УДК 519.61/.64:627.05
DOI: 10.15587/1729-4061.2020.215047

Скінченноелементне дослідження пружної фільтрації в ґрунтах із тонкими включеннями

О. Р. Мічута, Н. В. Іванчук, П. М. Мартинюк, О. П. Остапчук

Ґрунтові середовища по своїй природі є неоднорідними. Ця неоднорідність створює значні труднощі як з точки зору практики будівництва, так і з точки зору математичного і комп'ютерного моделювання фізико-хімічних процесів в цих неоднорідних ґрунтових масивах. З точки зору математичного моделювання проблемою є розривність функцій, якими характеризуються досліджувані процеси, на таких включеннях. Більше того, характеристики таких включень можуть залежати від визначальних функцій досліджуваних процесів (напір, температура, вологість, концентрація хімічних речовин та їх градієнти). А це вимагає модифікації умов спряження та приводить до нелінійних крайових задач в неоднорідних областях. Саме тому в роботі було досліджено вплив наявності тонких включень на умови спряження для визначальних функцій фільтраційних та геоміграційних процесів на них. Також модифіковано умову спряження для напорів та вдосконалено математичну модель пружного режиму фільтрації в неоднорідному масиві ґрунту, який містить тонкі слабопроникні включення. Вдосконалення полягає у модифікації умов спряження для напорів на тонких включеннях, коли коефіцієнт фільтрації самого включення нелінійно залежить від градієнта напорів. Числовий розв'язок відповідної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів. Проведено ряд числових експериментів та здійснено їх аналіз. Показана можливість значного впливу на стрибок напорів урахування залежності фільтраційних характеристик включення від градієнтів напорів. Зокрема, відносна різниця стрибків напорів лежить в межах від 26 % до 99 % відносно задачі зі сталим коефіцієнтом фільтрації для включення. Тобто, при проведенні прогнозних розрахунків впливом таких залежностей нехтувати не можна.

Ключові слова: пружна фільтрація, тонке включення, умови спряження, метод скінченних елементів.

1. Вступ

Природні ґрунти є неоднорідними на макрорівні. Така неоднорідність проявляється в двох аспектах. Перший аспект – масив ґрунту складається з підобластей, в яких розміщені різні за своїми фізико-хімічними та механічними властивостями ґрунти. Другий аспект – в масиві ґрунту наявні тонкі прошарки інших ґрунтів, які, досить часто, сильно відрізняються за своїми характеристиками від основного ґрунту. Такі прошарки створюють значні труднощі як з точки зору практики будівництва, так і з точки зору математичного і комп'ютерного моделювання фізико-хімічних процесів в цих неоднорідних ґрунтових масивах. Зокрема, одним із практичних аспектів є інтенсифікація зсувних процесів, де поверхнями ковзання можуть виступати саме ці прошарки. З точки зору математичного моделювання проблемою є розривність функцій, якими характеризуються досліджувані процеси, на таких включеннях. Це вимагає застосування методів, які дозволяють знаходити узагальнені розв'язки відповідних крайових задач. Більше того, характеристики таких включень можуть залежати від визначальних функцій досліджуваних процесів (напір, температура, вологість, концентрація хімічних речовин та їх градієнти). А це вимагає модифікації умов спряження та приводить до нелінійних крайових задач в неоднорідних областях. Це, в свою чергу, призводить до змін у прогнозних розрахунках фільтраційних процесів в таких ґрунтах і, як наслідок, впливає на їх безпечну експлуатацію. При цьому, в силу нелінійності впливів та складної взаємозалежності процесів, дослідження таких процесів доцільно проводити використовуючи саме комп'ютерне та математичне моделювання.

Для вирішення описаної проблематики автори модифікували умови спряження, завдяки чому удосконалили математичну модель пружної фільтрації в ґрунті із тонким включенням.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

В роботі [1] відмічено, що закон Дарсі може порушуватись при великих та при відносно малих швидкостях фільтрації. Критерієм в першому випадку виступає число Рейнольдса, в другому – в'язкість рідини (віднесення її до класу неньютонівських) та початковий градієнт напору.

В [2] між коефіцієнтом фільтрації k та градієнтом напору I запропонована наступна залежність:

$$k(I) = k_0 + \frac{(k_u - k_0)(I - I_k)}{I + \bar{k}},$$

де k_0, k_u – початковий та граничний (при $I \to \infty$) коефіцієнт фільтрації;

I_k – критичний градієнт напору;

$\bar{k}$ – емпірична константа, яка, як зазначає автор, аналогічна до відомої в біології та фізичній хімії константі напівнасичення. Із вказаної залежності автор отримав важливі часткові випадки

$$k = k_0, \text{ if } I = I_k;$$

$$k \to k_u, \text{ if } I \to \infty;$$

$$k = k_u \text{ if } \bar{k} = -I_k.$$

В роботі [3] в якості нелінійної функції залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напору прийнята степенева залежність виду

$$k(I) = k_0 I^{\beta},$$

де I – градієнт напору. При $\beta=1$ маємо лінійну залежність, а при $\beta=0$ маємо $k=k_0$. Наведена залежність аналогічна функції, яку запропоновано в праці [4]. Залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напорів наведено також в [5].

Для швидкості фільтрації в насичених глинах автори [6] використали математичні рівняння потоку Хансбо

$$v = \begin{cases} c \cdot i^m, & i < i_1, \\ k(i - i_0), & i \geq i_1, \end{cases}$$

де

$$i_0 = i_1 (m-1)/m, \quad c = k/\left(m\, i_1^{m-1}\right);$$

c та k – коефіцієнти фільтрації при малих та великих градієнтах напору; i_1 – початковий градієнт напору. Для залежності коефіцієнта фільтрації від зміни коефіцієнта пористості використана залежність

$$\lg k = \lg k_0 - (e_0 - e)/c_k,$$

де k_0 – початковий коефіцієнт фільтрації, відповідний для початкового коефіцієнта пористості e_0;

c_k – індекс проникності.

Крім того, у вищенаведеній роботі були досліджені конкретні зразки глинистого ґрунту як експериментально, так і з використанням побудованої математичної моделі на основі вищенаведених залежностей, що дало змогу знайти відповідні числові розв’язки. Відмічено хороше співпадання отриманих наближених розв’язків із даними натурних експериментів.

В іншій праці проведені експериментальні дослідження стосовно фільтрації води в слабо-проникних пористих середовищах при малих градієнтах напорів [7]. Встановлено, що в окремому випадку рух рідини описується нелінійним законом. Феномен пояснюється через наявність шарів зв’язної води в порах середовища. Пояснення обґрунтоване та підтверджене натурними експериментами.

В роботі [8] відмічене наступне. Оскільки товщина пор в глинистих ґрунтах варіюється в межах від 0.01 до 0.1 мікрон, то взаємодія «тверді частинирідина» значно впливає на потік в цих порах. Як результат було висунуте та обґрунтоване припущення про нелінійність закону фільтрації в насичених глинистих ґрунтах. Зокрема, запропоновано закон у вигляді

$$u\left(a_1 + \frac{a_2}{1 + b\, u}\right) = -\nabla h,$$

де a_1, a_2, b – параметри, які встановлюються експериментально; u – швидкість фільтрації, h – напір . Авторами статті використано пропонований закон в теорії консолідації. Також була проведена експериментальна верифікація даного закону.

В роботі [9] чисельно досліджено математичну модель фільтрації в тріщинувато-пористому середовищі. При цьому, в пористому середовищі вважається, що виконується закон Дарсі, а в тріщинах, де швидкість фільтрації є більшою, – закон Дарсі-Форехгеймера.

Експериментально досліджено рух рідин в тонких капілярах та утворення примежевого шару зв’язної рідини [10]. Залежно від величини градієнта тиску в рідині, товщина такого примежевого шару може складати до 30 % від діаметра капіляра. В результаті при низьких тисках починають проявлятися нелінійні ефекти. При цьому і залежності для швидкостей руху рідини в капілярах відрізняються від тих, що відповідають закону Дарсі. Експериментальні дослідження авторами узагальнено для пористих середовищ та проведено числові експерименти для актуальних задач нафтової промисловості.

Враховано кілька ефектів в роботі [11]. По-перше, в якості закону фільтрації застосовано нелінійний закон Дарсі (недарківський потік Хансбо). По друге, коефіцієнт проникності покладався змінним і залежним від коефіцієнта пористості. Вказані залежності враховані в загальній теорії консолідації ґрунтів (загальна теорія консолідації теорії Біо-Біо).

Згідно нелінійного закону фільтрації Хансбо,

$$\begin{cases} u = -\bar{k} i^m, & \text{when} \quad i < i_l, \\ u = -k\left(i - i_0\right), & \text{when} \quad i \geq i_l, \end{cases}$$

де u – швидкість фільтрації, k – коефіцієнт фільтрації при відносно великих градієнтах напору, коли справедливим є закон Дарсі; k – параметр фільтрації, який застосовується в степеневій частині нелінійного закону;

m – показник степеня в законі фільтрації при малих градієнтах напору, i_0 – початковий градієнт напору;

i_l являє собою градієнт, який дозволяє подолати максимум енергії зв’язної води і привести її в рух.

Враховуючи умову неперервності та диференційованості при $i=i_l$ отримуємо

$$\begin{cases} u = -\dfrac{k i^m}{m i_l^{m-1}}, & \text{when} \quad i < i_l, \\ u = k\left(i - \dfrac{m-1}{m} i_l\right), & \text{when} \quad i \geq i_l. \end{cases}$$

Щодо коефіцієнта фільтрації, то запропонована залежність

$$k = k_0 \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^{-\alpha},$$

де $\alpha = \frac{c_c}{c_k}$, α is in 0.5~2, і загальне значення в 0.5~1.0 $p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z\right)$, σ'_x, σ'_y, σ'_z – ефективні напруження; p' – середнє ефективне напруження; p'_0 – початкове значення середнього ефективного напруження.

Розглянуто питання фільтрації в слабо проникних ґрунтах [12]. Математична модель фільтрації враховує наявність початкового градієнту напору та нелінійної залежності густини порової рідини від тиску. Як результат, перший фактор вимагав модифікації закону Дарсі, а другий фактор призвів до появи в рівнянні фільтраційного члена, який залежить від квадрату градієнту тиску в поровій рідині. Більше того, наявність початкового градієнта напору, зумовив необхідність дослідження задачі в області з рухомою межею. Представлені числові експерименти показали значну відмінність в прогнозних обрахунках, якщо знехтувати квадратичним членом градієнта тиску при наявності початкового градієнта напору.

Окрему увагу хотілося б приділити питанню тонким ґрунтовим включенням та умовам спряження для визначальних функцій фільтраційних та геоміграційних процесів на них.

Отже, грунтовий масив може містити тонкі включення з природних ґрунтів. Також такі включення створюються штучно з використанням геотекстилю [13]. Як показано в [14], наявність таких включень значно змінює прогнозні розрахунки фільтраційних процесів, процесів тепло-солеперенесення, напружено-деформівного стану в природних та штучних ґрунтових масивах. З точки зору математичного моделювання та чисельних методів, наявність таких включень вимагає модифікації підходів до їх (процесів) математичного описання, формулювання коректних крайових задач, їх числового розв'язання.

На даний час в науковій літературі існує значний доробок з дослідження властивостей глинистих включень. Досить часто такі включення створюються як штучні протифільтраційні бар'єри при проектуванні та будівництві сховищ відходів виробництва для мінімізації поширення в ґрунтові води забруднюючих речовин. У праці [15] описано властивості таких геосинтетичних глинистих включень. Відмічена їхня низька гідравлічна провідність та здатність виявляти напівпроникні мембрані властивості, завдяки чому обмежується міграція розчинів через бентоніт.

У роботі [16] розглянуто бентоніти, що дозволяють обмежувати міграцію забруднюючих речовин. Розглядалася і оцінювалася так звана глина Фукакуса із різною кількістю сухого бентоніту (5 %, 10 %, 15 % і 20 %).

У статті [17] досліджено взаємозв'язані процеси консолідації глини та міграція забруднених речовин через глинисте включення з напівпроникними властивостями. В результаті числового моделювання показано, що залежно від умов консолідація може мати значний вплив на час прориву забруднюючих речовин.

Також вона має вплив на розподіл концентрації у глинистих включеннях не тільки під час процесу консолідації, а й довго після її завершення. Ефект консолідації зростає зі збільшенням товщини включення, збільшенням прикладеного навантаження, зменшенням часу навантаження, збільшенням значень ефективного коефіцієнту дифузії тощо.

У роботі [13] здійснено огляд різних типів коефіцієнтів дифузії стосовно міграції радіонуклідів в геозахисних бар'єрах. Ідентифіковано три потенційно значущі складні проблеми: геохімія бар'єрної системи, вплив поверхневої та/або міжшарової дифузії та наявність напівпроникних властивостей мембрани як результат поведінки аніонів включення.

У роботі [18] розглядаються глинисті бар'єри для сховищ відходів, що ведуть себе як напівпроникні мембрани. Наведені рівняння руху рідин та міграції сольових розчинів через так звані глинисті мембранні бар'єри. Встановлено, що потік розчину (забруднювача) зменшується у порівнянні з випадком, коли у включення немає напівпроникних властивостей мембрани. Проблеми дифузії через глинисті мембрани розглянуто в [19].

При побудові математичних моделей геоміграційних процесів в середовищах з включеннями відповідні крайові задачі повинні бути коректними. Тому такі моделі повинні доповнюватись умовами спряження для невідомих функцій на таких включеннях.

У статтях [20, 21] розглянуто параболічні рівняння, які описують процес тепломасоперенесення в області з тонким слабопроникним включенням з умовами спряження типу «зосереджене власне джерело». Запропонована нова постановка таких задач, в яких основне параболічне рівняння міняється на систему диференціальних рівнянь першого порядку з коефіцієнтами з класів узагальнених функцій. Доведені теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку.

У роботі [22] досліджено задачу дифузії домішкової речовини в смузі, що містить внутрішній шар з іншого матеріалу. Приймається, що на межах контакту шарів концентрація домішкових частинок стрибкоподібно змінюється, хоча їх потік через ці межі неперервний.

Системно проблеми математичного моделювання фільтраційних та геоміграційних процесів в неоднорідних середовищах вивчено в [14]. Зокрема, умову спряження для напорів в задачі фільтрації виведено з припущення, що напір h лінійно змінюється від h^- до h^+ вздовж нормалі $\mathbf{n}$ до поперечного перетину тонкого включення γ товщиною l. Тобто

$$h(\xi,t)=\frac{h^+-h^-}{l}\cdot\xi+h^-,\ 0\le\xi\le l$$

і

$$\frac{\partial h}{\partial\xi}=\frac{h^+-h^-}{l}.$$

Тут h^+ та h^- – значення напорів на включенні при $\xi=l$ та $\xi=0$ відповідно. Система координат $O\xi$ прив'язана до нормалі до включення. Тоді гранична умова спряження неідеального контакту має вигляд [14]

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{n}\right)^{\pm}\Big|_{\gamma}=-k_0\cdot\frac{dh}{d\xi},$$

або

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{n}\right)^{\pm}\Big|_{\gamma}=-\frac{k_0}{l}\left[h\right].$$

У вищенаведеній умові в якості коефіцієнта фільтрації k_0 тонкого включення використана стала величина. Однак коефіцієнт фільтрації ґрунту залежить від градієнтів напорів. А це вимагає модифікації умов спряження.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є кількісна оцінка впливу наявності тонких включень та модифікованих умов спряження для визначальних функцій фільтраційних та геоміграційних процесів на них. Це дасть можливість зробити висновки про те, наскільки суттєвими чи не суттєвими є зміни у прогнозних розрахунках фільтраційних характеристик в неоднорідному масиві ґрунту, який містить тонкі слабопроникні включення.

Для досягнення поставленої мети були сформовані такі завдання:

– побудувати вдосконалену математичну модель пружного режиму фільтрації в неоднорідному масиві ґрунту, який містить тонкі слабопроникні включення;

– знайти числові скінченноелементні розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі з модифікованими умовами спряження, якою описується побудована математична модель;

– провести серію числових експериментів та здійснити їх аналіз щодо кількісного впливу наявності тонких включень та модифікованих умов спряження на стрибки напорів на цих включеннях.

4. Математична модель пружної фільтрації в ґрунті із тонким включенням

Розглянемо процес пружної фільтрації в неоднорідному масиві ґрунту з тонким включенням в одновимірному випадку, математична модель якого описується наступною крайовою задачею [14]:

$$\eta\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(h,\nabla h\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right)+f\left(h,x,t\right),$$

$$x\in\Omega_1\cup\Omega_2,\ t>0; \qquad (1)$$

$$h(x,t)\big|_{x=l} = h_l(t),\ t \ge 0; \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = Q(h,t),\ t \ge 0; \tag{3}$$

$$h(x,0) = h_0(x),\ x \in [0;\xi] \cup [\xi;l]; \tag{4}$$

$$u^{\pm}\big|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int\limits_0^d \frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}(h,\nabla h)}}. \tag{5}$$

$$k(h,\nabla h) = \begin{cases} k_1(h,\nabla h), & x \in \Omega_1; \\ k_2(h,\nabla h), & x \in \Omega_2; \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \eta_1, & x \in \Omega_1; \\ \eta_2, & x \in \Omega_2; \end{cases}$$

$$f(h,x,t) = \begin{cases} f_1(h,x,t), & x \in \Omega_1; \\ f_2(h,x,t), & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тут $\Omega_1=(0;\ \xi)$, $\Omega_2=(\xi;\ l)$, $0<\xi<l$; $h_l(t)$, $h_0(x)$, $Q(h,\ t)$ – відомі функції, $h(X,\ t)$ – напір в поровій рідині; k – коефіцієнт фільтрації; $f(X,\ t)$ – функція, яка задає інтенсивність внутрішніх джерел (стоків) рідини. Коефіцієнт η називають коефіцієнтом пружної ємності породи. Згідно [23, 24] при невеликих глибинах (10–50 м) для глинистих порід $\eta = (4 \div 7) \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{м}}$. На глибинах 50–200 м для вапняків, мергелів, глин та алевритів $\eta = (1 \div 4) \cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{м}}$. Функція $h_0(x)$ має бути неперервною на кожному з відрізків $[0;\ \xi]$, $[\xi;\ l]$.

В даній математичній моделі формула (11) – це модифікована умова спряження для напорів, яка була отримана виходячи з наступних міркувань.

По аналогії з [25], припустимо (в силу тонкості включення), що процеси фільтрації в поперечному перерізі даного включення є стаціонарними (або, принаймні квазістаціонарними). Таким чином для включення розглянемо наступну задачу фільтрації:

$$\frac{d}{d\zeta}\left(-k^{\gamma}(h,\nabla h)\frac{dh}{d\zeta}\right) = 0,\ 0 < \zeta < d, \tag{6}$$

$$h(0) = h^-,\ h(d) = h^+. \tag{7}$$

Тут $k^{\gamma}(h, \nabla h)$ – коефіцієнт фільтрації тонкого включення, який нелінійно залежить від напорів та їх градієнтів. З рівняння (6) маємо

$$k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)\frac{dh}{d\zeta}=h_1,$$

де h_1=const – поки що невідома стала. Далі

$$h\left(\zeta\right)=h_1\int_0^{\zeta}\frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)}+h_2, \tag{8}$$

де h_2=const – теж поки що невідома константа. Тоді з (8) та граничних умов (7) маємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$\begin{cases} h\left(0\right)=h_2=h^{-}, \\ h\left(d\right)=h_1\int_0^{d}\frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)}+h_2=h^{+}. \end{cases}$$

Із цієї СЛАР отримуємо

$$h_2=h^{-},\ h_1=\frac{\left[h\right]}{\int_0^{d}\frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)}},$$

де $[h]=h^{+}-h^{-}$ – стрибок напорів на включенні. Отже, з (6), (7) маємо

$$h\left(\zeta\right)=\int_0^{\zeta}\frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)}\frac{\left[h\right]}{\int_0^{d}\frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)}}+h^{-}.$$

В результаті

$$\frac{\mathrm{d}h\left(\zeta\right)}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\left[h\right]}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)\int_0^{d}\frac{dx}{k^{\gamma}\left(h,\nabla h\right)}}. \tag{9}$$

Згідно [14], умову спряження виведемо на основі закону збереження потоку рідини через одиничну площу поперечного перерізу поверхні включення вздовж нормалі за малий проміжок часу Δt. Оскільки потік

$$q = \left(-k^{\gamma}\left(h, \nabla h\right) \frac{dh(\zeta)}{d\zeta} \right) \Delta t = u \Delta t$$

і

$$q = q^{+} = q^{-},$$

то

$$u^{\pm}\Big|_{x=\xi} = -k^{\gamma}\left(h, \nabla h\right) \frac{dh(\zeta)}{d\zeta}. \tag{10}$$

З (10) та (9) маємо остаточну модифіковану умову спряження неідеального контакту для напорів на включенні, коефіцієнт фільтрації якого залежить від самих напорів та їх (напорів) градієнтів

$$u^{\pm}\Big|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int\limits_{0}^{d} \frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(h, \nabla h\right)}}. \tag{11}$$

Якщо $k^{\gamma}(h) = k_0^{\gamma} = \mathrm{const},$ то з умови (11) отримуємо класичну умову спряження неідеального контакту [5].

5. Скінченноелементна схема розв'язання задачі пружної фільтрації в області з включенням

Аналогічно [14] введемо ряд означень та просторів. Нехай H_0 – простір функцій $\phi(x)$ які на кожному з інтервалів (0; ξ), (ξ; l) належать простору Соболєва $W_2^1(\Omega),$ причому набувають нульових значень на кінцях відрізка [0, l], де для функції $h(x, t)$, задані граничні умови першого роду.

Нехай H – простір функцій $v(x, t)$, які інтегровані з квадратом разом зі своїми першими похідними $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ на кожному з інтервалів (0; ξ), (ξ; l), $\forall t \in (0;T],$ причому задовольняють граничні умови першого роду, що і функція $h(x, t)$. Тут T>0.

Домножимо рівняння (1) та початкову умову (4) на довільну функцію $\varphi(x) \in H_0,$ інтегруючи їх на відрізку [0, l] та враховуючи умови спряження (5), отримаємо

$$\int_0^l \eta \frac{\partial h}{\partial t} \varphi(x) \mathrm{d}x + \int_0^l k(h, \nabla h) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{E\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x +$$
$$+ \frac{[h][\varphi]}{\int_0^d \frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}(h, \nabla h)}} = \int_0^l f(h, x, t)\varphi(x) \mathrm{d}x, \forall t \in (0; T]; \tag{12}$$

$$\int_0^l h(x, 0)\varphi(x) \mathrm{d}x = \int_0^l h_0(x)\varphi(x) \mathrm{d}x, \ \forall t \in (0; T]. \tag{13}$$

Означення 2. 1. Функція $h(x,t) \in H$, котра $\forall \varphi(x) \in H_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням (12), (13), називається узагальненим розв'язком крайової задачі (1)–(5).

Наближений узагальнений розв'язок крайової задачі (1)–(5) шукаємо у вигляді

$$h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\varphi_i(x), \tag{14}$$

де ϕ_i, $i = \overline{2, N}$, – базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору $M_0 \in H_0$, а функції ϕ_1 використовуються для апроксимації неоднорідних граничних умов першого роду в (2).

Сукупність вектор-функцій, які можна подати у вигляді (14), породжуючи множину $M \subset H$.

Означення 2. 2. Наближеним узагальненим розв'язком крайової задачі (1)–(5) називається функція $\hat{h}(x,t) \in M$, яка $\forall t \in (0, T]$ та довільної функції $\Phi(x) \in M_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням

$$\int_0^l \eta \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} \Phi(x) \mathrm{d}x + \int_0^l k(\hat{h}, \nabla h) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \frac{d\Phi(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x +$$
$$+ \frac{[\hat{h}][\Phi]}{\int_0^d \frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}(\hat{h}, \nabla \hat{h})}} = \int_0^l f(\hat{h}, x, t)\Phi(x) \mathrm{d}x, \forall t \in (0; T];$$

$$\int_0^l \hat{h}(x, 0)\Phi(x) \mathrm{d}x = \int_0^l \hat{h}_0(x)\Phi(x) \mathrm{d}x, \forall t \in (0; T].$$

Розв'язуючи задачу (1)–(5) методом скінченних елементів із слабкого формулювання (12), (13) задачі, враховуючи (14), отримаємо задачу Коші

$$\mathbf{M}(\mathbf{A}) \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{A}), \tag{15}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}, \tag{16}$$

де

$$\mathbf{A} = \left(a_i(t)\right)_{i=1}^{N}, \ \mathbf{A}^{(0)} = \left(a_i(0)\right)_{i=1}^{N}, \ \mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{N},$$

$$\mathbf{L} = \left(l_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}, \ \mathbf{F} = \left(f_i\right)_{i=1}^{N}, \ \tilde{\mathbf{F}} = \left(\tilde{f}_i\right)_{i=1}^{N}, \ \tilde{\mathbf{M}} = \left(\tilde{m}_{ij}\right)_{i,j=1}^{N},$$

$$m_{ij} = \int_0^l \eta \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}x, \ \tilde{m}_{ij} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}x, \ \tilde{f}_i = \int_0^l h_0 \varphi_i \mathrm{d}x,$$

$$l_{ij} = \int_0^l k\left(\hat{h}, \nabla \hat{h}\right) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \mathrm{d}x + \frac{\left[\varphi_i\right]\left[\varphi_j\right]}{\int_0^d \frac{\mathrm{d}x}{k^{\gamma}\left(\hat{h}, \nabla \hat{h}\right)}},$$

$$f_i^{(1)} = \int_0^l f\left(\hat{h}, x, t\right) \varphi_i(x) \mathrm{d}x.$$

Після дискретизації в часі з використанням повністю неявної лінеаризованої різницевої схеми [26] із системи (15) маємо

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{A}^{(p)}\right) \cdot \frac{\mathbf{A}^{(p+1)} - \mathbf{A}^{(p)}}{\tau} + \mathbf{L}\left(\mathbf{A}^{(p)}\right) \cdot \mathbf{A}^{(p+1)} = \mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{(p)}\right),$$

$$p = 1, 2, \ldots$$

де τ – часовий крок, $\mathbf{A}^{(p)} = \mathbf{A}(t_p)$, $t_p = p\tau$. Інтеграл у визначенні l_{ij} можна обчислити, використовуючи квадратурні формули і значення напорів та їх градієнтів з попереднього часового кроку.

6. Результати числових експериментів та їх аналіз

Програмна реалізація алгоритму розв'язання вищенаведеної крайової задачі виконана з використанням сучасної технології візуального програмування Python.

Для модельної задачі розглянуто шар ґрунту товщиною l=30 m. Глибина залягання включення ξ=15 m. Крок по змінній x становив 0.1 m. Крок по часу τ=0.5 day. Початковий розподіл напорів $h_0(x)$=1 m. На верхній межі ґрунту задавалась гранична умова першого роду із значенням напорів 10 m. Параметри фільтрації ґрунту та включення задавались наступними: k_0=0.01 m/day, $k_0^{\gamma} = 0.0001\,\mathrm{m/day}$, $\eta = 5\cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\text{м}}$.

Результати числового експерименту, які наведені в табл. 1, окреслюють наступні тенденції.

Таблиця 1

Значення напорів та їх стрибків для числового експерименту на випадок $k(I) = k_0 + \frac{(k_u - k_0)(I - I_k)}{I + \bar{k}}$, I_k=0, $\bar{k} = 1$, k_u=2k_0

Товщина включення та значення часу	Значення напорів при k^{γ}=const			Значення напорів при $k^{\gamma}=k^{\gamma}(\nabla h)$		
	h^-	h^+	$[h]$	h^-	h^+	$[h]$
d=0.1 m t=12 days	6,442	4,554	1,888	6,127	5,059	1,068 (–43 %)
d=0.3 m t=12 days	7,315	3,284	4,031	6,758	4,065	2,693 (–33 %)
d=0.5 m t=12 days	7,768	2,669	5,099	7,203	3,426	3,777 (–26 %)

Зі зменшенням товщини включення значення стрибка напорів зменшується. Однак, відносні різниці стрибків напорів для випадків змінного та сталого коефіцієнтів фільтрації зростають від 26 % до 43 %. Знак "–" перед відносними різницями означає, що для випадку змінного коефіцієнта фільтрації вони зменшуються. Результати розв'язання вказаної задачі, хоча і модельної, показують, що при таких відносних різницях нехтувати залежністю коефіцієнта фільтрації від градієнта напорів для тонких включень недопустимо.

В табл. 2 наведено значення напорів та їх стрибків для модельної задачі (випадок 2).

Значення напорів при k^{γ}=const відповідають використанню класичної умови спряження, а при $k^{\gamma}=k^{\gamma}(\nabla h)$ – модифікованої. В дужках наведено відносне збільшення або зменшення (у відсотках) стрибка напорів при використанні класичної умови спряження та модифікованої умови спряження. В табл. 2 такі відносні зміни лежать в межах від –58 % до –76 %. При цьому, при збільшенні товщини включення амплітуда різниць зростає, але відносна різниця падає. Результати розв'язання модельної задачі показують, що залежністю коефіцієнта фільтрації тонких слабопроникних включень від градієнта напорів нехтувати не можна.

В табл. 3 наведено значення напорів та їх стрибків для модельної задачі (випадок 3).

Результати табл. 3 показують, що при квадратичній залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напорів, стрибки напорів зменшуються, а відносні різниці в порівнянні до задачі зі сталим коефіцієнтом фільтрації – зростають.

Таблиця2

Значення напорів та їх стрибків для числового експерименту на випадок $k(I)=k_0I^{\beta}$, β=1

Товщина включення та значення часу	Значення напорів при k^{γ}=const			Значення напорів при $k^{\gamma}=k^{\gamma}(\nabla h)$		
	h^{-}	h^{+}	$[h]$	h^{-}	h^{+}	$[h]$
d=0.1 m t=12 days	6,442	4,554	1,888	5,906	5,448	0,458 (–76 %)
d=0.3 m t=12 days	7,315	3,284	4,031	6,214	4,885	1,329 (–67 %)
d=0.5 m t=12 days	7,768	2,669	5,099	6,513	4,384	2,129 (–58 %)

Таблиця 3

Значення напорів та їх стрибків для числового експерименту на випадок $k(I)=k_0I^{\beta}$, β=2

Товщина включення та значення часу	Значення напорів при k^{γ}=const			Значення напорів при $k^{\gamma}=k^{\gamma}(\nabla h)$		
	h^{-}	h^{+}	$[h]$	h^{-}	h^{+}	$[h]$
d=0.1 m t=12 days	6,442	4,554	1,888	5,705	5,692	0,013 (–99 %)
d=0.3 m t=12 days	7,315	3,284	4,031	6,004	5,238	0.766 (–81 %)
d=0.5 m t=12 days	7,768	2,669	5,099	6,217	4,873	1,344 (–74 %)

7. Обговорення результатів дослідження задачі пружньої фільтрації в неоднорідному масиві ґрунту

Порівнявши результати даних табл. 1 та табл. 2, можна відмітити, що застосування класичної (k^{γ}=const) та модифікованої ($k^{\gamma}=k^{\gamma}(\nabla h)$) умов спряження дають різні показники величини стрибка напору. Ця різниця лежить в діапазоні від –58 % до -76 %. Крім того, з усіх таблиць видно, що із збільшенням товщини слабо проникного включення в масиві грунту зростає амплітуда різниць значення напору зверху (h^{+}) та значенням напору знизу (h^{-}). Хоча при цьому значення відносної різниці падає. Також отримані результати дослідження дали інформацію щодо самої форми задання залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напору. Відповідно до даних табл. 2 та табл. 3, при квадратичній залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напору стрибки напорів менші в порівнянні із його лінійною залежністю. Проте спостерігається зростання відносної різниці в порівнянні із задачею зі сталим коефіцієнтом фільтрації.

Застосування залежності коефіцієнта фільтрації від градієнта напорів в класичній умові спряження на тонкому включенні викликає ряд протиріч. Зокрема зліва та справа від включення градієнти напорів є різними. І обґрунтування, яку саме залежність варто використовувати (зліва чи справа від включення), наразі немає. Використання ж модифікованої інтегральної умови спряження дозволило вирішити проблему, пов'язану з нелінійністю фільтраційних параметрів тонких глинистих включень стосовно градієнта напорів. Запропонована умова спряження враховує результати натурних експериментів і вільна від протиріч класичної умови спряження на випадок нелінійних залежностей. Обґрунтування потреби в модифікації умови спряження, а також результати табл. 1–3 для модельних задач, вказують на перспективність подальших досліджень в даному напрямку. Особливо це стосується глинистих грунтів, як матеріалів тонких включень, для яких сильно виражені нелінійності у фільтраційних процесах.

Розвиток пропонованого авторами дослідження полягає в:

– дослідженні впливу інших нелінійних залежностей коефіцієнта фільтрації від градієнта напору на величину стрибка напорів;

– дослідженні впливу отриманих залежностей на інші фізико хімічні процеси в грунтах (наприклад, теплоперенесення);

– теоретичному дослідженні точності знайдених скінченноелементних розв'язків для крайових задач з модифікованими умовами спряження.

8. Висновки

1. Побудовано вдосконалену математичну модель пружного режиму фільтрації в неоднорідному масиві ґрунту, який містить тонкі слабопроникні включення. Вдосконалення полягає у модифікації умов спряження для напорів на тонких включеннях, коли коефіцієнт фільтрації самого включення нелінійно залежить від градієнта напорів. Адже використання класичних умов спряження при таких нелінійних залежностях стикається із неоднозначністю вибору: градієнт напору брати зліва чи справа тонкого включення? Модифікована умова спряження виведена як розв'язок нелінійної крайової задачі у тонкому включенні і вільна від таких протиріч.

2. Числові розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів (МСЕ). Наведений схематичний алгоритм скінченоелементного розв'язання отриманої задачі. Можливість появи розривних розв'язків вимагає застосування числових методів, які дозволяють шукати наближені узагальнені розв'язки відповідних крайових задач. Саме це обґрунтовує застосування в дослідженні методу скінченних елементів.

3. Чисельне моделювання показало, що урахування залежності фільтраційних характеристик включення від градієнтів напорів має значний вплив на величину стрибка напорів. Зокрема, відносна різниця стрибків напорів лежить в межах від 26 % до 99 % відносно задачі зі сталим коефіцієнтом фільтрації для включення.

Подяка

Дослідження авторів фінансується науково-дослідною роботою «Дослідження суфозії, карстоутворення, корозії та вилуговування в пористих середовищах» («Investigation of suffusion, karst formation, corrosion and leaching in porous media»), номер державної реєстрації НДР 0119U000081.

Література

1. Саттаров, М. А. (1999). Реология и законы фильтрации. Математические модели фильтрации и их приложения. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 159–169.
2. Поляков, В. Л. (2013). Установившийся приток к дренажу в несвязном грунте с локально-упорядоченной структурой. Доповіді Національної академії наук України, 2, 57–64. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/85393/09-Polyakov.pdf?sequence=1
3. Шашкин, А. Г. (2011). Вязко-упруго-пластическая модель поведения глинистого грунта. Развитие городов и геотехническое строительство, 2, 1–32. URL: http://www.urban-development.ru/2011/7.pdf
4. Hansbo, S. (1960). Consolidation of clay, with special reference to influence of vertical sand drains. Swedish Geot. Institute, Proc., 18, 1–160.
5. Дмитриев, А. Ф., Хлапук, Н. Н., Дмитриев, А. Д. (2002). Деформационные процессы в несвязных грунтах в придренной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем. Ровно: РГТУ, 145.
6. Liu, Z., Xia, Y., Shi, M., Zhang, J., Zhu, X. (2019). Numerical Simulation and Experiment Study on the Characteristics of Non-Darcian Flow and Rheological Consolidation of Saturated Clay. Water, 11 (7), 1385. doi: https://doi.org/10.3390/w11071385
7. Xue-wu, W., Zheng-ming, Y., Yu-ping, S., Xue-wei, L. (2011). Experimental and Theoretical Investigation of Nonlinear Flow in Low Permeability Reservoir. Procedia Environmental Sciences, 11, 1392–1399. doi: https://doi.org/10.1016/j.proenv.2011.12.209
8. Deng, Y., Xie, H., Huang, R., Liu, C. (2007). Law of nonlinear flow in saturated clays and radial consolidation. Applied Mathematics and Mechanics, 28 (11), 1427–1436. doi: https://doi.org/10.1007/s10483-007-1102-7
9. Arrarás, A., Gaspar, F. J., Portero, L., Rodrigo, C. (2019). Geometric multigrid methods for Darcy–Forchheimer flow in fractured porous media. Computers & Mathematics with Applications, 78 (9), 3139–3151. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.04.031
10. Xiong, Y., Yu, J., Sun, H., Yuan, J., Huang, Z., Wu, Y. (2017). A New Non-Darcy Flow Model for Low-Velocity Multiphase Flow in Tight Reservoirs. Transport in Porous Media, 117 (3), 367–383. doi: https://doi.org/10.1007/s11242-017-0838-8
11. Deng, Y., Liu, G., Zheng, R., Xie, K. (2016). Finite Element Analysis of Biot's Consolidation with a Coupled Nonlinear Flow Model. Mathematical Problems in Engineering, 2016, 1–13. doi: https://doi.org/10.1155/2016/3047213
12. Liu, W., Yao, J., Chen, Z., Liu, Y. (2015). Effect of quadratic pressure gradient term on a one-dimensional moving boundary problem based on modified Darcy's law. Acta Mechanica Sinica, 32 (1), 38–53. doi: https://doi.org/10.1007/s10409-015-0526-2
13. Shackelford, C. D., Moore, S. M. (2013). Fickian diffusion of radionuclides for engineered containment barriers: Diffusion coefficients, porosities, and complicating issues. Engineering Geology, 152 (1), 133–147. doi: https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2012.10.014

14. Сергиенко, И. В., Скопецкий, В. В., Дейнека, В. С. (1991). Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наукова думка, 431.

15. Shackelford, C. D., Meier, A., Sample-Lord, K. (2016). Limiting membrane and diffusion behavior of a geosynthetic clay liner. Geotextiles and Geomembranes, 44 (5), 707–718. doi: https://doi.org/10.1016/j.geotexmem.2016.05.009

16. Tang, Q., Katsumi, T., Inui, T., Li, Z. (2014). Membrane behavior of bentonite-amended compacted clay. Soils and Foundations, 54 (3), 329–344. doi: https://doi.org/10.1016/j.sandf.2014.04.019

17. Pu, H., Fox, P. J., Shackelford, C. D. (2016). Assessment of Consolidation-Induced Contaminant Transport for Compacted Clay Liner Systems. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 142 (3), 04015091. doi: https://doi.org/10.1061/(asce)gt.1943-5606.0001426

18. Malusis, M. A., Shackelford, C. D., Olsen, H. W. (2003). Flow and transport through clay membrane barriers. Engineering Geology, 70 (3-4), 235–248. doi: https://doi.org/10.1016/s0013-7952(03)00092-9

19. Malusis, M. A., Shackelford, C. D., Maneval, J. E. (2012). Critical review of coupled flux formulations for clay membranes based on nonequilibrium thermodynamics. Journal of Contaminant Hydrology, 138-139, 40–59. doi: https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2012.06.003

20. Nomirovskii, D. A., Vostrikov, O. I. (2016). Generalized Statements and Properties of Models of Transport Processes in Domains with Cuts. Cybernetics and Systems Analysis, 52 (6), 931–942. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9895-1

21. Vostrikov, O. I., Nomirovskii, D. A. (2016). Generalized Solvability of Transmission Systems in a Layered Domain with the Condition of a «Proper Lumped Source». Journal of Computational & Applied Mathematics, 1 (121), 19–27. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/jopm_2016_1_5.pdf

22. Gera, B., Chaplya, Y., Chernukha, O. (2010). Diffusion in a three-layered strip with allowance for jump of admixture concentration function on internal contact surfaces. Physico-mathematical modelling and information technologies, 12, 61–68. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/22463

23. Баренблатт, Г. И., Ентов, В. М., Рыжик, В. М. (1972). Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 288.

24. Шестаков, В. М. (1979). Динамика подземных вод. М.: Изд-во Моск. ун-та.

25. Chui, Y. V., Moshynskyi, V. S., Martyniuk, P. M., Stepanchenko, O. M. (2018). On conjugation conditions in the filtration problems upon existence of semipermeable inclusions. JP Journal of Heat and Mass Transfer, 15 (3), 609–619. doi: https://doi.org/10.17654/hm015030609

26. Vlasyuk, A. P., Martynyuk, P. M. (2010). Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions. Journal of Mathematical Sciences, 171 (5), 632–648. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-010-0163-z