CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Kansai University Repository

関西大学学術リポジトリ
Kansai University Institutional Repository

後進国経済開発計画と外資 : その理論的模型

その他のタイトル	Programming for Economic Development and Foreign Capital Transfer in Under-developed Countries : of its the theoretical model
著者	木村 滋
雑誌名	關西大學商學論集
巻	7
号	5
ページ	A472-A445
発行年	1962-12-30
URL	http://hdl.handle.net/10112/00021655

後進国経済開発計画と外資

——その理論的模型——

木　村　　滋

目　　次

ま　え　が　き

人口過剰，資本不足と低所得の悪循環，これらの事態にある後進諸国においては，国内貯蓄に比べて過大な経済開発投資を遂行して離陸的発展を図るためには，この計画投資と国内貯蓄のギャップを埋めるため借款・援助などの外資が不可欠であるということは論をまたないところである．

本稿では純粋に理論的な観点から後進国経済開発計画と外資の問題をとりあげる．(1)

まずⅠでは，S. A. ABBAS [1] が数値例でもって示した諸ケースを参考としながら，開発のための資本所要額，外資所要額の算定の問題を定式化する．この分析方法は巨視的で，各産業部門への投資配分率が何らかの plausible な方法で既にきめられているという前提のもとで模型が構成される．

ついでⅡでは，H. B. CHENERY AND H. UZAWA [2] の経済開発における非線型計画の論文に解説を加えながら，それをわれわれの問題とする与

えられた外資制約のもとでの資源の最適配置の問題に適用する．この分析方法は多部門的でかつ非線型計画理論の一応用問題である．

Ⅲでは，以上二種類のそれぞれ異なった視点，異なった分析方法のもとでの経済開発計画と外資の問題にかんする模型にたいし，仮設的な数値を与えて計算方法を考察し，説明を加える．(2)

注(1) 昭和37年2月のアジア経済研究所の委託調査研究に報告した小稿「東南アジア諸国の経済開発計画と外資所要額」においては，インド，フィリピン，タイ，ビルマ，パキスタンにかんして，これら諸国の経済開発計画において外資所要額がどのように見積られているか，また過去の実積と比較してどのようなことが観察されるか，という問題を具体的計測的にとりあげている。

(2) H. B. CHENERY AND K. S. KRETSCHMER [3], H.B. CHENERY AND P. G. CLARK [4] および H. B. CHENERY AND UZAWA [2] においては，南イタリアの投入産出表にもとずいて計算がなされている．東南アジア諸国にかんしては，われわれの理論的模型を実際例に適用しうるような，たとえば限界資本・労働比率とか産業連関表のごとき資料が不足している．

Ｉ．巨視的模型——外資所要額の算定

経済開発計画の目標 (target) をつぎの三つに区分する．

(i) 1人当り所得の増加．

(ii) 各産業部門への投資配分．

(iii) 雇用水準の増加．

ここでとりあげる問題をつぎの二つのケースとする．(3)

ケースA (ii) を所与とし，(iii) を自由変数として (i) を目標とする．

ケースB (ii) を所与とし，(i) を自由変数として (iii) を目標とする．

以下で使われる記号を説明する．

添字 t は第 t 期を，添字0は初期を示す．各期について不変なものについてはこのような期を示す添字はつけない．

Y_t 国民所得

N_t 人口

I_t　投資

S_t　貯著

N_{wt}　労働人口

N'_{wt}　農業部門労働人口

N''_{wt}　非農業部門労働人口

C_l　限界資本・労働比率

C_y　限界資本係数

$\Delta N_{wt}^{(1)}$　経常労働人口増加

$\gamma=\Delta N_{wt}^{(1)}/\Delta N_t$, γは定数

$\Delta N_{wt}^{(2)}$　農業部門から非農業部門へ移転した労働人口

α　人口増加率，定数

s　貯蓄率（$=S_t/Y_t$），定数

つぎのことに注意しなければならない．一国の産業部門をm個に分ち，各部門の限界資本係数をC_{yi}とし，各部門の限界資本・労働比率をC_{li}とし，各部門への投資配分率をδ_i（ただし$\delta_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{m}\delta_i=1$）とすれば，一国全体を平均した限界資本係数C_yと限界資本・労働比率C_lはそれぞれ，$C_y=\sum_{i=1}^{m}\delta_i C_{yi}$, $C_l=\sum_{i=1}^{m}\delta_i C_{li}$である．両者は投資の各部門への配分率が変化すれば当然変化する．C_yとC_lが計画の途中で変化するばあいはIIIの数値例で考察される．

ケースA　上述の三つの目標のうち，(ii) を所与とし，(iii)を自由変数として (i) を目標とするケースである．すなわち，各部門への投資配分率が何らかの plausible な方法で既に与えられておって，1人当りの所得を年々βという率で増加させるには投資は各期においてどれだけ必要とされるか．またその結果として外資所要額はいかほどであるのか，そしてまた，雇用量はどのような変化を受けるかという問題をとりあげる．

t期の人口N_tはN_0を初期の人口として，

(1.1)　$N_t=(1+\alpha)^t N_0$

t 期の人口増加 ΔN_t は

(1.2)　$\Delta N_t=N_t-N_{t-1}=\alpha(1+\alpha)^{t-1}N_0$

t 期の労働人口の増加 ΔN_{wt} は

(1.3)　$\Delta N_{wt}=\gamma\Delta N_t=\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0$

1人当りの所得を年々 β という率で増加させるに必要な国民所得の成長率を r とすれば，t 期の国民所得は

(1.4)　$Y_t=(1+r)^t Y_0$

t 期の1人当りの所得 Y_t/N_t は

(1.5)　$Y_t/N_t=\dfrac{(1+r)^t Y_0}{(1+\alpha)^t N_0}$

β と r は

(1.6)　$\beta=\left(\dfrac{Y_t}{N_t}-\dfrac{Y_{t-1}}{N_{t-1}}\right)\Big/\left(\dfrac{Y_{t-1}}{N_{t-1}}\right)=\dfrac{r-\alpha}{1+\alpha}$

(1.7)　$r=\alpha+\beta+\alpha\beta\fallingdotseq\alpha+\beta$

所得の増加 ΔY_t は

(1.8)　$\Delta Y_t=r(1+r)^{t-1}Y_0=(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{t-1}Y_0$

この ΔY_t を生産するのに必要な投資 I_t は

(1.9)　$I_t=C_y\Delta Y_t=C_y(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{t-1}Y_0$

I_t によって生みだされた雇用増加を ΔL_t とすれば，

(1.10)　$\Delta L_t=I_t/C_l=C_yC_l^{-1}(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{t-1}Y_0$

かくして失業の増加（負はその減少）は

(1.11)　$\Delta N_{wt}-\Delta L_t=\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0-C_yC_l^{-1}(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{t-1}Y_0$

t 期の国内貯蓄 S_t は

(1.12)　$S_t=sY_t=s(1+r)^t Y_0=s(1+\alpha+\beta)^t Y_0$

かくして t 期の外資所要額 I_t-S_t は

(1.13)　$I_t-S_t=(1+\alpha+\beta)^{t-1}\{(\alpha+\beta)(C_y-s)-s\}Y_0$

民間資本および贈与，借款，援助などの純資本流入が存在しておれば，

それを（1.13）の外資所要額から控除すれば，その残りが不足外資額となる．

ケースB　上述の三つの目標のうち，(ii) を所与とし，(i) を自由変数として(iii)を目標とするケースである．すなわち，各部門への投資配分率が何らかの plausible な方法で既に与えられておって，経常労働人口増加分と，農業部門における偽装失業者の年々一定数の非農業部門への移転分とを，追加的雇用として吸収するのに必要とされる投資額，したがってまた外資所要額が各期においてどれだけ必要とされるか．またその結果として１人当りの所得はどのような変化を受けるかという問題をとりあげる．

t 期の人口 N_t と人口増加 ΔN_t は

$$(1.14)\quad N_t=(1+\alpha)^t N_0$$

$$(1.15)\quad \Delta N_t=\alpha(1+\alpha)^{t-1}N_0$$

経常労働人口増加 $\Delta N_{wt}^{(1)}$ は

$$(1.16)\quad \Delta N_{wt}^{(1)}=\gamma\Delta N_t=\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0$$

経常労働人口増加 $\Delta N_{wt}^{(1)}$ と農業部門から非農業部門へ移転する労働人口 $\Delta N_{wt}^{(2)}$ の合計は

$$(1.17)\quad \Delta N_{wt}^{(1)}+\Delta N_{wt}^{(2)}=\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0+\Delta N_w^{(2)}$$

ここで $\Delta N_{wt}^{(2)}$ は t にかかわらず定数と仮定する．それゆえ添字 t は省いている．

われわれの目標は $\Delta N_{wt}^{(1)}+\Delta N_w^{(2)}$ だけの雇用量を高めるということであるから，この雇用量と投資 I_t によって作り出された雇用量 ΔL_t とを等しくするような投資額を求める．限界資本・労働比率　$C_l=I_t/\Delta L_t$ と $\Delta N_{wt}^{(1)}+\Delta N_w^{(2)}=\Delta L_t$ とより

$$(1.18)\quad I_t=C_l\{\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0+\Delta N_w^{(2)}\}$$

その結果としての所得の増加は

$$(1.19)\quad \Delta Y_t=I_t/C_y=C_lC_y^{-1}\{\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0+\Delta N_w^{(2)}\}$$

t 期の所得は

(1.20)　$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \Delta Y_i = Y_0 + C_l C_y^{-1}[\gamma N_0\{(1+\alpha)^t - 1\} + t\Delta N_w^{(2)}]$

1人当りの所得 Y_t/N_t は

(1.21)　$Y_t/N_t = \dfrac{Y_0 + C_l C_y^{-1}[\gamma N_0\{(1+\alpha)^t - 1\} + t\Delta N_w^{(2)}]}{(1+\alpha)^t N_0}$

貯蓄 S_t は

(1.22)　$S_t = sY_t = sY_0 + sC_l C_y^{-1}[\gamma N_0\{(1+\alpha)^t - 1\} + t\Delta N_w^{(2)}]$

外資所要額 $I_t - S_t$ は

(1.23)　$I_t - S_t = C_l\{\alpha\gamma(1+\alpha)^{t-1}N_0 + \Delta N_w^{(2)}\} - sY_0$
$- sC_l C_y^{-1}[\gamma N_0\{(1+\alpha)^t - 1\} + t\Delta N_w^{(2)}]$

見積られうる民間資本，贈与，借款，援助などの純資本流入をこの外資所要額から控除すればその残りが不足外資額である．

以上A，Bケースの数値例はⅢ．で与えられている．

注 (3) われわれが定式化したケースA，Bは S. A. ABBAS [1] の数値例ケースⅡ，Ⅲに対応するものである．

Ⅱ．多部門模型——資源の最適配置問題

ここではⅠとは視点を変えて，所与の外資のもとで以下に述べる計画問題の解である生産額，輸出入額，および外国為替と労働の shadow price を求めるという問題を， CHENERY AND UZAWA [2] のケースⅢおよびⅡに拠り，わたくしなりの理解のもとで解説を加えながら考察する．

m種の望まれたる財（最終需要）と l 種の基本的要素が存在している．ここでは l 種の基本的要素は資本，労働および外国為替の三種とする．ここで基本的要素とは，それ自体が最終的に需要されずかつ体系外から手に入れうるものをいう．外国為替は輸出することによって手に入れうる部分については中間財の性質をそなえているが，借入れによって手に入れうる

部分については体系外から入手しうる基本的要素である．それゆえわれわれは外国為替を基本的要素としてとりあつかうこととする．つぎに，結合生産はないものと仮定され，諸量は現行市場価格で測られている．以下に使われる記号は，

X_j　生産活動 j の水準（財 j の生産）

M_j　輸入活動 j の水準（財 j の輸入）

E_j　輸出活動 j の水準（財 j の輸出）

a_{ij}　財 j の1単位の生産のために使用された財 i の量，すなわち財投入係数

w_j　財 j の1単位の生産のために使用された労働量，すなわち労働投入係数

c_j　財 j の1単位の生産のために使用された資本量，すなわち資本投入係数

g_j　財 j の1単位の輸入に必要な外国為替表示費用，すなわち輸入品1単位の外国為替表示価格

h_j　財 j の1単位の輸出にたいする外国為替表示価格

Y_i　財 i の最終需要量

L　労働の供給量

D　貿易入超，すなわち外資流入額．これは外国為替表示である．

計画問題

以下（2.2）－（2.5）の制約のもとで，必要とされる総資本C

(2.1)　$C=\sum_j c_j X_j$

を最小にすること．

制約条件は

(2.2)　非負性　$X_j \geqq 0$, $M_j \geqq 0$, $E_j \geqq 0$, $j=1, \cdots, m$

(2.3)　最終産出　$X_i+M_i-E_i-\sum_j a_{ij}X_j-Y_i \geqq 0$, $i=1, \cdots, m$

(2.4)　外国為替バランス　$D+\sum_j h_j E_j-\sum_j g_j M_j \geqq 0$

(2.5)　労働供給　$L-\sum_j w_j X_j \geqq 0$

なお財投入係数はつぎの性質を有しているとする.

(2.6)　$a_{ij} \geqq 0,\ \sum_i a_{ij}<1,\ j=1,\ \cdots,\ m$

この (2.6) の条件は後で知られるように, 解の存在と一意性のために必要とされるものである.

各財貨の輸出量はその輸出品の外貨表示価格h_jの函数とみなし, つぎのリニヤー函数を仮定する.

(2.7)　$h_j=\gamma_j+\rho_j E_j \quad \gamma_j>0,\ \rho_j<0$

また, 輸入品の外国為替表示価格 g_j は不変とみなされる. なぜならば, その国の輸入需要は世界市場に比べてごく僅かな部分を占めるにすぎず, したがって輸入価格 g_j に影響しないと考えられるからである. 他方, 輸出にかんしては, たとえ世界市場価格はこの国から供給される輸出量に影響されないとしても, 輸出量の増加と共に増加すると予想される費用―従来よりもヨリ遠隔の市場へ送らねばならないための追加的費用とか, 追加的販売費用―は輸出量の増加と共に輸出からの純収益を減少させるので輸出品1単位にたいして得る外国為替量すなわち h_j は減少せざるをえないと考えるからである.

資本投入係数 c_j は財 j の生産量のリニヤー函数とみなされる.

(2.8)　$c_j=\alpha_j+\beta_j X_j \qquad \alpha_j,\ \beta_j \geqq 0$

また限界資本投入係数 c_j^* をつぎのように定義する.(4)

(2.9)　$c_j^*=\alpha_j+2\beta_j X_j \qquad \alpha_j,\ \beta_j \geqq 0$

われわれの計画問題に KUHN-TUCKER [5] の定理(5)が適用されうることを示そう. KUHN-TUCKER の定理3 (同値性定理) は, もしもわれわれが (2.1) 式の$\sum_j c_j X_j$ を最小にするという問題を, $-\sum_j c_j X_j$ を最大にするという問題としてみるならばつぎのことを要求している. $-\sum_j c_j X_j$ の

凹性，すなわち $\sum_j c_jX_j$ の凸性および制約 (2.2) にたいして (2.3)－(2.5) の不等式左辺の凹性.

まず $\sum_j c_jX_j$ の凸性をしらべる．このためには c_jX_j の凸性をみればよい．$X_j, X_j'\geqq0$ なる任意の X_j と X_j' をとり $1\geqq\theta\geqq0$ な θ にかんして $\alpha_j\{\theta X_j+(1-\theta)X_j'\}+\beta_j\{\theta X_j+(1-\theta)X_j'\}^2\leqq\theta(\alpha_jX_j+\beta_jX_j^2)+(1-\theta)(\alpha_jX_j'+\beta_jX_j'^2)$ が成立することをみればよい．計算の結果 $\beta_j(X_j-X_j')^2\geqq0$ となり，ここで $\beta_j\geqq0$ であるからこの式が矛盾しないことが証明され，c_jX_j は凸函数であり，それゆえ $\sum_j c_jX_j$ は凸函数である．

つぎに制約式(2.3)と(2.5)の左辺は一次式であるから，当然広義の凹函数である．(2.4)式左辺についてみると，$E_j, E_j'\geqq0$, $M_j, M_j'\geqq0$ なる任意の E_j, E_j', M_j, M_j' をとり，$D+\sum_j[\gamma_j\{\theta E_j+(1-\theta)E_j'\}+\rho_j\{\theta^2E_j^2+2\theta(1-\theta)E_jE_j'+(1-\theta)^2E_j'^2\}-g_j\{\theta M_j+(1-\theta)M_j'\}]\geqq D+\sum_j[\theta\{\gamma_jE_j+\rho_jE_j^2-g_jM_j\}+(1-\theta)\{\gamma_jE_j'+\rho_jE_j'^2-g_jM_j'\}]$ が成立することをみればよい．そのためにDを両辺から消去し，Σを省いて計算の結果 $(E_j-E_j)^2\geqq0$ となって明らかに矛盾しないから (2.4) 式左辺は凹函数である．

つぎに KUHN-TUCKER の制約集合にかんする制限がみたされているということをしらべなければならない．それは制約集合が凸集合であればみたされるから，制約式(2.2)－(2.5)をみたすベクトル $(X_j, M_j, E_j)=(X_1, \cdots, X_m, M_1, \cdots, M_m, E_1, \cdots, E_m)$ の集合が凸集合であることをみればよい．$(X_j^{(1)}, M_j^{(1)}, E_j^{(1)})$ と $(X_j^{(2)}, M_j^{(2)}, E_j^{(2)})$ をこの制約集合に属する任意のベクトルとしよう．この二点を端点とする線分がやはりこの制約集合に属することを証明すればよい．$\theta_1+\theta_2=1$, θ_1, $\theta_2\geqq0$ として，

制約式 (2.2) について．$\theta_1X_j^{(1)}+\theta_2X_j^{(2)}$ は $X_j^{(1)}\geqq0$, $X_j^{(2)}\geqq0$, θ_1, $\theta_2\geqq0$ より非負である．同様にして，$\theta_1M_j^{(1)}+\theta_2M_j^{(2)}\geqq0$, $\theta_1E_j^{(1)}+\theta_2E_j^{(2)}\geqq0$ がすぐにしたがう．

制約式 (2.3) について．$\theta_1 X_i^{(1)}+\theta_2 X_i^{(2)}+\theta_1 M_i^{(1)}+\theta_2 M_i^{(2)}-\theta_1 E_i^{(1)}-\theta_2 E_i^{(2)}-\sum_j a_{ij}(\theta_1 X_j^{(1)}+\theta_2 X_j^{(2)})-Y_i=\theta_1(X_i^{(1)}+M_i^{(1)}-E_i^{(1)}-\sum_j a_{ij}X_j^{(1)}-Y_i)+\theta_2(X_i^{(2)}+M_i^{(2)}-E_i^{(2)}-\sum_j a_{ij}X_j^{(2)}-Y_i)-\{Y_i-(\theta_1+\theta_2)Y_i\}$ この式は非負である．なぜならば，右辺第１項および第２項のかっこ内は非負であり θ_1，$\theta_2\geqq 0$，$\theta_1+\theta_2=1$ よりしたがう．

制約式 (2.4) について．$D+\sum_j[\gamma_j(\theta_1 E_j^{(1)}+\theta_2 E_j^{(2)})+\rho_j(\theta_1 E_j^{(1)}+\theta_2 E_j^{(2)})^2]-\sum_j g_j(\theta_1 M_j^{(1)}+\theta_2 M_j^{(2)})=\theta_1[D+\sum_j(\gamma_j+\rho_j E_j^{(1)})E_j^{(1)}-\sum_j g_j M_j^{(1)}]+\theta_2[D+\sum_j(\gamma_j+\rho_j E_j^{(2)})E_j^{(2)}]+D-(\theta_1+\theta_2)D-\theta_1(1-\theta_1)\sum_j\rho_j(E_j^{(1)})^2-\theta_2(1-\theta_2)\sum_j\rho_j(E_j^{(2)})^2+2\theta_1\theta_2\sum_j E_j^{(1)}E_j^{(2)}$，　この式は非負である．なぜならば右辺第１項と第２項の［　］内は非負であり，$\rho_j<0$，θ_1，$\theta_2\geqq 0$，$\theta_1+\theta_2=1$，$E_j^{(1)}$，$E_j^{(2)}\geqq 0$ より右辺第３項は０となり，第 4，5，6 項は非負となり，かくしてこの式全体は非負である．

制約式(2.5)について，$L-\sum_j w_j(\theta_1 X_j^{(1)}+\theta_2 X_j^{(2)})=\theta_1(L-\sum_j w_j X_j^{(1)})+\theta_2(L-\sum_j w_j X_j^{(2)})-(\theta_1+\theta_2)L+L$，右辺第 1，2 項のかっこ内は非負，$\theta_1$，$\theta_2\geqq 0$，$\theta_1+\theta_2=1$ よりこの式の非負性が知られる．

かくして制約式のすべてについて検討した結果，制約集合は凸集合であることが判明した．

以上最小にさるべき目的函数 $\sum_j c_j X_j$ の凸性，すなわち最大にさるべき目的函数 $-\sum_j c_j X_j$ の凹性，制約不等式左辺の凹性，および制約集合が凸集合であることを立証したので，KUHN-TUCKER の定理 3，定理 1，補助定理１を使うことができる．すなわち，われわれの最小問題を解くことはつぎの Lagrangian の鞍点を見出すことである．

$$(2.10)\quad \varphi(x,\ p)=-\sum_j c_j X_j+\sum_j P_j(X_j-\sum_i a_{ji}X_i+M_j-E_j-Y_j)+P_w(L-\sum_j w_j X_j)+P_f(D-\sum_j g_j M_j+\sum_j h_j E_j)$$

ここで $x=(X_j,\ M_j,\ E_j)=(X_1,\ \cdots,\ X_m,\ M_1,\ \cdots,\ M_m,\ E_1,\ \cdots,\ E_m)$，$p=(P_j,\ P_w,\ P_f)=(P_1,\ \cdots,\ P_m,\ P_w,\ P_f)$ である．

すなわち，活動水準のベクトル $\bar{x}=(\overline{\mathrm{X}}_j,\ \overline{\mathrm{M}}_j,\ \overline{\mathrm{E}}_j)$ は $(\bar{x},\ \bar{p})$ が $\varphi(x,\ p)$ の鞍点であるばあいにのみ，いいかえれば，あらゆる $x=(\mathrm{X}_j,\ \mathrm{M}_j,\ \mathrm{E}_j)\geqq 0$ と $p=(\mathrm{P}_j,\ \mathrm{P}_w,\ \mathrm{P}_f)\geqq 0$ にたいして

(2.11)　$\varphi(x,\ \bar{p})\leqq\varphi(\bar{x},\ \bar{p})\leqq\varphi(\bar{x},\ p)$

であるような価格のベクトル $\bar{p}=(\overline{\mathrm{P}}_j,\ \overline{\mathrm{P}}_w,\ \overline{\mathrm{P}}_f)$ が存在しているばあいにのみこの問題の最適解である．$\overline{\mathrm{P}}_j$，$\overline{\mathrm{P}}_w$，$\overline{\mathrm{P}}_f$ はそれぞれ財 $j=1,\ \cdots,m$，労働および外国為替の最適 shadow price とよばれ，財 j，労働，外国為替の機会費用に相当する．

$a_{ij}\geqq 0$，$\mathrm{Y}_j>0$ とする．それゆえ制約 (2.3) は任意の到達可能な $(\mathrm{X}_j,\ \mathrm{M}_j,\ \mathrm{E}_j)$ にかんして

(2.12)　$\mathrm{X}_j+\mathrm{M}_j>0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m$

以下われわれはつぎの二つのケースに分って問題を考察しよう．(6)

ケースA　Y_j，L，D，w_j，g_j が正の定数であり，$c_j=\alpha_j+\beta_j\mathrm{X}_j$，$c_j^*=\alpha_j+2\beta_j\mathrm{X}_j \quad \alpha_j,\ \beta_j\geqq 0$ とされる．

ケースB　L，D，w_j，g_j が正の定数であり，$c_j=\alpha_j+\beta_j\mathrm{X}_j$，$c_j^*=\alpha_j+2\beta_j\mathrm{X}_j \quad \alpha_j,\ \beta_j\geqq 0$ とされる．Y_j はケースAのように定数ではなく，帰属価格 (imputed price) $\mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_m,\ \mathrm{P}_w,\ \mathrm{P}_f$ の函数であるとする．

ケースA　(2.10) 式を整理して，

(2.13)
$$\varphi(x,\ p)=\mathrm{P}_w\mathrm{L}+\mathrm{P}_f\mathrm{D}-\sum_j\mathrm{P}_j\mathrm{Y}_j+\sum\{(\mathrm{P}_j-\sum_i\mathrm{P}_ia_{ij}-\mathrm{P}_ww_j-\alpha_j)\mathrm{X}_j-\beta_j\mathrm{X}_j^2\}+\sum_j(\mathrm{P}_j-\mathrm{P}_fg_j)\mathrm{M}_j+\sum_j\{(\mathrm{P}_f\gamma_j-\mathrm{P}_j)\mathrm{E}_j+\mathrm{P}_f\rho_j\mathrm{E}_j^2\}$$

KUHN-TUCKER の補助定理１の(1)，(2)を適用して，任意の与えられた P_w と P_f にかんして，

(2.14)
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{M}_j}=\mathrm{P}_j-\mathrm{P}_fg_j\geqq 0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

ただし等式は $\widehat{\mathrm{M}}_j>0$ のばあいに成立する．

(2.15)
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{X}_j}=\mathrm{P}_j-\sum_i\mathrm{P}_ia_{ij}-\mathrm{P}_ww_j-\alpha_j-2\beta_j\widehat{\mathrm{X}}_j\geqq 0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

ただし等式は $\hat{X}_j>0$ のばあいに成立する.

$$(2.16)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial E_j}=-P_j+P_f\gamma_j+2P_f\rho_j\hat{E}_j\geqq 0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

ただし等式は $\hat{E}_j>0$ のばあいに成立する.

$$(2.17)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial P_j}=-\hat{Y}_j+\hat{X}_j-\sum_i a_{ji}\hat{X}_j+\hat{M}_j-\hat{E}_j\leqq 0 \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

ただし等式は $P_j>0$ のばあいに成立する.

(2.12) の $X_j+M_j>0$ $j=1,\ \cdots,\ m$ より (2.14) と (2.15) はいずれかが必ず等式をもってみたされねばならないから

$$(2.18)\quad P_j=min\{P_fg_j,\ \sum_i P_ia_{ij}+P_ww_j+\alpha_j+2\beta_j\hat{X}_j\} \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

つぎに $\hat{X}_j$ については (2.15) より

$$(2.19)\quad \hat{X}_j=max\{0,\ \frac{1}{2\beta_j}(P_j-\sum_i P_ia_{ij}-P_ww_j-\alpha_j)\} \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

$\hat{E}_j$ については (2.16) より

$$(2.20)\quad \hat{E}_j=max\{0,\ \frac{1}{-2\rho_j}(\gamma_j-\frac{P_j}{P_f})\} \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

$\hat{M}_j$ については $j=1,\ \cdots,\ m$ にたいして

$$(2.21)\quad \begin{cases} P_j<P_fg_j & \text{ならば } \hat{M}_j=0 \\ P_j\geqq P_fg_j & \text{ならば } \hat{M}_j\geqq 0 \end{cases}$$

最適な $(X_j,\ M_j,\ E_j)$ においては (2.17) は等式でももってみたされねばならないから

$$(2.22)\quad \hat{X}_j+\hat{M}_j=Y_j+\hat{E}_j+\sum_i a_{ji}\hat{X}_i \qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

任意に与えられた P_w と P_f にたいして (2.18)－(2.22) の解 $(P_j,\ X_j,\ M_j,\ E_j)$ はつぎの反復法 (iteration) によって解くことができる. 非負の初期値 $P_1^{(0)},\ \cdots,\ P_m^{(0)}$ を仮定してつぎの recusive formula から…, $P_j^{(\nu)},\ X_j^{(\nu)},\ E_j^{(\nu)},\ M_j^{(\nu)},\ \cdots(j=m,\ \cdots,\ 1,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$ の順序で逐次解を求める.

$$(2.23)\quad P_j^{(\nu+1)}=min\{P_fg_j,\ \sum_{i>j}P_i^{(\nu+1)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j}P_j^{(\nu)}a_{ij}+P_ww_j+\alpha_j+ 2\beta_jX_j^{(\nu)}\}$$

$$(2.24)\quad X_j^{(\nu+1)}=max\{0,\ \frac{1}{2\beta_j}(P_j^{(\nu+1)}-\sum_{i>j}P_i^{(\nu+1)}a_{ij}-\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu)}a_{ij}-P_w w_j-\alpha_j)\}$$

$$(2.25)\quad E_j^{(\nu+1)}=max\{0,\ \frac{1}{-2\rho_j}(\gamma_j-\frac{P_j^{(\nu+1)}}{P_f})\}$$

$$(2.26)\quad M_j^{(\nu+1)}=\begin{cases}P_j^{(\nu+1)}<P_f g_i \text{ のばあい } 0\\ P_j^{(\nu+1)}=P_f g_j \text{ のばあい } max\ \{0,\ Y_j+E_j^{(\nu+1)}+\sum_{i>j}a_{ji}X_i^{(\nu+1)}+\sum_{i\leqq j}a_{ji}X_i^{(\nu)}-X_j^{(\nu+1)}\}\end{cases}$$

定理1. 『P_w と P_f が非負の値であり，$P_j^{(\nu)}$，$X_j^{(\nu)}$，$E_j^{(\nu)}$，$M_j^{(\nu)}$ が任意の初期値 $P_1^{(0)}$，$P_2^{(0)}$，…，$P_m^{(0)}$ をもつ (2.23)－(2.26) によって決定されるとすれば ($P_j^{(\nu)}$，$X_j^{(\nu)}$，$E_j^{(\nu)}$，$M_j^{(\nu)}$) は(2.18)－(2.22) の解(P_j，X_j，E_j，M_j) に収束する。』

この定理は**解の存在**を示している．

〔証明〕 まず最初に

$$(2.27)\quad |P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}|\leqq\sum_{i>j}|P_i^{(\nu+1)}-P_i^{(\nu)}|a_{ij}+\sum_{i\leqq j}|P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu-1)}|a_{ij}$$

が成立することを以下の四ケースについて考察する．

ケース1. $P_j^{(\nu+1)}<P_f g_j$，$P_j^{(\nu)}\geqq\sum_{i>j}P_i^{(\nu)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu-1)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j$

(2.23) と (2.24) とより

$$P_j^{(\nu+1)}=(\sum_{i>j}P_i^{(\nu+1)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j)+(P_j^{(\nu)}-\sum_{i>j}P_i^{(\nu)}a_{ij}-\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu-1)}a_{ij}-P_w w_j-\alpha_j)$$

$$\therefore\ |P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}|=|\sum_{i>j}(P_i^{(\nu+1)}-P_i^{(\nu)})a_{ij}+\sum_{i\leqq j}(P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu-1)})a_{ij}|$$
$$\leqq\sum_{i>j}|P_i^{(\nu+1)}-P_i^{(\nu)}|a_{ij}+\sum_{i\leqq j}|P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu-1)}|a_{ij}$$

ケース2. $P_j^{(\nu+1)}<P_f g_j$，$P_j^{(\nu)}<\sum_{i>j}P_i^{(\nu)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu-1)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j$

このケースでは (2.24) より $X_j^{(\nu)}=0$，また (2.23) より $P_j^{(\nu)}=P_f g_j$，したがって $P_j^{(\nu)}>P_j^{(\nu+1)}$，かくして

$$0\leqq P_j^{(\nu)}-P_j^{(\nu+1)}=P_f g_j-(\sum_{i>j}P_i^{(\nu+1)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j+2\beta_j X_j^{(\nu)})=P_f g_j-(\sum_{i>j}P_i^{(\nu+1)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j}P_i^{(\nu)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j)<(\sum_{i>j}P_i^{(\nu)}a_{ij}+$$

$\sum_{i\leqq j} P_i^{(\nu-1)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j)-(\sum_{i>j} P_i^{(\nu+1)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j} P_i^{(\nu)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j)=$
$\sum_{i>j}(P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu+1)})a_{ij}+\sum_{i\leqq j}(P_i^{(\nu-1)}-P_i^{(\nu)})a_{ij}$

$\therefore\ |P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}|<\sum_{i>j}|P_i^{(\nu+1)}-P_i^{(\nu)}|a_{ij}+\sum_{i\leqq j}|P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu-1)}|a_{ij}$

ケース3. $P_j^{(\nu+1)}=P_f g_j,\ P_j^{(\nu)}\geqq\sum_{i>j} P_i^{(\nu)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j} P_i^{(\nu-1)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j$
$0\leqq P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}\leqq(\sum_{i>j} P_i^{(\nu+1)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j} P_i^{(\nu)}a_{ij}+P_w w_j+P_w w_j+\alpha_j)-$
$(\sum_{i>j} P_i^{(\nu)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j} P_i^{(\nu-1)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j)=\sum_{i>j}(P_i^{(\nu+1)}a_{ij}-P_i^{(\nu)})a_{ij}+$
$\sum_{i\leqq j}(P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu-1)})a_{ij}$ かくして (2.27) が成立する.

ケース4. $P_j^{(\nu+1)}=P_f g_j,\ P_j^{(\nu)}<\sum_{i>j} P_i^{(\nu)}a_{ij}+\sum_{i\leqq j} P_i^{(\nu-1)}a_{ij}+P_w w_j+\alpha_j$
このばあい $P_j^{(\nu)}=P_f g_j=P_j^{(\nu+1)}$, (2.27) が成立すること自明である.

以上四ケースについて(2.27)が成立することをみてきた. このことはつぎのことを意味している.

(2.28) $|P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}|\leqq K\theta^\nu \quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ j=1,\ \cdots,\ m)$

ただしKはある正数で $\theta=\max_j\sum_i a_{ij}<1$ である. (2.28) の証明は帰納法によって行われる.

いま $\kappa=0,\ 1,\ \cdots,\ \nu-1;\ j=1,\ \cdots,\ m$ あるいは $\kappa=\nu;\ j=i+1,\ \cdots,\ m$ にたいして $P_j^{(\kappa+1)}-P_j^{(\kappa)}\leqq K\theta^\kappa$ が成立すると仮定する. そうすれば, (2.27)より

$|P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}|\leqq\sum_{i>j}|P_i^{(\nu+1)}-P_i^{(\nu)}|a_{ij}+\sum_{i\leqq j}|P_i^{(\nu)}-P_i^{(\nu-1)}|a_{ij}$
$\leqq K\theta^\nu\sum_{i>j}a_{ij}+K\theta^{\nu-1}\sum_{i\leqq j}a_{ij}\leqq K\theta^{\nu-1}\sum_i a_{ij}\leqq K\theta^{\nu-1}\max_j\sum_i a_{ij}=K\theta^{\nu-1}\theta=$
$K\theta^\nu$

(2.28) 式は (2.6) の $\sum_i a_{ij}<1$, したがって $\theta=\max_j\sum_i a_{ij}<1$ なることより, $\nu\to\infty$ ならば $|P_j^{(\nu+1)}-P_j^{(\nu)}|\to 0$, すなわち $(P_1^{(\nu)},\ \cdots,\ P_m^{(\nu)})$ はたとえば $(P_1,\ \cdots,\ P_m)$ に収束する. (2.24), (2.25), (2.26) によって, $X_j^{(\nu)}$, $E_j^{(\nu)}$, $M_j^{(\nu)}$ はそれぞれたとえば X_j, E_j, M_j へ収束する. $(P_j,\ X_j,\ M_j,\ E_j)$ は条件(2.18)-(2.22)を満足する. *q.e.d.*

この定理1は解の存在を証明しているが, **解の一意性**についてわたくし

のやり方で証明してみる．

共に(2.18)をみたす二つの異なった解 $(P_1, \cdots, P_m)$ と $(P_1', \cdots, P_m')$ が存在すると仮定し，帰謬法によって証明すれば，

$$P_j = min\{P_f g_j,\ \sum_i P_i a_{ij} + P_w w_j + \alpha_j + 2\beta_j \hat{X}_j\} = min\{A,\ B\}$$

$$P_j' = min\{P_f g_j,\ \sum_i P_i' a_{ij} + P_w w_j + \alpha_j + 2\beta_j \hat{X}_j\} = min\{A,\ C\}$$

と表わして，

$P_j = A$, $P'_j = A$ のばあい，$A<B$, $A<C$ より $|A-A| \leqq |B-C|$

$P_j = A$, $P_j' = C$ のばあい，$A<B$, $A>C$ より $|A-C| < |B-C|$.

$P_j = B$, $P_j' = A$ のばあい，$A>B$, $A<C$ より $|B-A| < |B-C|$.

$P_j = B$, $P_j' = C$ のばあい，$A>B$, $A>C$ より $|B-C| = |B-C|$.

$A=B$, $A=C$ のばあいをも考慮すれば一般的に表わして，

$$|P_j - P_j'| \leqq |(\sum_i P_i a_{ij} + P_w w_j + \alpha_j + 2\beta_j \hat{X}_j) - (\sum_i P_i' a_{ij} + P_w w_j + \alpha_j + 2\beta_j \hat{X}_j)| = |\sum_i (P_i - P_i') a_{ij}| \leqq \sum_i |P_i - P_i'| a_{ij}$$

ここでわれわれは $\max_i |P_i - P_i'| > 0$ を仮定しているから，$\theta = \max_j \sum_i a_{ij}$，そして $\theta < 1$ であることより，

$$|P_j - P_j'| \leqq \sum_i |P_i - P_i'| a_{ij} < \max_i |P_i - P_i'| \sum_i a_{ij}$$
$$< \max_i |P_i - P_i'| \max_j \sum_i a_{ij} = \max_i |P_i - P_i'| \theta < \max_i |P_i - P_i'| \quad j = 1, \cdots, m$$

そしてこれは矛盾である．かくして解は一意であり，したがって条件(2.18)－(2.22) をみたす解 $(P_j,\ X_j,\ M_j,\ E_j)$ は一意的に決定される．

定理2. 『$P_1, \cdots, P_m$ が (2.18)－2.22) によって決定されるとするならば，非負の $\overline{P_w}$, $\overline{P_f}$ はつぎのばあいにのみ最適 shadow price $\overline{P_1}, \cdots, \overline{P_m}$, $\overline{P_w}$, $\overline{P_f}$ を決定する．

(2.29) $\quad L(\overline{P_w},\ \overline{P_f}) \leqq L$

(2.30) $\quad D(\overline{P_w},\ \overline{P_f}) \leqq D$

(2.31) $\quad P_w(L - L(\overline{P_w},\ \overline{P_f})) + P_f(D - D(\overline{P_w},\ \overline{P_f})) = 0$

ただし，$L(P_w,\ P_f) = \sum_j w_j X_j$, $D(P_w,\ P_f) = \sum_j g_j M_j - \sum_j h_j E_j$ と定義さ

れている。』

〔証明〕 KUHN-TUCKER の補助定理１の(2)より

(2.32) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}_w}=\mathrm{L}-\mathrm{L}(\overline{\mathrm{P}_w},\ \overline{\mathrm{P}_f})\leqq 0,$

(2.33) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}_f}=\mathrm{D}-\mathrm{D}(\overline{\mathrm{P}_w},\ \overline{\mathrm{P}_f})\leqq 0,$

(2.32) と (2.33) とより

$\overline{\mathrm{P}_w}[\mathrm{L}-\mathrm{L}(\overline{\mathrm{P}_w},\ \overline{\mathrm{P}_f})]+\overline{\mathrm{P}_f}[\mathrm{D}-\mathrm{D}(\overline{\mathrm{P}_w},\ \overline{\mathrm{P}_f})]=0$

さて，$(\overline{\mathrm{P}_w},\ \overline{\mathrm{P}_f})$ は (2.29)－(2.31) をみたし，$\overline{\mathrm{P}_j}$, $\overline{\mathrm{X}_j}$, $\overline{\mathrm{M}_j}$, $\overline{\mathrm{E}_j}$ は $(\overline{\mathrm{P}_w},\ \overline{\mathrm{P}_f})$ に対応するものとしよう．(2.29) と (2.30) は $(\overline{\mathrm{X}_j},\ \overline{\mathrm{M}_j},\ \overline{\mathrm{E}_j})$ が到達可能な活動水準ベクトルであることを意味している．いま任意の到達可能なベクトル $(\mathrm{X}_j,\ \mathrm{M}_j,\ \mathrm{E}_j)$ にたいして

(2.34) $-\sum_j c_j\mathrm{X}_j\leqq\varphi(x,\ \bar{p})\leqq\varphi(\bar{x},\ \bar{p})$

が成立する．なぜならば，$\bar{x}$ は $x\geqq 0$ の条件のもとで $\varphi(x,\ \bar{p})$ を最大にするからである．他方，(2.31) は (2.22) と一緒にして

(2.35) $\varphi(\bar{x},\ \bar{p})=-\sum_j c_j\overline{\mathrm{X}_j}$

を意味している．

(2.34) と (2.35) とより任意の到達可能な x にかんして

(2.36) $-\sum_j c_j\mathrm{X}_j\leqq-\sum_j c_j\overline{\mathrm{X}_j}\qquad\therefore\quad\sum_j c_j\mathrm{X}_j\geqq\sum_j c_j\overline{\mathrm{X}_j}\qquad q.e.d.$

なお $\overline{\mathrm{P}_w}$ と $\overline{\mathrm{P}_f}$ は勾配法 (Gradient method) によって求めることもできるが，われわれは適当な補間法 (interpolation) によって接近するであろう．

ケースB このケースの模型は一般均衡模型であり，解は均衡帰属価格 P_j, P_w, P_f と最適活動水準 X_j, M_j, E_j によって与えられる．均衡条件はケースAの (2.18)－(2.22) および (2.29)－(2.31) を考慮して

(2.37) $\mathrm{P}_j,\ \mathrm{P}_w,\ \mathrm{P}_f,\ \mathrm{X}_j,\ \mathrm{M}_j,\ \mathrm{E}_j\geqq 0\qquad j=1,\ \cdots,\ m$

(2.38) $\mathrm{P}_j=min\{\mathrm{P}_f g_j,\ \sum_i \mathrm{P}_i a_{ij}+\mathrm{P}_w w_j+\alpha_j+2\beta_j\mathrm{X}_j\}\qquad j=1,\ \cdots,\ m$

(2.39) $\mathrm{X}_j=max\{0,\ \dfrac{1}{2\beta_j}(\mathrm{P}_j-\sum_i \mathrm{P}_i a_{ij}-\mathrm{P}_w w_j-\alpha_j)\}\qquad j=1,\ \cdots,\ m$

$$(2.40)\quad E_j=max\{0,\ \frac{1}{-2\rho_j}(\gamma_j-\frac{P_j}{P_f})\}\qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

$$(2.41)\quad M_j\begin{cases}P_j<P_fg_j\ \text{ならば}\ M_j=0\\ P_j\geqq P_fg_j\ \text{ならば}\ M_j\geqq 0\end{cases}\qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

$$(2.42)\quad X_j+M_j-E_j-\sum_i a_{ji}X_i=Y_j(P_1,\cdots,P_m,P_w,P_f)\qquad j=1,\ \cdots,\ m$$

$$(2.43)\quad \sum_j w_jX_j\leqq L$$

$$(2.44)\quad \sum_j g_jM_j-\sum_j h_jE_j\leqq D$$

$$(2.45)\quad P_w[L-L(P_w,\ P_f)]+P_f[D-D(P_w,\ P_f)]=0$$

任意の非負値 P_w, P_f にたいして, P_1, …, P_m は (2.38) にかんする解として一意的に決定される. それを求めるには recursive formula (2.23) を用いる. ついで他の量的解 X_j, M_j, E_j は (2.19)－(2.22) によって決定される.

以上 I, II においてわれわれは理論的考察をおわった. 以下においては, 具体的 (仮設的) な数値をあげて計算方法やその計算結果を考察しよう.

注(4) 総資本量を K_j とすれば, $K_j=\alpha_jX_j+\beta_jX_j^2$ という二次函数を仮定すれば, 資本投入係数は $c_j=K_j/X_j=\alpha_j+\beta_jX_j$, また限界資本投入係数は $c_j^*=dK_j/dX_j=\alpha_j+2\beta_jX_j$ となる.

(5) 拙稿『要素価格均等化理論—サミュエルソンから非線型計画理論へ—』関西大学商学論集第七巻第四号参照. 証明を省略して KUHN-TUCKER [5] の定理を述べる.

1. 鞍値問題 $\phi(x,\ u)$ を成分 $x_j\geqq 0$ をもつ n 次元ベクトル x と成分 $u_h\geqq 0$ をもつ m 次元ベクトル u の微分可能函数であるとしよう. 定点 x° と u° でのこの函数の偏微係数を $\phi^\circ_x=[\partial\phi/\partial x_i]^\circ$, $\phi_u{}^\circ=[\partial\phi/\partial u_h]^\circ$ とする. ここで ϕ°_x は n 次元ベクトルで ϕ°_u は m 次元ベクトルである. また $(x^\circ,\ u^\circ)$ はもしも $x^\circ\geqq 0$, $u^\circ\geqq 0$ ですべての $x\geqq 0$, $u\geqq 0$ にたいして $\phi(x,\ u^\circ)\leqq\phi(x^\circ,\ u^\circ)\leqq\phi(x^\circ,\ u)$ すなわち $\phi(x^\circ,\ u^\circ)=\min_{u\geqq 0}\max_{x\geqq 0}\phi(x,\ u)=\max_{x\geqq 0}\min_{u\geqq 0}(x,\ u)$ であるならば $x\geqq 0$, $u\geqq 0$ における $\phi(x,\ u)$ の鞍点とよばれる. かくして鞍値問題とは『すべての $x\geqq 0$, $u\geqq 0$ にかんして, $\phi(x,\ u^\circ)\leqq\phi(x^\circ,\ u^\circ)\leqq\phi(x^\circ,\ u)$ となるような非負のベクトル x° と u° を見出すこと』である.

補助定理1.

『(1) $\phi_x{}^\circ\leqq 0$, $\phi^\circ_x{}'x^\circ=0$, $x^\circ\geqq 0$

(2) $\phi_u^\circ \geqq 0$, $\phi^\circ{}_u{}' x^\circ = 0$, $u^\circ \geqq 0$

なる条件は x° と u° が鞍値問題の解となるなめの必要条件である.』

補助定理2.

『条件(1), (2)および, すべての $x \geqq 0$, $u \geqq 0$ にかんして

(3) $\phi(x,\ u^\circ) \leqq \phi(x^\circ,\ u^\circ) + \phi^\circ{}_x{}'(x - x^\circ)$

(4) $\phi(x^\circ,\ u) \geqq \phi(x^\circ,\ u^\circ) + \phi_u^{\circ\prime}(u - u^\circ)$

は x° と u° が鞍値問題の解となるための十分条件である.』

2. 不等式制約条件付最大問題. $x \to u = \mathrm{F}x$ を非負 n 次元ベクトル x の m 次元ベクトル u への微分可能な写像とする. すなわち $\mathrm{F}x$ は成分 $f_1(x)$, $\cdots f_m(x)$ が $x \geqq 0$ にたいして定義された x の微分可能な函数であるところの m 次元ベクトルである. $g(x)$ を $x \geqq 0$ にたいして定義された x の微分可能な函数であるとしよう. x° における偏微係数を $\mathrm{F}^\circ = [\partial f_h / \partial x_i]^\circ$, $g^\circ = [\partial g / \partial x_i]^\circ$ としよう. ここで F° は $m \times n$ 行列, g° は n 次元ベクトルである.

最大問題『$\mathrm{F}x \geqq 0$, $x \geqq 0$ によって制約された $g(x)$ を最大ならしめる x° を見出すこと』

制約集合にかんする制限. x° が $\mathrm{F}x \geqq 0$, $x \geqq 0$ を満足している点 x の制約集合の境界に属しているとしよう. 不等式 $\mathrm{F}x^\circ \geqq 0$, $\mathrm{I}x^\circ \geqq 0$（I は n 次の恒等行列）が $\mathrm{F}_1 x^\circ = 0$, $\mathrm{I}_1 x^\circ = 0$ と $\mathrm{F}_2 x^\circ > 0$, $\mathrm{I}_2 x^\circ > 0$ に分離されているとしよう. 制約集合の境界の各 x° にたいして一次同次不等式

(5) $\mathrm{F}_1^\circ dx \geqq 0$, $\mathrm{I}_1 dx \geqq 0$

を満足する任意のベクトル微分 dx は制約集合に含まれる弧にたいする接線であることが仮定されるであろう. すなわち(5)を満足する任意の dx にたいして $x^\circ = a(0)$ および $[da/d\theta]^\circ = \lambda dx$ となるようなある正のスカラー λ をもつ制約集合に含まれた微分可能な弧 $x = a(\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$ が対応する. この仮定は外部に向く尖点 (cusp) のような制約集合の境界上の特異点を除外するよう企図されている. たとえば　$(1 - x_1)^3 - x_2 \geqq 0$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$
によって決定された二次元における制約集合は境界点 $x_1^\circ = 1$, $x_2^\circ = 0$ では上述の制限を満足しない. けだしそれはこの点から導かれる $dx_1 = 1$, $dx_2 = 0$ の方向への弧を含まないからである. そのような特異点では定理1における条件(1)はいかなる u° にたいしても妥当しない. たとえば $g(x) \equiv x_1$ のばあいがそうである.

さて, ベクトル u を m 個の非負ラグランジ乗数からなる集合としてあつかい, 函数 $\phi(x,\ u) \equiv g(x) + u'\mathrm{F}x$ をつくると, $\phi_x^\circ = g^\circ + \mathrm{F}^{\circ\prime} u^\circ$, $\phi_u^\circ = \mathrm{F}x^\circ$ である.

定理1　『x° が最大問題の解であるためには x° とある u° が $\phi(x,\ u) \equiv g(x) + u'\mathrm{F}x$ にたいして条件(1)と(2)を満足させることが必要条件である.』

定理2　『x° が最大問題の解であるためには, x° とある u° が $\phi(x,\ u) \equiv g(x)$

$+u'\mathrm{F}x$ にたいして条件(1)，(2)および(3)を満足することが十分条件である．』

3．凸函数，凹函数，同値性定理。

定義『函数 $f(x)$ はもし $0\leqq\theta\leqq1$ および $f(x)$ の（凸）定義域におけるすべての x° と x にたいして $(1-\theta)f(x^\circ)+\theta f(x)\geqq f\{(1-\theta)x^\circ+\theta x\}$ であるならば凸である．函数 $f(x)$は$-f(x)$ が凸ならば凹である．』

補助定理 3．『$f(x)$ が凸でかつ微分可能ならば定義域におけるすべての x° と x にたいして $f(x)\geqq f(x^\circ)+f^{\circ\prime}(x-x^\circ)$ である．$f(x)$ が凹であるならば不等号の向きは逆である．』

定理 3．（同値性定理）『函数 $f_1(x)$，…，$f_m(x)$，$g(x)$ は $x\geqq0$ にたいして微分可能でかつ凹であるとすると，x°は x° とある u° が $\phi(x,\ u)\equiv g(x)+u'\mathrm{F}x$ にたいして鞍値問題の解を与えるばあいにのみ最大問題の解である．』

(6) CHNERY AND UZAWA [2] はつぎの三ケースに分けている．

ケースⅠ．Y_j，L，D，w_j，g_j が正の定数で c_j は非負の定数である．

ケースⅡ．L，D，w_j，g_j が正の定数で c_jは非負の定数であるが Y_j は帰属価格 P_1，…，P_m，P_w，P_f の函数である。

ケースⅢ．Y_j，L，D，w_j，g_j が正の定数で c_j と c_j^* は，$c_j=\alpha_j+\beta_j\mathrm{X}_j$，$c_j^*=\alpha_j+2\beta_j\mathrm{X}_j$ $(\alpha_j,\ \beta_j\geqq0)$．本稿でとりあげているのはつぎのケースである．

ケースAでは CHENERY AND UZAWA のケースⅢの紹介とわたくし自身の解説をつけ加えた．

ケースBでは CHENERY AND UZAWA のケースⅡとⅢの折衷を試みた．

Ⅲ．数値例による説明

（Ⅰ） 巨視的模型—外資所要額の算定

初期値．$\mathrm{N}_0=500$万人，$\mathrm{Y}_0=25{,}000$百万ドル，$\mathrm{Y}_0/\mathrm{N}_0=50$ドル．

係数値．$\alpha=0.014$，$\gamma=0.4$，$s=0.08$，$\beta=0.02$，第1次5カ年について $\mathrm{C}_y=6.87$，$\mathrm{C}_l=2{,}700$，第2次5カ年について $\mathrm{C}_y=5.15$，$\mathrm{C}_l=1{,}500$，

C_y，C_l を第1次5カ年と第2次5カ年とで異なった値を用いているが，その理由は，計画当初では電力，運輸通信などの建設基礎産業および生活資料の獲保のための農業への投資配分率が他の部門に比して高くされ，ついである程度これら産業が伸展した後では，その国が比較優位をもち，したがって国際収支改善に役立つ産業とか，限界資本・労働比率が比較的低

く，したがって雇用増加に役立つ産業など(例えば織物，織物以外の産業)への投資配分率が他の部門に比して高くされると考えるからである．資本係数 C_y についてみれば，

	運輸通信	農業	電力	織物以外の産業	織物
第１次５カ年の投資配分率(%)	30	30	15	20	5
第２次５カ年の投資配分率(%)	20	20	10	40	10
資本係数	10	4	15	2	0.5

この表より全産業を投資配分率で加重平均した資本係数は第１次５カ年計画については6.87，第２次５カ年については5.15となる．以上の初期値と係数値とより計算すればつぎの第１表と第２表の結果を得る．ただし，第２表では，$\Delta N_w^{(2)}=2$ 百万人と仮定している．

ケースA

第１表　ケースⅠ.Aの計算値

	単位	初期値	年 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人　口　N	百万人	500	507	514	521	528	535	543	551	559	567	575
人口増加　$\triangle N$	〃		7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
労働人口増加 $\triangle N_\omega$	〃		2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2
１人当り所得　Y/N	ドル	50	51	52	53	54	55	56	57	59	60	61
国民所得　Y	百万ドル	25,000	25,857	26,728	27,613	28,512	29,425	30,408	31,407	32,981	34,020	35,075
国民所得増加　$\triangle Y$	〃		857	871	885	899	913	983	999	1,574	1,039	1,055
必要投資　I	〃		5,888	5,984	6,080	6,176	6,272	5,063	5,145	8,106	5,351	5,433
貯　蓄　S	〃		2,069	2,138	2,209	2,281	2,354	2,433	2,513	2,638	2,722	2,806
必要外資　I-S	〃		3,819	3,846	3,871	3,895	3,918	2,630	2,632	5,468	2,629	2,627
雇用増加　$\triangle L$	百万人		2.18	2.22	2.25	2.29	2.32	3.38	3.43	5.40	3.57	3.62
失業増加 $\triangle N_\omega - \triangle L$	〃		0.62	0.58	0.55	0.51	0.48	−0.18	−0.23	−2.2	−0.37	−0.42

ケースB

第2表　ケースI.Bの計算値

	単位	初期値	年 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人口 N	百万人	500	507	514	521	528	535	543	551	559	567	575
人口増加 △N	〃		7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
経常労働人口増加 $\triangle Nw^{(1)}$	〃		2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2
農業より移転労働人口 $\triangle Nw^{(2)}$	〃		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\triangle Nw^{(1)}+\triangle Nw^{(2)}$	〃		4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2
1人当り所得 Y/N	ドル	50	53	56	59	62	64	66	68	70	71	73
国民所得 Y	百万ドル	25,000	26,886	28,772	30,658	32,544	34,430	35,945	37,460	38,975	40,490	42,005
国民所得増加 △Y	〃		1,886	1,886	1,886	1,886	1,886	1,515	1,515	1,515	1,515	1,515
必要投資 I	〃		12,960	12,960	12,960	12,960	12,960	7,800	7,800	7,800	7,800	7,800
貯蓄 S	〃		2,150	2,302	2,453	2,604	2,754	2,876	2,997	3,118	3,239	3,360
必要外資 I-S	〃		10,809	10,658	10,507	10,356	10,206	4,924	4,903	4,682	4,561	4,440

（II）　多部門模型―最適資源配置問題

部門を1. 完成財，2. 食物及び農業，3. 基礎原料，4. サービスに分つ. これらは例えば完成財部門は衣服，織物，建設，機械，その他の工業より集計され，食物及び農業部門は食物，農業より集計され，基礎原料部門は冶金，運輸，石油，化学，鉱山，電力より集計され，サービス部門はサービスよりとられる. IIIでは輸出財生産活動を生産活動に含めて考えられたが，ここでは生産活動を国内向生産活動と輸出財生産活動に分けて考える. これは両者は同一部門に属しているものについて，財投入係数 a_{ij} と労働投入係数 w_j は同じであるが，資本投入係数を異にするとみなすためである. なおサービス部門の輸出入はないものとし，技術マトリックスは三角マトリックスを想定する. 体系は記号でもって第3表で表わされている. 未説明の記号のみあげれば，c'_j は輸出財 j の資本投入係数で，c_j は国内向財の資本投入係数で，X_j は輸出財生産を含んでいない国内向生産活動水準を示している.

第　3　表

		国内向生産活動				輸出向生産活動				輸入活動				輸出活動				制約ベクトル
	活動水準	X_1	X_2	X_3	X_4	E_1	E_2	E_3	E_4	M_1	M_2	M_3	M_4	E_1	E_2	E_3	E_4	
最終産出	1，完成財	1				1				1				1				Y_1
	2，食物及び農業	$-a_{21}$	1			$-a_{21}$	1				1				1			Y_2
	3，基礎原料	$-a_{31}$	$-a_{32}$	1		$-a_{31}$	$-a_{32}$	1				1				1		Y_3
	4，サービス	$-a_{41}$	$-a_{42}$	$-a_{43}$	1	$-a_{41}$	$-a_{42}$	$-a_{43}$										Y_4
外国為替		0	0	0	0	0	0	0		$-g_1$	$-g_2$	$-g_3$		h_1	h_2	h_3		$-D$
労働		$-w_1$	$-w_2$	$-w_3$	$-w_4$	$-w_1$	$-w_2$	$-w_3$		0	0	0		0	0	0		$-L$
資本		c_1	c_2	c_3	c_4	c'_1	c'_2	c'_3		0	0	0		0	0	0		minimum

$a_{21}=0.1$, $a_{31}=0.2$, $a_{32}=0.1$, $a_{41}=0.2$, $a_{42}=0.3$, $a_{43}=0.1$, $g_1=1.0$, $g_2=1.1$, $g_3=1.0$, $h_1=\gamma_1+\rho_1E_1=1-0.005E_1$, $h_2=\gamma_2+\rho_2E_2=1.1-0.001E_2$, $h_3=\gamma_3+\rho_3E_3=1.0-0.01E_3$, $w_1=1.5$, $w_2=0.1$, $w_3=0.6$, $w_4=3.0$, $c_1=\alpha_1+\beta_1X_1=1.0+0.002X_1$, $c_2=\alpha_2+\beta_2X_2=1.1+0.001X_2$, $c_3=\alpha_3+\beta_3X_3=2.0+0.004X_3$, $c_4=\alpha_4+\beta_4X_4=0.4+0.0005X_4$, $c_1'=1.40$, $c_2'=1.60$, $c_3'=2.70$, $c_4'=0.60$, $Y_1=250$, $Y_2=350$, $Y_3=100$, $Y_4=300$, $L=2,200$, $D=0$, $c_1^*=1.0+0.004X_1$, $c_2^*=1.1+0.002X_2$, $c_3^*=2.0+0.008X_3$, $c_4^*=0.4+0.001X_4$. ここで c_j^* は国内向財の限界資本投入係数である．

ケースA　まず労働と外国為替の shadow price を仮定する．外国為替の各 shadow price に対応している最適解においては，各財について三つの可能性が存在している．すなわち，輸入のみ，輸入と国内生産，生産のみ．それらを区別するために，何らかの輸入の存在している部門をMセクターとよび，国内生産のみの部門をDセクターとよぶ．

反復a　第1，2，3部門をMセクター，第4部門をDセクターと仮定してはじめることとする．初期の外国為替 shadow price $P_f=2.0$，労

働の shadow price $P_w=0$ と仮定する．

1． 価格解を求める．Mセクターは

(3.1)　$P_j=g_jP_f$

Dセクターは

(3.2)　$P_j=c_j^*+\sum_j a_{ij}P_i+w_jP_w$

によって決定される．初期値 $X_4^0=400$ と仮定して，$P_1=1.0\times2.0=2.0$, $P_2=1.1\times2.0=2.2$, $P_3=1.0\times2.0=2.0$, $P_4=0.4+0.001X^\circ_4=0.4+0.001\times400=0.8$

2． 輸出量を求める．輸出向生産と国内向生産とは異なった活動とみなされているから，輸出水準は (3.3) 式より決定される．ここでは輸出された財の shadow price の代りに限界生産費 $\overline{P_j}$ が使われている．

(3.3)　$E_j=\dfrac{\gamma_jP_f-\overline{P}_j}{-2\rho_jP_f}$, $\overline{P_j}=c_j^{*\prime}+\sum_i a_{ij}P_i+w_jP_w$

ここで $c_j^{*\prime}$ は輸出セクターの j 部門の限界資本投入係数であるが， 定数と仮定されているからその資本投入係数 c_j' に等しい．

$\overline{P_1}=1.4+0.1\times2.2+0.2\times2.0+0.2\times0.8=2.18$, $\overline{P_2}=1.6+0.1\times2.0+0.3\times0.8=2.04$, $\overline{P_3}=2.70+0.1\times0.8=2.78$, $\overline{P_4}=0.6$, $E_1=-9$

$\therefore$ $E_1=0$, $E_2=40$, $E_3=-19.5$　$\therefore$ $E_3=0$, E_4 は仮定により 0.

3． Mセクターの国内向生産水準を求める．これは限界生産費と輸入費用を均等ならしめるような国内向生産水準を見出すことであるから，

(3.1)，(3.2) および $c_j^*=\alpha_j+2\beta_jX_j$ より，

(3.4)　$X_j=\dfrac{g_jP_f-(\sum_i a_{ij}P_i+w_jP_w)-\alpha_j}{2\beta_j}$

かくして $X_1=55$, $X_2=330$, $X_3=-10$ $\therefore$ $X_3=0$.

4． Dセクターの生産水準とMセクターの輸入水準を求める．

$X_4=Y_4+\sum_i a_{4i}(X_i+E_i)=300+0.2\times55+0.3\times370=422$

$M_j=Y_j+E_j+\sum_i a_{ji}(X_i+E_i)-(X_j+E_j)$

$M_1=250-55=195$

$M_2=350+40+0.1\times55-370=25.5\fallingdotseq26$

$M_3=100+0.2\times55+0.1\times370=148$

5．外国為替と労働の超過需要を計算する．外国為替の超過需要＝$M_1g_1+M_2g_2+M_3g_3-(1.1-0.001E_2)E_2=195\times1+26\times1.1+148\times1.0-(1.1-0.001\times40)\times40=330$

労働の超過需要＝$\sum_j w_j(X_j+E_j)-L=-889$

6．資本所要量は，$\sum_j c_jX_j+\sum_j c_j'E_j=855$

反復b 反復aでは外国為替は超過需要で，労働は超過供給であるからここでは $P_f=2.1$，$P_w=0$ として計算する．ここではMセクターを第1，3部門，Dセクターを第2，4部門とする．c_2^* と c_4^* の計算にあたっては反復aの X_2 と X_4 を用いる．以後の演算は反復aと同じ要領で行えばよい．**反復c**，**d**，**e**，**f**についても同様である．これらの諸結果は第4表にまとめられている．解を求めるには反復eとfの外国為替の超過需要は20の変化で，P_fは0.05の変化が記録されているから内挿法で解は $P_f=2.76$ が適当である．$P_f=2.76$ にたいする最適解の値は第4表の解の欄に示している．なお，外国為替の超過需要の変化と P_f の解は第1図に画かれている．

われわれのこの計算は D=0 のもとに行ったものであるが，もしも与えられた外資制約が D=0 ではなく D=138 であったとすれば，第1図の外国為替供給曲線は138だけ右方にシフトし，P_f の解は2.4で，反復cの諸値が解となる．かくして，外資＝貿易入超がいかほど見積られうるかということは，もしその国が，開発計画において，資源を最適に配置する――ここでは外資制約も含めた (2.2)－(2.5) の制約のもとで必要資本量を最小にしようと計画する――ことを意図するならば，国内向生産水準，輸出入水準の最適水準，したがって産業構造と，必要資本量ならびに投資配分率が規定せられかつそれらは最適なものとみなされる．第5表で外資制約

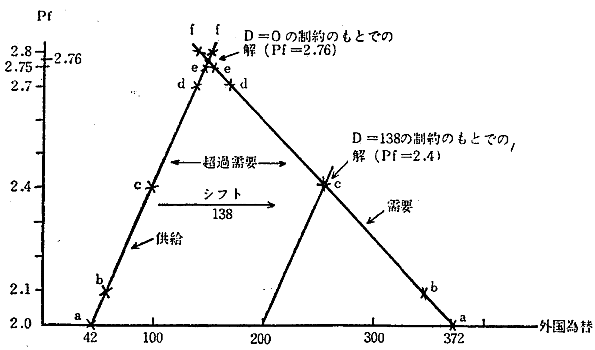
D=0 と D=138 のケースを例示的に示すこととする．

第4表　ケースⅡ．Aの解

		反			復			
		a	b	c	d	e	f	解
価格解	P_f	2.0	2.1	2.4	2.7	2.75	2.8	2.76
	P_4	0.8	0.82	0.84	0.88	0.91	0.91	0.91
	P_3	2.0	2.1	2.4	2.7	2.75	2.8	2.76
	P_2	2.2	2.22	2.31	2.36	2.39	2.4	2.39
	P_1	2.0	2.1	2.4	2.7	2.75	2.8	2.76
輸出	E_1	0	0	5	13	14	15	14
	E_2	40	60	114	155	159	166	161
量的解	X_1	55	74	130	187	195	205	197
	M_1	195	176	120	63	55	45	53
	X_2	330	357	364	370	371	372	371
	M_2	26	0	0	0	0	0	0
	X_3	0	2	40	77	82	89	84
	M_3	148	155	135	116	113	109	111
	X_4(400)	422	440	475	505	509	514	510
外国為替	供　給	42	62	117	159	163	169	164
	需　要	372	331	255	179	168	154	164
	超過需要	330	269	138	20	5	—15	0
労働超過需要		—815	—727	—522	—286	—257	—221	—250
必要資本量		855	978	1,275	1,574	1,615	1,671	1,628

出所：CHENER AND UZAWA ［2］ p. 215　TableV

ただしわたくしの計算にもとずき数値は若干修正した．また解 P_f=2.76 にたいする諸最適値と労働超過需要量を計算追記した．Mセクターは反復 a では第1，2，3部門，反復 b 以後は第1，3部門である．



第　1　図

第５表　産業構造と投式配合率

			1.完 成 財			2.食物及農業			3.基礎原料			4.サービス			合　計		
			国内向生産	輸出向生産	輸入	国内向生産	輸出向生産	輸入	国内向生産	輸出向生産	輸入	国内向生産	輸出向生産	輸入	国内向生産	輸出向生産	輸入
D＝0のケース	産業構造	量	197	14	53	371	161	0	84	0	111	510	0	0	1,337		164
		%	14.7	1.0		27.7	12.0		6.3	0		38.1	0		100		
	投資配分	量	275	20		546	258		196	0		334	0		1,629		
		%	16.9	1.2		33.5	15.8		12.0	0		20.5	0		100		
D＝138のケース	産業構造	量	130	5	120	364	114	0	40	0	135	475	0	0	1,128		255
		%	11.5	0.4		32.3	10.1		3.5	0		42.1	0		100		
	投資配分	量	164	7		533	182		86	0		303	0		1,275		
		%	12.9	0.6		41.8	14.3		6.7	0		23.8	0		100		

産業構造の%と投資配分の量と%には輸入は含めない.

ケースB　ここでは諸帰属価格，輸出水準およびMセクターの国内向生産水準の決定はケースAと同じ計算手続によればよい．ついで最終需要 Y_j は帰属価格の函数とされているから，われわれはつぎのようなリニヤーな需要函数を想定する．

$$(3.5)\qquad Y_j{}^t=Y_j{}^{\circ}-\theta_j(P_j{}^t-P_j{}^{\circ})=Y_j{}^{\circ}-\theta_j\Delta P_j{}^t,\qquad j=1,\ \cdots,\ 4$$

以下の計算においては，$P_j{}^{\circ}$ を第４表の反復ａの価格解と同じであるとし，前ケースと同様に $Y_1{}^{\circ}=250$，$Y_2{}^{\circ}=350$，$Y_3{}^{\circ}=100$，$Y_4{}^{\circ}=300$，$D=0$，$L=220$ と仮定する．また $\theta_1=300$，$\theta_2=1{,}000$，$\theta_3=50$，$\theta_4=1{,}000$ とする．第６表は反復ｄが最適解なることを示している．以下，前ケースと同様な方法で，例えば外資が反復ｂの 232 であるとすれば反復ｂが最適解となる．なお，産業構造，投資配分率の計算も同様に行うことができるが，ここでは略する．

第6表　ケースⅡ.Bの解

		反復 a	反復 b	反復 c	反復 d
価格解	P_f	2.0	2.1	2.35	2.4
	P_4	0.8	0.82	0.81	0.85
	P_3	2.0	2.1	2.35	2.4
	P_2	2.2	2.22	2.25	2.17
	P_1	2.0	2.1	2.35	2.36
最終需要	Y_4	300	280	310	250
	Y_3	100	95	83	80
	Y_2	350	330	300	320
	Y_1	250	220	145	142
輸出	E_1	0	0	4	6
	E_2	40	60	70	114
量的解	X_1	55	74	124	142
	M_1	195	146	21	0
	X_2	330	337	287	305
	M_2	26	0	0	0
	X_3	0	2	34	39
	M_3	148	148	110	113
	X_4 (400)	422	414	446	410
外国為替	供給	42	62	72	113
	需要	372	294	131	113
	超過需要	330	232	59	0
労働の超過需要		−815	−806	−614	−683
資本所要量		855	518	1,021	1,134

反復ａでは第１，２，３部門を，反復ｂ，ｃでは第１，３部門をＭセクターとする．ｄでは第３部門のみをＭセクターとする．
すべての反復において $P_w=0$ である．

引用文献

[1] S. A. ABBAS : Capital Requirements for the Development of South and South-East Asia, 1956, Chapter VI—VII, pp. 112—127.

[2] H.B. CHENERY AND H. UZAWA : "Non-linear Programming in Economic Development" in ARROW, HURWICZ, UZAWA, Studies in Linear and Non-linear Programming, 1958, pp. 203-229.

[3] H. B. CHENERY AND K. S. KRETSCHMER : "Resource Allocation for Economic Development" in Econometrica, Vol. 24, October, 1956,

Number 4, pp. 365—399.

[4] H.B. CHENERY AND P.G. CLARK : Interindustry Economics, 1959.

[5] H.W. KUHN AND A.W. TUCKER : "Nonlinear Programming" in J. NEYMAN (ed.) Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951, pp. 481—92.

(1962年11月22日稿)