



# Universitat Autònoma de Barcelona

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería Electrónica de Telecomunicaciones

## **Modelado, simulación y control de un péndulo invertido**

Luis Geovanny Triviño Macías

Director: Ramon Vilanova Arbos

Departament de Telecomunicació i Enginyeria de Sistemes

Universitat Autònoma de Barcelona

Septiembre 2020





El abajo firmante, *Ramon Vilanova Arbos*, Profesor de l'Escola d'Enginyeria de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

**CERTIFICA:**

Que el proyecto presentado en esta memoria de Trabajo Fin de Grado ha sido realizado bajo su supervisión por el alumno *Luis Geovanny Triviño Macías*.

Y para que así conste firma la presente.

*Bellaterra, 1 de Septiembre de 2020*

Signatura: *Ramon Vilanova Arbos*



Resum: En aquest projecte s'obté el model matemàtic del sistema no lineal format per un pèndul invertit sobre una base mòbil i es dissenya dos controladors PID per mantenir el sistema estable. El primer controlador manté el pèndul en equilibri verticalment, mentre que el segon permet que la base mòbil es posicioni al centre del espai determinat. També s'ha generat una animació en 3 dimensions amb la que es s'observa clarament el comportament del sistema.

Resumen: En este proyecto se obtiene el modelo matemático del sistema no lineal formado por un péndulo invertido sobre una base móvil y se diseña dos controladores PID para mantener el sistema estable. El primer controlador mantiene el péndulo en equilibrio verticalmente, mientras que el segundo permite que la base móvil se posicione en el centro del espacio determinado. También se ha generado una animación en 3 dimensiones con la que se observa claramente el comportamiento del sistema.

Abstract: In this project the mathematical model of the non-linear system formed by an inverted pendulum on a mobile base is obtained and two PID controllers are designed to keep the system stable. The first controller keeps the pendulum in equilibrium vertically, while the second allows the moving base to be positioned in the centre of the given space. A 3-dimensional animation has also been generated that shows clearly the behaviour of the system.

## Contenido

---

1.	Introducción .....	4
1.1.	Objetivo .....	4
1.2.	El péndulo invertido sobre base móvil.....	5
2.	Modelo matemático del péndulo invertido .....	6
2.1.	Descripción del sistema físico .....	6
2.2.	Función de transferencia.....	9
2.3.	Espacio de estados .....	10
2.4.	Respuesta en lazo abierto .....	11
2.4.1.	Respuesta en lazo abierto mediante la función de transferencia.....	11
2.4.2.	Respuesta en lazo abierto mediante el espacio de estados .....	12
2.5.	Modelo matemático no lineal .....	13
3.	Control del péndulo.....	15
3.1.	Controlador PID.....	15
3.1.1.	Componentes del PID.....	15
3.2.	Simulación con la herramienta Sisotool.....	17
3.3.	Primera sintonización del controlador con la planta no lineal .....	20
3.4.	Segunda sintonización.....	22
3.4.1.	Variación del parámetro $K_p$ .....	22
3.4.2.	Variación del parámetro $K_i$ .....	24
3.4.3.	Variación del parámetro $K_d$ .....	25
3.5.	Control del carro .....	27
3.5.1.	Sintonización PID del carro.....	27
3.5.2.	Filtro de resultados .....	28
3.5.3.	Resultados .....	30
4.	Animación del sistema .....	34
4.1.	Partes del modelo .....	34
4.2.	Simulación del sistema con animación .....	34
5.	Conclusiones y propuestas.....	37
6.	Anexos.....	38
	Anexo I. Scripts.....	38
	Script 1: Segunda sintonización del controlador PID que controla el ángulo y graficado de los resultados .....	38
	Script 2: Sintonización del controlador PID que controla el carro y graficado de los resultados.....	40
	Script 3: Simulación y graficado del sistema con los dos controladores PID .....	41

## Índice

Anexo II. Resultados de las simulaciones del controlador del carro.....	43
7. Referencias.....	45

## Lista de figuras

Figura 1: Ejemplos de sistemas. a) Transporte personal Segway I2 SE. b) Despegue de cohete.	4
Figura 2: Sistema péndulo invertido .....	5
Figura 3: Sistema del péndulo invertido .....	6
Figura 4: Diagrama del sistema péndulo invertido en dos partes: (a) Carro. (b) Péndulo .....	7
Figura 5: Mapa de polos y ceros .....	12
Figura 6: Respuesta en lazo abierto.....	12
Figura 7: Diagrama de bloques de la simulación del sistema en lazo abierto mediante el espacio de estados .....	13
Figura 8: Respuesta al salto unitario del sistema en lazo abierto mediante espacio de estados ..	13
Figura 9: Sistema de control realimentado.....	15
Figura 10: LGR del sistema lineal.....	17
Figura 11: LGR del sistema lineal.....	18
Figura 12: Diagrama de bloques comprobación LGR.....	18
Figura 13: Señal de perturbación .....	19
Figura 14: Respuesta del sistema con un controlador P de ganancia $K_p=25.9$ .....	19
Figura 15: Respuesta del sistema con un controlador P de ganancia $K_p = 40$ .....	20
Figura 16: Modelo del sistema con planta no lineal.....	20
Figura 17: Diagrama de bloques del sistema no lineal.....	21
Figura 18: Configuración del integrador para que las condiciones iniciales sean la variable posición inicial.....	21
Figura 19: Primera sintonización con la herramienta PID tuner .....	22
Figura 20: Respuesta del sistema a la primera sintonización .....	22
Figura 21: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $1^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de $K_p$ . b) Señal del controlador .....	23
Figura 22: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $5^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de $K_p$ . b) Señal del controlador .....	23
Figura 23: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de $K_p$ . b) Señal del controlador .....	24
Figura 24: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de $K_i$ . b) Señal del controlador .....	25
Figura 25: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de $K_d$ . b) Señal del controlador .....	25
Figura 26: Señal del controlador para $K_d$ bajo.....	26
Figura 27: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de $K_d$ con $K_i=0$ . b) Señal del controlador.....	26
Figura 28: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo $10^\circ$ . a) Respuesta con $K_p=40$ , $K_i=0$ y $K_d=4$ . b) Señal del controlador.....	27
Figura 29: Diagrama de bloques del sistema no lineal controlador por 2 PID.....	28
Figura 30: Mejores resultados. a) Respuesta a la combinación 17. b) Respuesta a la combinación 21. c) Respuesta a la combinación 25. d) Respuesta a la combinación 26.....	29
Figura 31: Esfuerzo controlador para $K_p=-2$ , $K_i=0$ y $K_d=-2$ . a) Controlador del carro. b) Controlador de ángulo.....	30
Figura 32: Esfuerzo controlador para $K_p=-1$ , $K_i=0$ y $K_d=-1$ . a) Controlador del carro. b) Controlador de ángulo.....	30
Figura 33: Ángulo y posición del carro controlados .....	31
Figura 34: Diagrama de bloques del sistema con perturbación en el ángulo .....	31
Figura 35: Perturbación de $10^\circ$ en $t=10$ segundos .....	32
Figura 36: Respuesta del sistema ante una perturbación de $10^\circ$ en $t=10$ segundos.....	32
Figura 37: Respuesta del sistema ante perturbación de $45^\circ$ .....	33

Figura 38: Respuesta del sistema ante perturbaciones en el carro y en el péndulo.....	33
Figura 39: Modelo 3D del sistema .....	34
Figura 40: Diagrama de bloques con la fase de animación añadida.....	35
Figura 41: Configuración del bloque VR Sink.....	35
Figura 42: Animación sistema péndulo-carro. a) Instante inicial $t=0s$ . b) Primera actuación. c) Sistema controlado, $t=6s$ . d) Perturbación $t=10s$ .....	36
Figura 43. Respuesta del sistema con $K_p=-2$ , $K_i=-4$ y $K_d=-3$ (combinación 12) .....	43
Figura 44: Estables con mayor tiempo de respuesta. a) Respuesta estable a los 14 segundos. b) Respuesta estable a $t>20$ segundos.....	44

## Lista de tablas

---

Tabla 1: Parámetros físicos del sistema carro-péndulo .....	11
Tabla 2: Combinaciones para los parámetros PID .....	28
Tabla 3: Parámetros de los controladores PID .....	30
Tabla 4: Índices y combinaciones con respuestas inestable.....	43
Tabla 5: Índices y combinaciones con respuesta estable y mayor tiempo .....	43

# 1. Introducción

---

El péndulo invertido constituye uno de los sistemas no lineales más utilizados para la experimentación de diferentes estrategias de control.

La razón por la cual el péndulo invertido ha sido uno de los sistemas más utilizados por diversos investigadores para probar y desarrollar estrategias de control, es por su dinámica no lineal que permite comprender los fenómenos y comportamientos físicos de plantas y equipos presentes en diferentes ámbitos [1], [2], [3].

En el área de vehículos eléctricos unipersonales, la compañía Segway, Inc., ha diseñado varios vehículos donde el conductor introduce como referencia la velocidad y dirección, mientras el vehículo debe mantener el equilibrio (figura 1.a). Otro ejemplo sería, los cohetes de un cohete espacial, los cuales requieren de un sistema de control para mantener la posición vertical durante el despegue (figura 1.b). También se estudia el péndulo invertido para enfocar el problema de movimiento en robots bípedos a la hora de caminar [4].

Hay diferentes variantes de péndulos invertidos siendo el más estudiado el denominado péndulo invertido sobre base móvil o como se llama comúnmente, péndulo invertido sobre carro, el cual es el que se estudiará en este proyecto.



Figura 1: Ejemplos de sistemas. a) Transporte personal Segway I2 SE. b) Despegue de cohete.

## 1.1. Objetivo

El objetivo de este proyecto es diseñar un sistema de control que permita estabilizar el péndulo invertido, tanto en la rotación del péndulo como en la posición de la base móvil, manteniendo el péndulo en posición vertical superior y haciendo que la posición de la base móvil termine centrada. Se realizará una animación en 3D para observar el comportamiento del sistema.

## Capítulo 1: Introducción

Para alcanzar el objetivo principal, es necesario cubrir con los objetivos específicos que se presentan a continuación:

- Obtener el modelo matemático del sistema péndulo invertido.
- Analizar el sistema en lazo abierto.
- Diseño del controlador.
- Analizar el sistema en lazo cerrado con el controlador.

### 1.2. El péndulo invertido sobre base móvil

El péndulo invertido sobre un carro es un servo mecanismo que consta de una varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre una base móvil, a la que comúnmente se le llama carro. Este último se mueve sobre una guía rectilínea horizontal por la acción de una fuerza  $u$ , que es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición del péndulo, como se muestra en la figura 2, donde la masa del péndulo se concentra en el extremo superior de este.

Para que se pueda implementar este proyecto en un laboratorio, se han marcado límites en la movilidad del péndulo y la posición del carro.

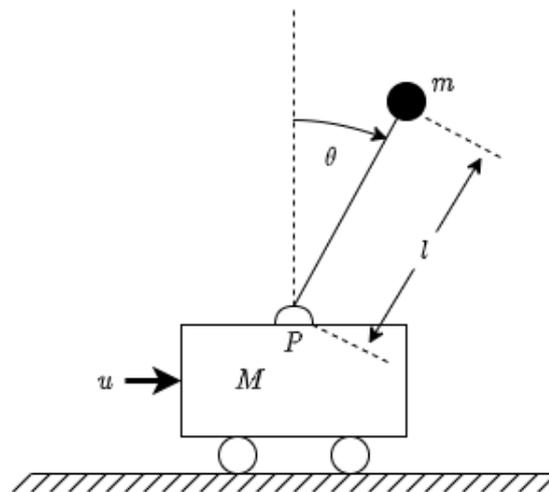


Figura 2: Sistema péndulo invertido

Donde:

- $M$ : Masa del carro
- $m$ : Masa del péndulo
- $l$ : Longitud del péndulo
- $u$ : Fuerza aplicada al carro
- $P$ : Punto de articulación
- $\theta$ : Ángulo del péndulo respecto a la normal

## 2. Modelo matemático del péndulo invertido

El objetivo de este capítulo es encontrar una expresión matemática que represente el comportamiento físico del sistema. [5], [6], [7].

### 2.1. Descripción del sistema físico

El péndulo invertido se puede entender como un cuerpo rígido cuyo movimiento se limita a dos dimensiones. Las ecuaciones fundamentales de movimiento plano de un cuerpo rígido son:

$$\sum F_i = ma_i \quad (1)$$

$$\sum F_j = ma_j \quad (2)$$

$$\sum F_G = I\alpha_G \quad (3)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son la segunda ley de Newton para las componentes horizontales  $i$  y para las verticales  $j$  de la fuerza  $F$ . La aceleración  $a$  es la experimentada por el cuerpo rígido de masa  $m$ . La ecuación (3) establece que la suma de momentos de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de un punto  $G$  cualquiera, es igual al producto del momento de inercia  $I$  por la aceleración angular  $\alpha$  alrededor del cuerpo rígido.

El péndulo invertido es inestable, ya que puede girar en cualquier momento y en cualquier dirección, a menos que se le aplique una fuerza de control.

Se considera un problema de dos dimensiones, en el cual, el péndulo, se mueve sobre el plano de la página, es decir, el descrito por los ejes  $X$  e  $Y$  según se observa en la figura 3.

En la misma figura, se muestra el sistema del péndulo invertido donde la masa se concentra en lo alto de la varilla del péndulo siendo esta su centro de gravedad. Se puede distinguir la fuerza que describe el movimiento del carro  $U$ , la masa del carro  $M$ , la masa  $m$ , y el ángulo del péndulo respecto a la normal vertical  $\theta$ .

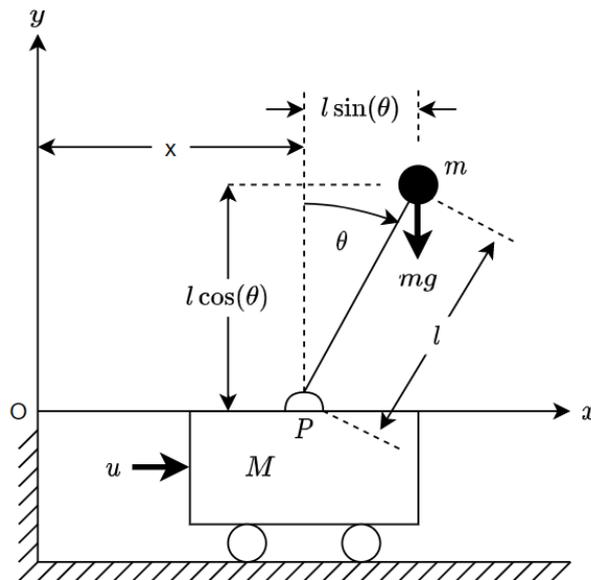


Figura 3: Sistema del péndulo invertido

## Capítulo 2: Modelo Matemático del Péndulo

Del sistema podemos extraer las distancias en la que se encuentra el centro de la masa sobre la varilla del péndulo (centro de gravedad) hasta el punto de origen  $O$ :

$$X_G = x + l \sin(\theta) \quad (4)$$

$$Y_G = l \cos(\theta) \quad (5)$$

Para simplificar el análisis del sistema se puede dividir el péndulo invertido en dos cuerpos, por un lado el carro y por otro el péndulo (figura 4). Aparecen dos nuevas componentes, las fuerzas de reacción  $H$  (horizontal) y  $V$  (vertical) que actúan sobre el punto de articulación  $P$ .

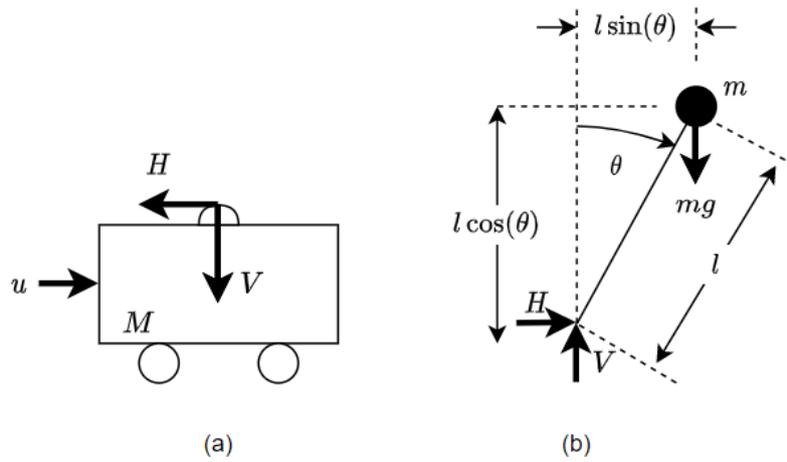


Figura 4: Diagrama del sistema péndulo invertido en dos partes: (a) Carro. (b) Péndulo

El movimiento rotacional de la varilla alrededor de su centro de gravedad se describe mediante (6):

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin(\theta) - Hl \cos(\theta) \quad (6)$$

Donde  $I$  es el momento de inercia del péndulo respecto a su centro de gravedad.

Aplicando la segunda ley de Newton, comentadas anteriormente, para este caso en concreto se obtiene el movimiento horizontal del centro de gravedad de la masa del péndulo (7) y la vertical (8):

$$\sum F_x = ma = m\ddot{x} = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin(\theta)) = H \quad (7)$$

$$\sum F_y = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos(\theta)) = V - mg \quad (8)$$

Del mismo modo, podemos analizar el movimiento horizontal (9) y vertical del carro (10):

$$\sum F_x = M \frac{d^2x}{dt^2} = u - H \quad (9)$$

$$\sum F_y = Mg = V \quad (10)$$

Donde  $g$  es la fuerza de la gravedad en  $m/s^2$ .

Como el objetivo es mantener el péndulo invertido en posición vertical, se puede suponer que el ángulo  $\theta$  es muy pequeño, de forma que  $\sin(\theta) \approx \theta$  y  $\cos(\theta) = 1$ . Entonces, las ecuaciones anteriores (6), (7) y (8) se pueden linealizar de la manera siguiente:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (11)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (12)$$

$$0 = V - mg \quad (13)$$

A partir de (9) y (12), se obtiene:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (14)$$

A partir de (11), (12) y (13), se obtiene:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (15)$$

Puesto que el momento de inercia del péndulo  $I$  es muy pequeño respecto a su centro de gravedad, se puede aproximar como  $I = 0$ , por lo tanto, de (15) se obtiene:

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (16)$$

Esta última ecuación es el modelo matemático para el sistema presentado en la figura 3.

Eliminando  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\theta}$  de (14) y (16) se obtiene (17) y (18), respectivamente:

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (17)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (18)$$

## 2.2. Función de transferencia

La función de transferencia de un sistema se define como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (19)$$

Donde  $H(s)$  es la función de transferencia,  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la salida o respuesta del sistema y  $X(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

Partiendo de (14) y (16) podemos encontrar una relación entre la entrada  $u$  del sistema, la fuerza horizontal aplicada al carro, y la salida  $\theta$ , el ángulo del péndulo respecto a la normal vertical.

Aislando  $\ddot{x}$  de (14) se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{u - lm\ddot{\theta}}{M + m} \quad (20)$$

Aplicando (20) en (16) se obtiene:

$$Ml\ddot{\theta} = g\theta(M + m) - u \quad (21)$$

Aplicando el Teorema de Laplace en (21) se obtiene:

$$Mls^2\Theta(s) = (M + m)g\Theta(s) - U(s) \quad (22)$$

Finalmente, la función de transferencia resultante es:

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M + m)g} = \frac{1}{Ml \left( s + \sqrt{\frac{M + m}{Ml}g} \right) \left( s - \sqrt{\frac{M + m}{Ml}g} \right)} \quad (23)$$

La planta del péndulo invertido tiene un polo en el eje real negativo (24) y otro en el eje real positivo (25), por lo tanto, la planta es inestable en lazo abierto.

Esto último se verificará posteriormente mediante la obtención de la respuesta del sistema a entrada tipo escalón unitario.

$$s = -\sqrt{\frac{M + m}{Ml}g} \quad (24)$$

$$s = \sqrt{\frac{M + m}{Ml}g} \quad (25)$$

### 2.3. Espacio de estados

El espacio de estados es un método que permite modelar un sistema físico. Se representa por un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de infinito orden, que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden.

Sean las siguientes variables de estado:

$$x_1 = \theta \quad (26)$$

$$x_2 = \dot{\theta} \quad (27)$$

$$x_3 = x \quad (28)$$

$$x_4 = \dot{x} \quad (29)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo que forma el péndulo respecto a la normal vertical y  $x$  es la posición del carro y son consideradas las salidas del sistema:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

A partir de las definiciones de las variables de estado, (26), (27), (28) y (29) y de (17) y (18), se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (31)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml}gx_1 - \frac{1}{Ml}u \quad (32)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (33)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M}gx_1 + \frac{1}{M}u \quad (34)$$

En términos de las ecuaciones vectoriales, resultan (35) y (36), que describen el espacio de estados del sistema del péndulo invertido:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (36)$$

## 2.4. Respuesta en lazo abierto

Un sistema en lazo abierto es aquel que no contempla las variaciones que puede tener ni las posibles perturbaciones externas que puedan aparecer en un momento dado.

Antes de empezar a diseñar el controlador es necesario analizar el comportamiento del sistema en lazo abierto para comprobar la estabilidad de este.

Para ello se necesitan los parámetros físicos del sistema [1] [2], los cuales se presentan en la tabla 1.

Tabla 1: Parámetros físicos del sistema carro-péndulo

Parámetro [Representación]	Valor [Unidades]
Masa del carro [M]	2.4 [Kg]
Masa del péndulo [m]	0.23 [Kg]
Longitud del péndulo [l]	0.3 [m]
Gravedad [g]	9.81 [m/s <sup>2</sup> ]
Inercia del péndulo [I]	0.0017 [Kg·m <sup>2</sup> ]

### 2.4.1. Respuesta en lazo abierto mediante la función de transferencia

El ángulo del péndulo será la única salida que se obtendrá al realizar la simulación del sistema mediante la función de transferencia.

La respuesta del sistema ante un escalón unitario se genera mediante Matlab de la siguiente manera:

```
%Planta
numP = [1/(M*I)];
denP = [1 0 -(m+M)*g/(M*I)];
planta = tf(numP,denP)
t = 0:0.1:15;
impulse (numP, denP, t)
```

Obteniendo la función de transferencia de la planta P de (37).

$$P(s) = \frac{1.157}{s^2 - 29.86} \quad (37)$$

En la figura 5 se observa el mapa de polos y ceros, donde se muestran dos polos, uno en el eje real positivo y otro en el eje real negativo, tal y como se ha obtenido en el apartado 2. Así pues, se reafirmamos que la planta es inestable en lazo abierto.

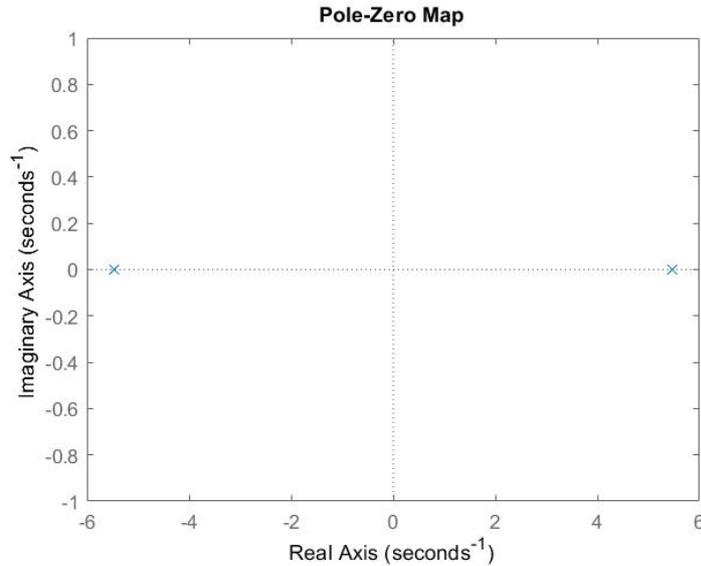


Figura 5: Mapa de polos y ceros

Para una entrada impulso, la planta tiene una respuesta como la que se muestra en la figura 6, donde se afirma que es inestable, por lo que, para estabilizar el sistema, se debe aplicar un control.

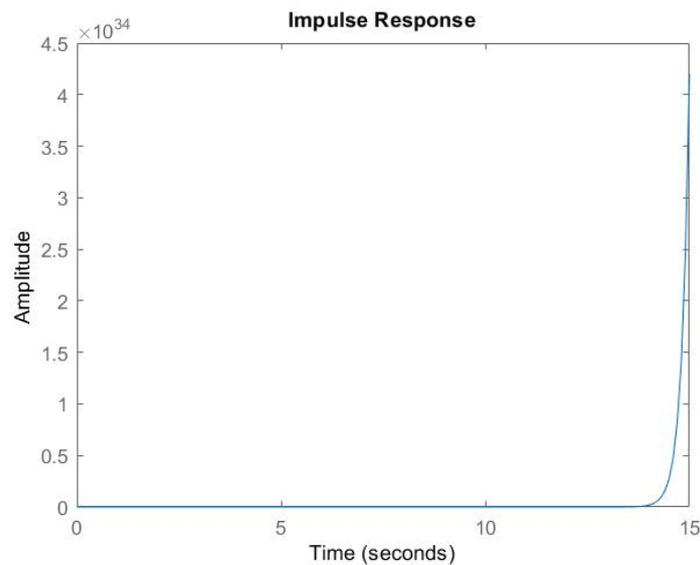


Figura 6: Respuesta en lazo abierto

### 2.4.2. Respuesta en lazo abierto mediante el espacio de estados

A diferencia del método anterior, con el espacio de estados se obtendrán varias salidas, el ángulo del péndulo y la posición del carro.

Las matrices A, B, C y D de (35) y (36) se generan de la siguiente manera en Matlab.

```
A = [0 1 0 0; g*(M+m)/(M*1) 0 0 0; 0 0 0 1; -g*m/M 0 0 0];
B = [0; -1/(M*1); 0; 1/M];
C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
D = [0;0];
```

## Capítulo 2: Modelo Matemático del Péndulo

Para facilitar la simulación del sistema se ha usado la herramienta Simulink, con la que se ha creado el diagrama de bloques de la figura 7 y se ha obtenido la respuesta representada en la figura 8. Respecto a la respuesta, se afirma que tanto el ángulo del péndulo como la posición del carro son inestables, por lo que se debe aplicar control a ambas magnitudes.

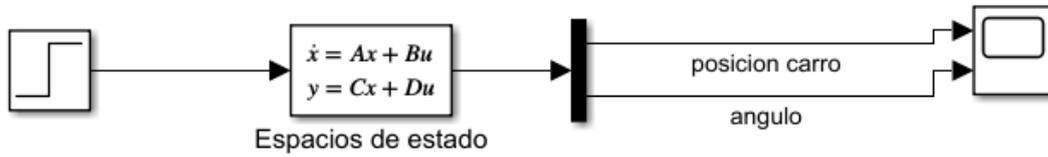


Figura 7: Diagrama de bloques de la simulación del sistema en lazo abierto mediante el espacio de estados

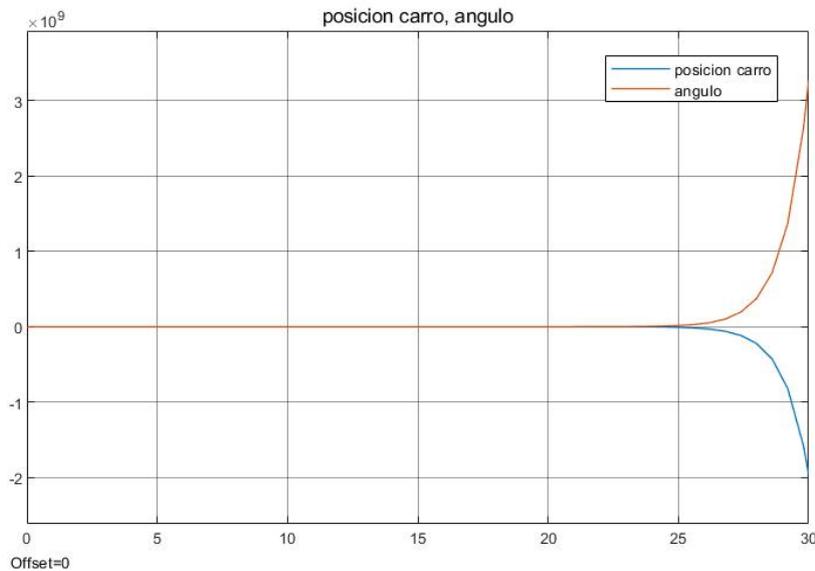


Figura 8: Respuesta al salto unitario del sistema en lazo abierto mediante espacio de estados

### 2.5. Modelo matemático no lineal

Una gran parte de los sistemas en el mundo físico son no lineales. En muchas ocasiones se pueden linealizar y tener en cuenta el modelo lineal del sistema para facilitar los cálculos, pero se debe asegurar que no se aleje del punto de operación del que se ha linealizado el sistema.

Al tener en cuenta el sistema no lineal, se estará considerando una aproximación más realista, por lo que, en este caso se aplicará el modelo no lineal.

A continuación, se obtiene el modelo no lineal del sistema. Empezando por la posición del carro.

A partir de (6), (7), (8) y (9) resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{M} \left( u - H - b \frac{dx}{dt} \right) \quad (38)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{I} (Vl \sin\theta - Hl \cos\theta) \quad (39)$$

Donde,

$$H = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (40)$$

$$V = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) + mg \quad (41)$$

Desarrollando los términos derivativos:

$$\frac{d}{dt} (x + l \sin \theta) = \frac{dx}{dt} + l \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (42)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = \frac{d^2 x}{dt^2} + l \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt} (l \cos \theta) = -l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (44)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = -l \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (45)$$

Sustituyendo las derivadas en (38) y (39):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{M} \left[ u - m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + l \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - b \frac{dx}{dt} \right] \quad (46)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{I} \left[ \left( m \left( -l \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g \right) \right) l \sin \theta - m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + l \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - l \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) l \cos \theta \right] \quad (47)$$

Las ecuaciones (46) y (47), son las que describen el comportamiento no lineal del sistema péndulo sobre carro.

### 3. Control del péndulo

Llegado este punto, se observa que el sistema por sí solo no se puede mantener estable, por lo que se presenta la necesidad de incluir un controlador capaz de, en cada momento, decidir qué acción realizar para que el péndulo no se desestabilice.

En un lazo realimentado, como el que se muestra en la figura 9, el controlador es un instrumento que contiene los modos o acciones de control que actúan sobre la señal de error  $e(t)$ , la cual viene dada por la diferencia entre el valor deseado de la variable controlada  $r(t)$  y su valor real  $y(t)$ .

El objetivo de realizar un control sobre un proceso es llevar la variable controlada a un nuevo valor deseado en el caso de que este cambie, o que rechace perturbaciones  $d(t)$ , en el menor tiempo posible.

Existen diversos sistemas de control que se podrían utilizar. En este proyecto se aplicará un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) a fin de emplear conocimientos adquiridos durante la titulación.

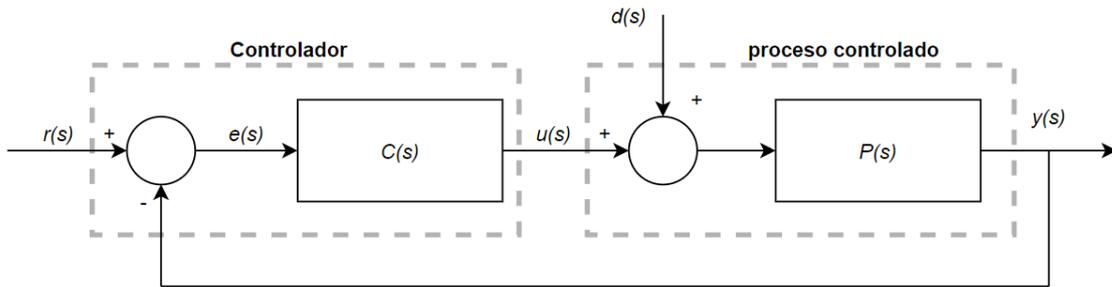


Figura 9: Sistema de control realimentado

#### 3.1. Controlador PID

El objetivo de este apartado es diseñar la etapa de control mediante un controlador PID. En este caso, se tienen dos valores de referencia, en ambos casos 0. Por un lado, se quiere que el ángulo del péndulo sea de  $0^\circ$  respecto a la normal y, por otro lado, que el carro vuelva a su posición inicial.

##### 3.1.1. Componentes del PID

El controlador PID, donde los términos *proporcional*, *integral* y *derivativo* se refieren a las acciones de control, es el tipo de control más empleado en la industria, ya que han demostrado ser muy eficaces en una gran variedad de aplicaciones sin necesidad de conocer con detalle la planta a controlar. [8], [9], [10].

El algoritmo del controlador PID está formado por la suma de las tres componentes mencionadas anteriormente y, matemáticamente, se describe como se presenta en (48).

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (48)$$

Cada una de las componentes del controlador PID cumple una función específica para mejorar la respuesta y al juntarlas se consigue un mejor comportamiento.

Los parámetros del controlador PID  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  indican la ponderación que tiene en el resultado final. Así pues, una respuesta buena del controlador depende del ajuste correcto de los tres parámetros.

A continuación, se explicará cual es la función de cada componente y las posibles combinaciones que hay:

- Acción de control proporcional (P): Esta acción de control consiste en multiplicar la señal de error por la constante  $K_p$ . Actúa sobre el presente, utilizando la información actual del error. En el caso de que el valor deseado esté muy lejos del valor obtenido en la respuesta del sistema, se aplicaría más acción. El valor será mayor si se está por debajo o menor si se está por encima.

$$u(t) = K_p e(t) \quad (49)$$

El factor proporcional influye en la velocidad de respuesta del sistema, a medida que se aumenta su valor, se disminuye el tiempo de respuesta, aunque si se aumenta demasiado, puede dar lugar a la aparición de oscilaciones que puede perjudicarlo.

Ejemplificándolo con el transporte de la compañía Segway, que es un péndulo invertido con base móvil, muchas oscilaciones implicarían un tambaleo brusco del transporte incómodo para el usuario, ocasionando incluso la desestabilización del sistema.

El uso individual de la componente proporcional no elimina por completo el error en régimen permanente, ya que, continuando con el ejemplo del transporte anterior, en ocasiones se necesitaría bajar o subir la acción de control dependiendo de la velocidad a la que circule.

- Acción de control integral (I): La acción integral consiste en una parte proporcional a la integral del error. La integral se puede ver como la suma de la señal de error, siendo cada vez mayor a medida que pasa el tiempo, es decir, que toma en cuenta valores pasados del error. Esta acción garantiza que el error del sistema en régimen permanente sea cero.

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (50)$$

La componente integral  $K_i$  también afecta a la velocidad de respuesta, de manera que si este valor es muy pequeño el sistema tardará más en eliminar el error.

La componente integral tiende a oscilar la respuesta del sistema si se sobrepasa su valor, pero en mayor medida que la componente proporcional.

- Acción de control derivativa (D): Esta acción de control consiste en realizar la derivada del error  $e(t)$  y tiene en cuenta la tendencia del error. La derivada del error se refiere a la velocidad con la que cambia el error, aumentando la amplitud de la acción de control cuando el error cambia de manera rápida y disminuyéndola cuando cambia lentamente.

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (51)$$

En general, la componente derivativa mejora la respuesta del sistema para valores de  $K_d$  moderados, ya que, a veces, demanda acciones de alto esfuerzo por un cambio muy brusco respecto a la referencia.

- Acción de control proporcional – integral (PI): Con la combinación de estas dos componentes se consigue cambiar la acción de control, en cada momento, debido a la componente integral, dependiendo del estado del error en el presente.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (52)$$

- Acción de control proporcional – derivativa (PD): la componente derivativa toma en cuenta la velocidad a la que varía el error, entonces, se suma a la proporcional cuando cambia rápidamente y se resta cuando cambia lentamente.

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (53)$$

### 3.2. Simulación con la herramienta Sisotool

Sisotool es una herramienta que permite el análisis de sistemas lineales. En este caso se usará para analizar el lugar geométrico de las raíces (LGR) con el fin de poder ver cuál es el límite de estabilidad del sistema. El sistema lineal para realizar este proceso es el que está descrito en (37). En la figura 10 se puede observar el mapa de polos y ceros obtenido mediante la herramienta Sisotool, donde se representan los polos en magenta y el LGR en color azul [11].

```
%Planta
numP = [1/(M*I)];
denP = [1 0 -(m+M)*g/(M*I)];
planta = tf(numP,denP);
%Simulacion
sisotool (planta)
```

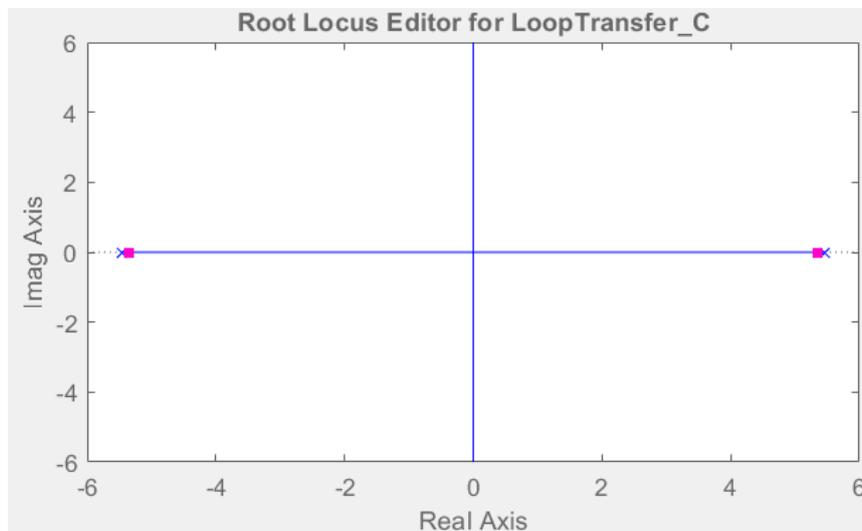


Figura 10: LGR del sistema lineal

### Capítulo 3: Control del péndulo

A medida que se va aumentando la ganancia, los polos se van acercando a cero. En la figura 11 se puede observar que, con una ganancia de 25.8, se obtiene un polo doble en el origen, este valor indica donde se encuentra el límite de estabilidad del sistema.

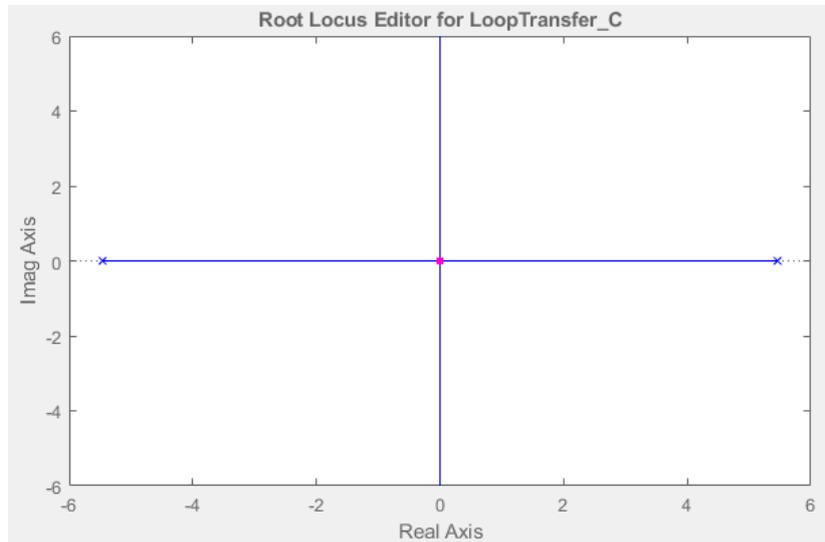


Figura 11: LGR del sistema lineal

Para verificar este hecho, se ha simulado el sistema con un control P mediante Simulink. El diagrama de bloques se encuentra en la figura 12, analizando los bloques de izquierda a derecha:

- Referencia, el cual es el ángulo que deseamos obtener.
- Señal de perturbación, mostrada en la figura 13, es un pulso de amplitud 0.175 radianes = 10° para poder arrancar el sistema en t = 5s.
- Ganancia P, actúa como controlador P.
- Planta lineal, es la función de transferencia del sistema lineal.
- Límites Angulo, se ha puesto un bloque saturación para delimitar el ángulo del péndulo entre -90° y 90° respecto a la posición vertical del péndulo.
- Ganancia 180/pi, para convertir los radianes a grados.

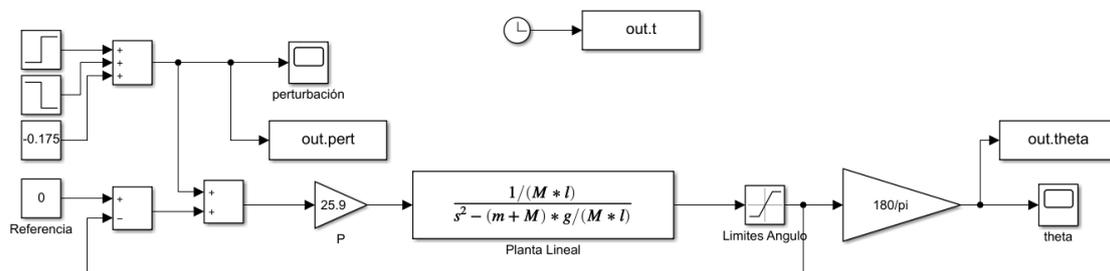


Figura 12: Diagrama de bloques comprobación LGR

### Capítulo 3: Control del péndulo

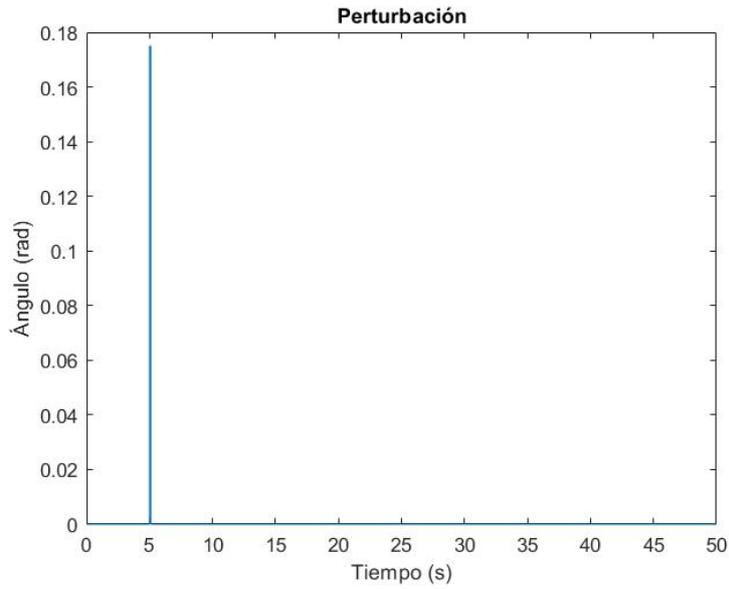


Figura 13: Señal de perturbación

El resultado de la simulación del modelo anterior se puede observar en la figura 14, donde se afirma que, para un controlador P de ganancia  $K_p = 25.9$ , el péndulo oscila al límite de la saturación impuesta indefinidamente.

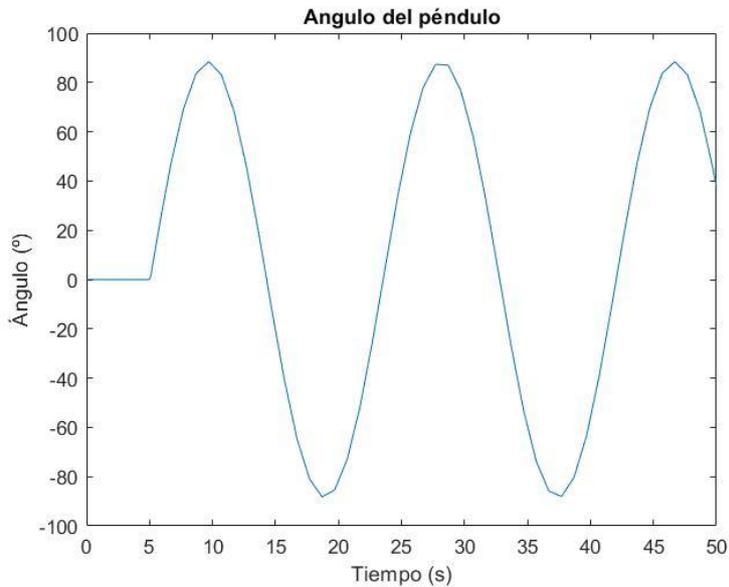


Figura 14: Respuesta del sistema con un controlador P de ganancia  $K_p=25.9$

Si se aumenta la ganancia del controlador P, por ejemplo, a 40 como en la figura 15, las oscilaciones son más rápidas y de menor amplitud.

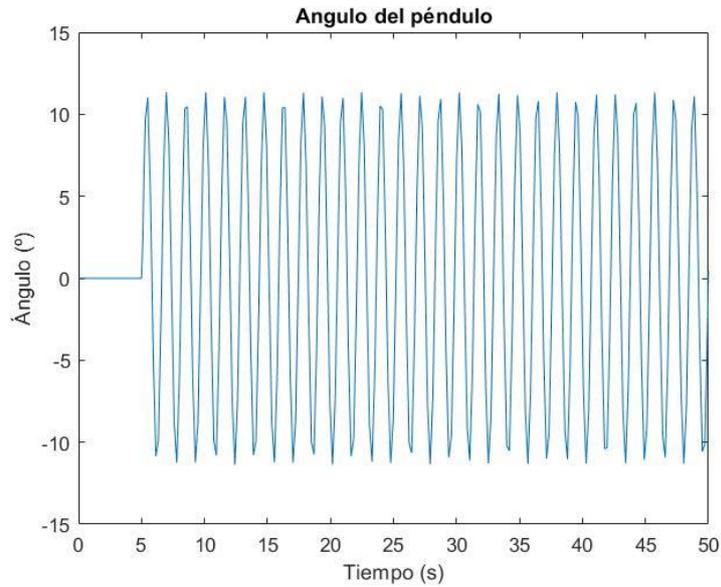


Figura 15: Respuesta del sistema con un controlador P de ganancia  $K_p = 40$

### 3.3. Primera sintonización del controlador con la planta no lineal

En este apartado se realizará la simulación de la planta no lineal con la finalidad de obtener los valores de control que permitan mantener el péndulo en equilibrio. Al considerar el modelo no lineal de la planta, se obtendrá un controlador que funcionará correctamente no solo cerca del punto de operación, como en el caso de usar el modelo lineal, si no también lejos de este.

El modelo con el que se llevará a cabo la simulación es el de la figura 16, donde cabe destacar el bloque *no lineal*. Este bloque, que se muestra en la figura 17, se trata de un subsistema que representa el comportamiento no lineal del sistema carro-péndulo, descrito por las ecuaciones obtenidas en el apartado 2.5. También es de importante mención, los últimos tres bloques que, en su conjunto, realizan una simulación en tres dimensiones (3D) del sistema carro-péndulo.

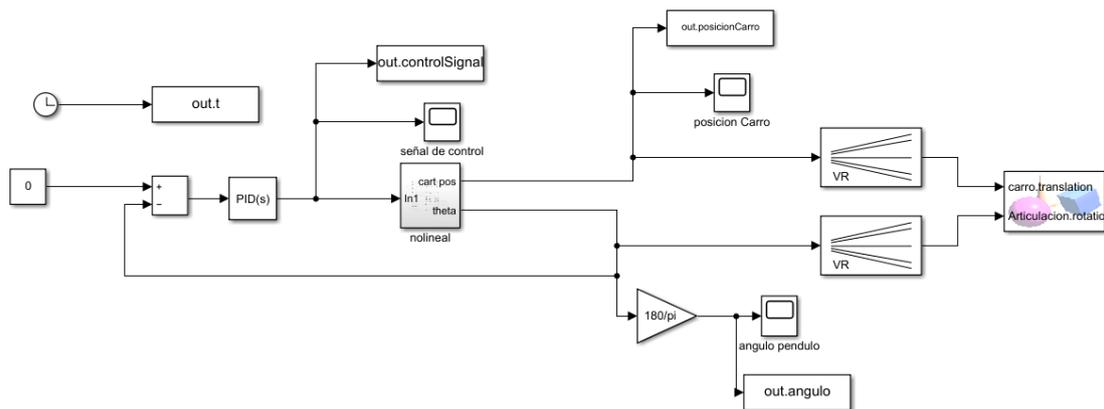


Figura 16: Modelo del sistema con planta no lineal

### Capítulo 3: Control del péndulo

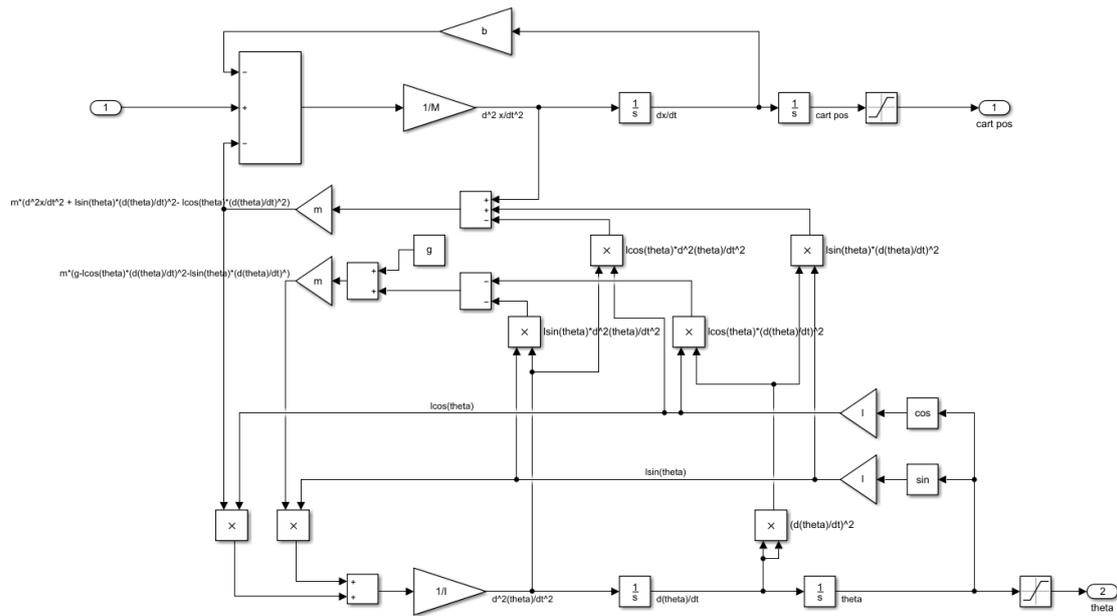


Figura 17: Diagrama de bloques del sistema no lineal

En este punto del proyecto, no ha hecho falta el uso de una perturbación para despertar el sistema. Introduciendo la variable *posiciónInicial* en el bloque integrador *theta*, permite modificar su estado inicial a 10 grados, véase la figura 18.

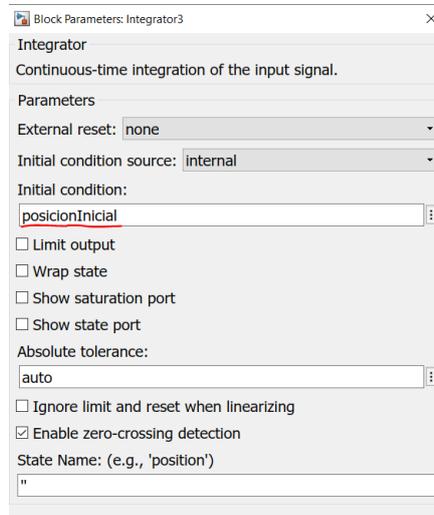


Figura 18: Configuración del integrador para que las condiciones iniciales sean la variable *posiciónInicial*

Para sintonizar el controlador PID se ha usado la herramienta *Control System Tuner* (véase figura 19) encontrándose en la configuración del bloque *PID*, de esta manera se obtendrán los valores que permitirán una sintonización más precisa, los cuales son:

- $K_p = 30$
- $K_i = 5.52$
- $K_d = 3.66$

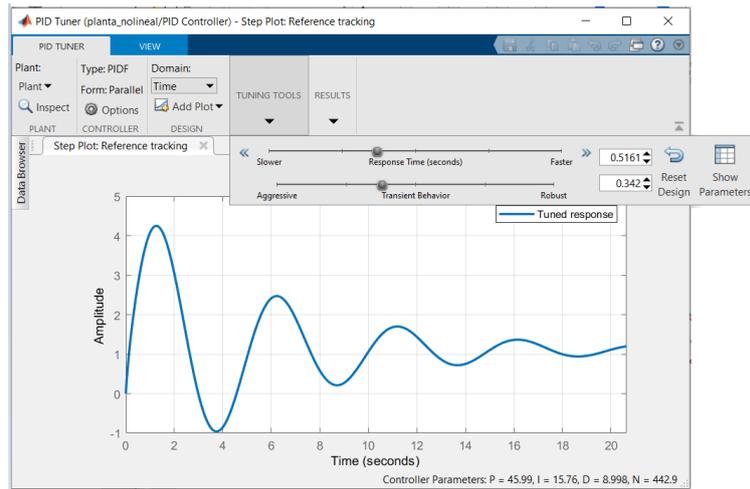


Figura 19: Primera sintonización con la herramienta PID tuner

Con la acción del controlador con los valores  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  se consigue que la respuesta, presentada en la figura 20, tarde en torno a los 5 segundos en conseguir estabilizar el ángulo del péndulo.

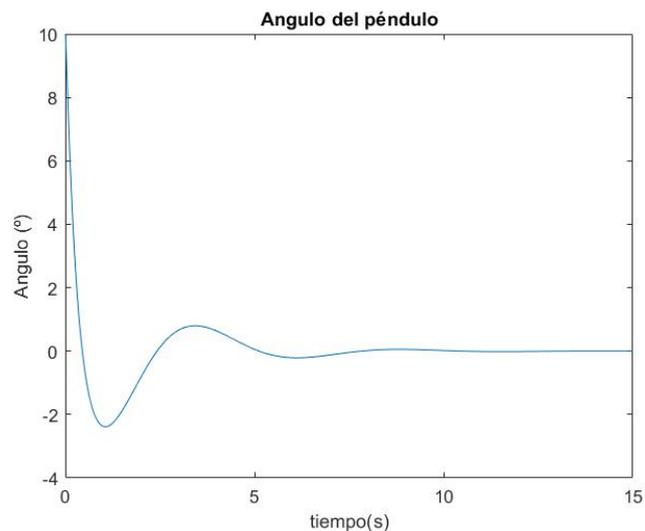


Figura 20: Respuesta del sistema a la primera sintonización

### 3.4. Segunda sintonización

Para la segunda sintonización del controlador se realiza un barrido de los parámetros del controlador, por separado, hasta llegar a esos que son satisfactorios según su respuesta. Esto servirá para perfeccionar el comportamiento del sistema consiguiendo una respuesta óptima.

#### 3.4.1. Variación del parámetro $K_p$

En este apartado se realizará la sintonización del sistema variando solamente el parámetro  $K_p$ . Los otros parámetros seguirán con el mismo valor, recordemos que son:

- $K_i = 5.52$
- $K_d = 3.66$

### Capítulo 3: Control del péndulo

Además, se tendrá en cuenta diferentes condiciones iniciales del péndulo, a  $1^\circ$ ,  $5^\circ$  y  $10^\circ$ .

Puesto que el sistema es inestable cuando el valor de  $K_p < 25.9$ , se dispone a hacer un barrido entre el rango  $[30:100]$ .

#### Con ángulo inicial del péndulo a $1^\circ$

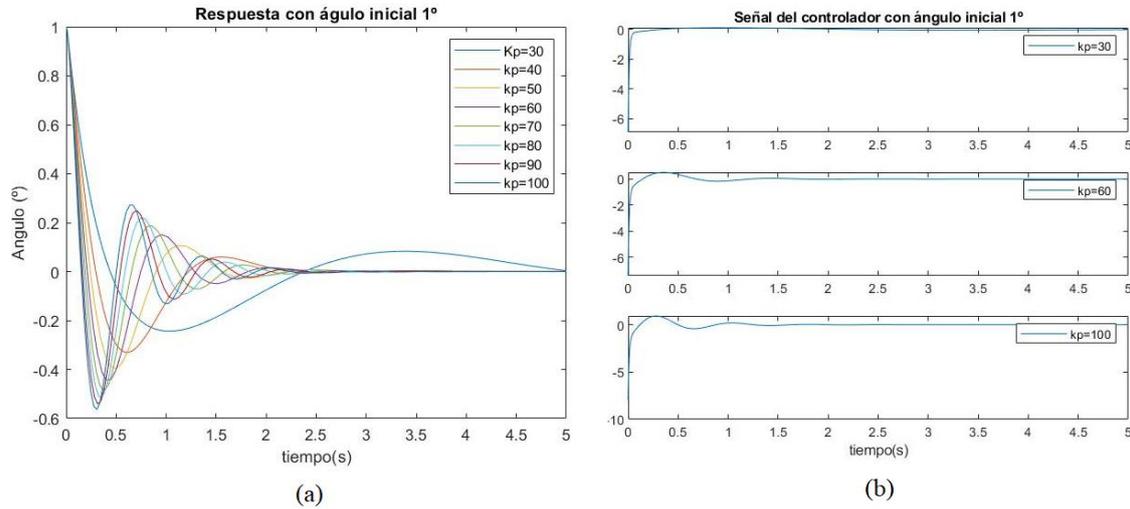


Figura 21: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo  $1^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de  $K_p$ . b) Señal del controlador

#### Con ángulo inicial del péndulo a $5^\circ$

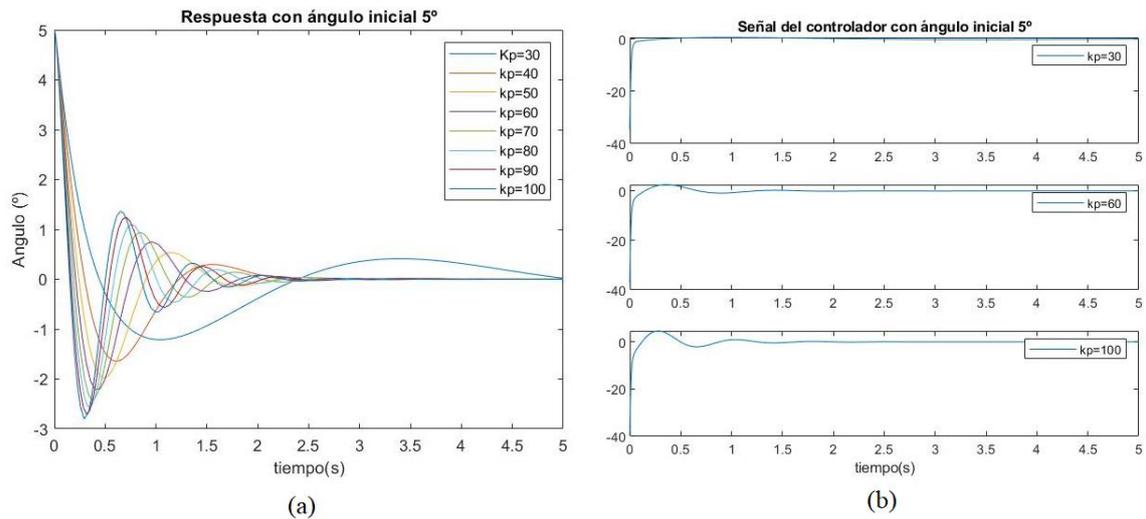


Figura 22: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo  $5^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de  $K_p$ . b) Señal del controlador

Con ángulo inicial del péndulo a 10°

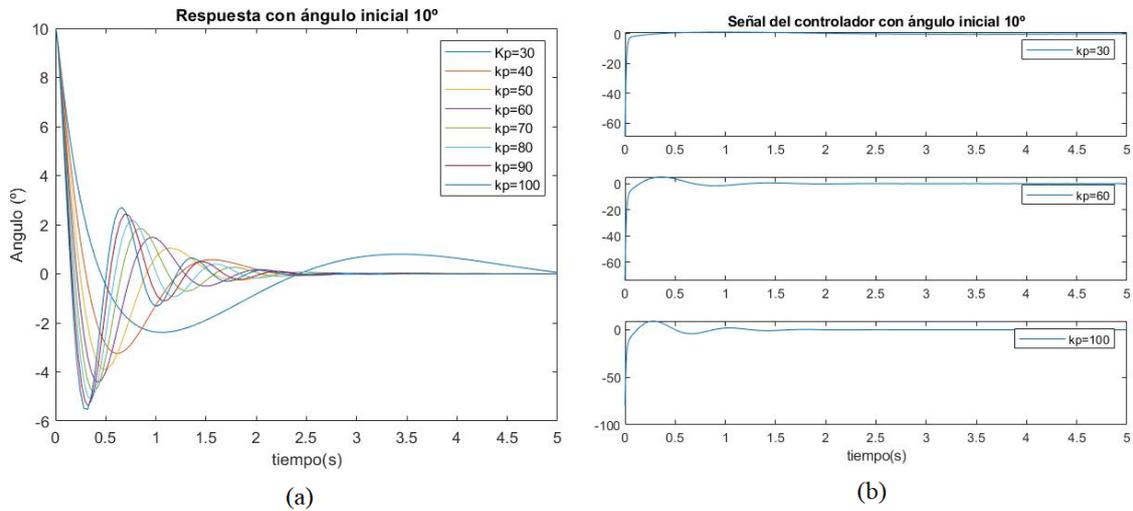


Figura 23: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo 10°. a) Respuesta variando el valor de  $K_p$ . b) Señal del controlador

Analizando los tres casos mostrados en las figuras 21, 22 y 23, de condición inicial del ángulo, se puede ver que la respuesta en el tiempo no varía mucho, es decir, es similar el tiempo que tarda en estabilizar el ángulo del péndulo para diferentes valores de  $K_p$  en los tres casos.

La principal diferencia reside en el esfuerzo del controlador a la hora de estabilizar el ángulo, a medida que se aumenta el ángulo inicial, aumenta el esfuerzo del controlador, esto se debe a que es mayor la distancia respecto a la normal vertical.

También se puede destacar, centrándonos en la respuesta para los diferentes valores de  $K_p$ , gráficas (a) de cada figura, se observa que aumentando el valor de  $K_p$  se consigue menor tiempo de respuesta, pero aparecen más oscilaciones.

Teniendo en cuenta lo explicado anteriormente, se considera idóneo un valor de  $K_p = 40$  para este proyecto, ya que no aumentan considerablemente las oscilaciones y el tiempo que tarda en estabilizar el péndulo está en torno a los 2.5 segundos, muy parecido a los tiempos que llegan a hacer con un controlador con  $K_p$  superior, por ejemplo, con  $K_p = 100$ .

### 3.4.2. Variación del parámetro $K_i$

En este apartado se realizará un barrido del parámetro  $K_i$ , entre en rango [0:14] para ver cómo se comporta. Hay que tener en cuenta que el valor del parámetro  $K_p = 40$ , el encontrado en el apartado anterior, y el ángulo inicial del péndulo es 10°, porque es con el que se obtiene más esfuerzo en el controlador.

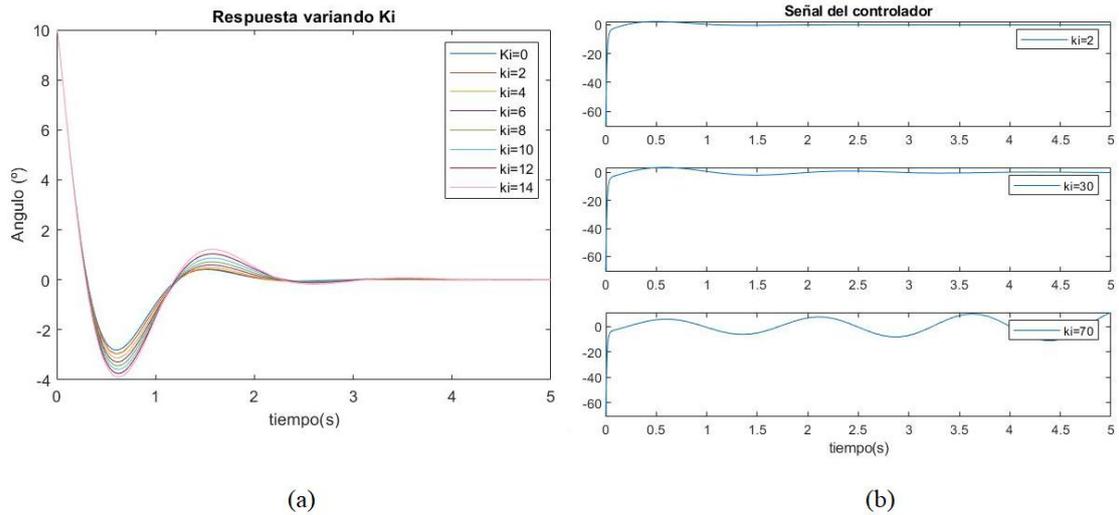


Figura 24: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo  $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de  $K_i$ . b) Señal del controlador

Analizando la figura 24, se puede observar que el esfuerzo del controlador no varía mucho para diferentes valores de  $K_i$ . También, hay que destacar, que si se prescinde de la parte integral ( $K_i = 0$ ) se obtiene una respuesta muy similar a si se mantiene. Además, se obtienen menos oscilaciones al disminuir este valor.

### 3.4.3. Variación del parámetro $K_d$

En este punto, el barrido se mantiene entre  $[0:14]$ . Se mantiene el ángulo inicial a  $10^\circ$  y los parámetros  $K_p = 40$  y  $K_i = 5.52$ , para ver cómo afecta la variación de solo el parámetro  $K_d$ .

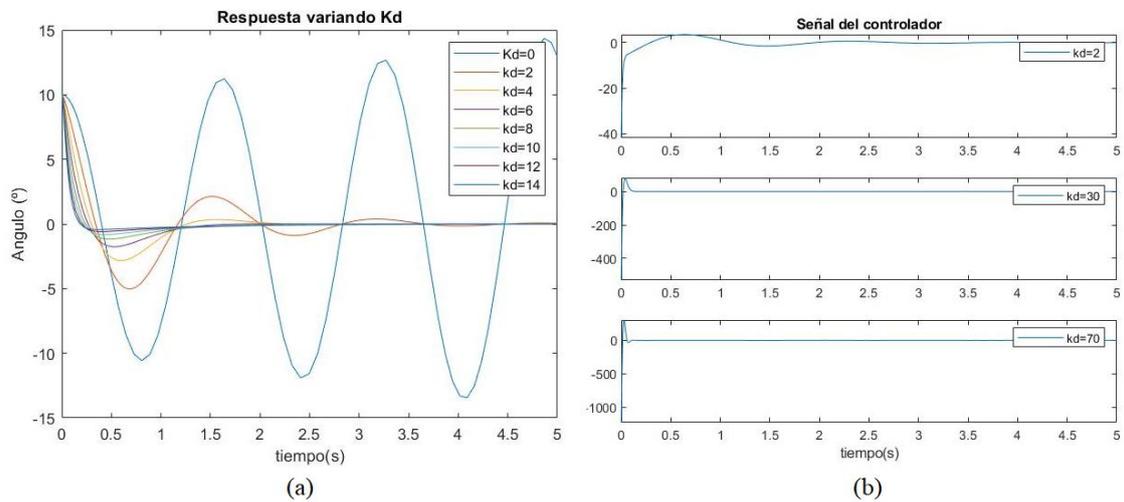


Figura 25: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo  $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de  $K_d$ . b) Señal del controlador

Al observar la respuesta de la figura 25(a) se aprecia que para  $K_d = 0$  la respuesta es inestable y que, al aumentar su valor, esta presenta menos oscilaciones y el tiempo mejora. En cambio, en la figura 25(b) se observa que el esfuerzo del controlador aumenta considerablemente a medida que se aumenta el valor de  $K_d$ , por lo que se escogerá un  $K_d$  bajo.

En la figura 26 se muestra el esfuerzo del controlador de  $K_d = 2$ ,  $K_d = 5$  y  $K_d = 7$ , que son bajos.

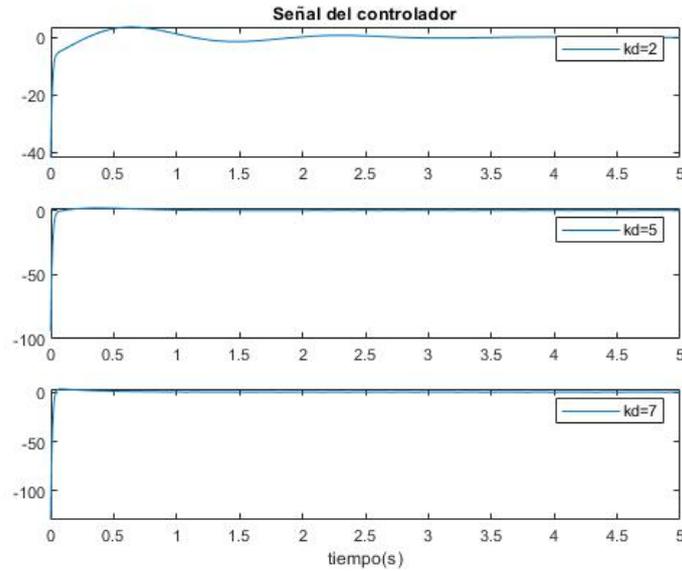


Figura 26: Señal del controlador para  $K_d$  bajo

Al ver que con  $K_d = 4$  no presenta mucho esfuerzo por parte del controlador, no hay tanta diferencia en la respuesta respecto a  $K_d = 6$  y  $K_d = 8$  y la respuesta no tiene muchas oscilaciones como con  $K_d = 2$ , se escoge este valor para el diseño del controlador.

En la figura 27 se presenta el resultado de la misma simulación, pero teniendo en cuenta  $K_i = 0$ . Comparando  $K_i = 5.52$  con  $K_i = 0$ , manteniendo  $K_d = 0$ , la respuesta del sistema no es del todo inestable, aunque se puede predecir que tarda mucho en estabilizarse. A parte de este hecho, las conclusiones siguen siendo las mismas y se escoge  $K_d = 4$  como valor para diseñar el controlador.

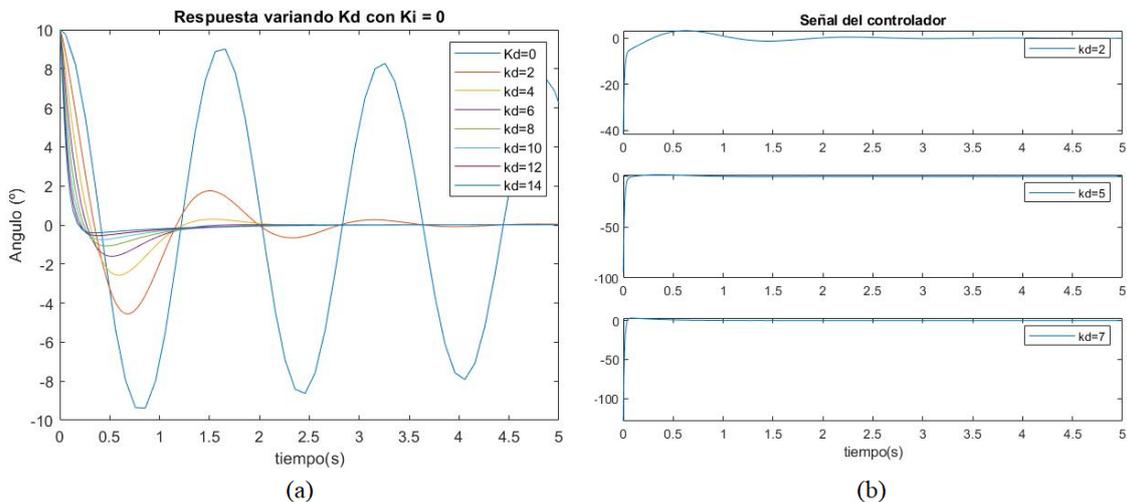


Figura 27: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo  $10^\circ$ . a) Respuesta variando el valor de  $K_d$  con  $K_i=0$ . b) Señal del controlador

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el barrido de los tres parámetros del controlador, se procede a simular la respuesta del sistema, esta es la presentada en la figura 28. Recordemos que los valores son  $K_p = 40$ ,  $K_i = 0$  y  $K_d = 4$ .

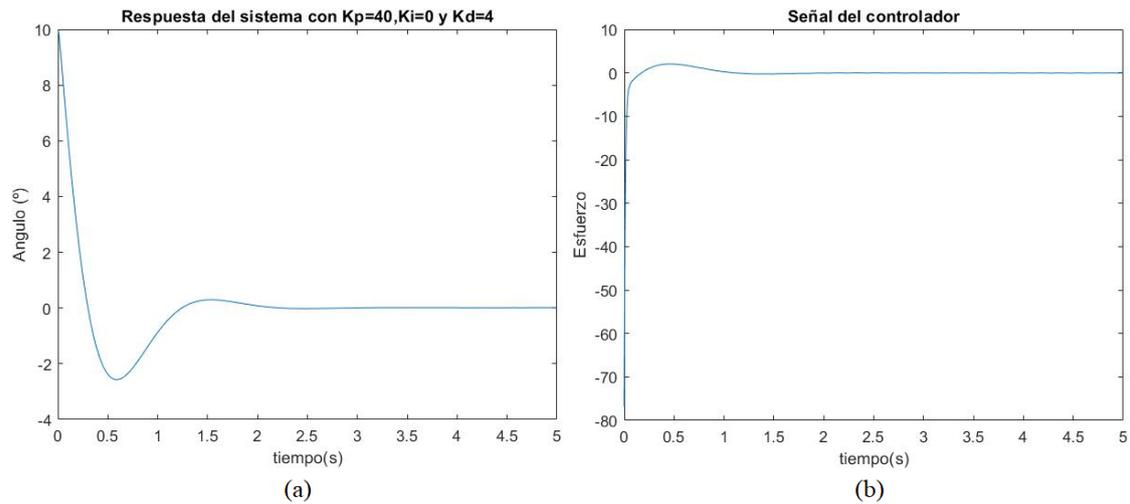


Figura 28: Respuesta del sistema con ángulo inicial del péndulo 10°. a) Respuesta con  $K_p=40$ ,  $K_i=0$  y  $K_d=4$ . b) Señal del controlador

Se afirma que la respuesta del sistema es efectiva, ya que las oscilaciones que presenta no son muy abruptas y eso hace que el esfuerzo del controlador quede centrado a la hora de controlar el ángulo inicial. También se ha conseguido con esta segunda sintonización ahorrar la parte integral y que la respuesta del sistema sea más rápida, es decir, se tarda menos en estabilizar el péndulo.

### 3.5. Control del carro

Hasta este punto se ha conseguido controlar de manera satisfactoria el péndulo, pero aún falta por controlar la posición del carro para que vuelva al centro de los límites marcados.

La posición del carro afecta directamente al ángulo del péndulo y viceversa, entonces el control de las dos variables también lo hará, por lo que el tiempo de estabilización aumentará.

#### 3.5.1. Sintonización PID del carro

Para la sintonización del carro se ha decidido por hacer un barrido de las tres variables en un rango de  $[-5:5]$  puesto que, si se amplía este rango, el sistema tiende a tener una respuesta más lenta y llegar a desestabilizarse.

Teniendo 10 casos para cada componente del controlador PID, obtendremos un amplio número de posibilidades, concretamente  $10 \times 10 \times 10 = 1000$  combinaciones de los parámetros del PID diferentes.

Teniendo en cuenta que se tardaría mucho en analizar todas las combinaciones se ha impuesto que, a los 10 segundos de simular el sistema, la posición del carro sea menor que  $|0.05|$  metros. El valor absoluto nos ayuda a descartar las posibilidades en las que, por ejemplo, el carro llegue a un estado de saturación en la posición negativa. Así se descartan muchas de las posibilidades. Hay que contemplar la posibilidad de que una de estas combinaciones provoque una respuesta inestable y coincida que, en ese instante, la posición del carro cumpla con la condición impuesta.

El modelo presentado en la figura 29 se ha usado para simular el sistema y sintonizar el controlador PID del carro.

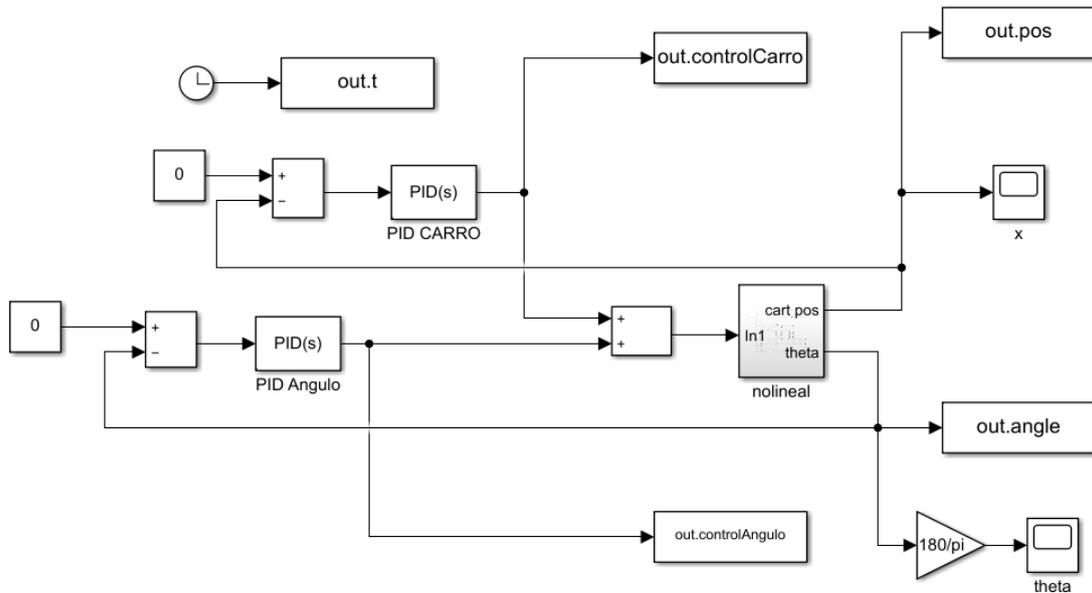


Figura 29: Diagrama de bloques del sistema no lineal controlador por 2 PID

### 3.5.2. Filtro de resultados

En total han sido 26 posibilidades las que llegan a tener una posición del carro de menor a  $|0.05|$  metros a los 10 segundos de arrancar el sistema. Las diferentes combinaciones se presentan en la tabla 2.

Tabla 2: Combinaciones para los parámetros PID

Índice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
<b>Kp</b>	-4	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
<b>Ki</b>	1	-5	-4	-3	-2	-2	-1	-1	-1	0	0	-4	-2	-1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	-2	0	0	0
<b>Kd</b>	-2	-3	-3	-3	-3	-2	-5	-3	-2	-3	-2	-3	-3	-3	-2	-3	-2	-4	-3	-3	-2	-1	-4	-3	-2	-1

Analizando con más detalle los resultados, se destacan 4, que corresponden a los índices 17, 21, 25 y 26, y se han obtenido respuestas rápidas y estables, presentados en la figura 30. Cabe remarcar que se puede prescindir de la parte integral en los 4 casos, como pasaba con el control del ángulo el péndulo.

### Capítulo 3: Control del péndulo

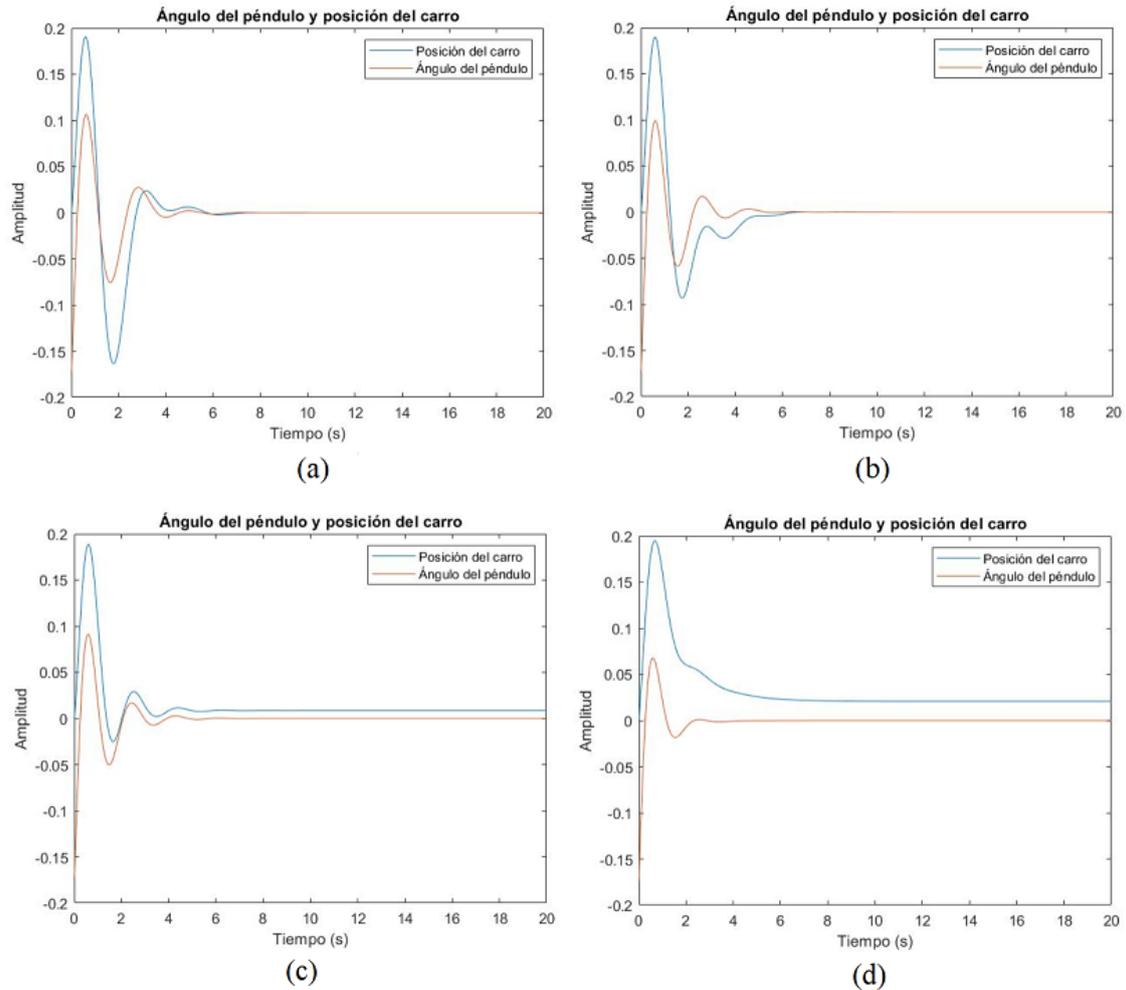


Figura 30: Mejores resultados. a) Respuesta a la combinación 17. b) Respuesta a la combinación 21. c) Respuesta a la combinación 25. d) Respuesta a la combinación 26.

Si se prescinde de la componente  $K_p$ , el carro no llega a estabilizarse en el valor deseado, por muy poco, por lo que también quedan descartados.

Las respuestas de la figura 30(a) y 30(b) son efectivas y muy similares. Como en el caso de la combinación número 21 las oscilaciones son más pequeñas, se analizará el esfuerzo del controlador.

En la figura 31, se aprecia la señal del control del carro y del ángulo para la combinación número 17 ( $K_p = -2$ ,  $K_i = 0$  y  $K_d = -2$ ). En la figura 32 se presentan los mismos resultados, para la combinación número 21 ( $K_p = -1$ ,  $K_i = 0$  y  $K_d = -1$ ). En ambos casos se necesitan el mismo esfuerzo del controlador para controlar el ángulo y se ve como el control del carro no cesa nunca, ya que es necesario mover el carro en todo momento para mantener el péndulo en equilibrio.

Por otra parte, para controlar el carro, en el caso de la combinación 17 es necesario más esfuerzo del controlador, por lo que se escogerán los parámetros  $K_p = -1$ ,  $K_i = 0$  y  $K_d = -1$ , correspondientes a la combinación 21 para diseñar el controlador del carro.

### Capítulo 3: Control del péndulo

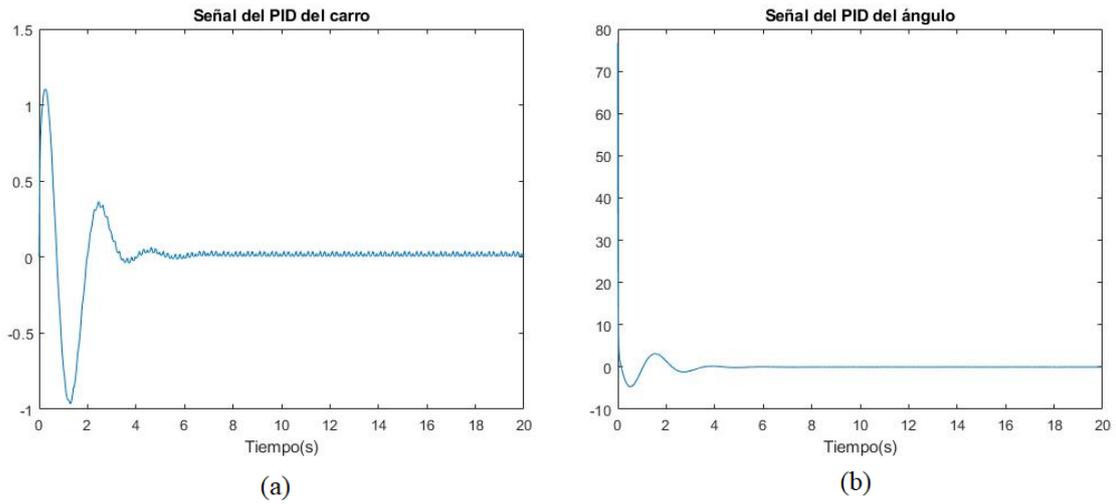


Figura 31: Esfuerzo controlador para  $K_p=-2$ ,  $K_i=0$  y  $K_d=-2$ . a) Controlador del carro. b) Controlador de ángulo.

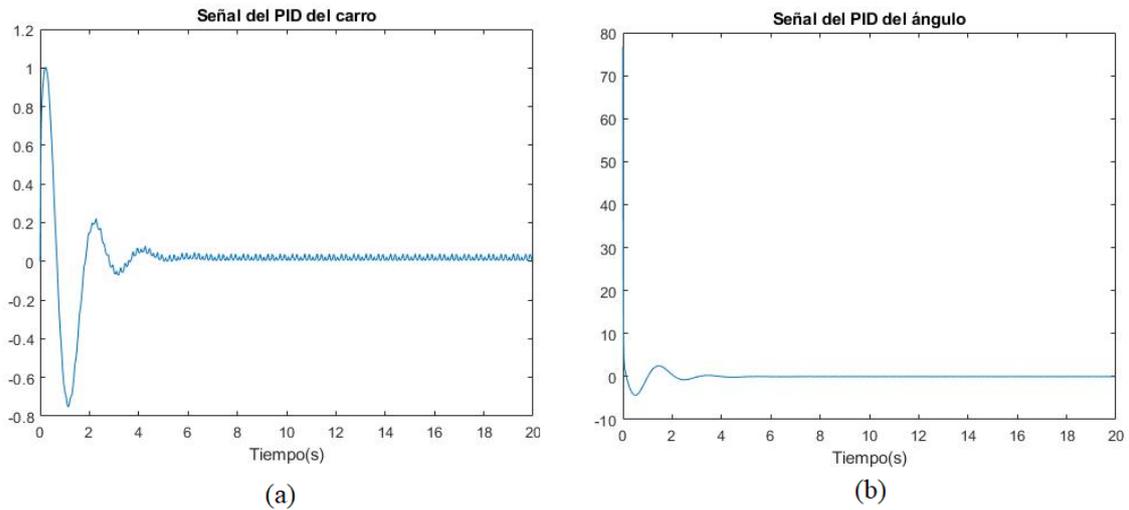


Figura 32: Esfuerzo controlador para  $K_p=-1$ ,  $K_i=0$  y  $K_d=-1$ . a) Controlador del carro. b) Controlador de ángulo.

#### 3.5.3. Resultados

En este apartado se recapitulará los mejores resultados obtenidos para ambos controladores, los cuales se contemplan en la tabla 3, y se añadirán perturbaciones para ver cómo responde el sistema.

Tabla 3: Parámetros de los controladores PID

Controlador	$K_p$	$K_i$	$K_d$
PID Péndulo	40	0	4
PID Carro	-1	0	-1

Sistema sin perturbaciones

En este caso se ha simulado el sistema de la figura 29 sustituyendo las variables del controlado PID del carro por las que se han encontrado de la tabla 3. Los resultados se observan en la figura 33.

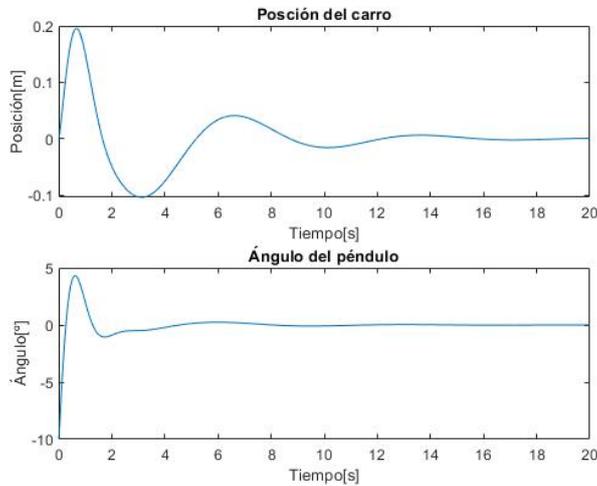


Figura 33: Ángulo y posición del carro controlados

La respuesta del sistema es satisfactoria y se remarca que, referente al ángulo, se llega a controlar en más o menos 5 segundos, más lento si se compara con los resultados obtenidos en el apartado 3.4, en el que en 2 segundos se conseguía. Esto es debido a que ahora se tiene en cuenta la posición del carro que se va moviendo hasta llegar a la posición deseada, afectando al péndulo ligeramente.

Por otra parte, el carro tarda más en llegar a la referencia por el mismo motivo, a medida que se va moviendo debe tener en cuenta no desestabilizar el péndulo.

Sistema con perturbaciones en el péndulo

En este caso se han añadido perturbaciones en el péndulo en t=10 segundos. El diagrama de bloques utilizado se puede observar en la figura 34.

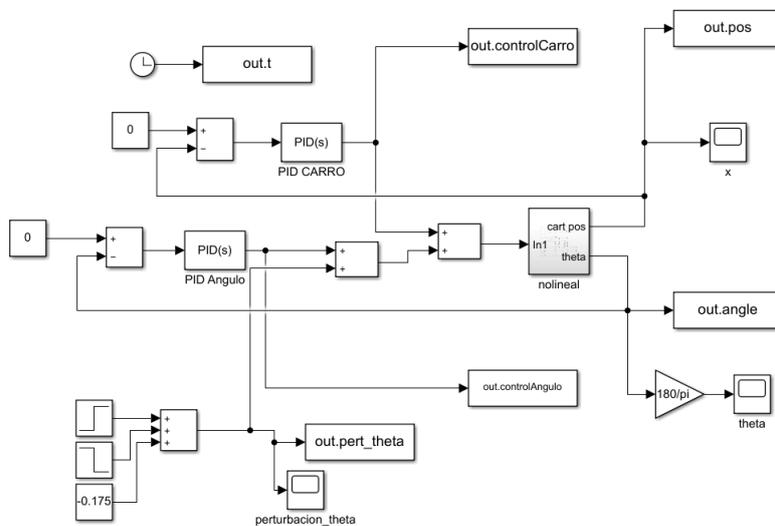


Figura 34: Diagrama de bloques del sistema con perturbación en el ángulo

### Capítulo 3: Control del péndulo

Con una perturbación de 10 grados en  $t=10$  segundos (figura 35), se obtienen los resultados de la figura 36, donde se puede observar que controla la perturbación satisfactoriamente.

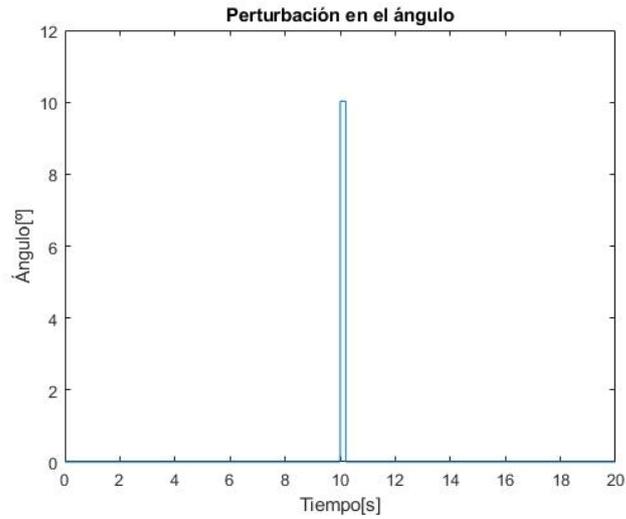


Figura 35: Perturbación de  $10^\circ$  en  $t=10$  segundos

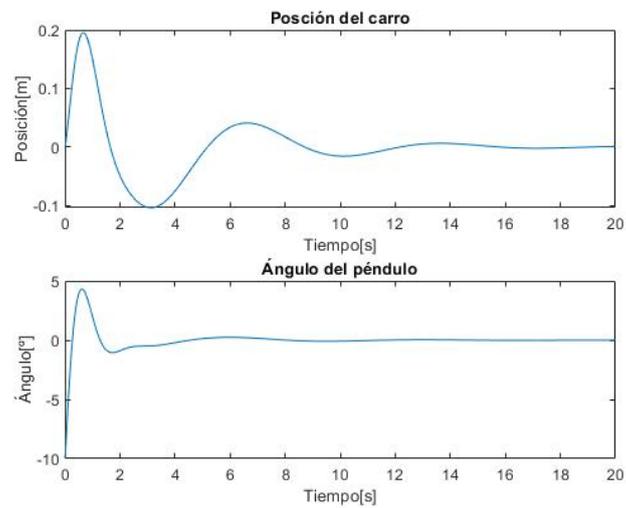


Figura 36: Respuesta del sistema ante una perturbación de  $10^\circ$  en  $t=10$  segundos

De la misma manera y con la misma finalidad, observar el comportamiento del sistema frente a una perturbación, se ha introducido una perturbación más elevada, de  $45^\circ$ . El resultado se presenta en la figura 37, donde se observa que tarda un poco más, pero consigue estabilizar correctamente el sistema.

### Capítulo 3: Control del péndulo

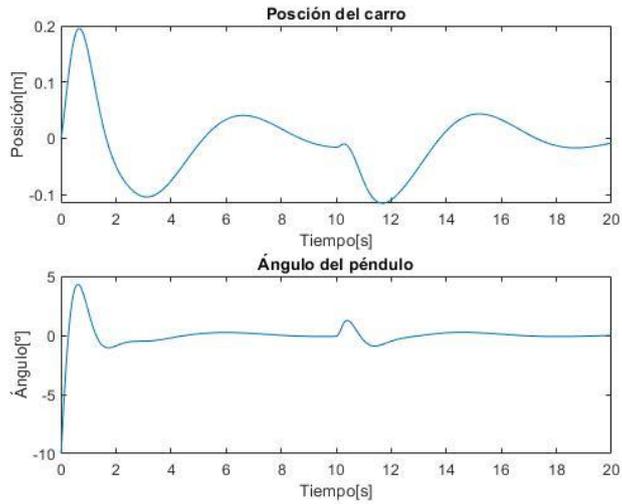


Figura 37: Respuesta del sistema ante perturbación de 45°

#### Sistema con perturbaciones en el carro y en el péndulo

Del mismo modo que con el péndulo, se ha añadido una perturbación en ambas variables, de 45° para el péndulo en  $t=10$  segundos y de 0.2 m para el carro en  $t=15$  segundos. Los resultados se observan en la figura 38, donde se contempla que se llega a controlar las dos perturbaciones satisfactoriamente. En este caso se ha simulado hasta los 30 segundos para ver como finalmente se controla la posición del carro.

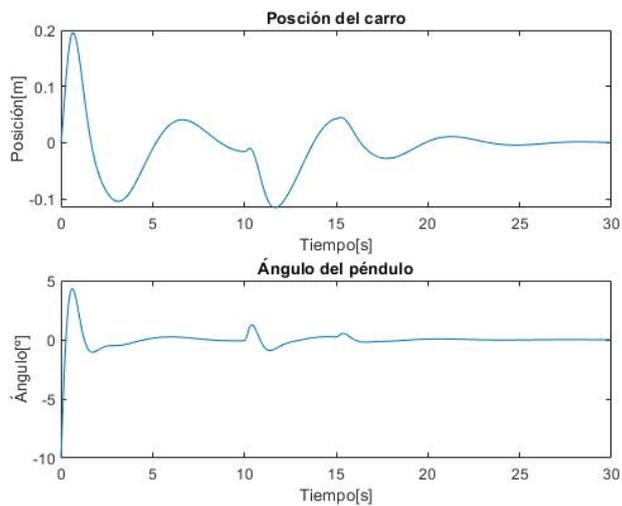


Figura 38: Respuesta del sistema ante perturbaciones en el carro y en el péndulo

## 4. Animación del sistema

---

En este apartado se mostrará cómo se ha generado la animación del sistema controlado mediante la herramienta Simulink 3D Animation. Esta herramienta permite generar datos del modelo para animar un mundo virtual mediante el bloque VR Sink.

El hecho de tener una simulación de este tipo hace que sea más fácil de visualizar el comportamiento del sistema.

### 4.1. Partes del modelo

El modelo 3D de la figura 39 se puede dividir en diferentes partes u objetos los cuales son, de abajo a arriba:

- Base (color rojo): sirve para marcar el tope de recorrido del carro, es de 1 metro de longitud.
- El carro y las ruedas (de color amarillo y azul respectivamente): es la estructura de la base móvil del sistema.
- La articulación del carro con el péndulo (verde): representa el punto de unión entre el péndulo y el carro.
- El péndulo y su masa (blanco y verde respectivamente): es la estructura que representa el cuerpo del péndulo, que tiene una longitud de 0.3m.

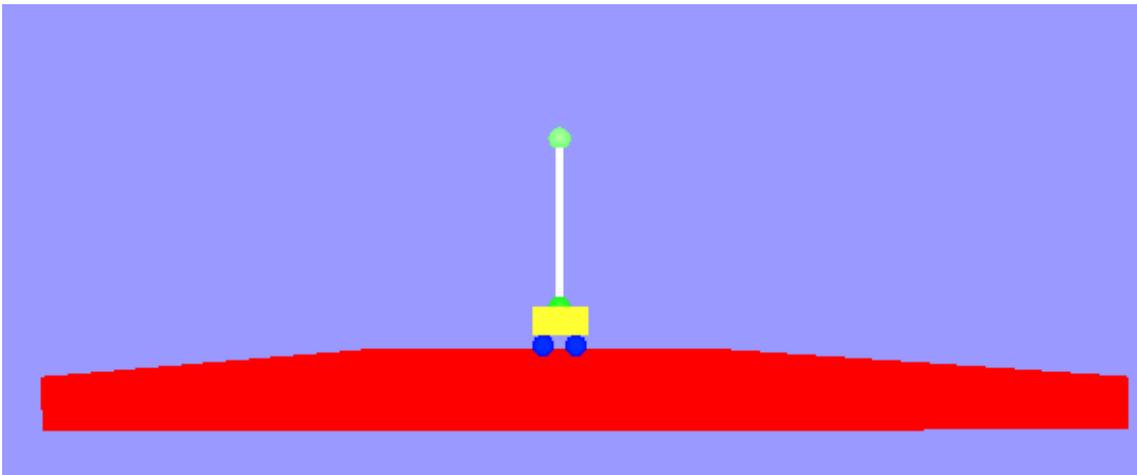


Figura 39: Modelo 3D del sistema

A la hora de crear el modelo 3D se debe tener en cuenta qué objetos mencionados anteriormente deben depender de otros objetos. En este proyecto, cogiendo como referencia la base roja, no depende de ningún otro objeto, pero el resto dependen de la base roja, por lo que se crean todos los demás objetos llamados *hijos* dentro de la base. Ahora, si se escoge como referencia el carro, el resto de los objetos (el péndulo, la masa del péndulo, las ruedas y la articulación) dependen de él, por lo que se crean objetos *hijos* dentro del objeto que representa al carro.

### 4.2. Simulación del sistema con animación

Para simular el sistema y ver la animación, se añaden los bloques correspondientes en el diagrama de bloques de Simulink. En la figura 40 se puede observar el diagrama de bloques empleado,

## Capítulo 4: Animación del sistema

donde se diferencia únicamente, respecto al diagrama usado para contemplar las perturbaciones de la posición del carro y el ángulo del péndulo del apartado 3.5.3, en que se ha añadido los bloques para crear la animación, los mencionados como Animación 3D.

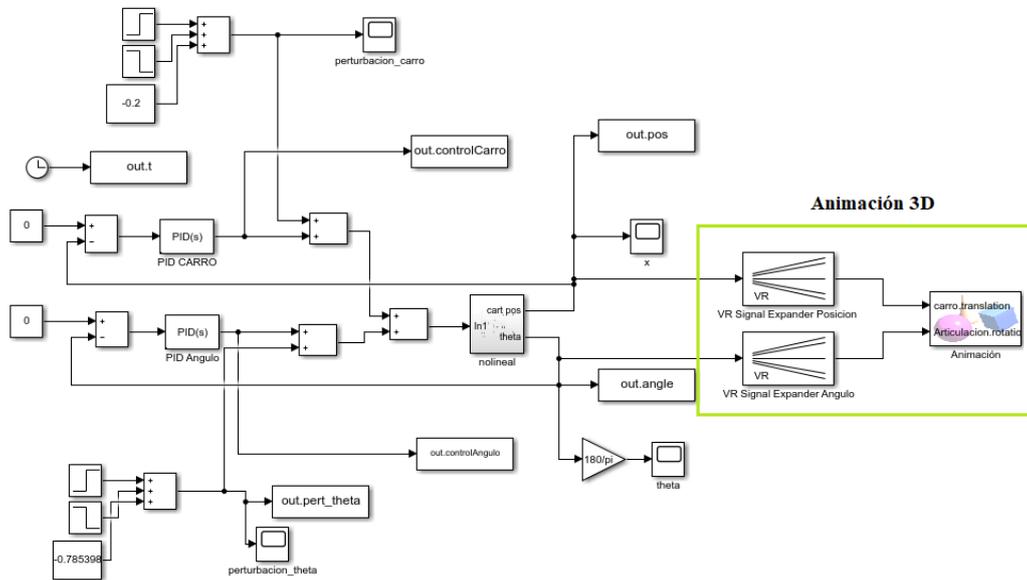


Figura 40: Diagrama de bloques con la fase de animación añadida

El bloque VR Sink mencionado como *Animación* se debe configurar añadiendo el archivo del mundo virtual creado, en este caso se le ha llamado *sistemaCarroPendulo.wrl*. Las variables de entrada del bloque, *translation* del bloque *carro* y *rotation* del bloque *Articulación*, corresponden a la posición del carro y a la rotación del péndulo respectivamente. Otro dato importante para tener en cuenta es el tiempo de muestreo, que nos permite escoger lo rápido que queremos que realice la simulación.

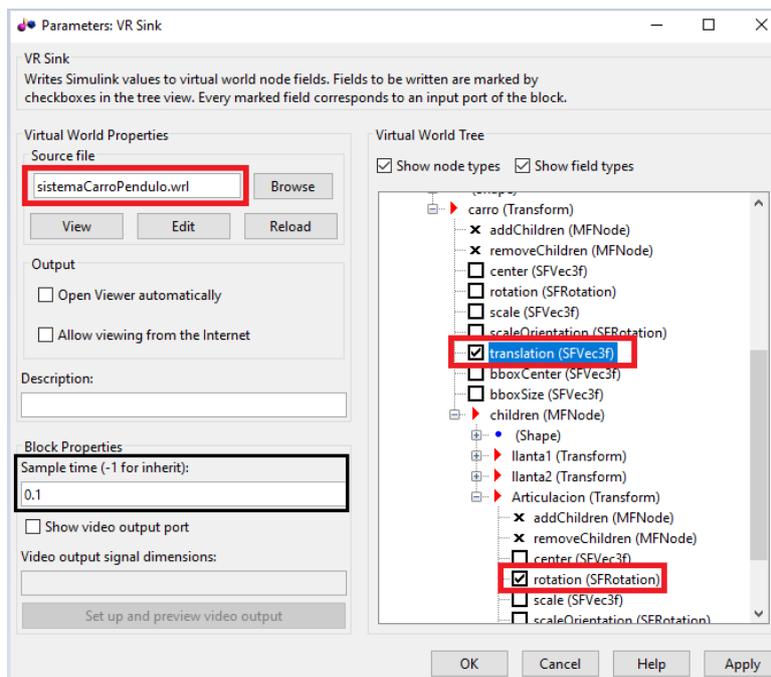


Figura 41: Configuración del bloque VR Sink

## Capítulo 4: Animación del sistema

Los bloques *VR Signal Expander* permiten seleccionar qué parámetro escoger de los que tiene la entrada. Para la posición del carro, hay 3 parámetros, los 3 ejes cartesianos ortogonales, para este proyecto se trabajará con movimiento sobre el eje  $x$  que corresponde al número uno en el bloque. La rotación del péndulo necesita de 4 elementos, los 3 ejes cartesianos ortogonales y el ángulo.

A continuación, se muestra la secuencia de la simulación:

- La figura 42(a) muestra el instante  $t=0$ , cuando el péndulo está en una inclinación de  $10^\circ$  y se iniciará el control.
- En la figura 42(b), se ve cómo se mueve el carro se para frenar la caída del péndulo.
- La figura 42(c) es en el instante  $t=6$  segundo, cuando ya se ha estabilizado el péndulo y la posición del carro.
- Por último, la figura 42(d) muestra como en el instante  $t=10$  segundos se perturba el ángulo del péndulo.

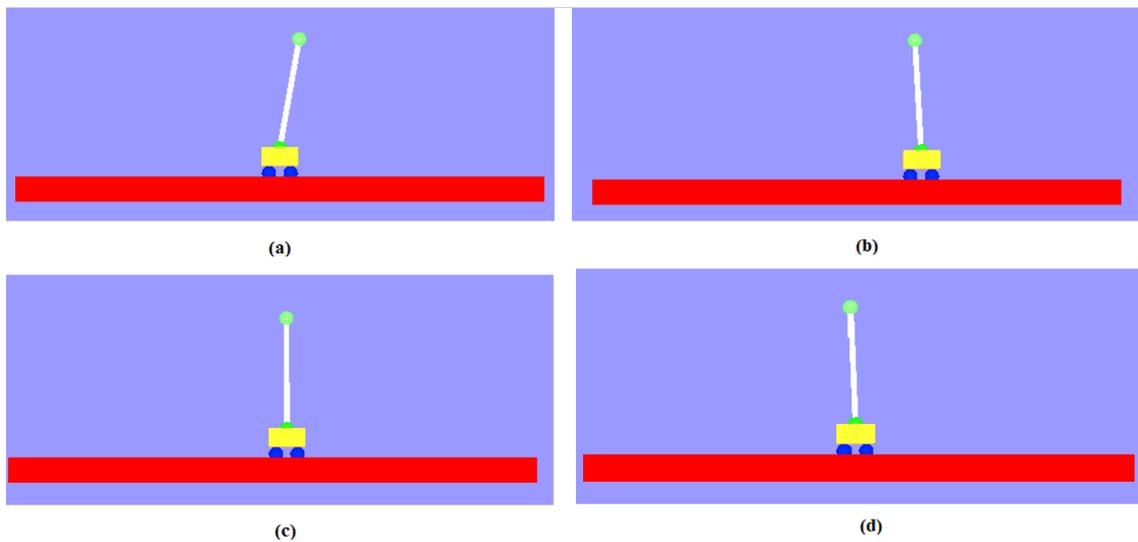


Figura 42: Animación sistema péndulo-carro. a) Instante inicial  $t=0s$ . b) Primera actuación. c) Sistema controlado,  $t=6s$ . d) Perturbación  $t=10s$

## 5. Conclusiones y propuestas

---

El proyecto de control de un sistema péndulo con base móvil ha cumplido con los objetivos definidos.

En primer lugar, se ha obtenido el modelo matemático del sistema con el que se ha visto su comportamiento en lazo abierto para analizar su estabilidad. Al confirmar que es inestable se ha procedido a diseñar una etapa de control con controladores PID para mantener en equilibrio el péndulo.

En segundo lugar, se ha conseguido controlar tanto el ángulo del péndulo respecto a la normal vertical como la posición del carro mediante dos controladores PID usando el método heurístico o de “prueba y error”. Al hacer las simulaciones se ha observado que se tenía mejor respuesta al prescindir de la componente integral para los dos controladores.

También se ha diseñado un modelo en 3D de animación para ver los resultados obtenidos de manera más dinámica.

Se puede considerar el implementar el sistema en un laboratorio y así ver la parte práctica del proyecto.

## 6. Anexos

---

### Anexo I. Scripts

Script 1: Segunda sintonización del controlador PID que controla el ángulo y graficado de los resultados.

```
%Valores PID encontrados haciendo primer tuning
KP = 30;
KI = 5.52;
KD = 3.66;

%posición de ángulo inicial
anguloGrados = 10;
posicionInicial = anguloGrados*pi/180; %poscicion inicial angulo en
radianes

Tiemposim = 5; %tiempo de simulación

%plots, sintonizando el PID variando KP
for i=0:1:7

    KP = 30 + i*10;
    out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
    plot (out.t,out.angulo)
    hold on;
end
legend
('Kp=30','kp=40','kp=50','kp=60','kp=70','kp=80','kp=90','kp=100')
title('Angulo del péndulo vs tiempo')
ylabel('Angulo (°)')
xlabel('tiempo(s)')
hold off;
figure
title('Señal del controlador')
subplot (3,1,1);
KP = 30;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('kp=30')
subplot (3,1,2);
KP = 60;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('kp=60')
subplot (3,1,3)
KP = 90;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('kp=100')
xlabel('tiempo(s)')

KP = 40; %es el mas logico de coger, 2.5 seg para estabilizar y menos
costoso

%plots, sintonizando el PID variando Ki
figure
```

## Capítulo 6: Anexos

```
for i=0:1:7

    KI = 0 + i*2;
    out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
    plot (out.t,out.angulo)
    hold on;
end
legend ('Ki=0','ki=2','ki=4','ki=6','ki=8','ki=10','ki=12','ki=14')
title('Angulo del péndulo vs tiempo')
ylabel('Angulo (°)')
xlabel('tiempo(s)')
hold off;
figure
title('Señal del controlador')
subplot (3,1,1);
KI = 2;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('ki=2')
title('Señal del controlador')
subplot (3,1,2);
KI = 30;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('ki=30')
subplot (3,1,3)
KI = 70;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('ki=70')
xlabel('tiempo(s)')

KI= 0; %el del principio
figure
for i=0:1:7

    KD = 0 + i*2;
    out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
    plot (out.t,out.angulo)
    hold on;
end
legend ('Kd=0','kd=2','kd=4','kd=6','kd=8','kd=10','kd=12','kd=14')
title('Angulo del péndulo vs tiempo')
ylabel('Angulo (°)')
xlabel('tiempo(s)')
hold off;
figure
subplot (3,1,1);
KD = 2;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
title('Señal del controlador')
legend ('kd=2')
subplot (3,1,2);
KD = 5;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('kd=5')
subplot (3,1,3)
KD = 7;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
```

## Capítulo 6: Anexos

```
plot (out.t,out.controlSignal)
legend ('kd=7')
xlabel('tiempo(s)')
%% plot con los reusltados finales
KP=40;
KI=0;
KD=4;
out = sim('planta_nolineal.slx',Tiemposim);
figure
plot (out.t,out.angulo)
title('Respuesta del sistema con Kp=40 y Kd=4')
ylabel('Angulo (°)')
xlabel('tiempo(s)')

figure
plot (out.t,out.controlSignal)
title('Señal del controlador')
ylabel('Esfuerzo')
xlabel('tiempo(s)')
```

**Script 2: Sintonización del controlador PID que controla el carro y graficado de los resultados.**

```
%Posición inicial del ángulo
anguloGrados = 10;
posicionInicial = anguloGrados*pi/180; %poscicion incial angulo en
radianes

%Inicializacion de las componentes PID
KP = 0;
KI = 0;
KD = 0;

Tiemposim = 20;

count2 = 0; %contador para las combinaciones filtradas

%vectores donde se guardarán las posibles combinaciones
KP_v = [];
KI_v = [];
KD_v = [];

%bucle para realizar todas las posibles combinaciones
for i=-5:1:5
    KP = i;
    for k = -5:1:5
        KI = k;
        for j = -5:1:5
            KD = j;
            out = sim('sinto_PID_carro.slx',Tiemposim);
            count = 1;
            length_t = length(out.t);
            while 1
                if count == length_t
                    break;
                end
                if (out.t(count) > 9.9)
                    iter = abs(out.pos(count));
                    break;
                end
            end
```

## Capítulo 6: Anexos

```
        count = count + 1;
    end

    if iter < 0.05
        count2 = count2 + 1;
        KP_v(count2) = KP;
        KI_v(count2) = KI;
        KD_v(count2) = KD;
    end
end
end
end
% out = sim('sinto_PID_carro.slx',Tiemposim);
% plot (out.t,out.pos)
% hold on;
end

%% Graficar las combinaciones filtradas

for x=1:1:count2
    KP_2 = KP_v(x);
    KI_2 = KI_v(x);
    KD_2 = KD_v(x);
    out2 = sim('sinto_PID_carro_graf.slx',Tiemposim);
    % figure
    % plot (out2.t,out2.pos,out2.t,out2.angle);
    % title ('Ángulo del péndulo y posición del carro');
    % legend ('Posición del carro','Ángulo del péndulo');
    % xlabel ('Tiempo (s)');
    % ylabel ('Amplitud');
    figure
    plot (out2.t,out2.controlCarro);
    title('Señal del PID del carro');
    xlabel('Tiempo(s)');
    % figure
    % plot (out2.t,out2.controlAngulo);
    % title('Señal del PID del ángulo');
    % xlabel('Tiempo(s)');
end
```

### Script 3: Simulación y graficado del sistema con los dos controladores PID

```
%% Simulación controladores PID del péndulo y del carro
KP_pend = 40;
KI_pend = 0;
KD_pend = 4;

KP_car = -1;
KI_car = 0;
KD_car = -1;

Tiemposim = 30; %Tiempo de simulación
out3 = sim('penduloInvertido_2PID_final.slx',Tiemposim)
salida_grados = out3.angle*180/(pi); %out3.angle -> Angulo pendul
orespecto a la normal
pert_grados = out3.pert_theta*180/pi; %de radianes a grados
subplot (2,1,1)
plot (out3.t,out3.pos); %out3.pos -> posición del carro
title('Posción del carro');
xlabel('Tiempo[s]');
```

## Capítulo 6: Anexos

```
ylabel ('Posición[m]')
subplot (2,1,2)
plot (out3.t,salida_grados) %salida_grados -> ángulo del péndulo
respecto a la norma
title('Ángulo del péndulo');
xlabel('Tiempo[s]');
ylabel ('Ángulo[°]')
figure
plot (out3.t, pert_grados)
title('Perturbación en el ángulo');
xlabel('Tiempo[s]');
ylabel ('Ángulo[°]')
```

## Anexo II. Resultados de las simulaciones del controlador del carro

A la hora de sintonizar el controlador del carro se han diferenciado tres tipos de respuesta, inestable, estable con tiempo de respuesta mayor y estable con tiempo de respuesta menor. En este anexo se quiere presentar estas diferentes respuestas para ver como se ha descartado 22 configuraciones de 26 obtenidas aplicando la condición  $x(t=10) < |0.05|$  metros, donde  $x$  es la posición del carro.

- **Respuestas Inestables:** Las configuraciones de la tabla 4, daban como resultado respuestas inestables. Un ejemplo claro de estas se presenta en la figura 43, que es la respuesta de la combinación 12 ( $K_p=-2$ ,  $K_i=-4$  y  $K_d=-3$ ). En esta respuesta se puede apreciar como la posición del carro cada vez es mayor, es decir que nunca llegará a alcanzar el valor de referencia o deseado. Como consecuencia desestabiliza también el ángulo del péndulo.

Tabla 4: Índices y combinaciones con respuestas inestable

Índice	1	7	12	18	23
<b>Kp</b>	-4	-3	-2	-2	0
<b>Ki</b>	1	-1	-4	1	-2
<b>Kd</b>	-2	-5	-3	-4	-4

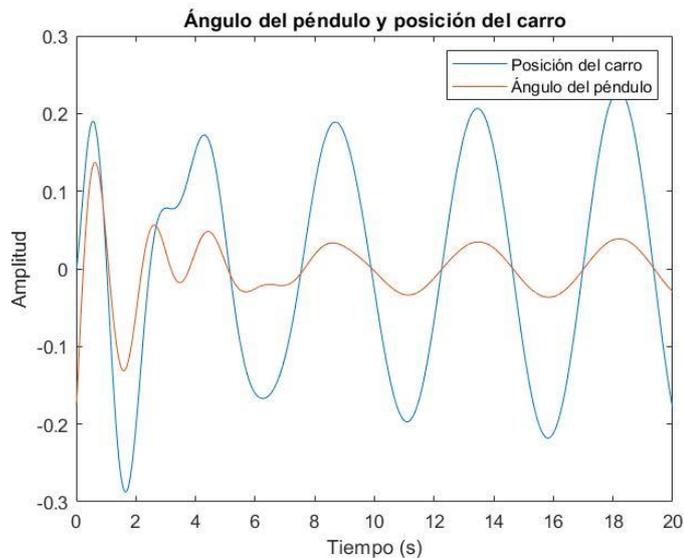


Figura 43. Respuesta del sistema con  $K_p=-2$ ,  $K_i=-4$  y  $K_d=-3$  (combinación 12)

- **Estables con mayor tiempo de respuesta:** En este grupo se han añadido las combinaciones cuyas respuestas eran estables, pero tardaban más en estabilizar el sistema en comparación a las cuatro combinaciones escogidas. Este es el grupo más numeroso y las combinaciones están reflejadas en la tabla 5. En la figura 44 se ven dos ejemplos de esto donde la 42.b es mas notable, ya que no se llega a apreciar el error 0.

Tabla 5: Índices y combinaciones con respuesta estable y mayor tiempo

Índice	2	3	4	5	6	8	9	10	11	13	14	15	16	19	20	22	24
<b>Kp</b>	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	0
<b>Ki</b>	-5	-4	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	-2	-1	-1	0	-1	0	0	0
<b>Kd</b>	-3	-3	-3	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-3	-2	-3	-3	-3	-1	-3

## Capítulo 6: Anexos

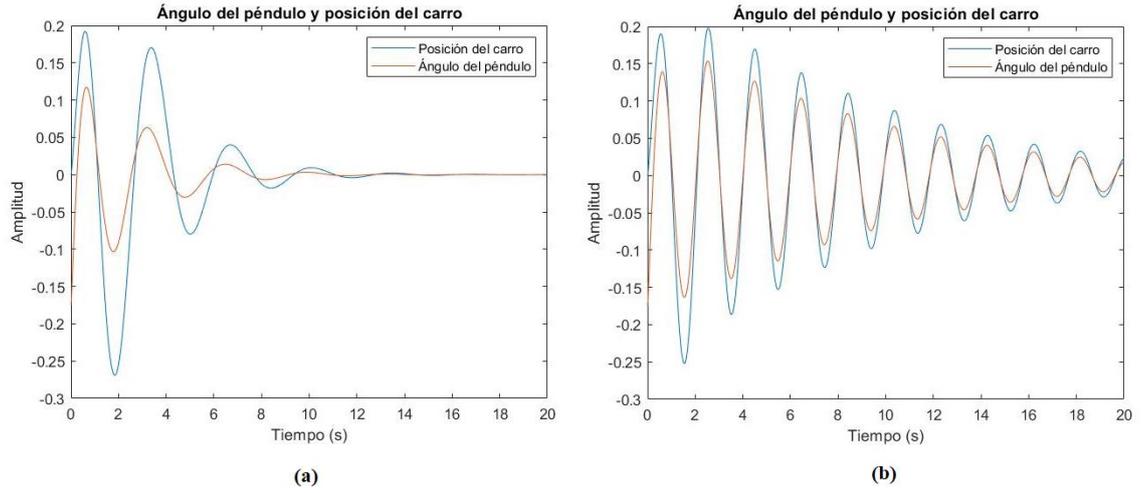


Figura 44: Estables con mayor tiempo de respuesta. a) Respuesta estable a los 14 segundos. b) Respuesta estable a  $t > 20$  segundos

Las respuestas estables, las cuatro restantes, ya están contempladas en el apartado 3.5.2.

## 7. Referencias

---

1. J. Aracil and F. Gordillo, “El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal”, *Revista Iberoamericana de Automática e Información Industrial*, vol. 2, No. 2, Apr, 2005.
2. F. Castaños, and R. Carreras. “Levantamiento y control de un péndulo invertido con un esquema de control reconfigurable”, *XI Congreso Latinoamericano de Control Automático*, May, 2004.
3. Lal Bahadur Prasad, Barjeev Tyagi and Hari Om Gupta, “Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input”, *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, Issue 6, Dec, 2014.
4. Leonardo E. Contreras Bravo and Luis F. Vargas Tamayo, “Generación de modelos de caminata bípeda a través de diversas técnicas de modelamiento”, *Ingeniería*, vol. 11, No. 2, Aug, 2007.
5. K. Ogata, *Dinámica de sistemas*, Prentice Hall, 1987.
6. K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Pearson, 2010.
7. J. García, L. Ramírez, X. Siordia and T. Martínez, “Las leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro”, *Revista Tecnología e Innovación*, vol. 3, No. 9, Dec, 2016
8. Víctor M. Alfaro, “Ecuaciones para controladores PID universales”, *Ingeniería*, vol. 3, No 1, Jan/Jun, 1993
9. Víctor M. Alfaro, “Ecuaciones para controladores PID universales”, *Ingeniería*, vol. 12, No 1, 2, Jan/Dec, 2002
10. S. Castaño, “Control Automático Educación”, <https://controlautomaticoeducacion.com>.
11. A. Calvó, “Diseño, Simulación y construcción de un sistema carro-péndulo mediante la tecnología lego”, Master’s tesis, Universitat Rovira i Virgili, Dept. d’Eng. Electrònica i Automàtica, 2012.