

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

CONSEJO SUPERIOR
DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

(Centro mixto C.S.I.C. - U.C.M.). MADRID

Publicación núm. 149

COMPENSACION DE GRANDES REDES GEODESICAS. **III CURSO DE GEODESIA SUPERIOR**

por

H. LINKWITZ



PUBLICADO EN "CURSOS Y SEMINARIOS"

Núm. 2, págs. 72-121

MADRID

1986

COMPENSACION DE GRANDES REDES GEODESICAS

K. LINKWITZ

Instituto de Geodesia Aplicada a las Obras Públicas
 Universidad de Stuttgart

1. INTRODUCCION. CONCEPTOS BASICOS

1.1. Observaciones sobre la notación utilizada

Trataremos el tema con matrices. Naturalmente, las letras mayúsculas como A, B, C, etc. representarán matrices. Los vectores se denotarán por letras minúsculas: \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , etc.

La matriz traspuesta de una matriz A se designará por A^T y lo mismo para los vectores traspuestos: \underline{a}^T , \underline{b}^T , \underline{c}^T , etc.

En el cálculo de compensación utilizaremos siempre A para la matriz de ecuaciones de observación y B o B^T para la matriz de ecuaciones de condición. Por ejemplo, las ecuaciones de observación se escriben entonces:

$$A \underline{x} = \underline{l} + \underline{v},$$

y, por ejemplo, las ecuaciones de condición son:

$$B^T \underline{v} = \underline{w},$$

Siempre será P la matriz de pesos. Si P es diagonal, naturalmente se trata de observaciones independientes. En caso contrario se trata de observaciones correladas. Q será la matriz cofactor. Es claro que P es la inversa de Q:

$$P = Q^{-1} \quad \text{y} \quad P^{-1} = Q.$$

A veces estas matrices figurarán con índices. Por ejemplo, la matriz P es la matriz de pesos para las cantidades \underline{l} , y es-

cribiremos P_{xx} si se trata de pesos para los valores x , etc.

\underline{x} serán los parámetros incógnita. En el caso de linealización los valores aproximados se designarán por \underline{x}_0 . En las linealizaciones aparecerán también diferenciales que designaremos por $d\underline{x}$. Así:

$$\underline{x}_0 + d\underline{x} = \underline{x}.$$

Pero en las ecuaciones se representan las incógnitas tanto por \underline{x} como $d\underline{x}$ dependiendo del contexto.

Otros vectores utilizados son:

\underline{k} : usualmente parámetros de Lagrange.

\underline{l} (o $\tilde{\underline{l}}$): observaciones.

\underline{v} : residuales o correcciones.

\underline{w} : términos independientes de las ecuaciones de condición.

Además de estas matrices y vectores se utilizarán los siguientes escalares:

n : número de observaciones en un problema de compensación.

h : número de incógnitas.

r : número de condiciones correspondientes a la redundancia del problema.

Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1. Compensación de observaciones indirectas: Las ecuaciones de observación son (problema lineal):

$$A \underline{x} = \underline{l} + \underline{v}.$$

Las ecuaciones normales son entonces:

$$(A^T P A) \underline{x} = A^T P \underline{l}$$

y la solución es:

$$\underline{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{l}.$$

Ejemplo 2. Compensación de condiciones: Las ecuaciones de condición son:

$$B^T \underline{v} = \underline{w},$$

donde \underline{w} está definido por

$$\underline{w} = \text{cte} - B\underline{l}.$$

Las ecuaciones normales en la misma notación son entonces:

$$(B^T P B) \underline{k} = \underline{w}$$

con la solución general:

$$\underline{k} = (B^T P B)^{-1} \underline{w}$$

y las correcciones:

$$\underline{v}: P^{-1} B \underline{k}.$$

Con esta notación estamos utilizando además otro sistematismo. En efecto, para las ecuaciones de observación hemos escrito $A \underline{x} = \underline{l} + \underline{v}$, mientras que para las condiciones hemos utilizado B^T , escribiendo $B^T \underline{v} = \underline{w}$. La matriz A tiene n filas (número de observaciones) y h columnas (número de incógnitas) con $n > h$. La matriz B^T tiene n columnas (número de observaciones) y r filas (redundancia) con $n > r$. El sistematismo de notación consiste en que si se trata de una matriz no traspuesta, el número de filas es mayor que el número de columnas, y si se designa la matriz como una matriz traspuesta, el número de columnas es más grande que el número de filas. Con este criterio es posible saber siempre si la matriz es 'ancha' o 'alta'. Naturalmente, el mismo criterio se aplica a vectores. Si escribimos \underline{a} es claro que nos referimos a un vector columna:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{pmatrix}$$

y si escribimos \underline{b}^T nos estamos refiriendo a un vector fila:

$$\underline{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_t).$$

Los elementos de las matrices normalmente se designan con dos índices. Por ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ : & : & & : \\ : & : & & : \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nh} \end{vmatrix}$$

Pero en el cálculo de compensación muchas veces se utiliza otra notación:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & h_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & h_2 \\ : & : & & : \\ . & . & & . \\ a_n & b_n & \dots & h_n \end{vmatrix}$$

Es la notación de Gauss. En muchas publicaciones antiguas, prácticamente en todas, se utiliza esta notación de diferentes letras con un índice en lugar de una letra con doble índice como se utiliza en la matemática.

1.2. Observaciones sobre la linealización y la ley de cadena de funciones de varias variables

Sabemos bien que la mayoría de los problemas de compensación tienen base no lineal y la notación que se utiliza normalmente en los libros de compensación es una notación lineal.

Es un hecho que la mayoría de los problemas no son lineales ¿cómo es que se tratan siempre como lineales?

Distinguiremos entre problemas con base lineal y problemas no lineales, y para dar una notación un poco clara utilizaremos

las matrices de Jacobi que contienen las derivadas parciales de estas funciones.

Naturalmente, la base para linealizar problemas en el cálculo de compensación es el desarrollo de Taylor y la derivación.

Base: Linealización por Taylor. Diferencial total.

Si, por ejemplo, tenemos una función

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

la diferencial total se escribe:

$$dy = (\partial f / \partial x_1) dx_1 + (\partial f / \partial x_2) dx_2 + \dots + (\partial f / \partial x_n) dx_n$$

y esto, naturalmente, es una forma lineal. Utilizando ahora dos vectores podemos escribir esta diferencial total en forma de matrices, por eso introducimos el vector:

$$(\partial f / \partial \underline{x})^T = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n),$$

y el vector de diferenciales:

$$\underline{dx}^T = (dx_1 \ dx_2 \ \dots \ dx_n).$$

Con esta notación la diferencial total se escribe, como se ve fácilmente:

$$dy = (\partial f / \partial \underline{x})^T \underline{dx} \quad (\text{producto escalar})$$

Generalización de diferencial total

Sean y_1, y_2, \dots, y_m funciones de las mismas variables x_1, x_2, \dots, x_n

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.

.

.

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

El conjunto de estas funciones puede considerarse como una aplicación f de R^n en R^m , y, naturalmente, la forma diferencial será:

$$d\underline{y} = (\underline{\partial f / \partial \underline{x}})^T d\underline{x}.$$

$(\underline{\partial f / \partial \underline{x}})$ se trata de un conjunto de funciones de una aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , y, naturalmente, podemos escribir las diferentes diferenciales totales de la forma:

$$dy_1 = (\partial f_1 / \partial x_1) dx_1 + (\partial f_1 / \partial x_2) dx_2 + \dots + (\partial f_1 / \partial x_n) dx_n$$

$$dy_2 = (\partial f_2 / \partial x_1) dx_1 + (\partial f_2 / \partial x_2) dx_2 + \dots + (\partial f_2 / \partial x_n) dx_n$$

.

.

$$dy_m = (\partial f_m / \partial x_1) dx_1 + (\partial f_m / \partial x_2) dx_2 + \dots + (\partial f_m / \partial x_n) dx_n$$

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial con ayuda de la matriz que contiene todas las derivadas parciales, llamada matriz de Jacobi:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

Las ecuaciones se expresan en forma matricial dando el vector columna $d\underline{y}$ como el producto de la matriz de Jacobi por el vector de diferenciales $d\underline{x}$.

Podemos dar ahora algunas observaciones sobre la matriz de Jacobi. Dicha matriz puede escribirse como vector columna:

$$\begin{vmatrix} (\partial f_1 / \partial \underline{x})^T \\ \vdots \\ (\partial f_m / \partial \underline{x})^T \end{vmatrix}$$

cuyos elementos son vectores fila, o como una fila:

$$(\underline{\partial f / \partial x_1}, \dots, \underline{\partial f / \partial x_n}).$$

En estas dos diferentes maneras se ve claramente la sistematización. $(\underline{\partial f / \partial \underline{x}})$ indica que se trata de una matriz, ya que \underline{x} es un vector y \underline{f} es un vector. Si se escribe esta matriz en la forma:

$$\begin{vmatrix} (\partial f_1 / \partial \underline{x})^T \\ \vdots \\ (\partial f_m / \partial \underline{x})^T \end{vmatrix}$$

es claro que cada elemento corresponde a una fila porque \underline{x} es un vector mientras que f_1, \dots, f_n son escalares. Pero si la escribimos en la forma:

$$(\underline{\partial f} / \underline{\partial x}_1, \underline{\partial f} / \underline{\partial x}_2, \dots, \underline{\partial f} / \underline{\partial x}_n)$$

los elementos de este vector son columnas, porque \underline{f} tiene forma de vector y x_i ($i = 1, \dots, n$) son escalares.

Supongamos ahora que x_1, x_2, \dots, x_n sean a su vez funciones de otras variables, t_1, t_2, \dots, t_r :

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(t_1, t_2, \dots, t_r) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= g_n(t_1, t_2, \dots, t_r). \end{aligned}$$

Podemos escribir:

$$\underline{x} = \underline{g}(\underline{t}).$$

Y, naturalmente:

$$d\underline{x} = (\underline{\partial g} / \underline{\partial t}) d\underline{t}.$$

Sustituyendo en la aplicación original las x por las funciones g , podemos expresar:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(g_1(t_1, \dots, t_r), g_2(t_1, \dots, t_r), g_n(t_1, \dots, t_r)) \\ y_2 &= f_2(g_1(t_1, \dots, t_r), g_2(t_1, \dots, t_r), g_n(t_1, \dots, t_r)) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(g_1(t_1, \dots, t_r), g_2(t_1, \dots, t_r), g_n(t_1, \dots, t_r)) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\underline{y} = \underline{f}(\underline{g}(\underline{t})).$$

De donde:

$$d\underline{y} = (\underline{\partial f}(\underline{g}(\underline{t})) / \underline{\partial t}) d\underline{t}.$$

La ley de la cadena dice que la matriz de Jacobi resultante es el producto de las matrices de Jacobi correspondientes a \underline{f} y \underline{g} :

$$\underline{\partial f}(\underline{g}(\underline{t})) / \underline{\partial t} = (\underline{\partial f} / \underline{\partial x}) (\underline{\partial g} / \underline{\partial t}).$$

Esta importante ley puede obtenerse mediante la sustitución

lineal de diferenciales. Combinando:

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx, \quad dx = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) dt,$$

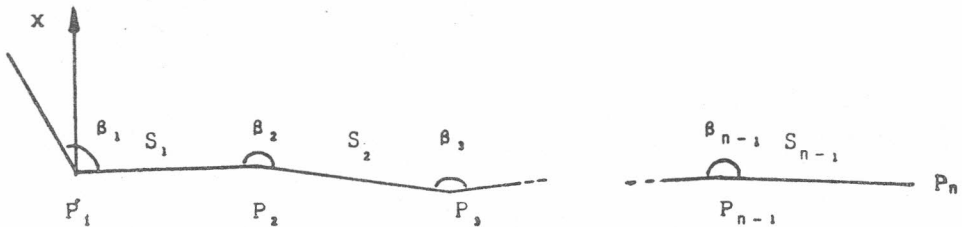
resulta:

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) dt$$

lo cual es equivalente a la ley de la cadena. En estas últimas expresiones hemos efectuado sustituciones lineales. Esto resulta válido ya que se trata de elementos diferenciales correspondientes al primer término del desarrollo de Taylor, los cuales tienen estructura de relaciones lineales aunque las funciones f , g dadas no sean lineales. Esta propiedad se aplica en los cálculos de compensación partiendo de funciones no lineales y efectuando el desarrollo de Taylor para cuyos primeros términos se aplican propiedades de funciones lineales que facilitan el cambio de variables. Veamos unos pequeños ejemplos.

Ejemplo 1 de aplicación: Propagación de errores en un sistema poligonal.

Sea una poligonal de puntos P_1, P_2, \dots, P_n , con ángulos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ y lados s_1, s_2, \dots, s_{n-1} . Introducimos un sistema de coordenadas locales x, y .



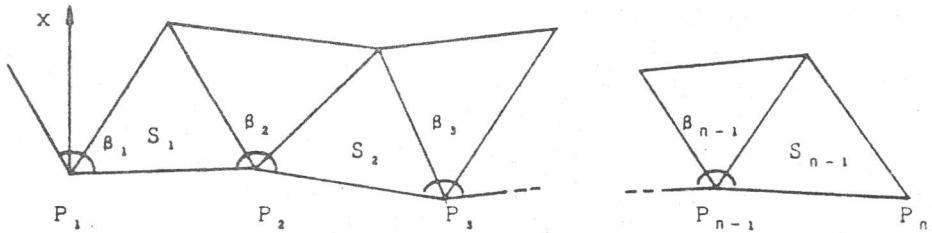
Buscamos la expresión de las variaciones (diferencial total) de las coordenadas x_n, y_n de P_n en función de las distancias, de los ángulos, y, naturalmente, de las diferenciales $ds_i, d\beta_i, i = 1, \dots, n-1$. Basta considerar

$$dx_n = \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right) d\beta_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_{n-1}}\right) d\beta_{n-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) ds_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial s_{n-1}}\right) ds_{n-1}$$

donde f ha de ser tal que:

$$x_n = f(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}).$$

Y se trata entonces de un problema clásico. En particular podemos considerar sólo la expresión de los efectos $d\beta$ sobre dx .



Supongamos ahora una cadena de triángulos, según la figura, en la que se han medido, además, los lados s_i , s_k de estos triángulos. Introducimos un sistema de coordenadas x , y . Consideremos el punto P_n y deseamos una expresión de las variaciones dx_n en función de las mediciones s_i y de la forma de las cadenas:

$$dx_n = (\partial f / \partial s_1) ds_1 + \dots + (\partial f / \partial s_{n-1}) ds_{n-1}.$$

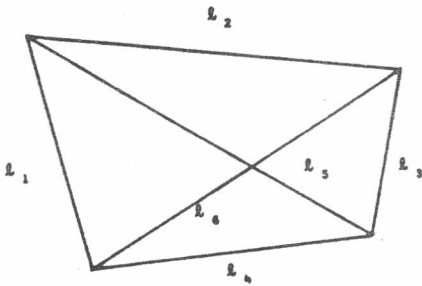
Este nuevo problema puede resolverse utilizando el problema anterior más fácil y aplicando la regla de la cadena. En efecto, podemos tratar la cadena de triángulos como construida sobre la poligonal anterior y usar la expresión de dx en función de $d\beta$. Por otra parte, es posible hallar expresiones de los ángulos β de los triángulos de la cadena en función de los lados que forman los triángulos respectivos, del tipo

$$d\beta = (\partial g / \partial s) ds,$$

que sustituidas en los $d\beta_1, \dots, d\beta_{n-1}$ de la fórmula correspondiente a la poligonal nos permite resolver el problema. En este proceso cada punto tiene asociada una pequeña matriz de Jacobi.

Ejemplo 2: Red de trilateración

El ejemplo más fácil es un cuadrilátero como el de la figura.

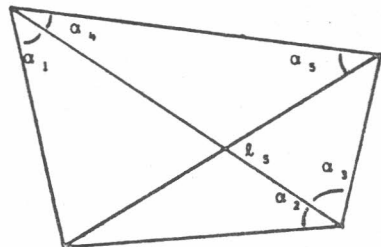


Sean $l_i, i = 1, \dots, 6$, distancias observadas. Se trata de una compensación por condiciones de la forma:

$$f(l_1, \dots, l_6) = c = \text{cte.}$$

El problema es deducir dicha función, que posteriormente habrá que linealizar. Con cinco

de las distancias medidas la figura queda determinada siendo la sexta superabundante. Debe existir, por tanto, una relación entre las seis medidas. La formulación de esta relación no es trivial. Hay soluciones que utilizan el área de diferentes triángulos para formular la ecuación. Hay también métodos que utilizan una analogía entre el cálculo de compensación y el de sistemas elásticos de la Mecánica en forma de ecuación de equilibrio. Estos métodos son difíciles.



Un procedimiento completamente diferente es el siguiente: Consideremos los triángulos de lados l_1, l_6, l_3 y l_2, l_3, l_6 . En éstos pueden deducirse los ángulos α_1, α_2 y α_3, α_4 . Por otra

parte, utilizando el lado l_6 , podemos deducir α_5 . Efectuada esta transformación resulta más fácil establecer la condición de superabundancia para el nuevo conjunto de incógnitas. Se trata ahora de una ecuación de lado de uso habitual en Geodesia que podemos linealizar para los elementos diferenciales y en la que finalmente podemos sustituir las relaciones diferenciales entre los α y los l .

Este método ha sido muy utilizado en la literatura clásica de la Geodesia entre los años 1950 y 1970 con el uso de la trilateración. El procedimiento de sustitución facilita la compensación

de redes de trilateración por medio de condiciones.

1.3. Compensación de observaciones indirectas

En las últimas décadas se ha desarrollado la compensación de observaciones indirectas para compensar grandes redes en sustitución del método de observaciones condicionadas. Las antiguas triangulaciones europeas, por ejemplo, las de Francia, Alemania, España, fueron compensadas prácticamente siempre con el método de condiciones. Ello es debido a que la redundancia que, naturalmente coincide con el número de ecuaciones condicionadas a resolver y con el número de ecuaciones normales, no era muy grande. Por ejemplo, en la compensación de la triangulación nacional de Sajonia (Alemania) calculada por Nagel en el último siglo se resolvieron (en 10 años con ayuda de logaritmos) 80 ecuaciones.

La resolución del sistema de ecuaciones normales era el problema principal. Sin embargo, con el advenimiento de computadoras, este problema ya no es decisivo. Hoy en día, el número de ecuaciones no tiene mucha importancia y la cuestión principal es la organización de datos. Por ejemplo, en la compensación de las trilateraciones de segundo, tercer y cuarto orden con miles de puntos hay soluciones directas por el método de observaciones indirectas. Por esto el método de condiciones es poco usado actualmente prevaleciendo el tratamiento de observaciones indirectas. Este último método es bien conocido, sin embargo, haremos unas observaciones.

Sean l_1, l_2, \dots, l_n las observaciones y sean m_1, m_2, \dots, m_n los correspondientes errores medios. Los pesos respectivos vienen dados por:

$$p_1 = c/m_1^2, \dots, p_n = c/m_n^2.$$

A las observaciones corresponde el vector \underline{l} , y a los pesos la matriz P:

$$\underline{l} = \begin{vmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{vmatrix} \quad P = \begin{vmatrix} P_{11} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & P_{nn} \end{vmatrix}$$

en caso de independencia. En el caso de que las observaciones estén correladas la matriz de pesos es:

$$P = \begin{vmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}.$$

Y sea v el vector de correcciones (residuales) a las observacio- nes:

$$\underline{v} = \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$$

Las ecuaciones de observación son entonces:

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (1)$$

o bien, escritas en componentes:

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= f_1(x_1, \dots, x_h) \\ l_2 + v_2 &= f_2(x_1, \dots, x_h) \\ &\dots \dots \dots \\ l_n + v_n &= f_n(x_1, \dots, x_h). \end{aligned}$$

Las observaciones l podrán ser ángulos, direcciones, distan- cias, acimutes, etc. En general, l y la estructura de la matriz de pesos (observaciones independientes o correladas) dependerán solamente del método de observación. Así es diferente la observa- ción de ángulos mediante vuelta completa del horizonte, observa- ción por sectores, medida de ángulos en todas las combinaciones. Según el método de medición la matriz P puede tener elementos fuera de la diagonal.

En compensación de redes x corresponde a coordenadas o di- ferenciales de coordenadas y también, inclusive, naturalmente, las incógnitas de orientación. Pueden considerarse diversos ti-

pos de coordenadas: coordenadas de tipo plano (x, y), de tipo proyección, coordenadas esféricas (θ, λ) o elipsóidicas (B, L). Está claro que la relación entre estas coordenadas de diferentes tipos y las observaciones que a su vez pueden ser direcciones, ángulos, distancias, acimutes, etc., prácticamente siempre es no lineal, y por eso es correcto escribir que $\underline{l} + \underline{v}$ es una función de \underline{x} :

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}).$$

Naturalmente, $\underline{x}^T = (x_1, \dots, x_h)$ y siempre n debe ser más grande que h . Deben resolverse las ecuaciones (1) que tienen como incógnita los \underline{x} (de 1 a h) y los \underline{v} (de 1 a n). Se trata entonces de $h + n$ incógnitas y n ecuaciones. Por esto no existe una solución única de este sistema y debe introducirse una condición para obtener unicidad de solución. La condición que se añade es que la forma cuadrática $\underline{v}^T P \underline{v}$ sea mínima. Con esto el matemático puede resolver el sistema de ecuaciones, originalmente no lineales, y la solución será tal que

$$\partial (\underline{v}^T P \underline{v}) / \partial \underline{x} = 0$$

que corresponde a:

$$\partial (\underline{v}^T P \underline{v}) / \partial x_1 = 0$$

.....

$$\partial (\underline{v}^T P \underline{v}) / \partial x_h = 0.$$

Utilizando la regla del producto para las derivaciones parciales, podemos traducir dichas derivadas parciales en ecuaciones, que, ya que las \underline{v} son funciones no lineales de \underline{x} , darán lugar a las ecuaciones normales no lineales:

$$\partial (\underline{v}^T P \underline{v}) / \partial \underline{x} = (\partial (\underline{v}^T P \underline{v}) / \partial \underline{v}) \cdot (\partial \underline{v} / \partial \underline{x}) = 2 \underline{v}^T P (\partial \underline{v} / \partial \underline{x}) = 0.$$

Como

$$\underline{v} = \underline{f}(\underline{x}) - \underline{l},$$

será:

$$\partial \underline{v} / \partial \underline{x} = \partial \underline{f} / \partial \underline{x}.$$

Entonces las ecuaciones normales adoptarán la forma:

$$2\underline{v}^T P(\underline{\partial f / \partial \underline{x}}) = 0.$$

Y si trasponemos y sustituimos \underline{v} de (1), resulta finalmente:

$$(\underline{\partial f / \partial \underline{x}})^T P(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{z}) = 0. \quad (2)$$

Estas son las ecuaciones normales no lineales y contienen, como se ve, las incógnitas \underline{x} y la matriz de Jacobi traspuesta, pero no aparecen las incógnitas \underline{v} . Hay exactamente h ecuaciones para resolver con h incógnitas \underline{x} . Podemos dar una vez más el problema al matemático el cual va a resolver estas ecuaciones no lineales por un método numérico, normalmente por un método que utiliza valores aproximados \underline{x}_0 de \underline{x} :

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + d\underline{x},$$

o bien:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{x}_1 + \underline{x}_2$$

si se trata de un método iterativo. En este caso se ha de utilizar la derivación en la proximidad de \underline{x} resultando una expresión en $d\underline{x}$. Ya que en la matriz de Jacobi y en la función \underline{f} las incógnitas son las \underline{x} , se debe aplicar la ley de la cadena o de producto. El resultado son unas ecuaciones normales de tipo lineal, pero que son diferentes de las que se utilizan habitualmente. Siendo $\underline{x} = \underline{x}_0 + d\underline{x}$, las expresiones resultantes para las ecuaciones normales son (la demostración es algo laboriosa):

$$[(\underline{\partial f / \partial \underline{x}})^T P(\underline{\partial f / \partial \underline{x}}) + B] d\underline{x} = - (\underline{\partial f / \partial \underline{x}})^T P(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{z})$$

ecuaciones lineales de un problema no lineal. Esta solución es "exacta" en el sentido de que las ecuaciones y la condición $\underline{v}^T P \underline{v} = \text{mín.}$ se han utilizado en su forma original de ecuaciones no lineales aunque después se ha recurrido a una linealización aproximativa.

Normalmente el término B no se utiliza. Pero hay problemas en los cuales dicho término (que corresponde a la no linealidad del problema original) debe ser utilizado. Esta situación ocurre,

por ejemplo, en un caso particular de grandes redes: grandes redes de cables de tensado como por ejemplo, en los tejados olímpicos de Munich. El análisis de estas redes corresponde completamente a una compensación de observaciones indirectas no lineales utilizando el término B. Si el término B no se utiliza resulta un sistema singular carente de solución, mientras que la adición de este término no lineal da como solución una figura de equilibrio de esfuerzos en cada punto de la red. Es una aplicación muy interesante. Incluso, los métodos que existen hoy día en Stuttgart para calcular grandes redes geodésicas tienen su origen en este problema desarrollado entre 1970 y 1971 para determinar la forma de equilibrio en sistemas de hasta 6000 incógnitas. Posteriormente se ha realizado un estudio en Stuttgart para averiguar si el tratamiento no lineal en redes geodésicas es ventajoso. La respuesta fue decepcionante: si los valores aproximados están lejos de los valores definitivos, la convergencia de la formulación normal sin este término B es, al contrario, mucho más rápida que la convergencia con la matriz B. Naturalmente, sin el término B tenemos:

$$(\partial \underline{f} / \partial \underline{x})^T P (\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) d\underline{x} = - (\partial \underline{f} / \partial \underline{x})^T P (\underline{f}(\underline{x}_0) - \underline{l}).$$

Estas son las ecuaciones habituales en observaciones indirectas. Generalmente se utiliza la notación:

$$\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l} = - \underline{\tilde{x}}.$$

Si además escribimos

$$(\partial \underline{f} / \partial \underline{x})^T = A$$

resultan las ecuaciones normales en su forma más conocida, obtenidas aplicando la condición $\underline{v}^T P \underline{v} = \text{mín.}$ a las ecuaciones de observación linealizadas. La matriz A contiene las derivadas parciales de las funciones con respecto a las incógnitas. Son dos caminos diferentes.

Las incógnitas \underline{dx} pueden ser sustituidas por otras incógnitas más cómodas utilizando la ley de la cadena aplicada anteriormente. Por ejemplo, en lugar de utilizar los \underline{dx} correspondientes a longitud y latitud, podemos introducir coordenadas planas mediante una sustitución lineal utilizando la ley de la cadena. Este método facilita el tratamiento de la compensación de grandes redes aplicándola mediante sustitución al caso plano.

El conjunto de todas las fórmulas que se utilizan en la compensación por ecuaciones indirectas figura en las tablas (1) y (2) siguientes:

TABLA nº 1. Observaciones indirectas: Relaciones lineales

	1	\underline{l}	2	$\underline{x} = d\underline{x}$	3	\underline{v}	4	$\tilde{\underline{l}} = \underline{l} + \underline{v}$
\underline{l}	1	$I \underline{l}$						
\underline{x}	2	$[(A^T P A)^{-1} A^T P] \underline{l}$		$I \underline{x}$				
\underline{v}	3	$[A(A^T P A)^{-1} A^T P - I] \underline{l} =$ $= (A_0 - I) \underline{l}$				$I \underline{v} =$ $= [I - A(A^T P A)^{-1} A^T P] \underline{v}$ $= (I - A_0) \underline{v}$		
$\tilde{\underline{l}}$	4	$[A(A^T P A)^{-1} A^T P] \underline{l} = A_0 \underline{l}$		$A \underline{x}$				$I \tilde{\underline{l}} =$ $= A(A^T P A)^{-1} A^T P \tilde{\underline{l}} =$ $= A_0 \tilde{\underline{l}}$

TABLA nº 2. Observaciones indirectas. Cofactores

	1	\underline{l}	2	$\underline{x} = d\underline{x}$	3	\underline{v}	4	$\tilde{\underline{l}} = \underline{l} + \underline{v}$
\underline{l}	1	$Q_{\underline{l}\underline{l}} = P^{-1}$		$Q_{\underline{l}\underline{x}} = A(A^T P A)^{-1}$		$Q_{\underline{l}\underline{v}} = A(A^T P A)^{-1} A^T - I$		$Q_{\underline{l}\tilde{\underline{l}}} = A(A^T P A)^{-1} A^T$
\underline{x}	2	$Q_{\underline{x}\underline{l}} = (A^T P A)^{-1} A^T$		$Q_{\underline{x}\underline{x}} = (A^T P A)^{-1}$		0		$Q_{\underline{x}\tilde{\underline{l}}} = (A^T P A)^{-1} A^T$
\underline{v}	3	$Q_{\underline{v}\underline{l}} = A(A^T P A)^{-1} A^T I$		0		$Q_{\underline{v}\underline{v}} = P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T$ $Q_{\underline{v}\underline{v}} = Q_{\underline{l}\underline{l}} - Q_{\tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{l}}}$		0
$\tilde{\underline{l}}$	4	$Q_{\tilde{\underline{l}}\underline{l}} = A(A^T P A)^{-1} A^T$		$Q_{\tilde{\underline{l}}\underline{x}} = A(A^T P A)^{-1}$		0		$Q_{\tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{l}}} = A(A^T P A)^{-1} A^T$ $Q_{\tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{l}}} = Q_{\underline{l}\underline{l}} - Q_{\underline{v}\underline{v}}$

La Tabla número 1, de cuatro filas y cuatro columnas, contiene las relaciones lineales en la compensación por indirectas. Numeramos las columnas con 1, 2, 3 y 4 y lo mismo las filas. El objeto de la tabla es expresar cada cantidad de una fila en función de cada cantidad de una columna mediante una relación lineal. Por ejemplo, los parámetros \underline{x} se pueden expresar en función de las observaciones originales \underline{l} en la forma:

$$\underline{x} = [(A^T P A)^{-1} A^T P] \cdot \underline{l}.$$

La tabla número 1 sirve de preparación para la número 2. Esta última contiene todas las matrices cofactor y está distribuida también en cuatro filas y cuatro columnas. La deducción de las matrices cofactor se realiza mediante la ley de propagación de errores. Por ejemplo:

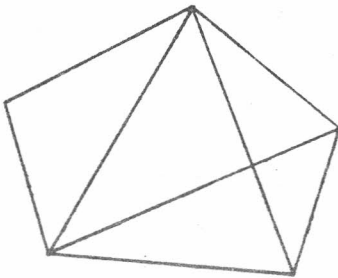
$$Q_{vv} = P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} \cdot A^T.$$

Estas tablas son la base del cálculo de compensación y sirven además para otros estudios como, por ejemplo, el estudio de confianzas y errores groseros.

2. METODOS MODERNOS PARA COMPENSAR GRANDES REDES

2.1. Motivación

Consideremos la figura adjunta. ¿Qué tipo de red geodésica representa dicho gráfico? Si las líneas representan direcciones,



se trata de una triangulación. Si las líneas representan distancias es una trilateración. Si representan direcciones y distancias medidas es una red de triangulación-trilateración. Si las líneas representan diferencias de alturas, se trata de una red de nivelación.

Si las líneas corresponden a diferencias de gravedad se trata de

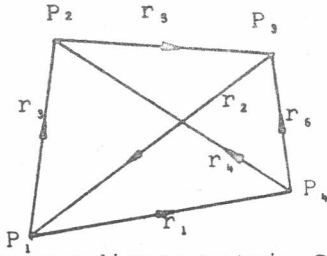
una red gravimétrica. Con esto queremos decir que una misma configuración de puntos de puntos puede determinar una red con diferentes tipos de mediciones: las líneas pueden representar direcciones, distancias, diferencias de altura, diferencias de gravedad, etc. Surge la cuestión de si existe un método de compensación que tenga en cuenta, por un lado la situación relativa de los puntos y por otro las mediciones que se realizan entre éstos. La respuesta es afirmativa: se puede describir mediante una matriz la "topología" de la red (qué puntos están comunicados con cuáles otros) y las mediciones pueden describirse a través de otra matriz. Este método permite estudiar separadamente la topología o relaciones entre puntos y el impacto de estas relaciones representadas por la matriz de ramas y nudos, en la solución del sistema. En efecto, la existencia o no de relaciones entre puntos dará lugar a valores cero o no cero en los lugares respectivos de la matriz del sistema de ecuaciones normales.

A cada problema de compensación de una red pertenece una matriz de ramas y nudos designada por C que se construye de la manera siguiente:

1. Tamaño de la matriz: Si el problema considera h puntos y n observaciones entonces la matriz C de ramas y nudos tiene h columnas y n filas.
2. Cada fila correspondiente a una observación o relación consta de ceros, un -1 en la posición correspondiente al punto de partida de la observación y un $+1$ en la posición correspondiente al punto extremo final de la observación.

Ejemplo: Pequeña red de cuatro puntos con cuatro observaciones

En la figura se indica con una flecha el sentido de la observación. Las observaciones son las siguientes:



- r_1 : de P_1 a P_4
- r_2 : de P_2 a P_3
- r_3 : de P_1 a P_2
- r_4 : de P_3 a P_4
- r_5 : de P_2 a P_3
- r_6 : de P_1 a P_4

La correspondiente matriz C es:

	P_1	P_2	P_3	P_4
r_1	-1	0	0	+1
r_2	+1	0	-1	0
r_3	-1	+1	0	0
r_4	0	+1	0	-1
r_5	0	-1	+1	0
r_6	0	0	+1	-1

h = núm. de columnas =
 = núm. de puntos = 4
 n = núm. de filas =
 = núm. de observaciones = 6.

Por ejemplo, la segunda fila corresponde a la segunda observación y lleva un -1 en la tercera columna por ser P_3 el punto inicial y un +1 en la primera por ser P_1 el punto final; los demás elementos son cero.

Si este gráfico corresponde a una red de nivelación, la matriz A de las ecuaciones de observación coincide con esta matriz C, $A = C$, y la flecha puede indicar la dirección desde el punto más alto al más bajo. Naturalmente las ecuaciones normales son:

$$(A^T P A) \underline{x} = A^T P \underline{\tilde{l}}$$

donde $\underline{\tilde{l}}$ representa diferencias de altura. Por lo tanto debemos asignar un valor fijo a un punto, si no, se trata de una red libre. Pero podemos suponer nula la altitud de ese punto y utilizar la matriz de ramas y nudos en todos los casos en que compensemos redes de nivelación.

El mismo tipo de matriz sirve para describir redes de triangulación, trilateración, etc. Los números de las diferentes columnas describen claramente la estructura de la matriz de las

ecuaciones normales: cada columna de C determina un elemento de la diagonal de las normales. Y, por otra parte, habrá elementos no nulos en los lugares fuera de la diagonal de las ecuaciones normales solamente si en las dos columnas correspondientes de C (una columna corresponde al número de la fila del elemento considerado y la otra columna al número de la columna de dicho elemento) hay elementos no nulos situados en la misma fila. Posteriormente aplicaremos la matriz de ramas y nudos a problemas de triangulación y trilateración de redes.

2.2. Observaciones sobre la linealización de diferentes tipos de ecuaciones de observación

En el caso general:

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}),$$

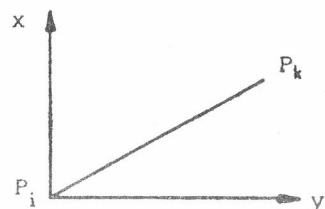
donde la función \underline{f} puede tener muchas formas que habrán de linealizarse casi siempre. En triangulaciones, cada observación implica dos puntos: P_i y P_k . Por ejemplo, en una observación de dirección l , P_i será el punto estación donde se encuentra el teodolito y corresponde al punto inicial en la matriz de ramas y nudos, mientras que P_k será la señal observada y corresponde al punto final de la respectiva fila de la matriz.

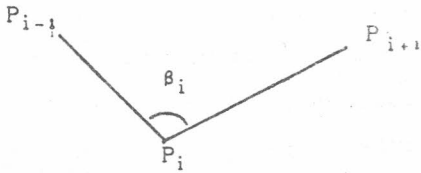
Podemos establecer en P_i un sistema de coordenadas paralelo al sistema x, y dado. La ecuación de observación para una dirección es siempre del tipo

$$l_t + v_t = \arctg[(y_k - y_i)/(x_k - x_i)] - \sigma_t$$

q_t indica la incógnita de orientación. La ecuación linealizada correspondiente es:

$$\begin{aligned} v_t = & (y_{ok} - y_{oi})/s_{ik}^2 dx_i - (x_{ok} - x_{oi})/s_{ik}^2 dy_i - \\ & -(y_{ok} - y_{oi})/s_{ik}^2 dx_k + (x_{ok} - x_{oi})/s_{ik}^2 dy_k - \\ & -\sigma_t + \tilde{l}_t \end{aligned} \quad (1)$$





En el caso de que la observación sea un ángulo puede repetirse esta ecuación dos veces, o bien, plantear la fórmula directamente.

Sean tres puntos \$P_{i-1}, P_i, P_{i+1}\$ y sea \$\beta_i\$ el ángulo \$P_{i-1}\hat{P}_iP_{i+1}\$. Es claro que la ecuación no lineal para \$\beta_i\$ es la diferencia entre las de las direcciones \$P_i\$ hacia \$P_{i+1}\$ y \$P_i\$ hacia \$P_{i-1}\$:

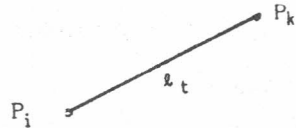
$$\beta_i + v_i = \arctg [(y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)] - \arctg [(y_{i-1} - y_i)/(x_{i-1} - x_i)].$$

Observamos que la ecuación es similar a la correspondiente a direcciones, pero ahora la diferencia de las dos direcciones elimina la incógnita de orientación. Efectuando la linealización se obtiene una ecuación en \$dx_{i-1}, dx_{i+1}, dx_i, dy_{i-1}, dy_{i+1}, dy_i\$ del mismo tipo que la correspondiente a direcciones.

Consideremos ahora el caso en que se haya observado una distancia \$l_t\$ entre dos puntos, \$P_i\$ y \$P_k\$.

En este caso la función es:

$$l_t + v_t = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}.$$



Y linealizando resulta:

$$v_t = (x_{ok} - x_{oi})/s_{ik} \cdot dx_i + (y_{ok} - y_{oi})/s_{ik} \cdot dy_i - (x_{ok} - x_{oi})/s_{ik} \cdot dx_k - (y_{ok} - y_{oi})/s_{ik} \cdot dy_k - \tilde{\epsilon}. \quad (2)$$

Estas ecuaciones corresponden al caso de coordenadas planas. Si se considera otro tipo de coordenadas pueden utilizarse ecuaciones similares efectuando previamente una proyección mediante ciertas correcciones a las observaciones.

Incluso, si deseamos compensar una red en coordenadas esféricas o coordenadas elipsóidicas las ecuaciones son del mismo tipo, tanto para ángulos como para distancias. En general, en los coeficientes de las ecuaciones linealizadas los numeradores siempre contienen diferencias de coordenadas y los deno-

minadores son distancias o distancias al cuadrado. Siendo, por tanto, similar la estructura podemos utilizar la matriz C para construir las ecuaciones típicas de los dos problemas. La idea básica es la siguiente: si multiplicamos la matriz C por el vector \underline{x} de coordenadas obtenemos un vector que contiene las diferencias de coordenadas que forman los coeficientes de las ecuaciones de observación. Para el ejemplo anterior obtendríamos:

$$\begin{aligned} x_4 - x_1 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_4 \end{aligned}$$

2.3. Tratamiento de redes de tipo trilateración pura

Consideraremos aquí con detalle la utilización de la matriz C en una trilateración pura. Para redes de tipo triangulación y triangulación-trilateración el procedimiento es similar.

Sea una red constituida por t puntos fijos (red con datum prefijado) y h puntos incógnita en la que se han efectuado n observaciones de distancias. La correspondiente matriz C tendrá n filas y h + t columnas, h referentes a los puntos incógnita y t a los puntos fijos. Por conveniencia en notación llamaremos C_s a la matriz total y C y C_f a las submatrices correspondientes a los puntos incógnita y fijos respectivamente:

$$C_s = \begin{matrix} \begin{matrix} C & C_f \end{matrix} \\ \begin{matrix} h & t \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} n \\ h + t \end{matrix} \begin{matrix} \text{filas} \\ \text{columnas} \end{matrix}$$

Definición de algunos vectores y matrices

Llamaremos \underline{x}_s , en lugar de \underline{x} , al vector de coordenadas de todos los puntos. Podemos escribir:

$$X_S = \begin{vmatrix} x_1 \\ : \\ x_h \\ x_{h+1} \\ : \\ x_{h+t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{x}_0 \\ \\ \\ \underline{x}_f \end{vmatrix} \quad (3)$$

La notación \underline{x}_0 no es accidental ya que los valores asignados a los puntos 1, ..., h serán los valores aproximados para los puntos incógnita. Observemos que las incógnitas son los diferenciales $dx_i, dy_i, i = 1, \dots, h$, mientras que los \underline{x}_f son constantes correspondientes a los puntos fijos, y los \underline{x}_0 son valores aproximados provisionales. Análogo para las coordenadas y:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ : \\ y_h \\ y_{h+1} \\ : \\ y_{h+t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{y}_0 \\ \\ \\ \underline{y}_f \end{vmatrix}$$

Sea ahora R una matriz diagonal definida por:

$$R = \begin{vmatrix} r_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_n \end{vmatrix}$$

donde cada elemento r_t viene dado por:

$$r_t = \sqrt{(x_{0k} - y_{0i})^2 + (y_{0k} - y_{0i})^2}$$

para $t = 1, \dots, n$. Consideremos finalmente la matriz habitual de pesos:

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p_n \end{vmatrix} \quad (3)$$

Podemos construir los vectores diferencia de coordenadas multiplicando C_s una vez por el vector \underline{x}_s y otra vez por el vector \underline{y}_s .

Consideremos el vector \underline{u} definido por:

$$\underline{u} = C_s \cdot \underline{x}_s.$$

Teniendo en cuenta la partición de C y \underline{x} , podemos escribir:

$$\underline{u} = C\underline{x}_0 + C\underline{x}_f.$$

Análogamente, si definimos el vector \underline{t} por $\underline{t} = C_s \cdot \underline{y}_s$ podemos escribir:

$$\underline{t} = C\underline{y}_0 + C\underline{y}_f.$$

En el ejemplo del cuadrilátero si consideramos el punto 4 como fijo, resultará:

$$\begin{vmatrix} -1 & & & & +1 \\ +1 & & -1 & & \\ -1 & +1 & & & \\ & +1 & & -1 & \\ & -1 & +1 & & \\ & & -1 & -1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ x_{04} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{04} - x_{01} \\ x_{01} - x_{03} \\ x_{01} - x_{01} \\ x_{02} - x_{04} \\ x_{03} - x_{02} \\ x_{03} - x_{04} \end{vmatrix}$$

$$C_s \cdot \underline{x}_s = (C \ C_f) \cdot \underline{x}_s = \underline{u}.$$

En este caso \underline{x}_f es un escalar.

Para las \underline{y}_s las expresiones son análogas. La matriz R es ahora:

$$\begin{vmatrix} r_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_6 \end{vmatrix}$$

donde:

$$r_1 = \sqrt{(x_{04} - x_{01})^2 + (y_{04} - y_{01})^2}$$

.....

$$r_6 = \sqrt{(x_{03} - x_{04})^2 + (y_{03} - y_{04})^2}$$

Con los elementos de los vectores \underline{u} y \underline{t} formamos las matrices diagonales:

$$U = \begin{vmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{vmatrix} \quad T = \begin{vmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{vmatrix}$$

En nuestro ejemplo la matriz U corresponde a diferencias de coordenadas.

Con ayuda de los vectores y matrices anteriormente definidos se pueden escribir directamente las ecuaciones de observación y las ecuaciones normales. Pero antes de hacer esta construcción trataremos el problema de trilateración con notación convencional, para, posteriormente, traducir las fórmulas resultantes a la notación con matriz C .

Las ecuaciones no lineales son del tipo:

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}).$$

Efectuando la linealización resulta:

$$\underline{v} = (\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) /_{x_0} d\underline{x} - \underline{\tilde{l}}$$

donde A es la matriz de Jacobi evaluada en \underline{x}_0 .

Para preparar la traducción de nuestra formulación convencional descomponemos la matriz A en dos submatrices de la forma

$$(A, B). \quad (6)$$

El vector de incógnitas es:

$$d\underline{x}^T = (dx_1, \dots, dx_h, dy_1, \dots, dy_h)$$

que descompondremos en la forma:

$$d\underline{x} = \begin{vmatrix} d\underline{x} \\ d\underline{y} \end{vmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} dx^I &= (dx_1, \dots, dx_h) \\ dy^I &= (dy_1, \dots, dy_h). \end{aligned}$$

A es la parte correspondiente a \underline{dx} y B la parte correspondiente a \underline{dy} .

Las ecuaciones de observación se escriben entonces:

$$\underline{y} = A \underline{dx} + B \underline{dy} - \underline{\tilde{z}}. \tag{7}$$

La matriz de ecuaciones normales es:

$$\begin{bmatrix} A^I P \\ B^I P \end{bmatrix} P(A \ B) = \begin{bmatrix} A^I P A & A^I P B \\ B^I P A & B^I P B \end{bmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones normales se escribe:

$$\begin{aligned} A^I P A \underline{dx} + A^I P B \underline{dy} &= A^I P \underline{\tilde{z}} \\ B^I P A \underline{dx} + B^I P B \underline{dy} &= B^I P \underline{\tilde{z}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Con esto hemos dividido las ecuaciones de observación y las ecuaciones normales en una parte que corresponde a las incógnitas \underline{dx} y en otra que corresponde a las incógnitas \underline{dy} . Hemos organizado las incógnitas en la forma: x_1, \dots, x_h y después y_1, \dots, y_h :

	x_1, \dots, x_h	y_1, \dots, y_h
x_1 : x_h	$A^I P A$	$A^I P B$
y_1 : y_h	$B^I P A$	$B^I P B$

La traducción de las expresiones (1), ..., (5) en las ecuaciones convencionales (6), ..., (8) es muy simple. En las ecuaciones (6) a (8) las matrices A, B y sus traspuestas son:

$$\begin{aligned}
 A &= U \cdot R^{-1} \cdot C \\
 A^T &= C^T \cdot R^{-1} \cdot U \\
 B &= T \cdot R^{-1} \cdot C \\
 B^T &= C^T \cdot R^{-1} \cdot T
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

(las matrices R, U y T son simétricas). Con ayuda de (9) podemos formular las ecuaciones normales que corresponden a (8). En forma matricial resulta:

$$\begin{vmatrix} C^T R^{-1} U P U R^{-1} C & C^T R^{-1} U P T R^{-1} C \\ C^T R^{-1} T P U R^{-1} C & C^T R^{-1} T P T R^{-1} C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C^T R^{-1} U P \underline{\tilde{x}} \\ C^T R^{-1} T P \underline{\tilde{x}} \end{vmatrix},$$

que puede escribirse también en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} C^T (R^{-2} P U^2) C & C^T (R^{-2} U P T) C \\ C^T (R^{-2} T P U) C & C^T (R^{-2} P T^2) C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C^T R^{-1} U P \underline{\tilde{x}} \\ C^T R^{-1} T P \underline{\tilde{x}} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Las cuatro matrices entre paréntesis son matrices diagonales si las observaciones son independientes. Ya que el producto de la matriz C^T por una matriz diagonal y por la matriz C tiene la misma estructura que la matriz C^T por la matriz identidad y por la matriz C, resulta que las ecuaciones normales tienen la estructura correspondiente a la matriz $C^T C$, lo cual permite organizar ya la solución sin el contenido de las diagonales.

Ello facilita el mismo análisis previo para diversos tipos de redes (redes de electromecánica, de canales en hidrografía, eléctricas, de comunicaciones, etc.) que tienen la misma matriz C. La matriz C describe, independientemente de qué tipo de red se trate, la relación entre puntos y ramas, y la parte diagonal U, T, describe el contenido físico del problema. Los métodos numéricos de resolución como el de matrices con huecos o el del gradiente conjugado se pueden aplicar de forma análoga a todos estos problemas que utilizan la misma estructura de la matriz C. Así, en nuestro caso de triangulaciones la estructura C y la resolución es la misma, pero U y T serán diferentes en cada caso.

2.4. Tratamiento de redes de tipo triangulación pura

El desarrollo es completamente análogo y la estructura de las ecuaciones lineales por triangulación es similar al caso anterior.

2.5. Tratamiento de redes de tipo trilateración y triangulación (redes mixtas)

Es una combinación de los dos casos anteriores.

2.6. Ideas básicas sobre la resolución numérica de grandes sistemas de ecuaciones normales.

2.6.1. Generalidades. Importancia de una estructura adecuada de las ecuaciones normales: Organización de datos.

Hay dos razones por las cuales es importante que la estructura se organice de forma adecuada:

1. El tiempo para resolver grandes sistemas ha de ser pequeño por razones de economía. El progreso en este campo es verdaderamente grande. En 1970 se resolvían los grandes sistemas con 2000 ó 3000 incógnitas empleando para ello media hora. Hoy día los mismos sistemas se resuelven en algunos minutos. La reducción del tiempo ha sido del orden de más de cien veces. Por otra parte, si las coordenadas provisionales son poco aproximadas o bien si hay errores groseros (según la experiencia en cualquier material geodésico de observación suele haber de un 3 a un 5 por ciento de errores groseros, de identificación, etc.) es necesario repetir los cálculos algunas veces.

2. El tamaño de la computadora y especialmente el espacio necesario en su memoria central. Con una adecuada organización es posible utilizar computadoras muy pequeñas para resolver grandes sistemas.

Estas dos exigencias condicionan los métodos que se utili-

zan hoy día en soluciones prácticas. Nos limitaremos aquí a dar algunas ideas básicas considerando con algún detalle el método del gradiente conjugado.

2.6.2. Métodos exactos

- La estructura de banda

En cualquier caso, tendremos la matriz $A^T P A$, de tamaño $h \times h$, correspondiente a las ecuaciones normales. Según el método general de Gauss de eliminación, la resolución consiste en la conversión de esta matriz en una matriz triangular para la cual se determinan las incógnitas mediante un proceso recursivo. Este proceso de convertir la matriz original en una matriz triangular consiste en la multiplicación de esta matriz por otras que se desarrollan en el proceso de cálculo. En este proceso resulta particularmente interesante, por la simplificación que supone, el caso de matrices banda, para las que sólo hay elementos no nulos en las proximidades de la diagonal. No obstante, en Geodesia es muy difícil organizar los datos de modo que la matriz resulte con estructura de banda por lo que el método de matrices banda tiene poca importancia en redes geodésicas. En cambio en Fotogrametría sí hay problemas en que su regularidad permite el tratamiento de estructura de banda, habiéndose desarrollado algoritmos especialmente adecuados. Un ejemplo conocido es el algoritmo de HYCHOL desarrollado hace quince años y que utiliza la estructura de banda y el método de Cholesky. El algoritmo es muy rápido en caso de estructuras regulares como en Fotogrametría mientras que en problemas de Geodesia hay otros métodos más rápidos.

- Matrices con huecos

Es asimismo interesante el caso de matrices con gran número de ceros. El problema consiste en organizar las filas y columnas de manera que haya un máximo de ceros.

En este sentido hay dos métodos alternativos: la factoriza-

ción o descomposición matricial y el método del gradiente conjugado. Las características de ambos son diferentes: mientras la descomposición matricial ocupa bastante memoria y poco tiempo, el método del gradiente conjugado, al contrario, ocupa menos memoria pero necesita realizar más iteraciones. La elección del método depende de las características y exigencias del ordenador: así, si disponemos de una pequeña computadora para la cual el tiempo de ejecución es barato, no resulta aconsejable el método del gradiente conjugado. Sin embargo, con una computadora adecuada, como el IBM capaz de tratar grandes sistemas con una organización adecuada se puede aplicar el método del gradiente con tiempos cortos. Por ejemplo, para unos 1000 puntos, que corresponden prácticamente a 6000 incógnitas, y con tres iteraciones no lineales, el tiempo de ejecución puede reducirse prácticamente a cuatro minutos. La elección entre iteraciones lineales y no lineales no es absoluta sino que depende del problema y de la computadora.

2.6.3. Métodos iterativos

Expondremos aquí las ideas básicas (debidas a los matemáticos suecos Hestenes y Stiefel, 1952) sobre el algoritmo "gradiente conjugado". Este método es muy interesante y permite soluciones en pequeñas (?) computadoras,

Sea $H\underline{x} = \underline{k}$ un sistema de ecuaciones lineales. La idea de Hestenes y Stiefel consiste en considerar primeramente la forma cuadrática asociada siguiente:

$$F(\underline{x}) = \underline{x}^T H \underline{x} - 2 \underline{k}^T \underline{x} + \text{cte.}$$

que puede ser interpretada como la aplicación del vector \underline{x} en el escalar $F(x)$. Si buscamos el vector \underline{x} para el que la forma

cuadrática da un valor mínimo resultan las ecuaciones lineales siguientes:

$$h \underline{x} = \underline{k}$$

que corresponden a:

$$\partial F(\underline{x}) / \partial \underline{x} = 0.$$

Se pueden resolver las ecuaciones lineales buscando directamente el mínimo de la forma cuadrática. El problema es exactamente el de la compensación ya que la forma cuadrática $\underline{v}^T P \underline{v}$ corresponde del mismo modo a las ecuaciones de observación indirectas. Para éstas tenemos:

$$\underline{v}^T P \underline{v} = (\underline{x}^T A^T - \underline{l}^T) P (A \underline{x} - \underline{l}) = \underline{x}^T (A^T P A) \underline{x} - 2 \underline{l}^T P A \underline{x} + \underline{l}^T P \underline{l}$$

que corresponde a la forma cuadrática:

$$F(\underline{x}) = \underline{x}^T H \underline{x} - 2 \underline{k} \underline{x} + \text{cte.}$$

con

$$H = A^T P A$$

$$\underline{k} = \underline{l}^T P A$$

$$\underline{l}^T P \underline{l} = \text{cte.}$$

Hay pues una traducción directa entre la notación de Stiefel y Hestenes y la notación de observaciones indirectas en la que se apoya el método del gradiente conjugado.

Se selecciona primeramente un valor aproximado \underline{x}_0 de las incógnitas que sustituido en las ecuaciones $H \underline{x}_0 = \underline{k}$ da lugar a unos residuos \underline{r}_0 .

$$\underline{r}_0 = \underline{k} - H \underline{x}_0 = \underline{p}_1$$

que expresan que los \underline{x}_0 no son lo suficientemente exactos para hacer consistente el sistema de ecuaciones. Con estos primeros residuos se calcula un factor α_i :

$$\alpha_i = \underline{r}_i^T \underline{r}_i / \underline{r}_i^T H \underline{p}_i$$

compuesto a partir de los residuos y del valor \underline{p}_i del primer ciclo. Con estos valores se calcula una segunda aproximación:

$$\underline{x}_i = \underline{x}_{i-1} + \alpha_i \underline{P}_i$$

y unos segundos residuos:

$$\underline{r}_i = \underline{r}_{i-1} - \alpha_i H \underline{P}_i.$$

Se calcula ahora un factor β_i en la forma:

$$\beta_i = \underline{r}_i^T \underline{r}_i / \underline{r}_{i-1}^T \underline{r}_{i-1}$$

esto es, el cociente de dos formas cuadráticas. Con β_i se corrige el valor \underline{P}_i . El procedimiento es recursivo y en la siguiente iteración tendremos:

$$\underline{P}_{i+1} = -\underline{r}_i + \beta_i \underline{P}_i$$

$$\alpha_{i+1} = \underline{r}_i^T \underline{r}_i / \underline{P}_{i+1}^T A \underline{P}_{i+1}$$

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \alpha_{i+1} \underline{P}_{i+1}$$

$$\underline{r}_{i+1} = \underline{r}_i - \alpha_{i+1} H \underline{P}_{i+1}$$

$$\beta_{i+1} = \underline{r}_{i+1}^T \underline{r}_{i+1} / \underline{r}_i^T \underline{r}_i.$$

Este método da una solución exacta en h iteraciones.

Es interesante observar ahora que el método se puede traducir una vez más en la notación introducida mediante las matrices U , T , \underline{k} y C . Cada vector \underline{P} se divide en un \underline{P} correspondiente a las coordenadas \underline{y} y un \underline{P} correspondiente a las orientaciones \underline{g} . En general, al igual que en la organización de las incógnitas, los factores del método del gradiente conjugado se organizan en tipos que pertenecen a \underline{x} , a \underline{y} y a las orientaciones.

El cálculo de la forma cuadrática que utiliza la matriz H que corresponde a las ecuaciones normales, consume mucho tiempo y es interesante la traducción de esta forma cuadrática en términos de la matriz de ramas y nudos y se ve (el desarrollo es un poco extenso) que puede transformarse en una forma cuadrática completamente diferente que tiene solamente los pesos y los vectores.

La misma técnica se aplica al cálculo de $\underline{r} \cdot \underline{r}$ en la formulación general se calcula por:

$$\underline{r}_i = \underline{r}_{i-1} - \alpha_i H \underline{P}_i$$

y la traducción consiste en descomponer \underline{r}_i en una parte que pertenece a las incógnitas \underline{x} , otra que pertenece a las incógnitas \underline{y} , y otra que pertenece a la orientación.

Los elementos de la matriz A se expresan en función de las diferencias en \underline{x} , de las diferencias en \underline{y} y de las distancias. Si en una red las distancias más pequeñas son de 10 cm y las más grandes de 50 cm, podrán aparecer errores de redondeo en una computadora. Por esto existe un tratamiento que consiste en escalar los elementos de la matriz A con lo que en lugar de hacer h pasos para obtener el valor de \underline{x} suficientemente aproximado basta con hacer un número de pasos comprendido entre $h/5$ y $h/3$. Obtenido \underline{x} se recalculan las derivaciones parciales de A. Las ecuaciones no lineales se determinan con valores aproximados cercanos a los definitivos y se repite el proceso. Los valores \underline{x} en el primer paso pueden ser muy poco aproximados: es suficiente darlos gráficamente en la mayoría de los casos. Por la misma razón no se necesita una división entre puntos céntricos y excéntricos; los excéntricos se tratan como incógnitas y las medidas entre pares de puntos céntricos y excéntricos se trata, en el cálculo, como una observación de alto peso. Si el algoritmo del gradiente conjugado se descompone según hemos visto la técnica es muy fuerte.

2.6.4. Unas observaciones más sobre la técnica del método del gradiente conjugado

Según 1.3. las ecuaciones normales exactas para observaciones indirectas son las siguientes:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\right)^T P(f(\underline{x})/g - \underline{L}) = 0, \quad (10)$$

Las ecuaciones de observación son:

$$\underline{l} + \underline{v} = \underline{f}(\underline{x}). \quad (11)$$

En lugar de las ecuaciones normales (10) resolvemos las ecuaciones lineales normales:

$$(\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) /_{x_0}^T P (\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) /_{x_0} d\underline{x} = (\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) /_{x_0}^T P \underline{l} \quad (12)$$

Utilizando la matriz de ramas y nudos escribimos:

$$(\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) \hat{=} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} \hat{=} \begin{vmatrix} U & R^{-1} & C \\ T & R^{-1} & C \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Observemos que los términos de las ecuaciones (10) se calculan en los valores \hat{x} de la solución definitiva mientras que en las ecuaciones normales lineales las derivadas se calculan para los valores \underline{x}_0 .

Consecuencias. Se comienza la compensación partiendo de unos valores provisionales \underline{x}_0 burdamente estimados.

- 1) Con estos \underline{x}_0 se determina la matriz de (9) que corresponde a las derivadas parciales de las funciones en \underline{x}_0 .
- 2) Mediante el método del gradiente conjugado se busca la solución de (12) en forma de proceso iterativo, $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_r$. El proceso se termina en la iteración i -ésima si para un ϵ fijado $|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i| < \epsilon$, considerando el último valor hallado como solución.
- 3) Con el \underline{x}_i del apartado número 2) se calcula una vez más:

$$(\partial \underline{f} / \partial \underline{x}) /_{x_r} = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = \dots$$

y con esta matriz A se controlan las ecuaciones no lineales (10). Si el segundo miembro de estas ecuaciones es cero se termina la iteración, pero si la diferencia entre cero y el resultado de sustituir \underline{x}_r es más grande que un δ dado, volvemos una vez más al apartado número 2) utilizando los valores \underline{x}_r como valores ini-

ciales y hallando otros $\underline{x}_{r+1}, \dots, \underline{x}_{r+t}$. De nuevo, si la diferencia entre dos \underline{x} consecutivos es menor que ϵ se termina el ciclo interior y calculando las derivadas parciales en \underline{x}_{r+1} se prueba una vez más si el segundo miembro de (10) es mayor o menor que el δ fijado. Si es menor, el proceso finaliza, y si es mayor se repite una vez más el ciclo lineal 2). Este es el proceso a seguir hasta que las ecuaciones no lineales (10) se cumplan para los $\hat{\underline{x}}$ definitivos.

La división de la resolución numérica en ciclos interiores lineales mediante el método del gradiente conjugado y ciclos exteriores no lineales para comprobar las ecuaciones (10) y corregir cada vez la matriz $(\partial f / \partial \underline{x})$ tiene muchas ventajas:

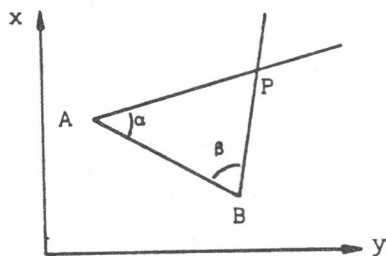
1. En los ciclos interiores no se necesitan las h iteraciones ya que es suficiente terminar el ciclo cuando $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$. Normalmente bastan de $h/3$ a $h/5$ iteraciones.
2. La estimación de los valores iniciales \underline{x}_0 puede ser grosera; es suficiente una estimación por métodos gráficos.
3. Los errores muy groseros se detectan ya en los primeros ciclos internos con el \underline{x}_0 aproximado.
4. La técnica de escalar las matrices permite hallar una solución a pesar de que las observaciones puedan ser muy heterogéneas. Por ejemplo, es posible un tratamiento simultáneo de distancias entre 0.0001 km y 50 km en una compensación. Como consecuencia, no es necesario distinguir entre puntos "céntricos" y puntos "excéntricos". Todos son igualmente tratados como incógnitas no siendo necesaria la reducción de excéntricos a céntricos.

3. ERRORES GROSEROS (PEQUEÑOS) Y TECNICAS PARA SU DETECCION. EL PROBLEMA DE LA FIABILIDAD

3.1. Motivación

Ejemplo nº 1.

Sea un sistema de coordenadas rectangulares y consideremos un problema de intersección directa: desde los puntos A y B se



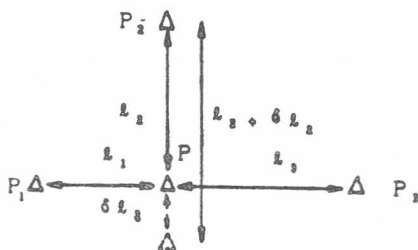
miden los ángulos α y β indicados en la figura para determinar el punto P. La precisión del punto P determinado se describe mediante la matriz Q. Podemos preguntar ¿cuáles son los valores de α y β que corresponden a la determinación "óptima"

del punto P? Este es un problema de optimización. La solución depende de los pesos de α y de β . Cuando los pesos son similares, los valores de α y β deben verificar: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

La fiabilidad de la configuración con dos observaciones α , β es igual a cero ya que al no existir observaciones superabundantes no hay ni compensación ni residuos y no existe método para detectar errores.

Ejemplo nº 2.

Sean tres puntos dados P_1, P_2, P_3 desde los que se miden las distancias l_1, l_2, l_3 a un punto P situado según la figura. Sea δl_2 un error grosero en la observación l_2 . En este caso hay redundancia y puede realizarse la compensación obteniendo los residuos v_1, v_2, v_3 que serán todos ellos muy pequeños. Aunque hay un error grosero, a causa de la configura-



ción de la figura no resultan grandes diferencias en los residuos. Vemos cómo en este tipo de problemas puede haber configuraciones para las que sea difícil detectar errores groseros.

3.2. Base del estudio analítico de problemas como los expuestos en 3.1.

El medio para estudiar analíticamente el problema son todas las relaciones lineales que hemos tratado en las tablas números 1 y 2.

En el lugar (3,1) de la tabla nº 1, los residuos se expresan en función de las observaciones por:

$$\underline{v} = [A(A^T P A)^{-1} A^T P - I] \cdot \underline{z},$$

y del lugar (3,3) de la tabla nº 2 tenemos que la matriz cofactor de \underline{v} es:

$$Q_{vv} = P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T.$$

De estas dos expresiones deducimos:

$$\underline{v} = - Q_{vv} P \underline{z} \quad (1)$$

con lo que \underline{v} es función de la matriz cofactor de los residuos. Buscamos ahora una interpretación de esta última ecuación. Para ello expresemos primeramente en forma matricial la relación anterior:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1i} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2i} & \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ q_{i1} & q_{i2} & \dots & q_{ii} & \dots & q_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{ni} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_i \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{vmatrix}$$

Seleccionemos la observación l_i , y asignémosle un error grosero δl_i . l contiene ahora la observación original y la constante δl_i .

En la fórmula anterior se multiplica el vector l_i por la matriz $-Q_{vv}P$ que no depende del error grosero supuesto ya que sus elementos q_{ij} se determinan solamente con los valores aproximados de las incógnitas (solamente con la configuración de la red). En consecuencia, el error grosero δl repercute en los residuos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= q_{1i} \delta l_i \\ \delta v_2 &= q_{2i} \delta l_i \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \delta v_i &= q_{ii} \delta l_i \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \delta v_n &= q_{ni} \delta l_i \end{aligned}$$

Es decir, el efecto de un error grosero se transmite solamente por los elementos de la columna i -ésima de la matriz $-Q_{vv}P$ y especialmente el efecto del error grosero δl_i sobre el residuo v_i sólo depende del elemento q_{ii} . Si q_{ii} es muy pequeño, un error grosero grande δl_i no tiene apenas influencia en el residuo v_i . Es interesante, pues, conocer cuáles son los valores numéricos de la matriz $-Q_{vv}P$, y especialmente de los elementos de la diagonal. Dejemos de momento este problema y veamos ahora el efecto de un error grosero δl_i sobre la solución x .

Según la casilla (2,1) de la tabla nº 1 sabemos que:

$$\underline{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{l}$$

(naturalmente, en problemas diferenciales \underline{x} representa las correcciones $d\underline{x}$ a los parámetros), que podemos representar en la forma:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_i & \dots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_i & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i + \delta l_i \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

asignando el mismo error grosero a la observación i -ésima. El efecto en el vector \underline{x} es:

$$\delta x_1 = \alpha_i \delta l_i$$

$$\delta x_2 = \beta_i \delta l_i$$

$$\vdots$$

$$\delta x_h = \kappa_i \delta l_i$$

Es claro que un error grosero influirá en todas las incógnitas ya que normalmente la columna i -ésima de la matriz $(A^T P A)^{-1} A^T P$ no tiene elementos cero. Estas relaciones permiten estudiar la influencia de cada error grosero en las incógnitas si conocemos previamente el error grosero, pero, naturalmente, éste es el problema.

A grandes rasgos, un error grosero corresponde a un residuo grande. Hemos de aclarar un poco más esta cuestión.

En nuestro resultado básico $\delta v_i = q_{ii} \delta l_i$ (2) se indica cómo todo depende de los valores q_{ii} . Por ejemplo, en el caso de que $q_{ii} = 0$ resulta $\delta v_i = 0$ para todo δl_i . Por supuesto, en este caso, ningún error δl_i influye en el residuo correspondiente a la misma observación y la confianza de la observación i -ésima es cero como en el ejemplo anterior. Si $q_{ii} = 1$, entonces $\delta v_i = \delta l_i$, lo que nos dice que un error grosero se transmite íntegramente al residuo correspondiente a la misma observación. Por ahora no sabemos cuáles son los posibles valores de q_{ii} , puede ser cero si el problema tiene redundancia, o también uno o más de uno. Es interesante por tanto estudiar los valores numéricos que pueden corresponder a q_{ii} . Dichos valores numéricos pueden estudiar

se con ayuda de las tablas núms. 1 y 2.

Según la casilla número (3,3) de la tabla nº 2:

$$Q_{vv} = P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T.$$

Y según la casilla (4,4) de la misma tabla:

$$Q_{\tilde{z}\tilde{z}} = A(A^T P A)^{-1} A^T.$$

Otra relación muy importante de la misma tabla es:

$$Q_{v\tilde{z}} = Q_{\tilde{z}v} = 0,$$

que expresa que la correlación de v y \tilde{z} es cero. Por otra parte, sabemos que:

$$P^{-1} = Q_{zz}.$$

De estas cuatro relaciones se deduce:

$$Q_{vv} = Q_{zz} - Q_{\tilde{z}\tilde{z}}. \quad (3)$$

Q_{zz} corresponde a la inversa de los pesos dados y es, por tanto, una matriz diagonal. Entonces, si conociésemos los valores de la matriz cofactor de las observaciones compensadas podríamos determinar Q_{vv} .

Para estimar $Q_{\tilde{z}\tilde{z}}$ tenemos varias posibilidades: Podemos, mediante las ecuaciones (3), estimar directamente los elementos de $Q_{\tilde{z}\tilde{z}}$ en lugar de Q_{vv} . Un elemento $q_{\tilde{z}_i\tilde{z}_i}$ de $Q_{\tilde{z}\tilde{z}}$ debe verificar

$$0 < q_{\tilde{z}_i\tilde{z}_i} < 1$$

ya que, como el error de cada observación compensada se calcula después de la compensación por:

$$m_{z_i} = m_0 \sqrt{q_{\tilde{z}_i\tilde{z}_i}},$$

si la compensación tiene un efecto favorable, debe ser $q_{\tilde{z}_i\tilde{z}_i} \leq m_e$ menor que 1.

Es posible dar ahora una acotación más exacta de los valores de $Q_{\tilde{z}\tilde{z}}$. En efecto, por un lado la traza de la matriz

$$Q_{\tilde{x}\tilde{x}} = A(A^T P A)^{-1} A^T$$

es igual a:

$$\text{traza } (Q_{\tilde{x}\tilde{x}}) = q_{\tilde{x}_1\tilde{x}_1} + q_{\tilde{x}_2\tilde{x}_2} + \dots + q_{\tilde{x}_h\tilde{x}_h}.$$

Por otro lado, se demuestra, mediante algunos cálculos, que la traza de $Q_{\tilde{x}\tilde{x}}$ es igual a h . Entonces, el promedio de los $q_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i}$ es:

$$\left(\sum_{i=1}^n q_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i} \right) / n = h/n$$

en el caso en que $P = I$. En general:

$$\left(\sum_{i=1}^n q_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i}^P \right) / n = h/n$$

si $P^{-1} = Q_{ll}$. Se deduce que el valor de un elemento de esta matriz depende concretamente de la redundancia. Normalmente la redundancia en problemas de compensación no es grande y por ello se puede decir que si la redundancia es pequeña, se puede acotar $q_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i}$ en la forma:

$$0.8 < q_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i} < 0.9.$$

Este resultado, teniendo en cuenta la ecuación base de la dependencia entre las matrices $Q_{\tilde{x}\tilde{x}}$ y Q_{vv} , es equivalente a:

$$0.1 < q_{v_i v_i} < 0.2$$

ya que:

$$q_{v_i v_i} = 1 - q_{\tilde{x}_i\tilde{x}_i} \quad \text{si } P = I$$

este es un resultado muy importante. El aumento de la precisión a causa de la compensación no es muy grande; los errores medios de antes de la compensación se multiplican por $\sqrt{0.9}$ ó $\sqrt{0.8}$, lo cual es prácticamente equivalente a un aumento de precisión

del 10 por ciento si la redundancia es del 20 por ciento.

Mediante la ecuación $q_{v_i v_i} = 1 - q_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i}$ se ve que si la precisión de los \tilde{x} es pequeña, la precisión de los residuos será grande. Si, por ejemplo, $q_{v_i v_i}$ se aproxima más y más a 1, lo que significa que aumenta la precisión de las observaciones compensadas, la precisión de los residuos es más y más grande. En nuestra estimación, los factores q_i son más pequeños cuanto menor es la redundancia del problema, y si la redundancia es cero, los valores q son igualmente cero como hemos visto. Y este efecto se aprecia también en la expresión de q definido por:

$$q_{ii} = q_{v_i v_i} P_i.$$

En el caso de que la precisión de las observaciones sea pequeña, (P_i es pequeño) q_{ii} también será pequeño, y por tanto un error grosero en x_i afectará poco al residuo v_i . Es posible entonces que todos los residuos sean pequeños y sin embargo, haya errores groseros. No obstante, la única posibilidad que existe es la investigación a través de los valores v_i que podemos conocer ¿Cómo podemos detectar entonces errores groseros? El único camino son los test estadísticos, que pueden aplicarse en diversas circunstancias y a diversos parámetros:

1) m_0 se calcula mediante la fórmula:

$$m_0 = \sqrt{v^T P v / h}$$

y podemos comparar este valor con una estimación previa (por ejemplo, la unidad).

2) Podemos contrastar también los residuos mismos. Para ello utilizamos el valor w dado por Baarda:

$$w_i = |v_i| / m_{v_i} = |v_i| / (m_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}).$$

Los valores de $q_{v_i v_i}$ son pequeños, por lo que el valor m_{v_i} será en general mucho más pequeño que m_0 . La redundancia tiene gran

efecto. w_i es un número comprendido entre 1 y 4 y la aplicación del test consiste en comparar este valor con un valor δw (del orden de 3 ó 4, dependiendo de la confianza). Si $w_i > \delta w_i$ entonces es probable que la observación tenga un error grosero. En el test entra directamente la redundancia.

Con esta técnica es posible seleccionar residuos que, mediante este test, tienen la posibilidad de tener errores groseros y, entonces, solamente entonces, se calcula el δl_i que pertenece a un δv_i detectado en este test. Y normalmente por eso se da el límite de posibilidades donde pueden detectarse errores groseros, porque solamente si los factores q_{ii} son aproximados a 1 es posible seleccionar también el error grosero que pertenece a δv_i . Esta es la base de la técnica.

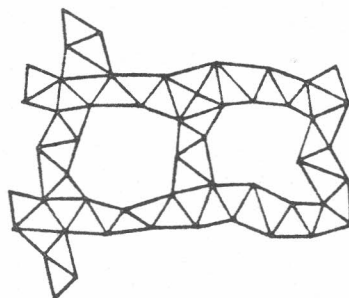
Las relaciones lineales nos permiten investigar la influencia de errores groseros en los residuos. En función de la redundancia los factores de multiplicación tienen diferentes valores: son más pequeños cuanto menor es la redundancia, se aproxima a cero si la redundancia es cero (lo cual nos dice que no se detectan errores groseros). Todo el proceso de detectar errores groseros es una cuestión de redundancia. La única posibilidad que existe es investigar los residuos y para ello hay principalmente dos posibilidades. podemos comparar la estimación anterior de m_0 con el m_0 calculado como resultado de la compensación. Si esto nos da pie para suponer que hay errores groseros, podemos entrar en un test de diferentes residuos. En éste, sabiendo que las q_{ii} reflejan para cada residuo la redundancia. si el valor calculado es más grande que el prescrito por el test podemos suponer que v_i está causado por un error grosero.

4. APLICACION DE LA COMPENSACION A DIFERENTES ORDENES DE REDES NACIONALES

4.1. Ejemplos de compensaciones recientes

Mencionaremos aquí dos ejemplos de grandes compensaciones recientes. La primera es la redefinición del datum norteamericano, trabajo que se efectúa prácticamente desde 1970. La idea es utilizar todas las observaciones del último siglo en el continente norteamericano.

La vieja compensación, a causa de las dificultades numéricas, se realizaba por el método aproximado de Bowie. En el método de Bowie se consideran cadenas que forman poligonales de redes del tipo de la figura.

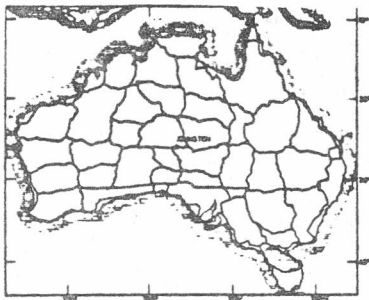


Cada cadena se compensaba independientemente de las otras cadenas y, posteriormente, se procedía a una unificación de estas diferentes triangulaciones. Naturalmente, se incluían unas determinaciones astronómicas para la ecuación de Laplace, unas observaciones para la orientación y unas mediciones de bases para la escala. A partir de 1970 se procedió a una recompensación utilizando todas las observaciones.

La técnica que se aplicaba era dividir la totalidad de la red en subredes diferentes y hacer la compensación en las subredes para detectar errores groseros. La experiencia nos dice que el número de errores groseros de los datos (no de las observaciones) es del 3 al 5 por ciento (errores de copia, de identificación, intercambio de céntricos y excéntricos, falsos números asignados, etc). Para eliminar esos errores se efectúan compensaciones parciales, porque al tratar un material de 500.000

observaciones es muy difícil detectar errores groseros.

Una segunda gran compensación interesante es la compensación de la red australiana. En Australia la técnica que se aplicaba data de hace treinta años. Es una red solamente de poligonales (hay algunas triangulaciones y trilateraciones, pero la mayor parte son poligonales).



Las longitudes de los lados de las poligonales son aproximadamente de 10 a 15 km. Las configuraciones no tienen mucha redundancia. La redundancia en cada poligonal entre dos puntos fijos (si observamos todo lo posible) es 3, lo que nos dice que $n-h$ es 3 independiente del número de puntos. Hay 3 condiciones: dos de coordenadas y una de ángulo. Por eso ya sabemos que el factor crítico h/n es aproximadamente 1, ya que n y h son grandes. Por eso la confianza de una red de poligonales es pequeña.

4.2. La nueva observación de las redes de segundo, tercero y cuarto orden en Baden-Württemberg desde 1970. Métodos utilizados.

Es un gran trabajo que se efectúa hoy en día y que se está terminando en estos años. Daremos una estadística que demuestre la magnitud de este trabajo. Daremos el número de puntos en los diferentes órdenes año por año, lo que mostrará claramente el progreso en este trabajo.

Tabla de los trabajos

Número de puntos observados y compensados

País	Red	1971	1972	1973	1975	1977	1979	1981	1984
Baden- Württemberg 35750 km ²	I orden	102			102	102	102	102	102
	II "	250	id	id	319	389	463	463	463
	III "	1022			2012	3322	4577	5677	5677
	IV "	12131			16493	25152	34180	42820	49188
Baviera 70550 km ²	I orden	58			58				
	II "	397	id	id	397				
	III "	9551			9551				
	IV "	26356			26356				

En 1971, en Baden-Württemberg, había prácticamente 1 punto de primer orden por cada 3 km². A partir de 1975, en Baden-Württemberg aumenta el número de puntos observados y compensados gracias al programa ASTRI. En años anteriores las compensaciones se habían efectuado por métodos gráficos y por métodos numéricos, pero con pequeños ordenadores que sólo permitían el tratamiento simultáneo de 20 puntos. Pero con el programa ASTRI (de la Universidad de Stuttgart) que utiliza la técnica del gradiante conjugado, ya en 1975 había una capacidad de tratamiento de 3000 puntos simultáneos (prácticamente 9000 incógnitas), con una capacidad de 58 K en la memoria central. El programa permite, además, que todas las observaciones de los trabajos de campo se traten al final de la campaña en el campo. Prácticamente, se ve que hay 9000 nuevos puntos en 2 años en la red de cuarto orden.

En los primeros años había uno o dos observadores en el campo, pero en la época en que se termina en 2º orden (entre 1979 y 1981) había hasta 34 observadores en el campo, con to-

rres temporales para la acomodación de reflectores, que podían construirse en hora y media o dos horas, capaces de soportar vientos de una velocidad de 50 m/seg. Era posible tratar un gran número de puntos (unos 1000 por año) ya que la compensación era posible con ayuda de la programación. Hoy en día, se realiza un preanálisis de las planificaciones de las redes de cuarto orden, que hace posible detectar, ya en la planificación, partes débiles de la red, y orientar las observaciones en consecuencia.

Es muy interesante ver la precisión de estas redes:

II orden:	$m_R \approx \pm 1.1 \text{ cm}$	y	2.1 cm
	$m_H \approx \pm 1.3 \text{ cm}$	y	3.0 cm
III orden:	$m_R \approx 0.7 \text{ cm}$	y	1.0 cm
	$m_H \approx 0.6 \text{ cm}$	y	1.0 cm
IV orden:	$m_R \approx 0.4 \text{ cm}$	y	1.1 cm
	$m_H \approx 0.4 \text{ cm}$	y	1.2 cm

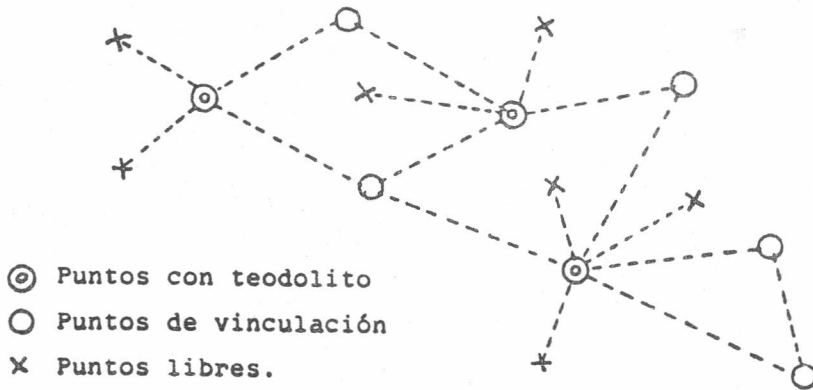
Prácticamente BadenWüttemberg dispone hoy en día de más de un punto por km^2 con precisión de 1 cm. Se está revolucionando la medición de distancias de las bases. Es posible analizar y compensar los miles de observaciones en cada invierno que sucede a la campaña de verano en que el número de observadores aumenta hasta 34.

Al principio había muchas medidas de ángulo, pero al final es prácticamente una trilateración pura con muy pocas observaciones de ángulos.

4.3. Aplicación en redes taquimétricas

En 5º y 6º orden (tareas catastrales, de agrimensura, etc.) se encuentran redes taquimétricas con un estacionamiento libre.

Esta técnica se utiliza en los levantamientos topográficos.



Consideremos la figura adjunta: hay tres puntos de teodolito, hay puntos de vinculación y puntos libres. Hay puntos comunes con redundancias. Se trata entonces de compensar una red de este tipo. Es un sistema de puntos de estación en los que se observan otros puntos, algunos de los cuales se observan más tarde desde otra estación (puntos de vinculación). En cada estación se observan puntos libres, puntos de vinculación, puntos de levantamientos catastrales, etc. Hay redes que se constituyen de 200 a 300 puntos de teodolito, 100 a 300 puntos de vinculación y 2000 a 5000 puntos libres. La superficie es pequeña y los métodos de compensación permiten analizar y compensar estas redes simultáneamente mediante transformación de coordenadas; cada sistema de teodolito es tratado al principio como un sistema libre de coordenadas que se vincula entonces con otros sistemas mediante los puntos de vinculación. Finalmente se realiza una compensación total de los datos.

El método es fuerte y con mucha libertad para el geómetra a la hora de determinar las uniones y seleccionar puntos de vinculación. Es una consecuencia más del desarrollo de po-

sibilidades de análisis y compensación de grandes redes. Tenemos nosotros un sistema denominado T.A.N.A. que puede aplicarse en ordenadores personales y que se utiliza en oficinas pequeñas y en las empresas privadas que tratan este tipo de levantamientos.

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE — MADRID

(Antes Seminario de Astronomía y Geodesia)

- 1.—Efemérides de 63 Asteroides para la oposición de 1950 (1949).
- 2.—E. PAJARES: Sobre el cálculo gráfico de valores medios (1949).
- 3.—J. PENSADO: Órbita del sistema visual σ^2 U Maj (1950).
- 4.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1951 (1950).
- 5.—J. M. TORROJA: Corrección de la órbita del Asteroide 1395 "Aribeda" (1950).
- 6.—R. CARRASCO y J. M. TORROJA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1371 "Resi" (1971).
- 7.—J. M. TORROJA y R. CARRASCO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1560 (1942 XB) y efemérides para la oposición de 1951 (1951).
- 8.—M. L. SIEGRIST: Órbita provisional del sistema visual Σ 728-32 Orionis (1951).
- 9.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1952 (1951).
- 10.—J. PENSADO: Órbita provisional de Σ 1883 (1951).
- 11.—M. L. SIEGRIST: Órbita provisional del sistema visual Σ 2052 (1952).
- 12.—Efemérides de 88 Asteroides para la oposición de 1953 (1952).
- 13.—J. PENSADO: Órbita de ADS 9380 = Σ 1879 (1952).
- 14.—F. ALCÁZAR: Aplicaciones del Radar a la Geodesia (1952).
- 15.—J. PENSADO: Órbita de ADS 11897 = Σ 2438 (1952).
- 16.—B. RODRÍGUEZ-SALINAS: Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las marcas y predicción de las mismas en un cierto lugar (1952).
- 17.—R. CARRASCO y M. PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1528 "Conrada" (1953).
- 18.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Órbita de ADS 1709 = Σ 228 (1953).
- 19.—J. BALTÁ: Recientes progresos en Radioastronomía. Radiación solar hiperfrecuente (1953).
- 20.—J. M. TORROJA y A. VÉLEZ: Corrección de la órbita del Asteroide 1452 (1938 DZ₁) (1953).
- 21.—J. M. TORROJA: Cálculo con Cracovianos (1953).
- 22.—S. AREND: Los polinomios ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales (1953).
- 23.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de Sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo (Guinea Española) (1954).
- 24.—J. PENSADO: Órbita de la estrella doble Σ 2 (1954).
- 25.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1420 "Radcliffe" (1954).
- 26.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
- 27.—R. CARRASCO y M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 "Albertine" (1954).
- 28.—J. PENSADO: Distribución de los períodos y excentricidades y relación período-excentricidad en las binarias visuales (1955).
- 29.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Nueva órbita del Asteroide 1372 "Haremari" (1955).
- 30.—M. DE PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).
- 31.—J. M. TORROJA: Órbita del Asteroide 1554 "Yugoslavia" (1955).
- 32.—J. PENSADO: Nueva órbita del Asteroide 1401 "Lavonne" (1956).
- 33.—J. M. TORROJA: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
- 34.—D. CALVO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 "Mündleira" (1956).
- 35.—M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 "Predappia" (1956).

- 36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).
- 37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de Sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).
- 38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens (1958).
- 39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 "Prisma" (1958).
- 40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).
- 41.—F. MÚGICA: Sobre la ecuación de Laplace (1958).
- 42.—F. MARTÍN ASÍN: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).
- 43.—ST. WIERZBINSKI: Orbite améliorée de h 4530 = γ Cen = Cpd—48°, 4965 (1958).
- 44.—D. CALVO BARRENA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 "Kobolda" (1958).
- 45.—M. LÓPEZ ARROYO: El ciclo largo de la actividad solar (1959).
- 46.—F. MÚGICA: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).
- 47.—J. M. TORROJA: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).
- 48.—J. M. TORROJA, P. JIMÉNEZ-LANDI y M. SOLÍS: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de Sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).
- 49.—E. PAJARES: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).
- 50.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).
- 51.—J. M. TORROJA: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).
- 52.—F. MÚGICA: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).
- 53.—M. LÓPEZ ARROYO: La evolución del área de las manchas solares (1962).
- 54.—F. MÚGICA: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).
- 55.—P. DÍEZ-PICAZO: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).
- 56.—J. M. TORROJA: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).
- 57.—F. MARTÍN ASÍN: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).
- 58.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).
- 59.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).
- 60.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ y R. DUMONT: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).
- 61.—M. REGO: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región $\lambda\lambda$ 4000-6600 A (1969).
- 62.—C. MACHÍN: Mareas terrestres (1969).
- 63.—J. M. TORROJA: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).
- 64.—M. J. SEVILLA: Reducción automática de posiciones de estrellas (1970).
- 65.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid en 1969 (1970).
- 66.—M. J. SEVILLA: Los cálculos de estación en triangulación espacial (1970).
- 67.—MANUEL E. REGO: Determinación de las abundancias de los elementos en la atmósfera de la estrella de alta velocidad 31 Aql. (1970).
- 68.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Análisis cualitativo del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1971).
- 69.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1970 (1971).

- 70.—R. VIEIRA y R. ORTIZ: Descripción de un aparato para medida de coordenadas (1971).
- 71.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1971 (1972).
- 72.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Observación y estudio teórico del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1972).
- 73.—M. J. SEVILLA: Cálculo de las constantes de distorsión y parámetros del disco obturador para cámaras balísticas (1973).
- 74.—R. PARRA y M. J. SEVILLA: Cálculo de efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos (1973).
- 75.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Resultado de las observaciones de α Peg efectuadas desde el satélite europeo TDI (1973).
- 76.—E. SIMONNEAU: Problemas en la determinación de abundancias de elementos en las estrellas en condiciones de equilibrio termodinámico local y alejadas del equilibrio termodinámico local (1974).
- 77.—J. ARANDA: Construcción de modelos de estructura interna para estrellas en la secuencia principal inicial (1974).
- 78.—R. ORTIZ, M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Estudio de la calibración, técnica de medida y automatización de datos en un comparador para medidas de placas estelares (1974).
- 79.—M. J. SEVILLA: Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos y análisis de los errores en la restitución de un arco de órbita (1974).
- 80.—M. A. ACOSTA, R. ORTIZ y R. VIEIRA: Diseño y construcción de un fotómetro fotoeléctrico para la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna (1974).
- 81.—T. J. VIVES, C. MORALES, J. GARCÍA-PELAYO y J. BARBERO: Fotometría fotográfica UBV del cúmulo galáctico King 19 (1974).
- 82.—R. ORTIZ y R. VIEIRA: Control automático en posición y tiempo de los sistemas de obturación de las cámaras de observación de satélites geodésicos (1974).
- 83.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1972 y 1973 (1974).
- 84.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA y M. REGO: α CrB en el ultravioleta lejano (1975).
- 85.—J. M. TORROJA, R. VIEIRA, R. ORTIZ y M. J. SEVILLA: Estudio de mareas terrestres en España (1975).
- 86.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Levantamiento gravimétrico de Lanzarote (1975).
- 87.—P. KUNDANMAL SUKHWANI: Modelos teóricos de curvas de luz. Su aplicación al sistema β Lyrae (1975).
- 88.—M. J. SEVILLA: Coordenadas astronómicas y geodésicas. Desviación relativa de la vertical (1975).
- 89.—C. TEJEDOR: Fotometría fotoeléctrica R. G. U. del cúmulo galáctico IC 2581 (1976).
- 90.—M. J. SEVILLA: Nuevos coeficientes para la reducción automática de posiciones de estrellas (1976).
- 91.—M. REGO: Técnicas observacionales en espectroscopía astrofísica (1976).
- 92.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud por distancias cenitales de la polar, método de Littrow (1976).
- 93.—T. J. VIVES: Determinación fotométrica del tipo espectral de la componente desconocida de una estrella binaria eclipsante (1976).
- 94.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Contraste y determinación por métodos astrofísicos de fuerzas de oscilador (1977).
- 95.—M. J. SEVILLA y R. CHUECA: Determinación de acimutes por observación de la Polar. Método micrométrico (1977).
- 96.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Fotometría R G U en un campo del anticentro galáctico, cerca del NGC 581 (1977).
- 97.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Datos fotométricos de 2.445 estrellas estudiadas en la región de Casiopea, entre los cúmulos abiertos Trumpler 1 y NGC 581 (1977).
- 98.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Spectral Analysis of Earth Tides (1977).
- 99.—JOSÉ M. TORROJA y RICARDO VIEIRA: Earth Tides in Spain. Preliminary results (1977).

(Continúa en la cuarta de cubierta)

- 100.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Three different methods for taking in account the gaps in spectral analysis of Earth Tides records (1978).
- 101.—R. VIEIRA: Mareas terrestres (1978).
- 102.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la longitud por el método de Mayer. Programas de cálculo automático (1979).
- 103.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la latitud por el método de Sterneck. Programas de cálculo automático (1979).
- 104.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de cálculo automático (1979).
- 105.—P. K. SUKHWANI y A. GIMÉNEZ: Corrección de efectos atmosféricos para imágenes tomadas desde satélites Landsat (1979).
- 106.—M. J. SEVILLA: Inversión de matrices simétricas en el método de mínimos cuadrados (1979).
- 107.—A. GIMÉNEZ: Análisis de la curva de luz del sistema binario eclipsante S Velorum (1979).
- 108.—M. J. SEVILLA: Determinación del acimut de una referencia por observación de la estrella polar. Programa de cálculo automático (1979).
- 109.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Primera parte) (1980).
- 110.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Determinación de la latitud por el método de Horrebow-Talcott, Programas de Cálculo Automático (1980).
- 111.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1980).
- 112.—R. VIEIRA y M. OREJANA: Comunicaciones presentadas en las XLI y XLII Jornadas del Grupo de Trabajo de Geodinámica del Consejo de Europa. Luxemburgo (1979-80).
- 113.—M. J. SEVILLA: Sobre un método de cálculo para la resolución de los problemas geodésicos directo e inverso (1981).
- 114.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. TORO, F. LAMBAS, M. OREJANA y P. K. SUKHWANI: Comunicaciones presentadas en el IX Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Nueva York (1981).
- 115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V. L. B. I. al estudio del movimiento del Polo (1981).
- 116.—A. GONZÁLEZ-CAMACHO y M. J. SEVILLA: Algunas relaciones entre diferentes ejes que se consideran en la rotación de la Tierra (1981).
- 117.—R. VIEIRA, F. LAMBAS y E. GIMÉNEZ: Modificaciones realizadas en un gravímetro LaCoste Romberg mod. G para su utilización en registro continuo de la gravedad (1981).
- 118.—R. VIEIRA: La microired de mareas gravimétricas del Sistema Central (1981).
- 119.—J. M. TORROJA y R. VIEIRA: Informe sobre el desarrollo del programa de investigación sobre mareas terrestres en el último bienio (1981).
- 120.—F. LAMBAS y R. VIEIRA: Descripción, estudio de la precisión y aplicaciones geodésicas y geofísicas de los nuevos niveles de lectura electrónica (1981).
- 121.—M. J. SEVILLA: Programación del método de la cuerda (1981).
- 122.—J. M. TORROJA: Historia de la Ciencia Árabe. Los Sistemas Astronómicos (1981).
- 123.—M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Comunicaciones presentadas en la Sesión Científica de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el día 13 de enero de 1982 (1982).
- 124.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Aplicación del método de colocación a la reducción de placas fotográficas de estrellas (1982).
- 125.—M. J. SEVILLA y A. G. CAMACHO: Deformación rotacional de una tierra elástica (1982).
- 126.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Obtención de las medidas de la precisión en la determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1982).
- 127.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en la IV Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica. Santiago de Compostela (1983).
- 128.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Segunda parte) (1983).

(Continúa en la segunda de cubierta)

- 129.—M. J. SEVILLA: Geodesia por satélites y navegación (1983).
- 130.—L. GARCÍA ASENSIO, A. G. CAMACHO, P. ROMERO y M. J. SEVILLA: Comunicaciones presentadas en la V Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica (1983).
- 131.—M. J. SEVILLA: Anomalías de la gravedad basadas en el sistema geodésico de referencia 1980 (1983).
- 132.—J. M. TORROJA: Historia de la Física hasta el siglo XIX. La Mecánica Celeste (1983).
- 133.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: The Molodensky Problem for an homogeneous liquid core (1984).
- 134.—J. M. TORROJA: La obra astronómica de Alfonso X El Sabio (1984).
- 135.—H. MORITZ: Sistemas de referencia en Geodesia (1984).
- 136.—H. MORITZ: Rotación de la Tierra (1984).
- 137.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: Autofrecuencias del movimiento del Polo para un modelo de Tierra de tipo Jeffreys Molodensky (1984).
- 138.—J. M. TORROJA: Nuevas definiciones en el problema de la medida del tiempo (1984).
- 139.—M. J. SEVILLA: Astronomía Geodésica (1984).
- 140.—M. J. SEVILLA y M. D. MARTÍN: Diseño de una Microrred en la Caldera del Teide para el estudio de deformaciones de la corteza en la zona (1986).
- 141.—R. VIEIRA, C. DE TORO y V. ARAÑA: Estudio Microgravimétrico en la Caldera del Teide (1986).
- 142.—M. J. SEVILLA, M. D. MARTÍN y A. G. CAMACHO: Análisis de Datos y Compensación de la primera campaña de observaciones en la Caldera del Teide (1986).
- 143.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Hamiltonian Formulation of the polar motion for an elastic earth's model (1986).
- 144.—P. ROMERO y M. J. SEVILLA: The Sasao-Okubo-Saito equations by Hamilton Theory. First Results (1986).
- 145.—R. VIEIRA, M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y M. D. MARTÍN: Geodesia de precisión aplicada al control de movimientos y deformaciones en la Caldera del Teide (1986).
- 146.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. DE TORO, B. DUCARME, J. KAARIAINEN, E. MEGÍAS y J. FERNÁNDEZ: Comunicaciones presentadas en el X Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Madrid, 1985 (1986).
- 147.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en el X Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Madrid, 1985 (1986).
- 148.—M. J. SEVILLA: Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes Geodésicas: III Curso de Geodesia Superior (1986).