Universidad del Norte

División de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadística

Espacios de Besov sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ e inmersiones continuas

Jonathan González Ospino

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Matemáticas

Director: Dr. rer. nat. Jairo Hernández Monzón

Barranquilla, diciembre de 2013

Agradecimientos

Doy un agradecimiento muy especial a COLCIENCIAS, por la financiación del proyecto *Operadores Pseudodiferenciales Banach vector-valuados en el Toro n-dimensional*, código 121556933488, del cual hace parte el presente trabajo.

A mis padres, son la mayor fuente de inspiración en mi vida, por enseñarme el valor de la responsabilidad, las ganas de crecer, y el deseo de continuar avanzando en mi formación profesional.

Enormemente agradecido estoy con mi asesor Jairo Hernández Monzón y el profesor Bienvenido Barraza, modelos de inspiración profesional y poseedores de grandes cualidades como personas, como docentes y como matemáticos; estandartes que me impulsaron a alcanzar las metas trazadas para conseguir este logro. Muchas gracias por su tiempo.

Gracias a los compañeros y amigos que me acompañaron en el arduo camino de la maestría: Manuel, Nicolas, Ronald, Karina, Eraus y Jose Luis. Que la vida nos brinde el placer de seguir apoyándonos en la consecución de nuestras metas futuras.

Un especial agradecimiento para Anggie, porque no dejaste de contagiarme con tus ganas para continuar, por alegrarme y alentarme en los momentos difíciles y por ser luz en el camino oscuro.

Introducción

Los espacios de Besov sobre $\mathbb{R}^n$ deben su aparición al matemático ruso *Oleg Vladimirovich Besov*, quien los introduce en su texto: *Integral Representations of Functions and Imbedding*, Moscow 1975. Desde entonces despertó el interés de estudiar dichos espacios en varios matemáticos, por ejemplo *H. Triebel* ([7], [9]), *H.-J. Schmeisser* ([8]) y *H. Amann* ([1]), estos hicieron grandes aportes contribuyendo con textos y artículos alrededor de la temática. Una aplicación entre otras se presenta con los operadores pseudodiferenciales.

Este trabajo tiene como objetivo el estudio de las propiedades de los espacios de Besov toroidales o periódicos Banach valuados, las inmersiones entre ellos y las inmersiones de estos espacios en espacios de Sobolev periódicos Banach valuados. Estos resultados, que en su mayoría se encuentran en el Capítulo 4, generalizan resultados análogos al caso del toro unidimensional tratados en [2]. Al parecer, en la literatura existente (al menos en lo que nuestra búsqueda indica) no se encuentran resultados como los que presentamos en el último capítulo de este trabajo sobre los espacios de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$, cuando $n \geq 1$ y E es un espacio de Banach arbitrario.

El documento está organizado del modo siguiente. En el primer capítulo encontramos las nociones necesarias para iniciar una lectura sólida que ayude a comprender el resto del trabajo. En esta parte, damos las definiciones de espacios de funciones sobre $\mathbb{R}^n$ y comentamos acerca de la transformada de Fourier, caso continuo. El segundo capítulo está enfocado en dar claridad acerca del toro n-dimensional $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$ realizando un análisis con los espacios cocientes y mostrando las identificaciones entre los espacios de funciones $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$, $\mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$ y $\mathfrak{F}_{\partial}([0, 2\pi]^n, X)$, siendo X un espacio vectorial. También es desarrollado en detalle el espacio periódico vector-valuado $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ donde E es un espacio de Banach y definimos los espacios de funciones $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. En el tercer capítulo probamos que el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) := \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), E)$ es completo, introducimos el espacio de Sobolev periódico, el espacio de las funciones rápidamente decrecientes $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$, el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ y sus topologías. Presentamos el concepto de transformada de Fourier toroidal y resultados de convolución. En el capítulo 4 probamos que el espacio de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ es de Banach con $s \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p, q \leq \infty$, para ello son necesarias las inmersiones

$$\begin{aligned}
B^s_{p,q_0}(\mathbb{T}^n, E) &\hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n, E);\ \ 1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty,\\
B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{T}^n, E) &\hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n, E);\ \ \varepsilon > 0,\ \ 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty,\\
C^\infty(\mathbb{T}^n, E) &\hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E),\\
B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E) &\hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E),
\end{aligned}$$

las cuales demostramos detalladamente en este trabajo. Luego procedecemos con la demostración de dos inmersiones

$$B^0_{p,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^0_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E),$$

$$B^0_{\infty,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n, E),$$

útiles para probar las siguientes inmersiones continuas

$$B^m_{p,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow W^m_p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^m_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E),$$

$$B^m_{\infty,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow C^m(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^m_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n, E),$$

donde $W^m_p(\mathbb{T}^n, E)$ es el espacio de Sobolev periódico o toroidal. Para la prueba de estas últimas inmersiones hacemos uso del Teorema 4.20: Sean $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ sí y sólo si $\partial^\alpha u \in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ con $|\alpha| \leq m$. Además,

$$u \longmapsto \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n_0\\ |\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}$$

es una norma equivalente para $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$.

Contenido

1 Notaciones y espacios de funciones en $\mathbb{R}^n$ **1**

1.1 Espacios $C^k(\Omega, E)$ y $C_0^\infty(\Omega, E)$ 2

1.2 Funciones de prueba y el espacio $\mathcal{D}(\Omega, E)$ 2

1.3 El espacio de las funciones rápidamente decrecientes 3

1.4 Transformada de Fourier 3

2 Espacios de funciones sobre el toro n-dimensional **5**

2.1 Espacios cocientes 5

2.2 El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ 8

2.3 Identificación de espacios de funciones sobre $\mathbb{T}^n$ 10

2.4 Espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ 14

2.5 Espacios $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ 20

3 Espacios de Distribuciones sobre $\mathbb{T}^n$ **23**

3.1 El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ 23

3.2 Espacio de Sobolev periódico o toroidal 27

3.3 Distribuciones temperadas sobre $\mathbb{Z}^n$ 28

3.4 Transformada de Fourier toroidal 30

3.5 Convolución 31

4 Espacios de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ **35**

Referencias **57**

Capítulo 1

Notaciones y espacios de funciones en $\mathbb{R}^n$

Un *multiíndice* α es una n-tupla ($n \in \mathbb{N}$) de enteros no negativos. Esto es, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, siendo $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. El *orden* del multiíndice α es definido por $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y su *factorial* viene dado mediante

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definimos $\alpha \pm \beta := (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$ y $\beta \leq \alpha$ sí y sólo si $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. En caso de que $\beta \leq \alpha$, definimos

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{\beta} &:= \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \\ &= \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}. \end{aligned}$$

Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, definimos

$$x^\alpha := \begin{cases} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, & \text{si } x_1 \cdots x_n \neq 0, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En adelante, ∂_j denota la derivada parcial con respecto a la j-ésima variable x_j y similarmente escribimos

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.1. Espacios $C^k(\Omega, E)$ y $C_0^\infty(\Omega, E)$

De aquí en adelante, si no especifica, $k \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y E es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, $C^k(\Omega, E)$ denota el espacio de todas las funciones $f : \Omega \longrightarrow E$ que tienen derivadas continuas de orden menor ó igual a k, esto es, $\partial^\alpha f(x)$ existe para todo $x \in \Omega$ y todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$, y además las funciones $\partial^\alpha f : \Omega \longrightarrow E$ son continuas. Para $k = 0$, $C(\Omega, E) := C^0(\Omega, E)$ es el espacio de todas las funciones continuas en Ω con valores en E. Por último, $C^\infty(\Omega, E)$ es el espacio de todas las funciones $f : \Omega \longrightarrow E$ tales que $f \in C^k(\Omega, E)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, de aquí que

$$C^\infty(\Omega, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega, E).$$

En caso de ser $E = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, escribimos $C^k(\Omega)$ para $k \in \mathbb{N}_0$. El *soporte* de $f \in C(\Omega, E)$, denotado por $\operatorname{supp}(f)$, es definido así:

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Nótese que $x \notin \operatorname{supp}(f)$ si y sólo si $\exists r > 0$ tal que $f(y) = 0$ $\forall y \in B_r(x)$. Representamos por $C_0^k(\Omega, E)$ al espacio de todas las funciones en $C^k(\Omega, E)$ que tienen soporte compacto y $C_0^\infty(\Omega, E)$ es el espacio de funciones que están en $C^\infty(\Omega, E)$ con soporte compacto.

1.2. Funciones de prueba y el espacio $\mathcal{D}(\Omega, E)$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Decimos que una sucesión $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega, E)$ converge a cero en $C_0^\infty(\Omega, E)$ si:
i) existe $K \subset \Omega$, K compacto tal que $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq K$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y
ii) $(\partial^\alpha \varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a cero uniformemente en K (y por consiguiente en Ω) para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
El espacio $C_0^\infty(\Omega, E)$ dotado de esta noción de convergencia es denotado por $\mathcal{D}(\Omega, E)$. Si $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathcal{D}(\Omega, E)$, escribimos $\varphi_i \xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega,E)} 0$. Los elementos de $\mathcal{D}(\Omega, E)$ se denominan *funciones de prueba*. Decimos que $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiende a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, E)$ en $C_0^\infty(\Omega, E)$ si $(\varphi_i - \varphi) \xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega,E)} 0$, esto es representado por $\varphi_i \xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega,E)} \varphi$.

1.3. El espacio de las funciones rápidamente decrecientes

Definición 1.1. *Definimos el espacio de Schwartz de la siguiente manera,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E) \mid \forall N \in \mathbb{N}_0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^N \|\partial^\alpha \varphi(x)\| < \infty \right\}$$

donde $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{1/2}$ *con* $x \in \mathbb{R}^n$.

Los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ se denominan *funciones rápidamente decrecientes con valores en* E. Para cada $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} |\cdot|_N : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto |\varphi|_N := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le N}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^N \|\partial^\alpha \varphi(x)\| \end{aligned}$$

es una seminorma en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$. El espacio de Schwartz con la familia de seminormas $\{|\cdot|_N : N \in \mathbb{N}_0\}$ es un espacio de Fréchet. Esto es, el espacio $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E), d)$ es un espacio métrico completo, donde

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{|\varphi - \psi|_N}{1 + |\varphi - \psi|_N}.$$

La topopología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ es la inducida por la familia de seminormas $\{|\cdot|_N\}_{N \in \mathbb{N}_0}$. Esto es, la noción de convergencia es la siguiente: $\varphi_i \xrightarrow[i \to \infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)} 0$, si y sólo si $|\varphi_i|_N \xrightarrow[i \to \infty]{\mathbb{R}} 0$ para cada $N \in \mathbb{N}_0$. En caso de que $E = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, escribimos simplemente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.4. Transformada de Fourier

Definición 1.2 (El espacio $L^p(\Omega, E)$). *Para* $1 \le p < \infty$ *se define el espacio* $L^p(\Omega, E)$ *como el conjunto de todas las funciones* $f : \Omega \longrightarrow E$ *tales que* f *es medible y*

$$\|f\|_{L^p(\Omega, E)} := \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definición 1.3 (Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$). *Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de Fourier por*

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \tag{1.1}$$

donde $x \cdot \xi := \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ para $x = (x_1, \ldots, x_n), \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.4. *Sean X e Y espacios topológicos. Escribimos $X \hookrightarrow Y$ si X está inmerso continuamente en Y, esto es, existe una inyección continua $j : X \longrightarrow Y$. Si además $j(X)$ es denso en Y, escribimos $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$.*

De manera similar al caso escalar se prueba que $\mathcal{D}(\Omega, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\Omega, E)$, si $1 \leq p < \infty$.

Observación 1.5. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pues podemos mostrar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Por tanto $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi$ está bien definida mediante (1.1).

Teorema 1.6 (Fórmula de inversión de Fourier). *La transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cuya inversa está dada por*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Esta fórmula es llamada la fórmula de inversión de Fourier y la inversa de la transformada de Fourier es denotada por

$$\left(\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\varphi\right)(x) := \check{\varphi}(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi \tag{1.2}$$

para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, podemos escribir

$$\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} = \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n} = I_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}.$$

Prueba. Teorema 1.1.21 de [6]. □

Observación 1.7. Destacamos del teorema anterior el siguiente hecho: Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi, \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo 2

Espacios de funciones sobre el toro n-dimensional

2.1. Espacios cocientes

Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Definimos la *clase de equivalencia* de un elemento $x \in X$, denotada $[x]$, como $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$. Indicamos con $X/\sim$ el *conjunto cociente* $X/\sim := \{[x] : x \in X\}$. Consideremos la función,

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto \pi(x) := [x] \end{aligned}$$

denominada *la proyección en el cociente*.
La colección $\tau := \{A \subset X/\sim\ : \pi^{-1}(A) \text{ es abierto en } X\}$ es una topología sobre $X/\sim$, llamada *topología cociente*. En adelante, consideramos a $X/\sim$ con esta topología.
Obsérvese que la función $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ posee las siguientes propiedades: continuidad, sobreyectividad, y si $A \subset X/\sim$ es tal que $\pi^{-1}(A)$ es abierto en X, entonces A es abierto en $X/\sim$.

Definición 2.1. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, decimos que f es una aplicación de identificación si es sobreyectiva y cumple la propiedad: si $A \subset Y$ es tal que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto de X entonces A es abierto en Y.*

De acuerdo a la definición anterior, es claro ver que la proyección π es una aplicación de identificación.

Observación 2.2. En la definición de aplicación de identificación puede cambiarse abierto por cerrado dando lugar a una definición equivalente. Esto es, una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y sobreyectiva es una aplicación de identificación sí y sólo si para $A \subset Y$ con $f^{-1}(A)$ cerrado en X, entonces A es cerrado en Y.

Prueba. $\Longrightarrow$] Sea $A \subset Y$ con $f^{-1}(A)$ cerrado en X, entonces el conjunto $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$ es abierto en X. Por ser f una identificación, A^c es abierto en Y y por tanto A es cerrado en Y.
$\Longleftarrow$] Sea $A \subset Y$ con $f^{-1}(A)$ abierto en X, entonces $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$ es cerrado en X, de la hipótesis se sigue que A^c es cerrado en Y. En consecuencia, A es abierto en Y. $\square$

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es una *aplicación abierta* si la imagen de todo abierto en X es abierta en Y. Análogamente, es una *aplicación cerrada* si la imagen de todo cerrado en X es cerrada en Y.

Definición 2.3. *Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si es biyectiva, continua con inversa continua. En este caso decimos que X e Y son homeomorfos.*

Dada una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, son equivalentes los enunciados: $a)$ f es homeomorfismo y $b)$ f es continua y abierta.

Teorema 2.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación de identificación entre los espacios topológicos X e Y, entonces existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre X y un homeomorfismo $\tilde{f} : Y \longrightarrow X/\sim$ tal que $\tilde{f} \circ f = \pi$.*

Prueba. La aplicación f genera una relación de equivalencia sobre X definida así: Para $z, w \in X$ decimos que $z \sim w$ sí y sólo si $f(z) = f(w)$. Por la sobreyectividad de f, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Definimos $\tilde{f} : Y \longrightarrow X/\sim$ por $\tilde{f}(y) := \pi(x)$; por definición $\tilde{f} \circ f = \pi$.
La aplicación $\tilde{f}$ es inyectiva. Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $\tilde{f}(y_1) = \tilde{f}(y_2)$, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$; por consiguiente $\tilde{f}(y_1) = \pi(x_1)$ y $\tilde{f}(y_2) = \pi(x_2)$. Luego, $[x_1] = [x_2]$ con lo que obtenemos $x_1 \sim x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ y en consecuencia $y_1 = y_2$.
La aplicación $\tilde{f}$ es sobreyectiva. En efecto: Sea $w \in X/\sim$, por ser la función π sobreyectiva existe $x \in X$ tal que $\pi(x) = w$. Este x es pre-imagen de algún $y \in Y$ según f, esto es, existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$. Luego, $\tilde{f}(y) = \pi(x)$ y

por lo tanto $\tilde{f}(y) = w$.
Veamos que $\tilde{f}$ es una aplicación abierta. Sea $A \subset Y$ abierto, entonces a partir de la igualdad $f = \tilde{f}^{-1} \circ \pi$ y la continuidad de f tenemos que el conjunto $\pi^{-1}(\tilde{f}(A)) = f^{-1}(A)$ es abierto en X. Como π es una aplicación de identificación, $\tilde{f}(A)$ es abierto en $X/\sim$. Ahora veamos la continuidad de $\tilde{f}$. Supongamos A abierto en $X/\sim$, entonces del hecho $\tilde{f} \circ f = \pi$ y la continuidad de π obtenemos que $f^{-1}(\tilde{f}^{-1}(A)) = \pi^{-1}(A)$ es abierto en X y como f es una aplicación de identificación, $\tilde{f}^{-1}(A)$ es abierto en Y. Por lo tanto $\tilde{f}$ es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 2.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces f es una aplicación de identificación.*

Prueba. Sea $A \subset Y$, entonces $f(f^{-1}(A)) = A$ ya que f es sobreyectiva. Sea inicialmente f abierta. Si $f^{-1}(A)$ es abierto en X, de la igualdad anterior obtenemos que A es abierto en Y. En el segundo caso cuando f es cerrada, se obtiene de manera similar que si $f^{-1}(A)$ es cerrado en X, entonces A es cerrado en Y. $\square$

En este trabajo dotamos a la circunferencia unitaria $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ de la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Dado que S^1 es un subespacio topológico del espacio de Hausdorff $\mathbb{R}^2$, entonces S^1 también es de Hausdorff. A continuación mencionaremos un par de resultados concernientes a espacios de Hausdorff.

1) Si $\{X_i : i \in I\}$ es una colección de espacios de Hausdorff, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es un espacio de Hausdorff.

2) Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Lema 2.6 (Lema de la función cerrada)**.** *Sean X compacto, Y de Hausdorff y $f : X \longrightarrow Y$ continua, entonces f es cerrada.*

Prueba. Supongamos $\mathcal{U}$ cerrado en X, entonces $\mathcal{U}$ es compacto por ser X compacto. Dado que f es continua tenemos que $f(\mathcal{U}) \subseteq Y$ es compacto. Siguiéndose de 2) que $f(\mathcal{U})$ es cerrado en Y. $\square$

Ejemplo 2.7. En $[0, 2\pi]^n$ definimos la relación de equivalencia

$$x \sim y \text{ si y sólo } x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^n.$$

Probemos que el espacio cociente $[0, 2\pi]^n/\sim$ es homeomorfo a $(S^1)^n$, donde $(S^1)^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ es el producto cartesiano de n circunferencias unitarias.

Prueba. Definimos $\Phi : [0, 2\pi]^n \longrightarrow (S^1)^n$ por $\Phi(x) := (e^{ix_1}, e^{ix_2}, \ldots, e^{ix_n})$, esta función es sobreyectiva y continua. Dado que $[0, 2\pi]^n$ es compacto y además $(S^1)^n$ de Hausdorff, concluimos del lema anterior que Φ es cerrada. En virtud de la Proposición 2.5, Φ es una aplicación de identificación. El Teorema 2.4 implica la existencia de un homeomorfismo $\tilde{\Phi} : (S^1)^n \longrightarrow [0, 2\pi]^n/\star$, donde $\star$ es la relación de equivalencia generada por Φ.
Ahora bien, la relación generada por Φ viene dada por: para $x, z \in [0, 2\pi]^n$ decimos que $x \star z$ si y sólo si $\Phi(x) = \Phi(z)$, equivalentemente, para todo $j = 1, \ldots, n$ tenemos $e^{ix_j} = e^{iz_j}$. Esto es,

$$e^{i(x_j - z_j)} = 1$$

para cada $j = 1, \ldots, n$ y así,

$$\cos(x_j - z_j) + i \sin(x_j - z_j) = 1$$

con $j = 1, \ldots, n$ obteniéndose,

$$\begin{cases} \cos(x_j - z_j) = 1 \\ \sin(x_j - z_j) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_j - z_j = 2\pi k_1 & \text{con } k_1 \in \mathbb{Z} \\ x_j - z_j = \pi k_2 & \text{con } k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

siendo la solución del sistema $x_j - z_j = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Luego $x - z \in 2\pi\mathbb{Z}^n$. Esto muestra que las relaciones $\sim$ y $\star$ son iguales. Por lo tanto $\tilde{\Phi} : (S^1)^n \longrightarrow [0, 2\pi]^n/\sim$ es un homeomorfismo. □

2.2. El toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$

Definición 2.8. *El toro n-dimensional, denotado $\mathbb{T}^n$, es definido como el cociente de $\mathbb{R}^n$ con la relación de equivalencia*

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^n.$$

Esto es, $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n) := \mathbb{R}^n/\sim$.

Para $t \in \mathbb{R}$ y $k > 0$ se cumple que

$$t - k \left\lfloor \frac{t}{k} \right\rfloor \in [0, k]$$

donde $\lfloor t \rfloor$ es la parte entera de t. Es claro que $[0,2\pi]^n/\!\sim\subseteq \mathbb{T}^n$. Probemos la otra contenencia. Sea $[x] \in \mathbb{T}^n$, entonces $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor \in [0,2\pi]^n$$

donde $\lfloor z \rfloor := (\lfloor z_1 \rfloor, \ldots, \lfloor z_n \rfloor)$ para $z \in \mathbb{R}^n$. Como $x - \left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) \in 2\pi\mathbb{Z}^n$, entonces

$$[x] = \left[x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right] \in [0,2\pi]^n/\!\sim .$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{T}^n = [0,2\pi]^n/\!\sim .$$

De acuerdo con el Ejemplo 2.7, el toro $\mathbb{T}^n$ es compacto por ser la imagen bajo una función continua del compacto $(S^1)^n$. Debido a que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es mapeado por la proyección en el cociente a $[x] \in \mathbb{T}^n$, no hay incoveniente en escribir $x \in \mathbb{T}^n$ en lugar de $[x] \in \mathbb{T}^n$.

Observación 2.9. El toro como un cubo. Analicemos el cociente $[0,2\pi]^n/\!\sim$.

i) Para $n = 1$, tenemos $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Entonces,

$$[0] = \{y \in [0,2\pi] : -y = 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2\pi\} = [2\pi].$$

Supongamos $x \in]0,2\pi[$,

$$[x] = \{y \in [0,2\pi] : x-y = 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\} = \{y \in [0,2\pi] : y = x+2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nótese que el único valor que puede tomar k en la igualdad $y = x + 2\pi k$ bajo las condiciones $y \in [0,2\pi]$ y $0 < x < 2\pi$, es cero. Luego, si $0 < x < 2\pi$, entonces $[x] = \{x\}$. De acuerdo a lo anterior, el toro unidimensional $\mathbb{T}$ es el intervalo $[0,2\pi]$, donde los puntos extremos están identificados.

ii) Para $n = 2$, tenemos $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^2$. Consideremos $0 \leq x_1 \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned}
[(x_1,0)] &= \{(y_1,y_2) \in [0,2\pi]^2 : y_1 = x_1 + 2\pi k_1 \wedge y_2 = 2\pi k_2 \text{ con } (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2\} \\
&= \{(y_1,y_2) \in [0,2\pi]^2 : y_1 = x_1 \wedge y_2 \in \{0,2\pi\}\} = \{(x_1,0),(x_1,2\pi)\} \\
&= [(x_1,2\pi)].
\end{aligned}$$

Luego $(x_1,0) \sim (x_1,2\pi)$ para $0 \leq x_1 \leq 2\pi$. Ahora tomemos $0 \leq y_2 \leq 2\pi$, entonces se obtiene en forma similar que

$$[(0,y_2)] = \{(0,y_2),(2\pi,y_2)\} = [(2\pi,y_2)].$$

Así $(0,y_2) \sim (2\pi, y_2)$ para todo $0 \leq y_2 \leq 2\pi$. Si $(x,y) \in]0,2\pi[^2$, entonces

$$\begin{aligned}[(x,y)] &= \{(u,v) \in [0,2\pi]^2 : (u,v) = (x+2\pi k_1, y+2\pi k_2) \text{ con } k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^2\} \\ &= \{(x,y)\}.\end{aligned}$$

Esto es, cada punto del interior del cuadrado está relacionado únicamente consigo mismo. Luego el toro $\mathbb{T}^2$ es el cuadrado $[0,2\pi]^2$, donde los lados opuestos están identificados.

iii) En general, supongamos $x = (x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) \in [0,2\pi]^n$ con $x_j = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos $k = (k_1, \ldots, k_n)$,

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in [0,2\pi]^n : (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+2\pi k_1, \ldots, 2\pi k_j, \ldots, x_n + 2\pi k_n) \text{ con } k \in \mathbb{Z}^n\} \\ &= \{y \in [0,2\pi]^n : y_1 = x_1 + 2\pi k_1, \ldots, y_j = 2\pi k_j, \ldots, y_n = x_n + 2\pi k_n \text{ con } k \in \mathbb{Z}^n\} \\ &= \{(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_{j-1},2\pi,x_{j+1},\ldots,x_n)\}.\end{aligned}$$

Entonces $(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n) \sim (x_1,\ldots,2\pi,\ldots,x_n)$ siempre que 0 y 2π estén en la misma coordenada, de aquí obtenemos que los vértices del cubo están relacionados. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in]0,2\pi[^n$,

$$\begin{aligned}[(x_1,\ldots,x_n)] &= \{y \in [0{,}2\pi]^n : y_1 = x_1 + 2\pi k_1, \ldots, y_n = x_n + 2\pi k_n \text{ con } k \in \mathbb{Z}^n\} \\ &= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}.\end{aligned}$$

Lo anterior está mostrando que cualquier punto del interior del cubo $[0,2\pi]^n$ está relacionado sólo con el mismo. Por consiguiente, el toro $\mathbb{T}^n$ se puede ver como el cubo $[0,2\pi]^n$ con las caras opuestas identificadas.

2.3. Identificación de espacios de funciones sobre $\mathbb{T}^n$

Definición 2.10. *Sea X un espacio vectorial. Simbolizamos por $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$ al conjunto de funciones con dominio $\mathbb{T}^n$ y valores en X, esto es,*

$$\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X) := \{f \mid f : \mathbb{T}^n \longrightarrow X \text{ es una función}\}.$$

Definición 2.11. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ es $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica si f es 2π-periódica en cada componente, esto es,*

$$f(x + 2\pi k) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad y \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Denotamos al conjunto de todas las funciones $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ por $\mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$.

Obsérvese que si $f \in \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$, entonces $f(\mathbb{R}^n) = f([0, 2\pi]^n)$. Esto se sigue del hecho de que $x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor \in [0, 2\pi]^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.12. *El espacio de funciones sobre el cubo $[0, 2\pi]^n$ tales que los puntos $(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n)$ y $(x_1, x_2, \ldots, 2\pi, \ldots, x_n)$ tienen la misma imagen siempre que 0 y 2π estén en la misma coordenada es denotado por $\mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$. Es decir,*

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X) := \{f : [0, 2\pi]^n \longrightarrow X \mid f(x - x_j e_j) = f(x + (2\pi - x_j)e_j)\\ \textit{para todo } x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, 2\pi]^n, j = 1, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Observación 2.13. Nótese que si $f \in \mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$, entonces los puntos ubicados al frente de caras opuestas del cubo tienen la misma imagen. En particular:

$$f(0, 0, \ldots, 0) = f(2\pi, 0, \ldots, 0) = \ldots = f(2\pi, 2\pi, \ldots, 0) = f(2\pi, \ldots, 2\pi).$$

Identificación de $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$ con $\mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$. Consideremos la función,

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X) &\longrightarrow \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)\\ f &\longmapsto (\Lambda f)(x) := f([x])\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Nótese que Λf es una función bien definida y $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica, esto último es así porque $(\Lambda f)(x + 2\pi k) = f([x + 2\pi k]) = f([x]) = (\Lambda f)(x)$.
Λ es inyectiva. Sean $f, g : \mathbb{T}^n \longrightarrow X$ con $\Lambda f = \Lambda g$, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos $(\Lambda f)(x) = (\Lambda g)(x)$, esto es, $f([x]) = g([x])$. En consecuencia, $f = g$ en $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$.
Λ es sobreyectiva. Sea $g \in \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$, entonces $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ es una función $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica. Definimos,

$$\begin{aligned}f : \mathbb{T}^n &\longrightarrow X\\ [x] &\longmapsto f([x]) := g(x)\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que f está bien definida. Sean $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $[x] = [\tilde{x}]$, entonces $\tilde{x} = x + 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^n$ y por ser g una función $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica obtenemos $g(\tilde{x}) = g(x)$, por tanto $f([\tilde{x}]) = f([x])$. Dado que $(\Lambda f)(x) = f([x]) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\Lambda f = g$.
Así, Λ es una biyección lo que nos permite identificar funciones sobre el toro $\mathbb{T}^n$ con funciones $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas sobre $\mathbb{R}^n$.

Identificación de $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$ con $\mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$. Definimos

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} : \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X) &\longrightarrow \mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)\\ f &\longmapsto (\tilde{\Lambda} f)(x) := f([x]),\end{aligned}$$

con $x \in [0,2\pi]^n$. Es claro que $\tilde{\Lambda}$ está bien definida y para cada $x \in [0, 2\pi]^n$ y $j = 1, \ldots, n$ se tiene

$$\begin{aligned}(\tilde{\Lambda} f)(x - x_j e_j) &= f([x - x_j e_j])\\ &= f([x - x_j e_j + 2\pi e_j])\\ &= f([x + (2\pi - x_j) e_j])\\ &= (\tilde{\Lambda} f)(x + (2\pi - x_j) e_j).\end{aligned}$$

Por lo cual, $\tilde{\Lambda} f \in \mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$.
$\tilde{\Lambda}$ es inyectiva. Supongamos $f, g : \mathbb{T}^n \longrightarrow X$ tales que $\tilde{\Lambda} f = \tilde{\Lambda} g$, entonces $f([x]) = g([x])\ \forall\, x \in [0, 2\pi]^n$. Ahora si $y \in \mathbb{R}^n$, entonces $y - 2\pi \left\lfloor \frac{y}{2\pi} \right\rfloor \in [0, 2\pi]^n$ y por tanto

$$f([y]) = f\left(\left[y - 2\pi \left\lfloor \frac{y}{2\pi} \right\rfloor\right]\right) = g\left(\left[y - 2\pi \left\lfloor \frac{y}{2\pi} \right\rfloor\right]\right) = g([y]).$$

Luego, $f = g$ en $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$.
$\tilde{\Lambda}$ es sobreyectiva. Sea $g \in \mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$. Consideremos $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow X$ dada por $[x] \longmapsto f([x]) := g\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right)$. La función f está bien definida porque si $[x] = [\tilde{x}]$, entonces $\tilde{x} = x + 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\tilde{x} - 2\pi \left\lfloor \frac{\tilde{x}}{2\pi} \right\rfloor &= x + 2\pi k - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} + k \right\rfloor\\ &= x + 2\pi k - 2\pi \left(\left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor + k\right)\\ &= x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.\end{aligned}$$

Siguiéndose,

$$f([\tilde{x}]) = g\left(\tilde{x} - 2\pi \left\lfloor \frac{\tilde{x}}{2\pi} \right\rfloor\right) = g\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) = f([x]).$$

Veamos ahora que $\tilde{\Lambda} f = g$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, 2\pi]^n$ y consideremos $x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor =: (x^1, \ldots, x^n)$, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos

$$x^i = \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i \in [0, 2\pi[,\\ 0, & \text{si } x_i = 2\pi,\end{cases}$$

en consecuencia $x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor$ es x ó un punto de la frontera del cubo que tiene coordenada 0 en la posición donde x tiene coordenada 2π. En cualquier caso, $g\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) = g(x)$ debido a la Observación 2.13 junto con la conclusión anterior. Por lo tanto $(\tilde{\Lambda} f)(x) = f([x]) = g\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) = g(x)$ para todo $x \in [0, 2\pi]^n$.
Esto muestra que $\tilde{\Lambda}$ es una biyección, permitiéndonos identificar funciones sobre el toro $\mathbb{T}^n$ con funciones definidas sobre el cubo $[0, 2\pi]^n$ que satisfacen: $f(x - x_j e_j) = f(x + (2\pi - x_j)e_j)$ para todo $x \in [0, 2\pi]^n$ y $j = 1, \ldots, n$.

Identificación de $\mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$ con $\mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$. Definimos,

$$\begin{aligned} Per : \mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X) &\longrightarrow \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X) \\ f &\longmapsto Per(f), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Per(f) := f_{per} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto f_{per}(x) := f\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right). \end{aligned}$$

Esta última función es conocida como *la extensión periódica de f a $\mathbb{R}^n$*, la cual posee las siguientes propiedades:
$i)$ $Per(f)$ es $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica. En efecto:

$$\begin{aligned} Per(f)(x + 2\pi k) &= f\left(x + 2\pi k - 2\pi \left\lfloor \frac{x + 2\pi k}{2\pi} \right\rfloor\right) \\ &= f\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) \\ &= Per(f)(x). \end{aligned}$$

$ii)$ $Per(f)\big|_{[0,2\pi]^n} = f$. Teniendo en cuenta el resultado obtenido para g en la prueba de la sobreyectividad de la función $\tilde{\Lambda}$ y que $f \in \mathfrak{F}_\partial([0, 2\pi]^n, X)$, tenemos:

$$Per(f)(x) = f_{per}(x) = f\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) = f(x)$$

para todo $x \in [0, 2\pi]^n$.
$iii)$ $Per(\tilde{\Lambda} f) = \Lambda f$ para todo $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$. En efecto: Si $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$Per(\tilde{\Lambda} f)(x) = (\tilde{\Lambda} f)\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right) = f\left(\left[x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right]\right) = (\Lambda f)(x).$$

iv) $Per = \Lambda \circ \tilde{\Lambda}^{-1}$. En consecuencia Per es una biyección por ser composición de funciones biyectivas. En efecto: Si $f \in \mathfrak{F}_{\partial}([0,2\pi]^n, X)$, entonces existe un único $g \in \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$ tal que $\tilde{\Lambda} g = f$. Luego,

$$Per(f) = Per(\tilde{\Lambda} g) = \Lambda g = \Lambda(\tilde{\Lambda}^{-1} f) = (\Lambda \circ \tilde{\Lambda}^{-1})(f).$$

Observación 2.14. Por todo lo anterior, podemos identificar las funciones sobre el toro $\mathbb{T}^n$ como las funciones definidas sobre el cubo $[0,2\pi]^n$ tales que satisfacen la condición de tener la misma imagen para los puntos ubicados en frente de caras opuestas del cubo extendidas periódicamente a $\mathbb{R}^n$, o como funciones $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas en $\mathbb{R}^n$.

2.4. Espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$

Sabemos que una función $\tilde{f} : \mathbb{T}^n \longrightarrow E$ puede identificarse con una función $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ y recíprocamente, toda función $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ induce una única $\tilde{f} : \mathbb{T}^n \longrightarrow E$. Sea $\mu_n := \frac{1}{(2\pi)^n}\lambda_n$, donde λ_n es la medida de Lebesgue n-dimensional. Entonces μ_n induce una medida $\tilde{\mu}_n$ sobre $\mathbb{T}^n$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \tilde{f} d\tilde{\mu}_n = \int_{[0,2\pi]^n} f d\mu_n = \int_{[0,2\pi]^n} f(x) đx,$$

donde $đx := \frac{dx}{(2\pi)^n}$. De aquí en adelante, no haremos ninguna distinción en las integrales de las funciones $\tilde{f}$ y f, y de las medidas $\tilde{\mu}_n$ y μ_n, abusaremos de estas notaciones. Nótese que: $\mu_n(\mathbb{T}^n) = \mu_n([0,2\pi]^n) = 1$.

Definición 2.15. *Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ es el espacio de las funciones $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ medibles tales que:*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} := \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|^p đx\right)^{1/p} = \left(\int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)\|^p đx\right)^{1/p} < +\infty,$$

para $1 \leq p < \infty$, y

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} := \operatorname{ínf}\{C_f > 0 : \|f(x)\| \leq C_f \ p.c.t. \ x \in [0,2\pi]^n\} < +\infty,$$

haciendo la convención $\operatorname{ínf} \emptyset := \infty$.

Como es usual $L^p(\mathbb{T}^n) := L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. La constante C_f de la definición se denomina *cota esencial de* f. A $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$, ínfimo de las cotas esenciales de f, lo denominamos *supremo esencial de* f y es tal que $\|f(x)\| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$ p.c.t. $x \in [0, 2\pi]^n$.

Observación 2.16. $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio vectorial pero $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}$ no es una norma ya que no podemos afirmar que $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} = 0$ implica $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 2\pi]^n$. Nótese que $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}$ satisface las propiedades de seminorma. En $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ definimos una relación de equivalencia del modo siguiente:

$$f \sim g \text{ sí y solamente si } \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} = 0.$$

El espacio cociente resultante, el cual continuamos denotando $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio vectorial normado con las operaciones $c\widetilde{f} := \widetilde{cf}$, $\widetilde{f} + \widetilde{g} := \widetilde{f + g}$ y norma $\left\|\tilde{f}\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} := \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}$, donde f es un representante de la clase de equivalencia $\tilde{f}$. Por comodidad entenderemos por $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ como un espacio de funciones en lugar de un espacio en el que sus elementos son clases de equivalencia de funciones.

Teorema 2.17 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean p y q exponentes conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $fg \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$ con*

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n,E)} .$$

Prueba. Si $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{T}^n, E)$, entonces las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ son $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas y medibles. Luego, $fg : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ dada por $(fg)(x) := f(x)g(x)$ es $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica y medible.
Supongamos $1 < p < \infty$, teniendo en cuenta la desigualdad de Hölder para funciones reales obtenemos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} |f(x)| \, \|g(x)\| \, dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/p}} \left(\int_{[0,2\pi]^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \frac{1}{(2\pi)^{n/q}} \left(\int_{[0,2\pi]^n} \|g(x)\|^q dx \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n,E)} .
\end{aligned}$$

Sean $p = 1$ y $q = \infty$. Dado que $\|g(x)\| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$ p.c.t. $x \in [0, 2\pi]^n$, existe $A \subseteq [0, 2\pi]^n$ de medida cero tal que $\|g(x)\| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$ para todo

$x \in A^c := \mathbb{R}^n \smallsetminus A$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)g(x)\|\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{A^c} |f(x)|\|g(x)\|dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{A^c} |f(x)|\,\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|\text{đ}x\right)\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}\,\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\,.
\end{aligned}$$

En forma similar se procede si $p = \infty$ y $p = 1$. □

Teorema 2.18 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean* $f, g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$*, entonces*

$$\|f+g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\,.$$

Prueba. Sea $1 \leq p < \infty$. Por la desigualdad de Minkowski para funciones reales tenemos,

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= \left(\int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)+g(x)\|^p \text{đ}x\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/p}}\left[\int_{[0,2\pi]^n} (\|f(x)\|+\|g(x)\|)^p dx\right]^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/p}}\left(\int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)\|^p dx\right)^{1/p} + \frac{1}{(2\pi)^{n/p}}\left(\int_{[0,2\pi]^n} \|g(x)\|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\,.
\end{aligned}$$

Consideremos $p = \infty$, debido a que $\|f(x)\| \leq \|f\|_{L^\infty}$ y $\|g(x)\| \leq \|g\|_{L^\infty}$ p.c.t. $x \in [0, 2\pi]^n$, entonces

$$\|f(x)+g(x)\| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$$

p.c.t. $x \in [0, 2\pi]^n$. Con esto tenemos que $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$ es una cota esencial de $f+g$, entonces $\|f+g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$. □

Teorema 2.19. *Los espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ son de Banach.*

<u>*Prueba*</u>. *a*) Supongamos $1 \leq p < \infty$. Sea $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_l - f_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon$ siempre que $l, k \geq N$. Por tanto, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_l - f_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \frac{1}{2} \text{ siempre que } l, k \geq l_1.$$

Además podemos escoger $l_2 > l_1$ tal que

$$\|f_l - f_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \frac{1}{2^2} \text{ siempre que } l, k \geq l_2.$$

Continuando con este proceso obtenemos una subsucesión $\left(f_{l_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de manera que $\left\|f_{l_{j+1}} - f_{l_j}\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \frac{1}{2^j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la función $g_i(x) := \sum_{j=1}^{i} \|f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x)\|$ y la serie $g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x)\|$. Como $f_{l_{j+1}}, f_{l_j} \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ entonces $\|f_{l_{j+1}} - f_{l_j}\| \in L^p(\mathbb{T}^n)$ y por consiguiente $g_i \in L^p(\mathbb{T}^n)$. La desigualdad de Minkowski implica

$$\begin{aligned}
\|g_i\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{T}^n} |g_i(x)|^p đx\right)^{1/p} = \left[\int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{j=1}^{i} \|f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x)\|\right)^p đx\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{i} \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x)\|^p đx\right)^{1/p} = \sum_{j=1}^{i} \left\|f_{l_{j+1}} - f_{l_j}\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&< \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^j} < 1.
\end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{i\to\infty} g_i(x) = g(x)$ y por tanto $\lim_{i\to\infty} |g_i(x)|^p = |g(x)|^p$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} |g(x)|^p đx &= \int_{\mathbb{T}^n} \lim_{i\to\infty} |g_i(x)|^p đx \leq \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} |g_i(x)|^p đx \\
&= \liminf_{i\to\infty} \|g_i\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq 1.
\end{aligned}$$

Luego, $\|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq 1$. Por consiguiente $|g(x)|^p$ es finita p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, y así $g(x) < +\infty$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto la serie $\sum_{j\geq 1}(f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x))$ es absolutamente convergente en E p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces es absolutamente convergente la serie $f_{l_1}(x) + \sum_{j\geq 1}(f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x))$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida cero tal que la serie anterior converge para todo $x \in A^c$. Sea $B := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} (A + 2\pi k)$, entonces B es medible y tiene medida cero. Nótese que $B^c \subset A^c$, en consecuencia la serie también converge para todo $x \in B^c$. Definimos la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ por

$$f(x) := \begin{cases} f_{l_1}(x) + \sum_{j\geq 1}(f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x)), & \text{si } x \in B^c, \\ 0, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Verifiquemos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ es $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica. Para ello consideramos dos casos:

1. Sea $x \in B$, entonces existen $a \in A$ y $k_0 \in \mathbb{Z}^n$ tales que $x = a + 2\pi k_0$. Por consiguiente $x + 2\pi k = a + 2\pi(k + k_0) \in B$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Luego, $f(x + 2\pi k) = 0 = f(x)$ para todo $x \in B$ y todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

2. Si $x \in B^c$, entonces $x + 2\pi k \in B^c$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. En efecto: Razonemos por el absurdo, sea $k \in \mathbb{Z}^n$ y supongamos $x + 2\pi k \in B$, entonces existen $a \in A$ y $k_0 \in \mathbb{Z}^n$ tales que $x + 2\pi k = a + 2\pi k_0$ siguiéndose que $x = a + 2\pi(k_0 - k) \in B$, esto entra en contradicción con el hecho de que $x \in B^c$. Dado que las funciones f_{l_j} son $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas, tenemos que $f(x + 2\pi k) = f(x)$ para todo $x \in B^c$ y todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

Como $f_{l_1} + \sum_{j=1}^{i-1}(f_{l_{j+1}} - f_{l_j}) = f_{l_i}$, entonces $\lim_{i\to\infty} f_{l_i}(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $f_l \xrightarrow[l\to\infty]{} f$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_l - f_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon$, $\forall l, k \geq N$. Tomando $l \geq N$ y $l_i \geq N$ tenemos,

$$\begin{aligned} \|f_l - f\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &= \int_{\mathbb{T}^n} \|f_l(x) - f(x)\|^p đx = \int_{\mathbb{T}^n} \left\| f_l(x) - \lim_{i\to\infty} f_{l_i}(x) \right\|^p đx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \lim_{i\to\infty} \|f_l(x) - f_{l_i}(x)\|^p đx \leq \liminf_{i\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \|f_l(x) - f_{l_i}(x)\|^p đx \\ &= \liminf_{i\to\infty} \|f_l - f_{l_i}\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Luego, $f_l \xrightarrow[l\to\infty]{L^p(\mathbb{T}^n,E)} f$ y además $f - f_l \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Por tanto, $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ puesto que $f = f_l + (f - f_l)$.
b) Supóngase ahora $p = \infty$. Sea $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_l - f_k\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon$ siempre que $l, k \geq N$, y por tanto $\|f_l(x) - f_k(x)\| \leq \|f_l - f_k\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon$ p.c.t. $x \in [0, 2\pi]^n$, y en consecuencia $\|f_l(x) - f_k(x)\| < \varepsilon$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ ya que las funciones f_l son $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas.
Así p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $(f_l(x))_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach E, entonces $(f_l(x))$ converge a un punto de E, digamos $f(x) := \lim_{l\to\infty} f_l(x)$. Existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida cero tal que se cumple el límite anterior para todo $x \in A^c$. Definimos,

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{l\to\infty} f_l(x), & \text{si } x \in B^c, \\ 0, & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

siendo $B := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} (A + 2\pi k)$. En forma similar al caso anterior se tiene que la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ es $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica. Como $\|f_l(x) - f_k(x)\| < \varepsilon$ para todo $l, k \geq N$ entonces

$$\|f_l(x) - f(x)\| = \lim_{k\to\infty} \|f_l(x) - f_k(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall l \geq N \text{ y c.t.p } x \in [0, 2\pi]^n.$$

Entonces ε es una cota esencial de $f_l - f$, y por tanto $\|f_l - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \leq \varepsilon$ $\forall l \geq N$. Luego, $f_l \xrightarrow[l\to\infty]{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} f$ y también $f - f_l \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. De esto último, podemos concluir que $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. $\square$

Proposición 2.20. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Además $L^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E)$.*

Prueba. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ es $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica y medible,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &= \left(\int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)\|^p đx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{[0,2\pi]^n} \|f\|^p_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\, đx \right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} . \end{aligned}$$

Luego, $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. De aquí que,

$$L^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E).$$

$\square$

Proposición 2.21. *Para $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que $L^p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T}^n, E)$.*

Prueba. Si $p = 1$, la afirmación es obvia. Sea $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} &= \int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)\| \cdot 1 đx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|^p đx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{T}^n} 1 đx \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \end{aligned}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $p = \infty$ y $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, entonces

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} = \int_{[0,2\pi]^n} \|f(x)\| đx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \int_{[0,2\pi]^n} đx = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} .$$

□

Debido a las dos proposiciones anteriores, tenemos para $1 \leq p \leq \infty$, las siguientes inmersiones continuas

$$L^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T}^n, E).$$

2.5. Espacios $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$

Definición 2.22. *Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Denotamos por $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ al espacio de todas las funciones $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódicas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ tales que las funciones $\partial^\alpha f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ existen y son continuas para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. Este espacio es dotado con la norma*

$$\|f\|_{C^m(\mathbb{T}^n,E)} := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq m}} \sup_{x \in [0,2\pi]^n} \|\partial^\alpha f(x)\|$$

El espacio de las funciones de prueba sobre el toro $\mathbb{T}^n$ es el espacio definido por

$$C^\infty(\mathbb{T}^n, E) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} C^m(\mathbb{T}^n, E).$$

Como es usual $C^m(\mathbb{T}^n) := C^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n) := C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. La topología de $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es la topología inducida por la familia contable de seminormas $\{q_k; k \in \mathbb{N}_0\}$ dadas por

$$q_k(\varphi) := \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le k}} \sup_{x\in[0,2\pi]^n} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|, \qquad \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E),$$

con $k \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Por tanto, una sucesión $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ converge a una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ si y sólo si $q_k(\varphi_m - \varphi) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Observación 2.23. Puede verse fácilmente que $C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para $1 \le p \le \infty$.

Proposición 2.24. *Si $1 \le p < \infty$, entonces $C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{T}^n, E)$.*

Prueba. La inmersión continua se tiene de la Observación 2.23. Probemos la densidad. Sean $1 \le p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $f \in L^p(\Omega, E)$ con $\Omega := (0, 2\pi)^n$. Como $\mathcal{D}(\Omega, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\Omega, E)$ existe una sucesión $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(\Omega, E)$ tal que $\|f - \varphi_j\|_{L^p(\Omega,E)} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Dado que los conjuntos compactos $K_j := \operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega$, tenemos que la extensión $2\pi\mathbb{Z}^n$-periódica $Per(\varphi_j)$ de φ_j está en $C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ y por consiguiente $(Per(\varphi_j))_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Además,

$$\|f - Per(\varphi_j)\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} = \|f - \varphi_j\|_{L^p(\Omega,E)} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Esto muestra que $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, cuando $1 \le p < \infty$. $\square$

Corolario 2.25. $L^\infty(\mathbb{T}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{T}^n, E)$ *para* $1 \le p < \infty$.

Prueba. Las inmersiones continuas $C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y la inmersión densa $C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para $1 \le p < \infty$, implican que $L^\infty(\mathbb{T}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para $1 \le p < \infty$. $\square$

Capítulo 3

Espacios de Distribuciones sobre $\mathbb{T}^n$

3.1. El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$

Definición 3.1. *El espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) := \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), E)$ es denominado el espacio de las distribuciones periódicas E-valuadas y está conformado por todas las aplicaciones $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow E$ lineales y continuas. El valor de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ sobre una función de prueba $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es denotado por $\langle u, \varphi\rangle$ ó $u(\varphi)$.*

Dotamos a $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ de la topología débil-$*$, esto es, una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, sí y sólo si

$$\langle u_k, \varphi\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{E} \langle u, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

De hecho la topología de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es inducida por la familia de seminornas $\{q'_\varphi; \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\}$ donde $q'_\varphi(u) := \|\langle u, \varphi\rangle\|, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Puede probarse que con esta topología $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es de Hausdorff.

Observación 3.2. Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Teorema 3.3. *$\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es completo.*

Prueba. Sea $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, entonces

$$(u_l - u_m) \xrightarrow[l,m\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)} 0$$

esto es,

$$\|\langle u_l,\varphi\rangle - \langle u_m,\varphi\rangle\| \xrightarrow[l,m\to\infty]{} 0 \quad \forall\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Por tanto, para cada $\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ la sucesión $(\langle u_l,\varphi\rangle)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio de Banach E. Luego, $(\langle u_l,\varphi\rangle)_{l\in\mathbb{N}}$ converge en E para cualquier $\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Definimos $u : C^\infty(\mathbb{T}^n)\longrightarrow E$ por $\langle u,\varphi\rangle := \lim_{l\to\infty}\langle u_l,\varphi\rangle$ en E. Veamos que $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$. Debido a la linealidad basta con mostrar que u es continua en 0. Razonemos por el absurdo. Supongamos que u no es continua en 0, entonces existe una sucesión $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}\subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\varphi_m \xrightarrow[m\to\infty]{C^\infty(\mathbb{T}^n)} 0$ pero $\langle u,\varphi_m\rangle \not\xrightarrow[k\to\infty]{E} 0$. Esto último equivale a que existe un $C>0$ tal que para cada $N\in\mathbb{N}$ se cumple $\|\langle u,\varphi_m\rangle\|\geq C$ para algún $m\geq N$. Luego:
Para $N=1$, $\exists m_1\in\mathbb{N}$ con $\|\langle u,\varphi_{m_1}\rangle\|\geq C$.
Para $N=m_1$, existe $m_2\in\mathbb{N}$ con $m_2>m_1$ tal que $\|\langle u,\varphi_{m_2}\rangle\|\geq C$.
$\vdots$
Para $N=m_{j-1}$, existe $m_j\in\mathbb{N}$ con $m_j>m_{j-1}$ tal que $\left\|\left\langle u,\varphi_{m_j}\right\rangle\right\|\geq C$.
De esta manera obtenemos una subsucesión $\left(\varphi_{m_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\left\|\left\langle u,\varphi_{m_j}\right\rangle\right\|\geq C$, $\forall j\in\mathbb{N}$. Por comodidad en la notación, esta subsucesión será escrita por $(\varphi'_m)_{m\in\mathbb{N}}$, entonces $\|\langle u,\varphi'_m\rangle\|\geq C$ para todo $m\in\mathbb{N}$ y además $q_k(\varphi'_m)\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ para todo $k\in\mathbb{N}_0$ ya que $\varphi_m\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Luego:
Existe $m_1\in\mathbb{N}$ tal que $q_1(\varphi'_m)<\frac{1}{4}$ para $m\geq m_1$. Así, $q_k(\varphi'_{m_1})<\frac{1}{4}$ para $k=0,1$.
Existe $m_2\in\mathbb{N}$ con $m_2>m_1$ tal que $q_2(\varphi'_m)<\left(\frac{1}{4}\right)^2$ para $m\geq m_2$. Entonces, $q_k(\varphi'_{m_2})<\left(\frac{1}{4}\right)^2$ para $k=0,1,2$.
Existe $m_3\in\mathbb{N}$ con $m_3>m_2$ tal que $q_3(\varphi'_m)<\left(\frac{1}{4}\right)^3$ para $m\geq m_3$. Entonces, $q_k(\varphi'_{m_3})<\left(\frac{1}{4}\right)^3$ para $k=0,1,2,3$.
Continuando con el proceso obtenemos una subsucesión $\left(\varphi'_{m_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$q_k(\varphi'_{m_j})<\left(\frac{1}{4}\right)^j \quad \forall k\in\mathbb{N}_0 \quad \text{con} \quad k\leq j.$$

Definimos $\psi_j := 2^j\varphi'_{m_j}$, $j\in\mathbb{N}$. Sean $\varepsilon>0$ y $k\in\mathbb{N}_0$, escogiendo $j_0\in\mathbb{N}$ con $\left(\frac{1}{2}\right)^{j_0}<\varepsilon$, tenemos que para $j\geq\max\{k,j_0\}$ se cumple

$$q_k(\psi_j) = 2^j q_k\left(\varphi'_{m_j}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^j\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{j_0}<\varepsilon.$$

Entonces, $q_k(\psi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Luego,

$$\psi_j \xrightarrow[j\to\infty]{C^\infty(\mathbb{T}^n)} 0. \tag{3.1}$$

Por otra parte,

$$\|\langle u, \psi_j\rangle\| = 2^j \left\|\langle u, \varphi'_{m_j}\rangle\right\| \geq 2^j C \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty, \tag{3.2}$$

por tanto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$ entonces $\|\langle u, \psi_j\rangle\| > 1$. Por tal razón existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\langle u, \psi_{j_1}\rangle\| > 1$. Como $\lim\limits_{l\to\infty} \|\langle u_l, \psi_{j_1}\rangle\| = \|\langle u, \psi_{j_1}\rangle\|$, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\langle u_{l_1}, \psi_{j_1}\rangle\| > 1$.
Debido a la continuidad de u_{l_1} y (3.1), tenemos que $\langle u_{l_1}, \psi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{E} 0$. Dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces $\|\langle u_{l_1}, \psi_j\rangle\| < \frac{1}{2}$. Así, existe $\tilde{j}_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\left\langle u_{l_1}, \psi_{\tilde{j}_2}\right\rangle\right\| < \frac{1}{2}$.
Por (3.2) existe $j'_2 \in \mathbb{N}$ con $j'_2 > j_1$ tal que $\left\|\left\langle u, \psi_{j'_2}\right\rangle\right\| > 2 + \|\langle u, \psi_{j_1}\rangle\|$. Sea $j_2 > \max\{\tilde{j}_2, j'_2\}$, entonces

$$\|\langle u_{l_1}, \psi_{j_2}\rangle\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|\langle u, \psi_{j_2}\rangle\| > 2 + \|\langle u, \psi_{j_1}\rangle\|.$$

En vista de que $\lim\limits_{l\to\infty} \|\langle u_l, \varphi\rangle\| = \|\langle u, \varphi\rangle\|$ para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, obtenemos $\lim_{l\to\infty} (\|\langle u_l, \psi_{j_2}\rangle\| - \|\langle u_l, \psi_{j_1}\rangle\|) > 2$. Entonces, existe $l_2 \in \mathbb{N}$ con $l_2 > l_1$ que satisface

$$\|\langle u_{l_2}, \psi_{j_2}\rangle\| > 2 + \|\langle u_{l_2}, \psi_{j_1}\rangle\|.$$

Como $\langle u_{l_1}, \psi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{E} 0$ y $\langle u_{l_2}, \psi_j\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{E} 0$, existen $\tilde{j}_3, \tilde{j}'_3 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\|\left\langle u_{l_1}, \psi_{\tilde{j}_3}\right\rangle\right\| < \frac{1}{2^2} \quad \text{y} \quad \left\|\left\langle u_{l_2}, \psi_{\tilde{j}'_3}\right\rangle\right\| < \frac{1}{2}.$$

Por (3.2), existe $j'_3 \in \mathbb{N}$ con $j'_3 > j_2$ tal que $\left\|\left\langle u, \psi_{j'_3}\right\rangle\right\| > 3 + \sum_{i=1}^{2} \|\langle u, \psi_{j_i}\rangle\|$. Sea $j_3 > \max\{\tilde{j}_3, \tilde{j}'_3, j'_3\}$, entonces

$$\|\langle u_{l_1}, \psi_{j_3}\rangle\| < \frac{1}{2^2}$$
$$\|\langle u_{l_2}, \psi_{j_3}\rangle\| < \frac{1}{2}$$

y además,

$$\|\langle u, \psi_{j_3}\rangle\| > 3 + \sum_{i=1}^{2} \|\langle u, \psi_{j_i}\rangle\|.$$

En consecuencia, existe $l_3 \in \mathbb{N}$ con $l_3 > l_2$ tal que

$$\|\langle u_{l_3}, \psi_{j_3}\rangle\| > 3 + \sum_{i=1}^{2} \|\langle u_{l_3}, \psi_{j_i}\rangle\|.$$

Continuando de esta manera obtenemos subsucesiones $(u_{l_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_{j_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\|\langle u_{l_i}, \psi_{j_k}\rangle\| < \frac{1}{2^{k-i}}, 1 \le i < k$$

y,

$$\|\langle u_{l_k}, \psi_{j_k}\rangle\| > k + \sum_{i=1}^{k-1} \|\langle u_{l_k}, \psi_{j_i}\rangle\|.$$

Haciendo $\psi'_k := \psi_{j_k}$ y $u'_k := u_{l_k}$, tenemos

$$\|\langle u'_i, \psi'_k\rangle\| < \frac{1}{2^{k-i}}, 1 \le i < k \tag{3.3}$$

y,

$$\|\langle u'_k, \psi'_k\rangle\| > k + \sum_{i=1}^{k-1} \|\langle u'_k, \psi'_i\rangle\|. \tag{3.4}$$

Sea $\psi := \sum_{i=1}^{\infty} \psi'_i$. Por ser $(\psi'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tenemos que $q_k(\psi'_i) < \left(\frac{1}{2}\right)^i$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ con $i \ge k$. La serie converge en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} q_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi'_i\right) &\le \sum_{i=1}^{\infty} q_k(\psi'_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} q_k(\psi'_i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} q_k(\psi'_i) \\ &< \sum_{i=1}^{k} q_k(\psi'_i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i < \infty. \end{aligned}$$

Así, $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. La linealidad y continuidad de u'_k para $k \in \mathbb{N}$, (3.3) y (3.4) nos permiten obtener,

$$\begin{aligned}
\|\langle u'_k, \psi\rangle\| &= \left\| \left\langle u'_k, \sum_{i=1}^{\infty} \psi'_i \right\rangle \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{k-1} \langle u'_k, \psi'_i\rangle + \langle u'_k, \psi'_k\rangle + \sum_{i=k+1}^{\infty} \langle u'_k, \psi'_i\rangle \right\| \\
&\geq \|\langle u'_k, \psi'_k\rangle\| - \left\| \sum_{i=1}^{k-1} \langle u'_k, \psi'_i\rangle \right\| - \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \langle u'_k, \psi'_i\rangle \right\| \\
&> k + \sum_{i=1}^{k-1} \|\langle u'_k, \psi'_i\rangle\| - \sum_{i=1}^{k-1} \|\langle u'_k, \psi'_i\rangle\| - \sum_{i=k+1}^{\infty} \|\langle u'_k, \psi'_i\rangle\| \\
&> k - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-k}} \\
&= k - 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\langle u'_k, \psi\rangle\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. Esto entra en contradicción con el hecho de que $\|\langle u'_k, \psi\rangle\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \|\langle u, \psi\rangle\|$. Nuestro supuesto es falso. Luego, $u_l \xrightarrow[l\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)} u$ con $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. □

3.2. Espacio de Sobolev periódico o toroidal

Definimos la *derivada distribucional* $\partial^\alpha u$ para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ por

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle := \left\langle u, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \right\rangle$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Con esta definición $\partial^\alpha u$ pertenece a $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Definición 3.4. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}_0$, definimos el **espacio de Sobolev periódico** mediante*

$$W_p^m(\mathbb{T}^n, E) := \{u \in L^p(\mathbb{T}^n, E) : \partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{T}^n, E) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ con } |\alpha| \leq m\}$$

con norma

$$\|u\|_{W_p^m(\mathbb{T}^n,E)} := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\,.$$

Observación 3.5. Si $u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, entonces u es una distribución. Luego, $\partial^\alpha u$ en la definición de $W_p^m(\mathbb{T}^n, E)$ es tomada en sentido distribucional.

Proposición 3.6. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} W_p^m(\mathbb{T}^n, E)$, si $1 \leq p < \infty$.*

Prueba. Parecida a la prueba $C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{T}^n, E)$, $1 \leq p < \infty$. □

3.3. Distribuciones temperadas sobre $\mathbb{Z}^n$

Definición 3.7 (Espacio $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$)**.** *El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ consiste de todas las funciones $\varphi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ que cumplen la condición: Para cada $M \in \mathbb{R}$ existe una constante $C_{\varphi,M} \geq 0$ tal que*

$$\|\varphi(\xi)\| \leq C_{\varphi,M} \langle \xi \rangle^{-M}, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ son llamados *funciones rápidamente decrecientes E-valuadas sobre* $\mathbb{Z}^n$. La topología de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ viene dada por la familia contable de seminormas $\{p_k; k \in \mathbb{N}_0\}$ definidas por

$$p_k(\varphi) := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^k \|\varphi(\xi)\|, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E).$$

Por consiguiente, una sucesión $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ converge a una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ sí y sólo si $p_k(\varphi_m - \varphi) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Como es usual $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$ es denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Definición 3.8 (Distribuciones temperadas)**.** *Entenderemos por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ el espacio de todas las aplicaciones $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow E$ lineales y continuas, tales aplicaciones se denominan distribuciones temperadas E-valuadas sobre $\mathbb{Z}^n$. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ es equipado con la topología débil-$*$, esto es, una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ converge a $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ si y sólo si*

$$\langle u_k, \varphi \rangle \xrightarrow[k \to \infty]{E} \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

De hecho la topología de $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ es la inducida por la familia de seminormas $\{p'_\varphi; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)\}$ donde $p'_\varphi(u) := \|\langle u, \varphi \rangle\|$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$.

Observación 3.9. Una función $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow E$ es continua sí, y sólo si es secuencialmente continua, esto es, $\langle u, \varphi_m \rangle \xrightarrow[m \to \infty]{} \langle u, \varphi \rangle$ para cualquier sucesión $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ con $\varphi_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Definición 3.10. *Una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tiene crecimiento polinomial en infinito si para todo $N \in \mathbb{N}_0$, existe $m \in \mathbb{N}$ y una constante C_N tal que*

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C_N \langle x \rangle^m$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq N$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.11. *Sean $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ y $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función con crecimiento polinomial en infinito, entonces la aplicación $\psi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ donde $\psi u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow E$ está definida por $\langle \psi u, \varphi \rangle := \langle u, \psi\varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.*

Prueba. La aplicación $\psi u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow E$ está bien definida puesto que la función $\psi\varphi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ dada por $(\psi\varphi)(\xi) := \psi(\xi)\varphi(\xi)$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. En efecto: sea $M \in \mathbb{R}$, dado que ψ tiene crecimiento polinomial en infinito existe $m \in \mathbb{N}$ y una constante $C_M > 0$ tal que

$$|\psi(x)| \leq C_M \langle x \rangle^m$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para $\delta := m + M$ existe una constante $C_{\varphi,\delta} \geq 0$ tal que $|\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi,\delta} \langle \xi \rangle^{-\delta}, \forall \xi \in \mathbb{Z}^n$. Luego,

$$\begin{aligned} |(\psi\varphi)(\xi)| &= |\psi(\xi)||\varphi(\xi)| \\ &\leq C_M \langle \xi \rangle^m C_{\varphi,\delta} \langle \xi \rangle^{-\delta} \\ &= C' \langle \xi \rangle^{-M} \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Es clara la linealidad de ψu. Probemos la continuidad. Sea $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \phi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, entonces $p_l(\phi_j - \phi) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ para todo $l \in \mathbb{N}_0$. Sea $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^k |(\psi\phi_j - \psi\phi)(\xi)| &= \langle \xi \rangle^k |\psi(\xi)||(\phi_j - \phi)(\xi)| \\ &\leq C \langle \xi \rangle^{k+m} |(\phi_j - \phi)(\xi)| \\ &\leq C p_{k+m}(\phi_j - \phi) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Entonces

$$p_k(\psi\phi_j - \psi\phi) \leq C p_{k+m}(\phi_j - \phi) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Esto muestra que $\psi\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \psi\phi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. La continuidad de u implica,

$$\langle \psi u, \phi_j \rangle = \langle u, \psi\phi_j \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} \langle u, \psi\phi \rangle = \langle \psi u, \phi \rangle.$$

Por tanto, $\psi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$. □

Observación 3.12. Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$, entonces la aplicación $\psi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ donde $\psi u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow E$ está dada por $\langle \psi u, \varphi \rangle := \langle u, \psi\varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. La prueba de esta afirmación es bastante similar a la presentada en la Proposición 3.11.

3.4. Transformada de Fourier toroidal

Las definiciones y proposiciones dadas acontinuación son tomadas de [3], en donde pueden verse pruebas, observaciones y comentarios que ayudan en una mejor comprensión de la temática.

Definición 3.13. *Para $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ definimos*

$$\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f\right)(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) đx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Llamamos a $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f$ transformada de Fourier periódica o toroidal de f.

Proposición 3.14. *Para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ se cumple que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. Además $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ es lineal y continua.*

Definición 3.15. *Para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ definimos*

$$\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g\right)(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi) e^{ix\cdot\xi}, \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Llamamos a $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g$ transformada de Fourier periódica inversa de g.

Observación 3.16. Puede mostrarse que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$, la linealidad y continuidad de $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, y las igualdades $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n,E)}$ y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} = Id_{C^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$.

Definición 3.17. *Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. La transformada de Fourier periódica de u es definida por*

$$\langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u, \varphi \rangle := \left\langle u, \left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi\right)(-\cdot) \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

Proposición 3.18. *Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$. Además $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ es lineal y continua.*

Definición 3.19. *Para $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ definimos la transformada de Fourier periódica inversa $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} v$ por*

$$\left\langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} v, \psi \right\rangle := \langle v, (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \psi)(-\cdot) \rangle, \quad \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Proposición 3.20. *Para $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ se cumple que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es lineal y continua.*

Observación 3.21. De la Observación 3.16 se obtiene por cálculo directo que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} = Id_{\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)}$ y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} = Id_{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)}$.

3.5. Convolución

Definición 3.22. *Sean $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ con $1 \leq p \leq \infty$, definimos la convolución de ψ y f mediante*

$$(\psi * f)(x) := \int_{\mathbb{T}^n} \psi(x-y) f(y) đy = \int_{\mathbb{T}^n} \psi(y) f(x-y) đy$$

con $x \in \mathbb{T}^n$.

Teorema 3.23. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces $\psi * f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y además*

$$\|\psi * f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)}. \tag{3.5}$$

Prueba. Los detalles de la demostración son análogos a los que se encuentran en una proposición de [3]. □

Definición 3.24. *Sean $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. La convolución de φ con u, simbolizada $\varphi * u$, es definida por*

$$(\varphi * u)(x) := \langle u, \varphi(x - \cdot) \rangle \quad para \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Lema 3.25. *Para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ y $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ vale que*

$$\left\langle u, \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\cdot, y) đy \right\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle \, đy.$$

<u>Prueba</u>. Similar al Lema de la Sección 3.2 en [8], página 14. □

De forma análoga al caso continuo puede mostrarse que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces $\varphi * u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y así $\varphi * u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Teorema 3.26. *Sean $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces*

$$\langle \varphi * u, \psi \rangle = \langle u, \varphi(-\cdot) * \psi \rangle \tag{3.6}$$

para todo $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

<u>Prueba</u>. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, dado que $\varphi(-\cdot) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ entonces tenemos que $\varphi(-\cdot) * \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Así el lado derecho de la igualdad (3.6) tiene sentido. Definimos $\phi(x, z) := \varphi(z-x)\psi(z)$ con $x, z \in \mathbb{T}^n$. Entonces, $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$. Para $x \in \mathbb{T}^n$ tenemos,

$$\begin{aligned}
(\varphi(-\cdot) * \psi)(x) &= \int_{\mathbb{T}^n} [\varphi(-\cdot)](x-y)\psi(y)đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(y-x)\psi(y)đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \phi(x, y)đy \\
&= \left[\int_{\mathbb{T}^n} \phi(\cdot, y)đy\right](x).
\end{aligned}$$

Aplicando el lema de arriba obtenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi * u, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{T}^n} (\varphi * u)(y)\psi(y)đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \langle u, \varphi(y-\cdot)\rangle\psi(y)đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \langle u, \phi(\cdot, y)\rangle đy \\
&= \left\langle u, \int_{\mathbb{T}^n} \phi(\cdot, y)đy \right\rangle \\
&= \langle u, \varphi(-\cdot) * \psi \rangle .
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.27. *Sean* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ *y* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, *entonces*

$$\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\varphi \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u\right) = \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi * u. \tag{3.7}$$

<u>*Prueba*</u>. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\varphi \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u\right), \psi \right\rangle &= \left\langle \varphi \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u, \left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right\rangle \\
&= \left\langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u, \varphi\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right\rangle \\
&= \left\langle u, \left[\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\varphi\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right)\right](-\cdot)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{T}^n$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\left[\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\varphi\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right)\right](x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\left[\varphi\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right](\xi) e^{ix\cdot\xi} \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\xi) e^{ix\cdot\xi} \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)\right)(\xi)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\xi) e^{ix\cdot\xi} \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\left[\int_{\mathbb{T}^n} e^{-iy\cdot\xi}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)(y) đy\right](\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi)(-\xi) e^{ix\cdot\xi} \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)(y)\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi)(-\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi}\right] đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)(y)\left[\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi)(-\cdot)\right)\right](x-y) đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)(y)\left[\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi)\right)(-\cdot)\right](x-y) đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)(y)\left[\psi(-\cdot)\right](x-y) đy \\
&= \left[\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi * \psi(-\cdot)\right](x).
\end{aligned}$$

Considerando la igualdad (3.6) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(D)_{\mathbb{T}^n} u, \psi\rangle &= \left\langle u, \left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi * \psi(-\cdot)\right)(-\cdot)\right\rangle \\
&= \left\langle u, \left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right)(-\cdot) * \psi\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi\right) * u, \psi\right\rangle.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Espacios de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$

Definición 4.1. *Una sucesión* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ *en* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *es llamada una resolución de la unidad, denotada* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$*, si satisface:*

a) $\operatorname{supp}(\phi_0) \subset \Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\}$ *y*
$\operatorname{supp}(\phi_j) \subset \Omega_j := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi) = 1$ *para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *y*

c) para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *existe una constante* $c_\alpha > 0$ *tal que*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \phi_j(\xi)\right| \leq c_\alpha 2^{-j|\alpha|} 1_{\Omega_j}(\xi) \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y } j \in \mathbb{N}_0,$$

donde 1_Ω *es la función característica sobre* Ω.

En adelante consideraremos una resolución de la unidad $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ construida del modo siguiente: Para una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\} \text{ y } \varphi(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1,$$

definimos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(x) &:= \varphi(x) - \varphi(2x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \\
\varphi_j(x) &:= \widetilde{\varphi}(2^{-j}x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}, \\
\varphi_0 &:= \varphi, \\
\varphi_{-1} &:\equiv 0.
\end{aligned}$$

Además, definimos

$$\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u := \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\varphi_j \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u)$$

para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Observación 4.2. Sea $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. Para todo $j \in \mathbb{N}_0$ se cumple la igualdad

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x) \sum_{r=-1}^{1} \varphi_{j+r}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Esto se debe a los soportes de los φ_j y a que $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi) = 1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Definición 4.3. *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ y $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. Definimos el* ***espacio de Besov toroidal*** *n-dimensional por*

$$B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n, E) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) : \left(2^{js} \left\| \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \right)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell^q(\mathbb{N}_0) \right\}$$

dotado con la norma

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}^{\varphi} := \left\| \left(2^{js} \left\| \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^q(\mathbb{N}_0)}.$$

Observación 4.4. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, entonces las normas generadas por las resoluciones son equivalentes. Esto es, existe un par de constantes α y β tales que $\alpha \|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}^{\psi} \leq \|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}^{\varphi} \leq \beta \|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}^{\psi}$ para todo $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n, E)$. Por tal razón, no hacemos distinción entre estas normas y simplificamos la notación $\|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}^{\varphi}$ por $\|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}$. La prueba de esta afirmación es similar al caso $n = 1$ presente en [2].

Teorema 4.5. *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$B_{p,q_0}^s(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q_1}^s(\mathbb{T}^n, E), \ \ 1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty. \tag{4.1}$$

$$B_{p,q_0}^{s+\varepsilon}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B_{p,q_1}^s(\mathbb{T}^n, E), \ \ \varepsilon > 0, \ \ 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty. \tag{4.2}$$

<u>Prueba</u>. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y $u \in B_{p,q_0}^s(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y además

$$\left(2^{js} \left\| \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \right)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell^{q_0}(\mathbb{N}_0).$$

Como $\ell^{q_0}(\mathbb{N}_0) \subseteq \ell^{q_1}(\mathbb{N}_0)$ con $\|\cdot\|_{\ell^{q_1}} \leq \|\cdot\|_{\ell^{q_0}}$, puesto que $q_0 \leq q_1$, se sigue

$$\left(2^{js} \left\| \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \right)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \ell^{q_1}(\mathbb{N}_0).$$

En consecuencia, $u \in B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n, E)$. Además,

$$\begin{aligned} \|u\|_{B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n,E)} &= \left\| \left(2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^{q_1}(\mathbb{N}_0)} \\ &\leq \left\| \left(2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \right\|_{\ell^{q_0}(\mathbb{N}_0)} \\ &= \|u\|_{B^s_{p,q_0}(\mathbb{T}^n,E)} . \end{aligned}$$

Esto muestra la primera inmersión.
Ahora, sean $\varepsilon > 0$, $1 \leq q_0 \leq \infty$ y $u \in B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{T}^n, E)$. Si $1 \leq q_1 < \infty$,

$$\begin{aligned} \|u\|^{q_1}_{B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n,E)} &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq_1} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|^{q_1}_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s+\varepsilon)q_1} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|^{q_1}_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \cdot 2^{-j\varepsilon q_1} \\ &\leq \left(\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\right)^{q_1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon q_1} \\ &\leq C \|u\|^{q_1}_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} \end{aligned}$$

donde $C := \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^j$. En consecuencia, $B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n, E)$. Por otra parte, la inmersión (4.1) permite afirmar que $B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E)$. Luego,

$$B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^s_{p,q_1}(\mathbb{T}^n, E).$$

Supongamos ahora $q_1 = \infty$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \cdot 2^{-j\varepsilon}\right) \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{j(s+\varepsilon)} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^j \\ &\leq \|u\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} . \end{aligned}$$

Utilizando el mismo argumento anterior concluimos,

$$B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E).$$

$\square$

Teorema 4.6. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ para $s \in \mathbb{R}$ y $1 \le p, q \le \infty$.*

<u>*Prueba*</u>. Sean $s \in \mathbb{R}$, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y $s_1 > s$. Considerando $m \in \mathbb{N}$ con $m > |s_1| + n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} 2^{js_1} \langle\xi\rangle^{-2m} |\varphi_j(\xi)| &= \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ 2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}}} 2^{js_1} \langle\xi\rangle^{-2m} |\varphi_j(\xi)| \\
&\le \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ 2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}}} 2^{js_1} 2^{-(j-1)(|s_1|+n)} C_0 \\
&\le 2^{-jn} 2^{|s_1|+n} C_0 \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ |\xi|\le 2^{j+1}}} 1 \\
&\le 2^{-jn} 2^{|s_1|+n} C_0 \cdot 2^{n(j+3)} \\
&= C(n, s_1)
\end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, donde $C(n, s_1) := 2^{|s_1|+4n} C_0$. Resultado similar se obtiene para $j = 0$. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$,

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{B^{s_1}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} &= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}\psi\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}\psi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1} \sup_{x\in[0,2\pi]^n} \left\| \left[\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} (\varphi_j \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi)\right](x) \right\| \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1} \sup_{x\in[0,2\pi]^n} \left\| \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \varphi_j(\xi) \left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(\xi) e^{ix\cdot\xi} \right\| \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{2m} \|\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(\xi)\| \langle\xi\rangle^{-2m} |\varphi_j(\xi)| \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js_1} \sup_{\varsigma\in\mathbb{Z}^n} \langle\varsigma\rangle^{2m} \|\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(\varsigma)\| \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2m} |\varphi_j(\xi)| \\
&= p_{2m}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right) \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} 2^{js_1} \langle\xi\rangle^{-2m} |\varphi_j(\xi)| \\
&\le C(n, s_1) p_{2m}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right) \\
&\le C^* q_{4m}(\psi),
\end{aligned}$$

ya que $p_k(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f) \leq \text{const } q_{2k}(f)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y todo $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, la desigualdad antes mencionada está demostrada detalladamente en [3]. De lo anterior, esto es $\|\psi\|_{B^{s_1}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} \leq C^* q_{4m}(\psi)$ $\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ se sigue que la inmersión $j : C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow B^{s_1}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E)$ de la Observación 3.2 es continua. Luego, $C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^{s_1}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E)$. Ahora bien, dado que $s_1 > s$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $s+\varepsilon = s_1$. En virtud de (4.2) tenemos que $B^{s_1}_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^{s}_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$.
$\square$

Lema 4.7. *Sean* $1 \leq p \leq \infty$, $b > 1$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_b(0)$ *y* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$*. Si* $\varphi(D)_{\mathbb{T}^n} u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$*, entonces existe una constante* $C > 0$ *independiente de* b *y* φ *tal que*

$$\|\varphi(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \leq C b^{\frac{n}{p}} \|\varphi(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} . \tag{4.3}$$

<u>*Prueba*</u>. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ con $\operatorname{supp}(\psi) \subset B_{2b}(0)$ y $\psi\big|_{B_b(0)} = 1$. Como por hipótesis $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_b(0)$ tenemos que $\varphi(\xi) = \varphi(\xi)\psi(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{Z}^n$. Teniendo en cuenta (3.7) y haciendo $g := \varphi(D)_{\mathbb{T}^n} u$ obtenemos,

$$\begin{aligned} g &= \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} (\varphi \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u) \\ &= \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} (\varphi \psi \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u) \\ &= \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} (\psi \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} g) \\ &= \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \psi * g. \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{T}^n$, la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \left\| \left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \psi\right)(x-y) g(y) \right\| \text{đ}y \\ &= \left\| \left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \psi\right)(x-\cdot) g(\cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leq \left\| \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \psi(x-\cdot) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{T}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leq C b^{\frac{n}{p}} \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \end{aligned}$$

donde $C := \left\| \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \psi \right\|_{L^{p'}(\mathbb{T}^n)}$. Entonces,

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \leq C b^{\frac{n}{p}} \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} .$$

$\square$

Teorema 4.8. $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Prueba. Demostremos que $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ para todo $s\in\mathbb{R}$ y $p\in[1,\infty]$. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\in\Phi(\mathbb{R}^n)$, $u\in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)$ y $\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u,\psi\rangle &= \left\langle \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right),\psi\right\rangle\\
&= \left\langle \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\varphi_j\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right),\psi\right\rangle\\
&= \left\langle \varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u,\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right\rangle\\
&= \left\langle \varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u,\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left[\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right)\right]\right\rangle\\
&= \left\langle \varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u,\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left[\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right)\right]\right)(-\cdot)\right\rangle\\
&= \left\langle \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u,\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right\rangle.
\end{aligned}$$

Obsérvese que $\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y por definición $\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\in L^p(\mathbb{T}^n,E)$ para cada $j\in\mathbb{N}_0$. Recordemos que la aplicación $C^\infty(\mathbb{T}^n)\ni\psi\longmapsto\langle v,\psi\rangle:=\int_{\mathbb{T}^n}v(x)\psi(x)đx\in E$ es una distribución para todo $v\in L^p(\mathbb{T}^n,E)$. La desigualdad (4.3) con $b=2^{j+1}$ permite obtener

$$\begin{aligned}
&\|\langle\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u,\psi\rangle\|\\
&\le \int_{\mathbb{T}^n}\|(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u)(x)\|\left|\left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right)(x)\right|đx\\
&\le \sup_{x\in\mathbb{T}^n}\|(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u)(x)\|\int_{\mathbb{T}^n}\left|\left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right)(x)\right|đx\\
&= \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right)\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}\\
&\le C2^{j\frac{n}{p}}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}\\
&= C2^{js}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad $\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u = u$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ (véase [3]), la conclusión anterior, el hecho de que $(\varphi_j(-\cdot))_{j\in\mathbb{N}_0}\in\Phi(\mathbb{R}^n)$ y la inmersión $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)\hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\|\langle u,\psi\rangle\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}\|\langle\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u,\psi\rangle\| \\
&\leq C\sum_{j=0}^{\infty}2^{js}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq C\sup_{i\in\mathbb{N}_0}2^{is}\|\varphi_i(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\sum_{r=-1}^{1}\sum_{j=0}^{\infty}2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\varphi_{j+r}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq \left(1+2^{\frac{n}{p}-s}+2^{s-\frac{n}{p}}\right)C\|u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)}\sum_{j=0}^{\infty}2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left[\varphi_{j}(-\cdot)\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)\right]\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \\
&= C'\|u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)}\|\psi\|^{\varphi(-\cdot)}_{B^{\frac{n}{p}-s}_{1,1}(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq C''\|u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)}\|\psi\|_{B^{\frac{n}{p}-s}_{1,1}(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq C^*\|u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)}q_k(\psi)\quad\text{para algún}\quad k\in\mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que la función identidad $i_d : B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)\longrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ es continua. Luego, $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$. Ahora, debido a (4.1) obtenemos que $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)\hookrightarrow B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)$. □

Teorema 4.9. *$B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)$ es un espacio de Banach.*

Prueba. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ una resolución de la unidad y $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)$, entonces

$$(u_l-u_m)\xrightarrow[l,m\to\infty]{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}0.$$

La inmersión $B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ implica

$$(u_l-u_m)\xrightarrow[l,m\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)}0.$$

Por consiguiente, la sucesión $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ y por ser éste último completo, existe $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ tal que

$$u_l \xrightarrow[l\to\infty]{} u \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E).$$

Se sigue de la continuidad de las aplicaciones $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}:\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n,E)$ y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}:\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n,E)\longrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$ que

$$\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u_l) \xrightarrow[l\to\infty]{} \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u) \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)$$

para todo $j\in\mathbb{N}_0$, esto es

$$\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l \xrightarrow[l\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u$$

para todo $j\in\mathbb{N}_0$. Por otro lado, para $j\in\mathbb{N}_0$ cualquiera pero fijo y $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para $l,k\in\mathbb{N}$ con $l,k\geq N$ se cumple

$$\|u_l-u_k\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}<2^{js}\varepsilon.$$

Si $1\leq q<\infty$, tenemos

$$\begin{aligned}\|u_l-u_k\|^q_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} &= \sum_{i=0}^{\infty}2^{isq}\left\|\varphi_i(D)_{\mathbb{T}^n}(u_l-u_k)\right\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}2^{isq}\left\|\varphi_i(D)_{\mathbb{T}^n}u_l-\varphi_i(D)_{\mathbb{T}^n}u_k\right\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\ &\geq 2^{jsq}\left\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l-\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_k\right\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\end{aligned}$$

para $l,k\geq N$. Entonces

$$\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l-\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}<\varepsilon$$

para $l,k\geq N$ y todo $j\in\mathbb{N}_0$. Por tanto, para cada $j\in\mathbb{N}_0$ la sucesión $(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\mathbb{T}^n,E)$.
Si $q=\infty$ entonces,

$$\begin{aligned}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l-\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &\leq \frac{1}{2^{js}}\sup_{i\in\mathbb{N}_0}2^{is}\left\|\varphi_i(D)_{\mathbb{T}^n}(u_l-u_k)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\ &= \frac{1}{2^{js}}\left\|u_l-u_k\right\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)}<\varepsilon\end{aligned}$$

para $l, k \geq N$. Permitiéndonos afirmar también que para $q = \infty$, la sucesión $(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$.
Por tanto, en cualquier caso $1 \leq q \leq \infty$, tenemos que $(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Luego, para cada $j \in \mathbb{N}_0$ existe $v_j \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ tal que $\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - v_j\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$.
Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$\begin{aligned}
\|\langle \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l, \psi\rangle - \langle v_j, \psi\rangle\| &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} \left(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - v_j\right)(x)\psi(x) đx \right\| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^n} \|\left(\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - v_j\right)(x)\| \, |\psi(x)| đx \\
&\leq \sup_{x\in[0,2\pi]^n} |\psi(x)| \, \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - v_j\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq \sup_{x\in[0,2\pi]^n} |\psi(x)| \, \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - v_j\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Así, $\langle \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l, \psi\rangle \xrightarrow[l\to\infty]{E} \langle v_j, \psi\rangle$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y todo $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. En consecuencia,

$$\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l \xrightarrow[l\to\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n,E)} v_j$$

para cada $j \in \mathbb{N}_0$. En vista de que $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio de Hausdorff, $\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u = v_j \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y por consiguiente

$$\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos $1 \leq q < \infty$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $l, k \geq N$ implica

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}(u_l - u_k)\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon^q.$$

Para cada $r \in \mathbb{N}$ y todo $l, k \geq N$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{r} 2^{jsq} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_k\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon^q.$$

Cuando hacemos $k \to \infty$, para todo $r \in \mathbb{N}$ y $l \geq N$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{r} 2^{jsq} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u_l - \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon^q.$$

Siguiéndose

$$\|u_l - u\|^q_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}(u_l - u)\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq \varepsilon^q$$

para todo $l \geq N$. Con esto tenemos que $u_l \xrightarrow[l\to\infty]{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} u$. Probemos que $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$, dado $\varepsilon = 1$ existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $l \geq l_0$ entonces $\|u_l - u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} < 1$. Fijando $k \geq l_0$, obtenemos $\|u_k - u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} < 1$ y como $u_k \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} &\leq \|u - u_k\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} + \|u_k\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} \\ &< 1 + \|u_k\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} < \infty.\end{aligned}$$

Ahora, si $q = \infty$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $l, k \geq N$ implica

$$\sup_{i\in\mathbb{N}_0} 2^{is} \|\varphi_i(D)_{\mathbb{T}^n}(u_l - u_k)\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y todo $l, k \geq N$ tenemos

$$2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l - \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon.$$

Haciendo $k \to \infty$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y $l \geq N$ tenemos

$$2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l - \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\|u_l - u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u_l - \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \varepsilon$$

para $l \geq N$. Luego, $u_l \xrightarrow[l\to\infty]{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} u$ y además $u \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E)$. □

Teorema 4.10. *Sean $s > 0$ y $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E). \tag{4.4}$$

Prueba. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ con $s > 0$. Por definición, $\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$, entonces $\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$

para todo $N \in \mathbb{N}_0$. Para $1 < q < \infty$ definimos $q' := \frac{q}{q-1}$, aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &\leq \sum_{j=0}^{N} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= \sum_{j=0}^{N} 2^{js-js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{N} 2^{jsq} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|^q_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \right)^{1/q} \left(\sum_{j=0}^{N} 2^{-jsq'} \right)^{1/q'} \\
&\leq C \|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}
\end{aligned}$$

para cada $N \in \mathbb{N}_0$, donde $C^{q'} := \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^s}\right)^j$. Con esto tenemos que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u$ converge en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, digamos a una función $v \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Esto es,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u = v \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{T}^n, E).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\left\| \left\langle \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u, \psi \right\rangle - \langle v, \psi \rangle \right\| &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u - v \right)(x) \psi(x) \,đx \right\| \\
&\leq \sup_{x \in [0,2\pi]^n} |\psi(x)| \left\| \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u - v \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\xrightarrow[N \to \infty]{} 0
\end{aligned}$$

para todo $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Luego, $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u = v$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Dado que $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u = u$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, tenemos que $u = v$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces, u es una distribución regular con función de densidad v. Debido a la identificación estándar para distribuciones regulares podemos escribir, $u = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Así,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq C \|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} .$$

Si $q = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= \|u\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{T}^n,E)} .
\end{aligned}$$

Supongamos $q = \infty$,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} 2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} \\
&= C_1 \|u\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} ,
\end{aligned}$$

donde $C_1 := \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^s}\right)^j$. □

Teorema 4.11. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$B^0_{p,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^0_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E), \tag{4.5}$$

y

$$B^0_{\infty,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n, E). \tag{4.6}$$

Prueba. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y $u \in B^0_{p,1}(\mathbb{T}^n, E)$. Similarmente que en el Teorema 4.10 puede mostrarse que $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u = u$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $p \in [1, \infty]$. Sea $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= \|u\|_{B^0_{p,1}(\mathbb{T}^n,E)} .
\end{aligned}$$

Esto muestra el lado izquierdo de la inmersión (4.5). Si $p = \infty$, entonces

$$\|u\|_{C(\mathbb{T}^n,E)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} = \|u\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{T}^n,E)} .$$

Esto muestra el lado izquierdo de la inmersión (4.6). Sea $u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Nótese que por simplicidad en la notación estamos usando $\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u$ en lugar de $\varphi_j\big|_{\mathbb{Z}^n}(D)_{\mathbb{T}^n} u$. Es decir, en la notación indicada se está considerando las restricciones de φ_j a $\mathbb{Z}^n$ y obsérvese que dichas restricciones pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Entonces, $\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u = \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \varphi_j * u$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, debido a la Proposición 3.27. El Teorema 3.23 implica,

$$\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq \left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \varphi_j\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} = C_\varphi \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$, donde $C_\varphi := \text{máx}\left\{\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \varphi\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}, \left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \widetilde{\varphi}\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}\right\}$. Por tanto,

$$\|u\|_{B^0_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq C_\varphi \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} .$$

Con esto tenemos la inmersión del lado derecho de (4.5). Sea $u \in C(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Razonando de manera análoga, obtenemos

$$\|u\|_{B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n} u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} \leq C_\varphi \|u\|_{C(\mathbb{T}^n,E)} .$$

Esto prueba el lado derecho de (4.6). □

Teorema 4.12 (Periodización). *La periodización $\mathcal{P}f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está definida por*

$$\mathcal{P}f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x + k). \tag{4.7}$$

Entonces $\mathcal{P} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es sobreyectiva y $\|\mathcal{P}f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Además

$$\mathcal{P}f(x) = \mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n} \left((\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n} f) \big|_{\mathbb{Z}^n} \right)(x), \quad x \in \mathbb{T}^n. \tag{4.8}$$

Prueba. Teorema 4.6.3 de [6]. □

Corolario 4.13. *Para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se cumple,*

$$\left\| \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \left(\psi\big|_{\mathbb{Z}^n} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \psi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{4.9}$$

<u>*Prueba*</u>. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi := \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi = \psi$. En virtud de (4.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \left(\psi\big|_{\mathbb{Z}^n} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} &= \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \left(\left(\mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi \right) \big|_{\mathbb{Z}^n} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \\ &= \left\| \mathcal{P}\varphi \right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \\ &\leq \left\| \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\psi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

□

En adelante la parte entera de $\frac{n}{2}$, más uno, será representada por l. Esto es,

$$l := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Proposición 4.14. *Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $b > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| \varphi(D)_{\mathbb{T}^n} f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq C \left\| \varphi(b\cdot) \right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \tag{4.10}$$

para todo $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$.

<u>*Prueba*</u>. En [5], página 71, puede verse la demostración de la desigualdad dada a continuación

$$\left\| \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| \varphi(b\cdot) \right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.11}$$

Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Así, tiene sentido $\varphi(D)_{\mathbb{T}^n} f$. Ahora bien, la Proposición 3.27 y las desigualdades (3.5), (4.9) y (4.11), implican

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(D)_{\mathbb{T}^n} f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &= \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \left(\varphi\big|_{\mathbb{Z}^n} \right) * f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leq \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \left(\varphi\big|_{\mathbb{Z}^n} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leq \left\| \mathscr{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leq C \left\| \varphi(b\cdot) \right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.15. *Sean* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $(\cdot)^\alpha := [x \mapsto x^\alpha]$ *y* $m \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\left\| 2^{-jm}(\cdot)^\alpha \sum_{r=-1}^{1} \varphi_{j+r} \right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \leq C(\alpha, l). \tag{4.12}$$

<u>*Prueba*</u>. Véase [5], página 107. □

Proposición 4.16. *Sean* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ *y* $m \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\left\| 2^{jm}\langle\cdot\rangle^{-m}\varphi_j \right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \leq C(m, l). \tag{4.13}$$

<u>*Prueba*</u>. Ver [5], página 108. □

A continuación introducimos unas funciones especiales tomadas de [4]. Sea $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$ y

$$\phi_0(x) = 1 \text{ para } |x| \leq 2 \text{ y } \operatorname{supp}(\phi_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 4\} \tag{4.14}$$

$$\phi_j(x) = \phi(2^{-j}x), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; j \in \mathbb{N}, \text{ con} \tag{4.15}$$

$$\phi(x) = 1 \text{ para } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2 \text{ y } \operatorname{supp}(\phi) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{4} \leq |x| \leq 4\right\}. \tag{4.16}$$

Nótese que si $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi_j(x) = \varphi_j(x)\phi_j(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 4.17. *Sean* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *con crecimiento polinomial en infinito y* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *que satisfacen (4.14)-(4.16). Existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left\| \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} m \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u \right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)} \leq C M_l \left\| u \right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)}$$

para todo $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$, *donde* $M_l := \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \|\phi_j(2^j\cdot)m(2^j\cdot)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}$.

<u>*Prueba*</u>. Sean $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ y $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} m \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u\right) &= \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi_j \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} m \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u\right) \\
&= \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi_j \phi_j m \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u \\
&= \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} m_j \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u_j
\end{aligned}$$

donde $m_j := \phi_j m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $u_j := \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$. Usando (4.10) con $b = 2^j$ tenemos,

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}m_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u_j\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} &\leq C\left\|m_j(2^j\cdot)\right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}\left\|u_j\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\ &= C\left\|\phi_j(2^j\cdot)m(2^j\cdot)\right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}\left\|u_j\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\ &\leq CM_l\left\|u_j\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. En consecuencia,

$$\left\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}m\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leq CM_l\left\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Luego

$$\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}m\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)} \leq CM_l\left\|u\right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}.$$

□

Observación 4.18. En el teorema anterior, $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}m\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u := \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(m\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)$ tiene sentido debido a la Proposición 3.11.

Corolario 4.19. *Sean $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con crecimiento polinomial en infinito y $N \in \mathbb{N}_0$, definimos*

$$\left\|m\right\|_N := \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^n\\|\beta|\leq N}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^{|\beta|}\left|\partial^\beta m(x)\right|.$$

Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}m\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)} \leq C\left\|m\right\|_l\left\|u\right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n,E)}$$

para todo $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n, E)$.

Prueba. Consecuencia directa del Teorema 4.17 ya que $M_N \leq c\left\|m\right\|_N$ para $N \in \mathbb{N}_0$, donde $c > 0$ es independiente de m. □

Teorema 4.20. *Sean $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1,\infty]$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $u \in B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n, E)$ sí y sólo si $\partial^\alpha u \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. Además,*

$$u \longmapsto \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}}\left\|\partial^\alpha u\right\|_{B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{T}^n,E)}$$

es una norma equivalente para $B_{p,q}^s(\mathbb{T}^n, E)$.

<u>*Prueba*</u>. Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ es una resolución de la unidad, $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ con $|\alpha| \leq m$, entonces $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y en consecuencia $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial^\alpha u), \psi\rangle &= \left\langle \partial^\alpha u, \left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left\langle u, \partial^\alpha\left[\left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\psi\right)(-\cdot)\right]\right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left\langle u, (-i)^{|\alpha|}\left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}(x \mapsto x^\alpha\psi(x))\right)(-\cdot)\right\rangle \\
&= \left\langle i^{|\alpha|}(x \mapsto x^\alpha)\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u, \psi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|}(x \mapsto x^\alpha)\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u$. Por simplicidad en la notación y en la realización de cálculos, escribimos simplemente $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial^\alpha u) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u$. Como la función $x \mapsto x^\alpha\varphi(x)$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$, las desigualdades (4.10) y (4.12) implican

$$\begin{aligned}
&2^{j(s-|\alpha|)}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\quad= 2^{j(s-|\alpha|)}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(x^\alpha\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\quad= 2^{js}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(2^{-j|\alpha|}x^\alpha\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\quad\leq 2^{js}C\left\|2^{-j|\alpha|}x^\alpha\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\right\|_{W^l_2(\mathbb{R}^n)}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\quad\leq C\cdot C(\alpha,l)\cdot 2^{js}\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}
\end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Por tanto, $\|\partial^\alpha u\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} \leq C^*(\alpha,l)\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}$. Así, $\partial^\alpha u \in B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$. Siguiéndose de (4.2) que $\partial^\alpha u \in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$. Con lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n_0\\|\alpha|\leq m}}\|\partial^\alpha u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} &\leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n_0\\|\alpha|\leq m}} C'\|\partial^\alpha u\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n_0\\|\alpha|\leq m}} C'C^*(\alpha,l)\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} \\
&= C^\star\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}.
\end{aligned}$$

Recíprocamente. Supongamos que $\partial^\alpha u \in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ con $|\alpha| \leq m$. Probemos que $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$. Debido a (3.7), (3.5), (4.9), (4.11) y (4.13) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&2^{js}\left\|\varphi_j(D)_{\mathbb{T}^n}u\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&=2^{j(s-m)}2^{jm}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&=2^{j(s-m)}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(2^{jm}\langle x\rangle^{-m}\langle x\rangle^{m}\varphi_j\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&=2^{j(s-m)}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(2^{jm}\langle x\rangle^{-m}\varphi_j\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\langle x\rangle^{m}\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq 2^{j(s-m)}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(2^{jm}\langle x\rangle^{-m}\varphi_j\Big|_{\mathbb{Z}^n}\right)\right\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\langle x\rangle^{m}\sum_{r=-1}^{1}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq 2^{j(s-m)}C\left\|2^{jm}\langle x\rangle^{-m}\varphi_j\right\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\langle x\rangle^{m}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq CC(m,l)\cdot 2^{j(s-m)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\langle x\rangle^{m}\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&=C^*\cdot 2^{j(s-m)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\left(\varphi_{j+r}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\langle x\rangle^{m}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&=C^*\cdot 2^{j(s-m)}\sum_{r=-1}^{1}\left\|\varphi_{j+r}(D)_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\langle x\rangle^{m}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}
\end{aligned}
$$

para todo $j\in\mathbb{N}_0$. Entonces

$$\|u\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\leq C^\sharp\left\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\langle x\rangle^{m}\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}.$$

Sea $\varrho:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función infinitamente diferenciable e impar tal que

$$
\begin{aligned}
&\varrho(t)=0,\quad \text{si}\quad 0\leq t\leq 1/2,\\
&\varrho(t)=1,\quad \text{si}\quad t\geq 1.
\end{aligned}
$$

Consideremos la función $M:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$M(x):=\langle x\rangle^{m}\left[1+\sum_{i=1}^{n}\left(\varrho(x_i)x_i\right)^m\right]^{-1}.$$

Las funciones M y $\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \varrho^m(x_i) \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots, n$ son tales que $C_M := \|M\|_l < \infty$ y $C_{\varrho_i} := \|\varrho^m(x_i)\|_l < \infty$ para cada $i = 1, \ldots, n$. En virtud del Corolario 4.19 y del hecho de que $\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n, E)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{B^{s}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^{\sharp} \left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\langle x\rangle^m \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&= C^{\sharp} \left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(M(x)\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\left[1+\sum_{i=1}^{n}\left(\varrho(x_i)x_i\right)^m\right]\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right)\right)\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^{\sharp}C' C_{M} \left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\left[1+\sum_{i=1}^{n}\left(\varrho(x_i)x_i\right)^m\right]\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}u\right)\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^{\natural}\|u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} + C^{\natural}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\mathbb{T}^n}\left(\varrho^m(x_i)\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)\right)\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^{\natural}\|u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} + C^{\natural}\max_{1\leq i\leq n} C_i' C_{\varrho_i}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&= C^{\natural}\|u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} + C^{\natural}\max_{1\leq i\leq n} C_i' C_{\varrho_i}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta=(0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ j-\text{ésima componente}}}{m},\ldots,0)}}\left\|\partial^{\beta}u\right\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^{\S}\|u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)} + C^{\S}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|\leq m}}\|\partial^{\alpha}u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&= C^{\S}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|\leq m}}\|\partial^{\alpha}u\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{T}^n,E)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.21. *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $m \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$B^m_{p,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow W^m_p(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^m_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E), \tag{4.17}$$

y

$$B^m_{\infty,1}(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow C^m(\mathbb{T}^n, E) \hookrightarrow B^m_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n, E). \tag{4.18}$$

Prueba. Sean $1 \leq p < \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Supongamos $u \in B^m_{p,1}(\mathbb{T}^n, E)$. El Teorema 4.20 implica que $\partial^\alpha u \in B^0_{p,1}(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. Debido a la equivalencia entre las normas mencionadas en dicho teorema y de los estimativos de la prueba de (4.5), tenemos

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{W_p^m(\mathbb{T}^n,E)} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C' \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{B^0_{p,1}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C'' \|u\|_{B^m_{p,1}(\mathbb{T}^n,E)}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra la primera inmersión continua de (4.17). Sea $u \in B^m_{\infty,1}(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $\partial^\alpha u \in B^0_{\infty,1}(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. Los estimativos de la prueba de (4.6) implican que $\partial^\alpha u \in C(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$ y

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{C^m(\mathbb{T}^n,E)} &= \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} \sup_{x\in[0,2\pi]^n} \|\partial^\alpha u(x)\|\\
&\leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{C(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^* \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^{**} \|u\|_{B^m_{\infty,1}(\mathbb{T}^n,E)}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra la primera inmersión continua de (4.18). Sea $u \in W_p^m(\mathbb{T}^n, E)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $\partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y por consiguiente (4.5) implica que $\partial^\alpha u \in B^0_{p,\infty}(\mathbb{T}^n, E)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. En virtud del Teorema 4.20 y la inmersión (4.5) obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{B^m_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} &\leq C \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{B^0_{p,\infty}(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\|\alpha|\leq m}} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\\
&\leq C^\star \|u\|_{W_p^m(\mathbb{T}^n,E)}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra la segunda inmersión continua de (4.17). Sea $u \in C^m(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $\partial^\alpha u \in C(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. La inmersión (4.6) permite afirmar que $\partial^\alpha u \in B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq m$. Nuevamente el Teorema 4.20 y la inmersión (4.6) implican

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^m_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} &\leq C \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq C \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq m}} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|_{C(\mathbb{T}^n,E)} \\
&\leq C \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq m}} \|\partial^\alpha u\|_{C(\mathbb{T}^n,E)} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq m}} C_\alpha \\
&= C'' \|u\|_{C^m(\mathbb{T}^n,E)} .
\end{aligned}$$

Esto muestra la segunda inmersión continua de (4.18). $\square$

Referencias

[1] H. Amann, *Operator-Valued Fourier Multipliers, Vector-Valued Besov Spaces and Applications*. Math. Nachr. 186 (1997), 5-56.

[2] W. Arendt and S. Bu, *Operator-Valued Fourier Multipliers on Periodic Besov Spaces and Applications*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2004) 47, 15-33.

[3] B. Barraza, R. Denk, J. Hernández & T. Nau, *Notes on Pseudodifferential Operators on the Torus* $\mathbb{T}^n$, en preparación.

[4] H. Kempka, *Generalized 2-microlocal Besov spaces*, Dissertation doctoral, Jena, 2008.

[5] J. Kluschat, *Vektorwertige Distributionen*, Diplomarbeit, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, 2004.

[6] M. Ruzhansky and V. Turunen, *Pseudo-Differential Operators and Symmetries*, Birkhäuser, Basel, 2010.

[7] H.-J. Schmeisser and H. Triebel, *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*, Leipzig, 1987.

[8] H.-J. Schmeisser, *Vector-Valued Sobolev and Besov Spaces*, Seminar Analysis of the Karl-Weierstrass-Institute, Band 96, 1986.

[9] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, 1983.