

Un opérateur de diffusion spatialement sélectif pour le transport d'un traceur passif ou actif par un écoulement de grande échelle

Thomas DUBOS

Laboratoire de météorologie dynamique, École normale supérieure, 24, rue Lhomond, 75005 Paris, France
Courriel : dubos@lmd.ens.fr

(Reçu le 2 février 2001, accepté après révision le 15 mai 2001)

Résumé. Dans un écoulement, les champs mesurés sont régularisés à petite échelle. Pour un champ de vitesse grande échelle, cette régularisation fait apparaître dans l'équation d'advection un terme diffusif proportionnel au tenseur de déformation. Nous étudions en deux dimensions son effet sur la dynamique de la vitesse et de la vorticité et les invariants quadratiques. La vorticité et l'énergie restent conservées, l'entropie et la variance du traceur sont maintenant dissipées en fonction de la topologie de l'écoulement. Ces propriétés invitent à utiliser cet opérateur de diffusion-déformation pour la simulation numérique des écoulements quasi-bidimensionnels.   2001 Académie des sciences/ ditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides numériques / turbulence bidimensionnelle / paramétrisation / alignements

A spatially selective parametrization for the transport of a passive or active tracer by a large scale flow

Abstract. *In a fluid flow, fields are measurable up to a cut-off scale at which they are regularized. We show that, for a smooth velocity field, this regularization adds to the advection equation a diffusive term proportional to the strain tensor. We study in two dimensions its effect on the dynamics of velocity and vorticity, and on the conservation of quadratic invariants. Vorticity and energy are still conserved, while enstrophy and tracer variance are dissipated depending on the flow topology. These properties (conservation, dissipation, spatial selectivity) suggest the use of this selective strain-diffusion operator for numerical simulations of inhomogeneous flows in the quasi-two-dimensional approximation.   2001 Académie des sciences/ ditions scientifiques et m dicales Elsevier SAS*

computational fluid mechanics / 2D turbulence / parametrization / alignments

Abridged English version

In turbulent flows, the action of unresolved scales on resolved scales must be modeled. Beside existing modelizations [11,4,5], we propose a derivation for a new operator. We study its principal properties, and finally summarize the advantages it presents over existing ones.

Starting from the transport equation (2.1) and assuming filtering relations (2.2)–(2.4) between the real fields u_i (velocity) and T (tracer) and the regularized fields v_i and θ , we derive the evolution equation of θ at leading order in the cut-off scale l_0 . This can be done by evaluating the effect of differential advection of

Note présentée par  variste SANCHEZ-PALENCIA.

close points (equation (2.5)) by the means of a Taylor expansion, leading to equation (2.6). In the case of a velocity field depending linearly on space coordinates, equation (2.6) is exact, as is shown when expressing equations (2.1), (2.2) in Fourier space. We therefore think that the introduced approximation is valid as far as the velocity field is smooth.

It is then straightforward to derive the evolution equation for the regularized velocity v_i . We start from Euler equation (3.8), simply replace the usual advection operator D/Dt by the modified one D^*/Dt (equation (2.7)) that appears in equation (2.6) and get equation (3.9). We then derive the evolution equation for the regularized vorticity ω (equation (3.10)) and show that in two dimensions, such cancellations occur that ω verifies the same equation as θ (equation (3.11)). This important feature of the two-dimensional dynamics is preserved.

We then turn to the conservative or dissipative properties of our equations (2.6), (3.9). They are advection–diffusion equations whose diffusivity tensor $-l_0^2 \partial_i v_j$ varies spatially and has two eigenvalues with the same amplitude and opposite signs. We derive the evolution equation for the tracer variance (4.13), (4.14) and show that it is dissipated depending on the alignment of the tracer gradient to the main axes of the strain tensor. Using the geometrical alignment properties studied in [12,6,7], we find that there will be a dissipation indeed in the so-called hyperbolic (strain dominated) regions of the flow, while there will be no dissipation in the elliptic (rotation dominated) regions. The same reasoning holds for enstrophy, since vorticity is transported. We present in *figure 1* the vorticity field (left) and the corresponding enstrophy dissipation field (right) obtained in a numerical simulation using the strain–diffusion operator and forced at large scale. Finally, we derive the evolution equation for the energy (4.15), (4.16) and show that it is conserved. The strain–diffusion operator we introduce therefore respects the generic properties of 2D turbulence: an inverse energy cascade and direct cascades of enstrophy and tracer variance [2]. Furthermore, it is selective concerning the regions of the flow where the dissipation of enstrophy and scalar variance occurs.

In conclusion, we stress the qualities of the strain–dissipation operator we introduce. Eddy-viscosity [3,4] and hyperviscosity [5] models dissipate energy. This is a problem for the quasi-two-dimensional geophysical simulations for which they (or variants of them) are commonly used. The anticipated potential vorticity method [5] was designed to conserve energy, but fails to be Galilee invariant. Beside these difficulties overridden by the operator we propose, it has the nice property of selecting the regions of the flow where dissipation occurs. This should make it useful for numerical simulation of realistic, far from homogeneity and isotropy, geophysical flows.

1. Introduction

Dans les écoulements turbulents, l'action des échelles non résolues sur les échelles résolues doit être modélisée. Plusieurs modélisations sont actuellement utilisées. La phénoménologie de la turbulence homogène isotrope [1,2] a conduit à la mise au point de modélisations à base de viscosité turbulente [3,4]. Pour la turbulence bidimensionnelle ou quasi-bidimensionnelle, où l'énergie n'est pas transférée vers les petites échelles mais vers les grandes [2], les méthodes de l'hyperviscosité (qui dissipe moins l'énergie) et du tourbillon anticipé (qui la conserve) [5] sont plus adaptées. Ces méthodes ont chacune leurs inconvénients, que nous discutons en conclusion.

Nous introduisons une fermeture de nature cinématique, indépendante d'une phénoménologie de la turbulence, pour l'équation du transport puis pour l'équation d'Euler. Cette fermeture conduit à un opérateur de diffusion proportionnel au tenseur de déformation. Nous montrons qu'il respecte toutes les propriétés dynamiques fondamentales de la turbulence bidimensionnelle : la vorticité vérifie la même équation qu'un traceur passif, l'énergie est conservée exactement, l'enstrophie et la variance du traceur sont dissipées. Nous montrons enfin que cette dissipation dépend des alignements des gradients de traceur ou de vorticité avec

les axes propres du tenseur de déformation. Les propriétés d'alignement mises en évidence récemment [6,7] donnent à cet opérateur la capacité de sélectionner les régions du fluide où il aura une action dissipative.

2. Advection de champs régularisés

Nous considérons un traceur passif T transporté par un champ de vitesse incompressible u :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \partial_i(u_i T) = 0 \quad (2.1)$$

Ici $\partial_i = \partial/\partial x_i$ et l'indice i prend des valeurs de 1 à n , n étant la dimension de l'espace. L'incompressibilité s'écrit $\partial_i u_i = 0$. En pratique, les grandeurs accessibles à la mesure ou à la simulation sont régularisées à une échelle l_0 . En conséquence, nous nous intéressons à la dynamique de :

$$\theta(\vec{x}, t) = \int T(\vec{x} + \vec{l}) p(l) d^n \vec{l} \quad (2.2)$$

$$v_i(\vec{x}, t) = \int u_i(\vec{x} + \vec{l}) p(l) d^n \vec{l} \quad (2.3)$$

où $p(l)$ est une gaussienne qui décroît sur une échelle typique l_0 :¹

$$p(l) = (2\pi l_0^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2l_0^2}\right) \quad (2.4)$$

L'équation d'évolution de θ se déduit de celle de T moyennant un développement limité au premier ordre non nul en l_0 .

2.1. Effet de l'advection différentielle

On déduit des équations (2.1), (2.2) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \partial_i(u_i \theta) + \int (\partial_i F_i) p(l) d^n \vec{l} = 0$$

où il apparaît un terme dû à l'advection des points proches de \vec{x} par une vitesse différente de $\vec{u}(\vec{x})$. Avec $F_i(\vec{x}, \vec{l}) = (u_i(\vec{x} + \vec{l}) - u_i(\vec{x}))T(\vec{x} + \vec{l})$ et $\frac{\partial}{\partial x_i} F_i = \frac{\partial}{\partial l_i} F_i$, on peut intégrer par parties. Il vient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \partial_i(u_i \theta) = -\frac{1}{l_0^2} \int (u_i(\vec{x} + \vec{l}) - u_i(\vec{x})) T(\vec{x} + \vec{l}) l_i p(l) d^n \vec{l} \quad (2.5)$$

La mesure $l p(l) d^n \vec{l}$ est concentrée autour de $l \approx l_0$ ce qui permet de faire un développement limité :

$$\begin{aligned} T(\vec{x} + \vec{l}) &= T + l_i \partial_i T + \frac{1}{2} l_i l_j \partial_{ij} T \\ l_m (u_m(\vec{x} + \vec{l}) - u_m(\vec{x})) &= l_m l_k \partial_k u_m + \frac{1}{2} l_j l_k l_m \partial_{kl} u_m + \frac{1}{6} l_i l_j l_k l_m \partial_{ikl} u_m \\ -l_0^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \partial_i \theta \right) &= T \partial_k u_m \langle l_k l_m \rangle + \frac{1}{2} \left(\partial_i T \partial_{kl} u_m + \partial_{ij} T \partial_i u_k + \frac{1}{3} T \partial_{ikl} u_m \right) \langle l_i l_j l_k l_m \rangle \end{aligned}$$

où $\langle f(\vec{l}) \rangle$ désigne $\int f(\vec{l}) p(l) d^n \vec{l}$, ce qui implique la nullité des termes d'ordre impair, que nous avons omis ici. On se ramène au calcul de moments d'une distribution gaussienne :

T. Dubos

$$\begin{aligned}\langle l_k l_m \rangle &= l_0^2 \delta_{km}, & \langle l_i l_j l_k l_m \rangle &= l_0^4 (\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \\ -l_0^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \partial_i \theta \right) &= l_0^2 T \partial_m u_m + \frac{l_0^4}{2} (\partial_{jj} T \partial_i u_i + T \partial_{ijj} u_i + \partial_i T \partial_{jj} u_i + 2 \partial_j T \partial_{ij} u_i + 2 \partial_{ij} T \partial_i u_j)\end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'incompressibilité $\partial_i u_i = 0$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \partial_i \left(u_i \theta + \frac{l_0^2}{2} T \Delta u_i \right) + l_0^2 \partial_i (\partial_j T \partial_j u_i) = 0$$

où Δ désigne le laplacien. Il reste à éliminer u_i et T . Les équations (2.2), (2.3) s'écrivent, vu notre choix de p :

$$\theta = \exp\left(\frac{l_0^2}{2} \Delta\right) T \approx T + \frac{l_0^2}{2} \Delta T, \quad v_i = \exp\left(\frac{l_0^2}{2} \Delta\right) u_i \approx u_i + \frac{l_0^2}{2} \Delta u_i$$

D'où, à l'ordre le plus bas en l_0 , l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \partial_i (v_i \theta + l_0^2 \partial_j \theta \partial_j v_i) = 0 \quad (2.6)$$

Cette équation peut aussi être obtenue formellement par une méthode de défiltrage, en inversant les relations (2.2), (2.3). Nous avons ainsi remplacé l'opérateur d'advection D/Dt par un opérateur modifié D^*/Dt où :

$$\frac{D^*}{Dt} \theta \equiv \frac{\partial \theta}{\partial t} + \partial_i (\theta v_i + l_0^2 \partial_j \theta \partial_j v_i) \quad (2.7)$$

et l'équation du transport s'écrit : $D^* \theta / Dt = 0$.

2.2. Validité de l'approximation

Nous avons construit une équation approchée pour l'advection d'un champ de traceur régularisé par un champ de vitesse également régularisé, au premier ordre d'un développement en puissances de l_0^2 . On peut se demander dans quelle mesure le premier terme suffit. La méthode exposée en (2.1) donne une indication à ce sujet : la validité du calcul suppose un certain degré de régularité des fonctions T et u . L'étude qui suit suggère que ces conditions sont relativement peu restrictives sur T .

Le problème de l'advection peut être résolu exactement si le champ u dépend linéairement des coordonnées. Dans ce cas l'équation d'advection (2.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} + \partial_j (x_l T \partial_l u_j) &= 0, \quad \text{soit} \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + k_j \partial_l \hat{T} \partial_l u_j &= 0\end{aligned}$$

où $\hat{T}(k)$ désigne la transformée de Fourier de T , et où les dérivées sont relatives aux coordonnées spectrales k_i . D'autre part $\hat{\theta}(k) = \exp(-k^2 l_0^2 / 2) \hat{T}(k)$, d'où :

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + k_j \partial_l \hat{\theta} \partial_l u_j - l_0^2 k_j k_l \hat{\theta} \partial_l u_j = 0$$

qui est l'équivalent spectral de l'équation (2.6). Celle-ci est donc, dans ce cas particulier, *exacte* et non approchée. Ceci suggère que, pourvu que le champ de vitesse u soit régulier, l'équation (2.6) sera vérifiée même pour un champ T irrégulier.

3. Application à l'équation d'Euler

3.1. Dynamique de la vitesse

L'équation d'advection (2.6) utilise la vitesse régularisée v . Il est donc nécessaire d'appliquer la même démarche à l'équation d'évolution de u . Nous considérerons l'équation d'Euler incompressible :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \partial_i(u_i u_k) + \partial_k P = 0 \quad (3.8)$$

où P est la pression. Comme en (2.1), l'opérateur D/Dt doit être remplacé par D^*/Dt , d'où :

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + \partial_i(v_i v_k + l_0^2 \partial_j v_k \partial_j v_i) + \partial_k \Pi = 0 \quad (3.9)$$

où Π désigne la pression régularisée. Le terme $l_0^2 \partial_j v_k \partial_j v_i$ a été introduit par Leonard et Clark dans le cadre de la modélisation sous-maille en turbulence tridimensionnelle [8,9], où il semble peu exploité ([10], p. 148).

3.2. Dynamique de la vorticité

Le vecteur vorticité s'exprime comme la partie antisymétrique du tenseur de déformation : $\Omega_m = \varepsilon_{klm} \partial_l u_k$ où ε_{klm} est le tenseur unité antisymétrique. La même équation relie les champs régularisés : $\omega_m = \varepsilon_{klm} \partial_l v_k$. L'équation de la vorticité se déduit de (3.9) en dérivant par rapport à x_l . Il vient :

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial t} + \partial_i(v_i \omega_m + l_0^2 \partial_j \omega_m \partial_j v_i) + \varepsilon_{klm} (\partial_l v_i \partial_i v_k + l_0^2 \partial_{jl} v_i \partial_{ij} v_k) = 0 \quad (3.10)$$

Le produit $\varepsilon_{klm} \partial_l v_i \partial_i v_k$ est le terme d'étirement de vortex. En dimension deux, ce terme d'étirement de vortex s'annule car le tenseur $\partial_l v_i \partial_i v_k = (\partial_x v_y \partial_y v_x - \partial_x v_x \partial_y v_y) \delta_{kl}$ est symétrique. Le second terme s'annule aussi car $\partial_{jl} v_i \partial_{ij} v_k = ((\partial_{xx} v_x)^2 + (\partial_{yy} v_y)^2) \delta_{kl}$. L'équation de la vorticité se réduit ainsi à :

$$\frac{D^* \omega}{Dt} = 0 \quad (3.11)$$

La propriété fondamentale de transport de la vorticité est donc préservée par l'équation (3.9) bidimensionnelle.

4. Conservation des invariants quadratiques

Les équations (2.6), (3.9), (3.11) sont des équations d'advection–diffusion avec un tenseur de diffusivité $-l_0^2 \partial_j v_i$ variable en espace. Ce tenseur de diffusivité est inhabituel car sa partie symétrique n'est pas définie positive. En effet, en raison de l'incompressibilité, sa trace est nulle, ce qui implique des valeurs propres de signes opposés. Il est donc important de comprendre s'il peut avoir une action dissipative et quand.

4.1. Dissipation de la variance d'un traceur passif

En r  crivant l'équation d'advection, nous avons défini un opérateur d'advection modifié D^*/Dt ; il est invariant galiléen et conserve la moyenne de θ . Contrairement    D/Dt , ce n'est pas une dérivation. Un calcul immédiat donne son action sur un produit :

$$\frac{D^*}{Dt} ab = a \frac{D^* b}{Dt} + b \frac{D^* a}{Dt} + l_0^2 \partial_i a \partial_j b (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (4.12)$$

T. Dubos

Comme $D^*\theta/Dt = 0$:

$$\frac{D^*\theta^2}{Dt} = l_0^2 \partial_i \theta \partial_j \theta (\partial_i v_j + \partial_j v_i), \quad \text{d'où} \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \int \theta^2(x) d^n x = 2l_0^2 \int \partial_i \theta \partial_j \theta \partial_i v_j d^n x \quad (4.14)$$

L'intensité de la dissipation dépend donc de la norme du gradient de traceur, du taux local de déformation du fluide et de la géométrie locale de l'écoulement et du champ de traceur. En effet, on a localement une dissipation si le second membre est négatif, c'est-à-dire si l'angle entre le gradient de traceur et l'axe compressionnel du tenseur symétrique de déformation $\partial_i v_j + \partial_j v_i$ (direction propre dont la valeur propre est négative) est inférieur à 45 degrés. En turbulence bidimensionnelle, on sait [6,11] que cette condition d'alignement dépend de la géométrie de l'écoulement lui-même [12] : dans les régions dites *hyperboliques* (dominées par l'étirement), la compétition entre la rotation effective et la déformation conduit à un angle préférentiel entre le gradient de traceur et l'axe compressionnel de déformation, angle qui est inférieur à 45 degrés ; dans les régions dites *elliptiques* (dominées par la rotation), il n'y a pas d'angle d'équilibre et on peut s'attendre à un second membre de faible amplitude. La diffusivité que nous introduisons s'adapte ainsi aux caractéristiques locales de l'écoulement. Elle acquiert un caractère fortement dissipatif dans les régions de mélange intense, et ne dissipe pas dans les régions peu actives.

4.2. Énergie et enstrophie

L'équation d'Euler conserve l'énergie $E = \frac{1}{2} \int v^2(x) d^n x$ ainsi que, en deux dimensions, l'enstrophie $Z = \frac{1}{2} \int \omega^2(x) d^n x$. Pour l'énergie, on déduit de (4.12), (3.9) :

$$\frac{D^*}{Dt} v^2 + 2\partial_i(v_i \Pi) = 2l_0^2 \partial_i v_k \partial_j v_k \partial_j v_i \quad (4.15)$$

$$\frac{dE}{dt} = l_0^2 \int \partial_i v_k \partial_j v_k \partial_j v_i d^n x \quad (4.16)$$

où le second membre fait intervenir à nouveau le terme d'étirement de vortex. En dimension deux, $\partial_i v_k \partial_j v_k \partial_j v_i = (\partial_x v_y \partial_y v_x - \partial_x v_x \partial_y v_y) \partial_k v_k = 0$ et l'énergie totale est *conservée*. En revanche en dimension trois, le second membre ne s'annule pas et on peut s'attendre à ce qu'il soit négatif dans une situation de cascade directe d'énergie. Quant à l'enstrophie (en dimension 2), son équation de conservation est analogue à celle de la variance d'un traceur passif :

$$\frac{dZ}{dt} = l_0^2 \int \partial_i \omega \partial_j \omega \partial_j v_i d^n x$$

L'enstrophie sera dissipée dans les zones où le gradient de vortacité s'aligne préférentiellement avec l'axe compressionnel du tenseur de déformation [6,7] (régions hyperboliques), et conservée dans les zones où il n'y a pas d'alignement préférentiel (régions elliptiques). La *figure 1* montre le champ de vortacité d'une simulation numérique forcée à grande échelle et dissipée en utilisant la diffusion-déformation, ainsi que le champ de dissipation d'enstrophie correspondant. La dissipation, majoritairement positive (régions claires), prend aussi des valeurs négatives (régions sombres) en fonction des alignements entre le gradient de la vortacité et l'axe compressionnel du tenseur de déformation. Une dissipation laplacienne serait toujours positive et ne dépendrait que de la norme du gradient et non de son orientation.

5. Conclusion

En turbulence bidimensionnelle, plusieurs opérateurs ont été proposés pour modéliser l'effet des échelles non résolues sur les échelles résolues. Les opérateurs de viscosité turbulente [3,4] et d'hyperviscosité [5]

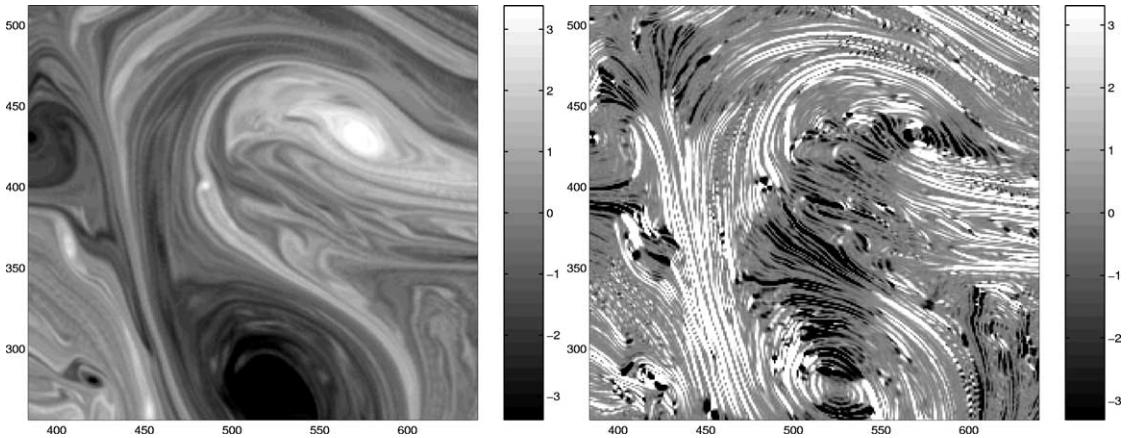


Figure 1. À gauche : détail du champ de vorticité d’une simulation numérique forcée à grande échelle et dissipée en utilisant la diffusion–déformation. L’entrophie est normalisée à 1. À droite : champ de dissipation d’entrophie $-l_0^2 \partial_i \omega \partial_j \omega \partial_i v_j$ correspondant. La dissipation moyenne est normalisée à 1.

Figure 1. Left: zoomed vorticity field in a numerical simulation forced at large scale and dissipated using the strain–diffusion operator. Enstrophy is set to 1. Right: corresponding enstrophy dissipation field $-l_0^2 \partial_i \omega \partial_j \omega \partial_i v_j$. The average dissipation is 1.

présentent l’inconvénient de dissiper l’énergie alors que la cascade d’énergie est en 2D dirigée vers les grandes échelles et non les petites. Quant à la méthode du tourbillon anticipé [5], elle a le défaut de ne pas être invariante galiléenne.

Nous avons introduit une fermeture de nature cinématique pour l’équation du transport et l’équation d’Euler incompressible, valable dans la limite d’un champ de vitesse régulier. Cette condition n’est sans doute pas remplie par les écoulements turbulents tridimensionnels, pour lesquels d’autres approches ont été développées depuis plusieurs années déjà [10], mais la situation est différente en dimension deux, où la cascade d’entrophie est caractérisée par un spectre d’énergie pentu et un champ de vitesse régulier [5]. De plus, les propriétés géométriques particulières de la dimension deux rendent l’opérateur que nous introduisons conservatif pour l’énergie. Inversement, il est dissipatif pour l’entrophie et la variance du traceur, ce qui est cohérent avec la cascade d’énergie vers les grandes échelles d’une part, et les cascades d’entrophie et de traceur vers les petites échelles d’autre part.

Enfin, la propriété la plus intéressante de cet opérateur de diffusion–déformation est peut-être sa capacité à sélectionner dans l’espace les zones où agit la dissipation. Cette sélectivité est un caractère original qui laisse penser que cet opérateur sera capable de bien représenter des écoulements non homogènes. Ceci est particulièrement important dans la mesure où les modèles quasi-bidimensionnels s’appliquent généralement à des écoulement géophysiques dont la turbulence est loin d’être homogène, isotrope et stationnaire. La vérification numérique concrète des ces qualités est un travail en cours.

¹ En fait, ces résultats se généralisent à toute fonction p dont la transformée de Fourier admet un développement limité $\hat{p}(k) = 1 - k^2 l_0^2 / 2 + o(k^2)$, ce qui est notamment le cas dès que $p \geq 0$, avec $l_0^2 = \int l^2 p(l) d^n \vec{l}$.

Remerciements. Je tiens à remercier A. Babiano, C. Basdevant et L. Hua pour leurs commentaires et leurs suggestions concernant ce travail.

Références bibliographiques

- [1] Kolmogorov A.N., Local structure of turbulence in noncompressible fluid with very high Reynolds number, Dokl. Acad. Sci. 30 (4) (1941).
- [2] Kraichnan R.H., Inertial ranges in two-dimensional turbulence, Phys. Fluids 10 (1967) 1417–1423.
- [3] Smagorinsky J., General circulation experiments with the primitive equations, Mon. Wea. Rev. 91 (1963) 99–164.
- [4] Leith E., Diffusion approximation for two-dimensional turbulence, Phys. Fluids 11 (1968) 671–673.
- [5] Basdevant C., Sadourny R., Modélisation des échelles virtuelles dans la simulation numérique des écoulements bidimensionnels, J. de Mécanique Th. et App., Numéro spécial (1983) 243–269.
- [6] Protas B., Babiano A., Kevlahan N.K.-R., On geometrical alignment properties of two-dimensional forced turbulence, Physica D 128 (1999) 169–179.
- [7] Lapeyre G., Hua B.L., Klein P., Dynamics of the orientation of gradients of passive and active scalars in two-dimensional turbulence, Phys. Fluids (2000), submitted.
- [8] Leonard A., Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows, Adv. in Geophys. A (18) (1974) 237–248.
- [9] Clark R.A., Ferziger J.H., Reynolds W.C., Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow, J. Fluid. Mech. 91 (1) (1979) 1–16.
- [10] Sagaut P., Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles, Springer, 1998.
- [11] Klein P., Hua B.L., Lapeyre G., Alignment of tracer gradients in two-dimensional turbulence using second order Lagrangian dynamics, Physica D (2000).
- [12] Weiss J., The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional turbulence, Physica D 48 (1991) 273–294.