



# Ajustement de surfaces paramétriques sur nuages de points

Guillaume Coiffier, Justine Basselin, Nicolas Ray, Dmitry Sokolov

► **To cite this version:**

Guillaume Coiffier, Justine Basselin, Nicolas Ray, Dmitry Sokolov. Ajustement de surfaces paramétriques sur nuages de points. Journées Françaises d'Informatique Graphique (JFIG2020), Nov 2020, Nancy, France. hal-02992607

**HAL Id: hal-02992607**

**<https://hal.inria.fr/hal-02992607>**

Submitted on 6 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Ajustement de surfaces paramétriques sur nuages de points

Guillaume Coiffier<sup>1</sup>, Justine Basselin<sup>1</sup>, Nicolas Ray<sup>1</sup>, Dmitry Sokolov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, F-54000 Nancy, France

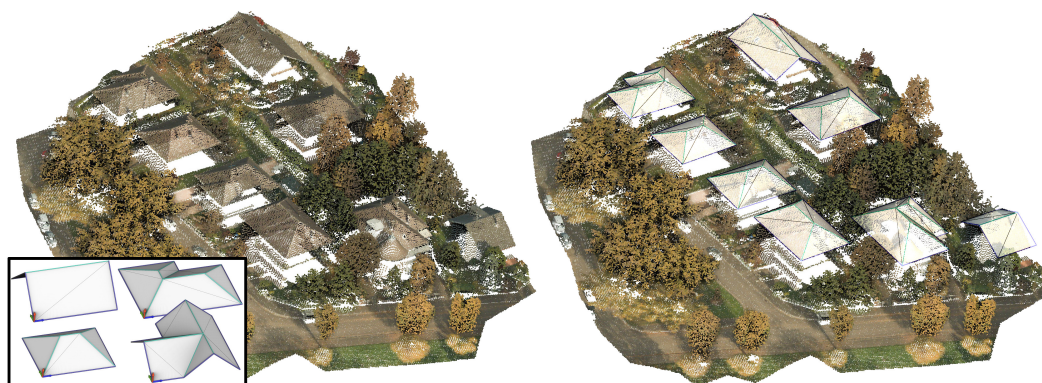


Figure 1: **Gauche** : Exemple de modèles de toits et de nuage LIDAR aérien. **Droite** : Nous sommes intéressés par ajuster des modèles définis par l'utilisateur aux données correspondantes du nuage de points.

## Abstract

L'ajustement d'un maillage surfacique comme modèle géométrique sur un nuage de points est une étape courante dans les applications utilisant ce genre de données. Nous nous intéressons ici à l'ajustement de ces surfaces sur des acquisition d'objets artificiels, dans le but de retrouver leur structure au sein d'un nuage de points éventuellement bruité où comprenant des données non pertinentes (ou valeurs aberrantes). Bien que ce problème et la méthode proposée restent très généraux, nous nous intéressons tout particulièrement au cas de modèles de toits ajustés sur des données LIDAR aériennes. Tandis que la plupart des méthodes utilisées jusqu'à présent se concentrent sur la reconstruction puis la combinaison d'objets géométriques simples, nous proposons une méthode considérant le problème comme un unique problème d'optimisation contraint, et exposons une méthode efficace pour sa résolution. Plus précisément, nous définissons une fonction de distance qui sera numériquement minimisée de façon à faire correspondre le modèle surfacique et le nuage de points. Comme la convergence vers le minimum global n'est pas garantie, nous proposons également une évaluation de la méthode en fonction de la position initiale et de la qualité du nuage de points.

## 1. Introduction

Les récents progrès technologiques concernant l'acquisition de nuages de points, et notamment le développement des LIDAR ont permis la numérisation précise d'objets réels ainsi que leur traitement informatique. Mais bien qu'elles permettent une visualisation simple et sous tous les angles des objets ainsi capturés, il manque à ces données brutes la structure combinatoire requise par la plupart des applications visées. Ainsi, il est très courant de commencer par des étapes de segmentation, de *clustering* ou encore de reconstruction de surfaces [BTS\*17] à partir de triangulation, de primitives géométriques simples (plans, sphères, cylindres) ou même d'objets paramétrés plus complexes.

Dans cet article, nous nous intéressons à cette phase de reconstruction, principalement dans le cas de données LIDAR de quartiers de villes acquises depuis le ciel. Ces nuages de points très

détaillés capturent l'intégralité des détails des villes en question (élevations de terrain, arbres, routes, voitures, bâtiments, *etc.*) et servent de multiples applications : réalisation de maquettes à but touristique, simulation d'ensoleillement ou d'inondation, vérification de cadastres, *etc.* Les structures artificielles présentes dans ces données sont d'un intérêt tout particulier puisque ce sont elles que l'on cherchera à reconstruire en tant que modèle géométrique paramétré. Les nuages de points étant acquis depuis le ciel, seuls les toits des bâtiments sont visibles. Le reste pouvant être reconstruit par extrusion à partir du toit, nous nous proposons donc d'étudier le problème de l'ajustement d'une surface polygonale géométriquement contrainte représentant un toit sur un nuage de point.

Plusieurs approches à ce problème existent et ont été étudiées dans des travaux précédents. La méthode la plus répandue consiste à d'abord rechercher certains attributs géométriques tels que les

plans et les arêtes vives à l'intérieur du nuage [Vos99; CZMH14; MDL20], puis de combiner ces objets en des modèles plus complexes [MB09; XEV14].

Nous proposons ici de considérer le problème d'ajustement de toit comme un unique problème d'optimisation. L'idée consiste à considérer directement un modèle de toit, représenté par un maillage surfacique triangulé obéissant à des contraintes géométriques découlant naturellement de contraintes architecturales telles que l'alignement des gouttières, l'horizontalité des faitières, la planarité des pans de toits ou l'orthogonalité de leurs raccordements.

Partant de ce modèle, nous cherchons à définir puis à minimiser une fonction de distance entre le toit et le nuage de point, dans le but d'obtenir une surface au plus proche des points du nuage et vice versa. Ces méthodes ont déjà été explorées [HBS11; HBS13] mais utilisent des fonctions de distance non dérivables optimisées par Monte Carlo. Nous proposons de notre côté une fonction de classe  $C^2$  qui permettra d'utiliser des optimiseurs plus performants.

Dans la suite de cet article, nous formulons mathématiquement notre problème (§2) avant de développer sa paramétrisation (§3) et sa résolution (§4). La dernière section (§5) dresse le bilan des résultats obtenus.

## 2. Définition du problème

Etant donné un maillage triangulé  $S$  obéissant à des contraintes (tels que ceux présentés en bas à gauche de la Figure 1) et un nuage de points  $P$ , nous souhaitons faire correspondre la position de  $S$  avec la position du toit présent dans  $P$ . Comme  $P$  peut contenir des points n'appartenant pas au toit (arbres, sol, cheminées, etc., cf Figure 1), nous proposons une méthode robuste à la présence de ce genre de données non pertinentes.

Pour définir une distance entre deux objets géométriques, la quantité la plus naturelle à considérer est la distance de Hausdorff :

$$H(S, P) := \max \left( \sup_{q \in S} \inf_{p \in P} \|p - q\|, \sup_{p \in P} \inf_{q \in S} \|p - q\| \right) \quad (1)$$

Minimiser cette fonction, qui se présente sous la forme d'un maximum de deux termes, nous assure que tout point de notre surface  $S$  sera proche du nuage de point et réciproquement. Ce comportement n'est cependant pas tout à fait adapté à notre cas, puisqu'il n'est pas robuste aux données non pertinentes : un seul point de  $P$  arbitrairement loin peut rendre  $H(S, P)$  arbitrairement grande. De plus, dans le but d'une minimisation efficace, nous recherchons une fonction de distance dérivable, ce qui n'est pas le cas de la distance de Hausdorff.

En nous inspirant de l'expression (1), et en remarquant que le nuage de point  $P$  sera fixé durant toute la résolution du problème, nous définissons notre fonction de distance (ou d'énergie)  $E(S)$  de la façon suivante :

$$E(S) := \mathcal{F}(S) + \gamma \mathcal{G}(S), \quad (2)$$

Où  $\mathcal{F}(S)$  quantifie la distance de la surface au nuage de point

et  $\mathcal{G}(S)$ , la distance du nuage à la surface. Le paramètre  $\gamma$  sert à équilibrer les deux termes, principalement pour des raisons numériques. L'opérateur maximum de l'Equation (1) est remplacé par une somme, rendant  $E$  dérivable sous réserve que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  le soient.

Dans le but de calculer  $\mathcal{F}(S)$  et  $\mathcal{G}(S)$ , nous définissons deux fonctions de projection respectivement sur  $S$  et  $P$ . Soit  $q \in S$  un point sur la surface et  $p \in P$  un point du nuage. Alors :

- $\pi_P(q) := \operatorname{argmin}_{p \in P} \|p - q\|$  est la projection de  $q$  sur le nuage, c'est à dire le point de  $P$  le plus proche de  $q$ .
- $\pi_S(p) := \operatorname{argmin}_{q \in S} \|q - p\|$  est la projection de  $p$  sur la surface, c'est à dire le point de  $S$  le plus proche de  $p$ .

### 2.1. $\mathcal{F}(S)$ : distance de $P$ à $S$

Ajuster une surface sur un ensemble de points est un problème pouvant être interprété comme un cas particulier de régression en trois dimensions. Même si la primitive utilisée dans notre cas ne permet pas d'établir une forme close de la solution, considérer un objectif de type moindre carrés reste une approche naturelle. De plus, la robustesse de ce genre de méthodes aux points non pertinents a été abondamment étudié dans la théorie des M-estimateurs [HW77], avec laquelle nous partageons de grandes similarités. Prenant appui sur les résultats en découlant, nous introduisons une fonction de potentiel  $\sigma$  et définissons le terme  $\mathcal{F}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(S) := \sum_{p \in P} \sigma \left( \|p - \pi_S(p)\|^2 \right) \quad (3)$$

où  $\sigma$  est la fonction *biweight* de Tukey [BT74] :

$$\sigma : x \mapsto \begin{cases} 1 - (1 - (x/\delta)^2)^3 & \text{if } |x| < \delta \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$\sigma$  est de classe  $C^2$ , ce qui garantit une régularité suffisante pour  $\mathcal{F}$ , et présente plusieurs propriétés intéressantes dans notre cas. Premièrement,  $\sigma(0) = 0$  et  $\sigma'(0) = 0$ , impliquant que l'énergie associée à des points proches de la surface est faible et a un gradient faible. Deuxièmement,  $\sigma(x) = 1$  et  $\sigma'(x) = 0$  pour tout  $x > \delta$ , faisant de  $\delta$  un seuil naturel permettant de différencier les points pertinents à considérer de ceux qui ne doivent pas contribuer à l'évolution de l'énergie. En pratique, nous estimons  $\delta$  comme la distance moyenne entre les points et leurs  $k$  plus proches voisins dans  $P$ , avec  $k = 10$ .

### 2.2. $\mathcal{G}(S)$ : distance de $S$ à $P$

Minimiser seulement  $\mathcal{F}$  permettrait d'ajuster la surface afin de trouver les points pertinents dans  $P$ , mais le contexte de régression dans lequel il s'inscrit ne permet pas de trouver les bordures délimitant l'ensemble des dits points. Notamment, les portions de surface se situant loin de tout points ne sont en aucun cas pénalisées. Pour éviter cela, nous ajoutons le terme  $\mathcal{G}$  à l'énergie :

$$\mathcal{G}(S) := \int_S \|q - \pi_P(q)\|^2 dS(q) \quad (5)$$

Cette expression est grandement inspirée par l'algorithme *Voronoi Square Distance Minimization* (VSDM) [NYL14], où une énergie similaire est utilisée pour l'ajustement de surface à surface. Tout comme  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  minimisé seul ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants, puisque les points de  $P$  n'apparaissant dans aucune projection n'ont pas d'influence sur l'énergie, empêchant son évolution pour capturer de nouveaux points. De plus, l'effondrement de la surface en un seul point donne une solution évidente nulle, ce que nous cherchons à proscrire. Les deux termes jouent ainsi des rôles complémentaires.

### 3. Paramétrisation et expression des contraintes

Dans la pratique, notre surface  $S$  dont dépend l'énergie  $E(S)$  est déterminée par la position de ses sommets. Nous définissons ces positions comme étant les vecteurs

$$S_i := RX_i + T \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

où  $(R,T)$  représentent une transformation rigide composée d'une rotation  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et d'une translation  $T \in \mathbb{R}^3$ , et  $X$  est le vecteur concaténé des coordonnées des sommets de  $S$  dans une base locale.

La séparation des variables en  $(X,R,T)$  permet d'exprimer séparément la déformation du toit (avec  $X$ ) et la transformation rigide  $(R,T)$  [HBS11 ; SA07 ; SSP07]. C'est sur la déformation que les contraintes géométriques évoquées plus tôt s'appliquent. Les alignements, coplanarités et orthogonalités peuvent être transcrites dans ce contexte en des équations linéaires de la forme  $\sum_k \alpha_k X_k = 0$ . Chaque équation permettant d'éliminer une variable dans  $X$ , nous obtenons finalement un nouveau vecteur de variables réduites  $Y$ , représentant les vrais degrés de libertés de notre modèle. Les deux vecteurs  $X$  et  $Y$  sont liés linéairement par :

$$X = MY \quad (7)$$

avec  $M$  une matrice de contraintes de taille  $3n \times (3n - m)$  (ou  $m$  est le nombre de contraintes).

En plus de ces contraintes d'égalités, il existe des cas pour lesquels nous souhaitons maintenir un certain ordre dans les valeurs de nos variables, afin par exemple d'éviter le retournement d'une arête. Nous ajoutons donc des contraintes linéaires d'inégalités  $\sum_k \beta_k X_k > 0$ . Bien qu'elles ne soient pas nécessaires en théorie, ces contraintes aident au bon conditionnement du problème, et permettent de diminuer le nombre de minima locaux de l'énergie  $E$ . Un exemple d'ensemble de contraintes est donné en Figure 2 sur un toit à quatre pans. Comme il n'est pas possible de forcer les contraintes d'inégalités de la même façon que les égalités, nous définissons un terme barrière  $\mathcal{I}$  pour chaque contrainte que nous ajoutons à l'énergie :

$$\mathcal{I}(X) = a \log(1 + \exp(-b \sum_i \beta_i X_i)), \text{ where } a, b > 0 \quad (8)$$

Si bien que le problème final s'écrit :

$$\operatorname{argmin}_{Y,R,T} \left\{ \mathcal{F}(MY, R, T) + \gamma \mathcal{G}(MY, R, T) + \sum_j \mathcal{I}_j(MY) \right\} \quad (9)$$

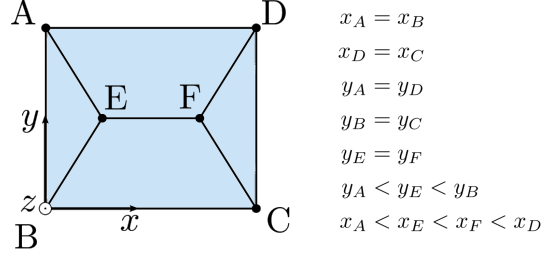


Figure 2: Un toit 4 pans vu du dessus sur lequel sont exprimées diverses contraintes entre coordonnées. Les contraintes sont exprimées dans une base locale suivant le toit, tandis que la position réelle du modèle est obtenue par transformation rigide.

### 4. Minimisation de $E$

Les termes  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{I}$  de l'Equation (9) sont de classe  $C^2$ , ce qui n'est pas un résultat immédiat pour  $\mathcal{G}$  mais justifié dans [LWL\*09]. Nous proposons de minimiser l'énergie en utilisant des méthodes quasi-Newton d'ordre deux telles que l'algorithme L-BFGS [LN89]. Cela implique un calcul d'à la fois  $E$  et  $\nabla E$ .

Pour calculer le gradient de  $E$  en fonction des variables  $(Y,R,T)$ , nous commençons par calculer le gradient  $\nabla_S E$  en fonction des positions réelles des sommets  $S_i := RX_i + T$  de la surface.

**Pour le terme  $\mathcal{F}$ ,** le calcul est direct. Pour le calcul des distances  $\|p - \pi_S(p)\|$ , nous utilisons une fonction de distance à un triangle et itérons sur tous les triangles de  $S$  pour trouver le minimum. Le gradient  $\nabla_S \mathcal{F}$  est obtenu par rapports aux projetés  $\pi_S(p)$  et peut être propagé aux sommets de  $S$  grâce aux coordonnées barycentriques de ces derniers.

**Pour le terme  $\mathcal{G}$ ,** l'intégrale est découpée en régions où le projeté  $\pi_P(q)$  est constant grâce au calcul d'un diagramme de Voronoï restreint à  $S$  :

$$\mathcal{G} = \int_S \|q - \pi_P(q)\|^2 dS(q) = \sum_{p \in P} \int_{\Omega_p \cap S} \|p - q\|^2 dS(q)$$

puis, pour un point  $p \in P$  donné, nous partitionnons de nouveau la région  $\Omega_p \cap S$  en triangles  $T(v_1, v_2, v_3)$  sur lesquels l'intégrale possède une expression analytique  $\mathcal{G}_T$  qu'il s'agit de sommer pour tous les triangles [NYL14] :

$$\mathcal{G}_T = \frac{\text{area}(T)}{6} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (v_i - p)(v_j - p)$$

Le calcul du gradient  $\nabla_S \mathcal{G}$ , analogue à celui de VSDM, est détaillé dans [Niv12].

**Pour le terme  $\mathcal{I}$ ,** l'expression en fonction des coordonnées  $X$  dans la base locale est immédiate pour la fonction et son gradient.

Obtenir le gradient  $\nabla_X E$  puis  $\nabla_Y E$ ,  $\nabla_\theta E$  (où  $R$  est la rotation d'angles  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  le long des axes) et  $\nabla_T E$  se fait grâce à la règle de la chaîne à travers les équations (6) et (7).



## 5. Résultats et applications

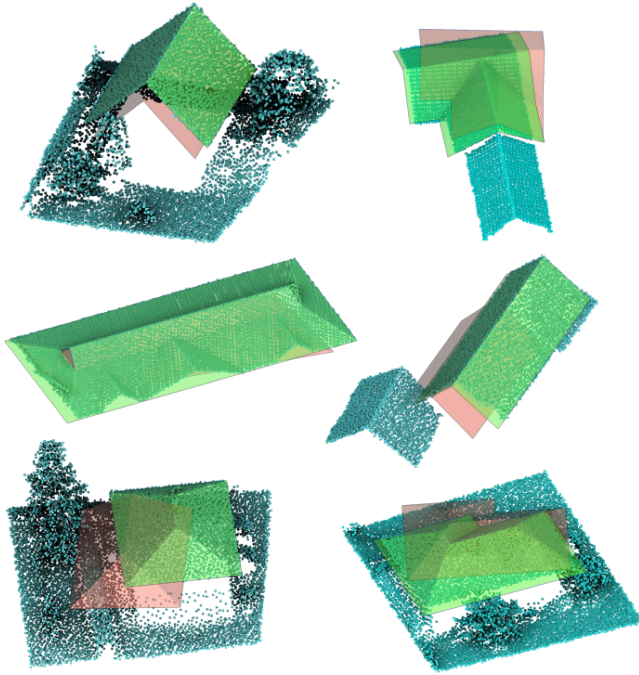


Figure 3: Différents résultats obtenus avec notre méthode. La position initiale est représentée en rouge et la position finale en vert. Dans chaque cas, la minimisation de notre énergie permet de trouver une position satisfaisante du modèle de toit sur le nuage.

L'évaluation de notre méthode porte sur deux axes principaux : la robustesse en fonction de la position initiale de la surface, et la robustesse en fonction de la quantité de points non pertinents. Dans le premier cas, il est important de prouver que le bassin d'attraction du minimum d'énergie correspondant à la position désirée est suffisamment large. Pour se faire, nous vérifions que la position souhaitée est effectivement un minimum local en vérifiant que minimiser depuis cette position n'a aucun effet. Ensuite, nous procédons à des initialisations translatées, tournées ou déformées pour vérifier la convergence vers cette position.

Pour le second axe, nous sélectionnons des nuages de points, acquis au dessus des villes de Breuschwickersheim et Strasbourg en France [Vil16], contenant chacun un toit (de différents modèles) ainsi que divers autres objets, tels que de la végétation, le sol ou des cheminées. Nous évaluons la capacité de la méthode à retrouver le toit parmi ces données.

Certains de nos résultats sont présentés en Figure 3. La tolérance à l'initialisation nous semble suffisante dans la plupart des cas, bien qu'il soit possible d'obtenir de mauvais résultats, par exemple en initialisant le modèle de toit trop près du sol ou tourné de  $180^\circ$  (Figure 4). Dans le cas de toits mitoyens, il est également très difficile de ne pas ajuster sur l'intégralité du nuage, bien que cela puisse être réglé grâce aux hyperparamètres  $\gamma$  et  $\delta$ . Enfin, cette méthode a plutôt vocation à être utilisée dans un pipeline plus large, dans lequel une initialisation proche de la solution finale pourrait être

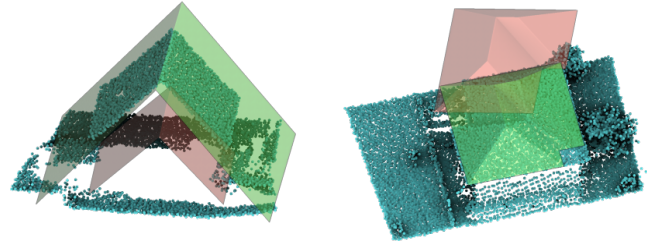


Figure 4: Cas d'échecs de notre méthode. La position initiale est représentée en rouge et la position finale en vert. Mal initialisé, le modèle de toit est susceptible de capturer des données non pertinentes (gauche) ou de terminer dans un minimum local tourné de  $180^\circ$  (droite).

trouvée, par exemple en considérant l'empreinte du toit ou un modèle construit à base de plans.

**Autres applications** Bien que nous nous soyons ici concentré sur le cas de nuages LIDAR représentant des toits de bâtiments, la méthode présentée dans cet article est susceptible de fonctionner sur d'autres modèles surfaciques contraints et d'autres types de nuages de points. Par exemple, une autre application pourrait être l'ajustement partiel d'objets CAO (Figure 5). Dans cet exemple, la pièce est paramétrée par la taille et la position des parties rectangulaires et cylindriques, ainsi que par la transformation rigide. Minimiser notre fonction  $E$  permet d'ajuster la pièce sur l'interface prévue à cet effet dans le nuage de points.

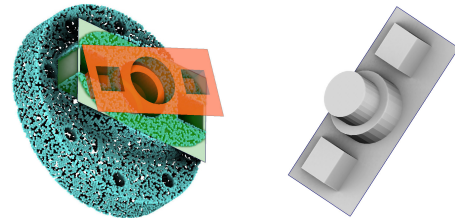


Figure 5: Ajustement partiel sur un objet CAO. À gauche, le nuage de point sur lequel sont représentés la position initiale (en rouge) et finale (en vert) de l'objet. À droite, une autre vue du modèle surfacique.

## Conclusion

Structurer des nuages de points est devenu une tâche de première importance, due à la croissante disponibilité de ces derniers. Dans cet article, nous avons détaillé une méthode permettant d'ajuster des modèles surfaciques contraints définis par l'utilisateur sur ce genre de données ponctuelles. Nous nous basons sur la minimisation d'une énergie, calculée et optimisée efficacement grâce à des méthodes quasi-Newton comme L-BFGS et une implémentation efficace d'un diagramme de Voronoï restreint. Notre méthode est robuste aux données non pertinentes, et permet l'automatisation d'une tâche autrefois réservée à des opérateurs humains. Son intégration dans un pipeline plus vaste utilisant des nuages de points, notamment autour de l'initialisation et des applications, est une voie de recherche future.

## Références

- [BT74] BEATON, ALBERT E et TUKEY, JOHN W. "The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data". In : *Technometrics* 16.2 (1974), p. 147-185 cf. p. 2.
- [BTS\*17] BERGER, MATTHEW, TAGLIASACCHI, ANDREA, SEVERSKY, LEE M. et al. "A Survey of Surface Reconstruction from Point Clouds". In : *Comput. Graph. Forum* 36.1 (2017), p. 301-329. ISSN : 0167-7055. DOI : [10.1111/cgf.12802](https://doi.org/10.1111/cgf.12802). URL : <https://doi.org/10.1111/cgf.12802> cf. p. 1.
- [CZMH14] CHEN, DONG, ZHANG, LIQIANG, MATHIOPOULOS, P TAKIS et HUANG, XIANFENG. "A methodology for automated segmentation and reconstruction of urban 3-D buildings from ALS point clouds". In : *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7.10 (2014), p. 4199-4217 cf. p. 2.
- [HBS11] HUANG, HAI, BRENNER, CLAUS et SESTER, MONIKA. "3D building roof reconstruction from point clouds via generative models". In : nov. 2011, p. 16-24. DOI : [10.1145/2093973.2093977](https://doi.org/10.1145/2093973.2093977) cf. p. 2, 3.
- [HBS13] HUANG, HAI, BRENNER, CLAUS et SESTER, MONIKA. "A generative statistical approach to automatic 3D building roof reconstruction from laser scanning data". In : *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 79 (2013), p. 29-43. ISSN : 0924-2716. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2013.02.004>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924271613000476> cf. p. 2.
- [HW77] HOLLAND, PAUL W et WELSCH, ROY E. "Robust regression using iteratively reweighted least-squares". In : *Communications in Statistics-theory and Methods* 6.9 (1977), p. 813-827 cf. p. 2.
- [LN89] LIU, DONG C. et NOCEDAL, JORGE. "On the Limited Memory BFGS Method for Large Scale Optimization". In : *Math. Program.* 45.1-3 (1989), p. 503-528. ISSN : 0025-5610 cf. p. 3.
- [LWL\*09] LIU, YANG, WANG, WENPING, LÉVY, BRUNO et al. "On centroidal Voronoi tessellation—energy smoothness and fast computation". In : *ACM Transactions on Graphics (ToG)* 28.4 (2009), p. 1-17 cf. p. 3.
- [MB09] MILDE, JUDITH et BRENNER, CLAUS. "Graph-based modeling of building roofs". In : *Proceedings of the 12th AGILE Conference on GIScience, Hannover, Germany (on CD-ROM)*. 2009 cf. p. 2.
- [MDSL20] MARTÍN-JIMÉNEZ, J., DEL POZO, S., SÁNCHEZ-APARICIO, M. et LAGÜELA, S. "Multi-scale roof characterization from LiDAR data and aerial orthoimagery : Automatic computation of building photovoltaic capacity". In : *Automation in Construction* 109 (2020), p. 102965. ISSN : 0926-5805. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.102965>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0926580519304042> cf. p. 2.
- [Niv12] NIVOLIERS, VINCENT. "Échantillonnage pour l'approximation de fonctions sur des maillages". Thèse de doctorat dirigée par Lévy, Bruno Informatique Université de Lorraine 2012. Thèse de doct. INRIA, 2012. URL : <http://www.theses.fr/2012LORR0161/document> cf. p. 3.
- [NYL14] NIVOLIERS, VINCENT, YAN, DONG-MING et LÉVY, BRUNO. "Fitting polynomial surfaces to triangular meshes with Voronoi squared distance minimization". In : *Engineering with Computers* 30.3 (2014), p. 289-300 cf. p. 3.
- [SA07] SORKINE, OLGA et ALEXA, MARC. "As-Rigid-as-Possible Surface Modeling". In : *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing*. SGP '07. Barcelona, Spain : Eurographics Association, 2007, p. 109-116. ISBN : 9783905673463 cf. p. 3.
- [SSP07] SUMNER, ROBERT W., SCHMID, JOHANNES et PAULY, MARK. "Embedded Deformation for Shape Manipulation". In : *ACM SIGGRAPH 2007 Papers*. SIGGRAPH '07. San Diego, California : Association for Computing Machinery, 2007, 80-es. ISBN : 9781450378369. DOI : [10.1145/1275808.1276478](https://doi.org/10.1145/1275808.1276478). URL : <https://doi.org/10.1145/1275808.1276478> cf. p. 3.
- [Vil16] VILLE ET EUROMÉTROPOLE DE STRASBOURG. *Lidar data*. Nov. 2016. URL : [https://data.strasbourg.eu/explore/dataset/odata3d%5C\\_lidar/information/%7D](https://data.strasbourg.eu/explore/dataset/odata3d%5C_lidar/information/%7D) cf. p. 4.
- [Vos99] VOSSELMAN, GEORGE. "Building reconstruction using planar faces in very high density height data". In : *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing* 32.3; SECT 2W5 (1999), p. 87-94 cf. p. 2.
- [XEV14] XIONG, BIAO, ELBERINK, S OUDE et VOSSELMAN, G. "A graph edit dictionary for correcting errors in roof topology graphs reconstructed from point clouds". In : *ISPRS Journal of photogrammetry and remote sensing* 93 (2014), p. 227-242 cf. p. 2.