado". A resposta de Inês e Casimiro evidencia um conhecimento sobre o conceito de escala, referido pelos estudantes como "fator", conceito que posteriormente utilizam para construir um modelo real juntamente com o conceito de vetores paralelos, procurando obter a posição de qualquer vetor na imagem original quando esta imagem é ampliada ou reduzida.

No que concerne aos estudantes que compreendem a situação problema em termos de transformações lineares gerais, isto é, sem referir-se matematicamente a algum tipo especial de transformação, encontramos Mateus e Xavier, que mencionam na sua resolução escrita:

> Devem definir-se vetores que delimitem o espaço com que se está a trabalhar. Assim, deve pensar-se num método para que ao vetor aumentado se possa aplicar uma operação que dê por resultado o vetor reduzido ou vice-versa; pelo que deve recorrer-se a uma transformação linear.

A resposta de Mateus e Xavier evidencia uma mobilização do conceito de transformação linear como objeto matemático que permite relacionar elementos entre dois conjuntos, "o espaço com o que se está a trabalhar", isto é, vetores associados a pontos de uma imagem original e vetores associados a pontos da imagem quando aumentada ou reduzida.

De modo semelhante, mas aludindo ao conceito de escala e transformação linear, encontramos o grupo de Fátima e Heitor, estudantes que compreendem a tarefa em termos de transformações de escala. Para Fátima e Heitor deve ser considerada "a relação entre as distâncias dos pontos das imagens, neste caso aumento da escala, para o que se calcula a expressão analítica de uma transformação linear". Neste sentido, Fátima e Heitor evidenciam compreender que a situação problema pressupõe encontrar distâncias entre dois pontos na imagem original e posteriormente ver quanto aumenta ou diminui essa distância quando a imagem aumenta ou diminui de tamanho, podendo determinar-se uma constante de escala associada às transformações com expressão analítica $T(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$.

Entre os modelos reais baseados na geometria de vetores paralelos, encontramos o modelo de Inês e Casimiro, estudantes que esquematizam o seu modelo através da representação de um quadrado com uma parte a cor (imagem original), conforme observado na figura 6.54.

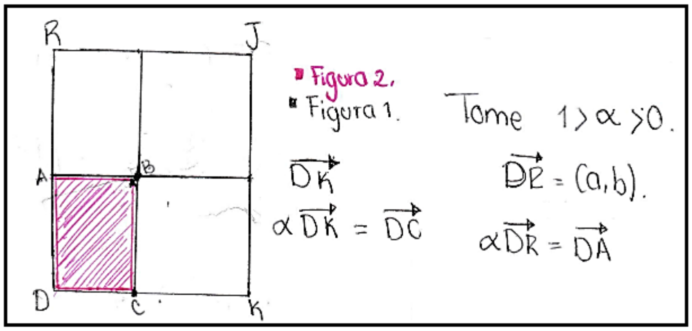


Figura 6.54. Modelo real e matemático, proposto por Inês e Casimiro.

Observando a Figura 6.54, interpreta-se que Inês e Casimiro definem um modelo real para determinar as novas coordenadas dos pontos do quadrado $DRJK$ após ser diminuído seu tamanho e ficar na posição do quadrado $DABC$. Entre as simplificações do modelo real que se observam por parte destes estudantes está o facto de fixarem o vértice inferior esquerdo das imagens como ponto origem para ambos os sistemas cartesianos dos quadrados e representarem as imagens da situação real através desses dois quadrados, $DRJK$ e $DABC$. Inês e Casimiro e os restantes que produziram esta categoria de modelos mobilizam aprendizagens referentes ao conceito de vetor em IR^n e ao conceito de vetores paralelos, reconhecendo que vetores paralelos como $\overrightarrow{DK}$ e $\overrightarrow{DC}$, definidos sobre as hipóteses $\alpha\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC}$, $0 < \alpha < 1$, modificam o tamanho dos vetores originais, mas não o sentido ou a direção do vetor. Os outros estudantes que criam este tipo de modelo real expressam algebricamente como calcular o valor de α a partir dos comprimentos do vetor original e do vetor imagem localizado na imagem amplificada/reduzida, expressando matematicamente a razão de proporcionalidade como $\alpha = \frac{imagem\ aumentada/reduzida}{imagem\ original}$.

No que se refere aos modelos reais baseados em transformações lineares gerais, um dos diálogos realizados durante a discussão entre o grupo de Mateus e Xavier e o investigador descreve a construção do modelo real desenvolvido por este grupo:

> ***Mateus*:** Estávamos pensando nisto, queremos fazer zoom nesta parte do relógio, então esta vai ser nossa imagem original (Figura 6.55: vista reduzida), quer dizer, aqui teremos um conjunto de vetores que, após aplicada uma transformação, o que acontece é aumentar a imagem original. Assim, estávamos pensando em tomar estes vetores (sinalizando vetores na imagem da figura 6.55: vista reduzida), que poderíamos dizer que são nossas pré-imagens, e então aqui teríamos os vetores que poderíamos dizer que são as imagens que a transformação vai dar (sinalizando vetores na figura 6.55: vista ampliada). Assim, a nossa ideia é tomar estas pré-

imagens como uma base, e como eu sei quais vão ser as imagens, logo se obtém uma transformação.
***Investigador*:** Nesse caso, essa base de vetores que mencionas deve estar formada por quantos vetores?
***Mateus*:** Neste caso, como estamos a trabalhar num plano tem de ser de dimensão dois.

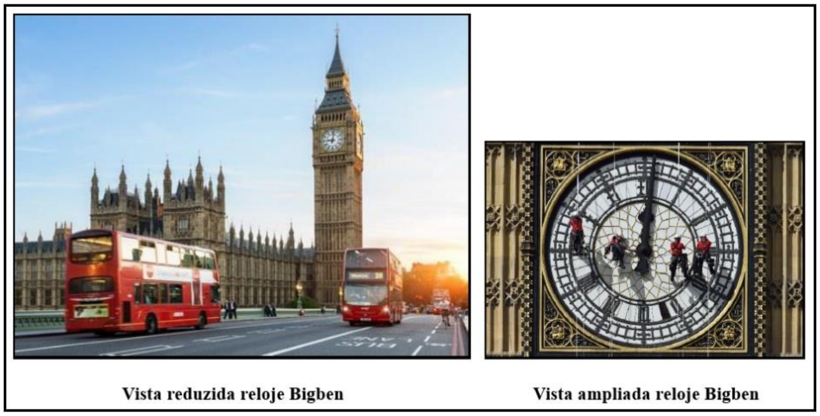


Figura 6.55. Imagens do Big Ben proporcionadas na tarefa TM5.

A resposta de Mateus e Xavier refere um modelo real que mobiliza aprendizagens de álgebra linear para obter a expressão analítica de uma transformação linear através de um teorema de álgebra linear, nomeadamente as imagens de vetores base determinam a expressão analítica duma transformação linear através da relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$. Esta mesma estratégia fundamentada em teoremas de transformações lineares é utilizada pelos outros dois grupos que adotam esta perspetiva de modelos reais, evidenciando-se serem os grupos que mobilizam mais aprendizagens de álgebra linear, entre elas o conceito de transformação linear como função de $IR^n \to IR^n$, propriedades de linearidade e teoremas associados a transformações lineares, o conceito de base de um subespaço vetorial e operações elementares sobre matrizes.

No que se refere aos grupos com modelos reais baseados em transformações de escala, as simplificações dos estudantes incluem definir primeiramente o ponto inferior esquerdo da imagem como a origem do referencial cartesiano, para posteriormente definir variáveis e parâmetros para os segmentos orientados da imagem original e recorrer ao modelo matemático $T(x, y) = \alpha(x, y)$, modelo associado a transformações de escala. O valor de α é comentado por grupos como Marcelino e Estela, aludindo à transformação geométrica que sofre a imagem original: "a imagem aumentará ou diminuirá de tamanho, dependendo de $0 < \alpha < 1$ (diminuição) ou $1 < \alpha$ (aumento)". Assim, deduz-se que os modelos reais utilizados pelos grupos que mobilizam aprendizagens baseados em geometria de vetores e os grupos que mobilizam aprendizagens baseadas em transformações de escala apresentam basicamente a mesma estrutura, diferenciando-se só pela forma conceptual como é formada a nova imagem: sob o conceito de vetor paralelo ou o conceito de transformação linear.

Matematização do modelo e trabalho sobre o modelo matemático

Toda a turma revela competências para matematizar o seu modelo real, embora nem todos cheguem a trabalhar sobre o modelo matemático. As resoluções escritas evidenciam que só um grupo de estudantes mostra competências para trabalhar matematicamente sobre modelos matemáticos da forma $\alpha\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$, baseados na geometria de vetores; e só um grupo de estudantes manifesta competências para trabalhar matematicamente sobre modelos matemáticos da forma $T(x, y) = \alpha(x, y)$, baseados em transformações lineares. Ambos tipos de modelos são trabalhados utilizando o *GeoGebra* para encontrar o valor do parâmetro α, conforme evidenciado a partir das figuras 6.56a, 6.56b, 6.57.

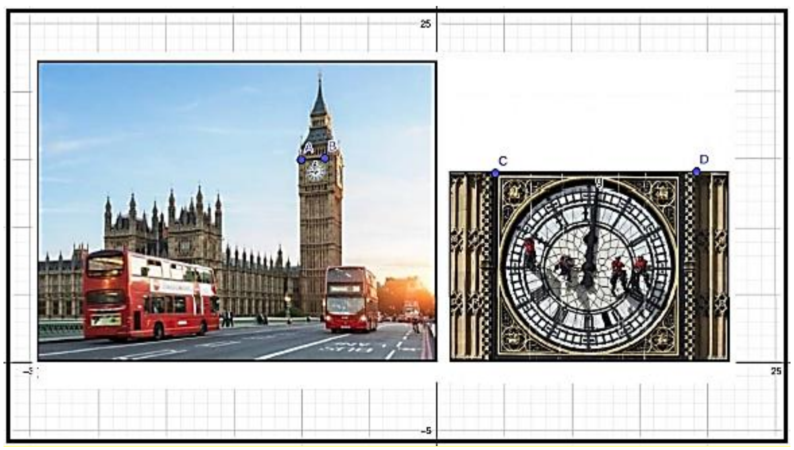
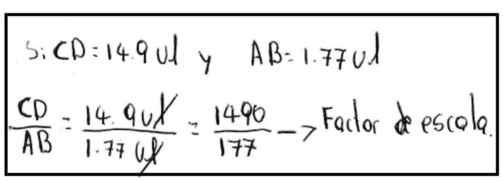
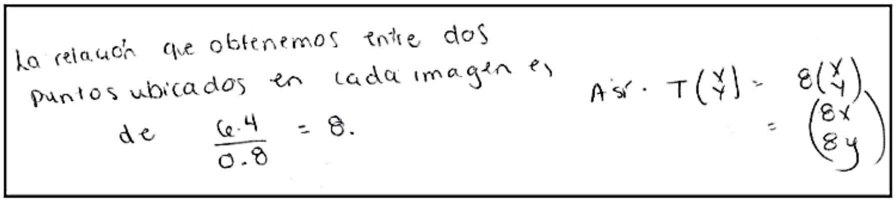


Figura 6.56a. Modelo computacional produzido no GeoGebra por Henrique e Diogo.



[$\frac{1490}{177}$ → Fator de escala]

Figura 6.56b. Resultados matemáticos obtidos por Henrique e Diogo.


La relación que obtenemos entre dos puntos ubicados en cada imagen es de $\frac{6.4}{0.8} = 8.$ Así. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8x\\8y\end{pmatrix}$

[A relação que obtemos entre dois pontos localizados em cada imagem é de $\frac{6.4}{0.8} = 8$. Assim, $T(x, y) = 8(x, y)$]

Figura 6.57. Resultados matemáticos obtidos por Fátima e Heitor.

Na figura 6.56a pode observar-se parte do trabalho realizado por Henrique e Diogo no *GeoGebra*, localizando os pontos A e B nos vértices superiores da figura na escala reduzida (lado esquerdo), e os pontos homólogos C e D da figura na escala aumentada (lado direito). Henrique e Diogo, tal como Fátima e Heitor, aproveitam as ferramentas do *GeoGebra* para determinar as distâncias $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ entre pontos homólogos para posteriormente calcularem uma constante de proporcionalidade α que permita saber o aumento da imagem (Figura 6.55: vista ampliada) em relação à imagem original (Figura 6.55: vista reduzida). No caso de Henrique e Diogo as medidas obtidas com o *GeoGebra* para dois pontos fixos correspondem a 14.9 unidades de medida na figura ampliada e 1.77 unidades de medida na figura reduzida, conforme observado na figura 6.56b, resultando numa constante de proporcionalidade $\alpha = \frac{14.9}{1.77} = 8.42$. Desenvolvendo o mesmo raciocínio, Fátima e Heitor obtêm uma constante de proporcionalidade de $\alpha = \frac{6.4}{0.8} = 8$. Assim, observa-se que ambas as constantes obtidas por diferentes grupos diferem no valor numérico, mas estão próximas do valor inteiro 8. De facto, seria esperado que diferentes grupos obtivessem diferentes valores da razão de semelhança, todas à volta do valor 8, pois as medições que os estudantes fazem com o *GeoGebra* dependem da exatidão com que marcam os pontos A, B, C, D nas imagens reduzida e ampliada, e sobretudo na figura reduzida, onde existe maior possibilidade de erro devido ao tamanho do relógio na imagem.

No que se refere aos modelos matemáticos baseados em transformações lineares, usando teoremas da álgebra linear, os três grupos que entram nesta categoria utilizam o modelo matemático $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, visando obter uma expressão analítica que permita encontrar a posição $\vec{w}$ de um segmento orientado na imagem modificada a partir do segmento orientado homologo $\vec{v}$ da imagem original. Embora os três grupos tenham proposto bases

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de IR^2, só os dois grupos que utilizam o *GeoGebra* conseguiram trabalhar no modelo matemático até obter resultados matemáticos, utilizando-os para expressar $T(\vec{v})$ em termos das componentes de $\vec{v}$. Entre estes grupos estão Mateus e Xavier, cujos resultados obtidos com o *GeoGebra* e resultados matemáticos finais são mostrados nas figuras 6.57a, 6.57b).

$$\begin{pmatrix} 0.72 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.67 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 7.95 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5.3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.72 & 0 & x \\ 0 & 0.67 & y \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/72 \\ 0 & 1 & y/0.67 \end{array}\right)$$

Figura 6.58a. Resultados computacionais e trabalho matemático produzido por Mateus e Xavier.

$$x/_{0.72} \begin{pmatrix} 7.95 \\ 0 \end{pmatrix} + y/_{0.67} \begin{pmatrix} 0 \\ 5,3 \end{pmatrix}$$

Figura 6.58b. Resultados matemáticos obtidos por Mateus e Xavier.

Mateus e Xavier, tal como o grupo de Artur e Hugo, utilizam o *GeoGebra p*ara importar a figura 6.55 para a vista gráfica do *GeoGebra*, localizando posteriormente coordenadas de vetores, visando utilizar estas coordenadas para obter a expressão analítica de uma transformação linear.

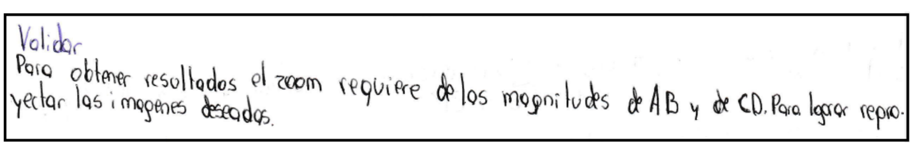
Da figura 6.58a é possível observar que Mateus e Xavier localizam os vetores $\vec{v}_1 = (0.72, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 0.67)$ na imagem reduzida do Big Ben e os correspondentes vetores homólogos na imagem ampliada, aliás os vetores $T(\vec{v}_1) = (7.95\ ,0)$ e $T(\vec{v}_2) = (0, 5.3)$. Posteriormente formam uma matriz com os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, reduzindo-a até obter a matriz identidade e o vetor $\left(\frac{x}{0.72}, \frac{y}{0.67}\right)$, é interpretado como o vetor de coordenadas de algum vetor $\vec{v}$ pertencente ao subespaço de pontos da imagem reduzida na base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Este processo matemático evidencia que Mateus e Xavier escolhem os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sabendo que são vetores paralelos aos vetores canônicos de IR^2, e, portanto, vetores que formam uma base para o subespaço de pontos da imagem reduzida. Mateus e Xavier obtêm o vetor $\left(\frac{x}{0.72}, \frac{y}{0.67}\right)$ com a intenção de expressar a relação matemática $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$ em termos das componentes de $\vec{v}$, o que se infere da expressão analítica que obtêm, mostrada na figura 6.58b, ou seja, deduz-se que $(a, b) = \left(\frac{x}{0.72}, \frac{y}{0.67}\right)$. Assim, Mateus e Xavier recorrem a um modelo matemático previamente construído, $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, sendo capazes de desenvolver competências que lhes permitissem trabalhar matematicamente sobre o modelo para obter um modelo matemático específico que se ajuste à situação problema.

Interpretação e validação de resultados

Os dois grupos de estudantes que desenvolvem modelos baseados em transformações lineares a partir da relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$ evidenciam competências para construir e trabalhar no modelo matemático, mobilizando maior quantidade de aprendizagens que os restantes estudantes. No entanto, o tempo investido no trabalho matemático sobre estes modelos poderá ter comprometido o tempo que tiveram para interpretarem e validarem resultados na situação real, pois ambos grupos de estudantes não evidenciam ter realizado estes processos.

Na turma, nenhum grupo chegou a validar resultados reais e só o grupo de Henrique e Diogo chegou a interpretar resultados matemáticos quando mencionam que "a partir do valor $\frac{1490}{177} \approx 8.41$ deduz-se que AB cabe 8.41 vezes em CD". A interpretação de resultados de Henrique e Diogo considera os valores de 1490 e 177, medidas de distâncias entre pontos localizados na imagem original e na imagem transformada, evidenciando-se que os estudantes sabem comunicar no contexto da tarefa o valor da razão obtida a partir do quociente destas distâncias.

Henrique e Diogo tentam também validar o seu modelo, embora não apropriadamente, conforme observado na Figura 6.59.



[*Validar*: para obter resultados o zoom requer as magnitudes de AB e CD. Para conseguir projetar as imagens desejadas]

Figura 6.59. Validação de resultados argumentada por Henrique e Diogo.

A argumentação de Henrique e Diogo não evidencia validação de resultados, mas uma argumentação de compreensão e estruturação da situação problema. Por outro lado, a palavra “validar” que os estudantes escrevem antes da argumentação que apresentam indica que foram o único grupo que tentou seguir a estrutura das fases do ciclo de modelação matemática. Desta forma, para além da mobilização de aprendizagens de conceitos matemáticos de álgebra linear, Henrique e Diogo consolidam dentro das suas aprendizagens a estrutura do processo “ideal” de modelação matemática, aspeto que ilustra a importância formativa que o trabalho desenvolvido ao longo da experiência de ensino teve para estudantes como Henrique e Diogo, não obstante as lacunas verificadas nesta tarefa em validar resultados.

6.5.3 Rotas de modelação

Esta última tarefa de modelação evidenciou a presença de quatro categorias de rotas de modelação: 1) rotas não lineares que terminam no mundo matemático (G8); 2) rotas não lineares que terminam no resto do mundo (G10); 3) rotas lineares que terminam no mundo matemático (G3, G5, G6, G9); e 4) rotas lineares que terminam no resto do mundo (G1, G2, G4, G7).

Como exemplo, analisa-se uma rota não linear (G8) e uma rota linear (G4), sendo rotas que se assemelham por transitarem ambas pelo mundo da tecnologia e que se diferenciam pelo tipo de modelo matemático utilizado e por terminarem em diferentes fases do ciclo de modelação, nomeadamente: utilização de modelos matemáticos baseados em transformações lineares cujos processos de modelação terminam no mundo matemático (G8); e utilização de modelos matemáticos baseados em geometria de vetores cujo processo de modelação termina no resto do mundo (G4).

Artur e Hugo constituem um dos grupos que constroem rotas não lineares e utilizam transformações lineares e o único grupo cuja rota termina no mundo matemático com a obtenção de resultados. A rota de modelação de Artur e Hugo é mostrada na figura 6.60

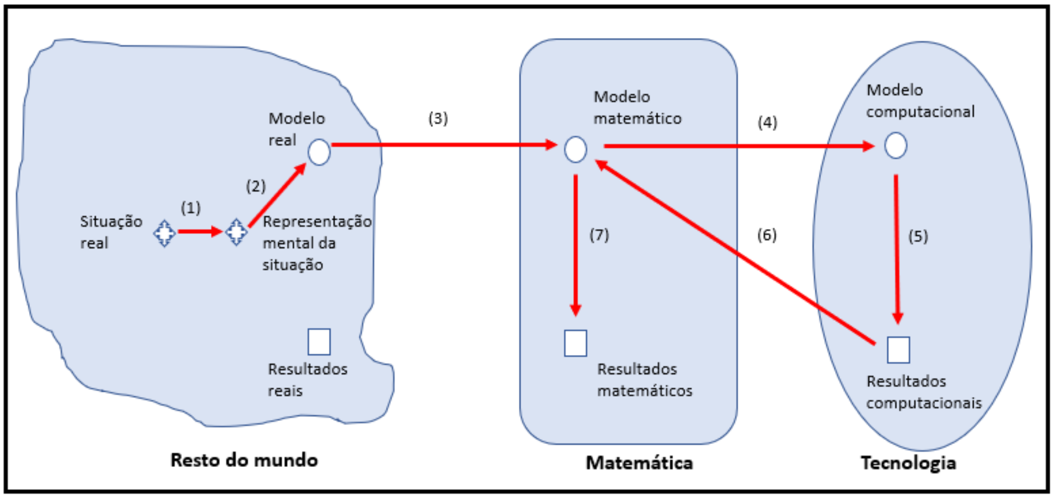
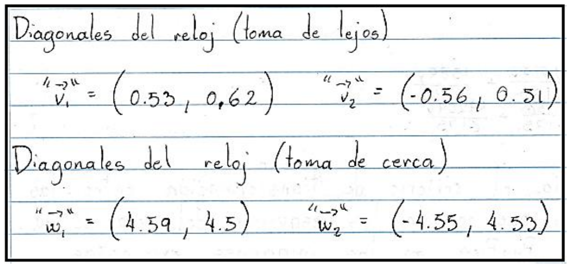


Figura 6.60. Rota de modelação desenvolvida por Artur e Hugo.

O processo de modelação de Artur e Hugo começa com a compreensão da tarefa no mesmo sentido que os outros quatro grupos, isto é, os aumentos ou reduções de tamanho de uma imagem podem ser vistos como transformações lineares (P1). Todavia, o modelo real de Artur e Hugo é diferente dos demais modelos baseados em transformações lineares. Eles definem vetores base não na direção dos vetores canónicos de IR^2, mas na direção das "diagonais definidas pelos vértices do relógio da torre do Big Ben nas imagens fornecidas" (P2), referindo-se às imagens reduzida e ampliada do relógio fornecidas na tarefa (Figura 6.57). A partir daqui, Artur e Hugo recorrem à relação matemática $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, aprendida em aulas anteriores (P3), optando por trabalhar nesse modelo com a ajuda do *GeoGebra* para determinarem uma base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e os respetivos vetores imagem $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$ (P4).

Artur e Hugo começam o seu trabalho com tecnologia da mesma forma que o resto dos grupos que utilizam o *Geogebra*, localizando dois segmentos orientados na imagem reduzida e os respetivos segmentos orientados na imagem aumentada para assim identificar coordenadas (P5), obtendo os resultados observados na figura 6.61a.



Diagonales del reloj (toma de lejos)

“$\vec{v}_1$” = (0.53, 0,62)   “$\vec{v}_2$” = (-0.56, 0.51)

Diagonales del reloj (toma de cerca)

“$\vec{w}_1$” = (4.59, 4.5)   “$\vec{w}_2$” = (-4.55, 4.53)

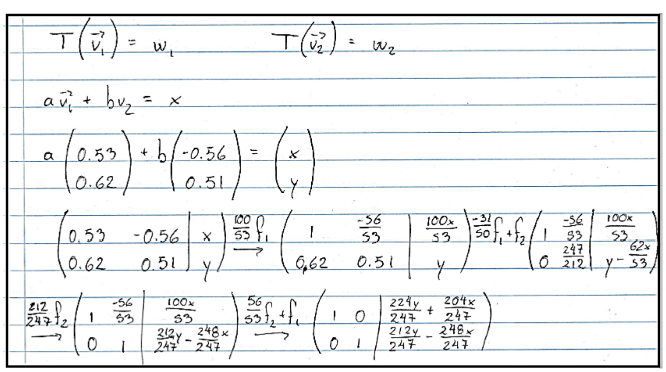
[Diagonais do relógio (imagem em escala reduzida) …

Diagonais do relógio (imagem em escala aumentada)]

Figura 6.61a. Resultados computacionais obtidos por Artur e Hugo.

Olhando para os segmentos orientados $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, interpreta-se que $\vec{v}_1$ corresponde à diagonal do relógio que vai do vértice inferior esquerdo para o vértice superior direito, enquanto $\vec{v}_2$ representa a diagonal do relógio que vai do vértice inferior direito para o vértice superior esquerdo. Dado que os vértices do relógio formam um retângulo, as diagonais deveriam ter o mesmo comprimento, mas calculando as normas de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, isto é, $\|\vec{v}_1\| = 0.7574$ e $\|\vec{v}_2\| = 0.8235$, obtêm valores diferentes. O facto de estas normas de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ não serem iguais, não é um indicativo de que Artur e Hugo fizeram cálculos errados, mas depende da exatidão com que marcam os pontos no *GeoGebra*, pois, obviamente, o valor de $\|\vec{v}_1\|$ é próximo de $\|\vec{v}_2\|$.

Uma vez obtidos resultados computacionais com o *GeoGebra*, Artur e Hugo voltam ao modelo matemático $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$ (P6), visando obter agora os valores do vetor de coordenadas (a, b) em termos das componentes de $\vec{v} = (x, y)$. Pretendem assim obter a expressão analítica da transformação linear associada à situação problema. O trabalho matemático desenvolvido por Artur e Hugo para obter esta expressão analítica (P7), que conduz a um modelo matemático específico, é mostrado na figura 6.61b.



$T(\vec{v}_1) = w_1 \qquad T(\vec{v}_2) = w_2$

$a\vec{v}_1 + bv_2 = x$

$a\begin{pmatrix}0.53\\0.62\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-0.56\\0.51\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c}0.53 & -0.56 & x\\0.62 & 0.51 & y\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{100}{53}f_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{-56}{53} & \frac{100x}{53}\\0{,}62 & 0.51 & y\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-31}{50}f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{-56}{53} & \frac{100x}{53}\\0 & \frac{247}{212} & y-\frac{62x}{53}\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\frac{212}{247}f_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{-56}{53} & \frac{100x}{53}\\0 & 1 & \frac{212}{247}y-\frac{248x}{247}\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{56}{53}f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{224y}{247}+\frac{204x}{247}\\0 & 1 & \frac{212y}{247}-\frac{248x}{247}\end{array}\right)$

Figura 6.61b. Trabalho matemático desenvolvido por Artur e Hugo.

O trabalho matemático de Artur e Hugo está baseado num conjunto de aprendizagens que supõe primeiramente determinar uma base de vetores para o espaço vetorial do domínio, neste caso $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, seguido de determinar os respetivos vetores imagem $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$ do contradomínio, para posteriormente expressar qualquer vetor $T(\vec{v})$ em termos das componentes de $\vec{v}$ utilizando as propriedades de linearidade das transformações lineares, isto é $\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \Longrightarrow T(\vec{v}) = T(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$.

Artur e Hugo executam operações sobre linhas na matriz formada pelos vetores da base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ até poderem expressar o vetor de coordenadas (a, b) associado à dita base em termos das componentes de $\vec{v}$, este último representando um segmento orientado da imagem original. Após substituírem os valores $T(\vec{v}_1) = (4.59, 4.5)$, $T(\vec{v}_2) = (-4.55, 4.53)$ (Figura 6.61a) e $a = \frac{204x+224y}{247}$, $b = \frac{-248x+212y}{247}$ (Figura 6.61b) na relação matemática $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, Artur e Hugo obtêm a expressão analítica da transformação linear procurada, como se observa na seguinte figura:

$$\left(\frac{204x}{247} + \frac{224y}{247}\right)\left(4.59\ ,\ 4.5\right) + \left(\frac{-248x}{247} + \frac{212y}{247}\right)\left(-4.55\ ,\ 4.53\right)$$

$$T = \begin{cases} \frac{51619x}{6175} + \frac{1589y}{6175} \\ \frac{-5136x}{6175} + \frac{49209y}{6175} \end{cases}$$

Figura 6.61c. Modelo e resultados matemáticos obtidos por Artur e Hugo.

Os resultados matemáticos obtidos por Artur e Hugo correspondem a um modelo particular do modelo matemático $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, nomeadamente um modelo que se adapta à situação problema das imagens do Big Ben, para o qual mobilizaram várias aprendizagens de álgebra linear já referidas.

No que se refere às rotas lineares, o grupo de Henrique e Diogo entram nesta categoria, sendo o único grupo de estudantes que interpretam resultados, conforme já mencionado. A rota de modelação deste grupo de estudantes é mostrada na figura 6.62.

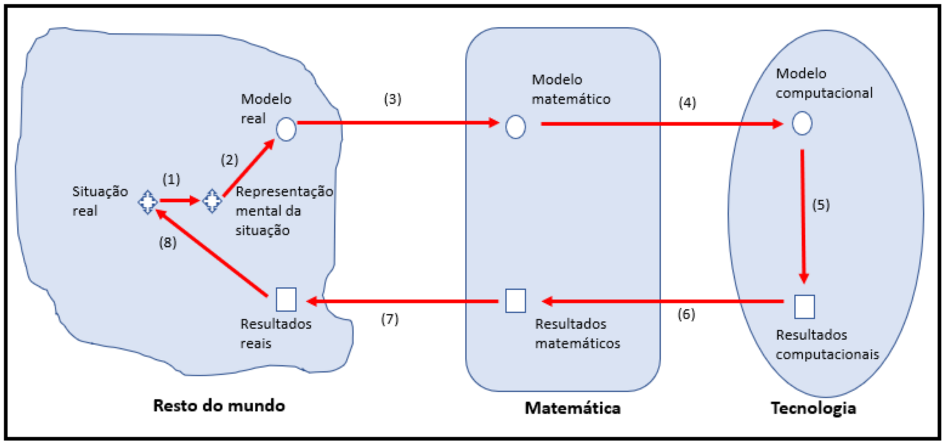


Figura 6.62. Rota de modelação desenvolvida por Diogo e Henrique.

Inicialmente, Henrique e Diogo associam a situação problema com o aumento de magnitude de um vetor (P1), mencionando na sua resolução escrita que: “o zoom é um jogo de escalas, pelo que se pode determinar dois vetores, um que corresponda à imagem original e outro que seja medido para o valor que deseja obter”. Neste sentido, Henrique e Diogo compreendem que o valor associado ao “zoom” duma câmara fotográfica pode determinar-se através da razão obtida entre as magnitudes de dois vetores. A partir daqui, os estudantes tomam a decisão de definir vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ para medir a largura do Big Ben em ambas as imagens (P2), criando assim um modelo real, conforme evidencia o diálogo a seguir:

> ***Investigador*:** Então, que têm feito por aqui?
> ***Henrique*:** Nós estamos a pensar medir a distância que existe daqui até aqui (sinalizando dois pontos na imagem com menor escala, na Figura 6.55) e depois a distância daqui até aqui (sinalizando os pontos homólogos na imagem com maior escala, na Figura 6.55), então daqui podemos obter um fator de aumento.

Do diálogo interpreta-se que o modelo real de Henrique e Diogo está baseado na geometria de vetores. Para a construção do modelo matemático (P3), Henrique e Diogo fazem-se a si mesmos a pergunta “quantas vezes cabe $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{CD}$?”, respondendo com a razão $\alpha = \frac{CD}{AB}$, o que dá origem ao modelo matemático $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$. Para encontrar o valor numérico de α e, portanto, resultados matemáticos que lhes permitam saber a constante de proporcionalidade entre as imagens, Henrique e Diogo utilizam o *GeoGebra* (P4), localizando pontos A, B, C, D sobre a imagem na vista gráfica do *GeoGebra* (Figura 6.56a), conforme o resto de grupos que também utilizam a tecnologia.

Com ajuda do *GeoGebra* Henrique e Diogo obtêm os valores $AB = 1{,}77$ e $CD = 14{,}9$ (P5), podendo assim calcular posteriormente o valor de $\alpha = 8{,}41$ (P6), correspondente à razão de proporcionalidade entre imagens do relógio. Para além disso, Henrique e Diogo revelam competências para interpretar esse valor matemático (P7), na sua frase "para que $\overrightarrow{AB}$ tenha o tamanho de $\overrightarrow{CD}$, o valor do zoom deveria ser $8{,}41$", isto é, eles evidenciam obter resultados reais que aludem a um fator de escala de aumento, conforme esperado. Finalmente, Diogo e Henrique dão a sua resposta no contexto da situação problema (P8), mas sem validar os seus resultados reais.

Em geral, os três grupos de rotas de modelação identificadas apresentam as seguintes características:

a) <u>Rotas não lineares</u> (G8, G10): Os modelos matemáticos construídos pelos grupos com este tipo de rota correspondem a modelos aprendidos previamente na disciplina de Álgebra Linear, nomeadamente modelos baseados na relação matemática $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$. As rotas terminam no mundo matemático com a obtenção de resultados matemáticos (G8) ou na situação real com a apresentação dos resultados reais (G10). Ambas as rotas transitam pelo mundo tecnológico, utilizando o *GeoGebra* para encontrar coordenadas de vetores que posteriormente são utilizadas para obter uma expressão analítica de uma transformação linear. Assim, as rotas destes estudantes percorrem a fase do modelo matemático em duas ocasiões, uma primeira vez na escrita da relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$ e uma segunda vez após obterem resultados computacionais, objetivando expressar $T(\vec{v})$ em termos das componentes de $\vec{v}$ no contexto da situação problema. As rotas de ambos os grupos são idênticas, diferenciando-se só por uma transição a mais desenvolvida por G8, a transição dos resultados matemáticos para a situação real.

b) <u>Rotas lineares</u> (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9): Os grupos que desenvolvem rotas lineares evidenciam modelos que estão baseados em geometria de vetores (G1, G3, G4, G6, G9), transformações lineares de escala (G2, G7), ou transformações lineares recorrendo à relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$ (G5). As rotas destes estudantes terminam no modelo matemático (G3, G5, G6, G9), ou na situação real (G1, G2, G4, G7), evidenciando-se que só dois grupos são capazes de obter resultados matemáticos

(G4, G7), aqueles cujas rotas transitam pelo mundo da tecnologia, utilizando o *GeoGebra* para obter razões de semelhança.

6.5.4 Síntese

Os resultados desta última tarefa, chamada “visita al Big Ben” evidenciaram um maior desenvolvimento de rotas lineares com apenas dois grupos a realizar rotas não lineares. Todos os estudantes evidenciam compreender a situação problema da tarefa, reconhecendo que a mudança de escala em imagens pode ser tratada como um tipo de transformação geométrica que sofrem os vetores associados a cada um dos pontos da imagem original. Os estudantes que percorrem rotas não lineares evidenciam competências para simplificar a situação problema em maior medida do que os estudantes que percorrem rotas lineares, pois os modelos utilizados por estes últimos são baseados no conceito simples de razão de proporcionalidade. Em contrapartida, os estudantes com rotas não lineares optam por construir o modelo matemático utilizando teoremas da álgebra linear sobre transformações lineares, nomeadamente a relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, evidenciando identificar variáveis-chave nesta relação para determinar a expressão analítica da transformação que descreve a mudança de escala entre imagens. Na turma, só quatro grupos evidenciam competências para trabalhar matematicamente no modelo matemático e obter resultados matemáticos: dois grupos que percorrem rotas lineares e dois grupos que percorrem rotas não lineares. As rotas de modelação destes quatro grupos destacam-se por transitar pelo mundo da tecnologia, utilizando o *GeoGebra* para obter coordenadas de vetores associados a pontos da figura dada e/ou distâncias entre estes pontos. Contudo, só um grupo de estudantes chega a interpretar resultados matemáticos, comunicando apropriadamente o significado da razão obtida como o valor correspondente a uma ampliação da imagem original. A validação de resultados revelou-se, uma vez mais, como uma das competências em que os estudantes mostram lacunas, evidenciando-se tentativas incorretas de validação do modelo matemático, o que reforça a dificuldade que os estudantes frequentemente têm no que diz respeito a esta competência de modelação.

No que toca às aprendizagens, evidencia-se que todos os estudantes chegam a mobilizar o conceito de vetor em IR^2 como segmento orientado e alguns o conceito de transformação linear. Os grupos que evidenciam mobilizar mais aprendizagens de álgebra linear correspondem aos estudantes que desenvolvem rotas não lineares, cujo modelo matemático esteve fundamentado na relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$, referente a teoremas de transformações lineares aprendidos pelos estudantes anteriormente. Várias aprendizagens foram mobilizadas por estes grupos com rotas não lineares a partir desse tipo de modelo, nomeadamente: 1) utilização do conceito de vetor em IR^2 para determinar a posição de pontos na figura; 2) propriedades de transformações lineares para encontrar a expressão analitica de um modelo matemático ajustado ao contexto da situação problema da tarefa; 3) o conceito de vetor de coordenadas e base de um subespaço vetorial, como parâmetros de construção do modelo matemáticos; 4) operações elementares sobre matrizes, para obter vetores de coordenadas em função de componentes de um vetor posição; e 5) teoremas sobre transformações lineares, mediante os quais as imagens de vetores base determinam a expressão analítica duma transformação linear.

No que respeita aos grupos com rotas lineares, a maioria mobilizou conceitos de vetores paralelos e transformações de escala, partindo do conceito de proporcionalidade para criar modelos matemáticos. Poucos destes estudantes chegam a transitar pela tecnologia, pelo que a maior parte não consegue encontrar o valor da constante de proporcionalidade. Os dois grupos que o fazem utilizam o *GeoGebra* para determinar a distância entre dois pontos localizados numa imagem e a distância entre os correspondentes pontos na imagem modificada noutra escala, realizando o quociente entre ambas para obter a razão. O único grupo que mobiliza a relação $T(\vec{v}) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2)$ evidencia reconhecer que essa relação pode ser utilizada para encontrar a expressão analítica de uma transformação linear, considerando a base canónica de IR^2 como base do subespaço vetorial associado ao conjunto de pontos da imagem original. No entanto, este único grupo de estudantes não chega a calcular os valores $T(\vec{v}_1)$ e $T(\vec{v}_2)$ nem a escrever o vetor (a, b) em termos das componentes de $\vec{v}$, pelo que, por contraponto às rotas não lineares, este grupo só chega a mobilizar as aprendizagens 1) e 3), dificuldade que pode estar associada a não terem utilizado tecnologia para encontrar os valores $T(\vec{v}_1)$ e $T(\vec{v}_2)$, como fizeram os grupos de estudantes que percorreram rotas não lineares.

No que se refere à tecnologia, o desenvolvimento de competências para trabalhar o modelo matemático com o *GeoGebra* foi indispensável para que os estudantes pudessem ir mais longe na construção de um modelo matemático e obter resultados matemáticos, pelo que a tecnologia resultou numa necessidade mais que numa oportunidade para trabalhar no modelo matemático. Vários estudantes foram capazes de explorar ferramentas do *GeoGebra* autonomamente e perceberam no *GeoGebra* um meio para criar um sistema de coordenadas cartesianas e determinar, a partir da importação da imagem para a janela gráfica, as coordenadas específicas de alguns pontos necessários para obter resultados matemáticos com o modelo criado.

No que se refere à relação entre os resultados da tarefa de antecipação e esta última tarefa de modelação, foram identificados grupos de estudantes que na tarefa de antecipação evidenciaram dificuldade com o conceito de base de um subespaço vetorial. Esses grupos constroem modelos matemáticos baseados em geometria de vetores, desenvolvendo de certa forma modelos mais simples em relação aos modelos baseados em transformações lineares com vetores base. Neste sentido, aqueles estudantes que evidenciam dificuldades com o conceito de base parecem evitar construir modelos matemáticos baseados em transformações lineares, onde é necessário mobilizar o conceito de base de um subespaço vetorial. Portanto, esta última tarefa de modelação não levou a que os estudantes superassem as dificuldades iniciais encontradas na tarefa de antecipação, mas o contexto foi ideal para que os estudantes que conseguiram obter resultados matemáticos reconhecessem a importância do recurso tecnológico no processo de modelação. Consequentemente a tarefa ajudou a que certos estudantes desenvolvessem outras competências de modelação, em particular, a de trabalhar no modelo matemático com recurso à tecnologia.

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DE CONTRIBUTOS DA EXPERIÊNCIA DE ENSINO: PERSPETIVAS DOS ESTUDANTES

Neste capítulo são analisadas as respostas dos estudantes quando questionados sobre os aspetos da experiência de ensino que valorizam e reconhecem como contributos para a sua aprendizagem, e dificuldades que enfrentaram. Começo por analisar os contributos e dificuldades referentes aos conhecimentos de álgebra linear trabalhados durante a experiência de ensino, para a formação académica do estudante. Posteriormente, reflito sobre os contributos das tarefas de modelação para trabalhar conceitos matemáticos na disciplina de Álgebra Linear e dificuldades que os estudantes experienciaram neste trabalho. Finalizo, referindo contributos do recurso à tecnologia para o trabalho sobre conceitos de álgebra linear em ambientes de modelação e dificuldades dos estudantes com os recursos tecnológicos utilizados durante a experiência de ensino.

7.1 Contributos das aprendizagens de Álgebra Linear para a formação académica dos estudantes

Três contributos positivos ou vantagens são mencionados pelos estudantes no que diz respeito à aprendizagem de conceitos de álgebra linear lecionados durante a experiência de ensino (QA) (Anexo D1): facilitar a resolução de problemas matemáticos (44%); promover o pensamento lógico-matemático (17%); e facilitar ferramentas matemáticas para o curso do estudante (56%). Como observado nas percentagens de resposta associadas a cada contributo referido, a maior parte dos estudantes reconhece o benefício da aprendizagem da álgebra linear para o seu curso de formação. A maior parte destes estudantes dá exemplos específicos de como os conhecimentos adquiridos os ajudam nos seus cursos, mencionando respostas como: "é útil para resolver problemas relacionados com química analítica, cinética química, entre outros" (E16, QA); "é útil para calcular erros geodésicos" (E14, QA); "a compreensão de temas como geometria vetorial é fundamental na hora de entender física clássica" (E13, QA). Os restantes estudantes afirmam que o conhecimento adquirido em Álgebra Linear irá ajudá-los no curso, ainda que não saibam como, dando respostas como a seguinte: “ainda não sei muito do meu curso, mas sei que terá grandes utilidades” (E18, QA).

A partir das respostas anteriores evidencia-se que independentemente da experiência dos estudantes com conceitos de álgebra linear, prévia à sua frequência da disciplina MA1004, após a experiência de ensino eles reconhecem que as aprendizagens de álgebra linear serão úteis para os seus respetivos cursos de formação. No entanto, aqueles que estão nos primeiros anos dos cursos e não tiveram contacto com álgebra linear antes da experiência de ensino, não têm ainda uma ideia de como podem utilizar o que aprenderam nos seus respetivos cursos. O facto de serem mais os estudantes que conseguem dar exemplos de como aplicar a álgebra linear nos seus cursos, parece resultar do trabalho realizado com as tarefas de modelação. Efetivamente, as respostas ao questionário (QF) (Anexo D2) mostram que antes da experiência de ensino só 6% dos estudantes sabiam relacionar conhecimentos de álgebra linear com situações da vida quotidiana, possivelmente estudantes repetentes na disciplina ou aqueles que tiveram um primeiro contacto com álgebra linear no ensino secundário. Após a experiência de ensino, 56% dos estudantes responderam saber relacionar conhecimentos de álgebra linear com situações da vida quotidiana (QF), evidenciando-se, pois, o papel dos problemas em contextos reais proporcionado pelas tarefas de modelação.

No que se refere a facilitar a resolução de problemas matemáticos, respostas como “criar uma análise ou maneira de resolver os problemas mais eficiente” (E17, QA) e “ajuda a resolver conflitos de maneira mais simples e eficaz” (E3, QA), mostram que para estes estudantes os problemas matemáticos são resolvidos com maior facilidade utilizando os conhecimentos de álgebra linear aprendidos durante a experiência de ensino.

Outras respostas, como por exemplo, “ajuda no desenvolvimento da visualização espacial e na lógica-matemática, dois aspetos essenciais em Física” (E13, QA), evidenciam que o trabalho envolvendo o formalismo e a abstração associado a certos conceitos de álgebra linear permite que alguns estudantes desenvolvam competências matemáticas que lhes facilita o pensamento lógico-matemático requerido noutras áreas dos seus cursos de formação, permitindo superar esta frequente dificuldade. No entanto, conforme observado, é baixa a percentagem de estudantes que referem este aspeto lógico-matemático como uma vantagem para a sua formação académica, o que parece não deixar de ser uma dificuldade para a maioria dos estudantes da turma.

De facto, a maior parte dos estudantes afirma que a Álgebra Linear é uma disciplina difícil, referindo três dificuldades associadas à aprendizagem de conhecimentos de álgebra linear: a abstração dos conceitos matemáticos (83%); a quantidade excessiva de conteúdos matemáticos que constituem o programa da disciplina (12%); e a necessidade que sentem de conhecimentos prévios de outras disciplinas antes de trabalhar conceitos de álgebra linear (6%). Como se observa nas frequências associadas a cada dificuldade referida, a abstração dos conceitos matemáticos é a dificuldade que a maior parte dos estudantes enfrenta, mencionando nas suas respostas: "Álgebra Linear tem tópicos muito abstratos, e ao princípio é difícil compreender" (E8, QA); "tive dificuldades para imaginar e ligar os conceitos" (E5, QA). Destas respostas interpreta-se que a abstração não é uma dificuldade associada a todos os tópicos de Álgebra Linear, mas sobretudo àqueles que têm repercussão no estabelecimento de relações entre os diferentes tópicos que o estudante vai aprendendo ao longo da experiência de ensino e, consequentemente, na disciplina.

As unidades temáticas lecionadas no decorrer da experiência de ensino que estes estudantes referem no questionário (QA) como de maior dificuldade de aprendizagem são: tratamento de matrizes com parâmetros (6%); geometria de vetores (39%); espaços vetoriais (39%); e transformações lineares (67%). Como se pode observar, a aprendizagem de tópicos relacionados à unidade de transformações lineares resultou ser a de maior dificuldade, mesmo quando no secundário trabalham conceitos associados a funções, em particular o conceito de função linear. Parece que os estudantes não reconhecem que os tópicos tratados na unidade de transformações lineares da disciplina de Álgebra Linear são, na verdade, uma generalização de tópicos de funções aprendidas no secundário, o que pode dever-se a que o tratamento de tais tópicos na disciplina de Álgebra Linear não considere comumente a representação visual dos objetos, como é feito com as funções reais de variável real no ensino secundário, em que é feita a sua representação gráfica em sistemas cartesianos.

Em referência à quantidade de conteúdos do programa de Álgebra Linear, alguns estudantes consideram que a cada unidade temática "tem de se lhe dedicar muito tempo" (E10, QA), o que parece indicar que sentem necessidade de dedicar mais tempo a alguns tópicos, em particular àqueles que consideram de maior abstração. Possivelmente, os estudantes têm dificuldade em consolidar o conhecimento relativo à grande quantidade de propriedades ou teoremas associados às unidades de Espaços Vetoriais e Transformações lineares, por serem unidades com muitos conceitos introduzidos, o que implica também muitas propriedades e teoremas que os envolvem e relações entre estes conceitos com outros de unidades temáticas anteriormente lecionadas. Assim, acumula-se um grande número de conceitos e propriedades cujo conhecimento o estudante precisa adquirir para poder seguir sequencialmente as aprendizagens nas sucessivas unidades temáticas e também para mobilizar nas distintas avaliações. Na entrevista, alguns estudantes também se referem à quantidade de conteúdos, tal como Edite e Estela quando questionadas pelo investigador sobre adaptações que fariam no programa da disciplina de Álgebra Linear:

> ***Edite*:** Eu dedicaria mais tempo às tarefas de modelação, mas é complicado porque apenas é possível se sair teoria [do programa].
> ***Estela*:** Sim, eu concordo, deve analisar-se que teoria é necessária para outras disciplinas, para ver se é possível tirar parte da teoria da disciplina de Álgebra Linear, porque se não se tira teoria isso vai significar mais tempo de trabalho em sala de aula e em casa para nós.

Para Edite e Estela, o programa da disciplina de Álgebra Linear deveria considerar o tratamento de conteúdos que são necessários para utilizar noutras disciplinas do seu curso, abrindo espaço no programa para dedicar tempo ao trabalho com tarefas de modelação, o que sugere tratar mais conteúdos matemáticos em contextos reais.

Por fim, também é de mencionar a dificuldade que um dos estudantes salienta relativa à insuficiência de conhecimentos prévios para realizar com sucesso aprendizagens de álgebra linear. Para este estudante, “as dificuldades são várias por não trazer uma boa preparação do secundário” (E18, QA), o que permite inferir que a falta de conhecimentos prévios dá origem a outras dificuldades já referidas, como a abstração dos conceitos matemáticos, e também afeta o trabalho procedimental com expressões algébricas envolvendo os conceitos matemáticos de álgebra linear.

7.2 Contributos das tarefas de modelação para a aprendizagem da álgebra linear

Antes de referir as perspetivas dos estudantes referentes aos contributos das tarefas de modelação para aprendizagem da álgebra linear, é importante salientar que o questionário

(QF) evidenciou que a maior parte dos estudantes prefere uma metodologia expositiva por parte do professor, em vez de metodologias fundamentadas em trabalho em grupo, auto-aprendizagem ou trabalho individual supervisionado pelo professor. Inclusive, a maior parte dos estudantes considera que a metodologia utilizada na disciplina, nomeadamente o tratamento formal de teoremas e propriedades que precisam de ser demonstradas, não é um obstáculo para a aprendizagem de conhecimentos de álgebra linear. No entanto, limitar o ensino a metodologias tradicionais torna-se um obstáculo para os estudantes aplicarem apropriadamente os conhecimentos adquiridos na resolução, pela primeira vez, de tarefas em contextos reais, conforme os resultados evidenciados no capítulo 6.

Algumas respostas da entrevista permitem perceber que as dificuldades dos estudantes para mobilizar aprendizagens de conceitos em contextos reais e a sua opção por uma abordagem expositiva mais tradicional, está associada às metodologias de ensino usadas nas disciplinas de Matemática do seu plano de estudos, como se observa no seguinte diálogo:

> ***Investigador:*** Encontram algum contributo ao trabalhar tarefas de modelação na disciplina de Álgebra Linear para a vossa aprendizagem?
> ***Edite:*** Eu quero dizer que não ajudam para os testes, mas posso dizer que é consequência do próprio sistema. As aulas de teoria são muito fixes e tudo, mas há que pensar que quando formos sair daqui não podemos estar limitados à teoria, porque temos de aplicá-la na nossa área. Aí as tarefas de modelação ajudam muito, e em engenharia, em geral, eu sinto que tratar problemas de diferentes áreas, ajuda-te a ter uma perspetiva mais geral e, de alguma maneira, isso ajuda a aplicá-lo na tua área. Então, vale a pena perguntar se é necessário dar mais prioridade à parte teórica ou à parte aplicada?
> ***Estela:*** Eu opino como ela, eu acho que aplicar as coisas que a gente aprende vai ajudar mais, só que falando objetivamente, neste momento, as tarefas não se relacionam com os tipos de problemas que têm os testes. Então, estabelecendo uma balança de prioridades para poder aprovar na disciplina, eu sinto que não vale a pena tão pouca percentagem [na avaliação] atribuída às tarefas de modelação.

Com base nas respostas de Edite e Estela, pode-se inferir que a realização de tarefas de modelação na sala de aula é valorizada e reconhecida pelos estudantes como importante para os preparar para o que podem encontrar no futuro campo profissional. No entanto, o peso da avaliação na disciplina, que segue a metodologia de ensino fundamentada no trabalho em torno de exercícios em contexto da matemática pura, leva os estudantes a mencionarem uma preferência por metodologias de ensino tradicional em relação a metodologias de trabalho com tarefas em contextos reais, dando prioridade ao que vão encontrar na avaliação.

Perguntas fechadas (sim/não) do questionário, onde foi perguntado aos estudantes se o trabalho de criar modelos matemáticos envolvendo situações reais no início da experiência de ensino é visto como complicado (QF#20) e se ao longo da experiência de ensino foi sendo facilitado (QF#21), permitiram evidenciar que a totalidade da turma manifesta sentir dificuldades no início da experiência de ensino para mobilizar conhecimentos matemáticos quando o contexto não é de matemática pura, mas do mundo real. No entanto, essas dificuldades foram diminuindo ao longo da experiência de ensino, identificando-se nas respostas dadas em QF#21 que a percentagem de estudantes que manifesta ainda ter dificuldade para trabalhar com modelos matemáticos de álgebra linear em contextos reais diminuiu de 100% para 39%.

Em relação aos contributos do trabalho com tarefas de modelação na disciplina de Álgebra Linear, os estudantes referem cinco específicos: facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos (22%); promover a aplicabilidade dos conceitos (94%); promover competências e o processo de modelação (17%); promover dinâmicas de trabalho em grupo (6%); e motivar o estudante (12%). Como se pode observar, o aspeto que mais destacam é a aplicabilidade dos conceitos na resolução das tarefas de modelação, característica que está bastante associada à motivação do estudante e a facilitar a aprendizagem dos conceitos. Alguns estudantes referem-se a esta aplicabilidade referindo que as tarefas de modelação "ajudam a adaptar a matemática a situações quotidianas" (E2, QA), resposta que reflete as necessidade que sentem de ver a matemática aplicada a contexto reais, o que que liga à aprendizagem de conceitos de álgebra linear ao ajudar o estudante a "ter um conhecimento menos abstrato dos conceitos matemáticos" (E14, QA). Dentro dos contributos das tarefas de modelação para promover competências e processos de modelação, os estudantes destacam o nível exigente das tarefas como aspeto positivo para "enfrentar casos que se podem encontrar num ambiente laboral, melhorar a leitura de dados, tomada de decisões e modelos eficientes e rápidos" (E15, QA). Neste sentido, é destacado o papel das tarefas de modelação para promover competências pouco trabalhadas em sala de aula, nomeadamente a interpretação de dados e a validação de resultados. Para além disso, um dos estudantes salienta o papel das tarefas para aprender algo sobre o processo de modelação, mencionando que "na verdade, em cursos como as engenharias parece bastante útil, pois pode ser que enfrentem (os estudantes da turma) problemas desse tipo na sua futura profissão. Gostei de saber o que é modelação matemática" (E11, QA).

Em termos de dinâmicas de trabalho, um dos estudantes menciona o contributo das tarefas de modelação para promover discussões em grupos de trabalho, respondendo: "agradou-me a realização das tarefas em grupos, pois isto pode proporcionar vários pontos de vista para resolver um problema" (E13, QA). Este estudante, tal como a maioria dos estudantes da turma (72%), reconhece a dinâmica do trabalho de grupo como um ambiente propício à discussão e partilha de ideias, que facilita o trabalho nas tarefas de modelação (QF). Outras vantagens do trabalho em grupo foram evidenciadas na entrevista:

> ***Investigador*:** Sentem que o trabalho em grupo em algum ponto lhes facilitou o trabalho da tarefa?
> ***Casimiro*:** Sim.
> ***Estela*:** Sim, embora a gente não esteja acostumada.
> ***Edite*:** Eu também sinto que sim, acho que ajuda muito a simplificar os modelos e ter várias possibilidades para construir o modelo, eu tinha uma ideia, outro tinha outra ideia. Por exemplo, no meu grupo utilizava-se ao princípio funções por partes para definir um critério, mas como eu ao princípio não tinha muita visão para ver o que eles viam, então conversava com os meus companheiros, ajudando-me a compreender bastante.
> ***Estela*:** E é realista, porque no futuro, quando você chegar a aplicar em problemas você não vai estar sozinho.

Do diálogo anterior interpreta-se que o trabalho em grupo se torna um ambiente que facilita certas atividades do processo de modelação quando desenvolvidas discussões entre os estudantes.

As dificuldades relativas ao trabalho com tarefas de modelação também são mencionadas pelos estudantes, com três focos (QA): o tempo requerido para o trabalho na tarefa (56%); a dificuldade em desenvolver certos subprocessos de modelação (72%); e a necessidade de conhecimentos prévios de outras disciplinas para trabalhar com tarefas de modelação (6%). A falta de tempo é uma dificuldade que grande parte dos estudantes da turma menciona, justificando que "o tempo que requerem para serem trabalhadas (as tarefas de modelação) é bastante" (E1, QA), o que se repercute ao mesmo tempo em "não desenvolver suficientes capacidades para resolver problemas no tempo dado" (E10, QA). Estas respostas evidenciam que a exigência que as tarefas de modelação impõem, comparadas com outras tarefas, é vista como uma desvantagem pelos estudantes que não estão familiarizados com o trabalho neste tipo de tarefa, conforme refere Estela na entrevista:

> ***Investigador*****:** Em geral, qual foi a maior dificuldade que tiveram ao trabalharem as tarefas de modelação?
> ***Casimiro*****:** O tempo.
> ***Xavier*****:** Sim, porque não é fácil quando se passa do teórico ao prático.
> ***Estela*****:** É o normal, não estamos acostumados. Igual, o tempo que estamos dedicando a trabalhar nas tarefas em sala de aula não é o que se deveria, acho pouco.
> ***Edite*****:** A dúvida aqui é se seria necessário acrescentar mais créditos à disciplina, porque agregar mais tempo à disciplina para trabalhar tarefas de modelação implicaria não mexer no tempo da teoria, mas no tempo dedicado por aula à disciplina. E pensando bem, todas as disciplinas dos nossos cursos deveriam ser assim, porque muitas pessoas saem formadas e não têm nenhuma experiência porque tudo foi mais teórico.

Os quatro estudantes concordam que o tempo é uma dificuldade, que parece ser mais uma limitação para terminarem o seu trabalho na tarefa de modelação, o que para Edite pode ser facilitado alargando a carga horária da disciplina e, por conseguinte, a necessidade de modificar o programa para que o trabalho com tarefas em contextos reais seja uma exigência.

Quanto ao desenvolvimento de certos subprocessos e, portanto, competências de modelação, a principal dificuldade que os estudantes mencionam é em estabelecer conexões entre a realidade e a matemática que conhecem, o que a nível das atividades de modelação está associado com a compreensão da tarefa e a construção do modelo real. Por último, a insuficiência de conhecimentos prévios é um aspeto que um estudante referiu como uma dificuldade para a aprendizagem de conhecimentos de álgebra linear e também para o trabalho nas tarefas de modelação, como já era esperado. Das palavras do estudante, "o facto de não poder resolver alguns sistemas devido às minhas bases de conhecimento" (E18, QA), interpreta-se que reconhece a falta de conhecimentos prévios para trabalhar na tarefa de modelação TM1, que envolvia a resolução de SEL. Esta foi uma das tarefas em que os estudantes apresentaram mais dificuldades, tal como refere o grupo de Emiliana e Francela, após especificarem o processo de modelação utilizado, no relatório de resolução da tarefa entregue: "sendo um tipo de avaliação nova para a turma, tivemos problemas, quer para compreender a tarefa quer para resolvê-la, somando-se a isso o pouco tempo que havia para resolvê-la, que dificultou muito mais". É possível constatar que Emiliana e Francela sentiram dificuldades para compreender a tarefa, conforme também manifestado pela maior parte dos estudantes da turma, associando esta dificuldade ao facto de a tarefa de modelação ser "um novo tipo de avaliação", isto é, não estarem habituadas a exercitar competências que lhes permitam utilizar conceitos de álgebra linear em contextos reais.

Outras respostas encontradas na entrevista revelam que outra causa desta dificuldade da tarefa TM1 está associada ao facto de, nessa altura, ainda não terem tido suficiente contacto e prática dos conhecimentos de álgebra linear lecionados.

> ***Investigador*:** Em referência à primeira tarefa, sentem que tiveram mais dificuldade com ela do que em relação às tarefas seguintes?
> ***Estela*:** Sim, mas na minha opinião a causa é também por ser a primeira vez que nos estávamos a familiarizar com o que é álgebra linear. Já para a tarefa do girassol, por exemplo, a gente dizia 'ok, aqui posso utilizar isto ou aquilo para trabalhar o problema', então a gente estava mais familiarizada com a matéria. Acho que começámos a trabalhar na segunda semana de aulas, então ainda não estávamos familiarizados.

Para Estela parece que a compreensão da situação problema da tarefa não é a principal dificuldade, mas sim as suas aprendizagens de conceitos matemáticos antes do trabalho na tarefa, o que permite interpretar que a falta de familiarização com os conceitos da disciplina constituiu outra limitante para o trabalho com as tarefas de modelação.

7.3 Contributos da tecnologia para a aprendizagem da álgebra linear

Em referência à tecnologia, a maior parte dos estudantes afirma gostar e sentir-se confortável com programas destinados a trabalhar conceitos de álgebra linear, para além de os utilizarem para estudar em contexto extra-letivo. No questionário, os estudantes referem três tipos de contributos do trabalho com tecnologia na experiência de ensino: facilitar processos de cálculo matemático (28%); facilitar a representação visual de conceitos (33%); e facilitar o processo de modelação (22%). Como se deduz das diferentes percentagens, os estudantes destacam a visualização de conceitos como um importante contributo da tecnologia, dando respostas como: "com tecnologia os conceitos matemáticos podem ser observados de uma maneira melhor" (E14, QA), e "isso ajuda para que sejam menos abstratos" (E8, QA). Neste sentido, os programas utilizados durante a experiência de ensino, como o *Mathematica*, *GeoGebra* e *Excel*, foram relevantes para os estudantes, diminuindo um pouco o carácter abstrato que associam aos conceitos matemáticos e facilitando-lhes a resolução de alguns problemas, como é o caso de identificar o número de soluções de um

SEL a partir da representação gráfica das equações que o constituem ou usar medidas de vetores em diferentes escalas para a formulação de um modelo matemático, como foi observado, respetivamente, nas tarefas TA1 e TM5.

Como meio útil e facilitador de processos de cálculo matemático, alguns estudantes referem a importância da tecnologia para "eliminar os processos extensos" (E17, QA), o que significa que o estudante acha viável utilizar tecnologia para otimizar o tempo de resolução da tarefa. No que se refere aos processos de modelação, um estudante menciona a importância de "aprender a utilizar *software* para modelar" (E4, QA), comentário que pode estar associado à necessidade da tecnologia para trabalhar tarefas como a TM5, conforme já referido nas vantagens relativas à visualização de conceitos. Outras respostas observadas na entrevista são mais específicas, mas referindo as mesmas vantagens dos programas tecnológicos utilizados na experiência de ensino para o trabalho nas tarefas de modelação. Por exemplo:

> ***Investigador*:** Qual a sua opinião sobre a utilização da tecnologia? Ajudou-vos no trabalho das tarefas de modelação? Se sim, como?
> ***Estela*:** Sim, como seja para fazer os cálculos mais rapidamente. Como eram aproximadamente 50 minutos, você não ia fazer uma redução de Gauss-Jordan à mão ou alguma outra simplificação. Então ajudam sim, como para isso.
> ***Edite*:** Eu gostei muito da utilização do *Excel*, porque muitas pessoas não sabem utilizar *Excel*, sendo em disciplinas de anos mais à frente onde se utiliza, então a aproximação a esse tipo de ferramentas pela primeira vez pode chegar a ser muito útil. Na tarefa das senhas (referindo-se à tarefa TM4), foi significativo utilizar *Excel* desse modo. Então foi motivador para mim, nunca tinha imaginado que se pudesse utilizar álgebra linear nesse tipo de situação. A utilização de *Mathematica* e *GeoGebra* não achei muito útil, apenas para fazer cálculos rápidos.

Das respostas do diálogo anterior pode identificar-se que alguns estudantes, como Estela, inclinam-se mais para utilizar programas como *Mathematica* e *GeoGebra* para simplificar processos matemáticos. Outros estudantes, como Edite, preferem as tecnologias que possam continuar a utilizar em outras disciplinas e no seu quotidiano, como é o caso do *Excel*, achando motivador a maneira como a folha de *Excel* pode ser utilizada para trabalhar com álgebra linear na tarefa TM4, quando solicitado a utilizar o modelo matemático para gerar várias senhas.

Em relação às dificuldades associadas à utilização da tecnologia, os estudantes mencionam dificuldades relativas à utilização da folha de *Excel* (6%); utilização de plataformas virtuais (6%); e memorização de comandos de *software* matemático, nomeadamente comandos input utilizados no *Mathematica* e no *GeoGebra* (12%). Como se observa, as percentagens das dificuldades referidas são baixas, o que significa que nem todos os participantes declaram ter tido dificuldades com a utilização de tecnologia.

No que se refere à utilização do *Excel*, já observámos que estudantes como Edite reconhecem no *Excel* uma ferramenta tecnológica que traz vantagens para a disciplina de Álgebra Linear com tarefas de modelação. No entanto, esta perspetiva não é comum a todos os estudantes, pois Emiliana e Francela, por exemplo, manifestam na tarefa TM4 que "a maior dificuldade foi a utilização do *Excel*, por não conhecer muito sobre como aplicar suas ferramentas". Possivelmente, Emiliana e Francela formam parte dos 50% de estudantes que dizem não estar acostumados a utilizar com frequência a folha de Excel (QF). Assim, nem todos os estudantes tinham conhecimento das ferramentas básicas do *Excel*, sendo uma dificuldade inevitável considerando que o único momento em que os estudantes chegaram a trabalhar com esse recurso foi na tarefa TM4.

A utilização de plataformas virtuais na experiência de ensino, como a "Mediación Virtual", é manifestada por um dos estudantes como uma dificuldade que, embora não limite o trabalho de resolução das tarefas, limita o acesso aos enunciados das tarefas e outros materiais de leitura utilizados durante a experiência de ensino. Também no que diz respeito aos comandos input utilizados no *Mathematica* e no *GeoGebra*, "não saber os comandos a serem programados" (E8, QA) é referido por um dos estudantes como uma dificuldade para avançar na resolução das tarefas. Assim, pode inferir-se que estes dois aspetos, em vez de serem dificuldades associadas à incapacidade de aceder a um conhecimento tecnológico, constituíram aspetos que os poucos estudantes que as referem poderiam evitar, consultando as suas notas de aula, pelo que podem ser consideradas limitações criadas pelo estudante.

7.4 Síntese

Vários contributos referentes à experiência de ensino foram referidos pelos estudantes, dando opiniões com respeito a três aspetos: aprendizagem da Álgebra Linear, trabalho com tarefas de modelação, e trabalho com tecnologia.

Em referência à aprendizagem da Álgebra Linear, o maior contributo que os estudantes reconhecem é facilitar a aprendizagem de conhecimentos matemáticos para o seu curso de formação, referindo exemplos específicos de como poderiam utilizar esses conhecimentos nas suas áreas de estudo. Outras vantagens como facilitar a resolução de problemas matemáticos e promover o pensamento lógico-matemático são também mencionadas em menor percentagem. A primeira, referindo a potencialidade de procedimentos de álgebra linear para trabalhar certos problemas de maneira mais simples, em comparação com outros procedimentos aprendidos em outras disciplinas de Matemática. A segunda, referindo o incentivo da álgebra linear para o estudante aprender a lidar algebricamente com conceitos matemáticos considerados abstratos, sobretudo quando é confrontado com o tratamento formal do conceito.

A abstração dos conceitos matemáticos é a principal dificuldade que os estudantes sentem, referindo particularmente a unidade de transformações lineares como aquela de maior dificuldade de aprendizagem. Outras dificuldades mencionadas fazem referência ao currículo, especificamente à quantidade de conteúdos que são tratados, e à sensação do estudante de não ter suficientes conhecimentos prévios para lidar com os distintos conteúdos de álgebra linear trabalhados.

Em referência às tarefas de modelação, o que os estudantes valorizam principalmente é a aplicabilidade dos conceitos de álgebra linear trabalhados, referindo a importância da contextualização dos conceitos para reduzir a abstração que associam a conceitos ligados à geometria vetorial, espaços vetoriais e transformações lineares. Outros contributos, como facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos, promover competências e saber executar o processo de modelação, promover dinâmicas de trabalho em grupo, e motivar o estudante, são também mencionadas, embora em menor percentagem. A motivação, a aprendizagem de conceitos e o exercitamento de competências de modelação são referidos como vantagens ligadas à contextualização dos conceitos, enquanto as dinâmicas de trabalho em grupo como um aspeto que se promove ao trabalhar tarefas de modelação e como um aspeto que facilita o processo de modelação através das discussões em sala de aula.

As dificuldades associadas ao trabalho com tarefas de modelação apontam, na sua maior parte, para a grande necessidade de tempo que requerem em sala de aula, em comparação com outro tipo de tarefas matemáticas com que o estudante costuma trabalhar. Outras dificuldades dizem respeito a certos subprocessos do ciclo de modelação, nomeadamente dificuldades para compreender o problema real, interpretar resultados matemáticos e validar resultados reais. Para além disso, a necessidade de conhecimentos prévios para trabalhar conceitos de álgebra linear é também referida pelos mesmos estudantes como uma limitação para trabalhar com tarefas de modelação.

Em referência à tecnologia, a principal vantagem que os estudantes mencionam é facilitar a representação visual de conceitos, ajudando-lhes a diminuir a abstração que associam aos conceitos matemáticos. Outras vantagens dizem respeito a facilitar processos de cálculo matemático e o processo de modelação. Quanto aos processos de cálculo, os estudantes consideram que os programas como o *Mathematica* ou o *GeoGebra* ajudam a evitar procedimentos extensos, permitindo poupar tempo para outros aspetos das tarefas trabalhadas na experiência de ensino. Quanto aos processos de modelação, enfatizam a importância da tecnologia para modelar, nomeadamente para a construção ou tratamento do modelo matemático.

Finalmente, no que diz respeito às dificuldades associadas ao trabalho com tecnologia na experiência de ensino, uma minoria da turma refere ter tido dificuldades, nomeadamente para: trabalhar com a folha de Excel; utilizar a plataforma virtual "Mediación Virtual"; e memorizar comandos para programar no *Mathematica* ou no *GeoGebra*. Quanto à folha de *Excel* manifesta-se o desconhecimento de ferramentas básicas do *software* para trabalhar o modelo matemático, o que evidencia a existência de estudantes que não estão habituados a trabalhar com o *Excel*. No que respeita à utilização da plataforma e à sintaxe para introduzir comandos, a lecionação das aulas teóricas inclui o ensino de utilização da plataforma virtual nas primeiras aulas e dos diferentes comandos a serem utilizados, isto é, a sua função e exemplificação no *Mathematica* ou o *GeoGebra*, à medida que se avança na experiência de ensino. Assim, estas duas dificuldades dizem respeito a aspetos que alguns estudantes provavelmente descuraram durante a lecionação das aulas teóricas.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Neste capítulo começo por fazer uma síntese do estudo. Depois apresento as principais conclusões do estudo, no que se refere a conhecimentos de álgebra linear e competências de modelação mobilizados no trabalho realizado pelos estudantes na experiência de ensino, e implicações desta experiência para as suas aprendizagens. Concluo com algumas reflexões referentes a contributos deste estudo para a minha prática profissional e investigativa, e sobre a experiência de ensino desenvolvida, de onde emergem algumas recomendações sobre aspetos a considerar em futuras propostas didáticas e estudos neste domínio.

8.1 Síntese do estudo

A disciplina de Álgebra Linear constitui umas das áreas da Matemática pelas quais o interesse da investigação tem vindo a crescer (Plaxco & Wawro, 2015), devido às dificuldades que os estudantes de ensino superior frequentemente evidenciam nesta disciplina (Costa & Rossignolli, 2017; Dogan-Dunlap, 2010). Estas dificuldades, maioritariamente associadas à natureza abstrata dos conceitos matemáticos que são foco de aprendizagem e às competências necessárias para utilizar modelos matemáticos e conectar ideias que envolvem esses conceitos, emergem devido a contextos tradicionais de ensino e aprendizagem, sob enfoque formal da Matemática pura, onde também tenho desenvolvido a minha prática letiva. A modelação matemática permite uma abordagem diferente na disciplina de Álgebra Linear, onde o estudante é encorajado a mobilizar conhecimentos prévios e a criar novas construções conceptuais que o ajudem no tratamento de conceitos abstratos (Trigueros & Possani, 2013) e no desenvolvimento dessas e outras competências associadas ao trabalho com problemas que partem de contextos reais (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Tornou-se assim pertinente e motivadora a realização do presente estudo, cujo objetivo é compreender as aprendizagens de conceitos de álgebra linear e as competências de modelação postas em prática por estudantes universitários da Costa Rica, no contexto de uma experiência de ensino apoiada na realização de tarefas de modelação matemática com recurso à tecnologia, em que se adota o trabalho em pequenos grupos e a realização de discussões finais na turma.

Atendendo ao objetivo proposto, procuro responder a três questões de investigação: 1) Que conhecimentos de álgebra linear são mobilizados pelos estudantes na resolução das tarefas de modelação matemática propostas ao longo da experiência de ensino? Como estes conhecimentos se relacionam com as características das rotas de modelação que percorrem na resolução das tarefas? Que dificuldades revelam na resolução das tarefas envolvendo esses conhecimentos?; 2) Quais as competências de modelação que os estudantes evidenciam na resolução das tarefas de modelação? Como estas competências se relacionam com as características das rotas de modelação que percorrem na resolução das tarefas? Que dificuldades revelam na resolução das tarefas, no que concerne a competências de modelação requeridas?; e 3) Quais os aspetos da experiência de ensino que os estudantes valorizam e reconhecem como contributos para a sua aprendizagem?

A fundamentação teórica foca-se em temas essenciais para a realização do estudo, nomeadamente o ensino e a aprendizagem da álgebra linear e a modelação matemática. Em cada um dos temas são abordados estudos referentes ao ensino e aprendizagem no ensino superior, incluindo dificuldades associadas à aprendizagem e ao trabalho com tecnologia.

Atendendo ao objetivo definido, neste estudo utilizou-se uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, tendo por base uma experiência de ensino, realizada durante o 2.º semestre do ano letivo de 2018/19, na qual participaram 20 estudantes Costarriquenhos de uma turma da disciplina de Álgebra Linear da Universidade da Costa Rica. A recolha de dados incluiu: observação participante das aulas da experiência de ensino; recolha documental das resoluções escritas dos estudantes e dos ficheiros digitais por eles criados nas tarefas de modelação propostas; questionário aplicado aos participantes; e entrevista semi-estruturada com registo áudio realizada com estudantes.

As conclusões principais do estudo são apresentadas nas próximas subsecções, organizadas tendo em conta as questões de investigação. A primeira foca-se nos conhecimentos de álgebra linear dos estudantes, a segunda nas suas competências de modelação, e a última considera os aspetos da experiência de ensino que os estudantes valorizam e reconhecem como contributos para a sua aprendizagem, bem como as dificuldades que experienciaram.

8.2 Conclusões

8.2.1 Conhecimentos de álgebra linear: Aprendizagens e dificuldades

O trabalho com tarefas de modelação permitiu a mobilização da maior parte dos conceitos e procedimentos algébricos trabalhados na disciplina, embora em diferentes níveis. Enquanto alguns estudantes mobilizaram, em determinadas tarefas, todos os conhecimentos de álgebra linear que se esperavam ser adequados e relevantes na resolução do problema proposto (por exemplo, tarefa 4.1), outros mobilizaram apenas alguns desses conhecimentos que complementaram com conhecimentos adquiridos noutras disciplinas matemáticas. Em geral, os estudantes demonstraram uma mobilização mais ampla e pertinente de conhecimentos de álgebra linear incluídos nas unidades referentes a Operações com Matrizes e Espaços Vetoriais, e também uma mobilização significativa de conhecimentos de álgebra linear incluídos nas unidades de Sistemas de Equações Lineares, Geometria Vetorial e Transformações Lineares.

A mobilização destes conhecimentos esteve associada a diferentes fatores. Nas tarefas onde se observou uma mobilização mais intensa dos conhecimentos esperados, conclui-se que os contextos reais propostos contribuíram para que todos os estudantes fossem capazes de mobilizar os conceitos matemáticos adequados. Estes contextos, particularmente a codificação de mensagens e de senhas de acesso bancário, mostraram ter características comuns, nomeadamente por serem contextos associados a uma organização de informação formada por caracteres alfabéticos ou alfanuméricos, sendo que a experiência anterior de alguns estudantes com contextos de criptografia ajudou-os na mobilização rápida do conceito de matriz para codificar mensagens. A experiência vivida com a tarefa na codificação de mensagens também ajudou a que os estudantes conectassem rapidamente o contexto de senhas bancárias com a situação da codificação de mensagens, surgindo, nesta ocasião, o conceito de vetor como uma parte da estrutura de uma matriz. Assim, conclui-se que, para além do conhecimento matemático dos estudantes, a sua experiência com contextos anteriores de organização de dados facilitou não só a mobilização do conceito de matriz e as operações com matrizes, como também a mobilização do conceito de vetor e outros conceitos da unidade de espaços vetoriais, como os de combinação linear, conjunto gerador, subespaço gerado e base de um subespaço vetorial. Estes últimos conceitos são revelados como geradores de dificuldades e de carácter abstrato em alguns estudos (Costa & Rossignoli, 2017; Stewart & Thomas, 2010; Trigueros & Possani, 2013), sendo que este estudo permite concluir que as dificuldades associadas à aprendizagem de conceitos relativos ao tópico de Espaços Vetoriais podem ser ultrapassadas com o trabalho em tarefas de modelação que proponham problemas e contextos adequados, nomeadamente contextos familiares e relevantes para o estudante.

Nas tarefas onde não houve uma total mobilização dos conhecimentos esperados foi observada uma certa integração adequada de conhecimentos estudados noutras disciplinas de Matemática ou conhecimentos de álgebra linear utilizados em tarefas anteriores, e noções informais de certos conceitos de álgebra linear, embora não adequadamente. Nestas tarefas, os conhecimentos mobilizados estão novamente associados ao contexto real e também ao conhecimento matemático que o estudante tinha no momento de as resolver. Assim, por exemplo, o contexto real permitiu que alguns estudantes optassem por seguir um processo de tentativa e erro para resolver um sistema de equações linear, embora esse conhecimento não tenha sido utilizado corretamente na tarefa. O facto de esses estudantes terem revelado dificuldades para determinar analiticamente o conjunto solução de um sistema de equações (na tarefa de antecipação respetiva) permite concluir que o conhecimento mobilizado para resolver a tarefa, no contexto do trânsito automóvel, foi mais uma opção baseada no tipo de processo matemático que acharam ser capazes de mobilizar e não tanto no contexto real da tarefa. Analogamente, os estudantes que evidenciam ter dificuldades para determinar bases de subespaços vetoriais (na tarefa de antecipação respetiva) mobilizam corretamente aprendizagens baseadas em conhecimentos de segmentos orientados e proporcionalidade direta e não em conhecimentos que envolvem propriedades ou teoremas estudados na unidade de Transformações Lineares.

Contrariamente aos estudantes anteriores, outros estudantes evidenciaram ter o conhecimento matemático de álgebra linear que era esperado, mas, devido ao contexto real da situação problema, optaram por mobilizar conhecimentos matemáticos que tinham aprendido noutras disciplinas, como é o caso daqueles que recorreram a coordenadas polares para abordar o problema da rotação do bordado de um girassol. Portanto, a não mobilização de conhecimentos matemáticos de álgebra linear esperados resultou ser uma escolha entre o conhecimento matemático do estudante no momento da realização da tarefa e os caminhos que facilitavam ou complicavam os cálculos matemáticos. Para além disso, estes estudantes que mobilizaram conhecimentos de outras disciplinas, já tinham trabalhado em tarefas de modelação anteriormente, pelo que se conclui que alguns foram evoluindo ao longo da experiência de ensino, adquirindo certa maturidade para distinguir entre trabalhar corretamente a situação real utilizando conhecimentos de Álgebra Linear ou conhecimentos de outras disciplinas para facilitar o seu processo de modelação.

Pode também concluir-se que os poucos conceitos e procedimentos de álgebra linear que o estudante tinha aprendido na lecionação das aulas teóricas no princípio da experiência de ensino e o trabalho restrito a exercícios matemáticos com procedimentos de resolução predefinidos, resultou em maiores dificuldades dos estudantes para mobilizar conhecimentos de álgebra linear na primeira tarefa de modelação comparativamente com o que aconteceu nas restantes tarefas. O facto de todos os estudantes já terem assistido à lecionação da unidade de Sistema de Equações Lineares, mas a maior parte não ter conseguido mobilizar apropriadamente o conceito de conjunto solução na primeira tarefa de modelação evidencia que precisariam de ter desenvolvido uma maior compreensão do significado de conjunto solução de um sistema e dos processos para a sua obtenção.

Das conclusões referidas até aqui cabe pensar em dois aspetos. Por um lado, a forma mais algorítmica e mecânica de resposta que pode dominar a aprendizagem do conhecimento matemático no ensino secundário, em particular de sistemas de equações com soluções infinitas, é reproduzido na disciplina de Álgebra Linear. Por isso, o estudante mostra dificuldades para refletir sobre o conjunto solução de um sistema quando este deve ser interpretado num contexto real. Por outro lado, o facto de os estudantes terem maior facilidade na mobilização adequada de conhecimentos matemáticos nas tarefas de modelação seguintes mostra que os estudantes são capazes de utilizar conhecimentos de álgebra linear em tarefas envolvendo contextos reais, mesmo não tendo grande experiência na resolução deste tipo de tarefas. Assim, poderá ser necessário integrar mais as tarefas de modelação com o tratamento formal dos conteúdos de Álgebra Linear. Por exemplo, durante a lecionação da teoria, o professor pode ir dando exemplos práticos de aplicação em contextos reais, relativamente simples, onde o foco seja que estudante comece a interpretar o significado dos conceitos em diversos contextos. No caso desta disciplina, onde a unidade de Sistemas de Equações Lineares é uma das primeiras a ser lecionada, também será importante pensar em acompanhar os processos algébricos de resolução de sistemas de equações com processos geométricos, procurando facilitar a compreensão do conceito de conjunto solução pelo estudante. Em particular, e concordando com Bagly e Rabin (2010), antes de começar a resolver a tarefa, seria útil incentivar o estudante a fazer previsões sobre o conjunto solução do sistema de equações, pois, ao ter de considerar dados numéricos e o contexto real para a sua previsão, o estudante vai querer envolver-se no contexto da tarefa.

De todos os conhecimentos de álgebra linear, que se esperava que os estudantes mobilizassem nas tarefas de modelação, o único não evidenciado foi a utilização de propriedades de vetores em IR^n para o cálculo de ângulos entre vetores. A não mobilização do conhecimento referido não resultou de uma dificuldade que se evidenciasse nos estudantes, mas de uma escolha do modelo matemático utilizado, revelando que o carácter aberto das tarefas de modelação faz com que nem sempre a forma como o estudante trabalha na tarefa seja coincidente com a forma esperada pelo investigador. Para além disso, a forma a como é trabalhada a rotação de vetores pelos estudantes em coordenadas cartesianas permite concluir que para promover a mobilização das aprendizagens resulta mais eficaz que os estudantes trabalhem numa determinada situação recorrendo a modelos criados por eles, e não a construções previamente fornecidas pelo professor (Ponte, 2005), pois quando o estudante constrói seu próprio modelo matemático, é obrigado a mobilizar mais conhecimentos matemáticos.

Os resultados revelam também que os grupos que desenvolvem rotas não lineares mobilizam mais conhecimentos formais da disciplina de Álgebra Linear e mais adequados ao contexto real da tarefa, o que está associado ao facto de estes estudantes transitarem pela fase do modelo real e do modelo matemático pelo menos duas vezes para considerarem diferentes conceitos matemáticos no trabalho sobre a situação real ou diferentes procedimentos de resolução para trabalhar sobre o modelo matemático, recorrendo ao mesmo conceito matemático.

Assim, conclui-se que as rotas lineares envolvem menos mobilização de conhecimentos de álgebra linear, em comparação com as rotas não lineares, sendo estas últimas resultado de decisões tomadas pelos estudantes para melhorar o modelo matemático, facilitar o cálculo de resultados matemáticos ou verificar resultados matemáticos. Estas decisões, conforme mencionado por Borromeo Ferri (2007, 2018), dão origem a avanços e retrocessos no processo de modelação, influenciados neste estudo pela experiência/conhecimento extra-matemático do estudante ou pelas competências matemáticas de que dispõe no momento de resolução da tarefa para trabalhar com determinado conceito matemático.

8.2.2 Competências e subcompetências de modelação: progressos e dificuldades

Diferentes competências de modelação foram evidenciadas ao longo da experiência de ensino por parte dos estudantes, sendo também evidenciadas por um ou mais grupos de estudantes, em diferentes momentos, as subcompetências associadas ao ciclo de modelação, segundo a perspetiva cognitiva adotada (Maaß, 2006). Em geral, nem todas as competências de modelação evidenciadas pelos grupos ao trabalhar numa determinada tarefa foram evidenciadas igualmente nas restantes tarefas, mas houve uma base de competências que todos os grupos mobilizaram em todas as tarefas, nomeadamente, compreender e estruturar/simplificar a tarefa e matematizar um modelo real. Este aspeto permite observar que as tarefas de modelação tiveram um nível de exigência que permitiu aos estudantes, pelo menos, compreenderem o que tinham de fazer para criar um modelo matemático, mesmo não tendo trabalhado antes com tarefas envolvendo contextos reais, evidenciando que o trabalho de tarefas de modelação torna-se viável na disciplina de Álgebra Linear.

Esta evidência também permite concluir que os estudantes são capazes de adquirir competências associadas ao deslocamento do resto do mundo para o mundo matemático, não obstante algumas vezes não chegarem a ser evidenciadas competências suficientes para trabalhar matematicamente sobre o modelo criado, resultado da falta de mobilização de processos matemáticos ou de competências para trabalhar com o recurso tecnológico utilizado. Para além disso, as competências associadas ao deslocamento do mundo matemático para o resto do mundo, como são as competências associadas à interpretação de resultados matemáticos e à validação de resultados reais, não foram competências evidenciadas pelos estudantes em todas as tarefas. Esta dificuldade, que seria de esperar que ocorresse no início da experiência de ensino, considerando que os estudantes não estavam familiarizados com o trabalho de tarefas em contextos reais (Oliveira, 2001; Sokolowski, 2015), persistiu até ao seu final. Conclui-se assim que as tarefas baseadas em exercícios matemáticos que o estudante habitualmente executava previamente à experiência de ensino na disciplina de Álgebra Linear e outras disciplinas anteriores, capacitam o estudante para usar certo conhecimento em certos contextos muito restritos e não preparam o estudante para interpretar e dar sentido aos resultados matemáticos como respostas a uma questão do mundo real. Para além disso, o facto de todos os estudantes terem evidenciado as competências base referidas, em todas as tarefas, não implica que não tivessem tido dificuldades para as mobilizar no início da experiência de ensino. Efetivamente, os resultados deste estudo evidenciam que todos os estudantes tiveram dificuldade para compreender e estruturar/simplificar a situação problema na primeira tarefa de modelação, pelo que não era uma competência que tivessem, mas uma competência que conseguiram desenvolver com a atividade de modelação. A falta de familiarização com o processo de modelação matemática fez com que os estudantes investissem a maior parte do seu tempo de trabalho tentando compreender a tarefa, pelo que, concordando com Blum (2015), posso afirmar que estas competências resultam ser umas das mais difíceis de desenvolver pelo estudante quando se confronta pela primeira vez com este tipo de atividade de aprendizagem. No entanto, os resultados mostram que a partir da segunda tarefa a dificuldade associada à compreensão da tarefa foi ultrapassada, enquanto as dificuldades para estruturar/simplificar a situação problema também foram diminuindo ao longo da experiência de ensino, como resultado da experiência que os estudantes foram adquirindo no trabalho com tarefas em contextos reais fornecido pelas tarefas de modelação.

Para além da experiência do estudante, uma reestruturação na dinâmica de trabalho a partir da segunda tarefa contribuiu para que os estudantes pudessem mobilizar mais competências de modelação nas seguintes tarefas. Esta reestruturação determinou que se disponibilizasse o enunciado da tarefa ao estudante antes de ser trabalhada na sala de aula, procurando que a compreensão da tarefa se iniciasse antes da aula para reduzir o tempo gasto na sala de aula nesse subprocesso. Esta opção funcionou, evidenciando-se um progresso nos processos de modelação dos estudantes nas restantes tarefas quando, para além da formulação de um modelo matemático evidenciaram competências para interpretar e validar resultados matemáticos e para trabalhar com recursos tecnológicos como o *Mathematica*, o *GeoGebra* e o *Excel*. Tendo em conta o anterior, saliento a importância das decisões que o professor deve tomar quando opta por propostas de sala de aula que envolvem tarefas de modelação, concluindo que uma rápida constatação das dificuldades que os estudantes apresentam na resolução deste tipo de tarefas pode ajudar o professor a tomar iniciativas a tempo de ajudar a promover um maior número de competências de modelação no estudante.

A partir da segunda tarefa observou-se também que os estudantes evidenciaram competências para trabalhar no modelo matemático criado, realizando conexões entre conhecimentos de vários tópicos de álgebra linear, ao explorarem matematicamente os seus modelos matemáticos. Este aspeto permite salientar a importância do conhecimento matemático que o estudante tem disponível para ter ferramentas que lhe permitam trabalhar no modelo matemático de diferentes maneiras e a importância do contexto real para que o estudante possa escolher entre diferentes modelos reais que se adaptem aos seus conhecimentos prévios e, consequentemente, às ferramentas que possui para trabalhar o modelo matemático.

A competência para trabalhar com tecnologia tornou-se fundamental para não limitar outros processos/competências de modelação que evidenciou o estudante após utilizar alguns dos recursos tecnológicos. É possível concluir que o uso da tecnologia no processo de modelação, além de permitir a mobilização do conhecimento matemático e o trabalho sobre o modelo matemático (Siller & Greefrath, 2010), revela-se como um recurso que pode ser utilizado pelo estudante para dar respostas que constituem resultados reais e concretos na situação real da tarefa de modelação. No entanto, é importante pensar qual o papel do *software*, para que a sua escolha seja adequada e permita que tenha um papel ativo no processo de modelação, semelhante ao *Excel* e ao *GeoGebra* usados neste estudo. O recurso tecnológico deve ser reconhecido pelo estudante não como mais uma possibilidade, mas como uma necessidade para avançar no seu processo de modelação, conforme referido por Greefrath et al. (2018). Portanto, considero que a tecnologia na disciplina de Álgebra Linear deve ajudar o estudante a realizar cálculos que não possam ser feitos mediante procedimentos analíticos (Lesh, 2012), mas também e, principalmente, utilizar o recurso para promover a interpretação dos resultados matemáticos obtidos (Carlson et al., 1993), o que requer que o estudante tenha de mobilizar o conceito matemático.

A partir da segunda tarefa de modelação e até à última, alguns grupos de estudantes mostraram interpretar corretamente resultados matemáticos. Enquanto que na segunda tarefa esta competência foi evidenciada numa pequena parte dos estudantes, nas seguintes existe uma melhoria notável no desenvolvimento de competências para interpretar resultados matemáticos, chegando todos os estudantes a interpretar adequadamente os seus resultados em ambos os contextos de rotação de bordados de girassol e criação de senhas bancárias. No entanto, a mobilização dessas competências vê-se limitada novamente na última tarefa, como consequência da maior parte dos estudantes não serem capazes de obter resultados matemáticos devido a dificuldades em trabalhar no modelo matemático com o recurso tecnológico. Portanto, conclui-se que no final da experiência de ensino os estudantes chegam a apropriar-se da cultura de interpretar resultados matemáticos quando são capazes de os obter.

As competências para validar resultados reais estiveram condicionadas aos estudantes que chegaram a interpretar resultados matemáticos, mas nem todos chegam a validá-los. As dificuldades para validar resultados são evidentes em estudantes que: acham estarem a validar quando apenas mencionam pedaços da sua atividade de simplificação/estruturação de resultados; não sentem a necessidade de validar os seus resultados pela confiança que têm no modelo matemático que utilizam, quer pela “simplicidade” do seu modelo, quer por utilizarem modelos já construídos pelo professor na lecionação dos conceitos. Assim, concordando com Blum (2015), conclui-se que validar resultados tende a ser a subcompetência de modelação que a maior parte de estudantes tem dificuldade em pôr em prática. Uma das razões pelas quais não validam os seus resultados é que os estudantes fazem uma validação interna (Borromeo Ferri, 2006), resultante, como se viu neste estudo, de trabalharem com modelos matemáticos mais “simples” ou aceitarem que modelos construídos mediante autoridades da sala de aula, como o professor, são modelos que não precisam ser validados. Neste sentido, é importante dar continuidade ao trabalho de tarefas de modelação até que o estudante se aproprie de uma cultura em que faça, não só a interpretação mas também a validação dos resultados matemáticos, procurando que estas competências possam ser desenvolvidas pelo estudante na disciplina de Álgebra Linear quando trabalha em qualquer tipo de exercício matemático.

Quanto à relação das competências matemáticas mobilizadas com as rotas de modelação percorridas pelos estudantes, é de recordar que as rotas de modelação funcionam como mapas que explicitam não só as fases que o estudante percorre, mas as subcompetências de modelação que tem de mobilizar para transitar entre essas fases, sendo tais rotas reconstruídas a partir dos enunciados verbais ou representações externas do estudante (Borromeo Ferri, 2018). Em geral, os estudantes que desenvolvem rotas não lineares evidenciam uma maior mobilização de competências de modelação em comparação com aqueles que desenvolvem rotas lineares. No caso das rotas lineares, cada competência evidenciada é mobilizada só numa ocasião, embora nem todas as rotas sigam a sequência ideal do ciclo de modelação. Assim, por exemplo, evidenciam-se algumas rotas lineares que começam e terminam no resto do mundo, mas mobilizando competências limitadas a compreender a tarefa, simplificar/estruturar a situação problema e matematizar o modelo, após o qual o estudante volta ao resto do mundo para apresentar o relatório de resultados. Neste sentido, o facto de estudantes com rotas lineares terem reportado resultados no contexto da situação problema, saltando fases do ciclo de modelação, evidencia dificuldades que têm para desenvolver certas competências de modelação associadas às fases não transitadas. No caso das rotas não lineares, os estudantes transitam pela fase do modelo real e do modelo matemático pelo menos duas vezes, considerando diferentes estratégias para trabalhar a situação problema, o que evidencia que competências como simplificar/estruturar a situação problema e matematizar o modelo são mobilizadas mais de uma vez, existindo retornos e avanços do mundo matemático para o resto do mundo, do mundo matemático para o mundo tecnológico, e algumas vezes, ainda que em menor número, do mundo tecnológico para o resto mundo.

Portanto, os resultados permitem concluir que a existência de rotas de modelação que ligam o mundo tecnológico com os outros dois mundos sustenta a perspetiva segundo a qual o mundo tecnológico amplia o processo de modelação, pelo que seria melhor representá-lo como um mundo intermédio entre o resto do mundo e o mundo matemático, não seguindo necessariamente a proposta de Siller e Greefrath (2010), nomeadamente um mundo que se relaciona só com o mundo matemático. Consequentemente, as rotas de modelação, para além de ajudarem no diagnóstico de subcompetências de modelação que os estudantes evidenciam e a identificar dificuldades associadas aos processos de modelação (Borromeo Ferri, 2018), permitem olhar para possíveis maneiras como o estudante pode tender a mobilizar essas competências em tarefas posteriores com contextos semelhantes, incluindo o caminho que segue ao mobilizar competências para trabalhar com tecnologia.

8.2.3 Contributos da experiência de ensino: potencialidades e limitações das suas componentes essenciais

Os contributos da experiência de ensino para a aprendizagem, referidas pelos estudantes, focaram-se em três componentes: a aprendizagem de conhecimentos de álgebra linear; a aprendizagem com tarefas de modelação; e a aprendizagem com tecnologia.

Os resultados permitem inferir que a Álgebra Linear é reconhecida pelos estudantes como uma disciplina de utilidade que os ajuda no estudo de conceitos a serem aprendidos em outras disciplinas de curso e no treino de competências que se distanciam de um trabalho considerado de carácter abstrato. Essa utilidade da álgebra linear é influenciada pelo trabalho realizado na experiência de ensino com tarefas de modelação, sendo que os estudantes referem estas tarefas como elementos que ajudam no desenvolvimento de competências que não costumam mobilizar e a ver os conceitos matemáticos aplicados em contextos reais. Assim, os objetivos "pragmático" e "formativo" referidos por Blum (2015) são identificados, nos resultados deste estudo, como contributos da experiência de ensino apoiada em tarefas de modelação, sendo também identificado o objetivo "psicológico" associado ao papel motivador das tarefas, embora em muito menor número de estudantes, o que admito ser consequência de alguns estudantes se sentirem mais seguros na resolução de exercícios matemáticos devido à exigência cognitiva que as tarefas de modelação acarretam e que os estudantes associam a maior necessidade de tempo para as resolver.

Portanto, é de considerar que a disciplina de Álgebra Linear incorpore no programa curricular uma das recomendações mencionadas por Carlson et al. (1993) para o ensino e aprendizagem da álgebra linear, nomeadamente que o programa e a metodologia desenvolvida em sala de aula considerem exemplos de aplicações em contextos reais que cubram a maior parte das áreas de estudo da formação académica dos estudantes. Trata-se então de promover os propósitos formativo e pragmático, mas também de motivar o estudante a aprender neste tipo de ambientes em que podem encontrar aplicabilidade da álgebra linear especificamente para o seu curso de formação profissional. Para além disso, o carácter formal da disciplina MA1004 é um aspeto relevante na lecionação dos conceitos porque se pretende que o estudante desenvolva competências para o tratamento formal dos conceitos, nomeadamente a sua estrutura e linguagem simbólica, mas ao mesmo tempo esse ensino formal deve ser complementado com exemplos de aplicação dos conceitos e com outras metodologias que permitam superar as dificuldades associadas à abstração. Em particular, deve-se articular a aprendizagem formal dos conceitos com o recurso a representações geométricas, as quais não devem tomar o lugar do tratamento algébrico mas enriquecer e promover a base de conhecimento para a posterior manipulação algébrica do conceito matemático (Sandoval & Possani, 2016).

No que se refere à tecnologia, conclui-se que a experiência do estudante com certo recurso tecnológico e a sua utilização na sala de aula para a aprendizagem de conceitos de álgebra linear condiciona a visão que o estudante pode vir a ter em relação ao uso desse recurso tecnológico, nomeadamente para: facilitar processos de cálculo matemático; facilitar a representação visual de conceitos; ou facilitar o processo de modelação. Considerando que os estudantes evidenciam ser capazes de explorar e tirar mais partido de recursos como o *GeoGebra* e do *Excel* nas tarefas de modelação, posso concluir que as melhores ferramentas tecnológicas para apoiar o processo de modelação do estudante, do ponto de vista didático, podem ser as ferramentas mais amigáveis em termos da sintaxe e da especialização exigida ao utilizador na tarefa.

8.3 Reflexões finais

A realização deste estudo nasceu como parte de um desejo que temos muitos de nós, professores, de melhorar a nossa prática letiva através de metodologias inovadoras que ajudem a promover a aprendizagem dos estudantes. Foi através da minha experiência como professor da disciplina de Álgebra Linear no ensino superior e dos estudos investigativos analisados que surgiram uma série de questões, marcando o antes e o depois deste desafio complexo, mas maravilhoso, que é a investigação.

O processo desenvolvido ao longo desta investigação ajudou-me a crescer como investigador e professor. Como investigador, foi uma constante aprendizagem em cada uma das etapas que constituem o processo investigativo, desde o início com a formulação das questões de investigação e até o final com o que implica refletir sobre as conclusões que emergiram do estudo. Sem dúvida, considero que fazer investigação é um desafio pessoal no qual a perseverança, a vontade de querer aprender com outros e o desejo de adquirir conhecimento para a prática profissional têm de estar integrados. Como professor, tive a oportunidade de aprender sobre ambientes de ensino e aprendizagem nunca antes utilizados, como a modelação matemática de um ponto de vista educacional, pondo em prática as minhas próprias habilidades para criar tarefas em contextos reais na disciplina de Álgebra Linear e lidar com tudo o que implica uma gestão de aula alicerçada em tarefas de modelação. Tive também algumas limitações nas diferentes intervenções da experiência de ensino, nomeadamente o facto de o trabalho com tarefas de modelação ter funcionado como um complemento ao trabalho de sala de aula que era comum desenvolver-se na disciplina e em que eu não era o professor da turma. Assim, o meu papel de professor ficou restringido aos períodos de trabalho com as tarefas de modelação. Neste sentido, tive de me ajustar ao tempo disponível para realizar cada intervenção da experiência de ensino para não afetar a lecionação formal dos conceitos desenvolvidos pelo professor da turma. Esta limitação teve implicações, nomeadamente condicionando o tempo de trabalho com os estudantes e ver-me impossibilitado de me alargar nas discussões realizadas nos diferentes grupos e coletivamente, investindo mais tempo na partilha das propostas de resolução da tarefa com a turma.

Apesar de os estudantes estarem acostumados a trabalhar de forma independente, os resultados obtidos nas resoluções das tarefas de modelação e nos contributos mencionados pelos estudantes evidenciaram a importância desta prática social para promover um processo reflexivo e coletivo de aprendizagem. Neste sentido, considero que futuras intervenções com tarefas de modelação matemática deverão dar um papel mais participativo ao estudante nestas discussões coletivas. Uma forma de o fazer é ajustar a natureza das discussões coletivas durante a resolução da tarefa, de forma a que cada grupo tenha um momento para explicar como pensaram o seu processo de modelação, e a partir daí o professor/investigador pode criar momentos de discussão com toda a turma.

Para além disso, considerando que o atual programa de Matemática do secundário da Costa Rica (MEP, 2012) promove a aprendizagem da geometria desde um ponto de vista analítico em complemento com as representações geométricas das diferentes figuras no plano cartesiano, deveria considerar-se que este tipo de ensino da Matemática que articula a representação algébrica e a representação geométrica dos conceitos matemáticos também se mantenha no ensino superior nas disciplinas onde é possível, como a Álgebra Linear. Neste sentido, as tarefas de antecipação tornam-se elementos importantes para a prática de exercícios matemáticos que ajudem a promover conversões entre diferentes tipos de representações associadas ao conceito, e em complemento com o trabalho em tarefas de modelação. Essas tarefas de antecipação resultam em espaços para que o estudante tenha em mente diferentes formas de trabalhar o modelo matemático, pelo que considero útil manter a sua incorporação em futuras intervenções.

A partir dos contributos referidos pelos estudantes evidenciou-se que o carácter desafiante da tarefa de modelação não é a principal dificuldade que eles apresentam, mas sim as aprendizagens de conceitos matemáticos que têm de pôr em ação no momento da sua realização. Assim, para além do trabalho com tarefas de antecipação, a aplicação de tarefas de modelação tem de ser iniciada a pouco e pouco na disciplina de Álgebra Linear, sendo que alguns estudantes precisam alcançar uma certa maturidade com os conceitos matemáticos e com a maneira de os tratar no âmbito da Álgebra Linear. Ainda assim, a exigência cognitiva que é para os estudantes trabalhar em tarefas de modelação, sobretudo no princípio, também é um aspeto a considerar em futuras intervenções, pelo que considero duas alternativas para aproveitar ao máximo o tempo destinado em sala de aula: 1) disponibilizar ao estudante o enunciado da tarefa antes da sua implementação, para que este tente compreender a tarefa por si próprio com tempo adequado, como foi feito na experiência de ensino deste estudo a partir da segunda tarefa, e encorajando o estudante a construir um modelo matemático para a situação problema; 2) dividir o trabalho de resolução de cada tarefa em dois momentos, um destinado à criação do modelo matemático, e o outro para o trabalhar, de forma que neste segundo momento a maior parte do tempo dedicado em sala de aula seja para refletir sobre o(s) modelo(s) matemático(s) proposto(s), promovendo sobretudo competências de interpretação e validação de resultados no estudante, as quais permitam questionar-se sobre a necessidade de começar ou não um novo ciclo de modelação.

Por sua vez, a tecnologia, fundamental na atual sociedade em que vivemos e numa proposta de tarefas de modelação com acesso a aulas em laboratório de computador, permite-me questionar até que ponto a tecnologia é prontamente um apoio para o processo de modelação do estudante, sendo que considero, após realizada esta investigação, que primeiramente deve criar-se a cultura de trabalhar com tecnologia em sala de aula, e posteriormente incentivar o estudante a utilizar da tecnologia nas suas primeiras tarefas de modelação, enquanto nas últimas tarefas isso se pode deixar-se à sua escolha, ainda que os problemas sejam tais que justifiquem a vantagem de utilizar o recurso tecnológico.

Finalmente, gostaria de mencionar novas questões que emergiram deste estudo para a investigação futura. Primeiramente, em relação às aprendizagens de conhecimentos de álgebra linear com tarefas de modelação, surge a necessidade de investigar se o estudante é capaz de mobilizar o mesmo modelo matemático utilizado na resolução de uma tarefa de modelação em outros contextos reais que avaliem os mesmos conceitos matemáticos. Em segundo lugar, em relação às competências de modelação, este estudo evidenciou uma maior mobilização de competências para ir do resto do mundo ao mundo matemático e mostrou, consequentemente, que a maior parte dos estudantes teve dificuldade para interpretar e validar resultados. Parece-me pertinente saber que tipo de conexões são capazes de estabelecer os estudantes com as suas experiências quotidianas, conhecimentos prévios de outras disciplinas, entre outras, para mobilizar um modelo matemático num contexto real, e como estas conexões ajudam a mobilizar suas competências no trabalho das tarefas de modelação.

Todos os aspetos aqui referidos e as considerações feitas ao longo desta tese, embora sejam fruto do trabalho feito num contexto educativo específico, nomeadamente o trabalho com estudantes Costarriquenhos de uma disciplina de Álgebra Linear, podem servir como apoio para outros estudos com características semelhantes que desejem aprofundar a investigação da álgebra linear no ensino superior. Desta forma, sei que este estudo não será o único a ser desenvolvido na linha de pesquisa em modelação matemática com álgebra linear no meu país, mas acredito que seja o começo de um conjunto de estudos elaborados por investigadores que se interessam por esta área da Matemática, na qual certamente continuarei a investigar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AERA (2011). Code of Ethics. American Educational Research Association. Approved by the AERA Council, February 2011. *Educational Researcher*, *40*(3), 145–156. https://doi.org/10.3102/0013189X11410403

Anderson, G., & Arsenault, N. (1998). *Fundamentals of educational research* (2nd ed.). London, UK: Routledge Falmer.

Arce, C., Castillo, W., & González, J. (2014). *Algebra lineal*. San José: Editorial UCR.

Bagley, S., & Rabin, J. (2010). Students' use of computational thinking in Linear Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*, 83–104. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0022-x

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2015). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. *Journal of mathematical behavior*, *37*, 36–47. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.11.003

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Belei, R. A., Gimeniz-Paschoal, S. R., Nascimento, E. N., & Matsumoto, P. H. V. R. (2008). O uso de entrevista, observação e videogravação em pesquisa qualitativa. *Cadernos de educação*, *30*(1), 187–199. https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/1770

Bianchini, B. L., de Lima, G. L., & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies**.** *ZDM Mathematics Education*, *51* (7), 1097–1110. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5

Biggs, J., & Tagg, C. (2011). *Teaching for quality learning at the university* (4th ed.). London, UK: Mc Graw-Hill.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education - Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73–96). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics - ICTMA 12* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *22*(3), 123–139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blomhøj M., & Jensen T. H. (2007). What's all the fuss about competencies?. Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn &, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp.45-56). New York, NY: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)* (pp. 2080-2089). Larnaca: University of Cyprus and ERME.

Borromeo Ferri, R. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática, 110*, 19–25.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modelling in school and teacher education*. Picassoplatz, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J., Borromeo Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., Stillman, G., English, L., Wake, G., Kaiser, G., & Kwo, O. (2014). Mathematical modelling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional and teacher education perspectives. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp.145-172). Vancouver: PME.

Campbell, S. (2001). Enacting possible worlds: Making sense of (human) nature. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education Applications in science and technology* (pp. 3-14). Chichester, UK: Horwood.

Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: A proposal to introduce linear algebra concepts. *Journal of Technology and Science Education, 6*(1), 62–70. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177

Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2017). Mathematical modelling and the learning trajectory: Tools to support the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 338–352. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A. (1993). The Linear Algebra curriculum study group recommendations for the first course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal, 24*(1), 41–46. https://www.jstor.org/stable/i326560

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G., Lingefjard, T., & Wake, G. (2015). Introduction to the papers of TWG06: Applications and modelling. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*

(*CERME 9*) (pp.790-793). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Chaamwe, N., & Shumba, L. (2016). Spreadsheets: A tool for e-learning - a case of matrices in Microsoft Excel. *International Journal of Information and Education Technology*, *6*(7), 570–575. http://dx.doi.org/10.7763/IJIET.2016.V6.753

Chang, J. M. (2011). A practical approach to inquiry-based learning in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(2), 245–259. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.519795

Chinnappan, M. (2010). Cognitive load and modelling of an algebra problem. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 8–23. https://doi.org/10.1007/BF03217563

Cohen, L., Manion, L., & Mohinson, K. (2011). *Research methods in education (7th ed.)*. London, UK: Routledge.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas. Teoria e prática*. Coimbra: Coimbra Almedina.

Costa, V. (2013). Aspectos destacados de las teorías cognitivas del aprendizaje, como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo vectorial. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 513-521). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, *12*(23), 49–55. https://doi.org/10.26507/rei.v12n23.734

Czocher, J. (2018). How does validating activity contribute to the modelling process?. *Educational Studies in Mathematics*, *99*, 137–159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Denscombe, M. (2003). *The good research guide: For small-scale social research projects* (2nd ed.). Philadelphia, PA: McGraw Hill.

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear algebra and its applications*, *432*(8), 2141–2159. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.08.037

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados- a matemática no início superior.* Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.

Domínguez-García, S., García-Planas, M. I., & Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: An alternative way to teach Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1076–1086. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1153736

Dorier, J., & Sierspinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series* (Vol.7, 255–273). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_24

Duarte, T. (2009). A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica). *CIES e-Working Papers*, *60*. Disponível em http://hdl.handle.net/10071/1319

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ellis, J., Henderson, F., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Students reasoning about linear transformations. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.174-186). Portland, OR: SIGMAA/RUME.

Fernández, R. (2001). La entrevista en la investigación cualitativa. *Revista pensamiento actual*, *2*(3), 14–21.

Flóres, C. A., & Yemail, C. A. (2017). *Modelación y simulación con Geogebra: Una experiencia en el estudio de situaciones con medidas de área y volumen*. Tesis de maestría, Universidad Pontifica Bolivariana, Colombia.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Gehrig, R., Palacios Ramírez, J., Blesa Aledo, B., Cobo de Guzmán, F., García Jiménez, M., Muñoz Sánchez, P., & Redes García, J. (2014). *Guía de criterios básicos de calidad en la investigación cualitativa*. Murcia: UCAM.

Geiger, V. (2017). Designing for mathematical applications and modelling tasks in technology rich environments. In A. Leung, & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing Mathematics Education tasks–potential and pitfalls* (pp. 285-301). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_14

Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (5th ed.). São Paulo: Atlas.

González, J. J. (1998). Experimentos en álgebra lineal en Mathematica. *Suma*. *Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, *27*, 97–102.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling - Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14* (pp. 301–304). Dordrecht, The Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools - A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Guerreiro, A., Ferreira, T. R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, *23*(2), 279–295.

Guest, G., Namey, E., & Mitchell, M. (2013). *Collecting qualitative data: A field manual for applied research*. London, UK: SAGE Publications. https://dx.doi.org/10.4135/9781506374680

Gueudet-Chartier, G. (2006). Using Geometry to teach and learn Linear Algebra. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 171–195.

Han, X. (2008). Teaching elementary linear algebra using Matlab: An initial investigation. *The Scholarship of Teaching and Learning at EMU, 2.* https://commons.emich.edu/sotl/vol2/iss1/9

Havelková, V. (2013). GeoGebra in teaching linear algebra. In M. Ciussi & M. Augier (Eds.), *Proceedings of the 12th European Conference On E-Learning* (pp. 581-589). Sophia Antipolis, France: Academic Conferences and Publishing International.

Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9–35. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191–207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

IEUL (2016). *Carta ética para a investigação em educação e formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 – 15, de março de 2016. http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica

Ikeda, T., & Stephens, M. (2001). The effects of students' discussion in mathematical modelling. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education (ICTMA 9): Applications in science and technology* (pp.381-390). Chichester: Horwood.

Jensen, T. H. (2007). Assessing mathematical modelling competency. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 141-148). Chichester, UK: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.141

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Smith, K. (1991*). Cooperative learning: Increasing college faculty instructional productivity. ASHE-ERIC Higher Education Report No. 4*. Washington, DC: School of Education and Human Development, The George Washington University.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38* (3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Klymchuk, S., & Zverkova, T. (2001). Role of mathematical modelling and applications in university mathematics service courses: An across countries study. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education (ICTMA 9): Applications in science and technology* (pp. 227–234). Chichester: Horwood.

Kripka, R., Kripka, M., Pandolfo, P., Pereira, L., Viali, L., & Lahm, R. (2017). Aprendizagem de Álgebra Linear: Explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas. *Acta Scientiae*, *19*(4), 544–562.

Lesh, R. (2012). Research on models and modeling and implication for common core state curriculum standards. In L. H. Mayes (Ed.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 169-179). Laramie, WY: Wyoming Institute for the Study of Mathematics Education.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modelling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical thinking and learning*, *5*(2-3), 109–129.

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies?. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Mallet, D. G. (2007) Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 16–32.

Martín, M. (2004). Diseño y validación de cuestionarios. *Matronas Profesión*, *5*(17), 23–29.

Mason, J. (2000) Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 97–111. https://doi.org/10.1080/002073900287426

Matos, J. F. (1995). *Modelação matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudio de Matemática.* San José, Costa Rica: autor. http://www.mep.go.cr

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Nardi, E., Biza1, I., González-Martín, A.S., Gueudet, G., Iannone P., Viirman, O., & Winsløw, C. (2015). In Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9) (pp. 2048-2051). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education (ICTMA 9): Applications in science and technology* (pp.72-88). Chichester, UK: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099655.1.72

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), Proceedings of the *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 116-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3–32). New York, NY: Springer.

Oktaç, A. (2018). Understanding and visualizing linear transformations. In G. Kaiser et al. (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 463–481). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_26

Oliveira, R. H. (2001). A mathematics curriculum for undergraduate courses based on mathematical modelling and computer science. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education (ICTMA 9): Applications in science and technology* (pp. 235-250). Chichester, UK: Horwood.

Plaxco, D., & Wawro, M. (2015). Analyzing student understanding in linear algebra through mathematical activity. *Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 87–100. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.002

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33-56). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55–81.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2125–2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Pujolàs, P., Riera, G., Pedragosa, O., & Soldevila, J. (2005). *Aprender juntos alunos diferentes (I) El "qué" y el "cómo" del aprendizaje cooperativo en el aula*. España: Octaedro

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in Mathematics: Which influence do school-related variables have?. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(7), 1343–1363. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Robinson, R., & Savenye, W. (2001). Qualitative research issues and methods: An introduction for educational technologists. In D. Jonassen, & D. Jonassen (Eds.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 1171-1195). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rodríguez, C. (2011). *Diagnóstico de las dificultades de la enseñanza-aprendizaje en un curso de Álgebra Lineal.* Bogota: Universidad de los Andes.

Rosa, M., & Orey, D. (2012). A modelagem como um ambiente de aprendizagem para a conversão do conhecimento matemático. *Bolema*, *26*(42A), 261–290.

Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista Pilar. (2010). *Metodología de la Investigación* (5th ed.). México, DF: MC Graw Hill.

Sánchez, A. M. (2007). El uso de las nuevas tecnologías en el profesorado universitario. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, *30*, 61–72.

Sánchez, J. (2018). *Carta al estudiante de curso MA1004. I semestre*. Universidad de Costa Rica.

Sandoval, I. & Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in IR^3: Learning challenges. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 109–127. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9675-2

Sañudo, L. (2006). La ética de la investigación educativa. *Hallazgos*, *3*(6), 83–98.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2013). Effect of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 105–124.

Siller, H-S., & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 6) (pp. 2136–2145). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique and ERME.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114–145.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20–26.

Sofroniou, A., & Poutos, K. (2016). Investigating the effectiveness of group work in Mathematics. *Education science*, *6*(30), 1–15.

Sokolowski, A. (2015). The Effects of mathematical modelling on students' achievement-meta-analysis of research. *The IAFOR Journal of Education*, *3*(1), 93–104.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173–188. https://doi.org/10.1080/00207390903399620

Tall, D. O. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *24*(1), 29–32.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Thomas, M. O. J., Druck, I., Huillet, D., Ju, M., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key mathematical concepts in the transition from secondary school to university. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12): Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 265–284). Cham: Springer.

Thomas, M. O. J., & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 275–296.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, *9*(46), 75–87.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779–1792. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., & Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema de la matriz asociada a una transformación lineal. *Educación Matemática*, *27*(2), 95–124.

Trigueros, M., & Bianchini, B. L. (2016). Learning linear transformations using models. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 1st Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 326–336). Montpellier, FR: University of Montpellier and INDRUM.

Uhlig, F. (2002). The Role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 335–46. https://doi.org/10.1023/A:1021245213997

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *27*, 1–21.

Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 347–375. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1734

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, *22*(8), 577–599.

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Oaks, CA: SAGE.

ANEXOS

Anexos A – Tarefas do estudo piloto

Anexo A1: Abastecimiento de agua mediante un sistema de tuberías

El agua constituye uno de los recursos naturales más importantes de la vida. En una vivienda este recurso es disponible a la persona por medio de un sistema de tuberías, el cual queda formado por uniones de tubos que pueden o no tener el mismo grosor, dependiendo la presión con que se desee que salga el agua al pasar por el punto (nodo) donde se intersecan los tubos. Lo que sí bien se sabe es que en cualquier punto donde haya una unión de tubos (nodos), la cantidad de agua que entra por esa unión debe ser igual a la cantidad de agua que sale, o en términos más formales, el caudal del agua debe ser el mismo antes y después de pasar por el nodo.

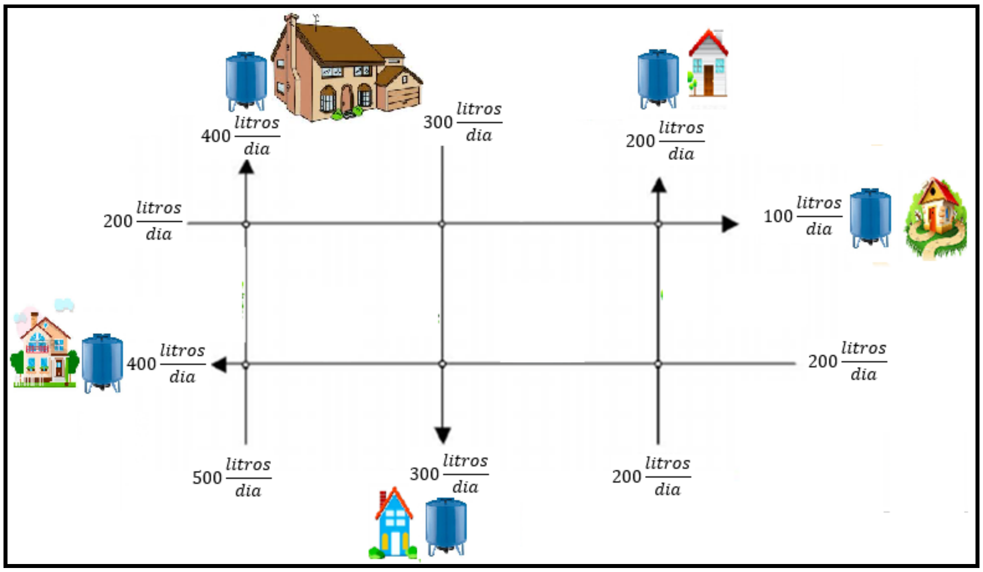


Figura 1. Plano de sistema de tubería para abastecimiento de agua.

En la figura anterior se representa un plano de abastecimiento de agua por día elaborado por uno de los funcionarios de Acueductos y Alcantarillados para una localidad formada por cinco casas. El centro de control de Acueductos y Alcantarillados ha instalado sensores electrónicos que calculan el caudal de agua que pasa por un nodo en particular. Las flechas representan la dirección hacia donde fluye el agua y indican, el caudal, en litros por día, que fluye de manera constante a través de una parte de la tubería hasta llegar a los tanques de almacenamiento de agua en cada casa. En cada nodo hay piezas de tubos (uniones cruz) que permiten una distribución continua del flujo del agua a través de todo el sistema.

El centro de control está interesado en analizar las posibles opciones de abastecimiento de agua según el plano de la figura 1, esto con el fin de tener información recopilada en referencia al caudal mínimo y máximo que podría fluir por cada tubo y considerar las previsiones a tener en caso de que alguno de los tubos del sistema de tubería falle.

Como estudiante de ingenieria o ciencias exactas, se le ha solicitado ayuda por parte del funcionario que desarrolló el plano. Ayuda al funcionario a responder las siguientes preguntas:

1) Si pudiéramos establecer cantidades mínimas y máximas de flujo de agua por cada tubo que conforma el sistema de tubería ¿cuál sería esta cantidad para cada tramo para mantener la normalidad de caudal indicada en los tramos de la figura 1?

2) ¿Es posible cerrar el flujo de agua por uno de los tubos que conforma el sistema de tubería manteniendo la normalidad de caudal indicada en la figura 1? Si es así, ¿cuáles tramos de la tubería se pueden o no cerrar?

3) ¿Su modelo está bien adaptado para considerar una restricción? ¿En qué otra situación del entorno podría usar su modelo?

Ese parecer deberá ser hecho a través de una redacción escrita donde le explique al funcionario qué estrategias usó para definir su respuesta, los resultados que obtuvo y en qué criterios/hipótesis se basó para definirla, justificando esas opciones y mostrando analíticamente que el resultado que obtuvo es coherente con su respuesta. Además, mencione y explique ¿cuáles son los desafíos que enfrentó en esta actividad?

Anexo A2: Movimiento de drones

Uno de los aparatos tecnológicos que han tomado gran relevancia para algunas actividades humanas (entretenimiento, seguridad, agricultura, socorrismo, cartografía, uso militar, etc) son los drones (fig 1). Estos aparatos voladores tienen la característica de no necesitar ser tripulados, siendo capaces de ser manejados desde una cierta distancia o trazar su propia ruta mediante GPS, y algunos con tecnología FVP (First Person View) que permite a la persona que maneja el drone, con un control remoto inalámbrico, observar el trayecto del drone como si estuviera en la cabina de un avión (fig 2).

El rango de alcance de estos drones con FVP comúnmente llega a ser de 500m o más, dependiendo de la potencia. El movimiento de traslación del drone se rige por movimientos en línea recta, cuya orden es enviada por la señal transmitida por el control remoto.

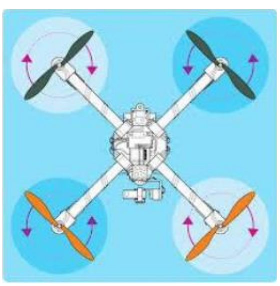


Figura 1. Drone cuadricóptero.

Figura 2. Drone con tecnología FVP

Como estudiante de ingenieria o ciencias exactas, has recibido un mensaje de un diseñador inicial de drones, el cual trabaja con tecnología FVP. El mensaje que te ha enviado el diseñador es el siguiente:

Buenas tardes!, mi nombre es Stirling, soy diseñador de drones. Me informaron que usted podría ayudarme con la creación de posibles trayectorias de movimiento de vuelo que podrían ser programadas en un drone que deseo construir con la cualidad de tener un desplazamiento viable a cualquier punto dentro del rango de alcance que deseo incorporar en el drone. El drone que deseo construir debe cumplir las siguientes condiciones:

- *El drone sólo debe tener movimiento traslacional (no se debe añadir la función de rotación).*
- *El movimiento para arriba y abajo será vertical, mientras que el movimiento a una misma altura (movimiento horizontal) tendrá tantos botones como direcciones de desplazamiento traslacional desee para el drone a esa altura.*
- *Las direcciones de movimiento deben ser indicadas mediante vectores flecha.*
- *El alcance máximo del drone es de 12000m.*

Anexo A3: Cifrado y descifrado de códigos

Sabía que en el proceso de escritura en una computadora interviene una comunicación textual entre el usuario y la computadora. Esta comunicación es transmitida mediante códigos, y en el caso del computador la información es entendida a partir de ceros y unos (Sistema binario), mientras que para el usuario es entendida a partir del código ASCII (Código Estándar Americano para el Intercambio de Información) de caracteres alfanuméricos.

Para evitar que un mensaje enviado en código ASCII sea leído por alguna persona no autorizada, se puede recurrir a codificar el mensaje recurriendo a los números, utilizando la equivalencia entre los códigos ASCII y el sistema decimal (ver Anexo 1). Una forma de hacer esto es utilizando una matriz de mensaje T y una matriz de cifrado C.

La matriz de mensaje T debe contener el mensaje de texto a enviar por el emisor en términos de números, utilizando para eso por ejemplo la equivalencia de cada letra en código ASCII. Para esto las letras del mensaje de texto son agrupadas en grupos de igual cantidad (parejas, tríos, cuartetos, etc), colocando cada grupo de letras como vectores fila o columna, según la dimensión de la matriz que queremos utilizar. Por su lado, la matriz de cifrado C deberá ser una matriz conocida con anticipación por el emisor y el receptor del mensaje de texto, de tal forma que el mensaje codificado sea recibido por el receptor a través de una matriz codificada $\bar{M}$.

Un dato histórico

El 17 de enero de 1917, la sección política británica conocida como Sala 40, desencriptó el telegrama alemán enviado por el ministro alemán de Exteriores Arthur Zimmermann al embajador alemán en los Estados Unidos, Johann von Bernstroff, y al embajador alemán en México, Heinrich Von Eckhardt. Este telegrama, tiene importancia histórica en la declaración de guerra de los Estados Unidos a Alemania. Este telegrama (versión en inglés), su codificación y descodificación son presentados en la figura 1, 2 y 3 respectivamente (ver Anexos 2).

1) Considerando la información suministrada elabore una nueva codificación para la frase del telegrama Zimmermann "The settlement in detail is left to you" ("el acuerdo en detalle es dejado a usted") de forma que el mensaje codificado necesite de una matriz de cifrado por parte del lector del mensaje para su descodificación. Utilice codigo ASCII y explique el proceso utilizado en la creación de su modelo.

2) Si el mensaje codificado fuese enviado a una persona particular P, ¿qué información necesitaría saber P para descifrar el mensaje? Determine la relación matemática que permita encontrar el mensaje original en función de la información necesaria para descifrarlo.

Anexo 1

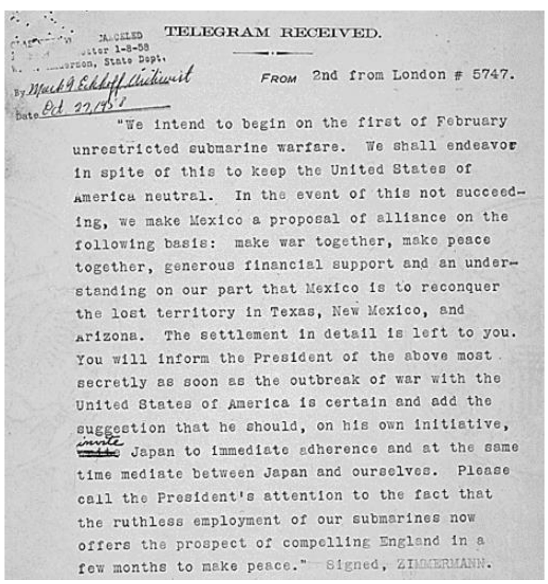
Tabla 1. Códigos ASCII

Caracteres ASCII de control		
00	NULL	(carácter nulo)
01	SOH	(inicio encabezado)
02	STX	(inicio texto)
03	ETX	(fin de texto)
04	EOT	(fin transmisión)
05	ENQ	(consulta)
06	ACK	(reconocimiento)
07	BEL	(timbre)
08	BS	(retroceso)
09	HT	(tab horizontal)
10	LF	(nueva línea)
11	VT	(tab vertical)
12	FF	(nueva página)
13	CR	(retorno de carro)
14	SO	(desplaza afuera)
15	SI	(desplaza adentro)
16	DLE	(esc.vínculo datos)
17	DC1	(control disp. 1)
18	DC2	(control disp. 2)
19	DC3	(control disp. 3)
20	DC4	(control disp. 4)
21	NAK	(conf. negativa)
22	SYN	(inactividad sínc)
23	ETB	(fin bloque trans)
24	CAN	(cancelar)
25	EM	(fin del medio)
26	SUB	(sustitución)
27	ESC	(escape)
28	FS	(sep. archivos)
29	GS	(sep. grupos)
30	RS	(sep. registros)
31	US	(sep. unidades)
127	DEL	(suprimir)

Caracteres ASCII imprimibles					
32	espacio	64	@	96	`
33	!	65	A	97	a
34	"	66	B	98	b
35	#	67	C	99	c
36	$	68	D	100	d
37	%	69	E	101	e
38	&	70	F	102	f
39	'	71	G	103	g
40	(	72	H	104	h
41	)	73	I	105	i
42	*	74	J	106	j
43	+	75	K	107	k
44	,	76	L	108	l
45	-	77	M	109	m
46	.	78	N	110	n
47	/	79	O	111	o
48	0	80	P	112	p
49	1	81	Q	113	q
50	2	82	R	114	r
51	3	83	S	115	s
52	4	84	T	116	t
53	5	85	U	117	u
54	6	86	V	118	v
55	7	87	W	119	w
56	8	88	X	120	x
57	9	89	Y	121	y
58	:	90	Z	122	z
59	;	91	[	123	{
60	<	92	\	124	|
61	=	93	]	125	}
62	>	94	^	126	~
63	?	95	_		

ASCII extendido (Página de código 437)							
128	Ç	160	á	192	└	224	Ó
129	ü	161	í	193	┴	225	ß
130	é	162	ó	194	┬	226	Ô
131	â	163	ú	195	├	227	Ò
132	ä	164	ñ	196	─	228	õ
133	à	165	Ñ	197	┼	229	Õ
134	å	166	ª	198	ã	230	µ
135	ç	167	º	199	Ã	231	þ
136	ê	168	¿	200	╚	232	Þ
137	ë	169	®	201	╔	233	Ú
138	è	170	¬	202	╩	234	Û
139	ï	171	½	203	╦	235	Ù
140	î	172	¼	204	╠	236	ý
141	ì	173	¡	205	═	237	Ý
142	Ä	174	«	206	╬	238	¯
143	Å	175	»	207	¤	239	´
144	É	176	░	208	ð	240	≡
145	æ	177	▒	209	Ð	241	±
146	Æ	178	▓	210	Ê	242	‗
147	ô	179	│	211	Ë	243	¾
148	ö	180	┤	212	È	244	¶
149	ò	181	Á	213	ı	245	§
150	û	182	Â	214	Í	246	÷
151	ù	183	À	215	Î	247	¸
152	ÿ	184	©	216	Ï	248	°
153	Ö	185	╣	217	┘	249	¨
154	Ü	186	║	218	┌	250	·
155	ø	187	╗	219	█	251	¹
156	£	188	╝	220	▄	252	³
157	Ø	189	¢	221	¦	253	²
158	×	190	¥	222	Ì	254	■
159	ƒ	191	┐	223	▀	255	nbsp

Anexos 2



State Dept.

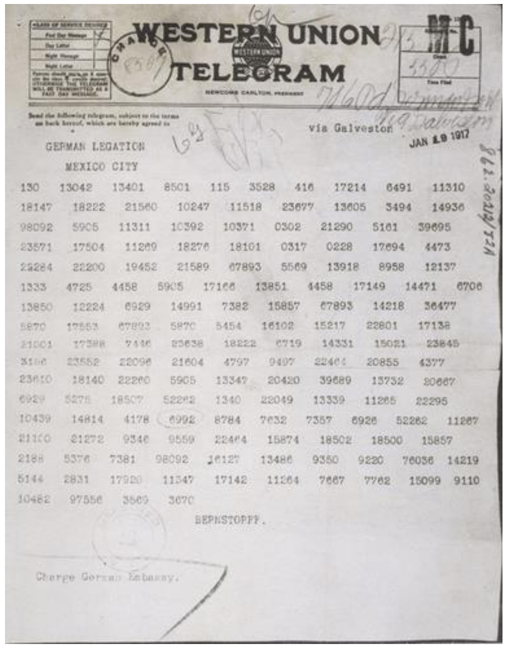
By Mack G Eckhoff Archivist

TELEGRAM RECEIVED.

FROM 2nd from London # 5747.

"We intend to begin on the first of February unrestricted submarine warfare. We shall endeavor in spite of this to keep the United States of America neutral. In the event of this not succeeding, we make Mexico a proposal of alliance on the following basis: make war together, make peace together, generous financial support and an understanding on our part that Mexico is to reconquer the lost territory in Texas, New Mexico, and Arizona. The settlement in detail is left to you. You will inform the President of the above most secretly as soon as the outbreak of war with the United States of America is certain and add the suggestion that he should, on his own initiative, invite Japan to immediate adherence and at the same time mediate between Japan and ourselves. Please call the President's attention to the fact that the ruthless employment of our submarines now offers the prospect of compelling England in a few months to make peace." Signed, ZIMMERMANN.

Figura 1. Telegrama Zimmermann.



WESTERN UNION TELEGRAM

NEWCOMB CARLTON, PRESIDENT

Send the following telegram, subject to the terms on back hereof, which are hereby agreed to

via Galveston

JAN 19 1917

GERMAN LEGATION

MEXICO CITY

130 13042 13401 8501 115 3528 416 17214 6491 11310
18147 18222 21560 10247 11518 23677 13605 3494 14936
98092 5905 11311 10392 10371 0302 21290 5161 39695
23571 17504 11269 18276 18101 0317 0228 17694 4473
22284 22200 19452 21589 67893 5569 13918 8958 12137
1333 4725 4458 5905 17166 13851 4458 17149 14471 6706
13850 12224 6929 14991 7382 15857 67893 14218 36477
5870 17553 67893 5870 5454 16102 15217 22801 17138
21001 17388 7446 23638 18222 6719 14331 15021 23845
3156 23552 22096 21604 4797 9497 22464 20855 4377
23610 18140 22260 5905 13347 20420 39689 13732 20667
6929 5275 18507 52262 1340 22049 13339 11265 22295
10439 14814 4178 6992 8784 7632 7357 6926 52262 11267
21100 21272 9346 9559 22464 15874 18502 18500 15857
2188 5376 7381 98092 16127 13486 9350 9220 76036 14219
5144 2831 17920 11347 17142 11264 7667 7762 15099 9110
10482 97556 3569 3670

BERNSTORFF.

Charge German Embassy.

Figura 2. Telegrama Zimmermann codificado mediante código denominado 007 Mensaje Zimmermann decodificado grupo por grupo como fue enviado por el embajador Bernstorff al ministro de Alemania Vonn Eckhardt en México en enero de 1917.

130	Nr. 3	13851	stop	18507	hinzufuegen
13042		4458	gemeinsamen	52262	Japan
13401	Auswaertiges Amt	17149	Friedensschluss	1340	von
8501	telegraphiert	14471	stop	22049	sich
115	vom 16ten Januar	6706	reichliche	13339	aus
3528	colon	13850	finanzielle	11265	zu
416	Nr. 1	12224	Unterstuetzung	22295	sofortiger
17214	Ganz geheim	6929	und	10439	Beitretung
6491	Selbst	14991	Einverstaendnis	14814	einladen
11310	zu	7382	unsererseits	4178	infinitive with zu
18147	entziffern	15857	dass	6992	und
18222	stop	67893	Mexiko	8784	gleichzeitig
21560	Wir	14218	in	7632	zwischen
10247	beabsichtigen	36477	Texas	7357	uns
11518	am	5870	comma	6926	und
23677	ersten	17553	Neu	52262	Japan
13605	Februar	67893	Mexiko	11267	zu
3494	un	5870	comma	21100	vermitteln
14936	eingeschraenkten	5454	Ar	21272	stop
98092	U-boot	16102	iz	9346	Bitte
5905	krieg	15217	on	9559	den
11311	zu	22801	a	22464	Praesidenten
10392	beginnen	17138	frueher	15874	darauf
10371	stop	21001	verlorenes	18502	hinweisen
0302	Es wird	17388	Gebiet	18500	comma
21290	versucht	7446	zurueck	15857	dass
5161	werden	23638	erobert	2188	ruecksichtslose
39695	Vereinigte Staaten von	18222	stop	5376	Anwendung
	Amerika	6719	Regelung	7381	unserer
23571	trotzdem	14331	im	98092	U-boote
17504	neutral	15021	einzelnen	16127	jetzt
11269	zu	23845	Euer Hochwohlgeboren	13486	Aussicht
18276	erhalten	3156	ueberlassen	9350	bietet
18101	stop	23552	stop	9220	comma
0317	Fuer den Fall	22096	Sie	76036	England
0228	dass dies	21604	wollen	14219	in
17694	nicht	4797	Vorstehendes	5144	wenigen
4473	gelingen	9497	dem	2831	Monat
22284	sollte	22464	Praesidenten	17920	en
22200	stop	20855	streng	11347	zum
19452	schlagen	4377	geheim	17142	Frieden
21589	wir	23610	eroeffnen	11264	zu
67893	Mexiko	18140	comma	7667	zwingen
5569	auf	22260	sobald	7762	stop
13918	folgender	5905	Kriegs	15099	Empfang
8598	Grundlage	13347	ausbruch	9110	bestaetigen
12137	Buendnis	20420	mit	10482	stop
1333	vor	39689	Vereinigten Staaten	97556	Zimmermann
4725	stop	13732	fest	3569	stop
4458	Gemeinsame	20667	steht	3670	Schluss der Depesche
5905	Kriegs	6929	und		
17166	fuehrung	5275	Anregung		

Figura 3. Descifrado del telegrama Zimmermann.

Anexos B – Tarefas de antecipação

Anexo B1: Sistemas de ecuaciones lineales

Instrucciones

- Utilice lapicero azul o negro para el trabajo elaborado sin utilización de *software*, encerrando en un círculo posibles trozos de la escrita que **NO** quisiera considerar para ser evaluado. Así mismo, utilice las hojas en blanco disponibles, entregando un ejemplar de resolución por grupo al finalizar.

- Para el trabajo elaborado con utilización de *software*, guarde el archivo con el nombre TE1, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre TE1X indicaría el archivo correspondiente al trabajo elaborado por el grupo X. Suba el archivo al enlace que aparece en la plataforma de mediación virtual.

1. (2pts) Sea $S = \{(x, y, z): x = a - 1, y = b - a, z = 10 - b\}$ el conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones, $(x, y, z) \epsilon IR^+$. ¿Para qué valores de a e b esta definido el conjunto solución del sistema? Explique su razonamiento.

2. (2pts) Considere el conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones de la pregunta anterior. Determine un sistema lineal de ecuaciones que posea dicho conjunto solución como conjunto solución. Explique su razonamiento.

3. (2pts) Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{gathered} 3x + 6y = 0 \\ 4x + 6y = 12 \\ -x + y = 2 \end{gathered}$$

Represente gráficamente, en *Geogebra*, las tres rectas asociadas al sistema. ¿Qué se puede concluir acerca del conjunto solución del sistema lineal de ecuaciones? Explique su razonamiento.

4. (2pts) Sea $a \in IR$. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Utilice $Mathematica$ para encontrar el conjunto solución del sistema cuando $a = 1$.
b) Encuentre el(los) valor(es) de a para que el sistema sea inconsistente.

Anexo B2: Matriz inversa y determinantes

Instrucciones

- Utilice lapicero azul o negro para el trabajo elaborado sin utilización de *software*, encerrando en un círculo posibles trozos de la escrita que **NO** quisiera considerar para ser evaluado. Así mismo, utilice las hojas en blanco disponibles, entregando un ejemplar de resolución por grupo al finalizar.

- Para el trabajo elaborado con utilización de *software*, guarde el archivo con el nombre TE2, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre TE2X indicaría el archivo correspondiente al trabajo elaborado por el grupo X. Suba el archivo al enlace que aparece en la plataforma de mediación virtual.

1. (5pts) Sean A,B y D matrices tales que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz X, en caso de estar bien definida. Justifique su respuesta.

$$B^T * X^{-1} = cA + D + I_2,\ c \in IR$$

2. Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) (5pts) Encuentre, utilizando *Mathematica*, para que valores de k la matriz A es invertible.
b) (5pts) Calcule la inversa de *A*, utilizando *Mathematica*, para alguno de los valores de *A* encontrados en el punto anterior.

3. (5pts) Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w + 5u = 0 \\ -x - 3z - 4w - 5u = 0 \\ 2y + z + u = 0 \\ x + 2y - z + u = 0 \\ 3x + y - z - 3u = 1 \end{cases}$$

Sin utilizar un Gauss-Jordan ni comandos referidos a este método, encuentre el conjunto solución del sistema lineal.

Anexo B3: Geometría vectorial

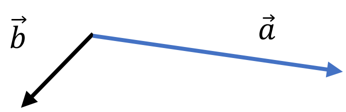
Instrucciones

- Utilice lapicero azul o negro para el trabajo elaborado sin utilización de *software*, encerrando en un círculo posibles trozos de la escrita que **NO** quisiera considerar para ser evaluado. Así mismo, utilice las hojas en blanco disponibles, entregando un ejemplar de resolución por grupo al finalizar.

- Para el trabajo elaborado con utilización de *software*, guarde el archivo con el nombre TE3, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre TE3X indicaría el archivo correspondiente al trabajo elaborado por el grupo X. Suba el archivo al enlace que aparece en la plataforma de mediación virtual.

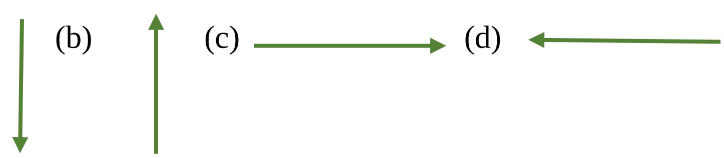
1. Dados los siguientes puntos en IR^3, $A = (2,0,2), B = (0,2,2), C = (0,1,0)$, $D = (0,-3,0)$
   a) (4pts) Utilice *Geogebra* para representar los puntos A, B, C y D. Además, trace los segmentos que unen los lados $A - B - C - D - A$
   b) (5pts) Calcule el perímetro del objeto geométrico formado en la parte a)

2. (2pts) En la figura adjunta se muestran los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que $\|\vec{a}\| = \|2\vec{b}\|$

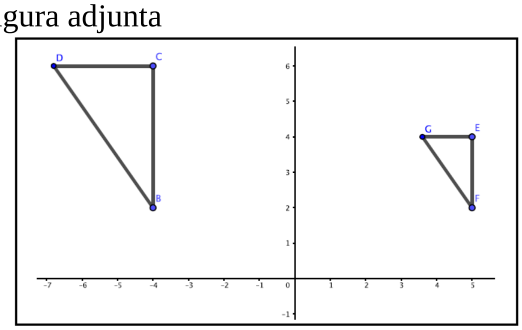


¿Cuál de las opciones de (a) a (d), podría representar al vector $\vec{a} + -2\vec{b}$?

(a) (b) (c) (d)



3. (7pts) Sean los puntos $C = (-4,6)$, $B = (-4,2)$, y $D = \left(\frac{-34}{5}, 6\right)$, puntos de IR^2, mostrados en la figura adjunta



Sabiendo que $\triangle DCB$ y $\triangle GEF$ son semejantes, calcule la medida del ángulo F.

Anexo B4: Espacios vectoriales

Instrucciones

- Utilice lapicero azul o negro para el trabajo elaborado sin utilización de *software*, encerrando en un círculo posibles trozos de la escrita que **NO** quisiera considerar para ser evaluado. Así mismo, utilice las hojas en blanco disponibles, entregando un ejemplar de resolución por grupo al finalizar.

- Para el trabajo elaborado con utilización de *software*, guarde el archivo con el nombre TE4, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre TE4X indicaría el archivo correspondiente al trabajo elaborado por el grupo X. Suba el archivo al enlace que aparece en la plataforma de mediación virtual.

1. (8pts) Utilice *Mathematica* para encontrar los valores de k que hacen que el conjunto C sea una base de IR^5
   $C = \{(k, 2,0, -1,1), (0, k, 1,1, -1), (1,2,1,0, k), (0, -1,0,1, -2), (1,0, k, 2,1)\}$

2. (9pts) Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, IR): c - 5a - b = 0; 3a - 2b - d = 0 \right\}$. Hallar una base para S.

Anexo B5: Transformaciones lineales

Instrucciones

- Utilice lapicero azul o negro para el trabajo elaborado sin utilización de *software*, encerrando en un círculo posibles trozos de la escrita que **NO** quisiera considerar para ser evaluado. Así mismo, utilice las hojas en blanco disponibles, entregando un ejemplar de resolución por grupo al finalizar.

- Para el trabajo elaborado con utilización de *software*, guarde el archivo con el nombre TE5, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre TE5X indicaría el archivo correspondiente al trabajo elaborado por el grupo X. Suba el archivo al enlace que aparece en la plataforma de mediación virtual.

Sea $T: IR^2 \to IR^4, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2x \\ x+y \\ y-x \end{pmatrix}$

a) (4pts) Demuestre que T es una transformación lineal del espacio IR^2 al espacio IR^4
b) (3pts) Calcule una base para $Img(T)$. Es $Img(T)$ igual a IR^4? Justifique
c) (4pts) Determine, sin necesidad de calcular el $Img(T)$ e $Kern(T)$, si T es inyectiva y sobreyectiva.
d) (2pts) ¿Es T invertible? Justifique

Anexos C – Tarefas de modelação

Anexo C1: Tránsito preventivo

Gracias a la ayuda de mecanismos como los semáforos y otros tipos de señalización, el tránsito vehicular se vuelve más seguro. Sin embargo, en ocasiones el tránsito puede volverse un caos, originando congestionamiento vial, sobre todo en las ciudades, siendo los lugares donde más tránsito se puede observar, en particular, en las "horas pico", primeras horas de la mañana y últimas horas de la tarde. En estas "horas pico", comúnmente puede observarse que el número de vehículos por hora que entra en una cierta intersección vial y el número de vehículos que sale por alguna de las salidas posibles de dicha intersección vial son aproximadamente constantes.

El siguiente mapa vial (fig.1) muestra una región en anaranjado de la ciudad de San José, Costa Rica, junto al hospital Clínica Bíblica. En el mapa han sido marcados cuatro intersecciones de vías con puntos rojos. Además, se observan algunas calles (vías públicas en posición vertical) y avenidas (vías públicas en posición horizontal) que integran la región, siendo indicado con flechas los trayectos de vía donde existe un solo sentido, el sentido de flujo indicado por la flecha.

Figura 1. Tránsito vehicular en zona con cuatro cruzamientos

El centro de ingeniería de tránsito está interesado en analizar las posibles opciones de tránsito vehicular de la región representada en la figura 1, esto con el fin de tener información recopilada en referencia a la *cantidad mínima o máxima de vehículos* que podrían circular por hora por los tramos de vía que rodean la región, y considerar así, previsiones a tener en caso de que alguna de las rutas se cierre o presente congestionamiento vial. Para ello, suponga que el centro de ingeniería de tránsito ha hecho un estudio de la cantidad de vehículos, por hora, que transitan por algunos de los trayectos que rodean la región, siendo la información disponible en la siguiente tabla.

	Punto 1 (intersección calle 1 y avenida 14)	**Punto 2 (intersección calle 1 y avenida 16)**	**Punto 3 (intersección calle 3 y avenida 16)**	**Punto 4 (intersección calle 3 y avenida 14)**
Número de vehículos que pasan por hora y sentido de flujo	2000, Sentido norte-sur (entrando a la intersección)	800, Sentido este-oeste (saliendo de la intersección)	2500, Sentido norte-sur (saliendo de la intersección)	1800, Sentido norte-sur (entrando a la intersección)
	500, Sentido sur-norte (saliendo de la intersección)	1500, Sentido norte-sur (saliendo de la intersección)		1500, Sentido oeste-este (saliendo de la intersección)
	500, Sentido este-oeste (saliendo de la intersección)			

Como estudiante de ingenieria o ciencias exactas, se le ha solicitado ayuda por parte de Ingeniaría de Tránsito. Ayuda al funcionario a responder las siguientes preguntas:

1) ¿Qué condición o condiciones serán ideales para que el flujo de tránsito por los trayectos y intersecciones que rodean la región de la figura se mantenga normal?, es decir, sin congestionamiento vial.
2) Elabore um esquema que contemple la condición o condiciones propuestas y el número de veículos registados por hora.
3) Encuentre un modelo que le permita saber el número ideal de vehículos a circular por hora em cada tramo.
4) Imagine que es cerrado el tramo de la avenida 14 entre las calles 1 y 3. De acuerdo con su modelo, ¿esto afectaría profundamente el tránsito de vehículos?
5) En general, ¿si fuera necesario cerrar alguno(s) de los trayectos internos, su modelo le permite saber si es aconsejable o no? Explique a partir de su modelo.
6) Suponga que será construido otro edificio junto al hospital, para aumentar el atendimiento de pacientes. Dicho edificio será construido en el área anaranjada, siendo la entrada y salida por el tramo de la avenida 14, calles 1 y 3. Se provee que la creación de dicho edificio llevará a un aumento del número de vehículos en cerca del 40% por el tramo de entrada y salida del edificio. ¿Cómo afectará la construcción del nuevo edificio las condiçiones ideales de transito propuestas inicialmente? Explique a partir de su modelo.

Consideraciones con respecto a la tarea

- Utilice las hojas disponibles para trabajar en los procesos de resolución a efectuar.

- Entregue un ejemplar final de resolución por grupo. Cualquier otra anotación deberá ser también entregada, de forma a respaldar los procesos de resolución del ejemplar final de resolución.
- Utilice lapicero azul o negro para la entrega del ejemplar final.
- En caso de utilizar *software* matemático, guarde extractos del trabajo efectuado con el *software* en formato PDF, colocando como nombre de documento T1M, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre T1MX indicaría documento PDF correspondiente al trabajo con *software* matemático de la primera tarea de modelación trabajada por el grupo X. Envíe el PDF a la plataforma virtual del curso dentro del tiempo disponible para el trabajo de la tarea.

Informe #1

Número de grupo de trabajo:____

INDICACIONES GENERALES:

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Deberá entregar este informe el día 9 de abril, al inicio de la clase.
- Entregue un solo informe por grupo.

1. Indique la estrategia de resolución escogida para resolver la tarea TM1, y explique el porqué de haber escogido esta estrategia, refiriendo todo el proceso de trabajo elaborado, desde la lectura de la tarea hasta la solución a la situación real planteada.

2. ¿Qué otras estrategias de resolución, sea utilizando conceptos de álgebra lineal o no utilizando, fueron discutidas durante el trabajo de la tarea? Explique por qué no consideraron estas estrategias.

3. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea TM1?

4. ¿En que otras situaciones reales, a parte del tránsito vehicular, podría utilizar el modelo construido? Explique como se adapta su modelo a tal situación referenciada.

Anexo C2: Cifrado y descifrado de códigos

Sabía que en el proceso de escritura en una computadora interviene una comunicación textual entre el usuario y la computadora. Esta comunicación es transmitida mediante códigos, y en el caso del computador la información es entendida a partir de ceros y unos (Sistema binario), mientras que para el usuario es entendida a partir del código ASCII (Código Estándar Americano para el Intercambio de Información) de caracteres alfanuméricos.

Para evitar que un mensaje enviado en código ASCII sea leído por alguna persona no autorizada, se puede recurrir a codificar el mensaje recurriendo a los números. Para esto, se puede utilizar la equivalencia entre los códigos ASCII y el sistema decimal (ver Anexo 1).

Una forma de hacer esta codificación es utilizando una matriz de código T y una matriz de seguridad C. La matriz de código T debe contener el mensaje de texto a enviar por el emisor en términos de números, mediante algún tipo de codificación estándar, como por ejemplo la presentada por el código ASCII. Teniendo la codificación estándar a utilizar el emisor procede a escribir cada letra del mensaje como el número asignado en la codificación estándar, posteriormente ubica estos números en una matriz, colocando cada número (letra codificada del mensaje) o conjunto de números (conjunto de letras sucesivas en el mensaje) como entradas en la matriz. La organización del mensaje en modo numérico en la matriz T dependerá de la dimensión de la matriz deseada. Por otro lado, será necesario crear una matriz de seguridad C que sólo conozca el emisor y el receptor del mensaje, dado que la matriz T puede ser fácilmente descodificada en el caso de que otras personas conozcan la matriz estándar escogida. Así, existirá una matriz de código T, utilizada por el emisor para hacer una primera codificación del mensaje, y una matriz de descodificación C, que utilizará el receptor para descodificar el mensaje cifrado final M enviado por el emisor, obteniendo la matriz de código T. A partir de la matriz T se podrá obtener el mensaje original utilizando la codificación estándar escogida inicialmente.

Un dato histórico

El 17 de enero de 1917, la sección política británica conocida como Sala 40, desencriptó el telegrama alemán enviado por el ministro alemán de Exteriores Arthur Zimmermann al embajador alemán en los Estados Unidos, Johann von Bernstroff, y al embajador alemán en México, Heinrich Von Eckhardt. Este telegrama, tiene importancia histórica en la declaración de guerra de los Estados Unidos a Alemania. Este telegrama (versión en inglés), su codificación y descodificación son presentados en la figura 1, 2 y 3 respectivamente (ver Anexos 2).

Suponga que ha decidido leer el telegrama Zimmermann original y está interesado en establecer una nueva propuesta de codificación de mensaje a partir de la utilización de matrices de código (matriz de código) y matrices de seguridad (matriz de descodificación).

1) ¿Cómo podría ser creada una matriz de código y una matriz de seguridad que permitan cifrar la información del mensaje Zimmermann?

2) Construya el modelo que permita cifrar la información del mensaje basado en las matrices anteriores. Explique el proceso utilizado en la creación de su modelo.
3) Utilice el modelo para codificar la frase del telegrama de Zimmermann “The settlement”.
4) ¿Su modelo está bien definido en términos analíticos, siendo siempre posible para el receptor, de tener la información necesaria, encontrar el mensaje original? Explique el porqué.

Consideraciones con respecto a la entrega de la tarea

- Utilice las hojas disponibles para trabajar en los procesos de resolución a efectuar.
- Entregue un ejemplar final de resolución por grupo. Cualquier otra anotación deberá ser también entregada, de forma a respaldar los procesos de resolución del ejemplar final de resolución.
- Utilice lapicero azul o negro para la entrega del ejemplar final.
- En caso de utilizar *software* matemático, guarde extractos del trabajo efectuado con el *software* en formato PDF, colocando como nombre de documento T2M, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre T2MX indicaría documento PDF correspondiente al trabajo con *software* matemático de la segunda tarea de modelación trabajada por el grupo X. Envíe el PDF a la plataforma virtual del curso dentro del tiempo disponible para el trabajo de la tarea.

Informe #2

Grupo de trabajo:_____

INDICACIONES GENERALES:

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Deberá entregar este informe el día 7 de mayo, al inicio de la clase.
- Entregue un solo informe por grupo.

1. Indique la estrategia de resolución escogida para resolver la tarea TM2, y explique el porqué de haber escogido esta estrategia, refiriendo todo el proceso de trabajo elaborado, desde la lectura de la tarea hasta la solución a la situación real planteada.

2. ¿Qué otras estrategias de resolución fueron discutidas durante el trabajo de la tarea, sea utilizando matrices o cualquier otro elemento? Explique por qué no consideraron estas estrategias.

3. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea TM2?

4. ¿En qué otras situaciones reales, a parte de la codificación de mensajes, podría utilizar el modelo construido? Explique cómo se adapta su modelo a tal situación referenciada.

Anexo C3: Bordado de girasol en camisas académicas

El girasol es una flor particular que, debido a su color y forma, es comprada con la forma del sol, de ahí parte de su nombre. La otra parte de su nombre hace referencia a la acción de girar, lo cual, a diferencia de otras plantas, es debido a que el girasol en su etapa de crecimiento va creciendo hacia la luz, fenómeno conocido como fototropismo.

No es de extrañarse que el girasol sea utilizado como parte de algunos símbolos académicos, como sucede por ejemplo con el escudo de la Universidad de Costa Rica, en el cual aparece un girasol orientado hacia el salir del sol. En el año 2007, para conmemorar el 50 aniversario de la Escuela de Generales de esta universidad fue creado un girasol en cerámica en una de las paredes laterales que conforman a esta Escuela (fig.1), simbolizando, entre otros elementos, la búsqueda de la luz, entendida como la confluencia de saberes.

Uno de los detalles de este girasol es que algunos pétalos no quedan dentro totalmente de la zona de la pared donde se encuentra el girasol, simbolizando "un girasol libre", refiriéndose a la formación humanística que otorga la Escuela de estudios generales a todos los estudiantes de su universidad.

Figura.1. Girasol de la Escuela de Generales de la UCR

Suponga que la tienda de venta de camisas con bordado en letras UCR, ubicada abajo del girasol de la escultura, ha decidido para este nuevo año diseñar camisas que, además de incluir el bordado UCR, incluyan un bordado del girasol (fig.1). Para esto, los diseñadores han decidido diseñar tres tipos de camisas, según el grado que cursa el estudiante en la universidad. Los tres diseños contienen el bordado UCR y del girasol, con la particularidad de que el girasol aparece en diferentes posiciones de rotación, según el nivel académico que cursa el estudiante: bachillerato, licenciatura, o posgrado.

Como estudiante de ingenieria o ciencias exactas, el diseñador ha solicitado de sus conocimientos matemáticos para diseñar el bordado del girasol, pues deberá programar en las maquinas de diseño de bordados la relación matemática que describe estas rotaciones considerando lo siguiente:

- El ángulo de rotación entre un grado académico y el grado posterior debe ser constante, es decir, el ángulo de rotación entre el bordado del girasol original y el bordado del girasol de estudiantes de bachillerato debe ser el mismo que entre el bordado del girasol de estudiantes de bachillerato y estudiantes de licenciatura, igual al ángulo de rotación entre el bordado del girasol de estudiantes de licenciatura y posgrado.
- El bordado del girasol para estudiantes de posgrado debe quedar en la misma posición al bordado del girasol original no rotado (fig.1).

1. ¿Cómo podría ser formulada la relación matemática buscada por el diseñador?
2. Encuentra un modelo matemático que te permita expresar cada punto vector del girasol original, en función de un cierto ángulo α al que es sometido a rotación y de sus componentes originales, satifaciendo las condiciones del diseñador. Explique cómo queda definido α según el grado académico que cursa el estudiante.
3. ¿Permite su modelo matemático crear bordados con otra figura para ser usados en uniformes escolares, satisfaciendo en este caso que, el bordado para estudiantes de sexto grado sea igual al bordado original no rotado? Explique cómo procedería utilizando como base su relación modelo matemático encontrado.

Consideraciones con respecto a la entrega de la tarea

- Utilice las hojas disponibles para trabajar en los procesos de resolución a efectuar.
- Entregue un ejemplar final de resolución por grupo. Cualquier otra anotación deberá ser también entregada, de forma a respaldar los procesos de resolución del ejemplar final de resolución.
- Utilice lapicero azul o negro para la entrega del ejemplar final.
- En caso de utilizar *software* matemático, guarde extractos del trabajo efectuado con el *software* en formato PDF, colocando como nombre de documento T3M, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre T3MX indicaría documento PDF correspondiente al trabajo con *software* matemático de la tercera tarea de modelación trabajada por el grupo X. Envíe el PDF a la plataforma virtual del curso dentro del tiempo disponible para el trabajo de la tarea.

Informe #3

Grupo de trabajo:____

INDICACIONES GENERALES:

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Deberá entregar este informe el día 21 de mayo, al inicio de la clase.
- Entregue un solo informe por grupo.

1. Indique la estrategia de resolución escogida para diseñar el modelo de bordado de rotación del girasol, y explique el porqué de haber escogido esta estrategia, refiriendo todo el proceso de trabajo elaborado, desde la lectura de la tarea hasta la solución a la situación real planteada.

2. ¿Qué otras estrategias de resolución fueron discutidas para desarrollar el su modelo de diseño de girasol? Explique por qué no consideraron estas otras estrategias.

3. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea TM3?
4. ¿En qué otras situaciones reales, podría utilizar su modelo matemático de rotación de bordado de girasol? Explique cómo se adaptarían los parámetros utilizados en su modelo a esta nueva situación real.

Anexo C4: Contraseñas de acceso bancario

Para proteger nuestras cuentas, en una determinada página web (e-mail, facebook,…,etc), de otras personas que quieran acceder a nuestra información de la cuenta sin autorización previa, han sido inventadas las contraseñas. Para que sea más dificil para la persona ajena acceder a nuestra cuenta, la contraseña deberá tener diferentes tipos de caracteres, tales como, letras, números, signos de exclamación, etc. Además, la cantidad de caracteres también influenciará en la seguridad de la contraseña, haciendola más o menos dificil de descubrir.

Cuando una persona olvida su contraseña comúnmente le es enviada una constraseña temporal al e-mail, de tal forma a ingresar con esa contraseña temporal a su cuenta, y así posteriormente modificarla y volver a tener su contraseña propria. En el caso de algunos bancos estatales de Costa Rica, esta contraseña temporal esta formada por menos de diez caracteres, la cual contiene números y letras mayúsculas y minísculas.

Una forma de generar estas contraseñas es utilizando vectores, en donde las entradas del vector representan caracteres de la contraseña deseada, siendo la posición de una entrada específica del vector la posición específica del carácter en la contraseña. De esta forma, un vector $\vec{v} \epsilon IR^n$ sería una forma de escribir una contraseña de “n” caracteres. Así, se pueden generar muchas contraseñas con la misma cantidad de caracteres una vez que se ha definido el espacio vectorial al cual pertenecen los vectores.

Suponga que uno de los bancos estatales está interesado en crear nuevas formas de generar contraseñas temporales, por lo que ha recurrido a sus servicios para desarrollar un generador de claves temporales. El banco desea que este generador considere diversos tipos de carácteres,

1. ¿cómo podría desarrollar un generador de contraseña temporal que permita obtener contraseñas con al menos números y letras del alfabeto, y con la misma cantidad de caracteres para todas las contraseñas generadas?
2. Desarrolle un generador de contraseña temporal atendiendo a las expectativas del banco. Explique el proceso usado en la creación de su generador de contraseña.
3. Utilizando una hoja de excell, genere al menos 20 contraseñas.
4. ¿Cuáles son los vectores base que generan estas contraseñas temporales?

5. ¿Existe algún otro generador de contraseña temporal que genere las mismas contraseñas que el suyo? De existir dicho generador explique cómo se asimila y diferencia este generador del desarrollado por usted para el banco.
6. Suponga que, una vez recibida su propuesta de generador de contraseña temporal por el banco, el banco decide que quiere disponer a sus clientes contraseñas temporales que NO incluyan letras. Explique, a partir de su generador de contraseña enviado al banco, ¿cómo afecta esta decisión tomada por el banco en su generador de contraseña enviado? ¿cómo soluciona esta nueva solicitud a partir de su modelo original?

Consideraciones con respecto a la entrega de la tarea

- Utilice las hojas disponibles para trabajar en los procesos de resolución a efectuar.
- Entregue un ejemplar final de resolución por grupo. Cualquier otra anotación deberá ser también entregada, de forma a respaldar los procesos de resolución del ejemplar final de resolución.
- Utilice lapicero azul o negro para la entrega del ejemplar final.
- En caso de utilizar *software* matemático, guarde extractos del trabajo efectuado con el *software* en formato PDF, colocando como nombre de documento T4M, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre T4MX indicaría documento PDF correspondiente al trabajo con *software* matemático de la cuarta tarea de modelación trabajada por el grupo X. Envíe el PDF a la plataforma virtual del curso dentro del tiempo disponible para el trabajo de la tarea.

Informe #4

Grupo de trabajo:____

<u>INDICACIONES GENERALES:</u>

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Deberá entregar este informe el día 4 de junio, al inicio de la clase.
- Entregue un solo informe por grupo.

1. Indique la estrategia de resolución escogida para resolver la tarea TM4, y explique el porqué de haber escogido esta estrategia, refiriendo todo el proceso de trabajo elaborado, desde la lectura de la tarea hasta la solución a la situación real planteada.

2. ¿Qué otras estrategias de resolución fueron discutidas para generar las contraseñas? Explique por qué no consideraron estas otras estrategias.

3. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea TM4?
4. ¿En qué otras situaciones reales, a parte de la generación de contraseñas con vectores, podría utilizar el generador de contraseñas propuesto en la tarea? Explique cómo se adaptaría este generador a tal situación referenciada.

Anexo C5: Visita al Big Ben

Uno de los mecanismos tecnológicos que utilizamos a diario es el teléfono celular, y no necesariamente para la función original para la que fue fabricado, sino para capturar fotos, entre estas los llamados “selfies”.

El funcionamiento de una cámara esta basado en la óptica geométrica, en donde a través de procesos de reflexión de la luz internos es logrado captar la imagen que deseamos guardar como una fotografía. Una de las maravillas de una fotografía es capturar la imagen de la realidad manteniendo proporciones de distancias entre los puntos de la imagen capturada, pudiendo llevar una réplica pequeña o aumentada de la realidad, en forma digital o en papel, lo que permite que podamos volver al pasado al mirar hacia una fotografía.

En términos del funcionamiento de la cámara digital, cuando se hace un zoom para disminuir o aumentar el tamaño de la imagen a capturar, esta ocurriendo internamente en la cámara una transformación, la cual reubica los pixeles en el plano imagen de fotografía y interpola los niveles de grises asociados a los niveles de intensidad de los pixeles en dicho plano imagen.

Dependiendo del zoom aplicado a la cámara cada objeto quedará en una escala menor (fig.1) o mayor (fig.2), siendo determinada esta escala a partir de lo que se conoce como la distancia focal y la distancia de enfoque. Al final la cámara fotográfica realiza una proyección de la realidad en un plano, capturando esta imagen real en forma bidimensional.

Figura 1. Vista frontal desde puente del Big Ben.

Figura 2. Personas trabajando en el Big Ben.

Suponga que una tienda de cámara fotográfica está interesada en saber el sistema matemático que permite tomar una imagen para representarla, inmediatamente, en otro plano y en una nueva escala. Para esto el administrador de la tienda contrata sus servicios.

1. ¿Qué elementos matemáticos será necesario considerar en la construcción de este sistema matemático de zoom (disminución o aumento de la escala)?
2. ¿Cómo se interpreta el zoom de este sistema matemático en términos matemáticos?
3. Desarrolle un sistema matemático de zoom que permita representar el reloj de la figura 1 en un nuevo plano ajustado a la escala del reloj de la figura 2. Explique dicho proceso.
4. ¿Permite su sistema matemático de zoom representar la figura 1 en un nuevo plano ajustado al tamaño real del Big Ben? Explique cómo procedería utilizando como base su sistema matemático de zoom anterior.

Consideraciones con respecto a la entrega de la tarea

- Utilice las hojas disponibles para trabajar en los procesos de resolución a efectuar.
- Entregue un ejemplar final de resolución por grupo. Cualquier otra anotación deberá ser también entregada, de forma a respaldar los procesos de resolución del ejemplar final de resolución.
- Utilice lapicero azul o negro para la entrega del ejemplar final.
- En caso de utilizar *software* matemático, guarde extractos del trabajo efectuado con el *software* en formato PDF, colocando como nombre de documento T5M, seguido de la letra asignada al grupo de trabajo en mayúscula. Ejemplo, el nombre T5MX indicaría documento PDF correspondiente al trabajo con *software* matemático de la quinta tarea de modelación trabajada por el grupo X. Envíe el PDF a la plataforma virtual del curso dentro del tiempo disponible para el trabajo de la tarea.

Informe #5

Grupo de trabajo:____

INDICACIONES GENERALES:

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Deberá entregar este informe el día 18 de junio, al inicio de la clase.
- Entregue un solo informe por grupo.

1. Indique la estrategia de resolución escogida para diseñar su sistema matemático de zoom, y explique el porqué de haber escogido esta estrategia, refiriendo todo el proceso de trabajo elaborado, desde la lectura de la tarea hasta la solución a la situación real planteada.

2. ¿Qué otras estrategias de resolución fueron discutidas para desarrollar el sistema matemático de zoom? Explique por qué no consideraron estas otras estrategias.

3. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea TM5?

4. ¿En qué otras situaciones reales, a parte del aumento o disminución de escala de una imagen, podría utilizar el sistema matemático diseñado en la tarea? Explique cómo se adaptaría el sistema matemático de zoom a esta nueva situación real.

Anexos D – Questionário

Estimado(a) estudiante,

El presente cuestionario pretende conocer su opinión sobre aspectos relacionados a su experiencia en el aprendizaje del álgebra lineal, particularmente en la utilización de *software* matemático y la realización de tareas de modelación matemática. Pido de su colaboración para dedicar unos cuantos minutos a responder cada una de las preguntas que conforman este cuestionario, el cual es anónimo y será utilizado sólo en el ámbito del trabajo de investigación de doctorado que estoy realizando en el Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa, no teniendo cualquier influencia en su calificación de la disciplina de MA1004. Responda, por favor, con la misma sinceridad. Gracias por su colaboración, indispensable para la realización de la investigación.

Anexo D1: Preguntas QA

1. En su opinión, ¿cuáles son las ventajas del álgebra lineal para su carrera?
2. ¿Con qué dificultades se enfrentó, hasta ahora, en los contenidos del curso de MA1004? ¿En qué temas?
3. En su opinión, ¿cuáles serían las potencialidades de trabajar tareas de modelación matemática para el aprendizaje del álgebra lineal? ¿Y al trabajar con tecnología?
4. ¿Con qué dificultades se enfrentó al trabajar tareas de modelación en el curso MA1004? ¿Y al trabajar con tecnología?
5. Haga un breve comentario sobre lo que le agradó más y lo que le agradó menos a lo largo de las clases en que se realizaron tareas de modelación.

Comentarios: (puede incluir aquí algunos comentarios o reflexiones que quiera compartir relativamente a los aspectos que fueran foco de las preguntas, usando el siguiente espacio)

Anexo D2: Preguntas QF

I PARTE

Información demográfica

1. Edad (años cumplidos):____
2. Género
    - o Masculino
    - o Femenino

3. ¿Ya aprobó la disciplina de cálculo I?
    - Sí
    - No
4. ¿Es repitente del curso MA1004?
    - Sí, por _____ vez
    - No
5. ¿Qué carrera esta estudiando? ____
6. ¿Cuáles de las siguientes metodologías de aprendizaje consideras mejor para tu aprendizaje?
    - Exposición magistral del profesor
    - Auto-aprendizaje
    - Trabajo individual supervisado por el profesor
    - Trabajo en grupo supervisado por el profesor

II PARTE

Para cada una de las siguientes afirmaciones responda SI o NO, según esté de acuerdo o no esté de acuerdo, respectivamente, con cada una de las proposiciones indicadas.

		1	**2**	**3**	**4**	**5**
	Preguntas referentes al álgebra linear					
1	Me gusta el álgebra lineal					
2	Considero el álgebra lineal difícil de aprender					
3	Antes de comenzar el curso era capaz de relacionar los temas de Álgebra Lineal con experiencias de la cotidianidad					
4	Actualmente soy capaz de relacionar temas de Álgebra Lineal con experiencias de la cotidianidad					
5	Reconozco algunas aplicaciones de Álgebra Lineal en mi carrera					
	Preguntas referentes a la disciplina MA1004					
6	Considero la metodología utilizada en el curso MA1004 adecuada para facilitar el aprendizaje del álgebra lineal					
7	Siento haber tenido los suficientes conocimientos previos, a nivel matemático, para llevar el curso MA1004					

8	Con las discusiones colectivas y en pequeño grupo conseguí retroalimentar mi aprendizaje de conceptos matemáticos estudiados y facilitar mi comprensión de la tarea trabajada.					
9	La forma como fueron tratados los temas en el curso fue motivadora					
10	Considero que la cantidad de contenidos a estudiar en el curso es adecuada					
11	Comprendo las demostraciones elaboradas en clase sobre los temas en estudio					
	Preguntas referentes a la utilización de la tecnología					
12	Acostumbro a usar la computadora para recurrir al correo electrónico o buscar información en internet					
13	Acostumbro a usar la computadora para el manejo de hojas de cálculo					
14	Acostumbro a usar *software* matemático fuera de clases para mi aprendizaje del álgebra lineal u otras disciplinas de Matemática					
15	Me gusta trabajar con tecnología en clase					
16	Me siento confortable al usar *software* matemático con la computadora					
17	La utilización de tecnología me ayudó en la clase, haciendo mi aprendizaje del álgebra lineal más productivo					
18	Antes de comenzar el curso, yo ya sabía trabajar con *software* matemático					
19	Considero el tiempo disponibilizado para la realización del trabajo en clase con *software* matemático suficiente para aprender a trabajar los conceptos de álgebra lineal tratados					
	Preguntas referentes a la modelación matemática					
20	El trabajo de determinar modelos matemáticos a partir de contextos de situaciones reales se me complicó al principio del trabajo con tareas de modelación					
21	El trabajo de determinar modelos matemáticos a partir de contextos de situaciones reales se fue facilitando conforme avanzaba con las siguientes tareas de modelación					
22	Las indicaciones dadas por el profesor fueron suficientes para la realización de las tareas					
23	Tengo mayor facilidad para entender el concepto matemático cuando es encuadrado en un contexto que refiere una situación real					

24	Considero motivador utilizar contextos de situaciones reales para trabajar el álgebra lineal					
25	Antes de comenzar el curso de Álgebra Lineal conocía el proceso de modelación matemática					

¡Muchas gracias por su colaboración!

Anexo E – Consentimento dos participantes

Autorización de recolección de datos para participar en experiencia de enseñanza

Yo, Guillermo Ramírez Montes, profesor de la Universidad de Costa Rica, vengo por este medio a solicitarle su participación/colaboración en el trabajo titulado *"aprendizagem da Álgebra Linear num contexto de modelação matemática: uma experiência de ensino com estudantes costarriqunehos do ensino superior"*. La realización de este trabajo, que se encuadra en el ámbito de mi investigación de posgrado en Educación con énfasis en Didáctica de la Matemática, y la cual estoy realizando en el Instituto de Educación de la Universidad de Lisboa, pretende contribuir para promover, de una forma efectiva y motivadora, el aprendizaje de los estudiantes universitarios en la asignatura de Álgebra Lineal.

La realización de esta recolección contempla el trabajo con 5 tareas de modelación matemática trabajadas en el aula, siendo estas tareas orientadas al aprendizaje del álgebra lineal. Estas tareas no influyen con el cumplimiento de los contenidos a evaluar en el curso de MA1004, y más bien se encuadran dentro de los objetivos generales del curso, visando ayudar a complementar su aprendizaje del álgebra lineal a través de situaciones reales donde interviene esta área de la Matemática, y ajustándose los objetivos de aprendizaje del curso a las dinámicas de sala de aula y metodología de investigación. La recolección de datos incluirá la realización de un cuestionario después del trabajo con tareas de modelación, una entrevista a algunos estudiantes al final de la aplicación de las tareas, y la recolección documental de las resoluciones de las tareas propuestas, incluyendo extractos del trabajo elaborado con recurso de tecnología cuando aplique en el trabajo de las tareas de modelación. Además, se consideran también las grabaciones de audio de las discusiones que surjan de las resoluciones de las tareas y de la entrevista, siendo garantizado el anonimato de los nombres de los participantes relativo a los datos recolectados y utilizados después de terminar la intervención de la experiencia de enseñanza.

Agradeciendo su atención a este escrito, me despido de la manera más humilde deseándole éxitos en su labor.

San Pedro de Montes de Oca, __ de _____ del 20__, Guillermo Ramírez _________________

AUTORIZACIÓN

Yo,____, estudiante del grupo___ de MA1004 del ___ semestre 2019, sede Rodrigo Facio, declaro que tomé conocimiento de los objetivos del trabajo de investigación desarrollado por el profesor Guillermo Ramírez en el ámbito de su trabajo de doctorado y de la necesidad de la respectiva recolección de datos. con la garantía de anonimato.

___________________, ____/___/20__

Firma Fecha

Anexo F – Tarefas de intervenção formativa

El ciclo de modelación matemática

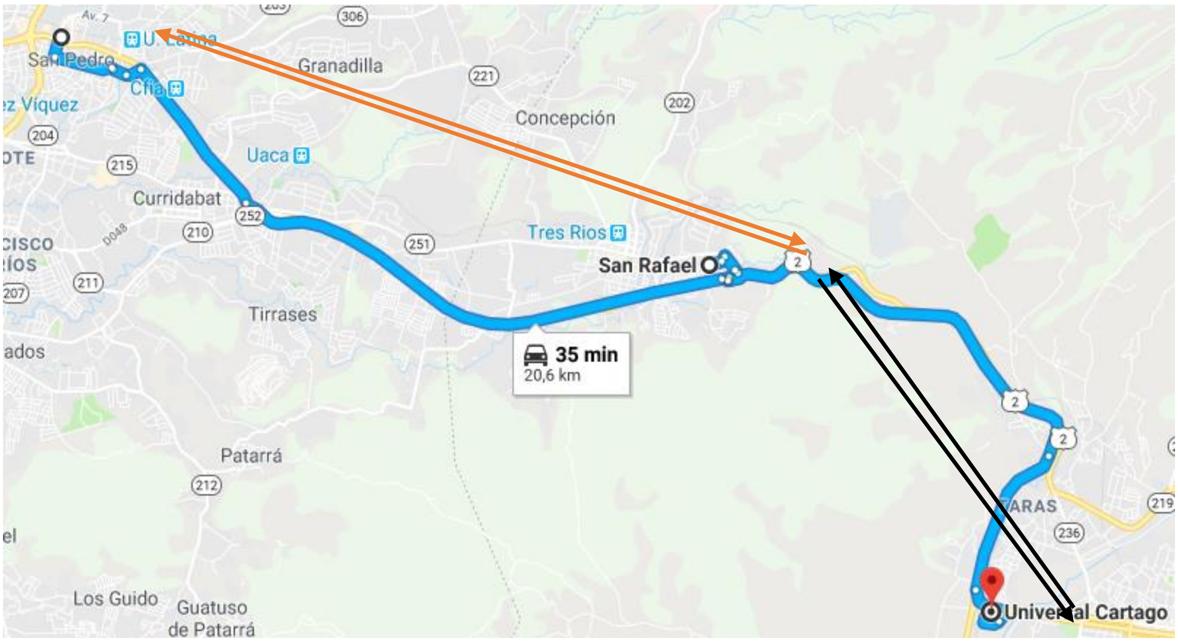
1. **¿Lo compro aquí o allá?**

Como parte de los libros de bibliografía de estudio, de unos de los cursos de ingeniería, se ha asignado el libro "mecánica vectorial para ingenieros: Estática" como el libro guía de ese curso. Dicho libro se encuentra en venta en la librería Lehmann de la sucursal de San Pedro, junto a la UCR, y también se encuentra disponible en la librería universal, en Cartago, teniendo diferentes precios en cada una de estas librerías. Suponga que uno de sus amigos que estudia ingeniería en la UCR, en San Pedro, vive en San Rafael de Tres Ríos.

El sábado, estando él o ella en su casa, decide ir a comprar el libro "mecánica vectorial para ingenieros", por lo que acude a usted para considerar su opinión sobre si será conveniente comprar el libro en la librería Universal, estando esta más cerca de San Rafael, o si será más conveniente desplazarse hasta San Pedro a comprar el libro en la librería Lehmann. Manifieste su opinión para su amigo(a), explicándole cuál piensa usted que sería la librería más cómoda para la compra del libro. Justifique cada una de sus afirmaciones.

Solución:

Paso 1 (Comprensión y esquematización de la situación modelo):
Podemos comenzar por construir un modelo mental de la situación, en este caso podríamos utilizar googlemaps para hacernos una representación mental de los movimientos que debería hacer mi amigo(a) para desplazarse a una u otra librería.



Paso 2 (simplificación y planteamiento de la situación modelo):
Tenemos varias opciones para desplazarnos hasta cualquiera de las librerías (ir en carro, moto, a pie, bus, etc), por lo que se debe simplificar la situación centrándose en alguno de estos medios de transporte. Por ejemplo, puede estudiarse la opción de ir en bus o ir en carro, sin embargo, mi amigo(a) podría escoger otro medio de transporte. Haciendo

una búsqueda en la web podemos tener acceso a los precios actuales de los libros en ambas librerías, supongamos, ₡18990 y ₡17900 para la librería Universal y Lehmann, respectivamente.

Además, existirán variables como el riesgo a que el bus o carro deje de funcionar em medio trayecto o la alimentación que debe comprar una persona en algún momento del recorrido para recuperar energías, etc. Simplificamos nuestro modelo ignorando estas otras variables, de modo a facilitar el estudio del costo de adquisición del libro.

Opción A: transporte en bus
En el caso de ir en bus mi amigo(a) debe considerar el precio del pasaje de ida y vuelta a cada una de las librerías. Simplificaremos la situación asumiendo que toma el bus en la pista, ruta 2, por lo que camina desde su casa hasta la parada del bus en la ruta 2. También se debe simplificar la situación escogiendo la empresa de transporte público con que se va a viajar, por ejemplo, supondré que mi amigo(a) viajará con "Lumaca". En tal caso se puede estimar el precio para el pasaje Cartago a San José, el cual estimamos está en ₡605. Luego, como la tarifa es fija, se gasta lo mismo hiendo desde San Rafael para San Pedro o para Cartago, por ser ambas localidades puntos de parada en la ruta de tránsito del bus. Por lo tanto, el gasto total de ida y vuelta en bus sería ₡1210.

Opción B: transporte en carro
En el caso de mi amigo(a) ir en carro, deberá considerar el gasto de combustible del carro. Supongamos que el carro que tiene es un automóvil común, por lo que, buscando en la web, vemos que este tipo de carro gasta aproximadamente $\frac{1\ litro}{12km}$. El precio por litro de gasolina es alrededor de $\frac{₡568}{1\ litro}$. Finalmente, la distancia a recorrer desde San Rafael hasta la librería Universal y la librería Lehmann, respectivamente, podemos estimarla con googlemaps, siendo esta de 9,5km y 10,7km.

Paso 3 (Construcción del modelo matemático):
Una vez consideradas las simplificaciones anteriores se procede a construir el modelo matemático. Si designamos por $L(x,y)$ y $U(x,y)$ los costos monetarios implicados en conseguir el libro en la librería Lehmann y la librería Universal, respectivamente, podemos plantear los siguientes modelos.

Opción A: transporte en bus

$L(x,y) = x + y = x + 2k$; Librería Lehmann
$U(x,y) = x + y = x + 2k$; Librería Universal
x: costo del libro en la librería; y: costo de desplazarse a la librería; k: costo del pasaje del bus.

Modelo matemático

Opción B: transporte en carro

$L(x,y) = x + y = x + 2abc$; Librería Lehmann $U(x,y) = x + y = x + 2abc$; Librería Universal x: costo del libro en la librería; y: costo de desplazarse a la librería; a: distancia en km; b: consumo de litros de combustible por kilómetro recorrido; c: precio del combustible por litro. **Modelo matemático**

Paso 4 (Trabajar matemáticamente el modelo):
Hacemos uso del modelo considerando los datos del enunciado, las hipótesis y las simplificaciones hechas.

Opción A: transporte en bus

$L(x,k) = x + 2k$=₡$17900 + +2 *$ ₡$605 =$ ₡19110;

$U(x,k) = x + 2k =$ ₡$18990 + 2 *$ ₡$605 =$ ₡20200;

Opción B: transporte en carro

$$L(x,a,b,c) = x + 2abc = ₡17900 + 2 \cdot (10{,}7\ km) \cdot \frac{1\ litro}{12\ km} \cdot \frac{₡568}{1\ litro} = ₡18913$$

$$U(x,a,b,c) = x + 2abc = ₡18990 + 2 \cdot (9{,}5\ km) \cdot \frac{1\ litro}{12\ km} \cdot \frac{₡568}{1\ litro} = ₡19889$$

Paso 5 (Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)):
Los resultados obtenidos permiten interpretar que, entre viajar en carro y viajar en bus, la opción más económica para mi amigo(a) sería viajar en carro a la librería Lehmann, siendo el gasto total de ₡18913. Si quisiera ir a la librería Universal ahorrará más si se desplaza en carro, pudiendo ahorrar ₡311, en relación a desplazarse en bus.

Paso 6 (Validar nuestra resolución):
Considerando las hipótesis y simplificaciones hechas, se tiene que, aunque está más lejos la librería Lehmann en relación a la librería universal desde San Rafael de tres Ríos, resulta más barato la compra del libro en la librería Lehmann, sea hiendo en carro o en bus, consecuencia de que el precio del libro en la librería Lehmann es más barato en ₡1090, lo que representa un valor significativo en el costo de adquisición del libro. Así, mi amigo(a) deberá considerar si el ahorrarse ₡311 para ir en carro hasta la librería Lehmann compensa, pues el tiempo de viaje será mayor, por lo que será mayor el cansancio al conducir.

Paso 7 (Exponer los resultados):
Considerando los pasos anteriores, incluido las suposiciones y simplificaciones hechas, mi opinión para mi amigo(a) sería que viaje en carro desde San Rafael de Tres Ríos hasta la librería Lehmann en San Pedro, pues adquirirá el libro invirtiendo la menor cantidad de dinero. Sin embargo, dependiendo del estado físico de mi amigo(a), es más conveniente que vaya a comprar el libro a la librería Lehmann en bus, teniendo que invertir sólo ₡197 más en relación a viajar en carro. En caso de mucho tránsito para San

Pedro será mejor que se desplace para la librería Universal en carro, siendo esta opción más económica ante la opción de desplazarse en bus.

2. El hombre y la casa (trabajo en el aula)

En la siguiente imagen se muestra una fotografía (segundo plano) en la que se ha colocado la imagen de un perro, un niño y un hombre en primero plano. Sabiendo que el hombre de la fotografía original (hombre en el corredor de la casa) y el hombre que aparece en primero plano junto al perro y al niño corresponden a la misma persona, determine la altura del hombre y de la casa en la realidad.

3. ¿Qué edad tiene mi tío? (trabajo en casa)

Jorge, quien se encuentra en octavo año de escolaridad, desea saber la edad de su primo Antonio y su tío Marco, a quien no conocía. Al preguntarle Jorge a su tío Marco por la edad, este respondió a través de la siguiente frase: "mi edad más la edad de tu primo Antonio, es igual a 62. Por otro lado, el triple de la edad de Antonio equivale a mi edad disminuido en 2. Entonces, ¿cuál sería mi edad sobrino?". A pesar de que a Jorge le gusta la matemática, no consigue encontrarle solución a la frase dada por su tío, y su tío se niega a darle la respuesta, por lo que Jorge ha recurrido a pedir ayuda para encontrar la edad de su tío.

Suponga que usted conoce a Jorge y este le solita de su ayuda para saber la edad del tío. Ayude a Jorge a encontrar la edad de su tío, explicándole con todo detalle y justificación la estrategia de resolución que usted usaría para encontrar dicha edad.