Apuntes
de Topología

Colección manuales uex - 109

Adrián
Gordillo Merino

José
Navarro Garmendia

109

ÍNDICE

APUNTES
DE TOPOLOGÍA

MANUALES UEX

109

ÍNDICE

ADRIÁN GORDILLO MERINO
JOSÉ NAVARRO GARMENDIA

APUNTES
DE TOPOLOGÍA

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

2020

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Edita:

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C/ Caldereros, 2 - Planta 3ª. 10071 Cáceres (España)
Tel. 927 257 041; Fax 927 257 046
E-mail: publicac@unex.es
http://www.unex.es/publicaciones

ISSN 1135-870-X
ISBN de méritos 978-84-09-25212-1

ÍNDICE GENERAL

ÍN
DI
CE

ÍN
DI
CE

INTRODUCCIÓN

Estos apuntes están destinados a servir de base para la asignatura de *Topología*, que actualmente se imparte en el segundo curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Extremadura. Tal asignatura constituye el primer semestre en que los alumnos estudian propiamente las cuestiones topológicas, aunque se asume que previamente han cursado las asignaturas de *Cálculo I, Cálculo II* y *Análisis I*, en las que ya se han familiarizado con las topologías usuales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Así, el objetivo fundamental de estas notas es que el estudiante asimile la naturaleza topológica —y, por consiguiente, muy general— de varios conceptos con los que ya se ha encontrado en las mencionadas asignaturas de Cálculo y Análisis (a saber: abierto, cerrado, interior, clausura, límite de una sucesión, aplicación continua, conjuntos conexos, compactos,...) y que los distinga de aquellos que no tienen tal naturaleza (como la acotación, la noción de sucesión de Cauchy o de aplicación uniformemente continua, etc.)

Por tanto, se procura introducir las definiciones con total generalidad, dejando de manifiesto cómo tales nociones descansan en la topología subyacente al espacio en cuestión; es decir, topologías diferentes sobre un mismo espacio producen distintos conjuntos compactos, conexos, distintas funciones continuas, etc.

Con el objeto de facilitar la asimilación de estas ideas, el texto se halla jalonado de multitud de ejemplos —minuciosamente desarrollados, muchos de ellos—, así como de amplias baterías de ejercicios y problemas. La mayoría de tales ejemplos, y de las situaciones planteadas en los ejercicios y en la propia teoría, no tiene como objetivo la generalidad, sino facilitar la comprensión de los conceptos en juego, por lo que se ha tratado de mantener un marcado carácter introductorio. No obstante, algunos temas contienen ejercicios bajo el epígrafe *Para ampliar*, pensados para el lector que quiera seguir profundizando.

Además, cada uno de los temas contiene una colección de veinte ejercicios de autoevaluación, que posibilitan al estudiante comprobar si ha asimilado correctamente los conceptos estudiados. A modo de apéndice, se incluyen las respectivas soluciones.

No conocemos ningún otro manual de Topología que contenga este tipo de ejercicios de opción múltiple, pero la experiencia acumulada a lo largo de los cursos nos muestra que es una novedad bien recibida (y trabajada) por los estudiantes.

Finalmente, en el apartado de bibliografía, se enumeran una serie de libros y manuales recomendados. En unos, pueden encontrarse diversos ejemplos, ejercicios o problemas, algunos de los cuales aparecen en estas páginas, modificados en mayor o menor medida según los casos. Otros, sin embargo, son lecturas recomendadas para aquellas personas que quieran aprender más o simplemente repasar lo aprendido con un enfoque algo distinto.

Es evidente que unos apuntes de una asignatura no solamente se deben a la invención de sus autores. Concretamente, estos no existirían sin la experiencia adquirida, primero como estudiantes de esta misma materia, luego como profesores; tampoco habrían visto la luz sin multitud de lecturas sugerentes o conversaciones con colegas que proponen algún problema; ni, por supuesto, tendrían su forma actual sin la inestimable ayuda, que queremos agradecer expresamente, de las diferentes promociones de alumnos que han estudiado con ellos, y nos han ido anotando buena cantidad de erratas. Las que ahora persistan ya son, por supuesto, exclusivamente achacables a nuestra torpeza.

Igualmente, y para acabar, nos gustaría agradecer a Maribel Garrido y Paco Montalvo, quienes, antes de ser colegas, fueron nuestros introductores, con la simple y maravillosa ayuda de una tiza movida con pasión y sabiduría, a los encantos de la Topología.

CAPÍTULO 1
ESPACIOS MÉTRICOS

Este capítulo es introductorio y en él se dan las primeras definiciones de la teoría de espacios métricos, por ser estos un ejemplo paradigmático de espacios topológicos. Son espacios métricos la recta real con su distancia usual o $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclídea o usual —de hecho, más en general, cualquier espacio normado, también los de dimensión infinita—.

Se debe hacer hincapié en que algunas de las propiedades de las que se habla en este capítulo son topológicas, es decir, estables por homeomorfismos[1] (abiertos, cerrados, interior, clausura...) mientras que otras no (distancia entre dos puntos, o entre dos subconjuntos, diámetro de un subconjunto, acotación...)

1.1. Definición de distancia

Definición 1.1.1 *Una* ***distancia*** *o* ***métrica*** *sobre un conjunto no vacío X es una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x,y) \geq 0$, $\forall\, x,y \in X$;
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x,y \in X$;
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall\, x,y,z \in X$.

El conjunto X, dotado de la métrica d, recibe el nombre de ***espacio métrico****.*

[1] Véase la definición 3.3.4 del tema 3.

Ejemplos:

1. Dado un conjunto no vacío X, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} d_{\text{discreta}}: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d_{\text{discreta}}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \;\; , & \text{si } x \neq y\,, \\ 0 \;\; , & \text{si } x = y \end{array} \right. \end{array}$$

   se llama *distancia discreta*sobre X. El conjunto dotado de la distancia discreta, (X, d_{discreta}), recibe el nombre de espacio métrico discreto.

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado —posiblemente de dimensión infinita—. No es difícil comprobar que la siguiente aplicación define una distancia sobre E

$$d(x,y) = \|x - y\|\,,$$

   y se dice que es la distancia asociada a la norma $\|\cdot\|$.

   También se puede comprobar que, si una distancia sobre un $\mathbb{k}-$espacio vectorial $(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ E está asociada a una norma sobre E, forzosamente la distancia ha de ser invariante por traslaciones y compatible con el producto por escalares:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \;\;,\;\; \forall x,y,z \in E\,,$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \;\;,\;\; \forall x,y \in E\,, \forall \lambda \in \mathbb{k}\,.$$

   Como casos particulares, especialmente interesantes, de distancias definidas a partir de normas, podemos considerar los siguientes:

   a) **La recta euclídea.** Sobre $\mathbb{R}$ consideraremos la que se conoce como *distancia usual*, asociada a la norma del valor absoluto:

$$d_{\text{usual}}(x,y) = |x - y|\,.$$

   b) En $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$) existen tres distancias especialmente importantes, asociadas a las normas $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$, respectivamente:

   (a) $d_2((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$

   (conocida habitualmente también como *distancia usual* o *distancia euclídea*);

   (b) $d_1((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

   (c) $d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$.

c) Sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial l_∞ de las sucesiones de números reales que son acotadas (cuya operación de suma es $(x_n)+(y_n) := (x_n+y_n)$ y el producto por escalares $\lambda\cdot(x_n) := (\lambda x_n)$), se puede definir la norma del máximo, que produce la siguiente distancia:

$$d((x_n),(y_n)) := \max_{i\in\mathbb{N}} \{|x_i - y_i|\}\ .$$

3. $(\mathbb{R}, d)$ es espacio métrico, con

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \left\{ \begin{array}{cl} |x|+|y| & ,\ \text{si } x\neq y\,, \\ 0 & ,\ \text{si } x=y\,. \end{array} \right. \end{array}$$

(Compruébese que esta distancia no es invariante por traslaciones, motivo por el cual no es la distancia asociada a una norma.)

4. **Distancia 10-ádica.** Se define la distancia 10-ádica sobre $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n,m) & \longmapsto & d(n,m) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{1}{10^{\mathrm{o}(n-m)}} & ,\ \text{si } n\neq m\,, \\ 0 & ,\ \text{si } n=m\,, \end{array} \right. \end{array}$$

donde $10^{\mathrm{o}(n-m)}$ denota la mayor potencia de 10 que divide a $n-m$ (para más detalle sobre esta curiosa —e importante— distancia, véase el ejercicio 37).

5. Sobre $\mathbb{N}$ es distancia la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (n,m) & \longmapsto & d(n,m) = \left\{ \begin{array}{cl} n+m & ,\ \text{si } n\neq m\,, \\ 0 & ,\ \text{si } n=m\,. \end{array} \right. \end{array}$$

6. Otra distancia sobre $\mathbb{N}$ es la definida como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (n,m) & \longmapsto & d(n,m) = \left\{ \begin{array}{cl} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m} & ,\ \text{si } n\neq m\,, \\ 0 & ,\ \text{si } n=m\,. \end{array} \right. \end{array}$$

1.2. Bolas y esferas

Una vez que estemos trabajando en un espacio métrico, hay un concepto esencial, que es el de bola abierta. Junto a él, también tienen interés los de bola cerrada y esfera.

Definición 1.2.1 *Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $x_0\in X$ y $r>0$. La **bola abierta de centro x_0 y radio r** es el siguiente conjunto:*

$$B(x_0,r) = \{x\in X : d(x,x_0) < r\}\,.$$

*La **bola cerrada** (con mismo centro y mismo radio) es:*

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

*La **esfera** (con mismo centro y mismo radio) es:*

$$S[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Observaciones:

1. Cualquier bola abierta (o cerrada) es, por definición, no vacía, puesto que su centro siempre pertenecerá a la bola: $x_0 \in B(x_0, r)$, $x_0 \in B[x_0, r]$, sea cual sea el radio $r > 0$. ($d(x_0, x_0) = 0$).

2. Sin embargo, un punto nunca pertenece a la esfera centrada en él, y las esferas sí pueden ser vacías. (Basta pensar en un espacio métrico discreto, y considerar como radio de la esfera cualquier número estrictamente positivo que no sea 1.)

3. Dados $x_0 \in X$, $r > 0$, se verifica la siguiente igualdad de conjuntos:

$$B[x_0, r] = B(x_0, r) \sqcup S[x_0, r].$$

4. Dado $x_0 \in X$, y dados $0 < r < s$, se verifican las siguientes inclusiones (que pueden ser igualdades entre conjuntos):

$$B(x_0, r) \subseteq B(x_0, s),$$

$$B[x_0, r] \subseteq B[x_0, s].$$

(Obviamente, esa relación de inclusión no se cumple en general entre las esferas correspondientes.)

Propiedades de la familia de bolas abiertas.

Dado un espacio métrico (X, d), y dado $x_0 \in X$, denotaremos por $\mathcal{B}(x_0)$ la familia de todas las bolas abiertas centradas en x_0:

$$\mathcal{B}(x_0) = \{B(x_0, r) : r > 0\}.$$

Esta familia $\mathcal{B}(x_0)$ verifica las siguientes propiedades:

1. Para cada $B \in \mathcal{B}(x_0)$, $x_0 \in B$.

2. Dadas $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x_0)$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(x_0)$.

   Demostración: Sean r_1 y r_2 tales que $B_1 = B(x_0, r_1)$ y $B_2 = B(x_0, r_2)$. Entonces basta tomar $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$ para tener $B_1 \cap B_2 = B(x_0, r)$. ∎

3. Para cada $B \in \mathcal{B}(x_0)$, y para cada $y \in B$, existe otra bola abierta $B' \in \mathcal{B}(y)$, tal que $B' \subseteq B$.

   Demostración: Si $r > 0$ es el radio de la bola B, y suponemos $y \neq x_0$, entonces, $0 < d(y, x_0) < r$. Si cogemos $0 < s < r - d(y, x_0)$, entonces $B(y, s) \subseteq B$. Veámoslo:

   Sea $z \in B(y, s)$, es decir, $d(y, z) < s$. Por la propiedad triangular de la métrica:

   $$d(z, x_0) \leq d(z, y) + d(y, x_0) < s + d(y, x_0) < r - d(y, x_0) + d(y, x_0) = r\,.$$

   ■

4. Para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ $(x \neq y)$, existen bolas abiertas $B \in \mathcal{B}(x)$ y $B' \in \mathcal{B}(y)$ tales que $B \cap B' = \emptyset$.

   (Esta propiedad nos dirá que todo espacio métrico es **de Hausdorff** (o T_2, o **separado**).)

   Demostración: Como $x \neq y$, $d(x, y) > 0$. Entonces podemos coger $0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$, y $B(x, r)$ y $B(y, r)$ son bolas disjuntas. Supongamos que no lo son, y tienen algún punto en común:

   Sea $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$. Entonces, por la propiedad triangular de la distancia,

   $$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r < \frac{d(x, y)}{2} + \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y)$$

   lo cual obviamente es un absurdo.

   ■

5. Existe una sucesión de bolas abiertas $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(x_0)$ tal que:

   a) $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
   b) $\forall B \in \mathcal{B}(x_0)$, $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow B_n \subseteq B$.

   (Esta propiedad nos dirá —véase la sección 2.3— que todo espacio métrico es **primero contable** (o **que verifica el primer axioma de numerabilidad**).)

   Demostración: Como todas las bolas son centradas en el mismo punto, podemos traducir el enunciado de la propiedad en términos de radios. Así, la propiedad diría lo siguiente:

   Existe una sucesión de números reales $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ estrictamente positivos (es decir, una sucesión de radios) tal que:

   a) $r_{n+1} \leq r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (es decir, la sucesión es decreciente);
   b) $\forall r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow r_n \leq r$ (esto es, la sucesión es convergente a 0).

   Obviamente, basta tomar $r_n = \frac{1}{n}$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) para tener una sucesión como la enunciada.

   ■

1.3. Topología en un espacio métrico

Dado un espacio métrico (X,d), podemos definir en él el concepto de entorno de un punto y de subconjunto abierto, ambos fundamentales en toda la asignatura.

Definición 1.3.1 *Un subconjunto $V \subseteq X$ es un* ***entorno*** *de $x \in X$ si existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq V$.*

Definición 1.3.2 *Un subconjunto $G \subseteq X$ es un* ***abierto*** *en (X,d) si es entorno de todos sus puntos, es decir, si, para cada $x \in G$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq G$, o, equivalentemente, si G se puede escribir como unión arbitraria de bolas abiertas.*

Propiedades de los conjuntos abiertos en un espacio métrico.

Si llamamos τ_d al conjunto de todos los abiertos de un espacio métrico (X,d), entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $X \in \tau_d$ y $\emptyset \in \tau_d$.

   Demostración: Es un trivial ejercicio al lector.

   ∎

2. $\forall\, G_1, G_2 \in \tau_d$, $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$.

   Demostración: Si $x \in G_1 \cap G_2$, entonces $x \in G_1$ y $x \in G_2$. Como ambos son abiertos, existen sendos radios $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que $B(x,r_1) \subseteq G_1$ y $B(x,r_2) \subseteq G_2$.

   Basta tomar $r = \min\{r_1, r_2\}$ para tener $B(x,r) \subseteq G_1 \cap G_2$.

   ∎

3. $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_d \Rightarrow \cup_{i \in I} G_i \in \tau_d$.

   Demostración: Si $x \in \cup_{i \in I} G_i$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in G_j$. Puesto que todos los G_i son abiertos en (X,d) (incluido el propio G_j), existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq G_j \subseteq \cup_{i \in I} G_i$, con lo que concluimos.

   ∎

(Acabamos de demostrar, según veremos más adelante, que una distancia d sobre un conjunto no vacío X siempre define una topología sobre el conjunto, de tal modo que todo espacio métrico es un espacio topológico: (X, τ_d).)

Importante: Es un resultado conocido del Análisis que todas las normas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes (es decir, las métricas asociadas dan lugar a la misma topología —esto es, a los mismos abiertos—, y tal topología recibe el nombre de *topología usual*).

Obsérvese, sin embargo, que la afirmación no es extensible a cualquier métrica sobre $\mathbb{R}^n$, sino exclusivamente a aquellas asociadas a normas.

Definición 1.3.3 *Un subconjunto F es un* ***cerrado*** *de un espacio métrico (X,d) si su complementario es un abierto: $F^c \in \tau_d$.*

1.4. Subconjuntos acotados

Definición 1.4.1 *Un subconjunto A de un espacio métrico (X,d) se dice* ***acotado*** *si existe alguna bola abierta que lo contiene; es decir, existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subseteq B(x,r)$.*

Proposición 1.4.2 *Sea (X,d) un espacio métrico. $A \subseteq X$ es acotado si, y sólo si, existe $K > 0$ tal que, sean cuales sean $x, y \in A$, $d(x,y) \leq K$.*

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Puesto que suponemos A acotado en (X,d), deben existir $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subseteq B(x_0,r)$. Así pues, dados $x, y \in A$, se verifica la siguiente desigualdad:

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) < r + r = 2r\,,$$

y basta tomar $K = 2r$ como la constante del enunciado.
$(\Leftarrow)$ Sea $K > 0$ tal que $d(x,y) \leq K$, para cualesquiera $x, y \in A$. Fijado un punto cualquiera $x_0 \in A$, basta tomar $r = 2K$, y ya tendremos $A \subseteq B(x_0,r)$:

$$x \in A \Rightarrow d(x,x_0) \leq K < 2K = r \Rightarrow x \in B(x_0,r)\,.$$

■

Propiedades de los subconjuntos acotados.

Dado un espacio métrico (X,d), y dados subconjuntos A y B en X, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $A = \{x_0\}$ ($x_0 \in X$), entonces A es acotado.

   Demostración: Cualquier bola abierta centrada en x_0 contiene al subconjunto A, pues el centro de cualquier bola pertenece a la bola. ■

2. Si $A \subseteq B$ y B es un subconjunto acotado, entonces A es acotado.

   Demostración: Por ser B acotado, existe alguna bola abierta que lo contiene, y esa misma bola abierta contiene obviamente al subconjunto A. ■

3. Si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es un subconjunto acotado.

   Demostración: Si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$ entonces no hay nada que demostrar, pues la unión será B o, respectivamente, A. Supongamos pues que no se da ninguna de las dos inclusiones mencionadas.

   Como A y B son acotados, existen x_0, $y_0 \in X$ y r, $s > 0$ tales que $A \subseteq B(x_0,r)$ y $B \subseteq B(y_0,s)$.

   Basta tomar como radio $t = r + s + d(x_0,y_0)$ para tener así que $A \cup B \subseteq B(x_0,t)$, y demostrar pues que $A \cup B$ también es un subconjunto acotado. ■

Observación importante:

La propiedad de ser acotado no es una propiedad topológica, es decir, no depende de los abiertos, sino de la métrica. Veámoslo con este ejemplo:

Sobre $\mathbb{N}$ consideremos dos distancias distintas que induzcan la misma topología: d_{usual} y d_{discreta}. Ambas métricas definen los mismos abiertos en $\mathbb{N}$, pues cualquier subconjunto unitario es abierto, ya que se puede escribir como una bola abierta con cualquiera de las dos distancias; por ejemplo:

$$\{n_0\} = B_{\text{discreta}}(n_0, 1) \ , \ \{n_0\} = B_{\text{usual}}(n_0, 1) \, .$$

Sin embargo, no es cierto que $\mathbb{N}$ sea acotado con ambas distancias: sí lo es cuando lo consideramos dotado de la distancia discreta; no cuando lo consideramos con la métrica usual, ya que, sea cual sea $K > 0$ —que podemos considerar natural sin perder generalidad en la demostración—, siempre podremos encontrar n_K, $m_K \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\text{usual}}(n_K, m_K) > K$. (Basta tomar, por ejemplo, $n_K = 1$ y $m_K = K + 2$.)

1.5. Subespacios métricos

Sea (X, d) un espacio métrico. Dado un subconjunto no vacío $Y \subset X$, podemos considerar la restricción de la distancia d sobre Y:

$$\begin{array}{rcl} Y \times Y & \xrightarrow{d_Y} & \mathbb{R} \\ (y_1, y_2) & \longmapsto & d(y_1, y_2) \, . \end{array}$$

De este modo, d_Y es una distancia sobre Y, (Y, d_Y) es un espacio métrico y diremos que (Y, d_Y) es un **subespacio métrico** de (X, d).

Ejemplo:

$\mathbb{N}$ puede ser considerado de modo natural como subespacio métrico de $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, y ya sabemos que la distancia usual restringida a $\mathbb{N}$, es decir, $d_{\text{usual}}(n, m) = |n - m|$, induce sobre $\mathbb{N}$ la misma topología que la distancia discreta.

(Sin embargo, la distancia discreta sobre $\mathbb{R}$ —que no está asociada a ninguna norma, pues no es compatible con el producto por escalares— no induce en $\mathbb{R}$ la misma topología que la distancia usual —ésta sí asociada a la norma del valor absoluto—, a la que hemos llamado anteriormente topología usual.)

Si (Y, d_Y) es un subespacio métrico del espacio (X, d), dados $y_0 \in Y$ y $r > 0$, se verifican las siguientes igualdades (cuya demostración se deja como sencillísimo ejercicio al lector):

$$B_Y(y_0, r) = B_X(y_0, r) \cap Y \, ;$$

$$B_Y[y_0, r] = B_X[y_0, r] \cap Y \, ;$$

$$S_Y[y_0, r] = S_X[y_0, r] \cap Y \, .$$

Problemas

1. Defínanse diferentes métricas sobre un conjunto con tres elementos.

2. Determínese cuáles de las siguientes son métricas y cuáles no:
   (Para las que sí sean distancias, calcúlense las bolas abiertas.)

   a)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=e^{|x-y|}\ ; \end{array}$$

   b)

$$\begin{array}{ccl} (0,+\infty)\times(0,+\infty) & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=\left\{\begin{array}{ccl} \frac{x+y}{2} & , & \text{si}\, x\neq y\ , \\ 0 & , & \text{si}\, x=y\ ; \end{array}\right. \end{array}$$

   c)

$$\begin{array}{ccl} (0,+\infty)\times(0,+\infty) & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=(x^y-y^x)^2\ ; \end{array}$$

   d)

$$\begin{array}{ccl} (0,+\infty)\times(0,+\infty) & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=\left\{\begin{array}{ccl} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} & , & \text{si}\, x\neq y\ , \\ 0 & , & \text{si}\, x=y\ ; \end{array}\right. \end{array}$$

   e)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=\text{máx}\ \{x-y\ ,\ 0\}\ ; \end{array}$$

   f)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=t(|x-y|)\,, \end{array}$$

   donde, dado un número real x, t(x) denota el menor número entero mayor o igual que x;

   g)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \stackrel{d}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=E(|x-y|)\,, \end{array}$$

   donde, dado un número real x, E(x) denota la *parte entera* de x, es decir, el mayor número entero menor o igual que x;

h)

$$\begin{array}{rcl} X \times X & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = |f(x) - f(y)|\,, \end{array}$$

donde X es un conjunto no vacío, y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva.

3. Pruébese que la propiedad 1 de la definición de distancia es, en realidad, redundante, pues se sigue de las otras tres propiedades.

4. Sea E un $\Bbbk-$espacio vectorial (con $\Bbbk = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

   a) Si $\|\cdot\|$ es una norma sobre E y $d(x,y) = \|x - y\|$ es la distancia asociada a $\|\cdot\|$, compruébese que d es invariante frente a traslaciones y compatible con el producto por escalares:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)\,,\ \forall x,y,z \in E\,; \tag{1.5.1}$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)\,,\ \forall x,y \in E\,,\ \forall \lambda \in \Bbbk\,. \tag{1.5.2}$$

   b) Si d es una distancia sobre E que sea invariante frente a traslaciones (1.5.1) y compatible con el producto por escalares (1.5.2), compruébese que $\|x\| := d(x,0)$ es una norma sobre E.

5. Sea (X,d) un espacio métrico. Demuéstrese que las siguientes aplicaciones también son distancias sobre X:

   a) $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$;

   b) $\tilde{D}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+\sqrt{d(x,y)}}$.

   (**Indicación:** Téngase en cuenta que las funciones $f(t) = \frac{t}{1+t}$ y $g(t) = \frac{t}{1+\sqrt{t}}$, definidas sobre $[0,+\infty)$, son crecientes.)

6. Dado un espacio métrico (X,d), pruébese que también es distancia sobre X la aplicación $D(x,y) = \text{mín}\,\{1, d(x,y)\}$.

   Calcúlense las bolas abiertas con esta métrica, y compruébese que cualquier subconjunto de (X,D) es acotado.

7. Sea (X,d) un espacio métrico. Determínese si las siguientes aplicaciones son también distancias sobre X o no:

   a) $D(x,y) = k\,d(x,y)$ (con $k > 0$);

   b) $\tilde{D}(x,y) = (d(x,y))^2$.

8. Supongamos que d y d' son dos distancias sobre un conjunto no vacío X. Demuéstrese que $D(x,y) = \text{máx}\,\{d(x,y), d'(x,y)\}$ define otra distancia sobre X, mientras que $\overline{D}(x,y) = \text{mín}\,\{d(x,y), d'(x,y)\}$ no es necesariamente métrica.

   Compruébese además que $B_D(x_0, r) = B_d(x_0, r) \cap B_{d'}(x_0, r)$, y que, cuando $\overline{D}$ sea métrica, $B_{\overline{D}}(x_0, r) = B_d(x_0, r) \cup B_{d'}(x_0, r)$ (para cualquier $x_0 \in X$ y cualquier $r > 0$).

9. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la distancia euclídea d_2. Compruébese que también son métricas sobre $\mathbb{R}^2$ las aplicaciones definidas como sigue:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} d_2(x,0) + d_2(0,y) & , \text{ si } x \neq y\,, \\ 0 & , \text{ si } x = y\,, \end{cases}$$

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} d_2(x,y) & , \text{ si } x \text{ e } y \text{ alineados con el origen}\,, \\ d_2(x,0) + d_2(0,y) & , \text{ en otro caso}\,, \end{cases}$$

   donde estamos denotando por 0 el origen $(0,0)$ y mediante x e y dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$.

   Calcúlense las bolas abiertas para ρ y δ.

10. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son n puntos de un espacio métrico (X,d), pruébese que se verifica la siguiente desigualdad:

$$d(a_1, a_n) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + \ldots + d(a_{n-1}, a_n)\,.$$

11. Sea (X,d) un espacio métrico. Demuéstrese que se verifica la siguiente desigualdad, sean cuales sean $x, y, z \in X$:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)\,.$$

12. Sea (X,d) un espacio métrico, y sean A y B subconjuntos no vacíos de X. Se define la *distancia de A a B* como sigue:

$$\text{dist}(A,B) := \text{ínf}\,\{d(a,b) : a \in A\,,\ b \in B\}\,.$$

   (El ínfimo de una colección de números reales es la mayor de sus cotas inferiores. En nuestro caso, el conjunto de números reales cuyo ínfimo queremos calcular está formado por números mayores o iguales que 0; es decir, es un conjunto acotado inferiormente por 0, y, por tanto, el ínfimo será siempre mayor o igual que 0. Esto es, la distancia entre dos subconjuntos en un espacio métrico siempre será mayor o igual que 0.)

   Obviamente, podemos considerar la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \text{dist}(A,B)\,. \end{array}$$

   ¿Es esa aplicación una distancia sobre $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$?

13. Sean (X,d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\emptyset \neq A \subseteq X$. La *distancia de x_0 a A* es, por definición, la distancia entre el subconjunto unitario $\{x_0\}$ y el subconjunto A, es decir:

$$\operatorname{dist}(x_0, A) := \operatorname{dist}(\{x_0\}, A) = \operatorname{ínf}\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Pruébese que, si (X,d) es un espacio métrico y A es un subconjunto no vacío de X, entonces:

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

14. Sea (X,d) un espacio métrico, y sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Compruébese que, siempre que $B(x,\varepsilon) \neq X$, entonces $\operatorname{dist}(x, X \setminus B(x,\varepsilon)) \geq \varepsilon$.

15. (Aplicación del ejercicio 11.) Dado un espacio métrico (X,d), y dado un elemento $a \in X$, para cada $p \in X$, podemos definir una aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_p(x) = d(x,p) - d(x,a). \end{array}$$

Demuéstrese que f_p es una función acotada para cada p.

(Que f_p sea acotada significa que existe $K > 0$ tal que $|f_p(x)| \leq K$, sea cual sea $x \in X$.)

16. Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x, y, z, t \in X$, compruébese que se verifica la siguiente desigualdad:

$$d(x,z) + d(y,t) \geq |d(x,y) - d(z,t)|.$$

17. Una aplicación entre espacios métricos $f : (X,d) \to (Y,d')$ es *uniformemente continua* si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

   a) (Aplicación del ejercicio 16.) Sea d la siguiente distancia sobre un conjunto no vacío X:

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y). \end{array}$$

   Esta distancia puede ser considerada a su vez como una aplicación entre espacios métricos; concretamente, entre $(X \times X, d_\infty)$ y $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, donde d_∞ es la distancia producto sobre $X \times X$, es decir:

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \operatorname{máx}\{d(x_1,x_2), d(y_1,y_2)\}.$$

   Demuéstrese que d, así considerada como aplicación entre espacios métricos, es uniformemente continua.

b) (Aplicación del ejercicio 13.) Dado un subconjunto no vacío A de un espacio métrico (X, d), demuéstrese que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{dist}_A} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{dist}(x, A) \end{array}$$

es uniformemente continua.

18. Sabemos que la unión finita de subconjuntos acotados en un espacio métrico vuelve a ser un subconjunto acotado. ¿Es esto cierto para una unión arbitraria?

19. Dado un espacio métrico (X, d), y dado un subconjunto no vacío $A \subseteq X$, se define el *diámetro de* A como sigue:

$$\delta(A) := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

(El supremo de una colección de números reales es la menor de sus cotas superiores, y, por tanto, su existencia o no dependerá de que ese conjunto de números reales esté acotado superiormente o no. Recordemos que el Teorema Fundamental del Orden nos dice que todo conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales tiene supremo.)

Demuéstrese que un subconjunto A es acotado en (X, d) si, y sólo si, su diámetro es un número real, es decir, $\delta(A) < +\infty$.

20. Compruébese que un subconjunto de un espacio métrico es unitario (sólo tiene un elemento) si, y sólo si, su diámetro es 0.

21. Demuéstrese que en cualquier espacio métrico el diámetro de una bola abierta de radio $r > 0$ siempre es menor o igual que $2r$.

22. Póngase un ejemplo de un espacio métrico que contenga una bola abierta cuyo diámetro sea estrictamente menor que su radio.

23. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico (X, d).

    a) Demuéstrese que, si $A \subseteq B$, entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$.
    b) Demuéstrese que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \text{dist}(A, B)$.
    c) Demuéstrese que, si A y B tienen intersección no vacía, entonces se verifica que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
    d) Si A y B tienen en común un único elemento, ¿se cumplirá necesariamente la igualdad $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$?

24. Encuéntrense dos subconjuntos distintos A y B en $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ tales que:

$$\delta(A \cup B) = \delta(A) = \delta(B) = 1.$$

25. Demuéstrese que una métrica d sobre un conjunto no vacío X es acotada (es decir, que el diámetro de X con la distancia d es un número real) si, y sólo si, existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $B(x, r) = X$.

26. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico. Pruébese que, si $\delta(A) < r$, y $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$, se verifica la inclusión $A \subseteq B(x, 2r)$.

27. Sobre $(0, +\infty)$ consideremos las distancias

$$d(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ si } x \neq y\,, \\ 0 & , \text{ si } x = y\,; \end{cases}$$

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & , \text{ si } x \neq y\,, \\ 0 & , \text{ si } x = y\,. \end{cases}$$

   a) Calcúlese la bola abierta de centro $x_0 \in (0, +\infty)$ y radio $r > 0$ con ambas distancias.

   b) Estúdiese si los subconjuntos $\mathbb{N}$ y $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ son acotados o no con cada una de las dos distancias d y $\tilde{d}$.
   (Sirva este ejercicio para reforzar la idea de que la acotación o no de un cierto subconjunto de un conjunto dado depende exclusivamente de la métrica considerada sobre este último.)

28. De una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ se dice que *preserva distancias* si verifica:

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in X\,.$$

   a) Pónganse ejemplos de aplicaciones que preserven distancias en la recta y en el plano (en ambos casos, con las distancias usuales).

   b) Demuéstrese que toda aplicación que preserve distancias es una aplicación inyectiva.

   (Diremos que una aplicación entre espacios métricos es una *isometría* si es biyectiva y preserva distancias.)

29. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, D)$, con D la métrica definida como sigue:

$$D(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}\,.$$

   (D es distancia sobre $\mathbb{R}$, según nos dice el ejercicio 3, en su apartado *a*.)

   a) Determínense las bolas abiertas, las bolas cerradas y las esferas.

   b) Calcúlese la distancia de 2 al conjunto $A = [0, 1]$.

   c) Calcúlese la distancia entre $A = [0, 1]$ y $B = (-2, -1)$.

30. Representemos en $\mathbb{R}^2$ la situación de una tribu en un lugar muy boscoso con un río en $y=0$. Los habitantes de esta tribu, para llegar al agua, han hecho brechas perpendiculares al río. Si alguien desea ir de un punto (x_1,y_1) a un punto (x_2,y_2), sólo puede hacerlo, debido a la espesura del bosque, por las brechas o por la orilla.

   a) Defínase la métrica sobre $\mathbb{R}^2$ adecuada a tal situación, y verifíquese que en efecto se trata de una distancia.
   b) Calcúlense las bolas abiertas.
   c) Calcúlense las métricas inducidas por la distancia definida sobre los subespacios $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ y $\{x=y\}$.

31. Consideremos $\mathbb{N}$ dotado de la métrica (compruébese) siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (n,m) & \longmapsto & d(n,m)=\left\{\begin{array}{ccl} n+m+\frac{n}{m} & , & \text{si } n<m\,, \\ 0 & , & \text{si } n=m\,, \\ n+m+\frac{m}{n} & , & \text{si } n>m\,. \end{array}\right. \end{array}$$

   a) Calcúlense la bola abierta de centro 5 y radio 11, y las bolas abierta y cerrada, así como la esfera, de centro 2 y radio 2.
   b) Calcúlese la distancia entre el conjunto de números impares y el conjunto de números pares.

32. Consideremos $\mathbb{R}$ dotado de la métrica d definida como sigue:

$$d(x,y)=\left\{\begin{array}{ccl} 1+|x-y| & , & \text{si } x>0 \text{ ó } y>0 \text{ (no ambos a la vez)}\,, \\ |x-y| & , & \text{en otro caso}\,. \end{array}\right.$$

   a) Calcúlense $B(0,3)$ y $B(-1,2)$.
   b) Calcúlese el diámetro del subconjunto $[-1,1]$.
   c) Calcúlese la distancia del punto 1 al conjunto $(2,3)$.

33. En $\mathbb{R}^2$ consideremos la distancia d definida mediante la expresión

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+d_{\text{discreta}}(y_1,y_2)\,.$$

   a) Compruébese que d es efectivamente una distancia sobre $\mathbb{R}^2$.
   b) Calcúlense las bolas abiertas, las bolas cerradas y las esferas en $(\mathbb{R}^2,d)$.
   c) Calcúlense los diámetros de los subconjuntos $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ y $[0,1]\times[0,1]$.
   d) Calcúlese la distancia entre $[0,1]\times\{0\}$ y el punto $(0,1)$; y entre $[0,1]\times\{0\}$ y $[0,1]\times\{10^6\}$.

34. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Dados dos elementos cualesquiera de $\mathbb{R}_2[x]$, $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $Q(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$, definimos la distancia entre ambos del siguiente modo:

$$d(P,Q) = \begin{cases} 3 & , \text{ si } a_0 \neq b_0 \,, \\ 2 & , \text{ si } a_0 = b_0 \,,\, a_1 \neq b_1 \,, \\ 1 & , \text{ si } a_0 = b_0 \,,\, a_1 = b_1 \,,\, a_2 \neq b_2 \,, \\ 0 & , \text{ si } P = Q \,. \end{cases}$$

a) Compruébese que d es una distancia sobre $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Calcúlense $B(P(x), r)$, $B[P(x), r]$ y $S[P(x), r]$, con $P(x) = x + 5$ y $r > 0$.

c) Si A es el subconjunto de $\mathbb{R}_2[x]$ formado por aquellos polinomios no constantemente nulos que tienen 1 como raíz, y vemos $\mathbb{R}$ dentro de $\mathbb{R}_2[x]$ como el subconjunto de los polinomios constantes, calcúlense $\delta(A)$, $\delta(\mathbb{R})$ y $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R})$.

35. Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales en una variable. Dados $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, definimos la distancia entre ambos como sigue:

$$d(P,Q) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } P = Q \,, \\ 1/2 & , \text{ si } P \neq Q \text{ y } P - Q \text{ es constante} \,, \\ 1 + \operatorname{gr}(P - Q) & , \text{ si } P \neq Q \text{ y } \operatorname{gr}(P - Q) \geq 1 \,. \end{cases}$$

a) Compruébese que d es efectivamente una distancia sobre $\mathbb{R}[x]$.

b) Calcúlense $B(P(x), 1)$ y $B(Q(x), 2)$, con $P(x) = x$ y $Q(x) = x^2$.

c) Calcúlese la distancia entre $P(x) = x^2 - x + 1$ y el subconjunto A de todos los polinomios con coeficiente independiente y coeficiente cuadrático nulos.

d) ¿Es el subconjunto A del apartado anterior un subconjunto acotado en este espacio métrico?

36. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x_0 \in X$. Demuéstrese que, para cualquier $r > 0$, $\{x \in X : d(x, x_0) > r\}$ es un subconjunto abierto en (X, τ_d). (Es decir, toda bola cerrada es un cerrado en cualquier espacio métrico.)

Como consecuencia de esto, pruébense las dos proposiciones siguientes:

a) $\{x \in X : d(x, x_0) > 0\}$ es un subconjunto abierto en (X, τ_d).

b) La esfera de centro x_0 y radio r es un cerrado en (X, τ_d).

37. **La distancia 10-ádica.**

Dado un número entero $n \neq 0$, sea $10^{\mathrm{o}(n)}$ la mayor potencia de 10 que divide a n. Es decir, $\mathrm{o}(n)$ es el número de ceros en que termina la expresión digital de n en base 10.

Definimos la "norma"[2] 10-ádica sobre $\mathbb{N}$ como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \|n\| = \begin{cases} \frac{1}{10^{o(n)}} & , \text{ si } n \neq 0 , \\ 0 & , \text{ si } n = 0 . \end{cases} \end{array}$$

Obsérvese que $\|n\| > 0$, excepto para $n = 0$, y compruébese también que se verifica la siguiente desigualdad, conocida como *desigualdad ultramétrica*:

$$\|n + m\| \leq \text{máx}\{\|n\|, \|m\|\} .$$

Como la desigualdad ultramétrica implica la desigualdad triangular (es decir, se verifica $\|n+m\| \leq \|n\| + \|m\|$), la norma 10-ádica define una distancia (compruébese) sobre los números naturales:

$$d(n, m) := \|n - m\| .$$

En $(\mathbb{N}, d)$, demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) El diámetro de $\mathbb{N}$ es 1, y la bola abierta de centro 3 y radio $0,5$ es el conjunto

$$\{3 + 10\, a\}_{a \in \mathbb{N}} .$$

b) Todo "triángulo" en este espacio es isósceles; es decir, dados tres puntos cualesquiera $m, n, p \in \mathbb{N}$, se cumple

$$d(n,m) = d(n,p) \quad \text{o bien} \quad d(m,n) = d(m,p) \quad \text{o bien} \quad d(p,n) = d(p,m) .$$

c) El centro de una bola abierta es cualquiera de sus puntos; es decir, se cumple que

$$d(n,m) < r \quad \Rightarrow \quad B(n,r) = B(m,r) .$$

d) Dos bolas abiertas tienen intersección no vacía si, y sólo si, una de ellas está contenida en la otra.

e) Cualquier esfera es un abierto en este espacio métrico.

f) La bola de radio $\frac{1}{10^n}$ es unión disjunta de 10 bolas de radio $\frac{1}{10^{n+1}}$.

g) Toda bola abierta es un cerrado en este espacio métrico.
(**Indicación:** Hágase uso del ejercicio 36 y del apartado 37*e* anterior.)

38. Sea $\mathcal{C}([0,1])$ el conjunto de las funciones reales continuas definidas sobre $[0,1]$. Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, sea $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.

[2] Entrecomillada, pues $\mathbb{N}$ no es un espacio vectorial.

a) Compruébese que d es una distancia sobre $\mathcal{C}([0,1])$.

(Puede comprobarse, en realidad, que $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ es una norma sobre $\mathcal{C}([0,1])$ —que es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, ya que sumas de funciones continuas siguen siendo funciones continuas, y también lo son productos de números reales con funciones continuas—, de modo que d es la distancia inducida por dicha norma.)

(**Indicación:** Para la comprobación de la segunda propiedad de la distancia, concretamente de la implicación $[\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = 0] \Rightarrow [f = g]$, demuéstrese la siguiente implicación:

$$\int_0^1 |h(x)|dx = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = 0 \ , \ \forall x \in [0,1] \, .$$

Para ello, téngase en cuenta que la primitiva $H(t) = \int_0^t |h(x)|dx$, cuya derivada es, según el teorema fundamental del Cálculo Integral, $|h(x)|$, es una función constante —véase—.)

b) Calcúlese la bola abierta de centro $f(x) = x$ y radio 1.

c) ¿Es el subconjunto de todas las funciones constantes sobre $[0,1]$ acotado con esta distancia?

39. Sobre el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ consideremos la siguiente distancia:

$$d(A,B) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } A = B \, , \\ \frac{1}{n} & , \quad \text{si } A \neq B \, , \end{cases}$$

siendo n el menor número natural que pertenece a $A \cup B$, pero no a $A \cap B$.

a) Compruébese que, en efecto, d es una distancia sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(**Indicación:** Para probar la desigualdad triangular convendrá usar el siguiente resultado, que puede ser demostrado sin dificultad:

$$d(A,B) < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow A \cap \{1, \ldots, n\} = B \cap \{1, \ldots, n\} \, .)$$

b) Calcúlense bola abierta, bola cerrada y esfera de centro $\emptyset$ (el conjunto vacío) y radio 1.

c) Calcúlese el diámetro del siguiente subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 1 \notin A \text{ y } 2 \in A\} \, .$$

d) Calcúlese la distancia entre el subconjunto del apartado anterior y el siguiente: $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 1 \in A \text{ y } 2 \notin A\}$.

40. Sea $X \neq \emptyset$, y sea $\mathcal{B}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$. Dadas $f, g \in \mathcal{B}(X)$, consideremos $d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

(Puesto que la suma de funciones acotadas vuelve a ser una función acotada y el producto por un número real de una función acotada también es una función acotada, $\mathcal{B}(X)$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial. En realidad, la distancia que hemos definido viene inducida por la norma $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Puede comprobarse de modo bien sencillo —hágase— que, en efecto, $\|f\|$ define una norma sobre $\mathcal{B}(X)$, y, por tanto, d es distancia sobre este conjunto.)

a) Si $f(x) = 0$, para todo $x \in X$, calcúlese la bola abierta de centro f y radio 1.

b) (Si tomamos $X = \mathbb{N}$, el espacio métrico descrito —según ya hemos comentado, más que métrico: normado— suele denotarse l_∞, y tiene como elementos todas las sucesiones acotadas de números reales.)

Calcúlense la bola abierta, la bola cerrada y la esfera de centro la sucesión constantemente nula y radio 1 en l_∞.

Ejercicios de autoevaluación

Sólo una de las opciones indicadas es correcta para cada pregunta:

1. $d(x, y) = x^2 - y^2 \ \ldots$

   a) es distancia sobre $\mathbb{Z}$;

   b) es distancia sobre $\mathbb{N}$;

   c) es distancia sobre $[0, +\infty)$;

   d) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

2. Dadas dos bolas cerradas concéntricas en un espacio métrico, de radios $r_1 < r_2, \ldots$

   a) la bola de radio r_1 siempre está contenida estrictamente en la bola de radio r_2;

   b) la bola de radio r_2 puede estar contenida estrictamente en la bola de radio r_1;

   c) las bolas de radio r_1 y r_2 siempre serán disjuntas;

   d) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

3. En el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}}) \ \ldots$

   a) no hay subconjuntos acotados;

   b) sólo los subconjuntos unitarios son acotados;

   c) $\mathbb{N}$ no es un subconjunto acotado;

d) sólo son acotadas las bolas abiertas.

4. Dadas dos distancias, d_1 y d_2, sobre un conjunto no vacío X, si definimos

$$(d_1 - d_2)(x, y) := d_1(x, y) - d_2(x, y) \ \ldots$$

a) $d_1 - d_2$ nunca es distancia sobre X ;

b) $d_1 - d_2$ sólo es distancia sobre X si X es un conjunto unitario;

c) $d_1 - d_2$ puede ser distancia sobre X, sea cual sea este conjunto no vacío;

d) $d_1 - d_2$ sólo es distancia si d_2 es la distancia discreta.

5. Sobre $\mathbb{Z}$ ...

a) $d(n, m) = n + m$ es distancia;

b) $d(n, m) = |n - m|$ es distancia;

c) $d(n, m) = |n^2 - m^2|$ es distancia;

d) $d(n, m) = 1 + |n - m|$ es distancia.

6. Sea (X, d) un espacio métrico (con X un conjunto con más de un elemento), y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiendo $(\lambda \cdot d)(x, y) := \lambda\, d(x, y)$ ...

a) $\lambda \cdot d$ puede ser distancia sobre X, sea cual sea λ;

b) si λ no es estrictamente positivo, $\lambda \cdot d$ nunca será distancia sobre X;

c) basta con que λ sea mayor o igual que 0, para asegurar que $\lambda \cdot d$ es distancia sobre X;

d) $\lambda \cdot d$ sólo podría ser distancia si $X = \mathbb{R}$.

7. En $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, la distancia de $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ a $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ...

a) es 1;

b) es 0;

c) es 2;

d) no es un número real.

8. La distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$ coincide con la distancia discreta sobre ...

a) $\mathbb{N}$;

b) $\mathbb{Q}$;

c) cualquier conjunto formado por dos elementos;

d) $\{3, 4\}$.

9. En $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, el subconjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ...

a) tiene diámetro 0;
b) tiene el mismo diámetro que el subconjunto $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
c) no es acotado;
d) tiene diámetro 2.

10. Sobre $(0, +\infty)$ ...

a) existe alguna distancia que haga que el subconjunto $(\frac{1}{2}, +\infty)$ sea una bola abierta;
b) existe alguna distancia que haga que el subconjunto $\{1\}$ tenga diámetro 3;
c) existe alguna distancia que haga que el subconjunto $(3, 4)$ tenga diámetro 0;
d) se puede definir alguna métrica para la cual la distancia de $(1, 2)$ a $(3, 4)$ sea -1.

11. La intersección de dos bolas abiertas en un espacio métrico ...

a) siempre es otra bola abierta;
b) es otra bola abierta, siempre que esa intersección sea distinta del vacío;
c) es vacía, siempre que las bolas estén centradas en distintos puntos;
d) siempre es un subconjunto acotado.

12. La unión de dos bolas abiertas en un espacio métrico ...

a) no tiene por qué ser un subconjunto acotado;
b) siempre es otra bola abierta;
c) sólo es otra bola abierta, si ambas bolas están centradas en el mismo punto;
d) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

13. En $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, denotemos por B_1 la bola abierta de centro 0 y radio 2, y por B_2 la bola abierta de centro -4 y radio 1. Entonces el subconjunto $B_1 \cup B_2$ ...

a) tiene como diámetro la suma de los respectivos diámetros de B_1 y B_2;
b) tiene como diámetro la suma de los siguientes números: el diámetro de B_1, el diámetro de B_2 y la distancia entre 0 y -4;
c) tiene como diámetro 8;
d) tiene como diámetro 7.

14. Sea A un subconjunto de diámetro 3 en un espacio métrico (X, d). Dado otro subconjunto B de X, tal que $A \cap B \neq \emptyset$, ...

a) el diámetro de $A \cap B$ siempre es menor o igual que 3;
b) el diámetro de $A \cup B$ siempre es un número real;
c) el diámetro de $A \cap B$ es $+\infty$, si B no es acotado;

d) el diámetro de $A \cup B$ es 0, si B es un subconjunto unitario.

15. En $\mathbb{N}$ dotado de la distancia

$$d(n,m) = \begin{cases} n+m & , \text{ si } n \neq m, \\ 0 & , \text{ si } n = m, \end{cases}$$

dígase cuál de los siguientes números es mayor:

a) el diámetro del conjunto de divisores del número 6;

b) la distancia entre el conjunto de números pares y el conjunto de números impares;

c) el ínfimo de los radios r para los que se verifica que la bola abierta $B(3,r)$ no es un subconjunto unitario;

d) el supremo de los radios r para los que se verifica que la bola abierta $B(9,r)$ es un subconjunto unitario.

16. En $\mathbb{N}$ dotado de la distancia

$$d(n,m) = \begin{cases} \frac{1}{n}+\frac{1}{m} & , \text{ si } n \neq m, \\ 0 & , \text{ si } n = m, \end{cases}$$

dígase cuál de los siguientes números es menor:

a) el supremo de los radios r para los que se verifica que la bola abierta $B(10,r)$ es un subconjunto unitario;

b) el ínfimo de los radios r para los que se verifica que la bola abierta $B(1,r) = \mathbb{N}$;

c) el diámetro del subconjunto de los números pares;

d) la distancia entre 1 y 10^6.

17. En $\mathbb{N}$ dotado de la distancia

$$d(n,m) = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m} & , \text{ si } n \neq m, \\ 0 & , \text{ si } n = m, \end{cases}$$

dígase cuál de los siguientes números es menor:

a) el radio r tal que 10 pertenezca a la esfera $S(2,r)$;

b) el ínfimo de los radios r para los que se verifica que 1 pertenece a la bola cerrada $B[3,r]$;

c) el supremo de los radios r para los que se verifica que 2 no pertenece a la bola cerrada $B[5,r]$;

d) el diámetro del conjunto de números impares.

18. En $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, denotemos por S_1 la esfera de centro 0 y radio 1, y por S_2 la esfera de centro 3 y radio 2. Entonces el subconjunto $S_1 \cap S_2 \ldots$

a) es vacío;

b) tiene diámetro 1;

c) dista 1 del conjunto $\mathbb{N}$;

d) tiene diámetro 0.

19. En $(\mathbb{Q}, d_{\text{usual}})$, se verifica que ...

a) cualquier esfera está formada por dos puntos;

b) existe alguna esfera vacía;

c) existe alguna bola abierta formada sólo por su centro;

d) existe alguna bola cerrada no acotada.

20. En $\mathbb{Z}$ dotado de la distancia

$$d(p,q) = \begin{cases} |p| + |q| & , \text{ si } p \neq q, \\ 0 & , \text{ si } p = q, \end{cases}$$

dígase cuál de los siguientes números es menor:

a) el diámetro del subconjunto $\{-2,-1,0,1,2\}$;

b) el supremo de los radios r para los que se verifica que la bola abierta $B(5,r)$ sólo tiene un elemento;

c) la distancia de 0 a $\{2,3,4,5\}$;

d) el ínfimo de los radios r para los que se verifica que la bola cerrada $B[-3,r]$ tiene exactamente 2 elementos.

CAPÍTULO 2
ESPACIOS TOPOLÓGICOS

En este capítulo se introducen las nociones de topología y de espacio topológico. Esta estructura, que constituye una generalización de la de espacio métrico —pues todo espacio métrico es desde luego un espacio topológico— es ubicua en Matemáticas, y se encuentra presente en los desarrollos actuales del Análisis, la Geometría, el Álgebra o la Teoría de Números, por poner unos ejemplos.

A continuación se presentan ciertas definiciones básicas que son fundamentales para todos los desarrollos posteriores, como las de interior y clausura de un subconjunto, y se concluye el capítulo con el estudio de la convergencia de sucesiones en espacios topológicos arbitrarios.

2.1. Definición de topología. Abiertos y cerrados

Definición 2.1.1 *Una **topología** sobre un conjunto no vacío X es una colección τ de subconjuntos de X (es decir, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$) que verifique las siguientes propiedades:*

1. $X \in \tau$ *y* $\emptyset \in \tau$ *;*

2. $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$ *;*

3. $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \tau \Rightarrow \cup_{i\in I} G_i \in \tau$ *.*

*El conjunto X dotado de la topología τ recibe el nombre de **espacio topológico**. Los elementos de τ se llaman **abiertos** del espacio topológico (X,τ) .*

Ejemplos:

1. Dado un conjunto no vacío X , la *topología grosera* sobre X está constituida sólo por dos abiertos: $\tau_{\text{grosera}} = \{X, \emptyset\}$. Ésta es, obviamente, la topología con menor número de abiertos que se puede definir sobre cualquier conjunto.

2. En 1.3 vimos que toda métrica induce de modo natural una topología. Así, si (X, d) es un espacio métrico, también podemos considerarlo como un espacio topológico, (X, τ_d), donde
$$\tau_d = \{\text{uniones arbitrarias de bolas abiertas}\}.$$

   Los siguientes son casos particulares de espacios topológicos métricos especialmente interesantes:

   a) Un espacio topológico *discreto*: $(X, \tau_{\text{discreta}})$. La topología τ_{discreta} es la inducida por la métrica discreta. Puesto que, para cada $x \in X$, existen bolas abiertas con esta distancia centradas en x que están formadas sólo por el centro, es evidente que en un espacio topológico discreto cualquier subconjunto es abierto; es decir, $\tau_{\text{discreta}} = \mathcal{P}(X)$.

   b) Como ya dijimos también en 1.3, es un resultado conocido del Análisis que todas las métricas asociadas a normas de $\mathbb{R}^n$ inducen la misma topología, que recibe el nombre de *topología usual*.

   Concretamente, la topología usual sobre $\mathbb{R}$ es la topología inducida por la distancia usual: $\tau_{\text{usual}} = \tau_{d_{\text{usual}}}$, y, como las bolas abiertas para esta distancia son intervalos abiertos acotados, en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ los abiertos son uniones arbitrarias de intervalos de la forma (a, b), con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

   En $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$), podemos considerar la topología usual como la inducida por d_1, d_2 o d_∞, y en general por cualquier otra distancia asociada a una norma; es decir, los abiertos son uniones arbitrarias de bolas abiertas con cada una de esas métricas.

3. $(\mathbb{R}, \tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\})$ es un espacio topológico con cuatro abiertos.

4. Dado un conjunto infinito no numerable X, la topología *conumerable* sobre X se define como sigue:
$$\tau_{\text{conumerable}} = \{G \subseteq X : G^c (= X \setminus G) \text{ es finito o numerable}\} \cup \{X, \emptyset\}.$$

5. De modo análogo, sobre un conjunto infinito (numerable o no) X, podemos definir la topología *cofinita*:
$$\tau_{\text{cofinita}} = \{G \subseteq X : G^c (= X \setminus G) \text{ es finito}\} \cup \{X, \emptyset\}.$$

6. Sea $X = \{a, b\}$, y sea $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. El par (X, τ) es conocido como *espacio de Sierpinski.*

Definición 2.1.2 *Dos topologías, τ, τ', sobre un conjunto no vacío X son* ***comparables*** *si $\tau \subseteq \tau'$ (y en tal caso, lo denotaremos habitualmente $\tau \leq \tau'$) o $\tau' \subseteq \tau$ (igualmente, $\tau' \leq \tau$). Cuando $\tau \leq \tau'$, diremos que τ' es* ***más fina*** *que τ.*

Obsérvese que dos topologías sobre un conjunto no tienen por qué ser comparables. Basta pensar, por ejemplo, en las topologías $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $\tau' = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$.

Definición 2.1.3 *Un subconjunto $F \subseteq X$ se dice que es* **cerrado** *en (X, τ) si su complementario es abierto: $F^c \in \tau$.*

Propiedades de la familia de conjuntos cerrados en un espacio topológico.

Si denotamos por $\mathcal{C}$ la familia de todos los cerrados en un espacio topológico (X, τ), es muy fácil demostrar (sin más que usar las leyes de De Morgan) que se verifican las siguientes propiedades:

1. $X \in \mathcal{C}$ y $\emptyset \in \mathcal{C}$;
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$;
3. $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \cap_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Un simple vistazo a estas propiedades permite entender que también se podría haber definido una estructura topológica sobre un conjunto no vacío X señalando una cierta familia de subconjuntos como cerrados (es decir, diciendo que deben verificar precisamente las propiedades recién enunciadas), y, equivalentemente, se definirían los abiertos en un espacio topológico como aquellos subconjuntos cuyos complementarios son cerrados.

Se deja como ejercicio sencillo —pero necesario para la correcta comprensión de los conceptos— al lector la caracterización de los cerrados en los distintos espacios topológicos que han servido como ejemplos anteriormente.

2.2. Entornos de un punto

Definición 2.2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $x \in X$. Un subconjunto $V \subseteq X$ es un* ***entorno*** *de x si existe $G \in \tau$ tal que $x \in G \subseteq V$.*

Habitualmente denotaremos la familia de todos los entornos de x en (X, τ) como $\mathcal{V}(x)$.

A continuación caracterizamos los abiertos de un espacio topológico como aquellos subconjuntos que son entornos de cada uno de sus puntos.

Proposición 2.2.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $A \subseteq X$. A es abierto si, y sólo si, es entorno de todos sus puntos.*

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Todo abierto verifica de modo trivial la definición de entorno de cualquier punto suyo.
$(\Leftarrow)$ Sea A entorno de todos sus puntos. Entonces, para cada $x \in A$, existe un abierto G_x, tal que $x \in G_x \subseteq A$, y, por tanto, A es abierto (por la tercera propiedad de la

definición de topología, 2.1.1), ya que se puede expresar como la siguiente unión de abiertos (compruébese):

$$A = \cup_{x \in A} G_x \,.$$

■

Propiedades de la familia de entornos de un punto en un espacio topológico.

1. Para cada $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.

2. Dados $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

   Demostración: Puesto que tanto V_1 como V_2 son entornos de x, existen sendos abiertos G_1 y G_2 tales que $G_1 \subseteq V_1$ y $G_2 \subseteq V_2$. Como la intersección finita de abiertos vuelve a ser un abierto y $x \in G_1 \cap G_2 \subseteq V_1 \cap V_2$, ya hemos comprobado que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

   ■

3. Si $V \in \mathcal{V}(x)$ y $V \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{V}(x)$.

   Demostración: Como $V \subseteq W$, es obvio que el mismo abierto que podemos encontrar entre x y V, también está incluido en W, lo cual nos dice que W es entorno de x.

   ■

4. Dado $V \in \mathcal{V}(x)$, existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \in \mathcal{V}(y)$, para cada $y \in W$.

   Demostración: Como $V \in \mathcal{V}(x)$, existe $G \in \tau$ tal que $x \in G \subseteq V$. Basta tomar como el entorno W de x del enunciado el propio G.

   ■

Ejemplos:

1. En cualquier espacio topológico métrico (X, τ_d), un subconjunto $V \subseteq X$ será entorno de $x \in X$ si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq V$, según ya dijimos en la definición 1.3.1.

   En el caso particular de un espacio topológico discreto ello implica que los entornos de un punto son todos los subconjuntos que lo contienen.

   En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ son algunos entornos de 0 los siguientes conjuntos: $(-1, 1)$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup \{3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$.

   No son entornos de 0, por ejemplo, $[0, 1]$, $[0, +\infty)$ o $\mathbb{Q}$.

2. Directamente de la definición se obtiene que en un espacio topológico grosero el único entorno de cualquier punto es el total: $\mathcal{V}(x) = \{X\}$.

3. En $(\mathbb{R}, \tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\})$, los entornos de cualquier $q \in \mathbb{Q}$ serán todos los subconjuntos $V \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{Q} \subseteq V$; por otra parte, si $i \in \mathbb{I}$, $\mathcal{V}(i) = \{V \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{I} \subseteq V\}$.

4. Si consideramos $(X, \tau_{\text{conumerable}})$, con X un conjunto infinito no numerable, un subconjunto $V \subseteq X$ es entorno de $x \in X$ si existe $G \in \tau_{\text{conumerable}}$ tal que $V^c \subseteq G^c$. (Basta tomar complementarios en la inclusión $G \subseteq V$ que nos da la definición de entorno.)

   Como G es por fuerza no vacío ($x \in G$), G^c debe ser numerable, lo cual implica que V^c también lo es, y acabamos de demostrar que en este espacio topológico no hay más entornos de un punto que los abiertos que lo contienen.

   (Obsérvese la diferencia con lo que sucede en general, donde un entorno de un punto no tiene por qué ser abierto: $[-1, 1]$ es entorno de 0 en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$.)

5. Del mismo modo se argumenta para afirmar que, en X infinito dotado de la topología τ_{cofinita}, un entorno de un punto $x \in X$ es cualquier abierto $G \in \tau_{\text{cofinita}}$ tal que $x \in G$.

6. En el espacio de Sierpinski, los entornos de a son $\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, X\}$, mientras que el único entorno de b es el total: $\mathcal{V}(b) = \{X\}$.

2.3. Bases de abiertos y bases de entornos

La topología de un cierto espacio queda determinada mediante la definición de la colección completa de sus abiertos (o de sus cerrados), o, equivalentemente, dando la familia de todos los entornos de cada punto. Lo que sucede es que habitualmente es mucho más sencillo especificar colecciones más pequeñas (más manejables, por tanto) de subconjuntos del total que sirven para definir la misma topología.

Definición 2.3.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $x \in X$. Diremos que una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ de entornos de x es una* ***base de entornos*** *de x si, para cada $V \in \mathcal{V}(x)$, existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $U \subseteq V$.*

Fijada cierta base $\mathcal{B}(x)$ de entornos de x, llamaremos a los elementos de $\mathcal{B}(x)$ ***entornos básicos*** *de x.*

Definición 2.3.2 *Un espacio (X, τ) se dice* ***primero contable*** *(o que verifica el* ***primer axioma de numerabilidad****, o, abreviando, que es* ***IAN****) si, para cada $x \in X$, existe una base de entornos de x formada por una colección numerable de ellos: $\mathcal{B}(x) = \{V_n\}_{n \in \mathcal{N}}$.*

Ejemplos:

1. Un espacio topológico grosero siempre es primero contable, pues sólo existe una base de entornos para cada punto, y coincide con la familia de todos los entornos del punto: ya vimos anteriormente que el único entorno de cualquier punto es el total.

2. Si se observa detenidamente la quinta propiedad de las familias de bolas abiertas en un espacio métrico (X, d), que estudiamos en 1.2, será fácil entender que la familia $\mathcal{B}(x) = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ de bolas abiertas centradas en $x \in X$ es una colección de numerables entornos de x que constituyen base de entornos del punto.

   Es decir, todo espacio métrico es un espacio topológico primero contable.

   En el caso de un espacio discreto, $(X, \tau_{\text{discreta}})$, el ejemplo más sencillo de base de entornos de cualquier punto $x \in X$ es el siguiente: $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$.

3. $(X, \tau_{\text{conumerable}})$, con X infinito no numerable, *no* es un espacio primero contable.

   Para demostrarlo, supongamos que, para cierto $x \in X$, existe una base con una cantidad numerable de entornos, digamos $\mathcal{B}(x) = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces la siguiente colección formada por un único entorno también es una base de entornos de x: $\mathcal{B}'(x) = \{V\}$, con $V = \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

   (En primer lugar, volvamos a lo que hicimos en el ejemplo 4 de la sección 2.2. Allí probamos que todos los entornos —en particular, los básicos V_n que hemos escogido— son abiertos de nuestro espacio.

   Con ello es fácil observar que V es entorno de x, ya que $V^c = (\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n)^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n^c$ es numerable, por ser unión numerable de conjuntos numerables, y eso significa que $V \in \tau_{\text{conumerable}}$. Recordemos ahora que un abierto es entorno de todos sus puntos.

   Por otra parte, al ser V la intersección de todos los entornos básicos de $\mathcal{B}(x)$, es algo trivial que, dado cualquier entorno $W \in \mathcal{V}(x)$, $V \subseteq W$.)

   Como X es infinito no numerable y V^c es numerable, V es no numerable y podemos tomar otro punto $y \in V$, tal que $y \neq x$.

   Si ahora consideramos el subconjunto $V \setminus \{y\}$, hemos dado con un entorno de x que no contiene a V —obsérvese que, de nuevo, $V \setminus \{y\}$ es abierto en la topología conumerable, puesto que $(V \setminus \{y\})^c = V^c \cup \{y\}$—, en contradicción con el hecho de que la colección $\mathcal{B}'(x) = \{V\}$ fuera base de entornos de x.

   Un argumento similar, aunque no enteramente idéntico, sirve para comprobar que tampoco un conjunto infinito no numerable dotado de la topología cofinita es un espacio primero contable. La adaptación de lo anterior a este caso se propone como ejercicio al lector.

4. El espacio de Sierpinski es trivialmente primero contable. La única base de entornos posible para el punto b es, desde luego, $\mathcal{B}(b) = \{X\}$. Para el punto a existe una base con un único entorno: $\mathcal{B}(a) = \{\{a\}\}$.

Definición 2.3.3 *Una colección $\mathcal{B}$ de abiertos de un espacio topológico (X, τ) se dice **base** de la topología (o base de abiertos) si cualquier abierto puede escribirse como unión (arbitraria) de elementos de $\mathcal{B}$.*

*Los elementos de una base en un espacio topológico reciben el nombre de **abiertos básicos**.*

Definición 2.3.4 *Diremos que un espacio topológico (X, τ) es **segundo contable** (o que verifica el **segundo axioma de numerabilidad**, o que es **IIAN**) si existe alguna base de la topología formada por una colección numerable de abiertos.*

A partir de las definiciones dadas, se sigue trivialmente que, dada una base de abiertos $\mathcal{B}$ de un espacio topológico (X, τ), para cada $x \in X$ la siguiente colección es una base de entornos de x:

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}.$$

Y de este modo tan sencillo tenemos nuestro primer resultado que relaciona propiedades de espacios topológicos:

Proposición 2.3.5 *Todo espacio topológico segundo contable es primero contable.*

Observación importante:

No es cierto, sin embargo, que cualquier espacio primero contable sea segundo contable.

Ya vimos en el ejemplo 2 de esta misma sección que todo espacio métrico es primero contable. En particular, $(X, \tau_{\text{discreta}})$ (espacio topológico métrico, pues la topología discreta viene inducida por la métrica discreta) es un espacio primero contable que será segundo contable si, y sólo si, X es un conjunto finito o infinito numerable.

La demostración de lo que acabamos de afirmar es bien sencilla. Como en la topología discreta todo subconjunto es abierto, resulta que cualquier base de la topología en la que podamos pensar contiene por fuerza todos los subconjuntos unitarios (los que están constituidos por un único elemento). Es decir, que el cardinal de cualquier base de abiertos de la topología discreta es mayor o igual que el cardinal de X. Por tanto, X debe tener a lo sumo una cantidad infinita numerable de elementos para que sea segundo contable.

2.4. Metrizabilidad

Definición 2.4.1 *Un espacio topológico (X, τ) se dice **metrizable** si existe alguna métrica d sobre X que induzca su topología, es decir, tal que $\tau = \tau_d$.*

Definición 2.4.2 *Un espacio topológico (X, τ) es de **Hausdorff** (o **separado**, o T_2) si, para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen sendos entornos abiertos ($G, G' \in \tau$, tales que $x \in G$, $y \in G'$,) disjuntos ($G \cap G' = \emptyset$).*

Con lo visto hasta ahora, ya conocemos dos condiciones necesarias para que un espacio topológico sea metrizable:

Proposición 2.4.3 *Si un espacio topológico (X, τ) es metrizable, entonces:*

1. *(X, τ) es primero contable.*
2. *(X, τ) es de Hausdorff.*

Demostración:

La primera condición es obviamente necesaria, ya que cualquier espacio métrico es primero contable, según comentamos en la sección 2.3.

Que la segunda condición también es necesaria para la metrizabilidad de un espacio es algo que ya sabemos —aunque no con este lenguaje— desde que estudiamos la cuarta propiedad de las familias de bolas abiertas en un espacio métrico, en la sección 1.2.

■

Para poder dar condiciones necesarias y suficientes para la metrizabilidad de un espacio, hay que recurrir a resultados como el teorema de Nagata-Smirnov (consúltese, por ejemplo, [5, Teorema 40.3]), de un grado de dificultad superior a lo aquí expuesto, y fuera del nivel que se pretende alcanzar en este curso.

2.5. Subconjuntos notables

Definición 2.5.1 *Dado un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ), podemos definir los siguientes subconjuntos:*

1. *el **interior** de A:*

$$\mathring{A} = \{a \in A : \exists V \in \mathcal{V}(a) \,/\, V \subseteq A\}\,;$$

2. *la **clausura** (o **adherencia**, o **cierre**) de A:*

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x)\,,\; V \cap A \neq \emptyset\}\,;$$

3. *la **frontera** (o **borde**) de A:*

$$\mathrm{Fr}\,(A) = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x)\,,\; V \cap A \neq \emptyset \text{ y } V \cap A^c \neq \emptyset\} \;(= \overline{A} \cap \overline{A^c})\,;$$

4. *el **conjunto derivado** (o **conjunto de puntos de acumulación**) de A:*

$$A' = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x)\,,\; (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}\,;$$

5. *el **conjunto de puntos aislados** de A:*

$$\mathrm{Ais}\,(A) = \{a \in A : \exists V \in \mathcal{V}(a) \,/\, V \cap A = \{a\}\}\,.$$

(En ocasiones, por motivos de mayor claridad tipográfica, en lugar de $\mathring{A}$ y $\overline{A}$ escribiremos $\mathrm{Int}\,(A)$ y $\mathrm{Cl}\,(A)$, respectivamente.)

Es importante observar que las cinco definiciones anteriores son enteramente equivalentes a las que resultarían de usar entornos básicos (fijada cierta base de entornos para cada punto), en lugar de hablar, como hemos hecho aquí, en términos de toda la familia de entornos de cada punto. Esto será especialmente útil en el cálculo práctico de estos subconjuntos en un espacio topológico determinado.

Propiedades básicas.

El interior y la clausura están relacionados a través de las igualdades siguientes:

$$\mathrm{Cl}\,(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int}\,(A)\ ,\ \ \mathrm{Int}\,(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}\,(A)\,. \tag{2.5.1}$$

Atendiendo simplemente a la definición y las igualdades de 2.5.1, obtenemos las siguientes propiedades elementales que relacionan los subconjuntos notables entre sí:

a) $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

b) $\overline{A} = A' \sqcup \mathrm{Ais}\,(A)$.

c) $\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

2.5.1. Interior y clausura. Abiertos y cerrados

El interior y la clausura requieren un estudio algo más pormenorizado, pues ambos sirven para identificar de modo rápido si un subconjunto es abierto o cerrado.

Proposición 2.5.2 *Sea G un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Se verifica que $G \in \tau$ (G es abierto) si, y sólo si, $G = \overset{\circ}{G}$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Por lo dicho en la propiedad básica *a*), debemos comprobar la inclusión $G \subseteq \overset{\circ}{G}$.

Sea, así pues, $x \in G$. Por hipótesis, G es abierto, y sabemos que un abierto es entorno de todos sus puntos, luego el propio G es el entorno de x contenido en G que debíamos encontrar, según la definición de interior de un conjunto, para asegurarnos de que $x \in \overset{\circ}{G}$.
($\Leftarrow$) Puesto que $G \subseteq \overset{\circ}{G}$, para cualquier $x \in G$ existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subseteq G$.

La tercera propiedad de los entornos (en la sección 2.2) nos dice entonces que G es entorno de todos sus puntos, y, por tanto, según la proposición 2.2.2, abierto.

■

Lema 2.5.3 *Sean A, B subconjuntos de un espacio topológico (X, τ). Si $A \subseteq B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.*

Demostración:
Si $x \in \overset{\circ}{A}$, la definición de interior nos dice que existe un entorno V de x tal que $V \subseteq A$. Como, por hipótesis, $A \subseteq B$, el mismo entorno V sirve para afirmar que $x \in \overset{\circ}{B}$.

■

Teorema 2.5.4 *Dado un subconjunto G de un espacio topológico (X,τ), el interior de G es el máximo abierto contenido en G.*

Concretamente, se verifica la siguiente igualdad:

$$\overset{\circ}{G} = \bigcup_{\substack{A\in\tau \\ A\subseteq G}} A\,.$$

Demostración:

Comprobemos ambas inclusiones:

$(\subseteq)$ Si $x\in\overset{\circ}{G}$, sea V un entorno de x tal que $V\subseteq G$. Por definición de entorno de un punto, existe a su vez un abierto, digamos $G_x\in\tau$, tal que $G_x\subseteq V\subseteq G$, con lo que acabamos de demostrar que x pertenece a la unión de la derecha de la igualdad.

$(\supseteq)$ Sea $x\in A$, con A un abierto cualquiera contenido en G.

Por el lema 2.5.3, $\overset{\circ}{A}\subseteq\overset{\circ}{G}$. Como A es abierto por hipótesis, la proposición 2.5.2 nos dice que $A=\overset{\circ}{A}$, y, por tanto, $x\in\overset{\circ}{G}$.

■

Proposición 2.5.5 *Sea F un subconjunto de un espacio topológico (X,τ). Se verifica que F es cerrado si, y sólo si, $F=\overline{F}$.*

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Sólo hay que comprobar $\overline{F}\subseteq F$.

Sea $x\notin F$, es decir, $x\in F^c$. Como F es cerrado, F^c es abierto y, por tanto, entorno de todos sus puntos; en particular, F^c es entorno de x, luego existe $G\in\tau$, tal que $x\in G\subseteq F^c$.

Ese abierto G es un entorno de x cuya intersección con F es vacía, y con eso se demuestra que $x\notin\overline{F}$.

$(\Leftarrow)$ Comprobaremos que F^c es abierto, viendo que es entorno de todos sus puntos.

Sea, así pues, $x\in F^c$, es decir, $x\notin F$; como $F=\overline{F}$, $x\notin\overline{F}$.

Por tanto, por definición de clausura, existe un entorno V de x tal que $V\cap F=\emptyset$; dicho de otro modo, $V\subseteq F^c$, y por la tercera propiedad de los entornos (sección 2.2), F^c es entorno de x.

■

Lema 2.5.6 *Sean A,B subconjuntos de un espacio topológico (X,τ). Si $A\subseteq B$, entonces $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.*

Demostración:

Decir $x\in\overline{A}$ es equivalente, por definición, a decir que, sea cual sea $V\in\mathcal{V}(x)$, $V\cap A\neq\emptyset$. Como $A\subseteq B$, resulta que $V\cap B\neq\emptyset$. Es decir, $x\in\overline{B}$.

■

Teorema 2.5.7 *Dado un subconjunto F de un espacio topológico (X, τ), la clausura de F es el mínimo cerrado que contiene a F.*

En concreto, se cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{F} = \bigcap_{\substack{A \text{ cerrado} \\ F \subseteq A}} A .$$

Demostración:

Tenemos que comprobar ambas inclusiones:

($\subseteq$) Sea $x \in \overline{F}$, y sea A cualquier subconjunto cerrado tal que $F \subseteq A$. Por el lema 2.5.6 $x \in \overline{F} \subseteq \overline{A}$, y, puesto que A es cerrado, la proposición 2.5.5 asegura que $\overline{A} = A$, luego $x \in A$.

($\supseteq$) Si $x \notin \overline{F}$, encontraremos un subconjunto cerrado que contenga a F y deje fuera el punto x.

Como $x \notin \overline{F}$, existe $G \in \tau$, tal que $x \in G$ (G es un entorno abierto de x) y $G \cap F = \emptyset$; por tanto, $F \subseteq G^c$, y ya dimos con el cerrado que buscábamos: G^c es el complementario del abierto G, y por supuesto $x \notin G^c$.

■

En realidad, tan sólo tendríamos que haber probado la proposición 2.5.2, el lema 2.5.3 y el teorema 2.5.4, pues la proposición 2.5.5, el lema 2.5.6 y el teorema 2.5.7 pueden obtenerse de los primeros de modo elemental. Esto se debe a que interior y clausura son conceptos "duales" en un espacio topológico, como lo son los conceptos de abierto y cerrado. Duales en el sentido ya indicado en las igualdades 2.5.1.

A continuación estudiaremos otra manifestación de esta dualidad, expresada en términos de propiedades que verifican interior y clausura.

2.5.2. Operadores interior y clausura

Teorema 2.5.8 *En un espacio topológico (X, τ) el operador "tomar interior",*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & \overset{\circ}{A} \end{array},$$

verifica las siguientes propiedades:

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
2. $\overset{\circ}{X} = X$.
3. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
4. $\overset{\circ}{(A \cap B)} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Demostración:

1. Ya sabemos que forma parte de la misma definición de interior.

2. No hay más que aplicar la proposición 2.5.2 al abierto X.

3. Según sabemos por el teorema 2.5.4, $\overset{\circ}{A}$ es abierto. Usando la proposición 2.5.2, resulta entonces justamente lo que queremos probar.

4. Probemos las dos inclusiones, empezando por $(A \overset{\circ}{\cap} B) \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Para ello, como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, el lema 2.5.3 nos dice que $(A \overset{\circ}{\cap} B) \subseteq \overset{\circ}{A}$ y $(A \overset{\circ}{\cap} B) \subseteq \overset{\circ}{B}$, de donde se sigue la inclusión deseada.

   Ahora, para comprobar la otra inclusión, tengamos en cuenta que según el teorema 2.5.4 tanto $\overset{\circ}{A}$ como $\overset{\circ}{B}$ son abiertos contenidos, respectivamente, en A y en B; por tanto, su intersección también es un abierto, que verifica $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq A \cap B$. Volviendo a usar el teorema 2.5.4, como $(A \overset{\circ}{\cap} B)$ es el máximo abierto contenido en $A \cap B$, obtenemos la inclusión $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq (A \overset{\circ}{\cap} B)$.

■

El resultado que probamos a continuación cierra el círculo. Si, dada una topología sobre un conjunto X, es posible hablar del interior de cualquier subconjunto de X, y tal interior verifica las propiedades enunciadas, y además (proposición 2.5.2) los abiertos de la topología son justamente los subconjuntos que coinciden con su interior, también podemos plantearnos qué sucedería si empezáramos a la inversa.

Dado un conjunto no vacío X, podemos definir una aplicación, digamos $\bullet$, sobre $\mathcal{P}(X)$ que a cada subconjunto de X haga corresponder otro, y que verifique las mismas propiedades que comprobamos para el interior en un espacio topológico. Sucede que, si ahora decimos que son abiertos (aquí viene la definición de topología) los subconjuntos de X que coinciden con su imagen por $\bullet$, cuando calculemos el interior de un subconjunto A nos saldrá justamente la imagen por $\bullet$ de A.

Teorema 2.5.9 *Sea X un conjunto no vacío, y consideremos una aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\bullet} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & \overset{\bullet}{A} \end{array},$$

que verifique las siguientes propiedades:

1. $\overset{\bullet}{A} \subseteq A$.

2. $\overset{\bullet}{X} = X$.

3. $\overset{\bullet}{\overset{\bullet}{A}} = \overset{\bullet}{A}$.

4. $(A \overset{\bullet}{\cap} B) = \overset{\bullet}{A} \cap \overset{\bullet}{B}$.

En estas condiciones,

$$\tau = \{G \subseteq X : G = \overset{\bullet}{G}\}$$

es una topología sobre X. Además, el interior de cualquier subconjunto de X con esta topología es, justamente, $\overset{\bullet}{A}$.

Demostración:

Comprobemos que τ verifica todos los axiomas de una topología (2.1.1):

1. Por la segunda propiedad de $\bullet$, $X = \overset{\bullet}{X}$, luego $X \in \tau$. Por la primera propiedad, $\overset{\bullet}{\emptyset} \subseteq \emptyset$, luego $\overset{\bullet}{\emptyset} = \emptyset$, y por tanto $\emptyset \in \tau$.

2. Dados $G_1, G_2 \in \tau$ (por tanto, $G_1 = \overset{\bullet}{G_1}$ y $G_2 = \overset{\bullet}{G_2}$), podemos escribir:

$$G_1 \cap G_2 = \overset{\bullet}{G_1} \cap \overset{\bullet}{G_2} \overset{\text{propiedad } 4}{=} \overset{\bullet}{(G_1 \cap G_2)},$$

con lo que $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Antes de demostrar el tercer axioma de topología, comprobemos que $\bullet$ verifica la siguiente propiedad adicional de monotonía:

$$A \subseteq B \Rightarrow \overset{\bullet}{A} \subseteq \overset{\bullet}{B}. \quad (\diamondsuit)$$

Veámoslo:

Por la primera propiedad, $\overset{\bullet}{A} \subseteq A$; por tanto, $\overset{\bullet}{A} \subseteq B$ y tenemos:

$$\overset{\bullet}{A} = \overset{\bullet}{A} \cap B.$$

Tomando $\bullet$ en ambos miembros de esa igualdad de conjuntos, nos queda la siguiente igualdad:

$$\overset{\bullet}{\overset{\bullet}{A}} = \overset{\bullet}{(\overset{\bullet}{A} \cap B)} \overset{\text{propiedad } 4}{=} \overset{\bullet}{\overset{\bullet}{A}} \cap \overset{\bullet}{B}.$$

Si ahora sustituimos $\overset{\bullet}{\overset{\bullet}{A}}$ por $\overset{\bullet}{A}$, atendiendo a la propiedad 3, obtenemos:

$$\overset{\bullet}{A} = \overset{\bullet}{A} \cap \overset{\bullet}{B},$$

es decir, $\overset{\bullet}{A} \subseteq \overset{\bullet}{B}$.

Probemos ya que τ cumple el tercer axioma de topología. Para $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, hemos de concluir que $\cup_{i \in I} G_i \in \tau$, es decir, $\overset{\bullet}{(\cup_{i \in I} G_i)} = \cup_{i \in I} G_i$.

La primera propiedad de $\bullet$ nos da la siguiente inclusión:

$$\overset{\bullet}{(\cup_{i \in I} G_i)} \subseteq \cup_{i \in I} G_i.$$

Para la otra, como, para cada $\alpha \in I$, $G_\alpha \subseteq \cup_{i \in I} G_i$, la propiedad de monotonía $\diamondsuit$ permite afirmar:

$$\overset{\bullet}{G_\alpha} \subseteq \overset{\bullet}{(\cup_{i \in I} G_i)}.$$

Luego:

$$\cup_{i\in I} G_i \overset{\{G_i\}_{i\in I}\subseteq\tau}{=} \cup_{i\in I} \overset{\bullet}{G_i} \subseteq \overset{\bullet}{(\cup_{i\in I} G_i)} \ .$$

Ya sólo nos falta comprobar que $\overset{\bullet}{A}$ coincide con el interior de A en la topología τ (lo denotaremos $\overset{\circ}{A}$).

Según el teorema 2.5.4, $\overset{\circ}{A}$ es el máximo abierto contenido en A. Recordemos que la segunda propiedad de $\bullet$ nos dice:

$$\overset{\bullet}{\overset{\bullet}{A}} = \overset{\bullet}{A} \ .$$

Por tanto $\overset{\bullet}{A} \in \tau$, y, puesto que $\overset{\bullet}{A} \subseteq A$ (primera propiedad), ya tenemos la siguiente inclusión:

$$\overset{\bullet}{A} \subseteq \overset{\circ}{A} \ .$$

Probemos la otra inclusión:

$$\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\bullet}{A} \ .$$

Sea $a \in \overset{\circ}{A}$. Por definición, existe un entorno G de a (que podemos considerar abierto, es decir, $G = \overset{\bullet}{G}$) tal que:

$$a \in \overset{\bullet}{G} \subseteq A \,,$$

de donde, tomando interior a ambos miembros de la inclusión, obtenemos que $a \in \overset{\bullet}{A}$, como deseábamos.:

$$a \in \overset{\bullet}{G} \overset{\text{propiedad } 3}{=} \overset{\bullet}{\overset{\bullet}{G}} \overset{\text{monotonía } (\diamondsuit)}{\subseteq} \overset{\bullet}{A} \ .$$

■

Usando las dos igualdades de 2.5.1 y el teorema 2.5.8, es muy fácil redactar (escríbase) la demostración del teorema siguiente:

Teorema 2.5.10 *En un espacio topológico (X,τ), el operador "tomar clausura",*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\overline{\ \ }} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \ ,$$

verifica las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq \overline{A}$.
2. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Además, igual que hicimos para un operador interior, se puede demostrar (hágase como ejercicio) el siguiente resultado.

Teorema 2.5.11 *Sea X un conjunto no vacío, y consideremos una aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \stackrel{\widehat{}}{\longrightarrow} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & \widehat{A}, \end{array}$$

que verifique las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq \widehat{A}$.

2. $\widehat{\emptyset} = \emptyset$.

3. $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$.

4. $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$.

En estas condiciones, $\tau = \{G \subseteq X : \widehat{G^c} = G^c\}$ es una topología sobre X. Además, la clausura de cualquier subconjunto $A \subseteq X$ con esta topología coincide con $\widehat{A}$.

2.6. Subespacios topológicos

Definición 2.6.1 *Sea Y un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Sobre Y podemos definir la* ***topología de subespacio*** *inducida por τ:*

$$\tau_Y = \{G \subseteq Y : \exists \widetilde{G} \in \tau \ / \ \widetilde{G} \cap Y = G\}.$$

El par (Y, τ_Y) recibe el nombre de ***subespacio topológico*** *de (X, τ).*

(En el tema 3, caracterizaremos la topología de subespacio como la mínima topología sobre Y que hace la inclusión natural $i : Y \hookrightarrow (X, \tau)$ continua.)

En un subespacio topológico $(Y, \tau_Y) \subseteq (X, \tau)$, los cerrados son intersecciones de cerrados de (X, τ) con Y; los entornos (si se quiere, básicos) de un punto $y \in Y$ son intersecciones de entornos (respectivamente, básicos) de y en (X, τ) con Y; la clausura de $A \subseteq Y$ en (Y, τ_Y) coincide con la intersección de la clausura de A en (X, τ) con Y.

Sin embargo, no es cierto que el interior de $A \subseteq Y$ en (Y, τ_Y) sea la intersección con Y del interior de A en (X, τ). Tampoco es válida la afirmación para la frontera. (Piénsese por qué.)

Ejemplos:

1. La topología de subespacio inducida por la topología usual de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{N}$ es la topología discreta, ya que cualquier subconjunto unitario $\{n\}$ (con $n \in \mathbb{N}$) puede escribirse como la intersección de un abierto de la topología usual sobre $\mathbb{R}$ con $\mathbb{N}$:

$$\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{N}.$$

2. Cualquier subespacio topológico de un espacio topológico grosero es un espacio topológico grosero.

   En efecto, sea $(Y, \tau_{\text{grosera}_Y})$ subespacio topológico de $(X, \tau_{\text{grosera}})$. Como los únicos abiertos en τ_{grosera} son X y $\emptyset$, y sus intersecciones con Y son, respectivamente, Y y $\emptyset$, entonces:

$$\tau_{\text{grosera}_Y} = \tau_{\text{grosera}}\,.$$

3. Cualquier subespacio topológico de un espacio topológico discreto es un espacio topológico discreto.

   Sea $(Y, \tau_{\text{discreta}_Y})$ un subespacio topológico de un espacio discreto, $(X, \tau_{\text{discreta}})$. Puesto que un abierto en τ_{discreta} es cualquier subconjunto de X, y la intersección de cualquier subconjunto de X con Y nos da cualquier subconjunto de Y, entonces:

$$\tau_{\text{discreta}_Y} = \tau_{\text{discreta}}\,.$$

2.7. Convergencia de sucesiones en un espacio topológico

Definición 2.7.1 *Sean (X, τ) un espacio topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X y $x_0 \in X$. Diremos que x_0 es un **límite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** x_0) si, para cada entorno V de x_0, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos pertenecen a V:*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \exists \nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow x_n \in V\,.$$

Observaciones:

1. Nótese que el artículo que acompaña la palabra "límite" en la definición es "un", y no "el". Es decir, una sucesión convergente en un espacio topológico no tiene, en general, límite único.

2. La anterior observación ilustra por qué la notación que emplearemos para afirmar que x_0 es límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la siguiente:

$$x_0 \in \text{lím}_{n\in\mathbb{N}}\,(x_n)\,.$$

3. Como con otros conceptos que se definen en términos de entornos, la definición puede expresarse de modo equivalente si decimos que cada entorno *básico* de x_0 debe contener todos los términos de la sucesión, salvo a lo sumo finitos.

Ejemplos:

1. Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico grosero $(X, \tau_{\text{grosera}})$ converge a cualquier $x \in X$, pues no hay más entornos de x que X.

2. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Puesto que la familia de todos los intervalos abiertos centrados en x_0 constituye una base de entornos de x_0 en la topología usual, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ si, y sólo si:
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\,,$$
es decir, si y sólo si:
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon\,.$$

3. Generalicemos lo hecho en el ejemplo anterior para cualquier espacio métrico. Sean (X, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $x_0 \in X$. Como una base de entornos de x_0 es $\mathcal{B}(x_0) = \{B_d(x_0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 si, y sólo si:
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow x_n \in B_d(x_0, \varepsilon)\,,$$
o equivalentemente, si y sólo si:
$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon\,,$$
es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$ en (X, d) si, y sólo si, $(d(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$.

4. Como ejemplo concreto de espacio métrico, estudiemos cómo es la convergencia de sucesiones en un espacio topológico discreto, aplicando lo visto hasta ahora. Sean, pues, $(X, \tau_{\text{discreta}})$ un espacio topológico discreto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $x_0 \in X$.

   Según el ejemplo anterior, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerá a x_0 si, y sólo si, la sucesión de las distancias $(d_{\text{discreta}}(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. En la sucesión $(d_{\text{discreta}}(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ sólo pueden aparecer ceros y unos, y una sucesión así sólo puede converger a 0 en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ si, y sólo si, a partir de un término la sucesión es constantemente 0.

   Es decir, teniendo en cuenta cómo está definida la métrica discreta, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$ en $(X, \tau_{\text{discreta}})$ si, y sólo si:
$$\exists\nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow x_n = x_0\,.$$
   esto es, si existe un término de la sucesión a partir del cual todos los demás términos son constantemente x_0.

   (Diremos que una sucesión que verifique esto en cualquier espacio topológico es *eventualmente constante*.)

   Así pues, en un espacio topológico discreto una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 si, y sólo si, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante x_0.

   Como consecuencia de lo hecho, resulta que cualquier sucesión convergente en un espacio discreto tiene límite único. (Algo que volveremos a ver más adelante de modo más general.)

5. Consideremos $(X \text{ no numerable}, \tau_{\text{conumerable}})$. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión y $x_0 \in X$.

   Vimos en el cuarto ejemplo de la sección 2.2 que todo entorno de un punto en un espacio dotado de la topología conumerable es abierto. Por tanto, un entorno de x_0 es $X \setminus \{x_n : x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}\}$.

   Un entorno así sólo contendrá todos los términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, salvo a lo sumo finitos, si hay como máximo finitos términos distintos de x_0. Dicho de otro modo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, si, y sólo si:

$$\exists \nu \in \mathbb{N} : n \geq \nu \Rightarrow x_n = x_0 .$$

   De nuevo, hemos vuelto a dar con las sucesiones eventualmente constantes: una sucesión en un espacio conumerable es convergente a $x_0 \in X$ si, y sólo si, la sucesión es eventualmente constante x_0.

Por tanto, si tomamos por ejemplo $X = \mathbb{R}$, la convergencia de sucesiones es exactamente la misma, consideremos la topología discreta o la topología conumerable. Hemos puesto como ejemplos, pues, dos espacios topológicos muy distintos (uno es métrico, y, por tanto, primero contable; el otro, no —recuérdese lo hecho en el tercer ejemplo de la sección 2.3), donde no hay más sucesiones convergentes que las constantes a partir de un término, y donde, por tanto, cualquier sucesión convergente tiene límite único.

Proposición 2.7.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico T_2. Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es convergente, entonces tiene límite único.*

Demostración:

Supongamos que existen dos elementos distintos en X, digamos $x \neq y$, que son límites de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por definición de límite, para cada entorno $U \in \mathcal{V}(x)$, debe existir $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq \nu_1$, entonces $x_n \in U$.

Igualmente, puesto que y también es límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dado cualquier $V \in \mathcal{V}(y)$, debe existir $\nu_2 \in \mathbb{N}$, de modo que, para $n \geq \nu_2$, $x_n \in V$.

Entonces, si $n \geq \nu = \text{máx}\{\nu_1, \nu_2\}$, resulta que $x_n \in U \cap V$.

Es decir, no hay modo de encontrar sendos entornos disjuntos de x e y; luego (X, τ) no es T_2.

■

Sin embargo, no es cierto que todo espacio en el que no haya más sucesiones convergentes que las de límite único tenga que ser de Hausdorff, como queda ilustrado en el ejemplo 5: ningún espacio topológico conumerable es T_2, ya que no existen en un espacio así abiertos disjuntos distintos del vacío; en efecto, si tomamos $G_1, G_2 \in \tau_{\text{conumerable}}$, de modo que $G_1 \neq \emptyset$ y $G_2 \neq \emptyset$, entonces G_1^c y G_2^c deben ser subconjuntos numerables; por tanto, $(G_1 \cap G_2)^c = G_1^c \cup G_2^c$ es numerable, luego $G_1 \cap G_2$ no puede ser vacío, pues su complementario (si $G_1 \cap G_2$ fuera vacío, su complementario sería X) es numerable.

Veremos un recíproco parcial de la proposición 2.7.2 en el ejercicio 26.

Definición 2.7.3 *Sean* (X,τ) *un espacio topológico,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* X *y* $x_0 \in X$ *. Diremos que* x_0 *es un* ***valor de adherencia*** *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si cada entorno* V *de* x_0 *contiene infinitos términos de la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \exists n_k \geq k : x_{n_k} \in V\,.$$

Del mismo modo que en la definición de límite, en la definición de valor de adherencia podemos trabajar con todos los entornos básicos, fijada una base de entornos de x_0.

Un simple vistazo atento a las definiciones 2.7.1 y 2.7.3 nos lleva a poder afirmar la siguiente proposición:

Proposición 2.7.4 *Si* x_0 *es límite de una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio topológico* (X,τ) *, entonces también es valor de adherencia.*

Obviamente, el recíproco no es cierto. Basta pensar en el siguiente ejemplo de sucesión en $(\mathbb{R},\tau_{\text{usual}})$:

$$(1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots)\,,$$

es decir, la sucesión que va alternando unos y doses. Tanto 1 como 2 son valores de adherencia, pues —hagámoslo para 1, y se razonará igualmente para 2— cualquier entorno de 1 contiene infinitos términos de la sucesión: justamente los impares, que son todos iguales a 1.

Sin embargo, es suficiente tomar el intervalo $(0,2)$ para dar con un entorno de 1 que deja fuera de él infinitos términos de la sucesión, justamente los pares, que son todos los doses. Y debido a esto 1 no puede ser límite de la sucesión. Razonando de análoga manera, demostraríamos que 2 tampoco es límite.

Se verifica el siguiente resultado, que puede facilitar los cálculos a la hora de mirar qué valores de adherencia tiene una sucesión cualquiera en un espacio topológico concreto:

Proposición 2.7.5 *Sea* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (X,\tau)$ *. Se cumple la siguiente igualdad entre subconjuntos de* X *:*

$$\{\text{Valores de adherencia de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \cap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}\,,$$

donde $A_k = \{x_n : n \geq k\}$ *.*

Demostración:

Un elemento $x_0 \in X$ es valor de adherencia, por definición, si, y sólo si:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \exists n_k \geq k : x_{n_k} \in V;\quad (*)$$

como ese término x_{n_k} de la sucesión es un elemento del conjunto A_k, $(*)$ resulta equivalente a $V \cap A_k \neq \emptyset$, para cualquier $V \in \mathcal{V}(x_0)$, es decir, equivalente a $x_0 \in \overline{A_k}$.

Puesto que $(*)$ se verifica para cualquier $k \in \mathbb{N}$, que x_0 sea valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a que x_0 pertenezca a $\cap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$.

∎

Ejemplos:

1. Por la proposición 2.7.4, y según lo expuesto en el primero de los ejemplos posteriores a la definición 2.7.1, en un espacio topológico grosero $(X, \tau_{\text{grosera}})$, el conjunto de valores de adherencia de cualquier sucesión es X.

2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (X,\tau)$ una sucesión en la que un cierto elemento de X aparece como término, repetido infinitas veces; es decir, existe $x_0 \in X$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \exists n_k \geq k : x_{n_k} = x_0\,.$$

   En tal situación, cada entorno V de x_0 contiene, como poco, los infinitos términos de la sucesión donde aparece x_0 y, por tanto, x_0 es valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Sea X un conjunto infinito no numerable dotado de la topología $\tau_{\text{conumerable}}$, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

   Si $x_0 \in X$ aparece como término de la sucesión repetido infinitas veces, entonces el ejemplo anterior garantiza que x_0 es un valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Si, por el contrario, x_0 no aparece repetido infinitas veces en la sucesión, entonces $X\setminus\{x_n : x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}\}$ es un entorno de x_0 que contiene exclusivamente los finitos términos de la sucesión que puedan ser iguales a x_0, y por tanto es un entorno de x_0 que no contiene infinitos términos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, luego x_0 no sería valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Es decir, el conjunto de valores de adherencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será vacío si no hay ningún término que aparezca repetido infinitas veces. En otro caso, el conjunto de valores de adherencia estará formado por todos aquellos elementos de X que aparezcan repetidos como términos de la sucesión infinitas veces.

Problemas

1. Encuéntrense todas las topologías posibles sobre un conjunto de tres elementos.

2. Sea $\emptyset \neq A \subsetneq X$.

   a) Demuéstrese que la familia de todos los subconjuntos de X que contienen al subconjunto A, junto con el conjunto vacío $\emptyset$, constituye una topología sobre X.
   Calcúlese la clausura de cualquier subconjunto de X.

   b) Demuéstrese que la familia de todos los subconjuntos de X contenidos en A, junto con el total X, es una topología sobre X.
   Calcúlese el interior de cualquier subconjunto de X.

c) Para cada $H \subseteq X$ no vacío, sean $\overline{H} = H \cup A$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Compruébese que $H \mapsto \overline{H}$ es un operador clausura, y discútase qué topología resulta para cada elección de A.

¿Qué condiciones hay que imponer sobre el subconjunto A para que el espacio topológico correspondiente sea de Hausdorff?

3. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean A, B subconjuntos de X. Demuéstrense:

   a) A es abierto si, y sólo si, $\mathrm{Fr}\,(A) \cap A = \emptyset$.
   b) A es cerrado si, y sólo si, $\mathrm{Fr}\,(A) \subseteq A$.
   c) A es abierto y cerrado simultáneamente si, y sólo si, $\mathrm{Fr}\,(A) = \emptyset$.
   d) Si A es abierto o cerrado, entonces $\mathrm{Fr}\,(\overset{\circ}{A}) = \emptyset$. ¿Es cierto el recíproco?
   e) $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A)) \subseteq \mathrm{Fr}\,(A)$.
   f) El conjunto derivado del derivado no vuelve ni siquiera a estar incluido necesariamente en el derivado: $(A')' \not\subseteq A'$.
   g) Si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$.
   h) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
   i) $A' = \emptyset$ si, y sólo si, A es cerrado y su topología inducida como subespacio, τ_A, es la discreta.

4. Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) es *denso* si $\overline{A} = X$. Pruébense:

   a) A es denso en X si, y sólo si, A tiene intersección no vacía con todos los abiertos no vacíos de (X, τ).
   b) Si A es denso en X y $G \in \tau$, entonces se verifica $\overline{A \cap G} = \overline{G}$. ¿Qué ocurre si quitamos alguna de las hipótesis anteriores?

5. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subseteq X$. Pruébense:

   a) $\overline{A} = \{x \in X : \mathrm{dist}\,(x, A) = 0\}$.
   b) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : \mathrm{dist}\,(x, A^c) > 0\}$.
   c) $\mathrm{dist}\,(x, A) = \mathrm{dist}\,(x, \overline{A})$.
   d) $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.
   e) Si existe un número real $\alpha > 0$ tal que $d(x, y) \geq \alpha$ para todo par de puntos $x \neq y$ de A, entonces A es cerrado.
   f) La clausura de una bola abierta está contenida en la correspondiente bola cerrada:

$$B(x_0, r) \subseteq \overline{B(x_0, r)} \subseteq B[x_0, r].$$

   Pónganse ejemplos que muestren las cuatro situaciones posibles.

$$(B(x_0, r) = \overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]\ , \qquad B(x_0, r) \subsetneq \overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]\ , \text{ etc.})$$

6. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ calcúlense el interior, la clausura, la frontera, el conjunto derivado y el conjunto de puntos aislados de los subconjuntos unitarios, de los finitos, de los infinitos numerables y de los infinitos no numerables.

   ¿Existe algún subconjunto de $\mathbb{Q}$ o de $\mathbb{I}$ que sea abierto? ¿Y cerrado?

7. Se considera en $\mathbb{Q}$ la topología usual, es decir, la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

   Encuéntrense en este espacio topológico subconjuntos que sean a la vez abiertos y cerrados. ¿Podemos deducir entonces de este hecho que la topología usual de $\mathbb{Q}$ es la topología discreta?

8. Consideremos $(\mathbb{N}, \tau)$, donde τ es la siguiente topología:

$$\tau = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n\}, \ldots\}.$$

   a) Demuéstrese que τ es, en efecto, una topología sobre $\mathbb{N}$.

   b) Calcúlense los conjuntos cerrados en este espacio.

   c) ¿Cómo son los subconjuntos densos en $(\mathbb{N}, \tau)$?

9. Sea $(\mathbb{N}, \tau)$, donde τ es la siguiente topología:

$$\tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : n \in G,\ \text{y } m \text{ es divisor de } n \Rightarrow m \in G\}.$$

   a) Demuéstrese que τ es una topología sobre $\mathbb{N}$.

   b) Propónganse sendas bases de entornos para los puntos 67 y 12.

   c) Calcúlense interior, clausura, frontera, conjunto de puntos de acumulación y conjunto de puntos aislados de los siguientes conjuntos:

$$\{2n : n \in \mathbb{N}\},\ \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\},\ \{n : n \leq 19\} \text{ y } \{n : n \text{ es primo}\}.$$

10. Consideremos $\mathbb{N}$ dotado de la siguiente topología:

$$\tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : p \in G,\ \text{y } p \text{ es impar} \Rightarrow p+1 \in G\}.$$

   a) Compruébese que τ es topología sobre $\mathbb{N}$.

   b) Encuéntrese una base de entornos para cada punto.

   c) Encuéntrese una base de la topología.

   d) Calcúlense interior, clausura, frontera, conjunto de puntos de acumulación y conjunto de puntos aislados de los siguientes conjuntos:

$$\{1,2\},\ \{2n : n \in \mathbb{N}\} \text{ y } \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

11. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $\mathcal{B}$ una base de τ. Pruébese que, si $Y \subseteq X$, entonces $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es base de τ_Y.

12. **Propiedades hereditarias.**

    Una propiedad P predicable de espacios topológicos se dice *hereditaria* si, siempre que un espacio topológico (X, τ) verifique la propiedad P, cualquier subespacio topológico suyo (Y, τ_Y) también verifica P.

    a) Dedúzcase del ejercicio anterior que ser segundo contable es una propiedad hereditaria. (Es decir, todo subespacio de un espacio segundo contable es segundo contable.)

    (Razonando de manera idéntica con las bases de entornos de cada punto, se prueba que los subespacios de espacios primero contables son primero contables. Hágase.)

    b) Demuéstrese que la metrizabilidad es una propiedad hereditaria.

    c) Compruébese que ser T_2 es también una propiedad hereditaria.

13. Sea $(X, \tau_{\text{cofinita}})$. Discútase si este espacio es primero contable o segundo contable dependiendo del cardinal de X (finito, infinito numerable o infinito no numerable).

    (La topología cofinita es:

    $$\tau_{\text{cofinita}} = \{G \subseteq X : G^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}\,.)$$

14. **Caracterizaciones de base de una topología.**

    Sea $X \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

    a) Pruébese que $\mathcal{B}$ es base para una topología τ sobre X si, y sólo si, $\mathcal{B}$ recubre X (es decir, $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$) y para cada punto $x \in G$, con $G \in \tau$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq G$.

    b) $\mathcal{B}$ es base de alguna topología sobre X (en concreto, de la formada por las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$) si, y sólo si, $\mathcal{B}$ recubre X y además verifica la condición siguiente: dados dos elementos cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y dado un punto $x \in B_1 \cap B_2$, existe algún $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

15. Utilícese alguna de las caracterizaciones expuestas en el ejercicio anterior, para responder a las siguientes cuestiones:

    a) Si X es un conjunto infinito, ¿sirve la familia de todos sus subconjuntos infinitos como base de alguna topología sobre X? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es esa topología?

    b) ¿Es la familia de todos los rectángulos del plano una base de alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$? ¿Y la de todos los rectángulos sin lados? Si la respuesta a alguna de las dos preguntas es afirmativa, dígase cuál es la topología correspondiente.

16. Pruébese que, en general, no existe un máximo cerrado contenido en un subconjunto de un espacio topológico.

17. Dado cualquier subconjunto de un espacio topológico, ¿existe siempre el mínimo abierto que lo contiene?

18. Sea (X, τ) un espacio topológico. Demuéstrese que son equivalentes las tres siguientes propiedades:

    a) Para cada $x \in X$, existe su entorno mínimo. (Es decir, existe un entorno $V \in \mathcal{V}(x)$, tal que $V \subseteq U$, para cualquier $U \in \mathcal{V}(x)$.)

    b) La intersección arbitraria de abiertos es un abierto.

    c) La unión arbitraria de cerrados es un cerrado.

19. **Topología del orden parcial.**

    Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con más de un punto. Para cada punto $a \in X$ llamaremos *cono superior* asociado a a al subconjunto $\{x \in X : a \leq x\}$.

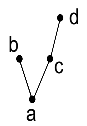

Figura 2.1

    a) Demuéstrese que la colección de los conos superiores asociados a todos los puntos de X, es decir,

    $$\mathcal{B} = \{\{x \in X : a \leq x\} : a \in X\},$$

    es una base de una topología sobre X, que llamaremos *topología del orden parcial*, y denotaremos $\tau_{\leq}$.

    b) Demuéstrese que un unitario $\{x_0\} \subset X$ es abierto en $\tau_{\leq}$ si, y sólo si, x_0 es un elemento maximal en $(X, \leq)$.

    c) Demuéstrese que un unitario $\{x_0\} \subset X$ es cerrado en $\tau_{\leq}$ si, y sólo si, x_0 es un elemento minimal en $(X, \leq)$.

    d) Pruébese que la clausura de $\{x_0\} \subset X$ está formada por todos aquellos elementos de X que sean menores que x_0 (y, por supuesto, por el propio x_0).

    e) Compruébese que un subconjunto unitario $\{x_0\} \subset X$ es denso en $(X, \tau_{\leq})$ si, y sólo si, $x_0 \geq x$, para cualquier $x \in X$. (Es decir, habrá algún unitario denso en $(X, \tau_{\leq})$ si, y sólo si, existe un máximo para el orden $\leq$.)

    (Como consecuencia de esto y del ejercicio 19*b*, resulta que cualquier punto denso en $(X, \tau_{\leq})$ es abierto.)

    f) Descríbase la topología del orden parcial sobre $\mathbb{R}$ dotado de su orden usual.

g) Un conjunto parcialmente ordenado puede representarse mediante un diagrama en el que cada punto es menor que otro si existe un segmento ascendente (o una cadena de segmentos ascendentes) que los une.

Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ parcialmente ordenado representado en la figura 2.1.

Determínense los abiertos en la topología $\tau_{\leq}$ definida por el orden parcial.

h) Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ el conjunto parcialmente ordenado representado en la figura 2.2.

1) Determínense los abiertos y los cerrados en la topología $\tau_{\leq}$ inducida por el orden parcial.
2) Encuéntrese una base de entornos para cada punto.
3) Calcúlense $\overset{\circ}{A}$ y $\overline{A}$, con $A = \{a, d, e\}$.

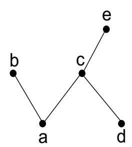

Figura 2.2

i) Consideremos $\mathbb{Z}$ dotado de la topología inducida por el orden parcial representado en la figura 2.3.

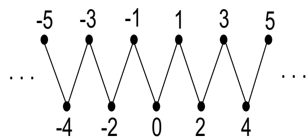

Figura 2.3

1) Véase que todo $\{m\} \subset \mathbb{Z}$, con m par, es cerrado.
2) Véase que todo $\{m\} \subset \mathbb{Z}$, con m impar, es abierto.
3) Calcúlense $\overline{\{0, -1, 1\}}$, $\operatorname{Int}(\{-5, -3, -1, 2, 4, 6\})$ y $\operatorname{Ais}(\{-4, -2, 0, 2, 4\})$.
4) Compruébese que el conjunto de los números impares es un subconjunto denso.

j) Consideremos $\mathbb{Z}$ dotado de la topología inducida por el orden parcial representado en la figura 2.4.

1) Determínense los abiertos en $\tau_{\leq}$.
2) Calcúlense $\overline{\{3\}}$ e $\operatorname{Int}(\{-1\})$.

3) Véase que el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ de los enteros no negativos es un subconjunto cerrado.
4) ¿Hay algún subconjunto propio que sea denso?

20. **Topologías del orden total.**

Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado con más de un punto. Para cada punto $a \in X$ definimos los conjuntos $(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}$ (que llamaremos *semirrecta a la izquierda de* a) y $(a, \rightarrow) = \{x \in X : x > a\}$ (que llamaremos *semirrecta a la derecha* de a).

a) Pruébese que $\mathcal{B} = \{X\} \cup \{(\leftarrow, a) : a \in X\}$ es una base para una topología sobre X, que llamaremos *topología de semirrectas a la izquierda*.
(Igualmente, se puede demostrar que $\mathcal{B} = \{X\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in X\}$ es también base de una topología sobre X, que llamaremos *topología de semirrectas a la derecha*.)

b) Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología generada por la siguiente familia de semirrectas abiertas: $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. (Es decir, la topología de semirrectas a la izquierda sobre $\mathbb{R}$, dotado de su orden usual.)

1) Encuéntrese una base de entornos para cada punto.
2) ¿Es este espacio primero contable? ¿Y segundo contable?
3) Calcúlense interior, clausura, frontera, conjunto derivado y conjunto de puntos aislados de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$.
4) ¿Cuál es la topología de subespacio inducida sobre $\mathbb{N}$?

c) Pruébese que las intersecciones finitas de semirrectas a la izquierda y de semirrectas a la derecha en un conjunto X totalmente ordenado constituyen (junto con el total) una base para una topología. Dicha topología recibirá el nombre de *topología de los intervalos* sobre X.

d) Diremos que un subconjunto A de X es un *intervalo* si para todo $z \in X$ con $x < z < y$, siendo x e y puntos de A, se verifica $z \in A$. Si en X se considera la topología de los intervalos, demuéstrese que los intervalos de la forma

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$$

son subconjuntos abiertos y que los de la forma

$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$$

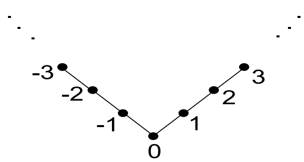

Figura 2.4

son subconjuntos cerrados, aunque podrían ser también abiertos.

e) Demuéstrese que la topología de los intervalos sobre X es la mínima topología sobre X que contiene a las topologías de semirrectas a la izquierda y de semirrectas a la derecha.

f) Pruébese que la topología usual de $\mathbb{R}$ es la topología de los intervalos asociada a su orden usual.

21. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la topología usual.

a) Pruébese que el conjunto $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es cerrado.

b) Calcúlese el conjunto derivado del conjunto $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

22. Se considera sobre $\mathbb{R}^2$ la topología menos fina τ para la cual todas las circunferencias de centro el origen y todas las rectas que pasan por el origen son abiertos. Pruébese que $G \in \tau$ si, y sólo si, G es simétrico respecto al origen.

23. Dados los siguientes espacios topológicos, determínense las topologías inducidas sobre los distintos subespacios que en cada caso se indican.

a) $(X \cup \{p\}, \tau)$, con $p \notin X$; $\tau = \mathcal{P}(X) \cup \{X \cup \{p\}\}$.
Subconjunto: X.

b) (X, τ), y sea $p \in X$; $\tau = \{G \subseteq X : p \in G\} \cup \{\emptyset\}$.
Subconjunto: $X \setminus \{p\}$.

c) $(\mathbb{R}, \tau)$; $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : \{0,1\} \subseteq G\} \cup \{\emptyset\}$.
Subconjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $(0,1)$, $[0,1]$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

d) $(\mathbb{R}, \tau)$; $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : q \in G \cap \mathbb{Q} \Rightarrow -q \in G\}$.
Subconjuntos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$.

e) $(\mathbb{R}^2, \tau)$; $\tau = \{A \times \mathbb{R} : A \subseteq \mathbb{R}\}$.
Subconjuntos: la recta $x = 0$, la recta $y = 0$, la unión de las rectas $x = y$ y $x = -y$, la circunferencia S_1.

f) $(\mathbb{N}, \tau)$; $\tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : p \in G \Rightarrow \text{todos los múltiplos de } p \text{ están en } G\}$.
Subconjuntos: el conjunto de los pares, el conjunto de los impares, $\{1, 2\}$.

g) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con la topología que tiene por base la colección de todos los segmentos de longitud finita con inicio en el origen. (Compruébese que, efectivamente, dicha colección es base de alguna topología.)

Subconjuntos: S_1, el cuadrado centrado en $(0,0)$ de lado 2, la recta $x = 0$ sin el origen, la corona circular $\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

24. Pruébese que, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una colección finita de puntos distintos de un espacio topológico T_2, entonces existe una familia de abiertos $\{U_1, \ldots, U_n\}$ disjuntos dos a dos, tales que $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$.

25. Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff, y sea $A \subseteq X$. Demuéstrese que A puede escribirse como la intersección de todos los abiertos que lo contienen:

$$A = \bigcap_{G\in\tau\,,\,A\subseteq G} G\,.$$

26. Sea (X,τ) un espacio topológico primero contable. Pruébese que, si toda sucesión convergente en (X,τ) tiene límite único, entonces (X,τ) es T_2.

    (Este resultado es una especie de inverso de la proposición 2.7.2, pero tan sólo parcial, porque, como ya se dijo entonces, un espacio topológico conumerable sirve como ejemplo de espacio que no es de Hausdorff donde cualquier sucesión convergente tiene límite único.)

27. Demuéstrese que un espacio topológico es T_2 si, y sólo si, la intersección de todos los entornos cerrados de cada punto se reduce al propio punto.

28. Compruébese que un espacio topológico es grosero si, y sólo si, todo subconjunto unitario es denso.

29. Póngase un ejemplo de un espacio topológico no discreto en el que todo subconjunto sea abierto o cerrado.

30. Demuéstrese que, si $\mathrm{Fr}\,(A) = B$ y $\mathrm{Fr}\,(B) = A$, entonces $A = B$.

31. Demuéstrese que un subconjunto G de un espacio topológico (X,τ) es abierto si, y sólo si, $A\cap G = \emptyset$ implica $\overline{A}\cap G = \emptyset$ para todo $A \subseteq X$.

32. Como consecuencia del ejercicio anterior, pruébese que un subconjunto G de un espacio topológico (X,τ) es abierto si, y sólo si, $\mathrm{Fr}\,(G) \subseteq X \setminus G$.

33. Demuéstrese que $\mathrm{Int}\,(A \setminus B) \subseteq \mathrm{Int}\,(A) \setminus \mathrm{Int}\,(B)$, y póngase un ejemplo en el que no se verifique la inclusión recíproca. Véase además que, si B es abierto y cerrado simultáneamente, entonces se verifica la igualdad.

34. Pruébese que $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$, y que, en general, no se da la inclusión recíproca.

35. Compruébese que, si $\overset{\circ}{\overline{A}} = A$, entonces $\mathrm{Fr}\,(A) = \mathrm{Fr}\,(\overline{A})$.

36. Demuéstrese que si un espacio topológico no tiene puntos aislados, tampoco ninguno de sus abiertos tiene puntos aislados.

37. Demuéstrese que un espacio topológico finito es metrizable si, y sólo si, es discreto.

38. Calcúlense el conjunto de límites y el conjunto de valores de adherencia de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dotado de las siguientes topologías:

    a) τ_{usual};

b) τ_{discreta} ;

c) τ_{grosera} ;

d) τ_{cofinita} , con $\tau_{\text{cofinita}} = \{G \subseteq \mathbb{R} : G^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$;

e) $\tau_{\text{conumerable}}$, con $\tau_{\text{conumerable}} = \{G \subseteq \mathbb{R} : G^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$;

f) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$;

g) $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \in G\} \cup \{\emptyset\}$;

h) $\tau = \{G \subset \mathbb{R} : 0 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\}$;

i) $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : x \in G \Rightarrow -x \in G\}$;

j) $\tau = \{G \subset \mathbb{R} : 0 \notin G \text{ y } 1 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

39. Dada la sucesión de números naturales

$$(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots),$$

caracterícense las topologías sobre $\mathbb{N}$ con las que la sucesión es convergente, y determínese su conjunto de límites en cada caso.

40. Caracterícense las sucesiones convergentes en un conjunto infinito dotado de la topología cofinita.

41. Demuéstrese que el conjunto de límites de una sucesión en un espacio topológico siempre es un subconjunto cerrado.

42. Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $A \subseteq X$, y sea $x_0 \in X$. Demuéstrese que, si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente al punto x_0 , entonces $x_0 \in \overline{A}$.

43. Compruébese que $0 \in \overline{(0,1]}$ en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$, y, sin embargo, no existe ninguna sucesión en $(0,1]$ que converja a 0 .

44. Aplicando lo enunciado en el ejercicio 42, compruébese que, si A es un subconjunto cerrado de un espacio topológico (X, τ) , entonces A contiene todos los límites de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ que sean convergentes.

45. Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $A \subseteq X$, y sea $x_0 \in X$. Demuéstrese que, si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, entonces, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0 , existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq \nu$, $x_n \in A$.

46. Compruébese que en el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$ cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a 1 tiene todos sus términos, salvo a lo sumo finitos, dentro de $\mathbb{Q}$, y que, sin embargo, 1 no pertenece al interior de $\mathbb{Q}$.

47. Como aplicación directa del ejercicio 45, compruébese que, si A es un abierto en un espacio topológico (X, τ) , entonces, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a un punto de A , existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq \nu$, $x_n \in A$.

48. Sean (X, τ) un espacio topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, y $x_0 \in X$. Demuéstrese que, si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la dada que sea convergente a x_0, entonces x_0 es valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

49. Consideremos $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{(0,0)\}$ sobre el que definiremos la siguiente topología:

    $G \in \tau \Leftrightarrow (0,0) \notin G$, o bien, si $(0,0) \in G$, entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $n \geq \nu$, $\{n\} \times \mathbb{N} \subset G$, salvo, a lo sumo, un número finito de puntos en cada $\{n\} \times \mathbb{N}$.

    (X, τ) recibe el nombre de **espacio de Arens**. Compruébese que en este espacio $(0,0)$ es valor de adherencia de la sucesión

    $$((1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),\ldots,$$

    $$(n,1),(n-1,2),\ldots,(2,n-1),(1,n),\ldots)\ ,$$

    y no existe ninguna subsucesión de ella que converja a $(0,0)$.

50. Sea (X, τ) un espacio topológico primero contable. Compruébese que, para cada $x \in X$, existe una base numerable y decreciente de entornos de x: $\mathcal{B}(x) = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \searrow$.

    (Con "decreciente" queremos decir que $V_{n+1} \subseteq V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.)

51. Sea (X, τ) un espacio topológico primero contable, sea $A \subseteq X$, y sea $x_0 \in X$. Demuéstrese que se verifican las siguientes proposiciones:

    a) $x_0 \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converja a x_0.

    b) A es cerrado si, y sólo si, A contiene todos los límites de sucesiones de puntos de A que sean convergentes.

    c) $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ si, y sólo si, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq \nu$, $x_n \in A$.

    d) A es abierto si, y sólo si, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a algún punto de A, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq \nu$, $x_n \in A$.

    e) x_0 es valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, y sólo si, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la dada que converja a x_0.

    (Téngase en cuenta para la resolución de este ejercicio que en todos los apartados una de las dos implicaciones es cierta en cualquier espacio topológico y su demostración ya ha sido propuesta en los ejercicios anteriores. Para la implicación que no es cierta en general, y sí en espacios primeros contables, se debe usar el ejercicio 50.)

Ejercicios de autoevaluación

Sólo una de las opciones indicadas es correcta para cada pregunta:

1. En un espacio cuya topología viene inducida por una métrica, una bola cerrada ...

   a) nunca puede ser un abierto;

   b) siempre es entorno de todos sus puntos;

   c) siempre coincide con la clausura de la bola abierta del mismo centro y mismo radio;

   d) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

2. Dado A, subconjunto de un espacio topológico (X, τ), si denotamos por A' su conjunto de puntos de acumulación, ...

   a) A' siempre está contenido en $\overline{A}$;

   b) A' siempre está contenido en A;

   c) A' nunca es vacío;

   d) A' nunca es un abierto del espacio.

3. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \ldots$

   a) todo subconjunto tiene interior distinto del vacío;

   b) todo subconjunto propio (ni vacío ni total) tiene clausura distinta de $\mathbb{R}$;

   c) todo subconjunto no vacío con un número finito de elementos tiene interior vacío;

   d) ningún punto tiene una base de entornos numerable.

4. El interior de $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$ es...

   a) $A \cup \{0\}$;

   b) vacío;

   c) un subconjunto no vacío contenido estrictamente en A;

   d) igual a la clausura de A.

5. La topología usual sobre $\mathbb{R}$ induce la topología discreta sobre ...

   a) el subconjunto de los números racionales;

   b) el subconjunto de los números enteros;

   c) el subconjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

   d) los tres subconjuntos mencionados en los apartados anteriores.

6. En cualquier espacio topológico métrico ...

   a) toda esfera es un subconjunto abierto;
   b) la frontera de una esfera siempre coincide con la esfera;
   c) ninguna esfera es un subconjunto abierto;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

7. Sea X un conjunto no vacío con más de un elemento, y sea $p \in X$. Consideremos sobre X la siguiente topología:

$$\tau = \{G \subseteq X : p \in G\} \cup \{\emptyset\} .$$

   En este espacio topológico, dado un subconjunto A, ...

   a) el interior de A siempre es A;
   b) la clausura de A es X, si $p \in A$;
   c) el conjunto de puntos aislados de A es vacío, si $p \in A$;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

8. Consideremos $\mathbb{R}$ dotado de la topología $\tau = \{G \subset \mathbb{R} : 0 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Dado $A = (0, 1)$...

   a) la frontera de A está contenida en A;
   b) A no tiene ningún punto de acumulación;
   c) el interior de A está contenido estrictamente en A;
   d) A es un conjunto de puntos aislados.

9. Sobre $(0, +\infty)$ ...

   a) es posible definir alguna topología que haga que el subconjunto $\{1\}$ sea abierto, pero no cerrado;
   b) es posible definir alguna topología que haga que el interior del subconjunto $\{1\}$ sea $\{1, 2\}$;
   c) es posible definir alguna topología que haga que la clausura de $\emptyset$ sea $(0, +\infty)$;
   d) la topología usual de $\mathbb{R}$ induce la discreta.

10. Consideremos $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita,

$$\tau_{\text{cofinita}} = \{G \subseteq \mathbb{R} : G^c \text{ es un subconjunto finito}\} \cup \{\emptyset\} .$$

   La topología inducida por τ_{cofinita} ...

   a) sobre $(0, 1)$ es la grosera;
   b) sobre $\mathbb{N}$ es la discreta;

c) sobre $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 6\}$ es la discreta;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

11. En un espacio topológico métrico, ...

    a) la unión de dos bolas abiertas nunca es un subconjunto cerrado;

    b) la intersección de dos bolas abiertas siempre es un subconjunto abierto;

    c) la intersección de dos esferas siempre es distinta del vacío;

    d) la unión de dos esferas siempre es distinta del vacío.

12. Consideremos $\mathbb{N}$ dotado de la siguiente topología:

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,3,\ldots,n\}, \ldots\}.$$

    En este espacio topológico ...

    a) no es posible definir ninguna métrica que induzca la topología τ dada;

    b) se verifica que el subconjunto de los números pares es denso;

    c) se verifica que el subconjunto de los números impares es abierto;

    d) no es posible encontrar ningún elemento aislado.

13. Consideremos $\mathbb{N}$ dotado de la siguiente topología:

$$\tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}.$$

    En este espacio topológico ...

    a) es posible definir alguna métrica que induzca la topología τ dada;

    b) el ínfimo del conjunto de números naturales que pertenecen a la clausura del subconjunto $A = \{300, 301, 302\}$ es 1;

    c) el supremo del conjunto de números naturales que pertenecen al interior del subconjunto $B = \{1, 15, 20, 25, 30\}$ es 30;

    d) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

14. En $\mathbb{N}$ dotado de la topología inducida por la distancia

$$d(n,m) = \begin{cases} n+m & , \text{ si } n \neq m, \\ 0 & , \text{ si } n = m, \end{cases}$$

    Dígase cuál de los siguientes números es mayor:

    a) el diámetro de la clausura del conjunto de divisores del número 6;

    b) la distancia entre el interior del conjunto de números pares y la clausura del conjunto de números impares;

c) el ínfimo de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ para los que se verifica que la bola abierta $B(n, 2)$ es un subconjunto cerrado;

d) el supremo de los números naturales n divisores de 10 para los que se verifica que la frontera de la bola abierta $B(n, 2)$ es un subconjunto vacío.

15. Considérese $\mathbb{R}^2$ dotado de la siguiente topología:

$$\tau = \{G \subseteq \mathbb{R}^2 : \{-1, 1\} \times \mathbb{R} \subseteq G\} \cup \{\emptyset\}.$$

La circunferencia unidad $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \dots$

a) tiene interior vacío;

b) es un subconjunto cerrado;

c) tiene dos puntos aislados;

d) es de frontera vacía.

16. Consideremos $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología

$$\tau = \{A \times \mathbb{R} : A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

(Nótese que $\emptyset \in \tau$, pues $\emptyset \times \mathbb{R} = \emptyset$.)

La topología de subespacio inducida por τ sobre ...

a) la recta $x = 0$ es la discreta;

b) la recta $y = 0$ es la usual de $\mathbb{R}$;

c) la recta $y = 0$ es la discreta;

d) la recta $y = x$ es la grosera.

17. En $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subset \mathbb{R} : 1 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\}) \dots$

a) la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0;

b) cualquier sucesión converge a 1;

c) no hay sucesiones convergentes a 0;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

18. El espacio $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}) \dots$

a) verifica que en él no hay sucesiones cuyo conjunto de límites sea todo $\mathbb{R}$;

b) es de Hausdorff;

c) verifica que el conjunto de valores de adherencia de la sucesión $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ ("la del paso marcial") es $\{1, 2\}$;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

19. La sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ("la de contar") converge a cualquier número natural en ...

    a) $(\mathbb{N}, \tau_{\text{discreta}})$;
    b) $(\mathbb{N}, \tau = \{G \subset \mathbb{N} : 1 \notin G\} \cup \{\mathbb{N}\})$;
    c) $(\mathbb{N}, \tau = \{\mathbb{N}, \emptyset, \mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathbb{N} \setminus \{2\}, \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\})$;
    d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

20. La sucesión $(1, 1, 2, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ ("la del niño que va aprendiendo a contar poco a poco y repasando lo aprendido") tiene a $\mathbb{R}$ como conjunto de valores de adherencia en ...

    a) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$;
    b) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$;
    c) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$;
    d) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$.

CAPÍTULO 3
APLICACIONES CONTINUAS

Para poder profundizar en la teoría de los espacios topológicos es esencial, como en tantas otras ramas de la Matemática, prestar especial atención a las *aplicaciones* entre ellos que conservan su estructura. Estas aplicaciones se llaman aplicaciones continuas, y son el objeto de estudio de este capítulo.[1]

3.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1.1 *Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación entre espacios topológicos, y sea $x_0 \in X$. Diremos que f es* ***continua*** *en x_0 si, para cualquier entorno V de $f(x_0)$, existe un entorno U de x_0, tal que $f(U) \subseteq V$.*

Si f es continua en todo $x \in X$, entonces diremos que f es ***continua****.*

Observaciones:

1. Podríamos decir lo mismo con entornos básicos (tanto de x_0 como de $f(x_0)$), y la definición resultante sería equivalente. Véase.

2. También sería equivalente decir que f es continua en x_0 si, para cualquier entorno V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ es entorno de x_0.

Ejemplos:

1. Consideremos la siguiente aplicación constante (para cierto $y_0 \in Y$) entre espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{f} & (Y,\tau') \\ x & \longmapsto & f(x) = y_0 . \end{array}$$

   Sea cual sea $x \in X$, $f(x) = y_0$, y, por tanto, sea cual sea el entorno U de x que cojamos, $f(U) = \{y_0\} \subseteq V$, para cualquier V entorno de y_0.

[1] Este punto de vista que concede preeminencia a las aplicaciones es relativamente moderno; tiene sus orígenes a mediados del siglo XX, con el desarrollo de la *teoría de categorías*. Desde entonces, su importancia en Topología, Álgebra y Geometría no ha dejado de aumentar.

2. Sea $f : (X, \tau_{\text{discreta}}) \to (Y, \tau')$ una aplicación definida sobre un espacio discreto, y sea $x_0 \in X$. Dado $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, es sencillo escoger $\{x_0\}$ como el entorno U de x_0 que pide la definición 3.1.1: $f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq V$.

3. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_{\text{grosera}})$ una aplicación que toma valores en un espacio grosero, y sea $x_0 \in X$. Como el único entorno que existe de $f(x_0)$ es Y y, para cualquier subconjunto $A \in X$, se tiene $f(A) \subseteq Y$, podemos tomar cualquier entorno de x_0 como el entorno U de la definición 3.1.1.

4. Como mera reescritura de la definición de aplicación continua al lenguaje $\varepsilon-\delta$, propio de los espacios métricos (usando aquí que en cualquier espacio métrico podemos escoger como base de entornos de cualquier punto la familia de bolas abiertas centradas en dicho punto), obtenemos cuál es la condición que debe verificar una aplicación entre espacios métricos $f : (X, d) \to (Y, d')$ para ser continua en $x_0 \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (\clubsuit)\,.$$

   En el caso particular de una función $f : (\mathbb{R}, d_{\text{usual}}) \to (\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$, (es decir, una función propia del Cálculo en una variable real) la condición $(\clubsuit)$ se escribe del modo conocido:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Los tres primeros ejemplos nos proporcionan nuestro primer teorema sobre funciones continuas:

Teorema 3.1.2 *Se verifican las proposiciones siguientes:*

1. Cualquier aplicación constante entre espacios topológicos (independientemente de las topologías de ambos espacios) es continua.

2. Cualquier aplicación definida sobre un espacio topológico discreto es continua.

3. Cualquier aplicación que tome valores sobre un espacio topológico grosero es continua.

3.2. Algunos resultados útiles

A continuación vamos a demostrar un resultado fundamental, pues nos permitirá estudiar la continuidad (global) de una aplicación entre espacios topológicos, atendiendo a los abiertos o los cerrados y a su comportamiento frente a imagen inversa.

Teorema 3.2.1 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación entre espacios topológicos. Son equivalentes:*

a) f es continua;

b) para cada $G \in \tau'$, $f^{-1}(G) \in \tau$;

c) para cada cerrado F de (Y, τ'), $f^{-1}(F)$ es cerrado en (X, τ).

Demostración:
$(a \Rightarrow b)$ Sea $G \in \tau'$. Si $f^{-1}(G) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(G) \in \tau$.

Supongamos pues que $f^{-1}(G) \neq \emptyset$, y sea $x \in f^{-1}(G)$. Demostraremos que $f^{-1}(G)$ es abierto viendo que es entorno de x. (Usamos aquí la caracterización de un abierto como un entorno de todos sus puntos que presentamos en la proposición 2.2.2.)

Como $G \in \tau'$ y $x \in f^{-1}(G)$, G es un entorno de $f(x)$. Puesto que f es continua, existe —según la definición 3.1.1— un entorno U de x, tal que $f(U) \subseteq G$, y, por tanto, $U \subseteq f^{-1}(G)$, de donde se sigue (gracias a la tercera propiedad de la familia de entornos de un punto en un espacio topológico) que $f^{-1}(G)$ es entorno de x, con lo que acabamos.

$(b \Rightarrow c)$ Sea F un subconjunto cerrado en (Y, τ'); es decir, $F^c \in \tau'$. Como suponemos (b) cierta, $f^{-1}(F^c) \in \tau$. Pero $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$. Luego $f^{-1}(F)$ es cerrado en (X, τ).

$(c \Rightarrow a)$ Vamos a demostrar el contrarrecíproco. Es decir, partimos de suponer que f no es continua en todo punto. Por tanto, existe $x_0 \in X$ donde f no es continua, lo cual significa que existe $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, tal que, sea cual sea $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $f(U) \nsubseteq V$ (equivalentemente, $f(U) \cap V^c \neq \emptyset$; de modo también equivalente, $U \cap f^{-1}(V^c) \neq \emptyset$).

Ahora bien, por ser V entorno de $f(x_0)$, existe un abierto G, tal que $f(x_0) \in G \subseteq V$ (y, por tanto, tal que $V^c \subseteq G^c$).

Precisamente, G^c será el cerrado de (Y, τ') cuya imagen inversa por f no es cerrada en (X, τ).

En efecto, $x_0 \notin f^{-1}(G^c)$ (pues $f(x_0) \in G$) y todo entorno U de x_0, según dijimos más arriba, es tal que $\emptyset \neq U \cap f^{-1}(V^c) \subseteq U \cap f^{-1}(G^c)$. Es decir, $x_0 \in \overline{f^{-1}(G^c)}$, con lo cual $f^{-1}(G^c)$ no es cerrado.

■

Veamos ahora una serie de enunciados que nos servirán como herramientas sencillas para estudiar la continuidad de algunas aplicaciones entre espacios topológicos.

Empecemos hablando de cómo las aplicaciones continuas se pueden componer para dar lugar a otra aplicación continua.

Proposición 3.2.2 *La composición de dos aplicaciones continuas vuelve a ser una aplicación continua.*

Demostración:
Sean $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos que pueden componerse.

La composición $g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau'')$ es continua. Veámoslo, basándonos en el teorema 3.2.1, comprobando que, para cada $G \in \tau''$, $(g \circ f)^{-1}(G) \in \tau$:

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G)).$$

Como g es continua, el teorema 3.2.1 afirma que $g^{-1}(G) \in \tau'$, y como f también es continua, de nuevo el mismo teorema garantiza que $f^{-1}(g^{-1}(G)) \in \tau$.

■

Cuando tenemos una función continua, podemos restringirla a cualquier subespacio del espacio topológico donde la función está definida, y volvemos a obtener una función continua. Vamos a comprobarlo con los dos siguientes resultados.

Lema 3.2.3 *Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea $A \subseteq X$ no vacío. La topología de subespacio inducida por τ sobre A es la mínima (con menor número de abiertos; la menos fina) topología sobre A que hace continua la inclusión natural:*

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\hookrightarrow} & (X,\tau) \\ a & \mapsto & i(a) = a\,. \end{array}$$

Demostración:

La topología de subespacio τ_A obviamente hace continua la inclusión natural, ya que la imagen inversa de cualquier abierto $G \in \tau$ pertenece a τ_A (véase la definición 2.6.1):

$$i^{-1}(G) = G \cap A \in \tau_A\,.$$

Si τ' es otra topología sobre A que haga continua la inclusión natural i, comprobemos que $\tau_A \leq \tau'$.

Sea $G \in \tau_A$. Por la definición de τ_A, existe $\widetilde{G} \in \tau$ tal que $G = \widetilde{G} \cap A$. Como la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (A,\tau') & \overset{i}{\hookrightarrow} & (X,\tau) \\ a & \mapsto & i(a) = a \end{array}$$

es continua, según el teorema 3.2.1, $i^{-1}(\widetilde{G}) = \widetilde{G} \cap A \in \tau'$, con lo que concluimos.

■

Proposición 3.2.4 *La restricción de cualquier aplicación continua a un subespacio es una aplicación continua.*

Demostración:

Dada una función continua $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$, y dado un subespacio topológico $(A,\tau_A) \subseteq (X,\tau)$, la restricción de f al subespacio, $f_{|A}$, es la siguiente composición de aplicaciones continuas (por tanto, continua, según la proposición 3.2.2):

$$(A,\tau_A) \overset{i}{\hookrightarrow} (X,\tau) \overset{f}{\to} (Y,\tau')\,.$$

(La aplicación i es continua, según el lema 3.2.3.)

■

Proposición 3.2.5 *La aplicación $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ entre espacios topológicos es continua si, y sólo si, $f : (X,\tau) \to (f(X),\tau'_{f(X)})$ es continua.*

Demostración:

Basta darse cuenta de que, dado un subconjunto $B \subseteq Y$,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X)).$$

Por tanto, decir que, dado cualquier $\widetilde{G} \in \tau'$, $f^{-1}(\widetilde{G}) \in \tau$, equivale a decir que, dado $G(= \widetilde{G} \cap f(X)) \in \tau'_{f(X)}$, $f^{-1}(G) \in \tau$, lo que, por el teorema 3.2.1, es justamente lo que queríamos probar.

∎

Para acabar con esta serie de enunciados de tipo "instrumental", vamos a demostrar de seguida un par de resultados relativos a la continuidad global de funciones que podemos entender como continuas "a trozos".

Proposición 3.2.6 (Carácter local de la continuidad) *Una aplicación $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ entre espacios topológicos es continua si y solo si existe un recubrimiento por abiertos $X = \cup_{i\in I} G_i$ de modo que $f_{|G_i} : (G_i, \tau_{G_i}) \to (Y,\tau')$ es continua, para cada $i \in I$.*

Demostración: Si f es continua, no hay nada que decir, pues basta tomar al propio X como recubrimiento.

Recíprocamente, sea $X = \cup_{i\in I} G_i$ de modo que $f_{|G_i} : (G_i, \tau_{G_i}) \to (Y,\tau')$ es continua, para cada $i \in I$. Como $G_i \in \tau$, si $A \in \tau_{G_i}$, entonces (por ser intersección de un abierto de τ con G_i, también abierto en τ) $A \in \tau$.

Teniendo eso en cuenta, veamos ahora que, dado $G \in \tau'$, $f^{-1}(G) \in \tau$:

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap X = f^{-1}(G) \cap (\cup_{i\in I} G_i) = \cup_{i\in I}(f^{-1}(G) \cap G_i) = \cup_{i\in I}(f_{|G_i})^{-1}(G);$$

obtenemos un abierto en (X,τ), pues es una unión de abiertos en (X,τ). Efectivamente, cada $(f_{|G_i})^{-1}(G)$ es un abierto de τ_{G_i}, pues por hipótesis $f_{|G_i}$ es continua para cada $i \in I$. Luego $(f_{|G_i})^{-1}(G) \in \tau$.

∎

Proposición 3.2.7 *Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación entre espacios topológicos. Si $X = F_1 \cup \ldots \cup F_N$ (con $N \in \mathbb{N}$ y F_i cerrado en (X,τ), para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$), y $f_{|F_i} : (F_i, \tau_{F_i}) \to (Y,\tau')$ es continua (para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$), entonces f es continua.*

Demostración:

Del mismo modo que en la demostración de la proposición 3.2.6, hagamos notar primero que, para cada cualquier $i \in \{1,\ldots,N\}$, si un subconjunto A es cerrado en (F_i, τ_{F_i}), entonces A es cerrado en (X,τ), por ser intersección de dos cerrados.

Comprobemos ya que, dado F cerrado en (Y,τ'), $f^{-1}(F)$ es cerrado en (X,τ), (es decir, hacemos uso de la condición (c) del teorema 3.2.1, para demostrar que f es continua):

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap X = f^{-1}(F) \cap (\cup_{i=1}^N F_i) = \cup_{i=1}^N (f^{-1}(F) \cap F_i) = \cup_{i=1}^N (f_{|F_i})^{-1}(F);$$

lo que nos sale es un cerrado en (X,τ), por ser una unión finita de cerrados.

Cada $(f_{|F_i})^{-1}(F)$ es un cerrado en (X,τ), ya que por hipótesis $f_{|F_i}$ es continua (para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$), y, por tanto, $(f_{|F_i})^{-1}(F)$ es cerrado en (F_i,τ_{F_i}), con lo que para concluir no hace falta más que recordar la observación que hicimos al inicio de la demostración.

■

3.3. Homeomorfismos

Definición 3.3.1 *Una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ entre espacios topológicos es un **homeomorfismo** si f es biyectiva y "bicontinua" (tanto f como f^{-1} son aplicaciones continuas).*

Diremos que dos espacios topológicos son homeomorfos cuando entre ambos exista algún homeomorfismo.

La definición de homeomorfismo y el teorema 3.2.1 proporcionan el siguiente teorema, cuya demostración es elemental a la luz de lo expuesto.

Teorema 3.3.2 *Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una biyección. Son equivalentes:*
a) f es un homeomorfismo;
b) $f(G)\in\tau'$ si, y sólo si, $G\in\tau$;
c) $f(F)$ es cerrado en (Y,τ') si, y sólo si, F es cerrado en (X,τ).

Definición 3.3.3 *Una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ entre espacios topológicos se dice **abierta** si lleva subconjuntos abiertos en abiertos:*

$$f(G)\in\tau', \text{ para cada } G\in\tau\,.$$

*De modo análogo, diremos que la aplicación f es **cerrada** si lleva cerrados en cerrados:*

$$f(F) \text{ es cerrado en } (Y,\tau'), \text{ para cada } F \text{ cerrado en } (X,\tau)\,.$$

Obviamente, si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es una biyección entre espacios topológicos, del teorema 3.2.1 se sigue la siguiente equivalencia:

$$f \text{ es abierta} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ es continua}\,.$$

(Lo mismo puede afirmarse cambiando "abierta" por "cerrada".)

Es decir, una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es homeomorfismo si, y sólo si, f es biyectiva, continua y abierta (o cerrada).

Es importante entender que un homeomorfismo entre espacios topológicos no sólo establece una biyección entre los elementos de los espacios, sino (lo que es más importante) entre sus topologías, de modo que a cada abierto de cada espacio le corresponde un abierto en el otro espacio. Es decir, del mismo modo que un isomorfismo de $\mathbb{K}-$espacios vectoriales es una biyección entre los espacios que conserva la estructura $\mathbb{K}-$lineal, o un isomorfismo de grupos es una biyección entre los grupos que conserva las operaciones (y, por tanto, la estructura de grupo), un homeomorfismo entre espacios topológicos es una biyección entre ambos que conserva la estructura topológica, es decir, los abiertos de uno y otro espacio.

Ejemplos:

1. La aplicación
$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} & (X,\tau') \\ x & \longmapsto & \mathrm{Id}_X(x)=x \end{array}$$
es homeomorfismo, usando el teorema 3.3.2, si, y sólo si, para cada $G\in\tau$, $G\in\tau'$, y para cada $\widetilde{G}\in\tau'$, $\widetilde{G}\in\tau$; dicho de otro modo, si, y sólo si, $\tau=\tau'$.

2. La aplicación
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\} \\ n & \longmapsto & f(n)=\frac{1}{n} \end{array}$$
es un homeomorfismo, considerando tanto $\mathbb{N}$ como $\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ con la topología de subespacio de la usual de $\mathbb{R}$.

   Es una aplicación trivialmente biyectiva, y tanto ella como su inversa son continuas, pues salen de espacios topológicos discretos.

3. No son homeomorfos, sin embargo, $\mathbb{N}$ y $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$, vistos ambos como subespacios de $(\mathbb{R},\tau_{\text{usual}})$.

   Obviamente, existen biyecciones entre ambos conjuntos. El problema es que ninguna biyección que podamos dar entre A y $\mathbb{N}$, digamos $f:A\longrightarrow\mathbb{N}$, puede ser continua. (Sí lo será, desde luego, cualquier aplicación que salga de $\mathbb{N}$, por salir de un discreto, y en particular por tanto será continua f^{-1}.)

   Sea $n_0=f(0)$. Como $\{n_0\}$ es abierto en $\mathbb{N}$, para que f sea continua, es necesario que $f^{-1}(\{n_0\})=\{0\}$ sea abierto en A, lo cual no es cierto, pues, sea cual sea $\varepsilon>0$, siempre existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Dicho de otro modo, no existe ningún abierto en $(\mathbb{R},\tau_{\text{usual}})$ tal que su intersección con A sea $\{0\}$.

4. Tampoco son homeomorfos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$, de nuevo como subespacios de $(\mathbb{R},\tau_{\text{usual}})$. Y de nuevo sucede, por supuesto, que existen biyecciones entre ambos conjuntos. El problema viene otra vez a cuento de la continuidad en uno de los dos sentidos de la biyección.

   Así, si $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{N}$ es una biyección, entonces como, sea cual sea n, $\{n\}$ es abierto en $\mathbb{N}$, $\{f^{-1}(n)\}$ debe ser abierto en $\mathbb{Q}$. Pero esto es falso, pues $\{f^{-1}(n)\}$ es un subconjunto formado por un único número racional, y en cualquier intervalo de números reales hay infinitos racionales, con lo cual es imposible encontrar un abierto en $(\mathbb{R},\tau_{\text{usual}})$ cuya intersección con $\mathbb{Q}$ sea un único racional.

Definición 3.3.4 *Una propiedad P que pueda predicarse de un espacio topológico se dice **topológica** si puede definirse en términos de la topología del espacio.*

Observación: Por la identificación que establece un homeomorfismo entre los abiertos de dos espacios topológicos homeomorfos, cualquier propiedad topológica se conserva mediante homeomorfismos.

Es decir, si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo, y (X, τ) tiene la propiedad P, entonces (Y, τ') también tiene la propiedad P.

Equivalentemente, si (X, τ) tiene la propiedad topológica P, mientras que el espacio (Y, τ') no la verifica, entonces podemos afirmar que (X, τ) e (Y, τ') no son espacios homeomorfos.

Ejemplos:

1. La metrizabilidad (véase la sección 2.4) es una propiedad topológica.

   Comprobémoslo, mostrando que se conserva por homeomorfismos. Sea, así pues, (X, τ) un espacio topológico metrizable (es decir, sea d una distancia sobre X tal que $\tau_d = \tau$) y sea un homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$.

   La siguiente es una distancia sobre Y cuya topología inducida coincide con τ':

   $$d'(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \ , \ \forall y_1, y_2 \in Y \, .$$

   Trivialmente, $f : (X, d) \to (Y, d')$ es una isometría (véase el ejercicio 28 del tema 1). En el ejercicio 9 de este tema se pide demostrar que toda isometría entre espacios métricos es un homeomorfismo.

   Por tanto, la aplicación Id_Y del diagrama es homeomorfismo (por ser composición de homeomorfismos), y, según hemos visto en el primer ejemplo de esta sección, ello significa que $\tau_{d'} = \tau'$.

   $$\begin{tikzcd} (X, \tau_d) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (Y, \tau') \arrow[d, "\mathrm{Id}_Y"] \\ & (Y, \tau_{d'}) \end{tikzcd}$$

   Según lo expuesto anteriormente, un espacio topológico métrico no puede ser jamás homeomorfo a un espacio topológico grosero o a un espacio infinito no numerable dotado de la topología conumerable, pues estos dos últimos ejemplos de espacios topológicos no son metrizables.

2. Ser primero contable y ser segundo contable (en la sección 2.3) son propiedades topológicas.

   Veámoslo en relación con el segundo axioma de numerabilidad. (La correspondiente demostración de que el primer axioma también es una propiedad topológica será lo que se pida en el ejercicio 3.)

Supongamos, pues, que (X,τ) es un espacio segundo contable, y que la colección $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de abiertos de τ. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ un homeomorfismo.

Comprobemos que $\mathcal{B}'=\{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (colección obviamente numerable) es base de la topología τ'.

Dado un abierto $G\in\tau'$, por ser f continua, $f^{-1}(G)\in\tau$, y ya que $\mathcal{B}$ es base de τ:

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{\text{ciertos } B_n\in\mathcal{B}} B_n\,,$$

de donde se sigue, tomando imagen por f:

$$G=f(f^{-1}(G))=f(\bigcup_{\text{ciertos } B_n\in\mathcal{B}} B_n)=\bigcup_{\text{ciertos } f(B_n)\in\mathcal{B}'} f(B_n)\,.$$

Esto demuestra que $\mathcal{B}'$ es base de la topología τ'. Y, puesto que admite una base numerable de abiertos, el espacio (Y,τ') es segundo contable.

3. Ya vimos (en la sección 1.4) que la acotación no es una propiedad topológica.

Problemas

(En toda esta sección, cada vez que aparezca $\mathbb{R}^n$ (para cualquier $n\in\mathbb{N}$) —o algún subconjunto suyo—, y no se diga lo contrario, supondremos que la topología con la que trabajamos es la usual —respectivamente, la de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}^n$—.)

1. Se propone en este ejercicio hacer una generalización de los apartados *b* y *c* del teorema 3.1.2:

   a) Pruébese que un espacio topológico (X,τ) lleva la topología discreta si, y sólo si, toda función en cualquier otro espacio, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$, es continua.

   b) Demuéstrese que (X,τ) tiene la topología grosera si, y sólo si, toda función de cualquier espacio en él, $f:(Y,\tau')\to(X,\tau)$, es continua.

2. Veamos hasta qué grado de generalidad se pueden reformular los apartados *b* y *c* del teorema 3.1.2 para funciones abiertas (o cerradas), a la manera como lo hemos hecho en el ejercicio anterior:

   a) Pruébese que (X,τ) tiene la topología discreta si, y sólo si, toda aplicación de cualquier espacio topológico en él, $f:(Y,\tau')\to(X,\tau)$, es abierta (o cerrada).

   b) Demuéstrese que (X,τ) tiene la topología grosera si, y sólo si, toda aplicación epiyectiva sobre cualquier otro espacio, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$, es abierta (o cerrada).

   c) ¿Qué sucede si en el apartado *b* no pedimos que las aplicaciones de las que hablamos sean epiyectivas?

3. Demuéstrese que ser primero contable es una propiedad topológica.

4. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación entre espacios topológicos, y sea $x_0 \in X$. Demuéstrese que f es continua en x_0 si, y sólo si, para cualquier $A \subseteq X$ tal que $x_0 \in \overline{A}$, se verifica que $f(x_0) \in \overline{f(A)}$.

   Como consecuencia, pruébese que f es continua (globalmente) si, y sólo si, para cualquier $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

5. Compruébese que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = E(x)\,, \end{array}$$

   donde $E(x)$ es la parte entera (véase el ejercicio $2g$ del tema 1) de x, es una función continua.

6. Compruébese que la siguiente función real de variable real es continua:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & , & \text{si } x > 0\,, \\ -1 & , & \text{si } x < 0\,. \end{array} \right. \end{array}$$

7. Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea A un subconjunto suyo no vacío. La *función característica* de A se define como sigue:

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & , & \text{si } x \in A\,, \\ 0 & , & \text{si } x \notin A\,. \end{array} \right. \end{array}$$

   a) Pruébese que χ_A es continua si, y sólo si, A es abierto y cerrado al mismo tiempo en X.

   b) Compruébese que χ_A es continua en todos los puntos del interior y del exterior de A (el exterior de A es el interior de A^c), y discontinua en todos los puntos de la frontera de A.

   c) Aplíquese lo hecho para concluir que la función de Dirichlet ($\chi_{\mathbb{Q}}$ definida sobre $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$) es totalmente discontinua (no existe ningún número real en el que sea continua).

8. Sean f y g dos aplicaciones continuas de un espacio topológico (X,τ) en un espacio topológico de Hausdorff (Y,τ').

   a) Demuéstrese que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un cerrado en (X,τ).

   b) Como consecuencia del apartado anterior, pruébese que, si f y g coinciden sobre un subconjunto denso de X, entonces son la misma función sobre todo X.

9. Compruébese que cualquier aplicación que preserve distancias (véase el ejercicio 28 del tema 1) $f : (X, d) \to (Y, d')$ es una aplicación continua. (En realidad, más que continua: es uniformemente continua —ejercicio 17 del tema de Espacios Métricos—.)

   En particular, esto significará que cualquier isometría (en aquel mismo ejercicio 28) es un homeomorfismo.

10. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua y epiyectiva. Pruébese que la imagen por f de cualquier subconjunto denso en X es densa en Y.

11. Sean $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ y $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ dos aplicaciones entre espacios topológicos.

    a) Demuéstrese que, si $g \circ f$ es abierta (cerrada), y f es continua y epiyectiva, entonces g es abierta (respectivamente, cerrada).
    b) Demuéstrese que, si $g \circ f$ es abierta (cerrada), y g es continua e inyectiva, entonces f es abierta (respectivamente, cerrada).
    c) Si $g \circ f$ y f son aplicaciones continuas, ¿es g necesariamente continua?
    d) Si $g \circ f$ y g son continuas, ¿es f también una aplicación continua?

12. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $p \in X$. Compruébese que las siguientes proposiciones son equivalentes:

    a) $\{p\} \in \tau$.
    b) Para todo espacio (Y, τ'), toda aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es continua en p.
    c) Toda aplicación $f : (X, \tau) \to (X, \tau_{\text{discreta}})$ es continua en p.

13. Una aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ entre espacios topológicos se dice *localmente constante* si, para cualquier punto $x \in X$, existe un entorno V tal que $f_{|V}$ es constante. Demuéstrense las dos afirmaciones siguientes:

    a) Toda aplicación localmente constante es continua.
    b) (Y, τ') es un espacio topológico discreto si, y sólo si, para todo espacio (X, τ) y toda aplicación continua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ se tiene que f es localmente constante.

14. Demuéstrese que todos los espacios topológicos discretos e infinitos numerables son homeomorfos entre sí, y que cualquier espacio topológico homeomorfo a uno de ellos es también infinito numerable y discreto.

15. Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ es un *intervalo* si para cualesquiera $x, y \in I$ tales que $x < y$, y para cualquier $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$, se verifica $z \in I$. (Véase el ejercicio 20*d* del tema 2.)

    a) Demuéstrese que una aplicación sobreyectiva y estrictamente creciente (o decreciente) entre intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, es un homeomorfismo.

b) Como aplicación directa del apartado anterior, compruébese que los intervalos que se enuncian a continuación son homeomorfos a todos los que se mencionan en el mismo ítem:

1) $\mathbb{R}$, (a,b) (con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), $(a,+\infty)$ (con $a \in \mathbb{R}$) y $(-\infty,a)$ (con $a \in \mathbb{R}$);
2) $[a,b)$ (con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), $(a,b]$ (con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), $[a,+\infty)$ (con $a \in \mathbb{R}$) y $(-\infty,a]$ (con $a \in \mathbb{R}$);
3) $[a,b]$ (con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$);
4) $\{x_0\}$ (con $x_0 \in \mathbb{R}$).

(Este ejercicio podrá completarse, viendo que un intervalo correspondiente a un ítem no es homeomorfo a ninguno que esté escrito en otro distinto, en los temas 5 (Conexión) y 6 (Compacidad).)

16. Diremos que una aplicación $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ entre espacios topológicos es *secuencialmente continua* en $x_0 \in X$ si f lleva sucesiones convergentes a x_0 a sucesiones convergentes a $f(x_0)$; es decir, si, para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente a x_0, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es convergente a $f(x_0)$.

(Cuando la aplicación f sea secuencialmente continua en todo punto de X diremos simplemente que es secuencialmente continua.)

a) Demuéstrese que, si $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es una aplicación continua en $x_0 \in X$, entonces f es secuencialmente continua en x_0.
(Globalmente, si f es una aplicación continua, entonces es secuencialmente continua en todo punto.)

b) Compruébese que la aplicación $\mathrm{Id} : (\mathbb{R},\tau_{\text{conumerable}}) \to (\mathbb{R},\tau_{\text{discreta}})$ lleva sucesiones convergentes en sucesiones convergentes, y, sin embargo, no es continua.

c) Sea (X,τ) un espacio topológico primero contable, y sea $x_0 \in X$. Demuéstrese que $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es continua en $x_0 \in X$ si, y sólo si, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a $f(x_0)$.
Por consiguiente, f es continua si, y sólo si, f es secuencialmente continua.

(**Indicación:** Para la demostración de $(\Leftarrow)$ hágase uso del ejercicio 50 del tema 2.)

(Este ejercicio completa el apartado 16*a* anterior: una de las dos implicaciones, como se vio en aquél, es general; el apartado 16*b* nos dice que la otra implicación no es cierta en general. Si además pedimos que (X,τ) sea primero contable, entonces tenemos la equivalencia entre continuidad y continuidad secuencial.)

17. En este ejercicio el objetivo es demostrar que en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ (análogamente y con los cambios adecuados, en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$) movimientos y semejanzas son homeomorfismos, y, por tanto, cualquier "figura geométrica" será topológicamente equivalente a cualquier otra que se obtenga de la primera a través de alguna de esas transformaciones.

Así pues, utilícese el ejercicio 9 para demostrar las siguientes afirmaciones:

a) La traslación en la dirección de cualquier vector (a,b) de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tau_{(a,b)}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \tau_{(a,b)}(x,y) = (x+a, y+b)\,, \end{array}$$

es un homeomorfismo.

b) El giro de centro $(0,0)$ y ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi_\theta} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \\ & & \left(= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \end{array}$$

es un homeomorfismo.

c) La simetría respecto de la recta $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \sigma_r(x,y) = (x, -y)\,, \end{array}$$

es un homeomorfismo.

d) La homotecia de centro $(0,0)$ y razón $\lambda > 0$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H_\lambda} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & H_\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)\,, \end{array}$$

es un homeomorfismo.

(**Indicación:** Una vez se haya comprobado que, efectivamente, la homotecia es una biyección, lo más sencillo sería comprobar que tanto ella como su inversa son funciones *lipschitzianas* para la distancia d_2:

Una función entre espacios métricos $f : (X,d) \to (Y,d')$ es *lipschitziana* si existe $K > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y)\ ,\ \forall x, y \in X\,.$$

La última parte del ejercicio consiste en demostrar que toda función lipschitziana es continua, para lo cual basta demostrar que cualquier función lipschitziana es uniformemente continua, pues, si una función es uniformemente continua, entonces es continua.)

18. Estúdiese si las siguientes aplicaciones son continuas —para las que no lo sean, estúdiese su continuidad punto a punto—, abiertas o cerradas (y si pueden ser homeomorfismos).

a)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3\,. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\,. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & , & \text{si } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & , & \text{si } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{array} \right. \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0\,. \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}}) \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

f)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}}) \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

g)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & , & \text{si } x \leq 0\,, \\ x & , & \text{si } x > 0\,, \end{array} \right. \end{array}$$

con $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$.

h)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{N}, \tau_1) & \longrightarrow & (\mathbb{N}, \tau_2) \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} n & , & \text{si } n \neq 2\,, \\ 1 & , & \text{si } n = 2\,, \end{array} \right. \end{array}$$

donde las topologías que ahí aparecen son:

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\,, \;\; \tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \mathbb{N} \setminus \{2\}\}\,.$$

i)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & , & \text{si } x^2 < 2\,, \\ 1 & , & \text{si } x^2 \geq 2\,. \end{array} \right. \end{array}$$

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & , \text{ si } |x| < 1\,, \\ \lambda & , \text{ si } |x| = 1\,, \\ |x| & , \text{ si } |x| > 1\,. \end{cases}$$

a) Si $\lambda = 0$, pruébese que f no es continua.

b) Calcúlese el valor de λ para el que f es continua. ¿Es f un homeomorfismo para tal valor?

20. Sean (X, τ) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que, si $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ y $g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en x_0, entonces también son continuas en x_0 las siguientes funciones:

a)

$$\begin{array}{ccl} (X, \tau) & \stackrel{f+g}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x)\,; \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccl} (X, \tau) & \stackrel{f\cdot g}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)\,; \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccl} (X, \tau) & \stackrel{\lambda f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda\, f(x)\,. \end{array}$$

Una vez demostrada la continuidad de sumas, productos y productos por números reales de funciones continuas (y, por tanto, también de diferencias o cocientes cuyo denominador no se anule), ya quedará demostrado que $\mathcal{C}(X) = \{f : (X, \tau) \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ continua}\}$ es un $\mathbb{R}-$álgebra. De hecho, $\mathcal{C}(X)$ recibe el nombre de *álgebra de funciones continuas sobre* X.

21. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $p \in X$. Dadas cuatro aplicaciones continuas σ, σ_1, σ_2 y $\sigma_3 : [0, 1] \to (X, \tau)$ que verifican

$$\sigma(0) = \sigma(1) = \sigma_1(0) = \sigma_1(1) = \sigma_2(0) = \sigma_2(1) = \sigma_3(0) = \sigma_3(1) = p\,,$$

demuéstrese que las siguientes aplicaciones (que salen de $[0, 1] \times [0, 1]$ y llegan a (X, τ)) son continuas:

a)

$$H_1(t, s) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{2t}{s+1}\right) & , \text{ si } 2t \leq s + 1\,, \\ p & , \text{ si } 2t \geq s + 1\,. \end{cases}$$

b)

$$H_2(t,s) = \begin{cases} p & , \text{ si } 2t \leq 1-s\,, \\ \sigma\left(\frac{2t+s-1}{1+s}\right) & , \text{ si } 2t \geq 1-s\,. \end{cases}$$

c)

$$H_3(t,s) = \begin{cases} \sigma(2t) & , \text{ si } 2t \leq 1-s\,, \\ \sigma(1-s) & , \text{ si } 1-s \leq 2t \leq 1+s\,, \\ \sigma(2-2t) & , \text{ si } 2t \geq 1+s\,. \end{cases}$$

d)

$$H_4(t,s) = \begin{cases} \sigma(1-2t) & , \text{ si } 2t \leq 1-s\,, \\ \sigma(s) & , \text{ si } 1-s \leq 2t \leq 1+s\,, \\ \sigma(2t-1) & , \text{ si } 2t \geq 1+s\,. \end{cases}$$

e)

$$H_5(t,s) = \begin{cases} \sigma_1\left(\frac{4t}{s+1}\right) & , \text{ si } 4t \leq 1+s\,, \\ \sigma_2(4t-s-1) & , \text{ si } 1+s \leq 4t \leq 2+s\,, \\ \sigma_3\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & , \text{ si } 4t \geq 2+s\,. \end{cases}$$

22. **(Para ampliar:) Equivalencia de métricas.**

Sea X un conjunto no vacío, y sean d y d' dos distancias sobre X.

a) Diremos que d y d' son *topológicamente equivalentes* si inducen la misma topología sobre $X: \tau_d = \tau_{d'}$. Compruébese que d y d' son topológicamente equivalentes, si, y sólo si, $(X,\tau_d) \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} (X,\tau_{d'})$ es un homeomorfismo.

b) Demuéstrese que d_{usual} y d_{discreta} son distancias topológicamente equivalentes sobre $\mathbb{N}$.

c) Si d es una distancia sobre $X \neq \emptyset$, podemos definir sobre X una distancia acotada que induzca la misma topología que d. En concreto: $\widetilde{d}(x,y) = \text{mín}\{1, d(x,y)\}$. Demuéstrese que d y $\widetilde{d}$ son topológicamente equivalentes.

d) Diremos que d y d' son *uniformemente equivalentes* si $(X,d) \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} (X,d')$ es un homeomorfismo uniforme.

(Una aplicación entre espacios métricos $f:(X,d) \to (Y,d')$ es un *homeomorfismo uniforme* si f es biyectiva, y tanto f como f^{-1} son uniformemente continuas.

Para la definición de aplicación uniformemente continua entre espacios métricos, véase el ejercicio 17 del tema 1.)

Compruébese que la demostración realizada para el apartado anterior puede adaptarse convenientemente para demostrar que d y $\widetilde{d}$ son uniformemente equivalentes.

e) Como toda aplicación uniformemente continua es continua, es obvio que, si d y d' son distancias uniformemente equivalentes, entonces también son topológicamente equivalentes.

El recíproco no es cierto. Pruébese que, sobre $\mathbb{R}$, d_{usual} y $D(x,y)=|x^3-y^3|$ son topológicamente equivalentes, pero no uniformemente equivalentes.

f) Diremos que d y d' son *lipschitzianamente equivalentes* si $(X,d)\xrightarrow{\mathrm{Id}_X}(X,d')$ es un homeomorfismo lipschitziano.

(Una aplicación entre espacios métricos $f:(X,d)\to(Y,d')$ es un *homeomorfismo lipschitziano* si f es biyectiva, y tanto f como f^{-1} son lipschitzianas.

La definición de aplicación lipschitziana entre espacios métricos puede leerse en el ejercicio 17*d*.)

Toda aplicación lipschitziana es uniformemente continua, y, por tanto, si dos distancias son lipschitzianamente equivalentes, entonces también son uniformemente equivalentes.

Sin embargo, el inverso no es cierto. Demuéstrese que las distancias d_{usual} y $\widetilde{d}(x,y)=\text{mín}\{1,d_{\text{usual}}(x,y)\}$ —que sabemos por el ejercicio 22*d* que son uniformemente equivalentes— no son lipschitzianamente equivalentes sobre $\mathbb{R}$.

g) Demuéstrese que las siguientes distancias son lipschitzianamente equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$ (por tanto, según lo hecho en los apartados anteriores, topológicamente equivalentes; es decir, inducen todas una misma topología, la que se conoce como la topología usual de $\mathbb{R}^n$):

$$d_1((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\,;$$

$$d_2((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2};$$

$$d_\infty((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\text{máx}_{1\le i\le n}|x_i-y_i|\,.$$

(**Indicación:** Se recomienda comprobar en primer lugar que d_1 y d_∞ son lipschitzianamente equivalentes, y luego demostrar que d_2 y d_∞ también lo son.)

h) Sean d y d' dos distancias lipschitzianamente equivalentes sobre un conjunto no vacío X. Compruébese que un subconjunto $A\subseteq X$ es acotado para la distancia d si, y sólo si, es acotado para la distancia d'.

Ejercicios de autoevaluación

Sólo una de las opciones indicadas es correcta para cada pregunta:

1. La aplicación
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R},\tau) & \xrightarrow{\text{Id}} & (\mathbb{R},\tau_{\text{discreta}}) \\ x & \longmapsto & \text{Id}(x)=x \end{array}$$
es continua en 0 si ...
   a) $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \in G\} \cup \{\emptyset\}$;
   b) $\tau = \tau_{\text{usual}}$;
   c) $\tau = \tau_{\text{conumerable}}$;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

2. Dada la función
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R},\tau_{\text{usual}}) \\ x & \longmapsto & f(x)=0 \quad \dots \end{array}$$
   a) es posible definir una topología sobre su dominio, de modo que f no sea continua en 0;
   b) es posible definir una topología sobre su dominio, de modo que f sea homeomorfismo;
   c) sea cual sea la topología que definamos sobre su dominio, f es cerrada;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

3. La aplicación
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R},\tau_{\text{grosera}}) & \xrightarrow{\text{Id}} & (\mathbb{R},\tau_{\text{discreta}}) \\ x & \longmapsto & \text{Id}(x)=x \quad \dots \end{array}$$
   a) es continua;
   b) no es continua globalmente, pero sí en 0;
   c) no es abierta;
   d) es cerrada.

4. De $\mathbb{N}$ a $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, entendidos ambos como subespacios de $(\mathbb{R},\tau_{\text{usual}})$, ...
   a) es posible definir un homeomorfismo;
   b) es posible definir una aplicación continua e inyectiva;
   c) es posible definir una aplicación cerrada e inyectiva, cuya imagen sea $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

5. Sobre $\mathbb{N}$ ...

   a) τ_{discreta} es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$;
   b) τ_{grosera} es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$;
   c) τ_{cofinita} es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

6. Dígase cuál de las siguientes funciones $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ **no** es continua en 0:

   a) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x \leq 0, \\ 1 & , \text{ si } x > 0; \end{cases}$
   b) $f(x) = 3$;
   c) $f(x) = x^2$;
   d) las tres funciones anteriores son continuas en 0.

7. Dígase cuál de las siguientes funciones $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es continua en 0:

   a) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x \leq 0, \\ 1 & , \text{ si } x > 0; \end{cases}$
   b) $f(x) = x^3$;
   c) $f(x) = 1$;
   d) ninguna de las tres funciones anteriores es continua en 0.

8. Dígase cuál de las siguientes **no** es una propiedad topológica:

   a) la metrizabilidad;
   b) la acotación;
   c) ser segundo contable;
   d) ser de Hausdorff.

9. Sobre el conjunto de los números pares $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ...

   a) τ_{grosera} es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de P en $(\mathbb{N}, \tau)$, con $\tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}$;
   b) $\tau = \{G \subseteq P : 2 \in G\} \cup \{\emptyset\}$ es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de P en $(\mathbb{N}, \tau)$, con $\tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}$;
   c) τ_{cofinita} es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de P en $(\mathbb{N}, \tau_{\text{cofinita}})$;

d) τ_{discreta} es la topología menos fina que hace continua la inclusión natural de P en $(\mathbb{N}, \tau_{\text{cofinita}})$.

10. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{N}, \tau = \{G \subset \mathbb{N} : 1 \notin G\} \cup \{\mathbb{N}\}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{N}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{N} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}) \\ n & \longmapsto & f(n) = \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & , & \text{si } n \neq 1\,, \\ 2 & , & \text{si } n = 1 \ldots \end{array} \right. \end{array}$$

a) no es continua en 1;

b) no es continua en 3;

c) no es abierta;

d) no es cerrada.

11. La aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo si ...

a) f es biyectiva y abierta;

b) f es continua y abierta;

c) f es biyectiva, abierta y cerrada;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

12. El intervalo $(0, 1)$, dotado de la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}$, es homeomorfo a ...

a) $([0, 1], \tau_{\text{discreta}})$;

b) $((0, 1), \tau_{\text{discreta}})$;

c) $(\mathbb{N}, \tau_{\text{grosera}})$;

d) $((0, +\infty), \tau_{\text{usual}|(0,+\infty)})$.

13. El intervalo $[3, +\infty)$, dotado de la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}$, es homeomorfo a ...

a) $([0, 1), \tau_{\text{usual}|[0,1)})$;

b) $(\mathbb{N}, \tau_{\text{discreta}})$;

c) $(\mathbb{Q}, \tau_{\text{discreta}})$;

d) $(\mathbb{Q}, \tau_{\text{usual}|\mathbb{Q}})$.

14. La aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo si ...

a) f es biyectiva y abierta, y f^{-1} es continua;

b) f es continua, abierta y cerrada;

c) f es biyectiva y abierta, y f^{-1} es cerrada;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

15. La aplicación $\mathrm{Id}_X : (X,\tau) \to (X,\tau')$ es ...

a) continua, si τ' es estrictamente más fina que τ;

b) abierta, si $\tau = \tau_{\text{discreta}}$, sea cual sea τ';

c) cerrada, si $\tau \leq \tau'$;

d) continua, pues es la identidad.

16. Dada la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau') \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{ si } x \neq 0\,, \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \ldots \end{cases} \end{array}$$

a) es posible definir τ' de modo que f sea continua en 0 y la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converja a 0 en $(\mathbb{R},\tau')$;

b) es posible definir τ' de modo que f sea continua en 0 y $0 \notin \overline{(0,+\infty)}$ en $(\mathbb{R},\tau')$;

c) es posible definir τ' de modo que f sea abierta y $\mathbb{R}\setminus\{0\} \notin \tau'$;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

17. Para que la aplicación

$$(\mathbb{R},\tau) \xrightarrow{f} (\mathbb{R},\tau')\,,$$

con $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : x \in G \Rightarrow -x \in G\}$ y $\tau' = \{G \subseteq \mathbb{R} : x \in G \cap (0,+\infty) \Rightarrow [0,x] \subseteq G\}$, sea continua en 1 ...

a) si $f(1) = 1$, $f(-1)$ debe pertenecer a $[0,1]$;

b) si $f(1) = 0$, $f(-1)$ debe ser -1;

c) si $f(1) = -3$, $f(-1)$ debe pertenecer a $[0,3]$;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

18. Para que la aplicación

$$(\mathbb{R}, \tau = \{G \subset \mathbb{R} : 0 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\}) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \tau' = \{G \subseteq \mathbb{R} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}) \ldots$$

a) sea continua en 0, f debe ser constante;

b) sea continua en 1, $f(1)$ puede ser cualquier número real;

c) sea abierta, f no puede ser constante;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

19. Dada la aplicación

$$(\mathbb{N}, \tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1\}, \{1,2\}\}) \xrightarrow{f} (\mathbb{N}, \tau' = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}) \ldots$$

   a) para que f sea continua en 2, basta con que $f(2) \neq 1$;
   b) f sólo es continua en 1, si $f(1) = 1$;
   c) si $1 \notin \operatorname{Im} f$, f es continua en 3;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

20. $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, con la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}$, ...

   a) es homeomorfo a $(\mathbb{N}, \tau_{\text{grosera}})$;
   b) es homeomorfo a $(\mathbb{Q}, \tau_{\text{usual}|\mathbb{Q}})$;
   c) es homeomorfo a $(\mathbb{Z}, \tau_{\text{discreta}})$;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

CAPÍTULO 4
TOPOLOGÍAS PRODUCTO Y COCIENTE

En este tema estudiaremos cómo generar nuevos espacios topológicos a partir de otros preexistentes. Concretamente, definiremos las estructuras topológicas producto y cociente, de modo que ampliaremos nuestro conocimiento del producto y del cociente —conceptos tan ubicuos y fundamentales en toda la Matemática— y lo aplicaremos específicamente a la Topología.

4.1. Espacio topológico producto

Consideremos una familia finita de espacios topológicos: $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Sea $\prod_{k=1}^n X_k$ el producto cartesiano (o directo) de los conjuntos $X_1, \dots, X_n$.

Definidas sobre el producto cartesiano canónicamente, tenemos todas las proyecciones naturales (epiyectivas por definición) en los distintos "factores":

$$\begin{array}{rcll} \prod_{k=1}^n X_k & \xrightarrow{\pi_i} & (X_i, \tau_i) & \qquad\qquad (i = 1, \dots, n) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \pi_i((x_1, \dots, x_n)) = x_i\,. & \end{array}$$

Vamos a tratar de definir sobre el producto $\prod_{k=1}^n X_k$ una topología con el menor número posible de abiertos (lo menos fina posible), de modo que las proyecciones naturales en cada factor sean simultáneamente continuas.[1]

En una topología como la que queremos, deben estar, por descontado, todas las imágenes inversas por las proyecciones naturales de abiertos de los distintos factores. Es decir, queremos que todos los subconjuntos del siguiente tipo sean abiertos en el espacio topológico producto que pretendemos definir:

$$\pi_i^{-1}(G_i), \quad \text{con } G_i \in \tau_i \ \ (i \in \{1, \dots, n\})\,;$$

[1]Si en nuestra búsqueda de una topología que haga continuas todas las proyecciones naturales a un tiempo no aplicamos la restricción de que sea lo menos fina posible, sin ningún trabajo podríamos proponer como tal topología la discreta. Resultado inútil, pues perderíamos absolutamente toda información sobre las topologías de los distintos factores.

ahora bien, como toda topología es cerrada frente a intersecciones finitas, también tendrán que ser abiertos todas las intersecciones finitas de esos subconjuntos, es decir, cualquier subconjunto que se escriba como sigue:

$$\cap_{k=1}^{n}\pi_k^{-1}(G_k), \quad \text{con } G_k \in \tau_k, \ \text{para cada } k \in \{1,\ldots,n\}\,;$$

cada uno de esos subconjuntos, en realidad, puede escribirse asimismo de forma más sencilla, según indica la siguiente igualdad de conjuntos, cuya comprobación es elemental:

$$\cap_{k=1}^{n}\pi_k^{-1}(G_k) = \prod_{k=1}^{n} G_k \quad (\text{con } G_k \in \tau_k, \ \text{para cada } k \in \{1,\ldots,n\})\,;$$

y, puesto que una topología también debe ser cerrada frente a uniones arbitrarias, igualmente hemos de garantizar que todas las posibles uniones de subconjuntos como los anteriores pertenezcan a nuestra topología producto.

Así pues, ésta será la definición del espacio producto buscado:

Definición 4.1.1 *El* ***espacio topológico producto*** *de una familia* $\{(X_k,\tau_k)\}_{k=1}^{n}$ *de espacios topológicos, con* $n\in\mathbb{N}$ *, es el producto cartesiano* $\prod_{k=1}^{n} X_k$ *, dotado de la* ***topología producto****:*

$$\tau_{\text{producto}} = \{\text{uniones arbitrarias de elementos de } \mathcal{B}\}\,,$$

donde $\mathcal{B}$ *es base de la topología producto, formada por los siguientes* ***abiertos básicos****:*

$$\mathcal{B} = \{\prod_{k=1}^{n} G_k : G_k \in \tau_k\,, \forall k \in \{1,\ldots,n\}\}\,.$$

Ejemplos:

1. El espacio topológico producto de finitos espacios topológicos groseros vuelve a ser un espacio topológico grosero:

   Sean $(X,\tau_{\text{grosera}})$, $(Y,\tau_{\text{grosera}})$ espacios topológicos groseros, y sea $(X\times Y,\tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de ambos.

   Por la definición de topología producto que acabamos de proponer, los abiertos en τ_{producto} serán uniones arbitrarias de abiertos básicos de la topología producto, es decir, uniones arbitrarias de subconjuntos que se escriban como productos de abiertos en cada espacio factor; en nuestro caso, puesto que tanto X como Y están dotados de la topología grosera, esos subconjuntos son simplemente los dos siguientes:

   $$X\times Y\,,$$

   $$X\times\emptyset \;=\; \emptyset\times Y \;=\; \emptyset\times\emptyset = \emptyset\,.$$

   Acabamos de comprobar con esto que $\tau_{\text{producto}} = \tau_{\text{grosera}}$.

2. El espacio topológico producto de finitos espacios topológicos discretos vuelve a ser un espacio topológico discreto:

   Sean $(X, \tau_{\text{discreta}})$, $(Y, \tau_{\text{discreta}})$ espacios topológicos discretos, y sea $(X \times Y, \tau_{\text{producto}})$ su espacio topológico producto.

   Sabemos que los abiertos en τ_{producto} son uniones arbitrarias de subconjuntos (abiertos básicos de la topología producto) que sean productos de abiertos en cada factor. Como los subconjuntos unitarios son abiertos en la topología discreta, resulta que cualquier subconjunto unitario de $X \times Y$ es abierto básico en τ_{producto}, pues puede escribirse como producto de unitarios (abiertos, por tanto) en cada factor:

   $$\{(x,y)\} = \{x\} \times \{y\} \quad (x \in X, y \in Y).$$

   Dado que los subconjuntos unitarios en $X \times Y$ son abiertos básicos de la topología producto, podemos concluir que $\tau_{\text{producto}} = \tau_{\text{discreta}}$.

3. $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ es el espacio topológico producto de n copias de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. Por tratarse de un espacio producto de finitos factores, será suficiente comprobarlo —igual que en los dos ejemplos anteriores— para el producto de dos:

   Consideremos $(\mathbb{R}^2\, \tau_{\text{producto}})$, espacio topológico producto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$.

   Los abiertos en la topología usual sobre $\mathbb{R}^2$ son uniones arbitrarias de bolas abiertas con la distancia d_∞; es decir, uniones arbitrarias de regiones cuadradas sin bordes.

   Por otra parte, los abiertos en la topología producto son uniones arbitrarias de abiertos básicos de τ_{producto}, es decir, de subconjuntos que se escriban como productos de abiertos en cada factor. Como en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ los abiertos básicos son intervalos abiertos, cada abierto de la topología producto es una unión arbitraria de regiones rectangulares sin bordes.

   Es evidente que cualquier región rectangular sin bordes se puede escribir como unión de regiones cuadradas sin bordes, y cualquier región cuadrada sin bordes ya es una región rectangular sin bordes. Es decir: $\tau_{\text{producto}} = \tau_{\text{usual}}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Según acabamos de definir la topología producto, ya hemos conseguido que las proyecciones naturales en cada factor —epiyectivas—, definidas sobre el espacio topológico producto, sean todas ellas aplicaciones continuas. Pero obtenemos algo más:

Proposición 4.1.2 *Sea $(\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de una familia de espacios topológicos $\{(X_k, \tau_k)\}_{k=1}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Las proyecciones naturales*

$$\begin{array}{ccc} (\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{producto}}) & \xrightarrow{\pi_i} & (X_i, \tau_i) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \pi_i((x_1, \ldots, x_n)) = x_i\,, \end{array}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, son aplicaciones epiyectivas, continuas y abiertas.

Demostración:

Por lo hecho hasta ahora, tan sólo hemos de demostrar que las proyecciones son aplicaciones abiertas.

Para ello, sea $G \in \tau_{\text{producto}}$. Es decir, G es unión de abiertos básicos de la topología producto.

Así pues, $\pi_i(G)$ es unión de imágenes directas por π_i de abiertos básicos. Veamos cómo es una de estas imágenes directas (y téngase en cuenta que en la línea siguiente cada $G_k \in \tau_k$):

$$\pi_i(\prod_{k=1}^{n} G_k) = G_i .$$

Por lo tanto, $\pi_i(G) \in \tau_i$, lo que demuestra que π_i es una aplicación abierta.

∎

Observación: Las proyecciones naturales en cada factor de un espacio topológico producto no son necesariamente aplicaciones cerradas. Baste como ejemplo la proyección en el primer factor,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{\pi_1} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ (x, y) & \longmapsto & \pi_1((x, y)) = x \,, \end{array}$$

que lleva el cerrado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ en el siguiente subconjunto no cerrado: $\pi_1(A) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

4.2. Propiedad Universal del Producto

Teorema 4.2.1 ***(Propiedad Universal del Producto Directo.)***

Sea $(\prod_{k=1}^{n} X_k, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de una familia de espacios topológicos $\{(X_k, \tau_k)\}_{k=1}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea (Y, τ') un espacio topológico.

Una aplicación $f : (Y, \tau') \to (\prod_{k=1}^{n} X_k, \tau_{\text{producto}})$ es continua si, y solo si, las composiciones $\pi_i \circ f$ son continuas (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Si f es continua, $\pi_i \circ f$ es trivialmente continua, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, por ser composición de continuas.

$(\Leftarrow)$ Ya sabemos cómo son los abiertos de la topología producto. Por eso, debemos ver que la imagen inversa por f de una unión arbitraria de subconjuntos del tipo

$$\cap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(G_k) \ \ (\text{con } G_k \in \tau_k, \text{ para cada } k \in \{1, \ldots, n\}),$$

es un abierto en (Y, τ').

$$f^{-1}(\cup_{\text{arbitraria}}(\cap_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}(G_k))) = \cup_{\text{arbitraria}}(\cap_{k=1}^{n} f^{-1}(\pi_k^{-1}(G_k))) =$$

$$= \cup_{\text{arbitraria}}(\cap_{k=1}^{n} (\pi_k \circ f)^{-1}(G_k));$$

como, por hipótesis, $\pi_k \circ f$ es continua, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, el conjunto obtenido es una unión arbitraria de intersecciones finitas de abiertos de (Y, τ'); por tanto, abierto, lo que nos permite concluir que f es continua.

$\blacksquare$

Ejemplos:

1. La recta (afín) real y la parábola son espacios topológicos homeomorfos. Más concretamente, el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es homeomorfo al siguiente subespacio topológico de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\},$$

   a través de este homeomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \stackrel{h}{\longrightarrow} & (P, \tau_{\text{usual}_{|P}}) \\ x & \longmapsto & h(x) = (x, x^2). \end{array}$$

   La aplicación h es obviamente biyectiva.

   Su inversa, h^{-1}, es continua, por tratarse de la restricción de una aplicación continua (la proyección natural π_1 en el primer factor, definida sobre el espacio producto $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$) al subespacio P.

   En cuanto a la continuidad de h, puesto que se trata de una aplicación que toma valores en un espacio topológico producto, la Propiedad Universal del Producto nos dice que h es continua, si, y sólo si, $\pi_1 \circ h$ y $\pi_2 \circ h$ son ambas aplicaciones continuas:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \stackrel{\pi_1 \circ h}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ x & \longmapsto & (\pi_1 \circ h)(x) = x; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \stackrel{\pi_2 \circ h}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ x & \longmapsto & (\pi_2 \circ h)(x) = x^2. \end{array}$$

   La primera composición ($\pi_1 \circ h$) es justamente la aplicación identidad $\text{Id}_{\mathbb{R}}$, continua, pues la topología en la salida y en la llegada es la misma. La segunda composición es producto de funciones reales continuas ($\pi_2 \circ h = \text{Id}_{\mathbb{R}} \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}}$), y, por tanto, según el ejercicio 20 del tema 3, es una función continua.

2. Una circunferencia a la que se haya quitado un punto es homeomorfa a la recta (afín) real.

   En términos más precisos, son homeomorfos el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ y el subespacio topológico $S_1 \setminus \{(0,1)\}$ de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$, con $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. (Aunque obviamente podríamos haber quitado a la circunferencia cualquier otro punto distinto de $(0,1)$.)

Lo son a través del homeomorfismo φ siguiente (cuya inversa φ^{-1} damos a continuación):

$$\begin{array}{ccc} (S_1 \setminus \{(0,1)\}, \tau_{\text{usual}_{|S_1\setminus\{(0,1)\}}}) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi((x,y)) = \frac{2x}{1-y}\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & (S_1 \setminus \{(0,1)\}, \tau_{\text{usual}_{|S_1\setminus\{(0,1)\}}}) \\ t & \longmapsto & \varphi^{-1}(t) = (\frac{4t}{t^2+4}, \frac{t^2-4}{t^2+4})\,. \end{array}$$

Es una cuenta rutinaria comprobar que una aplicación es inversa de la otra.

La continuidad de φ está asegurada nuevamente por el ejercicio 20 del tema 3, pues se trata de un cociente de funciones reales continuas cuyo denominador no se anula si $(x,y) \in S_1 \setminus \{(0,1)\}$ (el numerador es 2 veces la proyección natural en el primer factor del espacio producto $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$; el denominador es la diferencia de la función constante 1 y la proyección natural en el segundo factor del mismo espacio producto).

La aplicación inversa, φ^{-1}, es una aplicación valorada sobre un espacio topológico producto. Aplicando la Propiedad Universal del Producto, sabemos que φ^{-1} es continua si, y sólo si, son continuas las composiciones con las proyecciones naturales en cada factor: $\pi_1 \circ \varphi^{-1}$ y $\pi_2 \circ \varphi^{-1}$. Y ambas son de nuevo funciones reales (en este caso, de variable real) que se expresan como cocientes de funciones continuas cuyos denominadores no se anulan.

(**Observación:** Lo hecho aquí admite generalización para demostrar que $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ (con $n \geq 2$) es homeomorfo a $S_n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}$, como subespacio topológico de $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_{\text{usual}})$, donde $S_n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$.

En el caso $n=2$ la aplicación que se corresponde con φ en lo hecho anteriormente suele recibir el nombre de *proyección estereográfica*, que puede describirse geométricamente del siguiente modo:

Denotemos por π al plano tangente a la esfera en el polo sur. Dado un punto P de la esfera que no sea el polo norte, llamemos s la recta que pasa por P y por el polo norte de la esfera.

La proyección estereográfica asigna a cada punto P el punto de corte de la recta s con el plano π.)

4.3. Metrizabilidad del espacio producto

Dada una familia finita de espacios topológicos, $(X_1,\tau_1),\ldots,(X_n,\tau_n)$ (con $n \in \mathbb{N}$), la cuestión planteada en esta sección es qué se puede decir de la metrizabilidad del espacio topológico producto $(\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{producto}})$ a partir de la metrizabilidad de los factores.

El enunciado del siguiente teorema afirma que la metrizabilidad de cada uno de los factores es condición necesaria y suficiente para la metrizabilidad del espacio producto.

Teorema 4.3.1 *Sea* $(\prod_{k=1}^{n} X_k, \tau_{\text{producto}})$ *el espacio topológico producto de una familia finita de espacios topológicos:* $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ *(con* $n \in \mathbb{N}$ *). El espacio topológico producto es metrizable si, y sólo si,* (X_i, τ_i) *es metrizable, para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$ *.*

Antes de demostrar el teorema, introduzcamos un nuevo concepto de interés.

Definición 4.3.2 *Sea* $(\prod_{k=1}^{n} X_k, \tau_{\text{producto}})$ *el espacio topológico producto de una familia de espacios topológicos,* $\{(X_k, \tau_k)\}_{k=1}^{n}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), y sea* $(a_1, \dots, a_n) \in \prod_{k=1}^{n} X_k$ *. La* ***sección paralela al factor i-ésimo*** *que pasa por el punto* $(a_1, \dots, a_n)$ *es el siguiente subespacio topológico del espacio producto:*

$$S(X_i\,;(a_1,\dots,a_n)) = \{(x_1,\dots,x_n) \in \prod_{k=1}^{n} X_k : x_k = a_k \ , \text{ si } k \neq i\}\,.$$

Ejemplos:

1. La sección de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ paralela al primer factor que pasa por el punto $(3,1)$ es el siguiente subespacio:

   $$S(\mathbb{R}^{(1)}\,;(3,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}\,;$$

   es decir, la recta que tiene por ecuación $y = 1$.

2. La sección de $(\mathbb{R}^3, \tau_{\text{usual}})$ paralela al segundo factor que pasa por el punto $(0,4,-2)$ es el siguiente subespacio:

   $$S(\mathbb{R}^{(2)}\,;(0,4,-2)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z = -2\}\,;$$

   en este caso, la sección es la recta que tiene por ecuaciones $x = 0$, $z = -2$.

Proposición 4.3.3 *Toda sección paralela a un factor de un espacio topológico producto es homeomorfa al factor correspondiente.*

Demostración:

Sea $S(X_i\,;(a_1,\dots,a_n))$ la sección paralela al factor X_i que pasa por $(a_1,\dots,a_n)$ del espacio topológico producto $(\prod_{k=1}^{n} X_k, \tau_{\text{producto}})$.

Comprobemos que esa sección es homeomorfa al espacio topológico (X_i, τ_i) a través del siguiente homeomorfismo, cuya inversa escribimos a continuación:

$$\begin{array}{ccc} (S(X_i\,;(a_1,\dots,a_n)), {\tau_{\text{producto}}}_{|S}) & \xrightarrow{h} & (X_i, \tau_i) \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & h((x_1,\dots,x_n)) = x_i\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \tau_i) & \xrightarrow{h^{-1}} & (S(X_i\,;(a_1,\dots,a_n)), {\tau_{\text{producto}}}_{|S}) \\ x & \longmapsto & h^{-1}(x) = (y_1,\dots,y_n)\,, \end{array}$$

con $y_i = x$, e $y_k = a_k$, para $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$.

La aplicación h es continua, ya que es la restricción de una aplicación continua (la proyección natural sobre el factor (X_i, τ_i)) al subespacio $S(X_i\,; (a_1, \dots, a_n))$ del espacio producto.

Para acabar con la demostración, basta considerar que h^{-1} es una aplicación que toma valores en un subespacio del espacio producto, y, por tanto, según la Propiedad Universal del Producto, h^{-1} es continua si, y sólo si, lo son las composiciones $\pi_k \circ h^{-1}$, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Veamos cómo es cada una de estas composiciones:

$$\begin{array}{ccccc} (X_i, \tau_i) & \xrightarrow{h^{-1}} & (S(X_i\,; (a_1, \dots, a_n)), \tau_{\text{producto}_{|S}}) & \xrightarrow{\pi_i} & (X_i, \tau_i) \\ x & \longmapsto & h^{-1}(x) = (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \pi_i(h^{-1}(x)) = y_i = x\,; \end{array}$$

$\pi_i \circ h^{-1}$ es continua, pues se trata de la aplicación Id_{X_i} de (X_i, τ_i) en sí mismo.

Por otra parte, si tomamos $k \neq i$, obtenemos que la aplicación $\pi_k \circ h^{-1}$ es constante (asigna a cada $x \in X_i$ el punto $a_k \in X_k$), y, por tanto, continua:

$$\begin{array}{ccccc} (X_i, \tau_i) & \xrightarrow{h^{-1}} & (S(X_i\,; (a_1, \dots, a_n)), \tau_{\text{producto}_{|S}}) & \xrightarrow{\pi_k} & (X_k, \tau_k) \\ x & \longmapsto & h^{-1}(x) = (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \pi_k(h^{-1}(x)) = y_k = a_k\,. \end{array}$$

■

Demostremos ahora el teorema enunciado anteriormente sobre la metrizabilidad del producto.

Demostración del teorema 4.3.1:
(⇒) Supongamos que el espacio producto $(\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{producto}})$ es metrizable.

Puesto que la metrizabilidad es una propiedad hereditaria (véase el ejercicio 12b del tema 2), cualquier sección del producto paralela a un factor es metrizable. Ahora la proposición 4.3.3 nos permite concluir que los espacios factores (X_k, τ_k) , con $k \in \{1, \dots, n\}$, son todos metrizables.

(⇐) Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, sea d_k una métrica sobre X_k tal que $\tau_{d_k} = \tau_k$.

Comprobemos que la *métrica producto* d_∞ , definida como a continuación puede leerse, induce la topología producto, es decir, $\tau_{d_\infty} = \tau_{\text{producto}}$:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{k=1}^n X_k \times \prod_{k=1}^n X_k & \xrightarrow{d_\infty} & \mathbb{R} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \longmapsto & d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))\,, \end{array}$$

con $d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \text{máx}_{1 \le k \le n} d_k(x_k, y_k)$.

Para ello, probemos que la siguiente aplicación identidad es un homeomorfismo:

$$(\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{\text{producto}}) \underset{\xleftarrow{\mathrm{Id}^{(2)}}}{\xrightarrow{\mathrm{Id}^{(1)}}} (\prod_{k=1}^n X_k, \tau_{d_\infty})\,.$$

Veamos que $\mathrm{Id}^{(1)}$ es continua en $(a_1,\ldots,a_n)\in\prod_{k=1}^n X_k$:
Dado $\varepsilon>0$, basta tomar

$$U=\prod_{k=1}^{n} B_{d_k}(a_k,\varepsilon)$$

como entorno de $(a_1,\ldots,a_n)$, de tal modo que, si $(x_1,\ldots,x_n)\in U$, entonces

$$d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n))<\varepsilon\,.$$

Respecto a la continuidad de $\mathrm{Id}^{(2)}$, al ser una aplicación que toma valores en un espacio topológico producto, es suficiente aplicar la Propiedad Universal del Producto para afirmar que $\mathrm{Id}^{(2)}$ es continua si, y sólo si, las composiciones $\pi_i\circ\mathrm{Id}^{(2)}$ con las proyecciones naturales son continuas, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Fijado $i\in\{1,\ldots,n\}$, comprobemos que $\pi_i\circ\mathrm{Id}^{(2)}$ es continua en el punto $(a_1,\ldots,a_n)$ del producto. Téngase en cuenta que $\pi_i\circ\mathrm{Id}^{(2)}$ es la siguiente aplicación entre espacios métricos:

$$\begin{array}{ccccc} (\prod_{k=1}^{n} X_k,\tau_{d_\infty}) & \xrightarrow{\mathrm{Id}^{(2)}} & (\prod_{k=1}^{n} X_k,\tau_{\text{producto}}) & \xrightarrow{\pi_i} & (X_i,\tau_i=\tau_{d_i}) \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & x_i\,. \end{array}$$

Dado $\varepsilon>0$, podemos tomar $\delta=\varepsilon$, de manera que, siempre que

$$d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(a_1,\ldots,a_n))<\delta\,,$$

entonces $d_i(x_i,a_i)<\varepsilon$.

■

4.4. Espacio topológico cociente

Definición 4.4.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Dados un conjunto no vacío Y y una aplicación epiyectiva $f:(X,\tau)\to Y$, la* ***topología cociente*** *dada por f sobre Y es:*

$$\tau_f=\{G\subseteq Y: f^{-1}(G)\in\tau\}\,.$$

El espacio topológico (Y,τ_f) recibe el nombre de ***espacio cociente****, mientras que la aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_f)$ se llama aplicación cociente.*

En general, diremos que una aplicación epiyectiva $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ entre espacios topológicos es una ***aplicación cociente*** *si τ' coincide con la topología cociente τ_f definida por f sobre Y .*

Observaciones:

1. Es inmediato comprobar que la familia de cerrados de un espacio topológico cociente se caracteriza de manera idéntica al modo en que quedan descritos los abiertos de la topología. Es decir, si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_f)$ es una aplicación cociente, los cerrados en (Y,τ_f) son:
$$\mathcal{C}=\{F\subseteq Y: f^{-1}(F)\text{ es cerrado en }(X,\tau)\}\,.$$

2. Nótese que, por definición, toda aplicación cociente es, en particular, una aplicación continua.

   (De hecho, la topología cociente es la topología más fina de la que se puede dotar a Y, de modo que la aplicación epiyectiva $f:(X,\tau)\to Y$ sea continua. Veámoslo:

   Sea τ' una topología sobre Y tal que $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ sea continua, y sea $G\in\tau'$. Puesto que hemos supuesto que f es continua poniendo τ' en Y, $f^{-1}(G)\in\tau$; por definición de τ_f, ello implica que $G\in\tau_f$.)

Ejemplos:

1. Todo cociente de un espacio topológico grosero es un espacio grosero.

   Sea $f:(X,\tau_{\text{grosera}})\to(Y,\tau')$ una aplicación cociente. Puesto que la topología grosera es la menos fina entre todas las posibles topologías sobre un conjunto, para comprobar $\tau'=\tau_{\text{grosera}}$, tan sólo debemos limitarnos a demostrar $\tau'\leq\tau_{\text{grosera}}$:

   Sea $G\in\tau'$; como τ' es la topología cociente dada por f sobre Y, $f^{-1}(G)$ pertenece a la topología grosera sobre X; es decir: $f^{-1}(G)=X$, o bien $f^{-1}(G)=\emptyset$.

   Si $f^{-1}(G)=X$, al ser f epiyectiva, se verifica:

   $$G=f(f^{-1}(G))=f(X)=Y\,.$$

   Por otra parte, si $f^{-1}(G)=\emptyset$, tendríamos:

   $$G=f(f^{-1}(G))=f(\emptyset)=\emptyset\,.$$

   En cualquier caso, acabamos de comprobar que, si $G\in\tau'$, entonces $G\in\tau_{\text{grosera}}$ sobre Y.

2. Todo cociente de un espacio topológico discreto es un espacio discreto.

   Sea $f:(X,\tau_{\text{discreta}})\to(Y,\tau')$ una aplicación cociente. Hemos de comprobar que τ' coincide con la topología discreta sobre Y.

   Para ello, ya que la topología discreta es la topología más fina entre todas las posibles sobre un conjunto, basta ver que, dado cualquier abierto $G\in\tau_{\text{discreta}}$, $G\in\tau'$.

   Dar $G\in\tau_{\text{discreta}}$ en Y es dar un subconjunto cualquiera de Y; por tanto, $f^{-1}(G)$ es un subconjunto cualquiera de X, es decir, $f^{-1}(G)\in\tau_{\text{discreta}}$ en X, lo cual, por definición de topología cociente, implica que $G\in\tau'$.

A continuación, enunciaremos un par de resultados que serán de gran utilidad para comprobar que una aplicación dada entre espacios topológicos es una aplicación cociente.

Proposición 4.4.2 *Si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es una aplicación epiyectiva, continua y abierta (o cerrada), entonces f es una aplicación cociente, es decir, $\tau'=\tau_f$ (la topología τ' coincide con la topología cociente dada por f sobre Y).*

Demostración:

(Haremos la demostración para el caso en que f sea abierta. El caso en que f sea cerrada se deja como sencillo ejercicio.)

$(\leq)$ Esto ya se hizo en la segunda de las observaciones inmediatamente siguientes a la definición 4.4.1.

$(\geq)$ Sea $G \in \tau_f$; por definición, $f^{-1}(G) \in \tau$. Puesto que $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ es abierta, $f(f^{-1}(G)) \in \tau'$. Y, como f es epiyectiva, $f(f^{-1}(G)) = G$, de donde se sigue que $G \in \tau'$.

■

Ejemplos:

1. Las proposiciones 4.1.2 y 4.4.2 nos presentan un primer ejemplo bien sencillo de aplicación cociente: cualquier proyección natural de un espacio topológico producto en uno de sus espacios factores es siempre una aplicación cociente.

   Sin embargo, debe notarse que la observación justamente siguiente a aquella misma proposición 4.1.2 nos dice que no es verdad que cualquier aplicación cociente (epiyectiva y continua, por definición) tenga que ser además cerrada.

2. El ejercicio 15 de este mismo capítulo propone un ejemplo de aplicación cociente (epiyectiva y continua, por definición) que no es abierta.

3. Consideremos la aplicación siguiente:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ (x,y) & \longmapsto & f((x,y)) = x + y\,. \end{array}$$

   Esta aplicación es epiyectiva, continua y abierta; por tanto, según la proposición 4.4.2, se trata de una aplicación cociente.

Definición 4.4.3 *Una aplicación $h : A \to B$ es una* ***sección*** *(o* ***inversa por la derecha****) de la aplicación $f : B \to A$ si $f \circ h = \mathrm{Id}_A$.*

Proposición 4.4.4 *Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Si f admite alguna sección continua, entonces f es una aplicación cociente.*

Demostración:

Supongamos que la aplicación continua $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ tiene una sección continua $s : (Y,\tau') \to (X,\tau)$.

Veamos en primer lugar que entonces f es epiyectiva: dado $y \in Y$, su imagen por la sección, $s(y)$, es un elemento de X que verifica justamente $f(s(y)) = y$.

Para demostrar que f es una aplicación cociente, hemos de comprobar que la topología τ' es la topología cociente τ_f dada por f sobre Y.

Como por hipótesis f es continua, y la topología cociente es la más fina que podemos definir sobre Y de modo que f sea continua, se tiene $\tau_f \geq \tau'$.

Nos falta pues ver que $\tau' \geq \tau_f$. Sea $G \in \tau_f$; por definición de topología cociente, $f^{-1}(G) \in \tau$. Puesto que la sección s es continua, $s^{-1}(f^{-1}(G)) \in \tau'$, y, como $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$:

$$G = \mathrm{Id}_Y^{-1}(G) = s^{-1}(f^{-1}(G)) \in \tau',$$

lo que concluye la demostración.

■

Ejemplos:

1. La función

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & ([0, +\infty), \tau_{\text{usual}}) \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

es cociente, por la proposición 4.4.4, ya que es continua y además admite alguna sección continua; basta considerar como tal la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} ([0, +\infty), \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{s} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ t & \longmapsto & s(t) = +\sqrt{t}\,. \end{array}$$

2. La siguiente aplicación entre espacios topológicos también es cociente:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}, \tau_{\text{usual}}) \\ (x, y, z) & \longmapsto & f((x, y, z)) = (x, y, 0)\,. \end{array}$$

De nuevo la proposición 4.4.4 nos garantiza la afirmación anterior, ya que f es continua (¿por qué?) y podemos dar alguna sección continua suya; por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{s} & (\mathbb{R}^3, \tau_{\text{usual}}) \\ (\lambda, \mu, 0) & \longmapsto & s((\lambda, \mu, 0)) = (\lambda, \mu, 0)\,. \end{array}$$

4.5. Propiedad Universal del Cociente

Teorema 4.5.1 ***(Propiedad Universal del Cociente.)***
Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación cociente. Una aplicación $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ es continua si, y sólo si, $g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau'')$ es continua.

Demostración:
La aplicación g es continua si, y sólo si, dado cualquier $G \in \tau''$, $g^{-1}(G) \in \tau'$.

Como por hipótesis f es una aplicación cociente, τ' es la topología cociente sobre Y dada por f. Por ello, dada la definición de topología cociente, $g^{-1}(G) \in \tau'$ si, y sólo si, $f^{-1}(g^{-1}(G))(= (g \circ f)^{-1}(G)) \in \tau$, lo cual equivale, como sabemos, a que $g \circ f$ sea una aplicación continua.

■

Corolario 4.5.2 ***(Teorema de factorización por el cociente.)***

Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ *una aplicación cociente, y sea* $g : (X,\tau) \to (Z,\tau'')$ *una aplicación continua con la siguiente propiedad:*

$(\diamond)$ *Para cualesquiera* $x_1, x_2 \in X$ *tales que* $f(x_1) = f(x_2)$, *se verifica* $g(x_1) = g(x_2)$.

En estas condiciones, existe una única aplicación continua $h : (Y,\tau') \to (Z,\tau'')$, *de modo que* $h \circ f = g$*:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "f", "\text{cociente}"'] \arrow[d, "\text{continua} + (\diamond)"', "g"] & (Y,\tau') \arrow[dl, dotted, "\exists!\, h \text{ continua} : h\circ f=g"] \\
(Z,\tau'') &
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Empecemos con la unicidad:

Sean h_1, h_2 dos aplicaciones continuas de (Y,τ') en (Z,τ'') tales que $h_1 \circ f = g = h_2 \circ f$. Entonces, dado $y \in Y$, y teniendo en cuenta que f, al ser cociente, es epiyectiva, se verifica:

$$h_1(y) = h_1(f(x)) = (h_1 \circ f)(x) = g(x) = (h_2 \circ f)(x) = h_2(f(x)) = h_2(y),$$

con lo que ya queda demostrado $h_1 = h_2$.

En cuanto a la existencia, definamos h de la siguiente forma, para cada $y \in Y$:

$$h(y) := g(x)\ , \text{ con } x \in f^{-1}(y) \text{ (es decir, } f(x) = y).$$

De este modo, h está bien definida: en efecto, si x_1, x_2 son elementos de X tales que $f(x_1) = f(x_2) = y \in Y$, entonces, puesto que g verifica por hipótesis la propiedad $(\diamond)$, $g(x_1) = h(y) = g(x_2)$, y por tanto la definición de $h(y)$ no depende de la elección que hagamos de $x \in f^{-1}(y)$.

Además, $h \circ f = g$:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = g(x) \ , \ \forall x \in X,$$

según la definición que hemos dado de h.

Por último, la continuidad de h se obtiene de aplicar la Propiedad Universal del Cociente, pues h es una aplicación que sale del espacio topológico cociente (Y,τ'), y cuya composición con la aplicación cociente, $h \circ f = g$, es continua por hipótesis.

■

4.6. Cocientes y relaciones de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto no vacío X, y sea $\pi : X \to X/\!\sim$ la aplicación canónica de paso al cociente, que hace corresponder a cada $x \in X$ su clase de equivalencia, como elemento del conjunto cociente, $[x] \in X/\!\sim$.

Si dotamos al conjunto X de una topología τ, tendremos entonces una aplicación epiyectiva $\pi : (X, \tau) \to X/\!\sim$, y podremos considerar la topología cociente definida sobre $X/\!\sim$ por π:

$$\tau_\pi = \{G \subseteq X/\!\sim : \pi^{-1}(G) \in \tau\},$$

de modo que la aplicación canónica de paso al cociente es una aplicación cociente en el sentido topológico que hemos introducido en este capítulo:

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{\pi} & (X/\!\sim, \tau_\pi) \\ x & \longmapsto & \pi(x) = [x]\,. \end{array}$$

Comprobemos ahora que cualquier aplicación cociente entre espacios topológicos puede entenderse como la aplicación canónica de paso al cociente por una relación de equivalencia.

Toda aplicación $f : X \to Y$ define una relación de equivalencia $\sim_f$ sobre X del siguiente modo:

$$x_1 \sim_f x_2 \;:\Leftrightarrow\; f(x_1) = f(x_2)\,.$$

En particular, si tenemos una aplicación cociente $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, veamos que (Y, τ') es homeomorfo al espacio topológico $(X/\!\sim_f, \tau_\pi)$, siendo $\pi : (X, \tau) \to X/\!\sim_f$ la aplicación canónica de paso al cociente por la relación de equivalencia $\sim_f$.

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & (Y,\tau') \arrow[dl, shift left, "\phi"] \\ (X/\!\sim_f, \tau_\pi) \arrow[ur, shift left, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

Se verifica trivialmente la siguiente proposición:

$$(x_1, x_2 \in X) \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow \pi(x_1) = \pi(x_2)\,.$$

(Dicho de otro modo, tanto f como π podrán hacer el mismo papel que hace la aplicación g en el corolario 4.5.2, pues ambas son continuas —las dos son aplicaciones cocientes— y verifican una respecto de la otra la propiedad $(\diamond)$ que verifica g en aquel enunciado.)

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f", "\text{cociente}"'] \arrow[d, "\pi\ \text{continua}"'] & (Y,\tau') \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ (X/\!\sim_f, \tau_\pi) & \end{tikzcd} \tag{4.6.1}$$

Por el mencionado teorema de factorización por el cociente (corolario 4.5.2), existe una única aplicación ϕ continua, tal que $\phi \circ f = \pi$ —obsérvese el diagrama 4.6.1—, definida así:

$$\phi(y) = \pi(x)\,(= \text{clase de equivalencia por } \sim_f \text{ de } x\,,\ \text{con } x \in f^{-1}(y)).$$

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "f", "\text{continua}"'] \arrow[d, "\pi\ \text{cociente}"'] & (Y,\tau') \\
(X/{\sim_f}, \tau_\pi) \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.6.2}$$

Aplicando de nuevo el teorema de factorización, atendiendo ahora al diagrama 4.6.2, tenemos garantizada la existencia de una única aplicación continua ψ, tal que $\psi \circ \pi = f$, cuya definición es (denotando $[x]$ la clase de equivalencia por $\sim_f$ de x):

$$\psi([x]) = f(x)\ ,\ \text{con } x \text{ tal que } \pi(x) = [x]\,.$$

Veamos para acabar que ϕ y ψ son inversas:

- $(\phi \circ \psi)([x]) = \phi(\psi([x])) = \phi(f(x)) = \pi(x) = [x] = \mathrm{Id}_{X/\sim_f}([x])$;

- $(\psi \circ \phi)(y) = \psi(\phi(y)) = \psi([x]) = f(x) = y = \mathrm{Id}_Y(y)$.

Con todo esto, queda comprobado que $(X/{\sim_f}, \tau_\pi)$ es homeomorfo a (Y, τ').

Ejemplos:

1. Sea (X,τ) un espacio topológico, sobre el que consideramos definida la siguiente relación de equivalencia:
$$x \sim y \ :\Leftrightarrow\ x = y\,.$$

   Esta relación de equivalencia —que es simplemente la relación de igualdad entre elementos de X— hace que haya tantas clases de equivalencia como elementos en X. Por tanto, el conjunto cociente $X/\sim$ está en biyección con X, de modo que, considerando los conjuntos dotados de topologías, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "\pi"'] & (X,\tau) \\
(X/\sim, \tau_\pi) &
\end{tikzcd}$$

Tanto π como Id_X son aplicaciones cocientes, y verifican:

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Id}_X(x_1) = \mathrm{Id}_X(x_2)\,.$$

Por tanto, usando el teorema de factorización por el espacio cociente $(X/\!\sim, \tau_\pi)$, obtenemos la aplicación continua φ del diagrama 4.6.3, que estará definida, según sabemos, como:

$$\varphi([x]) = \mathrm{Id}_X(x)\,.$$

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X", "\text{continua}"'] \arrow[d, "\pi\ \text{cociente}"'] & (X,\tau) \\
(X/\!\sim, \tau_\pi) \arrow[ur, dotted, "\varphi"']
\end{tikzcd} \tag{4.6.3}$$

Del mismo modo, aplicando el teorema de factorización por el espacio cociente (X,τ), conseguimos la aplicación continua ψ del diagrama 4.6.4, definida así:

$$\psi(x) = \pi(x)\,.$$

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X", "\text{cociente}"'] \arrow[d, "\pi\ \text{continua}"'] & (X,\tau) \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\
(X/\!\sim, \tau_\pi)
\end{tikzcd} \tag{4.6.4}$$

Es fácil ver que φ y ψ son inversas la una de la otra, y por tanto hemos comprobado que $(X/\sim, \tau_\pi)$ y (X,τ) son espacios topológicos homeomorfos.

2. Sobre el espacio (X,τ) consideremos la relación de equivalencia que hace que dos elementos cualesquiera de X sean equivalentes.

   Con esta relación de equivalencia, todos los elementos de X pertenecen a una misma clase de equivalencia, y por tanto el conjunto cociente $X/\!\sim$ tiene un único elemento.

   Por tanto, en este caso el espacio topológico cociente es trivial.

Problemas

1. Sean (X,τ) e (Y,τ') espacios topológicos, y sea $(X\times Y,\tau_{\text{producto}})$ su espacio topológico producto.

   a) Demuéstrese que, si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de τ y $\mathcal{B}'$ es una base de τ', entonces la siguiente colección es una base de abiertos de τ_{producto}:

   $$\widetilde{\mathcal{B}} = \{G \times G' : G \in \mathcal{B}, G' \in \mathcal{B}'\}.$$

   b) Dado un elemento $(x_0, y_0) \in X\times Y$, pruébese que, si $\mathcal{B}(x_0)$ es una base de entornos de x_0 en (X,τ) y $\mathcal{B}(y_0)$ es una base de entornos de y_0 en (Y,τ'), entonces

   $$\mathcal{B}((x_0,y_0)) = \{U \times V : U \in \mathcal{B}(x_0), V \in \mathcal{B}(y_0)\}$$

   es una base de entornos de (x_0,y_0) en $(X\times Y,\tau_{\text{producto}})$.

2. Sean (X,τ) e (Y,τ') espacios topológicos, y sean $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$. Pruébese que en el espacio producto $X\times Y$ se verifican las siguientes propiedades:

   a) $\operatorname{Int}(A\times B) = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.
   b) $\overline{A\times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
   c) Como consecuencia del apartado anterior, si A y B son densos en X e Y respectivamente, entonces $A\times B$ es denso en $X\times Y$.

3. Pruébese que, dados dos espacios topológicos, (X,τ), (Y,τ'), los espacios topológicos productos $X\times Y$ e $Y\times X$ son homeomorfos.

4. Sean $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^n$, $\{(Y_i,\tau_i')\}_{i=1}^n$ dos familias finitas de espacios topológicos, sean los espacios topológicos productos respectivos, $(\prod_{i=1}^n X_i, \tau)$ y $(\prod_{i=1}^n Y_i, \tau')$, y consideremos, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, la aplicación $f_i : (X_i,\tau_i) \to (Y_i,\tau_i')$. Demuéstrese que

   $$f : \left(\prod_{i=1}^n X_i\,,\,\tau\right) \longrightarrow \left(\prod_{i=1}^n Y_i\,,\,\tau'\right),$$

   definida del siguiente modo:

   $$f((x_1,\ldots,x_n)) = (f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n)),$$

   es continua si, y sólo si, f_i es continua para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$.

5. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una aplicación entre espacios topológicos. Consideremos el siguiente subespacio topológico del espacio producto de (X,τ) e (Y,τ'):

   $$\operatorname{Grafo}(f) = \{(x,y) \in X\times Y : y = f(x)\}.$$

   Pruébese que f es continua si, y sólo si, la aplicación entre X y $\operatorname{Grafo}(f)$ que asigna a cada $x\in X$ el par $(x,f(x))$ es un homeomorfismo.

6. Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^n$ una familia de espacios topológicos, y sea $(A_i,\tau_{i|A_i})$ subespacio topológico de (X_i,τ_i), para cada $i\in\{1,\dots,n\}$. Compruébese que la topología producto sobre $\prod_{i=1}^n A_i$ coincide con su topología de subespacio de $\prod_{i=1}^n X_i$.

7. Consideremos $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología producto de la discreta y de la topología $\tau=\{\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{I},\emptyset\}$.

   a) Encuéntrese una base de entornos, si es posible numerable, de cada punto de $\mathbb{R}^2$.
   b) Póngase un ejemplo de un subconjunto propio A que sea a la vez abierto y cerrado.
   c) Sea $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$. ¿Es cerrado L? ¿Cuál es su topología de subespacio?

8. Sea $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología producto de la discreta y la usual.

   a) Encuéntrese una base de entornos, si es posible numerable, de cada punto de $\mathbb{R}^2$.
   b) Póngase un ejemplo de un subconjunto propio A que sea a la vez abierto y cerrado.
   c) Póngase un ejemplo de un subconjunto propio A que sea denso en $\mathbb{R}^2$.
   d) ¿Es S_1 (véase el ejercicio 3) un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^2$? Estúdiese cuál es la topología de subespacio que hereda S_1.

9. Considérese el conjunto $X=[0,1]\times[0,1]$ dotado de la topología τ producto de τ_1 y la discreta, donde τ_1 es la topología sobre $[0,1]$ definida del siguiente modo:

$$\tau_1=\{G\subseteq[0,1] : 0\notin G,\ \text{o si } 0\in G,\ \text{entonces } [0,1)\subseteq G\}.$$

   a) Encuéntrense sendas bases de entornos de los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.
   b) Sea $\Delta=\{(x,y)\in X : x=y\}$. Calcúlense $\mathring{\Delta}$, $\overline{\Delta}$, Δ' y $\mathrm{Fr}(\Delta)$.
   c) Estúdiese la continuidad de la siguiente función:

$$\begin{array}{ccc}(X,\tau) & \xrightarrow{f} & (X,\tau_{\text{grosera}}\times\tau_{\text{discreta}})\\ (x,y) & \longmapsto & f((x,y))=(1,x).\end{array}$$

10. Sea (X,τ) un espacio topológico. Demuéstrese que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) (X,τ) es T_2.
   b) La diagonal $\Delta=\{(x,x) : x\in X\}$ es un subconjunto cerrado en $(X\times X,\tau_{\text{producto}})$.

11. Sean τ_1, τ_2 dos topologías de Hausdorff sobre un conjunto no vacío X. Pruébese que, si $(X,\tau_1\cap\tau_2)$ es un espacio de Hausdorff, entonces la diagonal es cerrada en el espacio producto de (X,τ_1) y (X,τ_2).

12. Sea $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una función continua entre espacios topológicos, siendo (Y,τ') un espacio T_2.

    Compruébese que $\mathrm{Grafo}(f) = \{(x,y) : y = f(x)\} \subset X \times Y$ es un cerrado en el espacio topológico producto de (X,τ) e (Y,τ').

    (**Indicación:** Escríbase $\mathrm{Grafo}(f)$ como la imagen inversa por cierta aplicación continua de la diagonal de $Y \times Y$, y aplíquese el ejercicio 10 para concluir la demostración.)

13. Póngase un ejemplo que ilustre la siguiente situación: el espacio topológico $X \times Y$ es homeomorfo a $X \times Z$, y, sin embargo, Y no es homeomorfo a Z.

14. **(Para ampliar:) Productos de familias infinitas de espacios topológicos.**

    Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de espacios topológicos, y consideremos el producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$. La *topología producto* sobre $\prod_{i\in I} X_i$ se define como sigue:

    $$\tau_{\text{producto}} = \{G \subseteq \prod_{i\in I} X_i : G \text{ es unión arbitraria de elementos de } \mathcal{B}_{\text{producto}}\}\,,$$

    donde $\mathcal{B}_{\text{producto}}$ es la base de abiertos de la topología producto formada por los siguientes subconjuntos:

    $$\mathcal{B}_{\text{producto}} = \{B \subseteq \prod_{i\in I} X_i : B = \prod_{i\in I} C_i\}\,,$$

    con

    $$C_i = \begin{cases} G_i \in \tau_i & , \quad \text{si } i \in J\,, \\ X_i & , \quad \text{si } i \notin J\,, \end{cases}$$

    donde J es algún subconjunto finito de I.

    (Es decir, los abiertos básicos de la topología producto son productos cartesianos de abiertos del espacio factor correspondiente en finitos factores y del total del espacio factor correspondiente en el resto de los factores.)

    a) Si el conjunto I es finito, compruébese que esta definición de la topología producto y la que se dio en la definición 4.1.1 son la misma.

    b) Sobre $\prod_{i\in I} X_i$ es posible también definir la siguiente topología, que recibe el nombre de *topología por cajas* y generaliza al caso arbitrario la definición 4.1.1 que se dio para productos finitos:

    $$\tau_{\text{cajas}} = \{G \subseteq \prod_{i\in I} X_i : G \text{ es unión arbitraria de elementos de } \mathcal{B}'\}\,,$$

    donde $\mathcal{B}'$ es la base de abiertos de la topología por cajas formada por los siguientes subconjuntos:

    $$\mathcal{B}' = \{\prod_{i\in I} G_i :\ G_i \in \tau_i,\ \forall i \in I\}\,.$$

    Demuéstrese que la topología por cajas es, en general, más fina que la topología producto.

c) Sea $\mathcal{B}_i$ una base de abiertos en (X_i, τ_i) para cada $i \in I$. Demuéstrense:

1) La siguiente colección es una base de abiertos de la topología producto sobre $\prod_{i\in I} X_i$:
$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} B_i\}$$
donde $B_i \in \mathcal{B}_i$, para $i \in J$, y $B_i = X_i$, para $i \notin J$, con J algún subconjunto finito de I .

2) La siguiente colección es una base de abiertos de la topología por cajas sobre $\prod_{i\in I} X_i$:
$$\mathcal{B}' = \{\prod_{i\in I} B_i\}$$
donde $B_i \in \mathcal{B}_i$, para cada $i \in I$.

d) Sea $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$, y sea $\mathcal{B}_i(x_i)$ una base de entornos de x_i en (X_i, τ_i) , para cada $i \in I$. Demuéstrense:

1) La siguiente colección es una base de entornos de $(x_i)_{i\in I}$ en la topología producto sobre $\prod_{i\in I} X_i$:
$$\mathcal{B}((x_i)_{i\in I}) = \{\prod_{i\in I} B_i\}$$
donde $B_i \in \mathcal{B}_i(x_i)$, para $i \in J$, y $B_i = X_i$, para $i \notin J$, con J algún subconjunto finito de I .

2) La siguiente colección es una base de entornos de $(x_i)_{i\in I}$ en la topología por cajas sobre $\prod_{i\in I} X_i$:
$$\mathcal{B}'((x_i)_{i\in I}) = \{\prod_{i\in I} B_i\}$$
donde $B_i \in \mathcal{B}_i$, para cada $i \in I$.

e) Sea $A_i \subseteq X_i$, para cada $i \in I$.

1) Compruébese que, tanto si sobre $\prod_{i\in I} X_i$ se considera la topología producto, como si se considera la topología por cajas, se verifican las siguientes proposiciones:

   α) $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. (La clausura del producto es el producto de las clausuras.)

   β) $\prod_{i\in I} A_i$ es denso en $\prod_{i\in I} X_i$ si, y sólo si, A_i es denso en X_i , para cada $i \in I$.

2) Estúdiese si se verifica $\mathrm{Int}(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Int}(A_i)$, cuando se considera sobre $\prod_{i\in I} X_i$ bien la topología producto, bien la topología por cajas.

f) Sea $(A_i, \tau_{i|A_i})$ un subespacio topológico de (X_i, τ_i) , para cada $i \in I$. Compruébense:

1) $\prod_{i\in I} A_i$ es un subespacio topológico de $\prod_{i\in I} X_i$, si sobre ambos productos consideramos las topologías productos respectivas.

2) $\prod_{i\in I} A_i$ es un subespacio topológico de $\prod_{i\in I} X_i$, si sobre ambos productos consideramos las topologías por cajas respectivas.

g) Es importante observar que la Propiedad Universal del Producto (teorema 4.2.1) se verifica igualmente para productos arbitrarios dotados de la topología producto, pero no cuando se consideran dotados de la topología por cajas. Veámoslo a continuación:

1) Demuéstrese la siguiente generalización del teorema 4.2.1 a productos arbitrarios:
(Propiedad Universal del Producto.) Sean $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de una familia de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$, la proyección natural $\pi_k : (\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{producto}}) \to (X_k, \tau_k)$, para cada $k \in I$, e (Y, τ') un espacio topológico.
Una aplicación $f : (Y, \tau') \to (\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{producto}})$ es continua si, y solo si, las composiciones $\pi_k \circ f$ son continuas (para cada $k \in I$).

2) Denotaremos por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el producto cartesiano de numerables copias de $\mathbb{R}$, es decir:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R},\ \text{para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

(Obviamente, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las posibles sucesiones de números reales.)
Consideremos la siguiente aplicación entre espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau_{\text{cajas}}) \\ x & \longmapsto & f(x) = (x, x, x, \ldots), \end{array}$$

donde τ_{cajas} es la topología por cajas que se obtiene al considerar la topología usual en cada factor de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{\pi_k \circ f} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ x & \longmapsto & (\pi_k \circ f)(x) = x \end{array}$$

es trivialmente continua. Demuéstrese que, sin embargo, la aplicación f no lo es.

h) Para el espacio topológico producto $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{producto}})$ sigue siendo cierta la proposición 4.3.3 sobre las secciones paralelas de un producto. Compruébese que la demostración que hicimos en su momento es enteramente válida ahora, cambiando los obvios detalles de notación.

i) El apartado inmediatamente anterior permite generalizar a un producto arbitrario de espacios topológicos la primera implicación que demostramos en el teorema 4.3.1: si un espacio topológico producto es metrizable, también lo es cada uno de sus factores.

La implicación inversa de aquel teorema sigue siendo válida para un espacio topológico producto de una familia numerable de espacios topológicos. En la demostración, sin embargo, no podremos considerar como métrica producto (que inducía, según se probaba, la topología producto) la misma que tomábamos en el caso de una familia finita.

Ahora procederíamos así, dada una familia de espacios topológicos metrizables $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (de tal modo que existen métricas d_n tales que $\tau_n = \tau_{d_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$), y dado su producto $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_{\text{producto}})$:

1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sustituimos la distancia d_n por la siguiente:

$$\widetilde{d}_n(x_n, y_n) = \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\} \quad (x_n, y_n \in X_n),$$

que, según se dijo en el ejercicio $22c$ del tema 3, es una distancia acotada (siempre menor o igual que 1) topológicamente equivalente a d_n.
Demuéstrese que D, definida a continuación, es una distancia sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$:

$$D((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widetilde{d}_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

(Obsérvese que esa serie siempre es sumable, pues está mayorada por la serie sumable $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.)

2) Demuéstrese que la aplicación siguiente es un homeomorfismo:

$$(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_{\text{producto}}) \xrightarrow{\text{Id}} (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_D).$$

(Una vez demostrado esto, ya se podrá concluir que la métrica D induce la topología producto sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.)

j) No obstante, no es cierto que el espacio producto de una familia infinita no numerable de espacios metrizables sea necesariamente metrizable.

Compruébese que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, dotado de la topología producto de la usual en cada factor, no es metrizable.

(**Indicación:** Demuéstrese que el espacio producto no es primero contable.)

k) Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos discretos con más de un elemento. Demuéstrese que el espacio producto $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{producto}})$ es un espacio discreto si, y sólo si, I es finito.

l) Para cada $i \in I$, sea $b_i \in X_i$. Pruébese que el conjunto

$$A = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : x_i = b_i \text{ salvo para finitos } i \in I\}$$

es denso en $(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{producto}})$.

m) Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \prod_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathbb{R}$ el producto cartesiano de tantas copias de $\mathbb{R}$ como números reales, y consideremos sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la topología producto de la usual en cada factor. (Obsérvese que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es el conjunto de todas las funciones reales de variable real.) Descríbase una base de entornos de un elemento $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

15. Dada una aplicación cociente $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$, diremos que un subconjunto A de X es *saturado por* f si se verifica la igualdad $f^{-1}(f(A)) = A$.

    Llamaremos *cociente por un subconjunto* A de un conjunto X —y lo denotaremos X/A— al conjunto cociente de X determinado por la relación de equivalencia que hace equivalentes entre sí todos los elementos de A, y fuera de A es simplemente la relación de igualdad entre elementos.

    Sean $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $I = [0,1]$ y $\pi : I \to I/A$ la proyección canónica de paso al cociente. Pruébese que $V = [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$ es un entorno saturado de 0, pero que $\pi(V)$ no es entorno de $\pi(0)$.

16. Diremos que una relación de equivalencia definida sobre un espacio topológico es *abierta* (*cerrada*) si la aplicación natural de paso al cociente inducida por la relación es una aplicación abierta (respectivamente, cerrada).

    Demuéstrese que una relación de equivalencia $\sim$ sobre un espacio (X,τ) es abierta (cerrada) si, y sólo si, el conjunto saturado (véase el ejercicio anterior) por $\sim$ de cualquier abierto (cerrado) de (X,τ) es también abierto (cerrado) en dicho espacio.

17. Consideremos una familia finita $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^n$ de espacios topológicos, sobre los cuales tenemos sendas relaciones $\{R_i\}_{i=1}^n$ de equivalencia abiertas (véase el ejercicio anterior). Si definimos una relación R de equivalencia sobre el espacio producto $\prod_{i=1}^n X_i$ del siguiente modo:

    $$(x_1,\ldots,x_n)\, R\, (y_1,\ldots,y_n) \iff: x_i\, R_i\, y_i\,, \text{ para cada } i \in \{1,\ldots,n\}\,,$$

    compruébese entonces que son homeomorfos estos espacios topológicos:

    $$\prod_{i=1}^n X_i/R_i \quad \text{y} \quad \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)/R\,.$$

    (El primero va dotado de la topología producto de las topologías cocientes de cada τ_i por R_i, mientras que el segundo lleva la topología cociente por R de la topología producto de las τ_i.)

18. *a*) Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X tal que cada clase por $\sim$ es densa en (X,τ). Pruébese que $X/{\sim}$ tiene la topología grosera.

    b) Como consecuencia del apartado *a*, compruébese que, si sobre $\mathbb{R}$ consideramos la relación $x \sim y$, si $x - y \in \mathbb{Q}$, el cociente $\mathbb{R}/{\sim}$ tiene la topología grosera.

19. Sean $f_1 : (X_1, \tau_1) \to (Y_1, \tau_1')$, $f_2 : (X_2, \tau_2) \to (Y_2, \tau_2')$ aplicaciones epiyectivas, continuas y abiertas. Demuéstrese que la aplicación

$$(f_1, f_2) : (X_1 \times X_2, \tau_{\text{producto}}) \longrightarrow (Y_1 \times Y_2, \tau'_{\text{producto}}) \,,$$

definida como

$$(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \,,$$

es una aplicación cociente.

20. Un *retracto* de un espacio topológico (X, τ) en un subespacio suyo $(A, \tau_{|A})$ es una aplicación continua $r : (X, \tau) \to (A, \tau_{|A})$ tal que $r(a) = a$, si $a \in A$. (Es decir, $r \circ i = \mathrm{Id}_A$, donde i es la inclusión natural de A en X.)

    Demuéstrese que todo retracto es una aplicación cociente.

21. Sean $\sim_1$ y $\sim_2$ dos relaciones de equivalencia sobre los espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2), respectivamente. Sea $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ una función compatible con $\sim_1$ y $\sim_2$ (es decir, $x \sim_1 y \Rightarrow f(x) \sim_2 f(y)$). Sea $\tilde{f} : X_1/{\sim_1} \to X_2/{\sim_2}$ la función definida entre los espacios cocientes del siguiente modo:

$$\tilde{f}([x]) = [f(x)] \,.$$

    Demuéstrense:

    a) Si f es continua, $\tilde{f}$ es continua. Además, si f y π_2 (paso al cociente por $\sim_2$) son cerradas (abiertas), entonces $\tilde{f}$ es cerrada (abierta, respectivamente).
    b) Si f es aplicación cociente, $\tilde{f}$ es cociente.
    c) Si f es aplicación cociente, y $\tilde{f}$ biyectiva, entonces $\tilde{f}$ es homeomorfismo.

22. Consideremos el siguiente espacio topológico:

$$(X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \tau = \{X\} \cup \mathcal{P}(\{1, 3, 5, 7, 9\})) \,.$$

    Descríbase el espacio topológico cociente $(X/A, \tau_\pi)$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (véase el ejercicio 15 de este mismo tema) y π es la aplicación canónica de paso al cociente.

23. Sea $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$, y sea H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Dada la relación de equivalencia habitual inducida por el subespacio sobre el espacio vectorial,

$$(x, y) \sim (x', y') \ \Leftrightarrow (x' - x, y' - y) \in H \,,$$

    consideremos el espacio topológico cociente $(\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\pi)$.

    a) Compruébese que el espacio cociente cuando $H = 0$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$.
    b) Compruébese que el espacio cociente es homeomorfo a un espacio trivial (con un solo elemento) si $H = \mathbb{R}^2$.

c) Demuéstrese que el espacio cociente es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ cuando H es un subespacio de dimensión 1.

24. Consideremos $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$. Determínese a qué espacio topológico conocido es homeomorfo el espacio topológico cociente $(\mathbb{R}^2/\sim, \tau_\pi)$, siendo $\sim$ cada una de las siguientes relaciones de equivalencia y $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la aplicación canónica de paso al cociente:

    a) $(x, y) \sim (x', y') \;\Leftrightarrow\; y^2 = y'^2$.
    b) $(x, y) \sim (x', y') \;\Leftrightarrow\; x = x'$ e $y^2 = y'^2$.

25. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ se considera la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \Longleftrightarrow: x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

Pruébese que el espacio cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a la circunferencia, con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$: $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(En el tema 6, tras el corolario 6.2.4, este ejercicio será mucho más sencillo.)

26. Sea $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dotado de la topología de subespacio de la usual de $\mathbb{R}^2$.

    a) Sobre E considérese la relación de equivalencia siguiente:

$$e \sim v \;\Leftrightarrow\; \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } e = \lambda v\,.$$

Siendo $\pi : E \to E/\sim$ la aplicación canónica de paso al cociente, demuéstrese que el espacio topológico cociente $(E/\sim, \tau_\pi)$ es homeomorfo a la circunferencia S_1, dotada de la topología de subespacio de la usual de $\mathbb{R}^2$.

    b) Si sobre E consideramos la relación de equivalencia

$$e \sim v \;\Leftrightarrow\; \text{existe } \lambda \neq 0 \text{ tal que } e = \lambda v\,,$$

entonces el conjunto cociente $E/\sim$ es, por definición, la *recta proyectiva real*:

$$\mathbb{P}_1 = \{< e >: e \in E\}\,.$$

La recta proyectiva puede verse como espacio topológico de modo natural, sin más que considerar $\mathbb{P}_1$ dotado de la topología cociente de la topología de E por la aplicación canónica de paso al cociente (aplicación de proyectivización):

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}_1\,(= E/\sim) \\ e & \longmapsto & \pi(e) =< e > \,. \end{array}$$

Demuéstrese que la recta proyectiva real es un espacio topológico homeomorfo a S_1 con su topología de subespacio de la usual del plano real.

27. Sea $I = [0,1]$ dotado de su topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. Determínese a qué espacio topológico conocido es homeomorfo el espacio cociente $(I/\sim, \tau_\pi)$, siendo $\sim$ cada una de las siguientes relaciones de equivalencia y $\pi : I \to I/\sim$ la aplicación canónica de paso al cociente:

    a) $t \sim t' \;\Leftrightarrow\; t = t', \;$ o bien $\; t, t' \in \{0,1\}$.

    b) $t \sim t' \;\Leftrightarrow\; t = t', \;$ o bien $\; t + t' = 1$.

28. Si en la circunferencia unidad S_1 consideramos la relación de equivalencia

$$x \sim y \Longleftrightarrow: x \text{ e } y \text{ son diametralmente opuestos},$$

véase que S_1 es homeomorfo al cociente $S_1/\sim$. ¿Qué sucede si consideramos la misma relación de equivalencia sobre la esfera unidad S_2?

Ejercicios de autoevaluación

Sólo una de las opciones indicadas es correcta para cada pregunta:

1. Sean dos espacios topológicos, (X, τ), (Y, τ'), y consideremos su espacio producto. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

    a) si el producto es un espacio metrizable, entonces (X, τ) e (Y, τ') son espacios metrizables;

    b) si el producto es un espacio metrizable, entonces es que τ y τ' coinciden con la topología discreta sobre X e Y, respectivamente;

    c) puede suceder que el espacio producto sea metrizable, y que algún subespacio suyo no lo sea;

    d) si (X, τ) e (Y, τ') son espacios groseros, su espacio producto puede ser metrizable.

2. Sean (X, τ) e (Y, τ') dos espacios topológicos, y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. En el espacio producto de (X, τ) e (Y, τ') ...

    a) $A \times B$ es cerrado si, y sólo si, $(X \setminus A) \times (Y \setminus B)$ es cerrado;

    b) $A \times B$ es cerrado si, y sólo si, A y B son cerrados en sus espacios respectivos;

    c) $A \times B$ es abierto si, y sólo si, $(X \setminus A) \times (Y \setminus B)$ es abierto;

    d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

3. Sean dos espacios topológicos, (X, τ), (Y, τ'), y consideremos su espacio producto. Las proyecciones naturales del producto en cada factor ...

a) son cerradas;

b) son continuas sólo si τ es menos fina que τ';

c) no son abiertas en general;

d) son aplicaciones cocientes.

4. Consideremos la función

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{discreta}} \times \tau_{\text{grosera}}) \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} (1, x) & , \text{ si } x \leq 0\,, \\ (1, \frac{1}{x}) & , \text{ si } x > 0\,. \end{cases} \end{array}$$

La función f ...

a) es abierta;

b) es cerrada;

c) no es continua en ningún punto;

d) es continua globalmente.

5. El espacio topológico producto de $([0,1], \tau_{\text{usual}})$ y $([0,1], \tau_{\text{grosera}})$ es...

a) metrizable;

b) homeomorfo a $([0,1] \times [0,1], \tau_{\text{usual}})$;

c) un espacio topológico grosero;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

6. Sean $(X, \tau_{\text{discreta}})$ un espacio topológico discreto y $f : (X, \tau_{\text{discreta}}) \to \mathbb{R}$ una aplicación epiyectiva. La topología cociente sobre $\mathbb{R}$ dada por la aplicación f ...

a) es la grosera;

b) no es metrizable;

c) es la discreta;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

7. Sean $(X, \tau_{\text{grosera}})$ un espacio topológico grosero y $f : (X, \tau_{\text{grosera}}) \to \mathbb{R}$ una aplicación epiyectiva. La topología cociente sobre $\mathbb{R}$ dada por la aplicación f ...

a) no es metrizable;

b) es la discreta;

c) es la usual;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

8. Dado $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, consideremos la aplicación de paso al cociente

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}/\!\sim, \tau_\pi) \\ x & \longmapsto & \pi(x) = [x], \end{array}$$

donde $\sim$ es la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) el espacio cociente es un espacio grosero;

b) el espacio cociente es un espacio discreto;

c) el espacio cociente es homeomorfo a S_1 (circunferencia unidad) con su topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$;

d) el espacio cociente es homeomorfo a $(0,1)$ con su topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$.

9. Dado el espacio topológico $(X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\})$ y dada la mínima relación de equivalencia sobre X tal que $a \sim b$, consideremos el espacio topológico cociente. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

a) el espacio cociente es homeomorfo a (X, τ);

b) el espacio cociente tiene un único punto aislado;

c) el espacio cociente es un espacio topológico discreto;

d) el espacio cociente es un espacio metrizable.

10. Dado el espacio topológico $(X = \{a,b,c,d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c,d\}\})$ y dada la mínima relación de equivalencia sobre X tal que $c \sim d$, consideremos el espacio topológico cociente $(X/\!\sim, \tau_\pi)$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} (X/\!\sim, \tau_\pi) & \xrightarrow{f} & (X, \tau) \\ \overline{a} & \longmapsto & f(\overline{a}) = a, \\ \overline{b} & \longmapsto & f(\overline{b}) = b, \\ \overline{c} & \longmapsto & f(\overline{c}) = c \ldots \end{array}$$

a) es una aplicación cociente;

b) es un homeomorfismo;

c) es abierta;

d) es continua.

11. El espacio topológico producto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$ ...

a) es un espacio metrizable;

b) es un espacio topológico grosero;

c) no es un espacio de Hausdorff;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

12. Si (X, τ) es un espacio topológico T_2, ...

a) el espacio producto de (X, τ) con $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es T_2;

b) todo espacio cociente suyo es T_2;

c) el espacio producto de (X, τ) con $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$ es metrizable;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

13. Sea $f : (X, \tau_{\text{discreta}}) \to (Y, \tau')$ una aplicación epiyectiva entre espacios topológicos. Si $\sim_f$ es la relación de equivalencia definida sobre X por f $(x \sim_f y \Leftrightarrow: f(x) = f(y))$, y $\pi : (X, \tau_{\text{discreta}}) \to (X/\sim_f, \tau_\pi)$ es la aplicación cociente correspondiente, entonces la factorización de f por el cociente,

$$\begin{array}{ccc} (X/\sim_f, \tau_\pi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (Y, \tau') \\ \overline{x} & \longmapsto & \tilde{f}(\overline{x}) = f(x), \ldots \end{array}$$

a) no es homeomorfismo, si τ' no es la topología grosera;

b) es homeomorfismo sólo si τ' es la topología discreta;

c) no es homeomorfismo, porque no es inyectiva;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

14. En el espacio topológico producto $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{producto}})$ de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$, la sucesión $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ...

a) converge al punto $(0, 0)$;

b) tiene como conjunto de límites todo $\mathbb{R}^2$;

c) no converge a ningún punto de $\mathbb{R}^2$;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

15. Sea $(X, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de $(\{0, 1\}, \tau)$ y $(\{0, 1\}, \tau')$, donde τ y τ' son las siguientes topologías:

$$\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\} \ , \ \tau' = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}.$$

Sobre X consideremos la mínima relación de equivalencia $\sim$ tal que $(1, 0) \sim (0, 1)$, y sea π la aplicación canónica de paso al cociente:

$$(X, \tau_{\text{producto}}) \xrightarrow{\pi} (X/\sim, \tau_\pi).$$

En estas condiciones ...

a) la aplicación cociente π es abierta;

b) la topología cociente τ_π es la topología discreta;

c) el espacio topológico cociente $(X/\sim, \tau_\pi)$ no es primero contable;

d) la topología cociente τ_π es la topología grosera.

16. Sea $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de $(\mathbb{R}, D)$ y $(\mathbb{R}, D')$, donde D y D' son las siguientes distancias:

$$D(x,y) = \begin{cases} 1+|x-y| & , \text{ si } x \neq y\,, \\ 0 & , \text{ si } x = y\,. \end{cases}$$

$$D'(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|\,.$$

Siendo d_∞ la métrica producto de D y D' sobre $\mathbb{R}^2$, es decir

$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \text{máx}\{D(x_1,y_1), D'(x_2,y_2)\}\,,$$

entonces ...

a) $\tau_{\text{producto}} = \tau_{\text{discreta}}$;

b) $\tau_{\text{producto}} = \tau_{\text{usual}}$;

c) la bola con d_∞ de centro $(0,0)$ y radio 1 es $\{(0,0)\}$;

d) la bola con d_∞ de centro $(0,0)$ y radio 1 no es un subconjunto acotado en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

17. En el espacio topológico producto $(\mathbb{R}^3, \tau_{\text{producto}})$ de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$, $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ y $(\mathbb{R}, \tau)$, donde $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : [0,1] \subseteq G\} \cup \{\emptyset\}$, si consideramos $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ ...

a) $\overset{\circ}{A} = A$;

b) $\overline{A} = \mathbb{R}^3$;

c) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

d) $\overline{A} = A$.

18. Sea $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$ con $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$. La topología de subespacio que induce la topología producto sobre $[0,1] \times \{0\}$ es ...

a) la topología grosera;

b) la topología discreta;

c) la topología usual;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

19. Sea $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$ con $(\mathbb{R}, \tau')$, siendo $\tau' = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \in G\} \cup \{\emptyset\}$. La topología de subespacio que induce la topología producto sobre $S_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ es ...

a) la topología grosera;

b) la topología discreta;

c) la topología usual;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

20. Consideremos sobre $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \Longleftrightarrow: x^2 = y^2\,,$$

y sea $\pi : (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \to (\mathbb{R}/\!\sim, \tau_\pi)$ la aplicación cociente correspondiente. La sucesión en el espacio cociente, $(\pi(1), \pi(-1), \pi(0), \pi(1), \pi(-1), \pi(0), \ldots)$ (que va alternando indefinidamente esos tres valores), ...

a) es convergente;

b) tiene un único valor de adherencia;

c) tiene tres valores de adherencia distintos;

d) tiene dos valores de adherencia distintos.

CAPÍTULO 5
CONEXIÓN

La conexión es la primera de las dos *propiedades topológicas* que se estudian en este curso. Que sea propiedad topológica quiere decir que se trata de una propiedad que se conserva por homeomorfismos (y aún más, la imagen por una aplicación continua de un espacio conexo es un espacio conexo, Proposición 5.1.3). Este importante hecho es lo que subyace, por ejemplo, en el Teorema de Bolzano del Cálculo de una variable real del primer curso.

Habitualmente, el estudio de la conexión de un espacio puede resultar difícil, por lo que se introduce al final del capítulo otro tipo de conexión —la conexión por arcos— que se adapta mejor para tratar espacios topológicos que sean similares a $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

5.1. Definición y ejemplos

Definición 5.1.1 *Un espacio topológico* (X,τ) *se dice inconexo (o disconexo) si existen dos abiertos no vacíos y disjuntos,* $G_1, G_2 \in \tau$ *, cuya unión sea el total:* $X = G_1 \cup G_2$ *.*

Diremos que (X,τ) *es* ***conexo*** *si no es inconexo.*

Observación:

La condición que debe verificar un espacio topológico (X,τ) para ser considerado como inconexo puede enunciarse de todos estos modos equivalentes (demuéstrese su equivalencia como ejercicio):

1. Que existan dos cerrados no vacíos y disjuntos F_1, F_2, tales que: $X = F_1 \cup F_2$.

2. Que exista un subconjunto propio (ni vacío ni total) que sea simultáneamente abierto y cerrado en (X,τ).

3. Que exista un subconjunto propio de X cuya frontera sea vacía.

Ejemplos:

1. Desde luego, un espacio topológico con un único punto es un conexo de modo trivial.

2. Un espacio topológico grosero también es trivialmente conexo, pues en él no hay más abiertos que total y vacío.

3. Un espacio topológico discreto $(X, \tau_{\text{discreta}})$ con más de un elemento no es conexo, pues X puede escribirse como la siguiente unión de abiertos, no vacíos y disjuntos:

$$X = \{x_0\} \cup (X \setminus \{x_0\}) \ , \ \text{con} \ x_0 \in X \, .$$

4. El ejemplo anterior se puede generalizar del siguiente modo:

   Todo espacio de Hausdorff[1] con más de un elemento y algún punto aislado es inconexo.

   Sea x_0 un punto aislado del espacio de Hausdorff (X, τ). Entonces podemos desconectar X como unión de dos abiertos, no vacíos y disjuntos, así:

$$X = \{x_0\} \cup (X \setminus \{x_0\}) \, .$$

Pero el ejemplo más importante lo vamos a presentar en forma del siguiente teorema.

Teorema 5.1.2 *Sea A un subespacio topológico de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. A es conexo si, y sólo si, A es un intervalo*[2]

Demostración:
$(\Rightarrow)$ Si suponemos que A no es un intervalo, entonces existen $x, y \in A$, digamos $x < y$, de modo que existe z tal que $x < z < y$ y $z \notin A$.

En estas condiciones, A no es conexo, pues es la unión de dos abiertos, no vacíos y disjuntos:

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, +\infty)) \, .$$

(Obviamente, $A \cap (-\infty, z)$ y $A \cap (z, +\infty)$ son disjuntos; además, $x \in A \cap (-\infty, z)$ e $y \in A \cap (z, +\infty)$. Puesto que ambos son intersección de un abierto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ con A, ambos son abiertos de A.)

$(\Leftarrow)$ Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$. Supondremos que A no es conexo, y lleguemos a contradicción.

Que A no sea conexo significa que existen abiertos en la topología de subespacio de A, digamos G_1, G_2, disjuntos y no vacíos, y tales que $A = G_1 \cup G_2$.

(Existen, por tanto, $\tilde{G}_1$ y $\tilde{G}_2$, abiertos en $\mathbb{R}$, tales que $G_1 = \tilde{G}_1 \cap A$ y $G_2 = \tilde{G}_2 \cap A$.)

[1] En realidad, no hay que pedir tanto. Basta con que cualquier punto sea cerrado en el espacio topológico, lo cual resulta equivalente a que el espacio verifique otro axioma de separación más débil: T_1.

Un espacio topológico (X, τ) es T_1 si, para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos G y G', tales que $x \in G$, $x \notin G'$, $y \in G'$, $y \notin G$.

Es una consecuencia directa de la definición que todo espacio T_2 (o de Hausdorff) es también T_1. Además, los espacios topológicos T_1 pueden caracterizarse mediante la propiedad de que los subconjuntos unitarios (los puntos, hablando vagamente) son cerrados del espacio.

[2] Entendemos intervalo según su definición en un conjunto totalmente ordenado —que puede repasarse en el ejercicio $20d$ del tema 2—, como es el caso de $\mathbb{R}$.

Ya que G_1 y G_2 son distintos del vacío, existen $a \in G_1$ y $b \in G_2$, tales que $a \neq b$, puesto que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Digamos que $a < b$.

Entonces existe $\alpha = \sup(G_1 \cap [a,b))$, pues $G_1 \cap [a,b)$ es un subconjunto acotado superiormente[3] (b es una cota superior) de números reales.

Por ser α el supremo (en particular, cota superior) del conjunto $G_1 \cap [a,b)$, $a \leq \alpha$. Por otra parte, al ser α la mínima cota superior de dicho conjunto, y ya que b es una cota superior, también se tiene $\alpha \leq b$.

Es decir, $a \leq \alpha \leq b$; como A es un intervalo, $\alpha \in A$. Con esto llegamos a contradicción, pues vamos a comprobar que α no puede estar ni en G_1 ni en G_2:

1. Si $\alpha \in G_1 (= \tilde{G}_1 \cap A) \subseteq \tilde{G}_1$, entonces $\alpha < b$, pues $b \in G_2$.

   Por tanto, $\alpha \in \tilde{G}_1 \cap (-\infty, b)$; tanto $\tilde{G}_1$ como $(-\infty, b)$ son abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, luego la intersección de ambos también lo es, y podemos afirmar que existe $\delta > 0$ tal que:
   $$[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset \tilde{G}_1 \cap (-\infty, b);$$
   de ahí se sigue que $\alpha < \alpha + \delta < b$, y por consiguiente $\alpha + \delta \in A$, puesto que A es un intervalo.

   Entonces tenemos que $\alpha + \delta \in A$ y que $\alpha + \delta \in \tilde{G}_1$, luego $\alpha + \delta$ también está en $G_1 = \tilde{G}_1 \cap A$.

   Como, por otra parte, $a \leq \alpha < \alpha + \delta < b$, lo cual quiere decir que α no puede ser el supremo de $G_1 \cap [a,b)$, en contradicción con lo supuesto más arriba.

2. Si $\alpha \in G_2 (= \tilde{G}_2 \cap A) \subseteq \tilde{G}_2$, entonces $a < \alpha$, pues $a \in G_1$.

   Por tanto, $\alpha \in (a, +\infty) \cap \tilde{G}_2$. Igual que antes, $\tilde{G}_2$ y $(a, +\infty)$ son abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, y la intersección de ambos también lo es; por eso, existe $\varepsilon > 0$ tal que:
   $$[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset \tilde{G}_2 \cap (a, +\infty);$$
   para cada $x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$, $a < \alpha - \varepsilon \leq x \leq \alpha$, y, ya que A es un intervalo, se sigue que $x \in A$.

   Es decir, tenemos:
   $$[\alpha - \varepsilon, \alpha] \subseteq A \ , \ [\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset \tilde{G}_2,$$
   de donde $[\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset G_2 = \tilde{G}_2 \cap A$.

   Puesto que G_1 y G_2 son disjuntos, $[\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap G_1 = \emptyset$, y llegamos a la conclusión de que $\alpha - \varepsilon$ es una cota superior de $G_1 \cap [a,b)$; como $\alpha - \varepsilon < \alpha$, α tampoco podría ser el supremo de $G_1 \cap [a,b)$, de nuevo en contradicción con lo que supusimos antes.

■

La conexión es una propiedad topológica, pues se conserva por homeomorfismos, como nos garantiza el siguiente resultado.

[3] Recuérdese el Teorema Fundamental del Orden: Todo subconjunto no vacío y acotado superiormente (inferiormente) de números reales tiene supremo (respectivamente, ínfimo).

Proposición 5.1.3 *La imagen continua de un conexo es un conexo.*

Demostración:

Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una aplicación epiyectiva y continua.

Si (Y,τ') no es conexo, es porque existen abiertos G_1, G_2 abiertos, disjuntos y no vacíos, tales que $Y = G_1 \cup G_2$.

Entonces:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(G_1 \cup G_2) = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)\,,$$

de donde se sigue que (X,τ) tampoco sería conexo, pues $f^{-1}(G_1)$ y $f^{-1}(G_2)$ son abiertos (imágenes inversas de abiertos por una aplicación continua), no vacíos (f es epiyectiva, luego es seguro que existen elementos que por f van a G_1 y a G_2, que son ambos no vacíos) y disjuntos (ya que, si existe $z \in f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2)$, entonces $f(z) \in G_1 \cap G_2$, lo cual contradiría el hecho de que G_1 y G_2 son disjuntos).

■

Ejemplos:

1. El teorema 5.1.2, la proposición 5.1.3 y el ejemplo de aplicación de la Propiedad Universal del Producto (teorema 4.2.1), en el que veíamos que la recta y la parábola son espacios topológicos homeomorfos, permiten afirmar que la parábola —entendida como subespacio topológico de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$— es un espacio topológico conexo.

2. De igual manera, como $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es homeomorfo a la circunferencia menos un punto, $S_1 \setminus \{p\} \subset (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$, éste es otro ejemplo de espacio conexo.

3. Cualquier segmento entre dos puntos (considerando sus extremos o no) en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo, dotado de la topología de subespacio inducida por la usual, a un intervalo, visto como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. Si denotamos por $\overline{pq}$ el segmento cerrado de extremos p y q en $\mathbb{R}^n$, el homeomorfismo (compruébese) es bien sencillo:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\varphi} & \overline{pq} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = (1-t)p + tq \end{array}$$

   Luego un segmento también es un espacio conexo.

5.2. Algunos resultados útiles más

En esta sección estudiaremos una serie de resultados que nos permitirán ir ampliando nuestro “bestiario” de espacios conexos.

Empecemos por un teorema que nos será de mucha utilidad en lo sucesivo.

Teorema 5.2.1 *Se verifican las siguientes proposiciones :*

a) Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una colección arbitraria de subespacios topológicos conexos de un espacio topológico (X,τ), tales que $X = \cup_{i\in I} X_i$ y $\cap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$, entonces (X,τ) es conexo.

b) Sea (X,τ) un espacio topológico que verifica la siguiente propiedad: para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un subespacio conexo $Y_{x,y}$ tal que $x, y \in Y_{x,y} \subseteq X$. Entonces (X,τ) es conexo.

Demostración:
a) Sean G_1 y G_2 abiertos disjuntos tales que $X = G_1 \cup G_2$.
Para $k \in I$, tenemos:

$$X_k \subseteq \cup_{i\in I} X_i = X = G_1 \cup G_2\,,$$

luego $X_k = (G_1 \cap X_k) \cup (G_2 \cap X_k)$.

Como X_k es conexo, alguno de esos dos abiertos de la topología de subespacio de X_k debe ser vacío, pues ambos son disjuntos. Digamos, pues, que $G_2 \cap X_k = \emptyset$; por tanto, $X_k \subseteq G_1$.

Comprobemos que entonces, para cada $i \in I$, $X_i \subseteq G_1$. Supongamos que no; es decir, existe $l \in I$, tal que $l \neq k$, y $X_l \subseteq G_2$. De ahí se sigue:

$$\emptyset \neq \cap_{i\in I} X_i \subseteq X_k \cap X_l \subseteq G_1 \cap G_2\,,$$

pero ¡G_1 y G_2 eran disjuntos!

Esta contradicción nos permite concluir, pues $X = \cup_{i\in I} X_i \subseteq G_1$, y $G_2 = \emptyset$, lo cual implica que X es conexo.

b) Fijemos $a \in X$. Para cada $x \in X$, tal que $x \neq a$, existe un subconjunto conexo $Y_{a,x}$ tal que $a, x \in Y_{a,x} \subseteq X$.

Entonces podemos escribir X así:

$$X = \bigcup_{x\in X\,,\, x\neq a} Y_{a,x}\,,$$

como unión de conexos que tienen todos ellos al menos un punto en común, a.

Basta entonces aplicar el apartado *a* para poder afirmar que X es conexo.

■

Ejemplo:

Denotando por $\overline{(0,0)(1,\frac{1}{n})}$ el segmento de $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $(0,0)$ y $(1,\frac{1}{n})$ (con $n \in \mathbb{N}$), entonces el teorema 5.2.1 afirma que el siguiente subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ es conexo, por ser unión de conexos (cada segmento lo es, según vimos en el ejemplo 3 de aplicación del teorema 5.1.2 y de la proposición 5.1.3) con un punto en común (el $(0,0)$):

$$X = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{(0,0)(1,1/n)}\,.$$

Proposición 5.2.2 *Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea $Y \subset X$ un subespacio conexo. Si $Y \subseteq A \subseteq \overline{Y}$, entonces A es conexo.*

Demostración:

En realidad, vamos a demostrar que en cualquier espacio topológico la clausura de un subconjunto conexo es conexo. Nos bastará con esto, pues si $Y \subseteq A \subseteq \overline{Y} \subset (X,\tau)$, entonces:

$$\mathrm{Cl}_A(Y) = \mathrm{Cl}_X \cap A = A\,.$$

Supongamos que $\overline{Y} = G_1 \cup G_2$, con G_1, G_2 abiertos en $\overline{Y}$ y disjuntos. (Es decir, existen abiertos en X, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, tales que $G_1 = \tilde{G}_1 \cap \overline{Y}$ y $G_2 = \tilde{G}_2 \cap \overline{Y}$.) Probaremos que alguno de esos abiertos (G_1 o G_2) es vacío.

Como $Y \subseteq \overline{Y}$, de lo anterior se sigue:

$$Y = (G_1 \cap Y) \cup (G_2 \cap Y) = (\tilde{G}_1 \cap \overline{Y} \cap Y) \cup (\tilde{G}_2 \cap \overline{Y} \cap Y) = (\tilde{G}_1 \cap Y) \cup (\tilde{G}_2 \cap Y).$$

Puesto que Y es conexo, uno de los dos abiertos, bien $\tilde{G}_1 \cap Y$, bien $\tilde{G}_2 \cap Y$, debe ser vacío; digamos $\tilde{G}_2 \cap Y = \emptyset$. De ahí se sigue que $G_2 = \tilde{G}_2 \cap \overline{Y} = \emptyset$.

(Si $x \in \tilde{G}_2 \cap \overline{Y}$, entonces $x \in \overline{Y}$, y la intersección de cualquier entorno de x —en particular, $\tilde{G}_2$, al ser un abierto, y $x \in \tilde{G}_2$— con Y sería no vacía. Luego $\tilde{G}_2 \cap Y$ no sería un subconjunto vacío, en contradicción con lo supuesto anteriormente.)

■

Ejemplos:

1. Por el ejemplo inmediatamente posterior al teorema 5.2.1, ya sabemos que el subespacio $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{(0,0)(1,1/n)}$ de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ es conexo.

   Si a X le añadimos cualquier subconjunto incluido en $[0,1] \times \{0\}$, el espacio resultante seguiría siendo conexo, por la proposición 5.2.2, ya que $\overline{X} = X \cup ([0,1] \times \{0\})$.

2. Ya sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es conexo, gracias al teorema 5.1.2.

   El ejemplo 2 en el que se aplicaba el teorema 4.2.1 (la Propiedad Universal del Producto) nos dice que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es homeomorfo al espacio resultante de quitarle un punto a la circunferencia. Puesto que la proposición 5.1.3 afirma que la conexión se conserva por homeomorfismos, $S_1 \setminus \{p\}$ (subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$) es un conexo.

   La proposición 5.2.2 permite afirmar que la circunferencia también es un conexo, ya que $\overline{S_1 \setminus \{p\}} = S_1$.

Observación:

Es importante notar que S_1 y $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ no son espacios homeomorfos. Basta pensar que si hubiese un homeomorfismo entre ambos, digamos $f : S_1 \to \mathbb{R}$, al quitarle un punto p cualquiera a S_1, también seguiría siendo homeomorfismo la siguiente aplicación:

$$S_1 \setminus \{p\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{f(p)\}.$$

(Sigue siendo biyección, pues hemos quitado un punto en el dominio y la imagen de dicho punto en el codominio. Además, es continua, por ser la restricción a un subespacio de una aplicación continua; idéntico motivo por el cual la aplicación inversa también es continua.)

Pero es imposible que $S_1 \setminus \{p\}$ (que ya hemos visto que es conexo, pues es homemorfo a $\mathbb{R}$) y $\mathbb{R} \setminus \{f(p)\}$ sean homeomorfos, pues, al quitarle un punto a $\mathbb{R}$, lo hemos desconectado —ha dejado de ser un intervalo—:

$$\mathbb{R} \setminus \{f(p)\} = (-\infty, f(p)) \cup (f(p), +\infty).$$

Teorema 5.2.3 *Sea* $(X \times Y, \tau_{\text{producto}})$ *el espacio topológico producto de los espacios* (X, τ) *e* (Y, τ'). *El espacio producto es conexo si, y sólo si,* (X, τ) *e* (Y, τ') *lo son.*

Demostración:
$(\Rightarrow)$ La proposición 5.1.3 permite concluir, ya que cada espacio topológico factor es la imagen continua del espacio producto por la proyección natural correspondiente.

$(\Leftarrow)$ Escribiremos $X \times Y$ como unión de conexos con algún punto en común.

Sea $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Consideremos la sección paralela al primer factor que pasa por el punto (x_0, y_0), es decir, $S(X\,;(x_0, y_0))$. Como sabemos por el teorema 4.3.3, $S(X\,;(x_0, y_0))$ es homeomorfa a (X, τ), y, por tanto (proposición 5.1.3), es un conexo.

De idéntico modo, si consideramos la sección $S(Y\,;(x, y_0))$ paralela al segundo factor pasando por el punto (x, y_0) (con x cualquier punto en X), tenemos otro conexo, por ser homeomorfa a (Y, τ').

La unión de ambas secciones es un conexo, usando el apartado *a* del teorema 5.2.1 (en concreto, (x, y_0) pertenece a ambas secciones). Lo denotaremos A_x:

$$A_x = S(X\,;(x_0, y_0)) \cup S(Y\,;(x, y_0)).$$

Obsérvese que dentro de todos los conjuntos A_x (para cada $x \in X$) se encuentra la sección $S(X\,;(x_0, y_0))$. Entonces podemos ya escribir $X \times Y$ como deseábamos:

$$X \times Y = \cup_{x \in X} A_x.$$

■

Observación:

No sólo puede ampliarse de modo trivial el enunciado del teorema anterior a un producto de finitos (más de dos) espacios topológicos (sin más que tener en cuenta —sencillo ejercicio— que el espacio producto $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$ es homemorfo al espacio producto $X_1 \times \ldots \times X_n$), sino que el resultado sigue siendo cierto para un producto arbitrario de espacios topológicos. (Véase en el ejercicio 21.)

Ejemplos:

1. Ya sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es un espacio conexo. Luego el teorema 5.2.3, que acabamos de demostrar, afirma que $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ (con $n \geq 2$) es conexo.

2. La proyección estereográfica, de idéntica manera a la que definimos entre $S_1 \setminus \{p\}$ y $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, establece un homeomorfismo entre $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ y $S_n \setminus \{p\}$, para cualquier $p \in S_n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ (con $n \geq 2$).

   De nuevo la proposición 5.2.2 garantiza entonces la conexión de $S_n = \overline{S_n \setminus \{p\}}$.

Teorema 5.2.4 *Sea* A *un subconjunto numerable de* $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ *(con* $n \geq 2$*). El subespacio* $\mathbb{R}^n \setminus A$ *es conexo.*

Demostración:

Podemos suponer que $O = (0, \ldots, 0) \notin A$. (Si éste no fuera el caso, bastaría considerar un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo —una traslación valdría— que llevara O a un punto cualquiera que no estuviese en A.)

Demostremos que, dado cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, siempre existe un conexo $Y_{O,x}$ al que pertenecen O y x y tal que $Y_{O,x} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.

Consideremos pues el segmento $\overline{Ox}$. (Ya sabemos que todo segmento es un conexo en $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$.)

Si $\overline{Ox} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, entonces está claro que podemos tomar $Y_{O,x} = \overline{Ox}$.

Supongamos por tanto que existe $y \in \overline{Ox} \cap A$. Cojamos otro segmento auxiliar L que pase por y y que no esté en la misma recta que $\overline{Ox}$.

Si encontramos un punto $z_0 \in L \setminus \{y\}$, tal que $\overline{Oz_0} \cup \overline{z_0x} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, entonces bastaría tomar $Y_{O,x} = \overline{Oz_0} \cup \overline{z_0x}$, pues es la unión de dos conexos (los segmentos $\overline{Oz_0}$ y $\overline{z_0x}$) con un punto en común (el punto z_0).

Ya que L tiene una cantidad no numerable de puntos, y puesto que, dados cualesquiera $z', z'' \in L \setminus \{y\}$ $(z' \neq z'')$, los conjuntos $\overline{Oz'} \cup \overline{z'x}$ y $\overline{Oz''} \cup \overline{z''x}$ sólo tienen en común los puntos O y x, forzosamente debe existir aquel $z_0 \in L$ tal que $\overline{Oz_0} \cup \overline{z_0x} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. En caso contrario, podríamos definir una aplicación inyectiva de $L \setminus \{y\}$ en A, lo cual querría decir que A no podría ser numerable, contra la hipótesis.

■

Ejemplos:

1. El teorema 5.2.4 nos permite afirmar que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ y $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ (con $n \geq 2$) no son espacios homeomorfos: mientras que $\mathbb{R}^n$ sigue siendo conexo si le quitamos un punto, $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ es, sin embargo, inconexo.

2. Del mismo modo, puesto que, vía las proyecciones estereográficas correspondientes, ya sabemos que $S_1 \setminus \{p\}$ (con la topología de subespacio de la usual de $\mathbb{R}^2$) es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ y que $S_n \setminus \{q\}$ (con $n \geq 2$ y la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}^{n+1}$) es homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$, entonces el ejemplo inmediatamente anterior permite afirmar que la circunferencia S_1 no es homeomorfa a ninguna esfera S_n de dimensión mayor o igual que 2.

Teorema 5.2.5 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes las siguientes proposiciones:*

a) (X, τ) es conexo;

b) cualquier aplicación continua de (X, τ) en un espacio discreto con dos elementos es constante;

c) para cualquier función continua $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ tal que $a, b \in f(X)$, se verifica que $[a, b] \subseteq f(X)$.

Demostración:

$(a \Rightarrow b)$ Sea $f : (X, \tau) \to (\{0, 1\}, \tau_{\text{discreta}})$ una aplicación continua. Por tanto, ya que $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos en el espacio discreto, $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{1\})$ son subconjuntos abiertos (trivialmente disjuntos, además) en (X, τ).

Como X puede escribirse así:

$$X = f^{-1}(\{0,1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}),$$

forzosamente uno de esos dos abiertos, digamos $f^{-1}(\{0\})$, debe ser vacío, ya que (X,τ) es conexo por hipótesis. Entonces $f^{-1}(\{1\}) = X$, es decir, f es constante.

$(b \Rightarrow c)$ Supongamos que $g : (X,\tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es una función continua en cuya imagen están los números reales a y b, y tal que existe $c \in (a,b)$ que no pertenece a la imagen $g(X)$.

Entonces podemos definir la siguiente aplicación $h \circ g$ sobre un discreto con dos elementos, que es continua y no constante:

$$\begin{array}{ccccc} (X,\tau) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}\setminus\{c\}, \tau_{\text{usual}|\mathbb{R}\setminus\{c\}}) & \xrightarrow{h} & (\{0,1\}, \tau_{\text{discreta}}) \\ & & t & \longmapsto & h(t) = \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & , & \text{si } t < c\,, \\ 1 & , & \text{si } t > c\,. \end{array} \right. \end{array}$$

Que $h \circ g$ no es constante es evidente. En cuanto a su continuidad, téngase en cuenta que es composición de aplicaciones continuas. (La aplicación h es continua, pues las imágenes inversas por h de los dos abiertos no triviales del discreto con dos elementos son a su vez abiertos en $\mathbb{R}\setminus\{c\}$: $h^{-1}(\{0\}) = (-\infty, c)$ y $h^{-1}(\{1\}) = (c, +\infty)$.)

$(c \Rightarrow a)$ Si (X,τ) no es conexo, existen G_1 y G_2, abiertos disjuntos y no vacíos, tales que $X = G_1 \cup G_2$. Entonces podemos definir la siguiente función continua:

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & , & \text{si } x \in G_1\,, \\ 1 & , & \text{si } x \in G_2\,. \end{array} \right. \end{array}$$

Como $f(X) = \{0,1\}$ y $\tau_{\text{usual}|\{0,1\}} = \tau_{\text{discreta}}$, que f sea continua es equivalente (según la proposición 3.2.5) a que lo sea la aplicación valorada sobre su imagen:

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \xrightarrow{f} & (\{0,1\}, \tau_{\text{discreta}}) \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & , & \text{si } x \in G_1\,, \\ 1 & , & \text{si } x \in G_2\,, \end{array} \right. \end{array}$$

y esta aplicación es trivialmente continua, pues $f^{-1}(\{0\}) = G_1$ y $f^{-1}(\{1\}) = G_2$, y tanto G_1 como G_2 eran abiertos en (X,τ).

Esta función continua f es tal que $0 \in f(X)$, $1 \in f(X)$, y, sin embargo, $[0,1] \not\subseteq f(X)$. (De hecho, $(0,1) \cap f(X) = \emptyset$.)

■

(Este teorema generaliza el conocido teorema de Bolzano, ya estudiado en la asignatura de Cálculo I, cuyo enunciado recordamos a continuación:

Teorema. *Sea* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una aplicación continua, tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Puede entenderse ahora que este enunciado no es más que un caso particular del teorema 5.2.5, en el cual consideramos que el espacio conexo (X,τ) es el intervalo $[a,b]$.

En el ejercicio 5, pueden estudiarse algunas sencillas aplicaciones del teorema de Bolzano.)

5.3. Componentes conexas

Definición 5.3.1 *Sea* (X,τ) *un espacio topológico, y sea* $x_0 \in X$ *. La* ***componente conexa de*** x_0 *es el máximo conexo* $\mathcal{C}_{x_0}$ *tal que* $x_0 \in \mathcal{C}_{x_0}$ *.*

Una ***componente conexa*** $\mathcal{C}$ *del espacio topológico* (X,τ) *es la componente conexa de algún punto en* X *. (*$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{x_0}$ *, para algún* $x_0 \in X$ *.)*

Observaciones:

1. En cualquier espacio topológico (X,τ), y dado cualquier punto $x_0 \in X$, siempre existe un conexo que lo contiene: $\{x_0\}$. Además, basta considerar la unión de todos los conexos en (X,τ) que contienen a x_0 (dicha unión es un conexo, por el apartado a del teorema 5.2.1) para tener la componente conexa de x_0:
$$\mathcal{C}_{x_0} = \bigcup_{\substack{C \text{ conexo} \\ x_0 \in C}} C\,.$$

2. De la definición se sigue que una componente conexa $\mathcal{C}$ en un espacio topológico (X,τ) es un conexo maximal del espacio; es decir, si A es un conexo en (X,τ) tal que $\mathcal{C} \subseteq A$, entonces $\mathcal{C} = A$.

3. En un espacio topológico (X,τ) podemos considerar la siguiente relación de equivalencia: dados $x, y \in X$, $x \sim y$ si, y sólo si, existe un conexo A en (X,τ) tal que $x \in A$ e $y \in A$.

   (Esta relación $\sim$ verifica la propiedad reflexiva de modo trivial, ya que, dado cualquier $x \in X$, $\{x\}$ es conexo.

   La propiedad simétrica es también evidente, pues el orden en el que se enuncian los puntos en la definición de esta relación de equivalencia es totalmente irrelevante.

   En cuanto a la propiedad transitiva, si $x \sim y$, e $y \sim z$, entonces existen un conexo $A_{x,y}$ tal que $x \in A_{x,y}$ e $y \in A_{x,y}$ y un conexo $A_{y,z}$ tal que $y \in A_{y,z}$ y $z \in A_{y,z}$. Basta entonces tomar $A_{x,y} \cup A_{y,z}$ para encontrar un conexo (es unión de conexos con el punto y en común, y podemos aplicar el apartado a del teorema 5.2.1) tal que $x \in A_{x,y} \cup A_{y,z}$ e $y \in A_{x,y} \cup A_{y,z}$.)

   Demostremos ahora que la componente conexa de x_0 en (X,τ) es justamente la clase $[x_0]$ de x_0 por esta relación de equivalencia:

   - sea $y \in \mathcal{C}_{x_0}$; entonces los puntos y y x_0 están en el conexo $\mathcal{C}_{x_0}$, luego $y \sim x_0$; es decir, $y \in [x_0]$;
   - si $y \in [x_0]$, entonces $y \sim x_0$; por tanto, existe un conexo A tal que $x_0 \in A$ e $y \in A$. Como la componente conexa de x_0 es el máximo conexo que contiene a x_0, entonces $A \subseteq \mathcal{C}_{x_0}$, y por consiguiente $y \in \mathcal{C}_{x_0}$.

   Así pues, las componentes conexas establecen una partición (como sucede con las clases por una relación de equivalencia en cualquier conjunto no vacío) en el espacio topológico (X,τ), de modo que X puede escribirse como una unión disjunta de todas sus componentes conexas:

$$X = \coprod_{\substack{\mathcal{C} \\ \text{componente} \\ \text{conexa}}} \mathcal{C}\,.$$

En otras palabras, cualquier punto $x \in X$ está en una componente conexa, y, dadas dos componentes conexas de (X,τ), $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, o bien $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, o bien $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$.

Ejemplos:

1. Desde luego, si el espacio (X,τ) es conexo, tan sólo hay una componente conexa: X.

2. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ la componente conexa de 0 es, pues, $\mathbb{R}$.

   La componente de 0 en $([-1,+\infty), \tau_{\text{usual}|[-1,+\infty)})$ es $[-1,+\infty)$.

   La componente de 0 en $([-1,1] \cup \{2\}, \tau_{\text{usual}|[-1,1]\cup\{2\}})$ es $[-1,1]$.

   La componente de 0 en $(\{0,1\}, \tau_{\text{usual}|\{0,1\}})$ es $\{0\}$.

   Sirva este ejemplo para poner de relieve que el concepto de componente conexa depende del conjunto donde se considere; y eso es así, aunque la topología sea la misma (en todo este ejemplo, siempre la topología usual).

3. Sea $X = r_1 \coprod r_2$ el espacio obtenido mediante la unión de dos rectas paralelas en el plano afín real (con la topología de subespacio de la usual de $\mathbb{R}^2$). Obviamente, esas dos rectas son las dos componentes conexas de X.

   (Si consideramos un subespacio A de X formado por la unión de la recta r_1 y de cualquier colección de puntos de la recta r_2, entonces cualquier otra recta s paralela a r_1 y r_2, que se encuentre entre ambas —es decir, incluida en la región abierta del plano limitada por r_1 y r_2—, define dos semiplanos abiertos, H_1 y H_2, en $\mathbb{R}^2$, de modo que A podría expresarse del siguiente modo:

   $$A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A)\,,$$

   esto es, unión de dos abiertos, no vacíos y disjuntos, lo cual quiere decir que A es inconexo.)

4. En $(X, \tau_{\text{discreta}})$ la componente conexa de $x \in X$ es $\{x\}$. Lo que hicimos al principio de este capítulo para comprobar que un espacio topológico discreto con más de un elemento es inconexo vale ahora para afirmar que cualquier subespacio con más de un elemento de X será igualmente inconexo.

Definición 5.3.2 *Un espacio (X,τ) es **totalmente disconexo** si no existen conexos en X con más de un elemento (o, equivalentemente, si no hay más componentes conexas que los puntos).*

Observación:

El ejemplo inmediatamente anterior muestra que cualquier espacio topológico discreto es totalmente disconexo, pero es importante aclarar que no es cierto que cualquier espacio totalmente disconexo sea un espacio discreto. Simplemente pensemos en $(\mathbb{Q}, \tau_{\text{usual}|\mathbb{Q}})$, que es un espacio totalmente disconexo cuya topología, como ya sabemos —reléase el cuarto ejemplo de la sección 3.3—, no es la discreta.

En $\mathbb{Q}$, entendido como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, no hay conexos con más de un elemento. Si C es un subconjunto de $\mathbb{Q}$, con $q \in C$ y $q' \in C$ ($q \neq q'$, digamos $q < q'$), entonces, para cierto irracional i tal que $q < i < q'$ (hay infinitos así, como en cualquier intervalo de números reales), podemos escribir C como sigue:

$$C = (C \cap (-\infty, i)) \cup (C \cap (i, +\infty)),$$

de donde se sigue que C no puede ser conexo.

Este último ejemplo también permite afirmar que las componentes conexas en un espacio topológico (en $\mathbb{Q}$ las componentes son los subconjuntos unitarios, que no son abiertos en su topología de subespacio) no son, en general, abiertos del espacio.

Sucede, sin embargo, que las componentes conexas siempre son cerrados en cualquier espacio, como afirma el siguiente resultado.

Proposición 5.3.3 *Si $\mathcal{C}$ es una componente conexa de un espacio topológico (X, τ), entonces $\mathcal{C}$ es un cerrado.*

Demostración:

Comprobemos que $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$.

Puesto que $\mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{C}}$, y ya que $\mathcal{C}$ es un conexo en (X, τ), por la proposición 5.2.2, también $\overline{\mathcal{C}}$ es conexo.

Como una componente conexa es un conexo maximal, por fuerza $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$.

■

El teorema que se enuncia a continuación pone en relieve la importancia del concepto de componente conexa, pues muestra que “el número de componentes conexas” de un espacio topológico se conserva por homeomorfismos:

Teorema 5.3.4 *Todo homeomorfismo $f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau')$ induce una biyección entre los respectivos conjuntos de componentes conexas.*

Demostración:

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ un homeomorfismo entre espacios topológicos, y sea $\mathcal{C}$ una componente conexa de (X, τ). Veamos que $f(\mathcal{C})$ es también una componente conexa de (Y, τ'), de modo que habremos probado que el homeomorfismo también establece una biyección entre las componentes conexas de uno y otro espacio.

Puesto que $\mathcal{C}$ es conexo, por la proposición 5.1.3, $f(\mathcal{C})$ también es conexo. Por tanto, existe una componente conexa, digamos $\mathcal{D}$, que contiene a $f(\mathcal{C})$ en (Y, τ').

Como f^{-1} es continua, de nuevo la proposición 5.1.3 garantiza que $f^{-1}(\mathcal{D})$ es un conexo en (X,τ), y tenemos:

$$\mathcal{C} \overset{f \text{ es inyectiva}}{=} f^{-1}(f(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{D})\,.$$

Al ser $\mathcal{C}$ una componente (conexo maximal) en (X,τ), forzosamente debe verificarse la siguiente igualdad:

$$\mathcal{C} = f^{-1}(\mathcal{D})\,.$$

Basta tomar imagen directa por f en ambos miembros de esa igualdad entre conjuntos para acabar la demostración:

$$f(\mathcal{C}) = f(f^{-1}(\mathcal{D})) \overset{f \text{ es epiyectiva}}{=} \mathcal{D}\,.$$

■

Ejemplos:

1. El espacio X, formado por la unión de dos rectas que se cortan en el plano afín real, no puede ser homeomorfo al espacio Y, formado por la unión de dos circunferencias tangentes. (Ambos espacios son considerados, claro está, como subespacios de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$.)

   Si suponemos que existe un homeomorfismo $f : X \to Y$ entre ambos, y le quitamos a X el punto p de corte entre las dos rectas, también seguirá siendo homeomorfismo la siguiente aplicación:

   $$X \setminus \{p\} \xrightarrow{f} Y \setminus \{f(p)\}\,;$$

   y eso no puede suceder, por el teorema 5.3.4, ya que $X \setminus \{p\}$ tiene 4 componentes conexas, mientras que $Y \setminus \{f(p)\}$ tendría 1 componente conexa (seguiría siendo conexo), si $f(p)$ fuera cualquier punto de las dos circunferencias que no sea el de tangencia, o bien 2 componentes, si $f(p)$ fuera justamente el punto de tangencia. En cualquier caso, no se mantendría el número de componentes conexas a través de un homeomorfismo, lo cual no puede suceder.

2. Entendidos también como subespacios de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$, no son homeomorfos el espacio X, cerrado y de interior vacío (esto es terminología topológica para decir que se consideran las líneas del dibujito sin grosor, como verdaderas curvas en el plano), representado por el símbolo del producto tensorial, y el espacio Y, igualmente cerrado y de interior vacío, representado por el dibujito infantil de un tronco de cilindro. (Véase la figura 5.1.)

Si a X le quitamos los cinco puntos indicados en la figura 5.2, en el espacio resultante hay 8 componentes conexas: $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_7$ y $\mathcal{C}_8$. Todas ellas aparecen nombradas en la figura 5.3.

En cambio, de todas las maneras posibles que quitemos cinco puntos en el espacio Y, podremos obtener a lo sumo un espacio con 7 componentes conexas. (Se deja como ejercicio al lector pensar cómo deben quitarse esos cinco puntos en Y para obtener justamente ese número de componentes.)

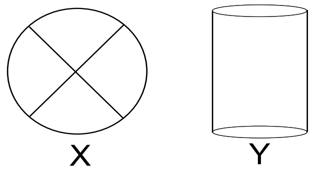

Figura 5.1

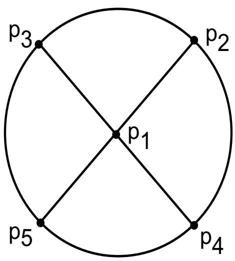

Figura 5.2

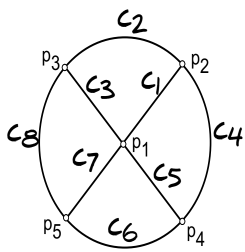

Figura 5.3

5.4. Otros tipos de conexión

Dedicaremos esta sección (y su continuación en el ejercicio de ampliación número 22) a presentar otras "conexiones". Podrá verse que la primera definición de otro tipo de conexión que presentemos será mucho más intuitiva que la de conexión con la que empezamos el capítulo.

Definición 5.4.1 *Sea (X, τ), y sean $x, y \in X$. Un **camino** (o **arco**[4]) en X con inicio en x y final en y es una aplicación continua*

$$\begin{array}{ccc} (I = [0,1], \tau_{\text{usual}|_I}) & \xrightarrow{\gamma} & (X, \tau) \\ t & \longmapsto & \gamma(t)\,, \end{array}$$

tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Observaciones:

1. A partir de ahora, y en este contexto, I será la notación empleada para el intervalo $[0,1]$.
2. En lo sucesivo escribiremos los caminos como aplicaciones continuas $\gamma : I \to X$, sin escribir las topologías, dando por hecho que I lleva la topología de subespacio de la usual de $\mathbb{R}$, y X su topología correspondiente.
3. Abusando del lenguaje, es habitual llamar camino entre dos puntos de un espacio topológico a la imagen de la aplicación continua.
4. En ocasiones, interesará poder expresar un camino $\gamma : I \to X$ como una aplicación definida sobre un intervalo cualquiera $[a, b]$. Entonces usaremos el homeomorfismo entre intervalos,
$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \xrightarrow{\varphi} & [0,1] \\ s & \longmapsto & \varphi(s) = \frac{s-a}{b-a}\,, \end{array}$$
de modo que el camino definido sobre $[a, b]$ será la composición de las aplicaciones φ y γ, que, sin embargo, para no liar demasiado la notación, seguiremos denotando γ:
$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \xrightarrow{\gamma} & X \\ s & \longmapsto & \gamma(\frac{s-a}{b-a})\,. \end{array}$$

Ejemplos:

1. Un camino en un espacio topológico (X, τ) que una $x \in X$ consigo mismo recibe el nombre de **lazo** en x. Se trata, pues, de una aplicación continua
$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\sigma} & X \\ t & \longmapsto & \sigma(t)\,, \end{array}$$

[4]No haremos en estas páginas la distinción que aparece en no pocos textos entre camino y arco. En ellos un camino coincide con nuestra definición, mientras que un arco es un camino γ que establece un homeomorfismo entre I y la imagen de γ.

tal que $\sigma(0) = \sigma(1) = x$.

2. En cualquier espacio topológico (X, τ), dado cualquier $x \in X$, podemos definir el lazo constante en x, como la siguiente aplicación (que es continua, ya que es constante):
$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\mathbf{x}} & X \\ t & \longmapsto & \mathbf{x}(t) = x\,. \end{array}$$

3. Si $\gamma : I \to X$ es un camino en X que une x con y, el **camino inverso de** γ es la siguiente aplicación:
$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & X \\ t & \longmapsto & \gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)\,. \end{array}$$
Este camino γ^{-1} "recorre" la imagen de γ en sentido inverso, empezando en el extremo final de γ, y, y acabando allí donde empezaba γ, es decir, en x.
(Es un sencillo ejercicio comprobar que γ^{-1} es continua, y que se verifica tanto $\gamma^{-1}(0) = y$ como $\gamma^{-1}(1) = x$.)

4. Dados $x, y, z \in (X, \tau)$, y dados dos arcos γ_1 y γ_2, que unen, respectivamente, x con y, e y con z, podemos definir la composición de ambos caminos (será un camino cuya imagen "recorrerá" la imagen de γ_1 entre 0 y $\frac{1}{2}$, para acabar "recorriendo" la imagen de γ_2 entre $\frac{1}{2}$ y 1) del siguiente modo —¡mucho cuidado con la notación, que no es la habitual de la composición de aplicaciones!, téngase en cuenta que no tiene sentido pensar en componer los arcos como aplicaciones—:
$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\gamma_1\cdot\gamma_2} & X \\ t & \longmapsto & (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & , \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ \gamma_2(2t-1) & , \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases} \end{array}$$
(Para obtener el arco $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, tan sólo hace falta expresar el camino γ_1 definido sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, y el camino γ_2 definido sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, como hicimos en la última de las observaciones previas a estos ejemplos.
La aplicación $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ es continua, según la proposición 3.2.7, pues está bien definida sobre la unión de dos cerrados de I $(\gamma_1(2 \cdot \frac{1}{2}) = \gamma_2(2 \cdot \frac{1}{2} - 1))$, y de modo continuo sobre cada uno de los dos.)

5. Cualquier par de puntos $x, y \in (\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ puede unirse mediante un arco, el que recorre el segmento de extremos x e y:
$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y\,. \end{array}$$
(La aplicación γ es continua, por la Propiedad Universal del Producto, ya que, dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces
$$\gamma(t) = ((1-t)x_1 + ty_1, \ldots, (1-t)x_n + ty_n)\,,$$
siendo cada una de las componentes obviamente una función continua de t.)

6. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si, para cada par de puntos $x, y \in C$, el segmento que los tiene como extremos está contenido íntegramente en C.

   Por tanto, cualquier par de puntos x e y en un convexo C puede unirse mediante un camino, el correspondiente al segmento que los une, de modo idéntico a lo que se hace en el ejemplo anterior en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\gamma} & C \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (1-t)\cdot x + t\cdot y\,. \end{array}$$

   (Un ejemplo especialmente importante de subconjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es cualquier bola abierta (o cerrada) con cualquier distancia que venga inducida por una norma: dados y, $z \in B(x_0, r)$, si $t \in (0,1)$, entonces

$$\|(1-t)y + tz - x_0\| = \|(1-t)y + tz - ((1-t)x_0 + tx_0)\| \le$$

$$\le (1-t)\|y - x_0\| + t\|z - x_0\| < (1-t)r + tr = r\,.)$$

7. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice **estrellado** si existe algún punto señalado $a_0 \in A$, tal que, para cada $a \in A$, el segmento de extremos a_0 y a está contenido en A.

   Si A es un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$, para cualquier par de puntos $a, b \in A$, existe un camino que los une; concretamente, la composición del camino que une a con el punto señalado a_0 (el segmento de extremos a y a_0) con el camino que une a_0 con el punto b (el segmento de extremos a_0 y b).

   El lector debería detallar todo esto como ejercicio.

8. Dados los puntos $p = (1,0)$ y $q = (-1,0)$ en S_1 (entendido como subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual), el siguiente es un camino en la circunferencia con inicio en p y final en q:

$$\begin{array}{rcl} I & \xrightarrow{\gamma} & S_1 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)\,. \end{array}$$

   (Queda como ejercicio al lector pensar en algún camino que una dos puntos cualesquiera, digamos $a = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $b = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, con α, $\beta \in [0, 2\pi)$.)

Definición 5.4.2 *Un espacio topológico (X, τ) es **arco-conexo** (o **conexo por arcos**, o **conexo por caminos**) si, para cada par de puntos $x, y \in X$, existe un camino γ en X que los une.*

Ejemplos:

1. Según los ejemplos anteriores, $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ es arco-conexo.

2. Cualquier subespacio convexo o estrellado de $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ es igualmente conexo por arcos.

La conexión por arcos también es, como la conexión, una propiedad topológica, según puede verse en el siguiente resultado.

Proposición 5.4.3 *La imagen continua de un espacio topológico arco-conexo es un espacio arco-conexo.*

Demostración:
Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación epiyectiva y continua entre espacios topológicos, y sea (X, τ) arco-conexo.

Dados y_1 , $y_2 \in Y$, puesto que f es epiyectiva, existen x_1 , $x_2 \in X$, tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.

Como (X, τ) es arco-conexo, existe un camino en X que une x_1 con x_2 :

$$\gamma : I \longrightarrow X \text{ continua}, \text{ tal que } \gamma(0) = x_1 , \gamma(1) = x_2 .$$

Entonces la siguiente aplicación es un camino en Y (es continua por ser composición de aplicaciones continuas):

$$I \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} Y ,$$

con extremo inicial en y_1 ($(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) = y_1$) y extremo final en y_2 ($(f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2) = y_2$).

■

Ejemplos:

1. En el ejemplo en el que hablamos de subconjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, ya vimos que cualquier bola abierta (o cerrada) con una distancia inducida por una norma sobre $\mathbb{R}^n$ es un convexo, y, por tanto, sería un espacio arco-conexo.

   Otro modo de razonar, usando la proposición 5.4.3, es comprobando que cualquier bola abierta es homeomorfa a $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$. Puede considerarse el siguiente homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y $B(0, 1)$ (con $0 = (0, \ldots, 0)$):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & B(0,1) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \frac{x}{1+\|x\|} . \end{array}$$

   (Se deja como ejercicio al lector comprobar que φ es, en efecto, homeomorfismo, y pensar por qué basta con ver que $B(0, 1)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ para asegurar que entre $\mathbb{R}^n$ y una bola abierta de cualquier centro y cualquier radio hay un homeomorfismo.)

   Puesto que $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo, entonces una bola $B(x_0, r)$ —recordemos: correspondiente a una distancia definida a partir de una norma sobre $\mathbb{R}^n$— es también un espacio conexo por arcos.

2. Si se repasa la demostración del teorema 5.2.4, podrá comprobarse que lo que se demostró allí —un segmento, ya lo hemos visto anteriormente, puede entenderse como un camino entre sus extremos—, aunque entonces no fue expresado en estos términos, es que, si A es un subconjunto numerable de $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ (con $n \geq 2$), entonces el subespacio $\mathbb{R}^n \setminus A$ es conexo por arcos.

3. Según lo dicho en el punto anterior, el subespacio $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es arco-conexo. La siguiente aplicación es epiyectiva y continua, y entonces la proposición 5.4.3 garantiza que S_n (subespacio de $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_{\text{usual}})$, con $n \geq 1$) es también un espacio conexo por arcos:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & S_n \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x}{\|x\|} \,. \end{array}$$

Teorema 5.4.4 *Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo.*

Demostración:
Sea (X, τ) un espacio arco-conexo. Supondremos que X no es conexo, y llegaremos a contradicción:
$$X = G_1 \cup G_2 \,,$$
con G_1, $G_2 \in \tau$, no vacíos y disjuntos. Es decir, existen $x \in G_1$ e $y \in G_2$, tales que $x \neq y$.

Como X es conexo por arcos, existe un camino $\gamma : I \to X$ que une x con y (y que seguro que no puede ser una aplicación constante, pues $x \neq y$); es decir, γ es continua, y $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Entonces podemos escribir el espacio conexo I como la siguiente unión:
$$I = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2) \,.$$

Y esto no puede suceder, pues γ es continua, luego $\gamma^{-1}(G_1)$ y $\gamma^{-1}(G_2)$ son abiertos en I, disjuntos (G_1 y G_2 lo son) y no vacíos ($0 \in \gamma^{-1}(G_1)$ y $1 \in \gamma^{-1}(G_2)$).

■

Ejemplos:

1. El subespacio X de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ definido como
$$X = ([0,1] \times \{0\}) \bigcup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \right)$$
(véase la figura 5.4) es trivialmente arco-conexo —y, por tanto, conexo—. Dos puntos a y b cualesquiera en X pueden estar en alguna de estas cuatro situaciones:

   - tanto a como b están en el segmento horizontal de X: a, $b \in [0,1] \times \{0\}$. Entonces un camino en X que une a con b es el propio segmento que los tiene como extremos;
   - $a \in [0,1] \times \{0\}$ y $b \in \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, para algún $n \in \mathbb{N}$ (es decir, un punto en el segmento horizontal de X y otro en alguno de los segmentos verticales). En este caso, basta tomar como camino la composición de los siguientes: primero, el segmento de extremos a y el punto $(\frac{1}{n}, 0)$, en la base del segmento vertical; después, el segmento de extremos el punto $(\frac{1}{n}, 0)$ y el punto b;

- tanto a como b están en un mismo segmento vertical $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$; el propio segmento de extremos a y b es el camino que los une;
- $a \in \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ y $b \in \{\frac{1}{m}\} \times [0,1]$, para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \neq m$) (es decir, un punto en un segmento vertical de X y otro en otro segmento vertical distinto). Entonces habrá que considerar el siguiente camino, composición de los tres siguientes: en primer lugar, el segmento que tiene por extremos a y el punto $(\frac{1}{n}, 0)$; en segundo lugar, el segmento de extremos $(\frac{1}{n}, 0)$ y $(\frac{1}{m}, 0)$; para acabar, el segmento de extremos $(\frac{1}{m}, 0)$ y b.

2. Si ahora consideramos $Y = X \cup \{p\}$, con $p = (0,1)$, puesto que p está en la adherencia de X, la proposición 5.2.2 asegura la conexión de Y. Sin embargo, Y no es un espacio arco-conexo. Veámoslo:

Lo que haremos será comprobar que, si tenemos un camino $\gamma : I \to Y$ tal que $\gamma(0) = p$, entonces γ no "se mueve" de p, es decir, $\gamma(t) = p$, para todo $t \in I$. Con esto, ya quedará claro que Y no es conexo por arcos, pues es imposible dar un camino que empiece en p y acabe en algún punto de X.

Como $\{p\}$ es un cerrado en Y y γ es una aplicación continua, $\gamma^{-1}(\{p\})$ es cerrado en I. Además, es no vacío, ya que $0 \in \gamma^{-1}(\{p\})$.

Si podemos comprobar que $\gamma^{-1}(\{p\})$ es también abierto en I, entonces, puesto que I es conexo, forzosamente debe darse la igualdad $I = \gamma^{-1}(\{p\})$, y habremos acabado. Probemos, pues, que $\gamma^{-1}(\{p\})$ es abierto en I.

Sea $t_0 \in \gamma^{-1}(\{p\})$. Veamos que existe un abierto U en I que contiene a t_0, y tal que $U \subseteq \gamma^{-1}(\{p\})$.

Por la continuidad de γ, dada cualquier bola abierta con la distancia d_2 centrada en p de radio $0 < r < 1$, $B(p, r)$, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I) \subseteq B(p, r) \cap Y.$$

Este conjunto $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I$ es el abierto U buscado. Concluiremos la demostración en cuanto comprobemos que $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I) \subseteq \{p\}$.

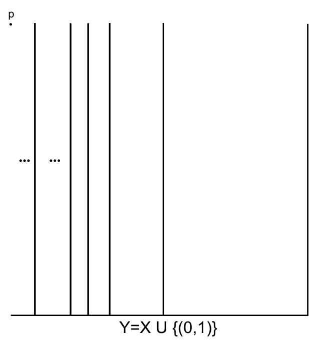

Figura 5.4

Observemos que $B(p,r)\cap Y$ es una unión de segmentos verticales disjuntos de X, junto con el punto p. (Véase la figura 5.5.) Es decir, $B(p,r)\cap X$ es unión de segmentos verticales disjuntos.

Si existe $t'\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I$, tal que $\gamma(t')\in X$, es porque $\gamma(t')$ pertenece a alguno de esos segmentos. Pero cada uno de esos segmentos es simultáneamente abierto y cerrado en $B(p,r)\cap Y$ (¿por qué?), con lo que el segmento en el que está $\gamma(t')$ es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de $\gamma((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I)$, y además no es todo $\gamma((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I)$, ya que $p\in\gamma((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I)$.

Pero todo esto no es posible, ya que, gracias a la proposición 5.1.3, $\gamma((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I)$ debe ser conexo, por ser la imagen por una aplicación continua (γ lo es) de un conexo ($(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I$ es un intervalo, luego conexo).

Es decir, $\gamma((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I)\cap X=\emptyset$, y, por tanto, ya conseguimos lo que buscábamos: $\gamma((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap I)\subseteq\{p\}$.

Este último ejemplo sirve de aviso a quien intente formular un recíproco de la implicación "arco-conexo $\Rightarrow$ conexo". De hecho, si queremos enunciar el inverso correspondiente de esa implicación, hay que añadir alguna hipótesis adicional, pues no basta con que el espacio topológico sea conexo, para garantizar también la conexión por arcos.

Definición 5.4.5 *Un espacio topológico (X,τ) es **localmente conexo por arcos** (o **localmente arco-conexo**) si cada punto $x\in X$ admite una base de entornos conexos por caminos.*

Teorema 5.4.6 *Sea (X,τ) un espacio localmente arco-conexo. Si (X,τ) es conexo, entonces es arco-conexo.*

Demostración:

Fijemos un punto $a\in X$, y comprobemos que, dado cualquier $x\in X$, existe un camino que tiene por extremos x y a.

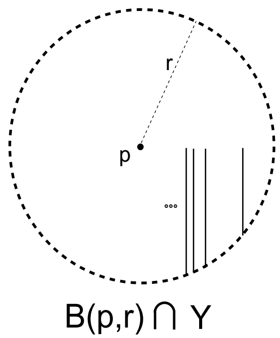

Figura 5.5

Sea $H = \{x \in X : \text{ existe un camino que une } x \text{ con } a\}$. Demostremos que $H = X$. Para ello, primero observemos que $H \neq \emptyset$, pues $a \in H$ (el lazo constante **a** es un camino que une el punto a consigo mismo).

El subconjunto H es abierto: dado $y \in H$ (es decir, existe un camino γ_2 que une y con a), puesto que (X, τ) es localmente arco-conexo, podemos coger un entorno básico V de y que sea arco-conexo; dicho entorno verifica $V \subseteq H$, como puede verse a continuación:

Dado cualquier $x \in V$, existe un camino γ_1 en V (por tanto, en X) que une x con y. El camino composición $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ es un camino que une x con a, por lo que $x \in H$.

Además, H es cerrado ($H = \overline{H}$): si $x \in \overline{H}$, entonces dado cualquier entorno básico V arco-conexo (podemos tomar una base de entornos arco-conexos de x), existe $y \in V \cap H$. Es decir, $y \in V$, luego existe un camino γ_1 que une x con y en V (por consiguiente, en X). Por otra parte, como también $y \in H$, existe un camino γ_2 que une y con a. Así pues, el camino compuesto $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ une x con a, lo que significa que $x \in H$.

Puesto que (X, τ) es conexo, y $H \subseteq X$ es no vacío, abierto y cerrado, queda claro que $H = X$.

∎

Corolario 5.4.7 *Cualquier subconjunto no vacío, abierto y conexo de* $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ *es conexo por arcos.*

Demostración:

Si $G \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto no vacío y abierto, entonces cada punto $x \in G$ admite una bola abierta (con la distancia d_2, por ejemplo) centrada en él, $B(x, r)$, contenida en G. Puesto que cada bola abierta con la distancia d_2 es, como sabemos —reléase el primer ejemplo tras la proposición 5.4.3—, un espacio arco-conexo, resulta que G es localmente arco-conexo y conexo, con lo que, por el teorema 5.4.6, G es conexo por arcos.

∎

Problemas

(En toda esta sección, cada vez que aparezca $\mathbb{R}^n$ (para cualquier $n \in \mathbb{N}$) —o algún subconjunto suyo—, y no se diga lo contrario, supondremos que la topología con la que trabajamos es la usual —respectivamente, la de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}^n$ —.)

1. Clasifíquense topológicamente las cónicas del plano. (Es decir, consideradas como subespacios de $\mathbb{R}^2$, dígase con cuál es homeomorfa —y con cuál no— cada una de ellas: circunferencia, elipse, parábola, hipérbola, par de rectas paralelas, par de rectas que se cortan, una recta.)

2. ¿Son homeomorfos una circunferencia y el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$? ¿Puede ser homeomorfa la circunferencia a algún intervalo, del tipo que sea éste?

3. ¿Son homeomorfos la circunferencia y el espacio topológico formado por dos circunferencias que no se cortan? ¿Y la circunferencia y el espacio formado por dos circunferencias tangentes en un punto?

4. ¿Son homeomorfos una recta y el espacio que se obtiene de considerar una circunferencia y la recta tangente a ella en un punto dado?

5. Aplíquese el teorema 5.2.5 para demostrar el apartado a, y posteriormente hágase uso de este mismo apartado para demostrar b y c :

   a) Sea $f : (X,\tau) \to \mathbb{R}$ una función continua. Si (X,τ) es conexo y f toma valores positivos y negativos, entonces existe algún punto de X donde la función se anula.

   b) Toda función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene un punto fijo (es decir, existe algún $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$).

   c) Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

6. Sabemos (ejercicio 5 del tema 4) que, dada una función continua $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$, existe un homeomorfismo entre (X,τ) y $\text{Grafo}(f) = \{(x,y) : y = f(x)\}$ (la gráfica de f), considerado éste como subespacio topológico del espacio producto de (X,τ) e (Y,τ') .

   Como la conexión es una propiedad topológica, podemos afirmar directamente que la gráfica de cualquier función continua que salga de un espacio conexo es conexa. ¿Es posible poner un ejemplo de una función continua definida sobre un espacio inconexo cuya gráfica sea conexa? ¿Y de una función no continua sobre un espacio conexo cuya gráfica sí sea conexa?

7. En este ejercicio trabajaremos sobre el concepto de espacio totalmente disconexo (definición 5.3.2).

   a) Utilícese que en un espacio totalmente disconexo la componente conexa de cualquier punto es el propio punto para demostrar que todo espacio totalmente disconexo es T_1 . (Se puede encontrar la definición —así como una caracterización especialmente interesante para este apartado— de espacio topológico T_1 en la primera nota a pie de página del capítulo, en la sección 5.1.)

   (**Indicación:** Hágase buen uso de la proposición 5.3.3.)

   b) Demuéstrese que todo espacio T_1 no vacío, y con una base de la topología constituida por conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados, es totalmente disconexo.

   c) Pruébese que cualquier subespacio de un espacio totalmente disconexo es también totalmente disconexo.

   d) Sea (X,τ) un espacio conexo. Un punto $x \in X$ se llama *punto de dispersión* si $X \setminus \{x\}$ es un espacio totalmente disconexo. Póngase un ejemplo lo más sencillo posible de espacio conexo con algún punto de dispersión.

   e) Un espacio topológico se dice *extremadamente disconexo* si es de Hausdorff y todo abierto tiene clausura abierta. Pruébese que todo espacio extremadamente disconexo es totalmente disconexo. ¿Es $\mathbb{Q}$ un espacio extremadamente disconexo?

8. Sea G un abierto en $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$.

   a) Pruébese que cada componente conexa de G es un abierto.
   b) Demuéstrese que el conjunto de las componentes conexas de G es un conjunto numerable.
   c) Utilícense los dos apartados anteriores para probar que todo abierto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es unión numerable de intervalos abiertos que no se cortan.

9. Sea (X, τ) un espacio topológico. Pruébese que la relación que se establece en X cuando se dice "existe un camino en X que une el punto x con el punto y" es una relación de equivalencia.

10. Consideremos una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos conexos por caminos en un espacio topológico (X, τ).

    a) Pruébese que, si para dos índices distintos cualesquiera $i, j \in I$, se verifica que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, entonces $\cup_{i\in I} C_i$ es conexo por caminos.
    b) Demuéstrese que, si existe $i_0 \in I$ tal que $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ para todo $i \in I \setminus \{i_0\}$, entonces $\cup_{i\in I} C_i$ es conexo por caminos.

11. Sean x, y dos puntos en un espacio topológico (X, τ). Diremos que x e y están relacionados mediante la relación $\sim$ (y escribiremos $x \sim y$), si, y sólo si, x e y pertenecen a algún subconjunto conexo de X.

    Igualmente, diremos que están relacionados mediante la relación $\approx$ (lo denotaremos $x \approx y$), si, y sólo si, no hay ninguna descomposición del tipo $X = U \cup V$, con U y V abiertos disjuntos que contengan respectivamente x e y.

    a) Ya se ha demostrado en la tercera observación tras la definición 5.3.1 de componente conexa que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X, y que la clase de equivalencia de x no es otra cosa que la componente conexa de x en (X, τ).

       Pruébese que $\approx$ es también una relación de equivalencia sobre X. Diremos que la clase de equivalencia de x por la relación $\approx$ es la *cuasicomponente* de x en (X, τ).
    b) Demuéstrese que la cuasicomponente de $x \in X$ es la intersección de todos los subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados de (X, τ) que contengan x.
    c) Pruébese que la componente de cualquier punto está contenida en su cuasicomponente.
    d) Denotaremos por X el subespacio del plano real formado por los intervalos cerrados $I_i = [0,1] \times \{\frac{1}{i}\}$ (con $i = 1, 2, \ldots$) y por los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.

       Pruébese que las componentes del espacio X son los segmentos I_i y los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. Compruébese, sin embargo, que las cuasicomponentes son los segmentos I_i y el subconjunto $\{(0,0), (1,0)\}$.

12. Dígase si los siguientes espacios topológicos son conexos o arco-conexos:

a) $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subset \mathbb{R} : 0 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\})$.

b) $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \in G\} \cup \{\emptyset\})$.

c) $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : x \in G \Rightarrow -x \in G\})$.

13. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$.

    a) Demuéstrese que este espacio topológico es conexo.

    b) Compruébese que cualquier subespacio finito con más de un punto o infinito numerable de este espacio es inconexo.

    c) Aplíquese el ejercicio 15 del tema 6 ("Compacidad") para demostrar que este espacio no es conexo por arcos.

    Concretamente, pruébese que toda aplicación continua $\gamma : I \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$ es constante.

14. Consideremos el **conjunto de Cantor** $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, donde:

$$\begin{aligned}
C_1 &= [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\
C_2 &= C_1 \setminus \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right], \\
&\vdots \\
C_n &= C_{n-1} \setminus \left[\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{3^n-2}{3^n}, \frac{3^n-1}{3^n}\right)\right], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pruébese que este espacio no es conexo y que sus componentes conexas son los puntos (es decir, que es totalmente disconexo).

15. Consideremos la **curva seno del topólogo**:

$$X = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : x > 0\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}.$$

a) Demuéstrese que X es conexo. (Es más, puede demostrarse que la unión de $\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : x > 0\}$ con cualquier subconjunto de $\{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ es un conexo.)

b) Demuéstrese que X no es arco-conexo.

c) Compruébese que $\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : x > 0\}$ sí es arco-conexo.

(Teniendo en cuenta también el apartado anterior, acabamos de demostrar que la clausura de un conjunto arco-conexo no es necesariamente arco-conexa.)

d) Compruébese que, si a la curva seno del topólogo le unimos todo el semieje negativo de abscisas, obtenemos otro espacio conexo:

$$Y = \{(x,0) : x < 0\} \cup X \,.$$

e) Compruébese igualmente que también es conexa la "doble" curva seno del topólogo:

$$Z = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : x < 0\} \cup X \,.$$

16. Consideremos ahora el siguiente "doble peine":

$$\begin{aligned} X = {} & [0,1] \times \{1,-1\} \cup \\ & \cup [(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times (0,1)] \cup \\ & \cup [(\mathbb{I} \cap [0,1]) \times (-1,0)] \cup \\ & \cup \{(0,0)\} \,. \end{aligned}$$

Pruébese que X es un espacio conexo.

17. Píntese la típica carita sonriente (a gusto del lector), y determínense sus componentes conexas como subespacio del plano real.

18. Clasifíquense topológicamente las letras del abecedario (entendidas como subespacios cerrados de interior vacío de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$):

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z.

19. ¿Es posible definir una relación de equivalencia $\sim$ sobre el intervalo cerrado unidad I de modo que el espacio topológico cociente $(I/\sim, \tau_\pi)$ (siendo $\pi : I \to I/\sim$ la aplicación canónica de paso al cociente) sea homeomorfo a la letra Ñ (vista como subespacio cerrado de interior vacío de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$)?

20. Complétese la clasificación iniciada en el ejercicio 15*b* del tema 3.

(Es posible —aunque no necesario— usar también en algún instante la compacidad como argumento, motivo por el cual este ejercicio aparecerá también enunciado en el tema 6, dedicado a la compacidad.)

21. **(Para ampliar:) Productos arbitrarios de espacios conexos.**

(Se recomienda al lector trabajar previamente sobre el ejercicio 14 del tema 4.)

Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos conexos, y sea (X, τ) su espacio topológico producto.

El objetivo de este ejercicio es generalizar la demostración que hemos hecho en el teorema 5.2.3 de que el producto de finitos espacios conexos es también un espacio conexo.

Fijemos un elemento $a = (a_i)_{i\in I} \in X$.

a) Demuéstrese que, para cada subconjunto finito $J \subset I$, el siguiente subespacio del espacio producto es conexo:

$$X_J = \{x = (x_i)_{i\in I} \in X : x_i = a_i\,,\ \forall i \notin J\}\,.$$

b) Compruébese que también es conexo el siguiente subespacio del espacio topológico producto:

$$Y = \bigcup_{\substack{J\subset I\\ J\text{ finito}}} X_J\,.$$

c) Conclúyase la demostración de que el espacio topológico producto (X, τ) es conexo, viendo que $X = \overline{Y}$.

22. **(Para ampliar:) Espacios localmente conexos.**

Un espacio topológico (X, τ) es *localmente conexo* si cada $x \in X$ tiene una base de entornos conexos (o, equivalentemente —piénsese por qué—, si cada x tiene una base de entornos abiertos conexos).

a) Compruébese que $(0, 1) \cup (2, 3)$ es un espacio topológico localmente conexo, pero no conexo.

b) Consideremos el siguiente subespacio del plano real:

$$\begin{aligned} X = {}& \{0,1\} \times [-1,1] \cup \\ & \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\} \right) \cup \\ & \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1] \times \left\{-\frac{1}{n}\right\} \right) \cup \\ & \cup [0,1] \times \{0\}. \end{aligned}$$

Demuéstrese que X es conexo —de hecho, es arco-conexo—, pero no localmente conexo.

c) Consideremos $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Compruébese que X es localmente conexo e Y no lo es, y obsérvese que podemos definir la siguiente aplicación continua y epiyectiva de X a Y:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 0 & \longmapsto & f(0) = 0 \\ n & \longmapsto & f(n) = \frac{1}{n}\,. \end{array}$$

(Es decir, la imagen continua de un espacio localmente conexo no es necesariamente localmente conexo.)

d) Sea (X, τ) localmente conexo. Pruébese que, si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es una aplicación epiyectiva, continua y abierta (o cerrada), entonces (Y, τ') es localmente conexo.

(Es decir, la conexión local es una propiedad topológica, pues se conserva por homeomorfismos.)

e) Demuéstrese que un espacio topológico es localmente conexo si, y sólo si, cada componente conexa en cada abierto del espacio es un abierto.

f) Aplicando el apartado $22e$, pruébese que el cociente de un espacio localmente conexo siempre es localmente conexo.

g) Hágase uso del apartado $22e$ para probar que las componentes conexas de un espacio localmente conexo son simultáneamente abiertos y cerrados del espacio.

Ejercicios de autoevaluación

Sólo una de las opciones indicadas es correcta para cada pregunta:

1. En un espacio topológico conexo ...

   a) no existe ningún subconjunto abierto y cerrado simultáneamente;
   b) el total no puede escribirse como la unión de dos cerrados disjuntos;
   c) el total no puede escribirse como la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

2. En un espacio topológico conexo con más de un punto ...

   a) la componente conexa de cada punto es todo el espacio;
   b) pueden existir tantas componentes conexas como puntos haya en el espacio;
   c) no existe ninguna componente conexa;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

3. En un espacio topológico conexo con más de un punto ...

   a) siempre existe alguna componente conexa abierta que no es cerrada;
   b) siempre existe alguna componente conexa cerrada que no es abierta;
   c) el subconjunto formado por un solo punto nunca puede ser su componente conexa;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

4. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ ...

   a) $(0,1]$ no es conexo;
   b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ no es conexo;
   c) $(0,1) \cup \{2\}$ es conexo;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

5. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$ ...

   a) $(0,1]$ no es conexo;
   b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo;
   c) $(0,1) \cup \{2\}$ es conexo;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

6. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$ ...

   a) $(0,1]$ no es conexo;
   b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo;
   c) $(0,1) \cup \{2\}$ no es conexo;
   d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

7. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $Y \subseteq X$. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   a) si Y no es conexo en X, entonces la clausura de Y tampoco es conexo en X;
   b) si Y es conexo en X y de interior no vacío, entonces el interior de Y también es conexo en X;
   c) si la clausura de Y no es conexo, entonces Y tampoco lo es;
   d) si Y no es conexo y tiene interior no vacío, entonces el interior de Y tampoco es conexo.

8. En $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ ...

   a) el subespacio formado por la unión de dos rectas paralelas es conexo;
   b) el subespacio formado por los lados de un polígono regular no es conexo;
   c) el subespacio formado por la unión de las dos ramas de una hipérbola no es conexo;
   d) el subespacio formado por la unión de dos rectas que pasan por $(0,0)$ no es conexo.

9. En $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ ...

   a) el subespacio formado por la unión de dos circunferencias concéntricas no es conexo;

b) el subespacio formado por la unión de una circunferencia con su centro es conexo;
c) la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas no es un conexo;
d) la unión de dos abiertos conexos vuelve a ser un abierto conexo.

10. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) la intersección de dos conexos en un espacio topológico es un conexo;
b) la unión de dos conexos en un espacio topológico es un conexo;
c) la frontera de un conexo en un espacio topológico es un conexo;
d) el complementario de un conexo en un espacio topológico no tiene por qué ser un conexo.

11. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) la unión de dos componentes conexas distintas en un espacio topológico no es otra componente conexa;
b) la intersección de dos componentes conexas distintas en un espacio topológico tiene siempre interior no vacío;
c) la componente conexa de un punto en un espacio topológico siempre tiene más de un punto;
d) toda componente conexa en un espacio topológico es un abierto del espacio.

12. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) un espacio topológico conexo por arcos puede tener tres componentes conexas;
b) un espacio topológico con tres componentes conexas no puede ser localmente conexo por arcos;
c) un espacio topológico conexo puede tener tres componentes conexas;
d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

13. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) en un espacio topológico conexo por arcos siempre hay al menos dos componentes conexas distintas;
b) en un espacio topológico conexo y localmente conexo por arcos puede existir un par de puntos que no se unan mediante un arco;
c) en un espacio topológico localmente conexo por arcos puede existir un par de puntos que no se unan mediante un arco;
d) en un espacio conexo dos puntos cualesquiera siempre pueden unirse mediante un arco.

14. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \ldots$

    a) $(0,1)$ no es conexo por arcos;
    b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo por arcos;
    c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ no es localmente conexo por arcos;
    d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ no es localmente conexo por arcos.

15. En un espacio métrico …

    a) ningún subespacio no acotado es conexo;
    b) todo subespacio acotado es conexo;
    c) la componente conexa de cada punto es la bola abierta de centro dicho punto y de radio 1;
    d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

16. En un espacio métrico …

    a) hay tantas componentes conexas como puntos haya en el espacio;
    b) sólo hay una componente conexa;
    c) las componentes conexas no tienen por qué ser subconjuntos acotados;
    d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

17. En un espacio conexo por arcos …

    a) es posible definir una relación de equivalencia, de modo que el espacio cociente sea homeomorfo a un espacio topológico discreto con más de un elemento;
    b) sólo hay una componente conexa;
    c) todo subespacio es conexo por arcos;
    d) puede existir algún punto cerrado que sea aislado.

18. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Dígase cuál de las siguientes situaciones es la única posible:

    a) x e y pertenecen a componentes conexas distintas, y existe un arco que une x con y;
    b) x e y son puntos aislados, y el subespacio $\{x, y\}$ no es conexo;
    c) x puede unirse con y mediante un camino, pero y no puede unirse con x;
    d) ni $\{x\}$ ni $\{y\}$ son conexos.

19. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean $A, B \subseteq X$ dos subconjuntos distintos y no vacíos. Dígase cuál de las siguientes situaciones es la única posible:

a) A, B y $A \cup B$ son conexos;

b) A y B son conexos por arcos, $A \cap B \neq \emptyset$, y $A \cup B$ no es conexo;

c) A es la componente conexa de un punto de B, $A \subsetneq B$, y B es conexo;

d) $A \cap B \neq \emptyset$, y $A \cap B$ es la componente conexa de todo punto de $A \cap B$, siendo A y B conexos.

20. Un espacio topológico T_2 con más de un punto en el que cada abierto tiene clausura abierta ...

a) tiene una única componente conexa;

b) no puede ser conexo por arcos;

c) tiene dos componentes conexas distintas cuya intersección es distinta del vacío;

d) ninguna de las anteriores opciones es correcta.

CAPÍTULO 5
COMPACIDAD

El último capítulo de este libro está dedicado al estudio de la compacidad, que quizá sea la propiedad topológica más importante de las introducidas hasta ahora. En cierto sentido, los espacios topológicos compactos se comportan como los espacios finitos; por ejemplo, en ellos toda función continua alcanza un máximo y un mínimo.

Tras presentar unos resultados generales, se concluye con el estudio de los subespacios compactos en los espacios métricos. Entre estos resultados, cabe destacar la caracterización —que no es puramente topológica, ya que la acotación no es una propiedad topológica— de los subespacios compactos de $(\mathbb{R}^n, \tau_{usual})$ como los subespacios cerrados y acotados (Teorema 6.3.1).

6.1. Definición y ejemplos

Definición 6.1.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Diremos que una colección de abiertos $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ es un* ***recubrimiento*** *de X si $X = \cup_{i\in I} G_i$.*

Dado un recubrimiento $\{G_i\}_{i\in I}$ por abiertos de X, un subrecubrimiento de él será cualquier subcolección de $\{G_i\}_{i\in I}$ que sirva a su vez como recubrimiento de X.

Definición 6.1.2 *Un espacio topológico (X,τ) es* ***compacto*** *si cualquier recubrimiento por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito:*

$$X = \bigcup_{i\in I} G_i \ \rightsquigarrow \ X = \bigcup_{k=1}^{N} G_{i_k} \text{ (para algún } N\in\mathbb{N}) .$$

Ejemplos:

1. Cualquier espacio topológico grosero $(X, \tau_{\text{grosera}})$ es compacto, ya que en un recubrimiento por abiertos de X por fuerza se debe encontrar el único abierto no vacío que existe en esta topología, que es el propio X. Dicho abierto sirve como subrecubrimiento finito, por tanto.

2. Cualquier espacio topológico $(X = \{x_1, \ldots, x_N\}, \tau)$ (con $N \in \mathbb{N}$) con una cantidad finita de elementos es trivialmente compacto, pues, dado cualquier recubrimiento por abiertos del espacio, $X = \cup_{i \in I} G_i$, basta escoger, para cada punto, un abierto que lo contenga, entre los del recubrimiento, de modo que puede extraerse el siguiente subrecubrimiento finito:
$$X = \bigcup_{k=1}^{N} G_{i_k}$$
($x_k \in G_{i_k}$, para cada $k \in \{1, \ldots, N\}$).

3. Un espacio topológico discreto no es, sin embargo, compacto en general. De hecho, lo cierto es que se verifica el siguiente resultado:

   "Un espacio topológico discreto es compacto si, y sólo si, tiene una cantidad finita de elementos."

   Demostración:

   Una de las dos implicaciones ya sabemos que es cierta en general, independientemente de la topología del espacio. Comprobemos la otra:

   ($\Rightarrow$) Sea $(X, \tau_{\text{discreta}})$ un espacio discreto con una cantidad infinita de elementos. Entonces el siguiente es un recubrimiento por abiertos del que obviamente no es posible extraer ningún subrecubrimiento finito:
$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}.$$
$\blacksquare$

4. $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ no es compacto. El siguiente recubrimiento por abiertos no admite ningún subrecubrimiento finito:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n).$$
(Esta colección de intervalos abiertos es un recubrimiento de $\mathbb{R}$ por la propiedad arquimediana.)

5. Tampoco es compacto el intervalo $(0, 1)$ con la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}$, pues este recubrimiento por abiertos no admite ningún subrecubrimiento finito:
$$(0, 1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right).$$
(De nuevo la propiedad arquimediana garantiza que esta colección de intervalos abiertos es un recubrimiento de $(0, 1)$.)

6. Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff, y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x_0 \in X$ su límite.

   El subespacio $K = \{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto:

   Dado un recubrimiento abierto de K,

$$K \subset \bigcup_{i\in I} G_i\,,$$

   sea G_{i_0} (para algún $i_0 \in I$) un abierto del recubrimiento tal que $x_0 \in G_{i_0}$; como x_0 es el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, debe existir $N \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $n \geq N$, $x_n \in G_{i_0}$.

   Ahora basta tomar un abierto del recubrimiento que contenga a cada uno de los $N-1$ primeros términos de la sucesión, y se obtiene el siguiente subrecubrimiento finito del de partida:

$$K \subset G_{i_0} \cup G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_{N-1}}$$

   (con $x_1 \in G_{i_1}$, ..., $x_{N-1} \in G_{i_{N-1}}$).

El teorema que enunciamos a continuación nos proporciona un importante ejemplo de espacio topológico compacto.

Teorema 6.1.3 *El intervalo cerrado* $[0,1]$*, dotado de la topología de subespacio de la usual de* $\mathbb{R}$*, es compacto.*

Demostración:
Sea $[0,1] \subset \cup_{i\in I} G_i$ un recubrimiento abierto.
Llamemos $\alpha = \sup\{x \in [0,1] : [0,x]\,\text{se recubre con finitos abiertos del recubrimiento}\}$.

Es suficiente comprobar que $\alpha = 1$: como $1 \in [0,1] \subset \cup_{i\in I} G_i$, existe $i_1 \in I$, tal que $1 \in G_{i_1}$; puesto que G_{i_1} es un abierto de τ_{usual}, existe $\varepsilon > 0$, tal que $(1-\varepsilon, 1] \subset G_{i_1}$, y $[0, 1-\varepsilon]$ puede recubrirse con finitos abiertos del recubrimiento —pues 1 es el supremo de los $x \in [0,1]$ tales que $[0,x]$ puede recubrirse con finitos de aquellos abiertos—. Uniendo esos abiertos al abierto G_{i_1}, tendríamos un subrecubrimiento finito del intervalo $[0,1]$.

Demostremos pues que $\alpha = 1$. Para ello, supongamos que $\alpha < 1$, y lleguemos a contradicción.
Sea G_{i_α} un abierto del recubrimiento de partida al que pertenezca α, y sea $\varepsilon > 0$ tal que $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon] \subseteq G_{i_\alpha}$.
Pero entonces sucede que α no puede ser el supremo de los números x de $[0,1]$ tales que $[0,x]$ puede recubrirse con finitos abiertos del recubrimiento de inicio, pues $\alpha+\varepsilon$ es un número estrictamente mayor que α, y $[0, \alpha+\varepsilon]$ puede recubrirse con finitos abiertos de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$, a saber: en primer lugar, G_{i_α}, que sirve para recubrir desde $\alpha-\varepsilon$ hasta $\alpha+\varepsilon$; en segundo lugar, los finitos abiertos entre $\{G_i\}_{i\in I}$ que sirvan para recubrir $[0, \alpha-\varepsilon]$.

■

La compacidad es, como sucede con la conexión (véase el tema 5), una propiedad topológica:

Proposición 6.1.4 *La imagen continua de un espacio topológico compacto es un espacio topológico compacto.*

Demostración:

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua y epiyectiva entre espacios topológicos, y sea (X, τ) compacto.

Consideremos un recubrimiento por abiertos de $Y : Y = \cup_{i \in I} G_i$, y veamos que admite algún subrecubrimiento finito.

Como f es continua, el siguiente es un recubrimiento por abiertos de X:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} G_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) .$$

Y, puesto que por hipótesis X es compacto, existe un subrecubrimiento finito de él:

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(G_{i_k}) ,$$

de donde se sigue, ya que f es epiyectiva, que éste es un subrecubrimiento finito de Y del de partida:

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(G_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{N} f(f^{-1}(G_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{N} G_{i_k} .$$

∎

Ejemplos:

1. Aprovechando el ejercicio 15b del tema 3, la proposición 6.1.4 nos dice que todos los intervalos cerrados y acotados, de la forma $[a, b]$, con $a < b$, son compactos.

2. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\phi} & S_1 \\ t & \longmapsto & \phi(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \end{array}$$

(considerando tanto el intervalo como la circunferencia unidad dotados de las topologías de subespacio inducidas por la usual de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente) es epiyectiva y continua, luego el teorema 6.1.3 y la proposición 6.1.4 aseguran que S_1 es un espacio compacto.

3. No será compacto, sin embargo, el espacio que se obtiene cuando a la circunferencia unidad le quitamos un cierto punto $p \in S_1$.

   El ejemplo 2 tras la Propiedad Universal del Producto (teorema 4.2.1) muestra cómo $S_1 \setminus \{p\} \subset (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$. Como este último espacio no es compacto, tampoco puede serlo $S_1 \setminus \{p\}$.

6.2. Algunos resultados de interés

Dedicamos esta sección a aumentar la colección de resultados teóricos que nos permitan manejar el concepto de compacidad con más soltura.

Empezamos viendo que la compacidad y el que un subespacio topológico sea cerrado son cosas muy relacionadas. (Al menos, en espacios topológicos de Hausdorff, que es, como puede verse, una propiedad especialmente interesante en espacios topológicos.) Para ello es necesario el siguiente lema.

Lema 6.2.1 *Si K y H son dos subespacios compactos disjuntos de un espacio topológico de Hausdorff (X,τ), entonces existen abiertos disjuntos, U, $V \in \tau$, tales que $K \subseteq U$ y $H \subseteq V$.*

Demostración:

Tomemos $x \in K$ e $y \in H$. Como $x \neq y$ y (X,τ) es de Hausdorff, existen abiertos U_y y V_y tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$, y $U_y \cap V_y = \emptyset$.

Si consideramos todos los posibles elementos de H, manteniendo fijo x en K, obtenemos el siguiente recubrimiento abierto de H:

$$H \subseteq \bigcup_{y \in H} V_y .$$

Como H es compacto, de ese recubrimiento podemos extraer un subrecubrimiento finito:

$$H \subseteq \bigcup_{\substack{k=1 \\ (y_k \in H)}}^{N} V_{y_k} = V_x \ \ (*).$$

Para cada V_{y_k} (con $k \in \{1,\ldots,N\}$), existe el correspondiente abierto U_{y_k} disjunto con V_{y_k}, tal que $x \in U_{y_k}$, según comentamos al inicio de la demostración. La intersección de todos ellos (son finitos) vuelve a dar un abierto $U_x = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_N}$ disjunto con V_x y tal que $x \in U_x$.

De este modo podemos dar un recubrimiento por abiertos de K:

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x .$$

Al ser K compacto también, existe algún subrecubrimiento finito del anterior:

$$K \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ (x_j \in K)}}^{M} U_{x_j} = U .$$

Según vimos en $(*)$, para cada x_j de los anteriores, $H \subseteq V_{x_j}$, y, por tanto:

$$H \subseteq V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_M} = V ,$$

con lo cual ya hemos encontrado el par de abiertos disjuntos que buscábamos:

$$K \subseteq U \ , \ H \subseteq V \ , \ U \cap V = \emptyset \, .$$

■

Teorema 6.2.2 *Sea A un subespacio de un espacio topológico (X, τ). Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) Si X es compacto, y A es cerrado, entonces A es compacto.

b) Si X es T_2, A es compacto, entonces A es cerrado.

Demostración:

a) Sea $A \subset \cup_{i \in I} G_i$ un recubrimiento abierto de A. Como A es cerrado, el siguiente es un recubrimiento por abiertos de X:

$$X = \cup_{i \in I} G_i \cup A^c \, .$$

Puesto que por hipótesis X es compacto, de ese recubrimiento debe poder extraerse algún subrecubrimiento finito, que, por fuerza, debe tener como uno de los abiertos de la colección al complementario de A, porque, si no fuera así, no habría manera de garantizar que todo X siguiera recubierto. Digamos que éste sea un subrecubrimiento finito del anterior:

$$X = \cup_{k=1}^{N} G_{i_k} \cup A^c \, .$$

Ya hemos obtenido con ello un subrecubrimiento finito de A a partir del que dimos al inicio:

$$A \subset \cup_{k=1}^{N} G_{i_k} \, .$$

b) Demostremos que A^c es abierto en (X, τ). Sea $x \in A^c$; como $\{x\}$ y A son compactos disjuntos, el lema 6.2.1 garantiza la existencia de dos abiertos U, V, tales que $\{x\} \subseteq U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Así pues, ya hemos encontrado un entorno (el abierto U) de x contenido en A^c, y por tanto A^c es abierto:

$$x \in \{x\} \subseteq U \subseteq V^c \subseteq A^c \, .$$

■

Como consecuencia del teorema 6.2.2, obtenemos los siguientes enunciados, de gran utilidad:

Proposición 6.2.3 *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es una aplicación continua entre un espacio topológico compacto y un espacio topológico de Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Demostración:

Si F es cerrado en el espacio compacto (X, τ), entonces por el apartado a del teorema 6.2.2 sabemos que F es compacto. Puesto que f es una aplicación continua, la proposición 6.1.4 garantiza que $f(F)$ es compacto.

Al ser un compacto dentro del espacio de Hausdorff (Y, τ'), el apartado b del teorema 6.2.2 permite concluir afirmando que $f(F)$ es cerrado.

■

Corolario 6.2.4 *Cualquier aplicación biyectiva y continua de un compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo.*

Ejemplo:

(Retomamos el ejercicio 25 del tema 4.)

Si consideramos sobre $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow: x - y \in \mathbb{Z}$ y la aplicación epiyectiva y continua (entendiendo que S_1 está dotado de la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) & \xrightarrow{f} & S_1 \\ t & \longmapsto & f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), \end{array}$$

entonces (véase el diagrama 6.2.1) por el corolario 4.5.2 existe una aplicación φ continua entre el espacio cociente y la circunferencia unidad, entendida como subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$.

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \arrow[r, "f", "\text{continua}"'] \arrow[d, "\pi"'] & S_1 \\ (\mathbb{R}/\!\sim\, = \pi([0,1]), \tau_\pi) \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{6.2.1}$$

La aplicación φ es, además de continua, biyectiva (compruébese como sencillo ejercicio). Como cada clase de equivalencia en $\mathbb{R}/\!\sim$ tiene un representante en $[0,1]$ (¿por qué?), resulta que $\mathbb{R}/\!\sim\, = \pi([0,1])$, es decir, $\mathbb{R}/\!\sim$ es un espacio compacto, por ser la imagen continua de un compacto. Puesto que, además, S_1 es de Hausdorff, podemos acabar aplicando el corolario 6.2.4 para afirmar que φ es un homeomorfismo.

A continuación probaremos que el producto de dos (por tanto, de finitos, sin más que proceder por inducción) espacios topológicos compactos vuelve a ser un espacio compacto.

(Este resultado puede generalizarse para productos de familias arbitrarias —véase el ejercicio 14 del tema 4— de espacios topológicos, y es el conocido como teorema de Tychonoff, pero su demostración no es en absoluto sencilla, e involucra el Axioma de Elección. El lector interesado puede encontrar esta demostración en [5, Teorema 37.3].)

En primer lugar, necesitamos un lema:

Lema 6.2.5 (del entorno tubular) *Sean (X, τ) e (Y, τ') espacios topológicos, y sea $(X \times Y, \tau_{\text{producto}})$ el espacio topológico producto. Sean $x \in X$, K compacto en Y y $U \in \tau_{\text{producto}}$ tal que $\{x\} \times K \subseteq U$. Entonces existen abiertos $V \in \tau$ y $W \in \tau'$ (con $x \in V$ y $K \subseteq W$) tales que $\{x\} \times K \subseteq V \times W \subseteq U$.*

Demostración:

Para cada $y \in K$, $(x,y) \in \{x\} \times K \subseteq U$, y como U es un abierto de la topología producto, debe existir algún abierto básico dentro de U que contenga a (x,y); es decir, existen $V_y \in \tau$, $W_y \in \tau'$, tales que $(x,y) \in V_y \times W_y \subseteq U$.

De este modo, obtenemos el siguiente recubrimiento por abiertos de K:

$$K \subseteq \cup_{y\in K} W_y\,,$$

del que, gracias a la compacidad de K, podemos extraer algún subrecubrimiento finito:

$$K \subseteq W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_N} = W \text{ (con } N \in \mathbb{N}).$$

Con cada uno de esos finitos W_{y_k}, tenemos el correspondiente V_{y_k} abierto en (X,τ) (y todos ellos verifican $x \in V_{y_k}$); la intersección de estos finitos abiertos, que denotamos $V = V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_N}$, vuelve a ser un abierto que contiene el elemento x y, por tanto, hemos acabado, pues se verifica:

$$\{x\} \times K \subseteq V \times K \subseteq V \times W \subseteq U\,.$$

■

Teorema 6.2.6 *Sean (X,τ) e (Y,τ') espacios topológicos. El espacio topológico producto $(X \times Y, \tau_{\text{producto}})$ es compacto si, y sólo si, (X,τ) e (Y,τ') son compactos.*

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Como las proyecciones naturales de un espacio topológico producto son aplicaciones epiyectivas y continuas, resulta que tanto (X,τ) como (Y,τ') son imágenes continuas de un espacio topológico conexo, luego ambos espacios son conexos.

(Este argumento es enteramente válido para demostrar esta misma implicación en el caso de un producto arbitrario de espacios topológicos.)

$(\Leftarrow)$ Vamos a demostrar, en realidad, que si K es un compacto en (X,τ) y K' es un compacto en (Y,τ'), entonces $K \times K'$ es un compacto de $(X \times Y, \tau_{\text{producto}})$.

Sea, pues, el siguiente un recubrimiento por abiertos (de la topología producto) de $K \times K'$:

$$K \times K' \subseteq \cup_{i\in I} U_i\,.$$

Fijemos $x \in K$, y consideremos $\{x\} \times K'$, trivialmente homeomorfo a K', y por tanto compacto.

Entonces, como $\{x\} \times K' \subseteq K \times K' \subseteq \cup_{i\in I} U_i$, podemos quedarnos con una subcolección finita de los abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ que siga recubriendo $\{x\} \times K'$:

$$\{x\} \times K' \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_N} = U_x \text{ (para cierto } N \in \mathbb{N}).$$

Estamos ya en las hipótesis del lema 6.2.5 del entorno tubular, y así pues existen abiertos $V_x \in \tau$, $W_x \in \tau'$, tales que $x \in V_x$, $K' \subseteq W_x$, y

$$\{x\} \times K' \subseteq V_x \times K' \subseteq V_x \times W_x \subseteq U_x \ (\blacklozenge).$$

Como esto lo podemos hacer para cada $x \in K$, tenemos el siguiente recubrimiento por abiertos del compacto K :

$$K \subseteq \cup_{x\in K} V_x \,,$$

del que podremos extraer un subrecubrimiento finito:

$$K \subseteq V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_M} \text{ (con } M \in \mathbb{N}\text{)} .$$

Y teniendo en cuenta ($\blacklozenge$) , se verifica:

$$K \times K' \subseteq (V_{x_1} \times K') \cup \ldots \cup (V_{x_M} \times K') \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_M} \,,$$

donde cada U_{x_k} de ésos no era más que una unión de finitos abiertos de la colección $\{U_i\}_{i\in I}$ de partida, y por tanto hemos obtenido un subrecubrimiento finito de $K \times K'$ del que dimos al inicio.

■

Ejemplos:

1. Los teoremas 6.1.3 y 6.2.6 aseguran que el $n-$cubo unidad $[0,1]\times \overset{(n)}{\cdots} \times[0,1]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$.

   Igualmente, como, según vimos, todo intervalo cerrado de la forma $[a,b]$ (con $a < b$) es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, cualquier paralelepípedo $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$.

2. No es compacto, sin embargo, el cilindro $S_1 \times \mathbb{R}$ (considerado dotado de la topología producto de la topología de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$ sobre S_1 y de la usual de $\mathbb{R}$), pues ya sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ no es compacto.

   Y sí lo es el tronco de cilindro $S_1 \times [0,1]$ (con la topología evidente), como aplicación sencilla del teorema 6.2.6, pues tanto S_1 como $[0,1]$ son compactos con sus topologías usuales.

6.3. Compacidad en espacios métricos

El primer resultado que se presenta en esta sección no es general para cualquier espacio métrico, sino que está enunciado para $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$. El hecho de que su demostración pueda hacerse sin necesitar más que lo expuesto hasta el momento, así como la buena cantidad de ejemplos de espacios compactos (y no compactos) que permite poner, son motivos suficientes para encabezar este apartado.

Teorema 6.3.1 *Sea $A \subset (\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}}(=\tau_{d_2}))$. El subconjunto A es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Como A es compacto en un espacio de Hausdorff (apartado b del teorema 6.2.2), A es cerrado.

Además, si no fuese acotado (para cualquier $\lambda > 0$, siempre existe $a \in A$ tal que $a \notin B_{d_2}(O, \lambda)$, con $O = (0, \ldots, 0)$), entonces el siguiente es un recubrimiento abierto de A del que no es posible extraer ningún subrecubrimiento finito:

$$A \subset \mathbb{R}^n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_{d_2}(O, n) .$$

No se puede conseguir ninguno, porque cada bola abierta de esas que estamos usando para recubrir A está encajada en la siguiente: $B_{d_2}(O, n) \subset B_{d_2}(O, n+1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$; por tanto, si nos quedáramos con una cantidad finita de ellas, digamos $B_{d_2}(O, n_1), \ldots, B_{d_2}(O, n_M)$ (con $M \in \mathbb{N}$), su unión coincidiría con la bola de radio máximo $\nu = \text{máx}\,\{n_1, \ldots, n_M\}$. Y ya dijimos antes que no hay bola abierta dentro de la cual esté contenido A.
($\Leftarrow$) Si A es acotado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$A \subseteq [-N, N] \times \overset{(n)}{\cdots} \times [-N, N] .$$

En el primer ejemplo tras el teorema 6.2.6 ya se vio que $[-N, N] \times \overset{(n)}{\cdots} \times [-N, N]$ es un espacio compacto. Tenemos, por tanto, que A es un subconjunto cerrado dentro de un compacto, de donde se sigue (apartado a del teorema 6.2.2) que A es compacto.

■

Ejemplos:

1. En $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ es un subespacio compacto una bola cerrada (da igual el centro y el radio) con cualquier distancia lipschitzianamente equivalente a la distancia d_2. (Véanse 22f y 22h del tema 3.)

   Igualmente, no es un compacto ninguna bola abierta con una distancia así. (Sí es un subconjunto acotado, obviamente, pero no es un cerrado.)

2. Consideremos la siguiente aplicación continua (con topologías usuales tanto en la salida como en la llegada):

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & f((x_1, \ldots, x_{n+1})) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 . \end{array}$$

   Puesto que $\{1\}$ es un subconjunto cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, la esfera $n-$dimensional

$$S_n = f^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

   es un cerrado en $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_{\text{usual}})$.

   Como además S_n es trivialmente acotado, aplicando el teorema 6.3.1, tenemos un nuevo ejemplo de espacio compacto.

3. No son compactos —con la topología que sobre cada uno de ellos induce la usual del plano real—, puesto que no son acotados en $(\mathbb{R}^2, d_{\text{usual}})$, los siguientes subespacios:

a) El lugar geométrico de los puntos de cualquier hipérbola.

b) Cualquier par de rectas paralelas.

c) Cualquier par de rectas que se corten.

d) La franja horizontal
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\},$$
y su análoga en vertical
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}.$$
(Tampoco lo son la franja horizontal abierta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\}$ ni la correspondiente vertical; estos dos subespacios, además de no ser acotados, tampoco son cerrados.)

e) $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_{d_2}((0,0),n)$ (la unión de todas las esferas con la distancia d_2 de centro $(0,0)$ y radio $n \in \mathbb{N}$; es decir, la unión de todas las circunferencias con ese centro y ese radio).

Observación: La demostración que hacemos de la implicación $(\Rightarrow)$ en el teorema 6.3.1 es válida (con la adaptación obvia correspondiente) para cualquier espacio métrico, y no necesariamente para $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$.

En cambio, hay que tener muy presente que la implicación inversa $(\Leftarrow)$ no es cierta en cualquier espacio métrico. Concretamente, en $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$, cualquier subconjunto no vacío es cerrado y acotado, y sólo son compactos los subconjuntos con finitos elementos.

Además, el Análisis Funcional nos proporciona el siguiente enunciado:

Lema (de Riesz) *Un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es de dimensión finita si, y sólo si, la bola cerrada unidad de E es un compacto.*

Así, por ejemplo, en el espacio de dimensión infinita $\mathcal{C}([0,1])$ de las funciones reales continuas sobre $[0,1]$, dotado de la norma del supremo (en este caso, del máximo —véase el ejercicio 5) $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, la bola cerrada unidad (cerrado y acotado) no es un compacto.

A continuación vamos a enunciar y demostrar una primera versión de un resultado bastante útil en espacios métricos.

Lema 6.3.2 (del recubrimiento de Lebesgue) *Sea (X,d) un espacio métrico compacto, y sea $X = \cup_{i\in I} G_i$ un recubrimiento por abiertos. Existe $\lambda > 0$ (número de Lebesgue del recubrimiento) tal que, para cualquier $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x,\lambda) \subseteq G_i$.*

Demostración:

Dado $x \in X = \cup_{i\in I} G_i$, existe $i(x) \in I$, tal que $x \in G_{i(x)}$. Puesto que X es un espacio métrico, existe $r(x) > 0$, tal que $x \in B(x, r(x)) \subseteq G_{i(x)}$.

Consideremos ahora este siguiente recubrimiento abierto de X:
$$X = \bigcup_{x\in X} B(x, \frac{r(x)}{2}).$$

Por la compacidad de X, de él podemos extraer algún subrecubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \frac{r(x_k)}{2}) \ \text{(con } N \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Por tanto, $x \in B(x_j, \frac{r(x_j)}{2})$, para algún $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Tomemos $\lambda = \text{mín}\{\frac{r(x_1)}{2}, \ldots, \frac{r(x_N)}{2}\}$, y comprobemos la siguiente inclusión:

$$B(x, \lambda) \subseteq B(x_j, r(x_j)),$$

con lo que la prueba estaría acabada, ya que $B(x_j, r(x_j)) \subseteq G_{i(x_j)}$.

Así pues, sea $z \in B(x, \lambda)$; la propiedad triangular de la distancia d permite terminar:

$$d(z, x_j) \leq d(z, x) + d(x, x_j) < \lambda + \frac{r(x_j)}{2} \leq \frac{r(x_j)}{2} + \frac{r(x_j)}{2} = r(x_j).$$

∎

Obsérvese que en cualquier espacio métrico (X, d), dado un recubrimiento por abiertos $X = \cup_{i \in I} G_i$, para cada $x \in X$, existe $\lambda(x) > 0$ tal que $B(x, \lambda(x)) \subseteq G_i$, para algún $i \in I$. La clave del lema que acabamos de probar es que cuando el espacio métrico es compacto, el radio de la bola no depende del elemento: hay un número $\lambda > 0$ que vale como radio para cualquier $x \in X$, de modo que la bola abierta centrada en x de radio λ esté contenida en algún abierto del recubrimiento.

Como aplicación importante del lema 6.3.2, podemos demostrar que la continuidad sobre un espacio métrico compacto implica continuidad uniforme:

Teorema 6.3.3 *Toda aplicación continua $f : (X, d) \to (Y, d')$ entre espacios métricos, siendo (X, d) compacto, es uniformemente continua.*

Demostración:

Queremos comprobar que f es uniformemente continua; es decir, que se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos el siguiente recubrimiento abierto de Y:

$$Y = \bigcup_{y \in Y} B_{d'}(y, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Tomando imágenes inversas por la aplicación continua f, obtenemos este recubrimiento por abiertos de X:

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{y \in Y} B_{d'}(y, \frac{\varepsilon}{2})) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(B_{d'}(y, \frac{\varepsilon}{2})).$$

Por el lema del recubrimiento de Lebesgue 6.3.2, existe $\lambda > 0$ tal que, para cada $x \in X$, $B_d(x, \lambda) \subseteq f^{-1}(B_{d'}(y, \frac{\varepsilon}{2}))$, para algún $y \in Y$.

Basta tomar $\delta = \lambda$:

$$d(x_1, x_2) < \delta(= \lambda) \Rightarrow x_1 \in B_d(x_2, \lambda) \subseteq f^{-1}(B_{d'}(y, \frac{\varepsilon}{2}))\,, \text{ para cierto } y \in Y\,.$$

Por consiguiente, tanto $f(x_1)$ como $f(x_2)$ pertenecen a la bola $B_{d'}(y, \frac{\varepsilon}{2})$, y usando la propiedad triangular con y como tercer punto, obtenemos:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d'(f(x_1), y) + d'(y, f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

■

Enunciemos y demostremos el único teorema de toda esta sección que es general incluso para espacios topológicos no metrizables.

Teorema 6.3.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto, y sea $A \subseteq X$ infinito. Entonces $A' \neq \emptyset$.*

Demostración:

Supongamos que $A' = \emptyset$. Entonces, para cada $x \in X$, existe $V_X \in \tau$ (con $x \in V_x$), tal que $V_x \cap A = \emptyset$, o bien $V_x \cap A = \{x\}$.

Entonces éste es un recubrimiento por abiertos de X:

$$A \subseteq X = \cup_{x \in X} V_x\,;$$

por la compacidad de X, de ese recubrimiento es posible extraer un subrecubrimiento finito:

$$A \subseteq X = \cup_{k=1}^{N} V_{x_k} \text{ (para } N \in \mathbb{N})\,.$$

Por tanto, $A = A \cap (\cup_{k=1}^{N} V_{x_k}) = \cup_{k=1}^{N} (A \cap V_{x_k})$, lo cual implica que A tiene a lo sumo una cantidad finita de elementos.

■

Como consecuencia de este teorema y del siguiente lema, obtendremos fácilmente el conocido como teorema de Bolzano-Weierstrass. Haga honor el lema previo al adjetivo que le acompaña:

Lema 6.3.5 *Sea (X, τ) un espacio topológico T_1* [1]*. Dado $A \subseteq X$, si $x_0 \in A'$, entonces cualquier entorno de x_0 tiene como intersección con A un subconjunto infinito.*

Demostración:

Supongamos que para algún entorno V de x_0 se verifica:

$$V \cap A = \{x_1, \ldots, x_N\} \text{ (con } N \in \mathbb{N})\,.$$

(Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que $x_0 \neq x_i$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, N\}$.)

[1] Véase la nota a pie de página 1 del cuarto ejemplo tras la definición de espacio conexo, en el tema 5. Téngase en cuenta también que allí mismo se dice que cualquier espacio topológico T_2 es T_1, y recuérdese que todo espacio métrico es T_2.

Como (X,τ) es T_1, existen entornos $V_1, \ldots, V_N$ de x_0, tales que $x_1 \notin V_1, \ldots, x_N \notin V_N$. Pero entonces $V \cap V_1 \cap \ldots \cap V_N$ es un entorno de x_0 cuya intersección con A es vacía, en contradicción con la hipótesis de que x_0 es un punto de acumulación de A.

■

Teorema 6.3.6 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sucesión acotada en $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ tiene alguna subsucesión convergente.*

Demostración:

Sea $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión acotada. Entonces existe algún $K > 0$, para el cual se verifica $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset [-K,K] \times \overset{(n)}{\cdots} \times [-K,K]$.

Para demostrar el enunciado, basta encontrar un valor de adherencia x_0 de la sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$: de existir tal valor de adherencia, como $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ es un espacio primero contable, por el apartado *e* del ejercicio 51 del tema 2, existe una subsucesión $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0.

Comprobemos, pues, que en las condiciones supuestas siempre existe algún valor de adherencia de la sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Si el conjunto de términos de la sucesión, $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto con finitos elementos, entonces hay algún $x_0 \in \mathbb{R}$ que aparece como término de la sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ repetido infinitas veces, y es, por tanto, valor de adherencia de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Si, por el contrario, el conjunto de términos $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ es infinito, puesto que $\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset [-K,K] \times \overset{(n)}{\cdots} \times [-K,K]$, y $[-K,K] \times \overset{(n)}{\cdots} \times [-K,K]$ es compacto, el teorema 6.3.4 garantiza que existe algún $x_0 \in \mathbb{R}$ que es punto de acumulación de $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$. Como $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ es T_1, el lema 6.3.5 permite concluir que x_0 es un valor de adherencia de la sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

■

Veamos ahora otra versión del lema del recubrimiento de Lebesgue. Posteriormente esta nueva versión nos permitirá incluso saber que ambas versiones de dicho lema son, en realidad, equivalentes.

Lema 6.3.7 (del recubrimiento de Lebesgue; segunda versión) *Sea (X,d) un espacio métrico con la propiedad de que cualquier sucesión tiene alguna subsucesión convergente, y sea $X = \cup_{i\in I} G_i$ un recubrimiento por abiertos. Existe $\lambda > 0$ (número de Lebesgue del recubrimiento) tal que, para cualquier $x \in X$, existe $i \in I$ tal que $B(x,\lambda) \subseteq G_i$.*

Demostración:

Supongamos que no existe tal λ; entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$, tal que $B(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq G_i$, sea cual sea $i \in I$.

Así hemos definido una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, que debe tener alguna subsucesión convergente, por hipótesis: $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_0 \in X = \cup_{i\in I} G_i$.

Sea $i(x_0) \in I$ tal que $x_0 \in G_{i(x_0)}$. Como $G_{i(x_0)}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B(x_0,\varepsilon) \subseteq G_{i(x_0)}$. Puesto que la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a x_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n_k \geq N$, con $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, $x_{n_k} \in B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$.

Como $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(x_0, \varepsilon) \subseteq G_{i(x_0)}$, si probamos la inclusión

$$B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(x_0, \varepsilon) \, (*),$$

habremos llegado a afirmar que se verifica la inclusión $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq G_{i(x_0)}$, que supusimos al principio de la demostración que no podía darse.

Comprobemos pues $(*)$. Sea $z \in B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2})$; usando la propiedad triangular con x_{n_k} (con $n_k \geq N$ y $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$) como tercer punto, acabamos, como puede verse a continuación:

$$d(z, x_0) \leq d(z, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

■

Introduzcamos ahora un concepto muy importante en espacios métricos.

Definición 6.3.8 *Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy** si:*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \nu \in \mathbb{N} : \, p, q \geq \nu \, , \, d(x_p, x_q) < \varepsilon \, .$$

Interesa observar las dos siguientes propiedades de las sucesiones de Cauchy en un espacio métrico:

1. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

   *D*emostración: Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (X, d)$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geq \nu$, $d(x_p, x_q) < 1$.

   Basta tomar $M = \text{máx}\{d(x_i, x_j) : i, j \in \{1, \ldots, \nu\}\}$ para obtener $1 + M$ como cota superior del conjunto de números reales $\{d(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

   ■

2. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

   *D*emostración: Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x_0 en (X, d). Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

   $$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{con } n \geq N) \, .$$

   Dado $\varepsilon > 0$, usando la propiedad triangular con x_0 como tercer punto, y tomando $p, q \geq N$:

   $$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_0) + d(x_0, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, ;$$

   es decir, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

   ■

Teorema 6.3.9 *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y sea* $A \subseteq X$ *. Son equivalentes:*

a) A *es compacto;*

b) toda parte infinita de A *tiene algún punto de acumulación (en* A *);*

c) toda sucesión en A *tiene alguna subsucesión convergente (en* A *).*

Demostración:

$(a \Rightarrow b)$ Véase el teorema 6.3.4.

$(b \Rightarrow c)$ Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, bastará encontrar un valor de adherencia x_0 de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pues (X, d) es, como espacio métrico, primero contable, y entonces existirá una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_0$. (Véase el ejercicio 51.e del tema 2.)

Usaremos de nuevo el mismo razonamiento que en el teorema 6.3.6 de Bolzano-Weierstrass. En primer lugar, si el conjunto de términos de la sucesión, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, es finito, es porque existe algún $x_0 \in A$ que se repite infinitas veces como término de la sucesión. Ya hemos encontrado un valor de adherencia.

En el caso en que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sea un conjunto infinito, entonces, puesto que suponemos cierto b), $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene algún punto de acumulación $x_0 \in A$. Como (X, d) es un espacio métrico, es T_1, y entonces cualquier entorno de x_0 corta con infinitos puntos con $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual quiere decir que x_0 es valor de adherencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(c \Rightarrow a)$ Supongamos que A verifica c), y que existe algún recubrimiento por abiertos

$$A \subset \cup_{i\in I} G_i \, (\bigstar),$$

del que no es posible extraer ningún subrecubrimiento finito por abiertos.

Por el lema 6.3.7 (segunda versión del recubrimiento de Lebesgue), existe un número de Lebesgue $\lambda > 0$ para el recubrimiento $(\bigstar)$.

Dado $x_1 \in A$, podemos tomar $x_2 \in A$, tal que $x_2 \notin B(x_1, \lambda)$.

(Si no fuera posible, sería porque $A \subseteq B(x_1, \lambda)$, y, como λ es un número de Lebesgue del recubrimiento $(\bigstar)$, éste tendría algún subrecubrimiento finito, contra lo que supusimos:

$$A \subseteq B(x_1, \lambda) \subseteq G_{i_1} \text{ para algún } i_1 \in I \text{.)}$$

Del mismo modo, podemos tomar $x_3 \in A$, tal que $x_3 \notin B(x_1, \lambda) \cup B(x_2, \lambda)$.

(De nuevo, si ello no fuera posible, tendríamos $A \subseteq B(x_1, \lambda) \cup B(x_2, \lambda)$, y otra vez más, puesto que λ es número de Lebesgue del recubrimiento $(\bigstar)$, encontraríamos un subrecubrimiento finito de $(\bigstar)$, a pesar de lo supuesto al inicio de esta demostración:

$$A \subseteq B(x_1, \lambda) \cup B(x_2, \lambda) \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \text{ para ciertos } i_1, i_2 \in I \text{.)}$$

Razonando inductivamente como hasta ahora, tendríamos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, que verifica:

$$d(x_1, x_2) \geq \lambda,$$

$$d(x_1, x_3) \geq \lambda, \; d(x_2, x_3) \geq \lambda$$

$$\vdots$$

$d(x_1, x_n) \geq \lambda$, $d(x_2, x_n) \geq \lambda$, ... , $d(x_{n-1}, x_n) \geq \lambda$

$\vdots$

Como ni es de Cauchy, ni tiene ninguna subsucesión de Cauchy, no existe ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sea convergente (por la segunda propiedad que enunciamos anteriormente de las sucesiones de Cauchy), y por tanto hemos llegado a una contradicción —que procede de suponer que A no verifica a)—, pues supusimos que A verifica c).

■

La primera consecuencia trivial de este teorema ya ha sido anunciada: las dos versiones del lema de recubrimiento de Lebesgue (lema 6.3.2 y lema 6.3.7) son equivalentes.

Como segunda consecuencia, obtenemos el siguiente teorema que caracteriza la compacidad en $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$:

Teorema 6.3.10 (Bolzano-Weierstrass-Heine-Borel-Lebesgue) *Dado un subconjunto A de $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*
a) A es compacto;
b) toda parte infinita de A tiene algún punto de acumulación (en A);
c) toda sucesión en A tiene alguna subsucesión convergente (en A);
d) A es cerrado y acotado.

Su demostración es una simple combinación de los teoremas 6.3.1 y 6.3.9.

Cuando dimos la definición de sucesión de Cauchy en (X, d) , demostramos que toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy. Ciertamente, la afirmación inversa no se verifica en general. Basta pensar en la sucesión $(1, 1'4, 1'41, 1'414, 1'4142, \ldots)$ (obtenida a partir de la expresión decimal sucesiva de $\sqrt{2}$). Esta sucesión es de Cauchy con la distancia usual, pues converge a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Pero como $\sqrt{2}$ no es un número racional, es un ejemplo de sucesión de Cauchy no convergente en $(\mathbb{Q}, d_{\text{usual}})$.

Por eso, es pertinente dar la siguiente definición:

Definición 6.3.11 *Diremos que un espacio métrico (X, d) es* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy en (X, d) es convergente.*

Acabemos con un par de resultados que relacionan compacidad y completitud.

Teorema 6.3.12 *Todo espacio métrico (X, d) compacto es completo.*

Demostración:

Dada cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por ser (X, d) compacto, el teorema 6.3.9 garantiza la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $x_0 \in X$.

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n_k \geq \nu_1$, entonces:

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces también existe $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tal que, si $p, q \geq \nu_2$, entonces:

$$d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Basta coger $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ para que, si $n_k, n \geq \nu$, se verifique:

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,;$$

es decir, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Esto prueba que (X, d) es completo.

■

Corolario 6.3.13 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *es completo.*

Demostración:

Por la primera propiedad enunciada tras la definición de sucesión de Cauchy, cualquier sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^n, d_2)$ es acotada. Es decir, existe $\lambda > 0$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{d_2}[O, \lambda]$, con $O = (0, \ldots, 0)$.

Puesto que $B_{d_2}[0, \lambda]$ es compacto (es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, d_2)$), es completo, según el teorema 6.3.12, y por tanto la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

■

Problemas

(En toda esta sección, cada vez que aparezca $\mathbb{R}^n$ (para cualquier $n \in \mathbb{N}$) —o algún subconjunto suyo—, y no se diga lo contrario, supondremos que la topología con la que trabajamos es la usual —respectivamente, la de subespacio inducida por la usual de $\mathbb{R}^n$ —.)

1. Se dice que una familia de conjuntos tiene la *propiedad de la intersección finita* si cualquier subfamilia finita suya tiene intersección no vacía.

   Pruébese que un espacio topológico (X, τ) es compacto si, y sólo si, toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

2. Un espacio topológico (X, τ) se dice *numerablemente compacto* si cualquier recubrimiento numerable por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.

   a) Demuéstrese que un espacio topológico es compacto si, y sólo si, es numerablemente compacto y verifica que, de cada recubrimiento por abiertos de X se puede extraer un subrecubrimiento numerable.

   (A un espacio topológico que verifique esta propiedad se le llama *de Lindelöf.*)

   b) Pruébese que cualquier subconjunto cerrado de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.

   c) Pruébese que, si (X, τ) es un espacio topológico T_2 y primero contable, y A es un subconjunto numerablemente compacto de X, entonces A es cerrado.

3. Diremos que un espacio topológico (X,τ) es *secuencialmente compacto* si cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tiene alguna subsucesión convergente.

   (Obviamente, si $K \subseteq X$, diremos que K es secuencialmente compacto si cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ tiene alguna subsucesión convergente (en K).)

   a) Demuéstrese que, si (X,τ) es un espacio primero contable, entonces X es numerablemente compacto si, y sólo si, es secuencialmente compacto.

   b) Pruébese que el producto de dos espacios topológicos secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.

4. Es un resultado básico y bien conocido (Teorema Fundamental del Orden) que todo conjunto no vacío y acotado superiormente (inferiormente) de números reales tiene supremo (respectivamente, ínfimo).

   Demuéstrese que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

5. Compruébese que, si (X,τ) es un espacio topológico compacto sobre el que tenemos definida una aplicación continua $f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$, entonces f alcanza un valor máximo (y también un valor mínimo).

6. Como aplicación del ejercicio anterior, demuéstrese que no puede definirse una función continua y epiyectiva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

   (En particular, $\mathbb{R}$ y $[a,b]$ —con $a<b$— no pueden ser homeomorfos, algo ya conocido, pues $\mathbb{R}$ no es compacto, y $[a,b]$ sí.)

7. Sean (X,d) un espacio métrico, $K\subset X$ un subespacio compacto no vacío y $x\in X$. Demuéstrense, como aplicaciones del ejercicio 5, las siguientes afirmaciones:

   a) Existen $x_1,x_2\in K$ tales que $\delta(K)=d(x_1,x_2)$.

   b) Existe $y\in K$ tal que $\operatorname{dist}(x,K)=d(x,y)$.

8. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ una aplicación continua entre espacios compactos Hausdorff. Pruébese que, si cada punto $x\in X$ es aislado en $f^{-1}(f(x))$, entonces, para cada $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito.

9. Sea (X,τ) un espacio topológico compacto, y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones definidas sobre X y con valores en $\mathbb{R}$, con las propiedades siguientes:

   a) si f y g son dos elementos de $\mathcal{F}$, entonces $fg\in\mathcal{F}$;

   b) para todo punto $x\in X$, se pueden escoger un entorno U (abierto) de una base de entornos del punto x y una función $f\in\mathcal{F}$, de tal modo que $f_{|U}=0$.

   Pruébese que $\mathcal{F}$ contiene la función idénticamente nula, y póngase un ejemplo de que tal resultado no sigue siendo válido si no se exige que X sea compacto.

10. Demuéstrese que no es posible dar una isometría (ejercicio 25 del tema 1: “Espacios métricos”) de un espacio métrico compacto sobre un subespacio propio (distinto del total) de sí mismo.

    (Dicho de otro modo, siempre que tengamos una isometría

    $$f : (X, d) \to (Y, d_{|Y}) \subseteq (X, d)\,,$$

    con (X, d) compacto, en realidad Y es todo X.)

11. Sea (X, τ) un espacio topológico compacto T_2, y sean τ' y τ'' dos topologías sobre X tales que $\tau' \subsetneq \tau \subsetneq \tau''$.

    Pruébese que (X, τ') no es T_2 y que (X, τ'') no es compacto.

12. Sean (X, d) un espacio métrico compacto, y $f : (X, d) \to (X, d)$ una función continua.

    Demuéstrese que, si el conjunto $F = \{x \in X : f(x) = x\}$ es vacío, entonces existe una constante $k > 0$ tal que $d(x, f(x)) \geq k$, para todo $x \in X$.

13. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea $f : (X, d) \to (X, d)$ una función que verifica $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, siempre que $x \neq y$.

    Pruébese que f posee un único punto fijo.

14. Dígase si los siguientes espacios topológicos son compactos o no:

    a) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$.
    b) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$.
    c) $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cofinita}})$.
    d) El espacio de Arens. (Véase el ejercicio 49 del tema 2: “Espacios topológicos”.)
    e) El conjunto de Cantor. (Véase el ejercicio 14 del tema 5: “Conexión”.)
    f) $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subset \mathbb{R} : 0 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\})$.
    g) $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \in G\} \cup \{\emptyset\})$.
    h) $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : x \in G \Rightarrow -x \in G\})$.

15. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$.

    a) Demuéstrese que este espacio topológico no es compacto.
    b) Pruébese que un subespacio A en este espacio es compacto si, y sólo si, A tiene una cantidad finita de elementos.

16. Razónese —usando la compacidad allí donde sea oportuno— por qué los siguientes espacios topológicos no son homeomorfos:

    a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $A \cup \{0\}$.
    b) El disco unidad abierto y el disco unidad cerrado en $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathbb{R}^n$ y $S_n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$, con $n \geq 2$.
d) Un cilindro y una esfera.

17. Complétese —usando la compacidad allí donde sea oportuno— la clasificación iniciada en el ejercicio 15b del tema 3: “Aplicaciones continuas”.

Ejercicios de autoevaluación

Sólo una de las opciones indicadas es correcta para cada pregunta:

1. Cualquier subespacio propio...

   a) de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}})$ es compacto;
   b) de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es compacto;
   c) de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{grosera}})$ es compacto;
   d) de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{conumerable}})$ es compacto.

2. Sea A un subespacio compacto de un espacio topológico (X, τ). Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   a) A siempre es cerrado en (X, τ);
   b) A nunca es un abierto en (X, τ);
   c) la topología de subespacio inducida por τ sobre A siempre es metrizable;
   d) cualquier subespacio F de A, cuyo complementario en A sea abierto en A, es compacto.

3. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   a) el espacio topológico producto de un espacio compacto y un espacio no compacto puede ser compacto;
   b) el espacio topológico cociente de un espacio compacto siempre es compacto;
   c) todo subespacio de un espacio compacto es compacto;
   d) ninguna de las anteriores es correcta.

4. Dígase cuál de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ **no** es compacto:

   a) $[2, 3] \cup [4, 5]$;
   b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;

c) $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

d) $\{1, 2, 3\}$.

5. Dígase cuál de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subset \mathbb{R} : 1 \notin G\} \cup \{\mathbb{R}\})$ es compacto:

    a) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

    b) $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

    c) $\mathbb{I}$ (=conjunto de los números irracionales);

    d) $(0, 1)$.

6. Dígase cuál de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : 1 \in G\} \cup \{\emptyset\})$ **no** es compacto:

    a) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

    b) $\{1\}$;

    c) $\{1, 2\}$;

    d) $\{1, 2, 3\}$.

7. Dígase cuál de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}, \tau = \{G \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{N} \subseteq G\} \cup \{\emptyset\})$ **no** es compacto:

    a) $(0, 1)$;

    b) $\mathbb{N}$;

    c) $\{1, 2, 3\}$;

    d) los tres subespacios anteriores son compactos.

8. Sobre $(0, +\infty)$ consideremos la siguiente distancia:

$$d(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ si } x \neq y \, , \\ 0 & , \text{ si } x = y \, . \end{cases}$$

    En este espacio métrico...

    a) toda bola abierta es un compacto;

    b) toda bola cerrada es un compacto;

    c) los únicos subconjuntos compactos son los subconjuntos finitos;

    d) ninguna de las anteriores es correcta.

9. En $\mathbb{R}$ dotado de cualquier métrica...

    a) toda bola cerrada es un compacto;

b) todo subespacio compacto es cerrado;

c) toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión convergente;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

10. Dígase cuál de los siguientes espacios métricos es completo:

a) $[0,1]$, dotado de la distancia usual;

b) $(0,1)$, dotado de la distancia usual;

c) $\mathbb{Q}$, dotado de la distancia usual;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

11. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) si dos espacios métricos son homeomorfos y uno de ellos es completo, el otro forzosamente ha de ser completo;

b) si dos espacios métricos son homeomorfos y uno de ellos no es acotado, el otro tampoco puede ser acotado;

c) todo subespacio de un espacio métrico compacto es completo.

d) todo subespacio cerrado de un espacio métrico compacto es completo.

12. Dígase cuál de los siguientes espacios métricos **no** es completo:

a) $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$;

b) $(\mathbb{R}, d_{\text{discreta}})$;

c) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, dotado de d_{usual};

d) $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, dotado de d_{usual}.

13. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) un espacio topológico (X,τ) es compacto si X puede recubrirse por una cantidad finita de abiertos;

b) la unión arbitraria de subespacios compactos en un espacio topológico (X,τ) es un compacto;

c) la intersección arbitraria de subespacios compactos en un espacio topológico (X,τ) de Hausdorff es un compacto;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

14. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) la unión de dos subconjuntos no compactos no puede ser un compacto;

b) la intersección de dos subconjuntos no compactos puede ser un compacto;

c) la imagen continua de un espacio no compacto no puede ser un compacto;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

15. Dígase cuál de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ es compacto:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 5\}$;

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$;

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

16. Dígase cuál de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ es compacto:

a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

b) $\cup_{n\in\mathbb{N}}([0,1] \times \{\frac{1}{n}\})$;

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{1}{2}\}$;

d) $\cup_{n\in\mathbb{N}} S_{d_2}[(0,0), n]$ (=unión de todas las esferas, con la distancia d_2, de centro $(0,0)$ y radio $n \in \mathbb{N}$).

17. Dado un espacio métrico $(X,d)\ldots$

a) todo subconjunto de una bola cerrada es compacto;

b) todo subconjunto acotado es compacto;

c) cualquier sucesión convergente es de Cauchy;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

18. Dado un espacio métrico $(X,d)\ldots$

a) el subconjunto de los términos de una sucesión de Cauchy siempre está incluido en alguna bola abierta;

b) (X,d) es compacto si existe alguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sin valores de adherencia;

c) cualquier sucesión en (X,d) tiene alguna subsucesión convergente;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

19. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}\ldots$

a) es compacto con la topología usual si, y sólo si, es cerrado y acotado con cualquier distancia sobre $\mathbb{R}$;

b) es compacto con la topología usual si, y sólo si, cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ admite una subsucesión convergente a algún $x_0 \in A$;

c) es compacto con la topología discreta si, y sólo si, es cerrado y acotado con la distancia discreta;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

20. Dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) todo espacio métrico que verifique que toda parte infinita suya tiene algún punto de acumulación es completo;

b) un espacio métrico que no es compacto no puede recubrirse con una cantidad finita de abiertos;

c) todo espacio métrico completo verifica que cualquier sucesión tiene una subsucesión convergente;

d) ninguna de las anteriores es correcta.

SOLUCIONES
A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

CAPÍTULO 1:

1. d	2. d	3. c	4. c	5. b
6. b	7. b	8. d	9. b	10. a
11. d	12. d	13. d	14. a	15. d
16. a	17. a	18. d	19. b	20. c

CAPÍTULO 2:

1. d	2. a	3. c	4. b	5. b
6. d	7. b	8. d	9. a	10. c
11. b	12. a	13. c	14. d	15. a
16. c	17. b	18. d	19. c	20. d

CAPÍTULO 3:

1. a	2. c	3. d	4. b	5. a
6. a	7. c	8. b	9. c	10. d
11. d	12. d	13. a	14. c	15. c
16. d	17. a	18. b	19. c	20. c

CAPÍTULO 4:

1. a	2. b	3. d	4. d	5. d
6. c	7. a	8. c	9. b	10. d
11. c	12. a	13. b	14. c	15. d
16. d	17. c	18. a	19. b	20. d

CAPÍTULO 5:

1. c	2. a	3. c	4. b	5. a
6. b	7. c	8. c	9. a	10. d
11. a	12. d	13. c	14. d	15. d
16. c	17. b	18. b	19. a	20. b

CAPÍTULO 6:

1. c	2. d	3. b	4. b	5. a
6. a	7. a	8. c	9. b	10. a
11. d	12. d	13. c	14. b	15. d
16. c	17. c	18. a	19. b	20. a

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bujalance, E. y Tarrés, J.: *Problemas de topología*. UNED, 1989.

[2] Fleitas, G. y Margalef, J.: *Problemas de topología general*. Alhambra, 1983.

[3] Ivanov, O.; Kharlamov, V.; Netsvetaev, N. y Viro, O.: *Elementary topology. Problem textbook*. AMS, 2008.

[4] Jaffard, P.: *Traité de topologie générale*. Mathématiques, 1997.

[5] Munkres, J.: *Topología* (2 Edición). Pearson Educación. Madrid, 2002.

[6] Steen, L. y Seebach, J.: *Counterexamples in topology*. Springer-Verlag, 1978.

[7] Sonntag, Y.: *Topologie et analyse fonctionnelle*. Universités Mathematiques, 1998.

[8] Willard, S.: *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.

ÍNDICE
ALFABÉTICO

colec

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

manu

109

INICIO