УДК 517.988.8

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ И ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Алданов Е.С., Тлеубергенова М.А.

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, e-mail: aldanersat@mail.ru, madina_70@mail.ru

Закон переноса физических субстанций описывается с использованием дифференциальных уравнений, где искомые функции подчинены заданным краевым условиям. Эти условия зависят от положения, в которой находится исследуемый объект. Такие уравнения можно рассматривать как операторные уравнения, действующие в конкретных функциональных пространствах. Сведения, полученные из такой постановки, могут быть применены для построения эффективных численных методов решения задач с большой практической значимостью. В данной работе рассматривается связь операторного уравнения, рассматриваемая в банаховом пространстве с квадратичным функционалом, и ее применение для построения одной модификации вариационного метода. Рассматриваемая в работе физическая задача: поперечный изгиб балки с постоянной жесткостью, которая лежит на упругом основании. Математическая модель этого процесса описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с заданными краевыми условиями, рассматриваемая как операторное уравнение с положительным оператором в левой части. Решение такого уравнение исследуется с помощью квадратичного функционала специального вида. Доказывается, что задача нахождения решений данного уравнения с заданными краевыми условиями эквивалентна задаче поиска минимума функционала. Далее, строится вариационный метод по минимизации квадратичного функционала, численный расчет которого дает решения исходной физической задачи. Практической значимостью работы является то, что численный расчет поиска минимума функционала легко осуществляется быстро сходящимся численным алгоритмом основанный минимизацию квадратичного функционала.

Ключевые слова: положительный оператор, операторное уравнение, квадратичный функционал, минимизация функционала

APPLICATION OF THE EQUIVALENCE THEOREM FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS AND FINDING THE MINIMUM OF A QUADRATIC FUNCTIONAL ELEMENT

Aldanov E.S., Tleubergenova M.A.

K. Jhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, e-mail: aldanersat@mail.ru, madina_70@mail.ru

Law of transfer physical substances described using differential equations, where the unknown functions are subject to the given boundary conditions. These conditions depend on the position in which the object under study. Such equations can be regarded as the operator equations acting in specific functional areas. Information obtained from this formulation can be used to build an efficient numerical methods for solving problems with great practical importance. In this paper the relationship between the operator equations are considered in a Banach space with a quadratic functional and its application for a modification postreniyavariational method. Considered in the work of the physical problem: transverse bending beams with constant stiffness, which lies on an elastic foundation. A mathematical model of this process is described by a differential equation of the fourth order with the given boundary conditions, regarded as as an operator equation with a positive operator on the left side. A solution of this equation is studied by using a special form of a quadratic functional. It is proved that the problem of finding solutions of this equation with the given boundary conditions, equivalent to the problem of finding the minimum of the functional. Further, the variational method is based on minimization of a quadratic functional, numerical calculation which gives solutions of the original physical problem. The practical significance of the work is that the numerical calculation of finding the minimum of the functional is easily accomplished rapidly convergent numerical algorithm based minimization of a quadratic functional

Keywords: positive operator, the operator equation, quadratic functional, minimization of the functional

Пусть A дифференциальный оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) + q(x), \qquad (1)$$

определенный на множестве функций $D(A) \in L_2\,[0,\,1]$ и непрерывные на [0, 1] вместе со своими производными до четвертого порядка включительно и удовлетворяют некоторым граничным условиям, например

$$\omega(0) = \omega(1) = \omega''(0) = \omega''(1) = 0,\ \omega(x) \in D(A). \qquad (2)$$

И пусть $q(x) \geq 0$ на интервале (0, 1).

Такое множество $D(A)$ является линейным многообразием, всюду плотным в гильбертовом пространстве $L_2[0,\,1]$.

Определение. Линейный симметричный оператор A называется положительным, если для любого $u \in D(A)$ выполняется неравенство $\langle Au, u\rangle \geq 0$, причем $\langle Au, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ [1, 2].

Из определения следует, что A –положительно определенный оператор.

Рассмотрим операторное уравнение в гильбертовом пространстве L_2 [0, 1] с оператором (1)

$$Au = f. \qquad (3)$$

Теорема. Уравнение (3) с положительным оператором A имеет не более одного решения в $D(A)$.

Доказательство. Допустим, что операторное уравнение (2) имеет два решения u_1 и u_2. Тогда $Au_1 = f$ или

$$\frac{d^4 u_1(x)}{dx^4} + q(x)u_1(x) = f(x).$$

Аналогично $Au_2 = f$ или

$$\frac{d^4 u_2(x)}{dx^4} + q(x)u_2(x) = f(x).$$

Вычи:

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(u_1(x) - u_2(x)\right) + q(x)(u_1(x) - u_2(x)) = 0$$

или

$$A\left(u_1 - u_2\right) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\left\langle A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)\right\rangle = \int_0^1 A(u_1 - u_2)\cdot(u_1 - u_2)dx = 0.$$

Из приведенного выше определения положительности получаем, что и это равносильно тому что

$$\langle A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)\rangle = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = 0.$$

Таким образом, $u_1 = u_2$.

Уравнением (1) описывается, например, поперечный прогиб $u(x)$ балки [3] под действием распределенной поперечной нагрузки $f(x)$, $f(x) \in L_2(0, 1)$, где балка имеет постоянную жесткость на изгиб и лежит на упругом основании, реакцию которого определяет слагаемое $q(x)u(x)$, $q(x) \geq 0$ на интервале (0, 1).

При таком физическом смысле постановки задачи граничные условия отражают то, как закреплены ее концы. Так, для консольной балки с жестко защемленным левым и свободным правым концами граничные условия имеют вид

$$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

Если балка имеет на концах опоры, допускающие (в отличие от жесткого защемления) поворот ее поперечного сечения, пропорциональный в этом сечении изгибающему моменту, то в этом случае граничные условия принимают следующий вид:

$$u(0) = u(1) = 0;$$

$$u'(0) = \alpha u''(0);$$

$$u'(1) = \beta u''.$$

Из этих уравнений при $\alpha = \beta = 0$ вытекают условия жесткого защемления, а при $\alpha \to \infty$ и $\beta \to \infty$ – шарнирного опирания, и условия принимают вид (2).

Рассмотрим функционал вида

$$J\left[u\right] = \langle Au, u\rangle - 2\langle f, u\rangle. \qquad (4)$$

Справедлива следующая теорема о квадратичном функционале.

Теорема. Для того, чтобы элемент $u_0 \in D(A)$ был решением операторного уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы квадратичный функционал (4) на u_0 принимал свое минимальное значение в $D(A)$, т.е.

$$\forall u \in D(A);$$

$$u \neq u_0 \, J\left[u\right] - J\left[u_0\right] > 0.$$

Доказательство: Необходимость. Пусть на элементе u_0 функционал (4) принимает минимальное значение в $D(A)$, т.е.

$$J\left[u_0 + \delta u\right] \geq J\left[u_0\right];$$

$$u \in D(A); \quad \delta \in R.$$

Используя свойства скалярного произведения и симметричности положительного оператора, получаем:

$$J\left[u_0 + \delta u\right] = \langle A(u_0 + \delta u), u_0 + \delta u\rangle - 2\langle f, u_0 + \delta u\rangle =$$
$$= \langle Au_0 + \delta Au, u_0 + \delta u\rangle - 2\langle f, u_0\rangle - 2\delta\langle f, u\rangle =$$
$$= \langle Au_0, u_0\rangle + 2\delta\langle Au_0, u\rangle + \delta^2\langle Au, u\rangle - 2\delta\langle f, u\rangle - 2\langle f, u_0\rangle.$$

При $u \neq 0$;

$$a = \langle Au, u\rangle;$$

$$b = 2(\langle Au_0, u\rangle - \langle f, u\rangle);$$

$$c = \langle Au_0, u_0\rangle - 2\langle f, u_0\rangle$$

правая часть полученного выражения является квадратным трехчленом

$$J\left[u_0 + \delta u\right] = a\delta^2 + 2b\delta + c.$$

Данный трехчлен свое минимальное значение принимает при $\delta = 0$

$$J\left[u_0+\delta u\right]\Big\|_{\delta=0} = J\left[u_0\right] \Rightarrow J'_\delta\left[u_0+\delta u\right]\Big\|_{\delta=0} = 2\langle Au_0, u\rangle - 2\langle f, u\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle Au_0, u\rangle - \langle f, u\rangle = 0 \Rightarrow \langle Au_0 - f, u\rangle = 0.$$

Последнее равенство означает, что элемент $Au_0 - f \in L_2[0, 1]$ является нулевым элементом этого пространства, так как оно верно $\forall u \in D(A) \subset L_2[0, 1]$, т.е. $Au_0 - f = 0$, а значит $u_0 \in D(A)$ является решением (1).

Достаточность. Функционал (4) определен при всех $u \in D(A)$. Пусть u_0 удовлетворяет (1): $Au_0 = f$. Подставляя это значение вместо f в (4), получаем:

$$J\left[u\right] = \langle Au, u\rangle - 2\langle Au_0, u\rangle = \langle Au, u\rangle - \langle Au_0, u\rangle - \langle u, Au_0\rangle =$$

$$= \langle Au, u\rangle - \langle Au_0, u\rangle - \langle Au, u_0\rangle + \langle Au_0, u_0\rangle - \langle Au_0, u_0\rangle =$$

$$= \langle A\left(u-u_0\right), u-u_0\rangle - \langle Au_0, u_0\rangle.$$

Отсюда

$$J\left[u_0\right] = -\langle Au_0, u_o\rangle,$$

и в силу положительности оператора A имеем

$$J\left[u\right] - J\left[u_0\right] = \langle A\left(u-u_0\right), u-u_0\rangle - \langle Au_0, u_0\rangle + \langle Au_0, u_0\rangle =$$

$$= \langle A\left(u-u_0\right), u-u_0\rangle \geq 0.$$

Так как

$$\langle A\left(u-u_0\right), u-u_0\rangle = 0 \Leftrightarrow u-u_0 = 0 \Rightarrow u = u_0.$$

Теорема доказана.

При таком раскладе решения операторного уравнения (3) можно построить итерационный процесс [1] со скоростью геометрической прогрессии, с помощью которого можно найти минимальный элемент специального вида функционала, поиск которого является эквивалентным поиску минимального элемента функционала (4).

Введем оператор A_0 следующим образом: обозначим

$$u^{(4)} = v, \quad \begin{matrix} u\big|_{x=0} = 0; & u\big|_{x=1} = 0; \\ u''\big|_{x=0} = 0; & u''\big|_{x=1} = 0 \end{matrix}$$

или в операторной форме

$$A_0 u = v,$$

где $A_0 = -\dfrac{d^4}{dx^4}$ – оператор однозначно разрешим в пространстве $L_2(0, 1)$ с заданными краевыми условиями.

Тогда уравнение (3) примет вид

$$Mv = v + q(x)A_0^{-1}v = f(x). \qquad (5)$$

Если v найдено, то u вычисляется по формуле

$$u = A_0^{-1}v = \frac{1}{6}x\int_0^1 (1-t)^3 v(t)dt + \frac{1}{3}x^3\int_0^1 (t-1)^3 v(t)dt + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}v(t)dt.$$

Обозначим

$$J(\omega) = \int_0^1 \left|\omega + q(x)(A_0^{-1}\omega)(x) - f(x)\right|^2 dx. \qquad (6)$$

При $\omega = v$, где v – решение (5), имеем $J(\omega) = 0$ и наоборот.

Будем предполагать, что уравнение (5) для любой правой части $f(x) \in L_2(0, 1)$ имеет единственное решение. Следовательно, из теоремы Банаха вытекает, что

$$\left\|M^{-1}\right\| = \left\|M^{*-1}\right\| \leq c < \infty, \qquad (7)$$

где $$M = E + q(x)A_0^{-1}; \qquad (8)$$

$$\left\|M^{-1}\right\| \leq \frac{1}{(1+\left\|q(x)\right\|\left\|A_0^{-1}\right\|)}$$

и норма A_0^{-1} – вычисляется явно в пространстве $L_2(0, 1)$.

$$\left\|M^{-1\bullet}\right\| \leq \frac{1}{(1+\left\|A_0^{-1\bullet}\right\|\left\|q(x)\right\|)},$$

причем

$$\left\|A_0^{-1}\right\| = \left\|A_0^{-1\bullet}\right\|.$$

Построим итерационный процесс.

Пусть ω_n n-е приближенное решение уравнения $J(\omega_n) = 0$.

Положим

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \varepsilon\omega,$$

где ε – положительное число.

Тогда

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n - \varepsilon\omega) = \int_0^1 \left(\omega_n - \varepsilon\omega + q(x) A_0^{-1}(\omega_n - \varepsilon\omega) - f(x)\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\omega_n + q(x) A_0^{-1}\omega_n - f(x)\right)^2 dx - \quad 2\int \left(\omega_n + q(x) A_0^{-1}\omega_n - f(x)\right)\left(\varepsilon\omega - q(x) A_0^{-1}(\varepsilon\omega)\right) dx +$$

$$+ \int_0^1 \varepsilon^2 \left(\omega + q(x) A_0^{-1}(\omega)\right)^2 dx = J(\omega_n) - 2\varepsilon\left\langle M\omega_n - f, M\omega\right\rangle + \varepsilon^2 \left\|M\omega\right\|^2 =$$

$$= J(\omega_n) - 2\varepsilon\left\langle M^*(M\omega_n - f), \omega\right\rangle + \varepsilon^2 \left\|M\omega\right\|^2.$$

Мы воспользовались линейностью интегрального оператора A_0.

Выберем

$$\omega = M^*(M\omega_n - f) = (M\omega_n - f + A_0^{-1\bullet}(q(x)A(M\omega_n - f)).$$

Тогда

$$J(\omega_{n+1}) = J(\omega_n) - 2\varepsilon\|\omega\|^2 + \varepsilon^2\|M\omega\|^2 \le J(\omega_n) - \left[2\varepsilon - \|M\|^2\varepsilon^2\right]\|\omega\|^2. \tag{9}$$

В силу условия (1.11) имеем

$$\sqrt{J(\omega_n)} = \|M\omega_n - f\| = \left\|M^{*-1}\ M^*(M\omega_n - f)\right\| = \left\|M^{-1}\omega\right\| \le c\|\omega\|.$$

Поэтому из (1.13) следует

$$J(\omega_{n+1}) \le J(\omega_n) - \left[2\varepsilon - \|M\|^2\varepsilon^2\right] J(\omega_n)\Big/c^2 = J(\omega_n)\left[1 - \left[2\varepsilon - \|M\|^2\varepsilon^2\right]\Big/c^2\right].$$

Выберем

$$\varepsilon = d^{-2} \le \|M\|^{-2}.$$

Тогда получим

$$J(\omega_{n+1}) \le J(\omega_n)\left(1 - \frac{1}{d^2c^2}\right). \tag{10}$$

Для разности $\omega_{n+1} - \omega_n$ имеем

$$\|\omega_{n+1} - \omega_n\| = \varepsilon\|\omega\| = \varepsilon\|M^*(M\omega_n - f)\| \le \varepsilon\|M^*\|\sqrt{J(\omega_n)} \le c\sqrt{J(\omega_n)}.$$

Это неравенство и (10) дают следующий результат:

Теорема 1.2.1. Пусть для любого $f(x) \in L_2(0, 1)$ задача *(3)* имеет единственное решение $u \in W_2^4(0,1)$, причем оператор M, определенный по (5), удовлетворяет условиям $\left\|M^{-1}\right\| \le c,\ \|M\| \le d,$ причем справедливо неравенство $cd > 1$. Тогда для любого $\omega_0 \in L_2(0, 1)$ последовательность, определяемая по формулам

$$\omega_{n+1} = \omega_n - d^{-2}M^\bullet(M\omega_n - f),$$

сходится к решению $\omega_.$ уравнения (1.9’), причем выполнены оценки

$$J(\omega_n) \le \theta^n J(\omega_0);$$

$$\|\omega_{n+1} - \omega_0\| \le c\theta^{n/2}\sqrt{J(\omega_0)},$$

где $\theta = 1 - \dfrac{1}{d^2c^2}$. При этом функция $u = A^{-1}\omega_.$ будет решением задачи (5).

Доказательство. Из (10) и последующих неравенств следует, что

$$J(\omega_n) \le \theta J(\omega_{n+1}) \le \ldots \le \theta^n J(\omega_0),\ \theta < 1;$$

$$\left\|\omega_{n+1}-\omega_n\right\|^2 \le c^2 J(\omega_n) \le \ldots \le c^2\theta^n J_0.$$

Докажем сходимость приближенного решения к решению исходной задачи:

$$\left\|\omega_{n+m}-\omega_n\right\| \le \left\|\omega_{n+m}-\omega_{n+m-1}\right\| + \left\|\omega_{n+m-1}-\omega_{n+m-2}\right\| + \ldots + \left\|\omega_{n+1}-\omega_n\right\| \le c\sqrt{J_0}\theta^{(n+m-1)/2} +$$

$$+c\sqrt{J_0}\theta^{(n+m-2)/2} + \ldots + c\sqrt{J_0}\theta^{n/2} = c\sqrt{J_0}\theta^{n/2}\left(\theta^{(m-1)/2}+\theta^{(m-2)/2}+\ldots+1\right) = \frac{cJ_0}{1-\sqrt{\theta}}\theta^{n/2},$$

$\{\omega_n\}$ – фундаментальная последовательность, $L_2(0, 1)$ – полное гильбертово пространство, тогда существует такой элемент $\omega_\bullet$, что $\omega_n \to \omega_\bullet$ в $L_2(0, 1)$ и из непрерывности оператора M получим $J(\omega_n) \to J(\omega_\bullet)$. Тогда из первого неравенства теоремы следует, что $J(\omega_\bullet) = 0$, то есть $M\omega_\bullet = f$ и $u = A^{-1}\omega_\bullet$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Алданов Е.С. Построение приближенных решений задач теории упругости и теплопроводности на основе вариационного метода: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Алматы, 2004.

2. Власов Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.

3. Колмогоров А.И., Фомин С.В. Элементы теорий функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 543 с.

4. Леонтьев Н.Н. Приложение вариационного метода Власова В.З. к расчету фундаментов гидротехнических сооружений: дис. ... канд, физ.-мат. наук. – М., 1952. – 110 с.

5. Мухамбетжанов А.Т., Отелбаев М.О., Смагулов Ш.С. Об одном новом приближенном методе решения нелинейных краевых задач: Препринт ИА РК. – Алматы, 1997. – № 21. – 34 с.

References

1. Aldanov E.S. Postroenie priblizhennyx reshenij zadach teorii uprugosti i teploprovodnosti na osnove variacionnogo metoda. Avtoreferat na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskix nauk. Almaty, 2004.

2. Vlasov E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Priblizhennye metody matematicheskoj fiziki. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E'. Baumana, 2001. 700 p.

3. Kolmogorov A.I., Fomin S.V. E'lementy teorij funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1968. 543 p.

4. Leont'ev N.N. Prilozhenie variacionnogo metoda Vlasova V.Z. k raschetu fundamentov gidrotexnicheskix sooruzhenij: Dis. kand, fiz.-mat. nauk. M., 1952. 110 p.

5. Muxambetzhanov A.T., Otelbaev M.O., Smagulov Sh.S. Ob odnom novom priblizhennom metode resheniya nelinejnyx kraevyx zadach: Preprint IA RK. Almaty, 1997. no. 21. 34 p.

Рецензенты:

Оразбаев Б.Б., д.т.н., профессор, Атырауский институт нефти и газа, академик ИА РК, г. Атырау;

Хасанов А., д.ф.-м.н., профессор, Актюбинский университет им. С. Баишева, г. Актобе.

Работа поступила в редакцию 21.05.2014.