

УДК 519.6**DOI: 10.15587/1729-4061.2020.215045****Узагальнення числових методів квазіконформних відображень для задач геології****А. Я. Бомба, М. В. Бойчура, Б. П. Сидорчук**

Узагальнено метод ідентифікації параметрів коефіцієнта провідності об'єктів на випадок реконструкції зображення частини ґрунтового масиву за даними томографії прикладених квазіпотенціалів. При цьому, не зменшуючи загальності, реконструкція зображення здійснюється у фрагменті середовища прямокутної форми із наявними у ньому локальними сплесками однорідностей. Загальна ідея відповідного алгоритму полягає у почерговому ітераційному розв'язанні задач на квазіконформні відображення та ідентифікацію параметрів коефіцієнта провідності, при недостатній кількості даних про значення функцій течії на «недоступній» частині границі. Реконструкція зображення проводилась за даними, отриманими за допомогою повнодіапазонної градієнтної установки. Розроблений підхід, в порівнянні з існуючими, володіє низкою переваг, які дозволяють підвищити точність ідентифікації коефіцієнта провідності. А саме: забезпечує збільшення, у якісному сенсі, кількості вхідних даних, дозволяє уникати застосування дельта функцій Дірака при моделюванні ділянок прикладання потенціалів та досить гнучко враховувати математичні аспекти здійснення квазіконформного відображення скінченного фрагмента півплощини на параметричний багатокутник (область комплексного квазіпотенціалу). Розв'язання відповідної задачі, зокрема, відбувається не в єдиному (фіксованому) досліджуваному фрагменті ґрунтового масиву прямокутної форми, а в низці менших підобластях такої ж форми, у запропонованій оптимальній послідовності. Це дозволяє суттєво економити машинний час. Перспективність подальшого практичного впровадження запропонованого методу слідує із його здатності давати наближений результат при порівняно невисоких затратах (фінансових, часових).

Ключові слова: електрична томографія, квазіконформні відображення, ідентифікація, обернені задачі, числові методи.

1. Вступ

Сучасні підходи до ідентифікації структури ґрунтових масивів відрізняються між собою рівнем зручності, складності у використанні, ціною тощо. Значне місце тут зайняли методи електрорезистивної томографії (ЕРТ), які завдяки своїй концептуальній простоті, низькій вартості обладнання та простоті у використанні знаходять своє застосування у все більшій кількості галузей. Це має місце при екологічних дослідженнях, гідрологічних розвідках, розвідці корисних копалин, археологічному картографуванні, у будівництві тощо. Наприклад, ЕРТ широко використовується для виявлення підземних вод; особливо це важливо при вирішенні проблеми зсувів ґрунту на схилах пагорбів. Застосову-

ється в екологічних дослідженнях при картографуванні занедбаних промислових земель на залишки металів чи хімічних відходів. Також метод придатний для гідрологічних досліджень зон під дном річок, озер і, навіть, морів. Використовується при розвідці приповерхневих покладів певних видів нафти. Застосовується при інженерно-геологічних дослідженнях для прокладання магістральних трубопроводів під дорогами.

Головним і суттєвим недоліком ЕРТ є порівняно низька якість отримуваних зображень. Це пов'язано як з математичними, так і з технічними аспектами. В першу чергу, зважаючи на порівняно велику затратність у часі та високу вартість тривимірних досліджень, найбільш доцільними прийнято вважати відповідні двовимірні застосування. При цьому, задля забезпечення єдиності розв'язку, кількість заданих крайових умов має бути дуже великою та, в деякому сенсі, рівномірно заданою вздовж усієї границі. Очевидно, що, особливо у геологічних задачах, дотриматись цих умов, в загальному випадку, неможливо. Більше того, усереднення електричних характеристик на ділянках прикладання потенціалу, які мають місце в традиційних моделях, у значній мірі негативно впливають на отримуваний розв'язок. Використання ж у таких випадках дельта функції Дірака при моделюванні області контакту електрода і досліджуваного середовища точкою призводить до певної математичної невідповідності. Зважаючи на всі перелічені проблеми, з одного боку, та на економічну доцільність застосування методів ЕРТ для ідентифікації структури ґрунту, з іншого, дане дослідження є актуальним. Це дозволить будувати точніші карти ґрунтових масивів.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

У більшості випадків застосування ЕРТ при дослідженні структур середовищ розрахунки відбуваються наближено. А саме: шляхом почергового розв'язання підзадач на побудову полів густин струму та ідентифікацію параметрів [1]. Останнє здійснюють із застосуванням нелінійних методів, методів лінійної апроксимації, машинного навчання, зворотного розсіювання, прямих методів тощо [1–3]. Для побудови ж полів густин струму, у більшості випадків, розв'язують системи рівнянь еліптичного типу при заданих розподілах потенціалів та відповідних похідних по нормалі вздовж всієї границі досліджуваного тіла [1]. Для цього зазвичай використовують скінченно-різницеві методи, метод скінченних елементів, скінченних об'ємів тощо [1–3]. При геологічних дослідженнях інформація про структуру середовища та його електричні характеристики, в основному, обмежується лише даними з поверхні [2]. Тому питанням отримання таких замірів, які б приводили до якісного результату, приділяється значна увага, особливо, враховуючи некоректність вихідної задачі, зокрема, за Адамаром [1, 3]. Іншими словами, має місце нестійкість, неєдиність чи, взагалі, відсутність розв'язку. В процесі ітераційного розв'язання задачі засобами ЕРТ, при застосуванні більшості методів, зазвичай доводиться мати справу з усіма трьома умовами некоректності. Як варіант виходу з такої ситуації, застосовують дуже трудомістку процедуру регуляризації. Зокрема, відповідні константи зазвичай доводиться підбирати експериментальним шляхом. Хоча варто заува-

жити, що регуляризації зазвичай потребують лише підзадачі ідентифікації, які явно чи неявно містять процедури обернення матриці [3].

Зважаючи, зокрема, на наведені проблеми із вхідними даними, на прикладах аналізуються важливі характеристики найбільш поширених установок (схем) інжектування зарядів і збору даних та здійснюють відповідні порівняння. Тут береться до уваги низка характеристик, зокрема, значення геометричного фактору. Ця величина є оберненою до різниці потенціалів. Очевидно, що відповідні значення є дуже великими починаючи з певної відстані від струмових електродів. Чутливість крайових умов до значень коефіцієнта провідності (КП) в різних точках області визначається за допомогою похідної Фреше. Відповідні значення прямують до нуля на великих відстанях від струмових електродів. Чутливість характеризує, наскільки зміна значення КП в конкретній точці впливає на замірювані значення потенціалів на поверхні. Характеристика відношення сили сигналу до шуму також аналізується.

Ще одна важлива проблема, яка виникає при організації процесу отримання вхідних даних, полягає у доцільному виборі установки залежно від характеристик досліджуваного середовища. У роботі [5] здійснюють порівняння чотириелектродних градієнтної і диполь-дипольної установок та установки Веннера. Відмічаються суттєві переваги градієнтної установки над іншими по всіх параметрах. У [4] здійснюються порівняння значень геометричних факторів установок диполь-дипольної, градієнтної та Шлюмбергера. Тут диполь-дипольну установку визначено як таку, що має найвищу чутливість до шуму. Тоді як градієнтна – найменшу. У даній роботі також запропоновано використання повнодіапазонної градієнтної установки, яка охоплює заміри ще й поза межами досліджуваної ділянки. Це дозволяє отримувати більший обсяг даних, хоча й призводить до дещо гіршого співвідношення сигнал-шум.

Більше того, існують суттєво іншого виду установки. У роботах [2, 4] наведено приклади дослідження ґрунтового масиву між двома свердловинами, всередині яких розміщені електроди. Для такого випадку, у [4] запропоновано використовувати наступні установки: полюс-полюсну, полюс-біполюсну, біполюс-полюсну та біполюс-біполюсну. Також у даній роботі для побудови полів густин струму використовується певне удосконалення методу скінченних елементів – підхід квадратурної сітки Гауса.

Важливим питанням при дослідженні структури ґрунтових масивів є наявність ефекту анізотропії. У роботі [6] досить детально окреслено всі наявні проблеми, включаючи регуляризацію.

У роботі [2] описано загальну ідею реконструкції тривимірного зображення фрагмента ґрунтового масиву. Також представлені конкретні результати роботи відповідних алгоритмів на реальних прикладах.

Загалом, при розв'язанні задачі реконструкції зображення ґрунтового масиву засобами ЕРТ припускають, що рух частинок відбувається за законом Ома $J = \sigma \text{grad} \phi$, де J – густина струму, σ – КП, ϕ – квазіпотенціал. У більшості застосовуваних джерел зарядів вважають «точковим», і при розв'язанні відповідної задачі, силу струму I беруть усередненою по об'єму контакту V . Тоді вважаючи $\text{div} J = 0$,

зв'язок між J та I встановлюють у вигляді [2, 4]: $\text{grad}(\sigma \text{grad} \varphi) = -\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)I/\Delta V$, де δ – дельта функція Дірака, (x_s, y_s) – координата струмового електрода.

Реконструкція зображення структури ґрунтового масиву методами ЕРТ, окрім наведених, має низку інших математичних та фізичних аспектів [2]. В першу чергу, варто зважати на те, що такого роду задачі розв'язуються в нескінченних областях за допомогою рівнянь еліптичного типу при відомих крайових умовах. Оскільки на практиці зазвичай неможливо отримати такий об'єм даних, то при реконструкції зображення найчастіше обмежуються відповідним скінченним фрагментом у формі прямокутника [2, 4, 6] чи трапеції [2, 4, 5, 7]. Взагалі, задля забезпечення максимальної точності обчислень, розміри даних фігур мають бути якомога більшими. Проте з метою пришвидшення розрахунків, значення відповідних параметрів обирають в залежності від використовуваної установки, наявності апріорних даних всередині області та значень геометричного фактору. Особливою проблемою є здійснення квазіконформного відображення скінченного фрагмента пів-площини [2, 8].

Варто зауважити, що всі вище перелічені види установок мають свої власні переваги та суттєві недоліки, і використовуються залежно від структури досліджуваного середовища і відповідної границі. Проте в усіх випадках має місце «гостра» нехватка даних через складність доступу до глибоких шарів ґрунту. Застосування ж дельта функцій Дірака при моделюванні ділянок прикладання потенціалів [2, 4, 7] спотворює отримуваний розв'язок.

Таким чином, на сьогодні не вирішеним є питання «точковості» ділянок прикладання потенціалів та застосування функцій Дірака при цьому. Складною та неоднозначною є задача регуляризації, що потребує експериментального підбору констант. Не вирішеною є проблема отримання великої кількості даних, ще й з усієї границі області. Межі досліджуваного середовища, як правило, обираються дуже наближено. Неможливо досліджувати глибокі шари ґрунту. Немає досконалої установки для збору даних з границі. Не вирішена проблема затратності у часі та високої вартості для отримання тривимірного зображення. Сучасні методи розв'язання підзадач побудови полів густин струму та ідентифікації параметрів мають свої власні переваги та недоліки. В комплексі перелічені проблеми взаємодоповнюють різні неточності та похибки, через що часто отримується незадовільний результат. Проте значну частину з цих питань, на сьогодні, можливо хоча б частково вирішити.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є поширення методу квазіконформних відображень на випадок ідентифікації параметрів КП фрагмента ґрунтового масиву при відомій структурі останнього. Це дасть можливість отримувати більш точні зображення при відносно невисоких затратах в галузі екологічних досліджень, при гідрологічних розвідках, розвідці корисних копалин, археологічному картографуванні, у будівництві тощо.

Для досягнення поставленої мети були сформовані такі завдання:

- модифікувати математичну модель задачі томографії прикладених квазі-потенціалів реконструкції зображення тіла на випадок ідентифікації параметрів фрагмента ґрунтового масиву;
- розробити алгоритм реконструкції зображення частини ґрунтового масиву та написати відповідну комп'ютерну програму;
- провести числові експерименти та здійснити їх аналіз.

4. Робоча гіпотеза та формалізація опису задачі

Не зменшуючи загальності, у межах даної роботи обмежимося використанням чотириелектродної повнодіапазонної градієнтної установки за умови відсутності спрощення щодо «точковості» ділянок прикладання потенціалів. Така схема збору даних, в порівнянні з іншими [2, 4], характеризується великою щільністю вхідних даних, порівняно низькою чутливістю до «шуму» та відносно малими значеннями геометричного фактору. Тому дана установка, у більшості випадків, дозволяє отримувати найбільш точні результати саме у приповерхневих зонах.

Як зазначалось вище, в ЕРТ має місце «гостра» проблема нехватки вхідних даних, застосування функцій Дірака при моделюванні ділянок прикладання потенціалів та складність здійснення квазіконформного відображення скінченного фрагмента пів-площини. Збільшити у якісному сенсі кількість перших, уникнути другого і одночасно гнучко врахувати третє можливо опираючись на дослідження [8–10]. Вони, зокрема, стосувались саме цих проблем, але у середовищах із дискретно заданими крайовими умовами вздовж усієї границі. А саме: у роботі [8] детально досліджено питання формування течії за умови наявності кількох ділянок прикладання квазіпотенціалів. У [9, 10] розроблено нову методику (метод та відповідні алгоритми) комплексного аналізу розв'язання задач томографії прикладених квазіпотенціалів. Вона передбачає, для кожної із відповідних інжекцій, наявність на границі області лише екіпотенціальних ліній, із заданими функціями локальних густин струму, та ліній течії, із відомими розподілами квазіпотенціалу на них. У [9] методику конкретизовано на випадок середовищ із наявними локальними сплесками однорідних матеріалів. Тут КП шукається у вигляді:

$$\sigma(x, y, \chi, \alpha_1, \varepsilon_1, x_1, y_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon_s, x_s, y_s) = \chi + \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{1 + \left((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \right) / \varepsilon_k}, \quad (1)$$

де χ , α_k , ε_k , x_k , y_k ($k=1, \dots, s$) – параметри, що визначаються в процесі розв'язання задачі, s – кількість сплесків.

Не зменшуючи загальності, у даній роботі нескінченну пів-площину (ґрунтовий масив) замінимо прямокутною областю (фрагментом вертикального перерізу ґрунтового масиву) G_z (рис. 1, *a*). Відповідні межі задамо чотирма відрізками прямих B^0B^1 : $x=-a/2$, $0 \leq y \leq b$; $B^1B_pA_pD_pC_pC^0$: $y=0$, $-a/2 \leq x \leq a/2$; C^0C^1 : $x=a/2$, $0 \leq y \leq b$; B^1C^1 : $y=b$, $-a/2 \leq x \leq a/2$. На частині границі (на вибраних екіпотенціальних лініях) задаватимемо квазіпотенціали:

$$\varphi^{(p)} \Big|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \quad \varphi^{(p)} \Big|_{B^0 B^1 C^1 C^0} = \varphi_0^{(p)},$$

$$\varphi^{(p)} \Big|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}, \quad \left(\varphi_*^{(p)} < \varphi_0^{(p)} < \varphi^{*(p)} \right), \quad (2)$$

що отримуються в процесі пропускання електричних зарядів та одночасних замірювань, де $p=1,2,\dots$ – номер інжекції [9, 10]; $\varphi^{(p)}=\varphi^{(p)}(x,y)$ – квазіпотенціали; $A_p, O_{*p}, B_p, B^0, B^1, \bar{O}_p, C^1, C^0, C_p, O_p^*, D_p, \underline{O}_p$ – відмічені точки на ∂G_z ; a та b – поздовжні та поперечні розміри досліджуваної області (прямокутника); $B^0 B_p, C^0 C_p$ та $A_p D_p$ – непроникні граничні лінії течій. Інжекції струму через томографічний переріз, аналогічно до [9, 10], моделюватимемо точками $(x_A^{(p)}, y_A^{(p)})$, $(x_{O_*}^{(p)}, y_{O_*}^{(p)})$, $(x_B^{(p)}, y_B^{(p)})$, $(x_{B^0}, y_{B^0}) = (-a/2, 0)$, $(x_{B^1}, y_{B^1}) = (-a/2, b)$, $(x_{\bar{O}}^{(p)}, y_{\bar{O}}^{(p)})$, $(x_{C^1}, y_{C^1}) = (a/2, b)$, $(x_{C^0}, y_{C^0}) = (a/2, 0)$, $(x_C^{(p)}, y_C^{(p)})$, $(x_{O_*^*}^{(p)}, y_{O_*^*}^{(p)})$, $(x_D^{(p)}, y_D^{(p)})$, $(x_{\underline{O}}^{(p)}, y_{\underline{O}}^{(p)})$, згідно з якими $A_p = (x_A^{(p)}, y_A^{(p)})$, $O_{*p} = (x_{O_*}^{(p)}, y_{O_*}^{(p)})$, $B_p = (x_B^{(p)}, y_B^{(p)})$, $B^0 = (x_{B^0}, y_{B^0})$, $B^1 = (x_{B^1}, y_{B^1})$, $\bar{O}_p = (x_{\bar{O}}^{(p)}, y_{\bar{O}}^{(p)})$, $C^1 = (x_{C^1}, y_{C^1})$, $C^0 = (x_{C^0}, y_{C^0})$, $C_p = (x_C^{(p)}, y_C^{(p)})$, $O_p^* = (x_{O_*^*}^{(p)}, y_{O_*^*}^{(p)})$, $D_p = (x_D^{(p)}, y_D^{(p)})$, $\underline{O}_p = (x_{\underline{O}}^{(p)}, y_{\underline{O}}^{(p)})$. Відповідну даній інжекції границю області G_z із заданими чотирма відміченими точками на ній позначимо через $\partial G_z^{(p)}$ ($z^{(p)}=x^{(p)}+iy^{(p)}$).

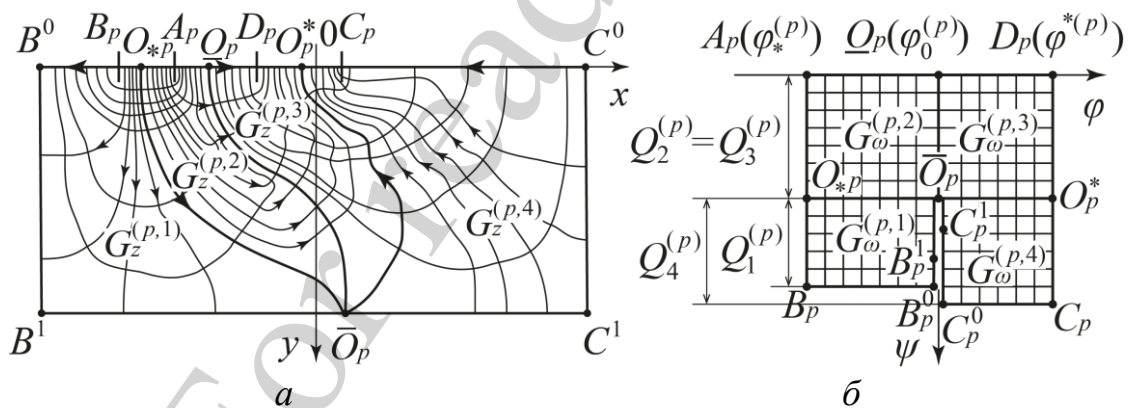


Рис. 1. Схематичні зображення: a – поперечного перерізу фрагмента ґрунтового масиву $G_z^{(p)}$; b – відповідних областей комплексного квазіпотенціалу $G_\omega^{(p)}$

Розв'язання задач геології засобами ЕРТ, у більшості випадків [2, 4, 7], відбувається із застосуванням дельта функцій Дірака на ділянках прикладання квазіпотенціалів. У даній же роботі відповідну постановку за умови ідентифікації параметрів КП $\sigma=\sigma(x,y)$ та супутнього знаходження квазіпотенціалів $\varphi^{(p)}=\varphi^{(p)}(x,y)$ формуємо у вигляді (1), (2),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} \right) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \Big|_{B^0 B_p \cup A_p D_p \cup C^0 C_p} = 0; \quad (4)$$

$$\varphi^{(p)}(M) \Big|_{B^0 B_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \quad \varphi^{(p)}(M) \Big|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M),$$

$$\varphi^{(p)}(M) \Big|_{C^0 C_p} = \bar{\bar{\varphi}}^{(p)}(M); \quad (5)$$

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \Big|_{A_p B_p} = \Psi_*^{(p)}(M),$$

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n} \Big|_{C_p D_p} = \Psi^{*(p)}(M), \quad (6)$$

де M – біжуча точка відповідної кривої;

n – одиничний вектор зовнішньої нормалі. Функції $\bar{\varphi}^{(p)}(M) = \bar{\varphi}^{(p)}(x, \dots)$ ($x_B^{(p)} \leq x \leq x_B^{(p)}$), $\bar{\bar{\varphi}}^{(p)}(M) = \bar{\bar{\varphi}}^{(p)}(x, \dots)$ ($x_C^{(p)} \leq x \leq x_C^{(p)}$), $\underline{\varphi}^{(p)}(M) = \underline{\varphi}^{(p)}(x, \dots)$ ($x_A^{(p)} \leq x \leq x_D^{(p)}$), $\Psi_*^{(p)}(M) = \Psi_*^{(p)}(x, \dots)$ ($x_B^{(p)} \leq x \leq x_A^{(p)}$), $\Psi^{*(p)}(M) = \Psi^{*(p)}(x, \dots)$ ($x_D^{(p)} \leq x \leq x_C^{(p)}$), подібно до [9, 10], можуть бути побудовані шляхом інтерполювання експериментально отриманих їх значень $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $\bar{\bar{\varphi}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $\underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}$, $\Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}$, $\Psi_{j^{*(p)}}^{*(p)}$ при деяких $x = \bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $x = \bar{\bar{x}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $x = \underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}$, $x = x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}$, $x = x_{j^{*(p)}}^{*(p)}$ на ділянках $B^0 B_p$, $C^0 C_p$, $A_p D_p$, $A_p B_p$, $C_p D_p$, відповідно $(\varphi_*^{(p)} \leq \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}, \quad \varphi_*^{(p)} \leq \bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi_0^{(p)}, \quad \varphi_0^{(p)} \leq \bar{\bar{\varphi}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}, \quad \Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)} > 0, \quad \Psi_{j^{*(p)}}^{*(p)} > 0, \quad \bar{i}^{(p)} = 0, \bar{m}^{(p)} + 1, \quad \bar{\bar{i}}^{(p)} = 0, \bar{\bar{m}}^{(p)} + 1, \quad \underline{i}^{(p)} = 0, \underline{m}^{(p)} + 1, \quad j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1, \quad j^{*(p)} = 0, n^{*(p)} + 1)$. Зауважимо, що у більшості практичних випадків ідентифікації структури ґрунту засобами ЕРТ немає можливості для отримання (замірювання) значень функцій $\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}(M)}{\partial n}$ на ділянках виду $B^0 B^1 C^1 C^0$. Тому відповідні задачі, зокрема (1)–(6), мають, взагалі кажучи, нескінченну кількість розв'язків. Проте варто зазначити, що вони мало різняться між собою в підобластях із достатньо великим значенням геометричного фактору; зазвичай це приповерхневі шари ґрунту [2, 4].

5. Матеріали та методи дослідження (модифікація задачі (1)–(6) та її рі- зницевий аналог)

Типовий підхід до розв'язання задач (1)–(6) передбачає усереднення функцій (6) та введення дельти Дірака у диференціальні рівняння (3) [2, 4, 7]. Для уникнення такого досить «грубого» спрощення, пропонуємо, подібно до [8–10], ввести квазігармонічні функції $\psi^{(p)}(x,y)$ (функції течії), комплексно спряжені до $\varphi^{(p)}(x,y)$ і замінити (3), (4) та (6) на

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y}, \quad \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x}; \quad (7)$$

$$\psi^{(p)} \Big|_{A_p D_p} = 0, \quad \psi^{(p)} \Big|_{B^0 B_p} = Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)},$$

$$\psi^{(p)} \Big|_{C^0 C_p} = Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}; \quad (8)$$

$$\psi^{(p)}(M) \Big|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(M), \quad \psi^{(p)}(M) \Big|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(M). \quad (9)$$

Таким чином, від задачі (1)–(6) переходимо до узагальненого її аналога (2), (5), (7)–(9) на квазіконформні відображення $\omega = \omega^{(p)}(z) = \varphi^{(p)}(x,y) + i\psi^{(p)}(x,y)$ фізичних областей $G_z^{(p)} = \bigcup_{\xi=1}^4 G_z^{(p,\xi)} \cup \bigcup_{\xi=1}^3 G_z^{(p,\xi)} \cap G_z^{(p,\xi+1)}$ (рис. 1, а) на відповідні області комплексного квазіпотенціалу $G_\omega^{(p)} = \bigcup_{\xi=1}^4 G_\omega^{(p,\xi)} \cup \bigcup_{\xi=1}^3 G_\omega^{(p,\xi)} \cap G_\omega^{(p,\xi+1)}$ (рис. 1, б) за умови ідентифікації КП (1) [8, 10], де dl – елемент дуги відповідної кривої; $\varphi_0^{(p)} = \varphi \Big|_{\bar{O}_p}$; $Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}$ та $Q_4^{(p)}$ – потоки, що входять в область $G_z^{(p)}$ через ділянки $A_p B_p$ та $\bar{O}_p C^0$, відповідно; $Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}$ та $Q_1^{(p)}$ – потоки, що виходять із неї через ділянки $C_p D_p$ та $\bar{O}_p B^0$, відповідно; $\int_{A_p B_p} \sigma \varphi_n'^{(p)}(M) dl = Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}$, $\psi_*^{(p)}(M) = \int_{A_p M} \Psi_*^{(p)}(M) dl$, $\int_{\bar{O}_p B^0} \sigma \varphi_n'^{(p)}(M) dl = Q_1^{(p)}$, $\int_{\bar{O}_p C^0} \sigma \varphi_n'^{(p)}(M) dl = Q_4^{(p)}$, $\psi^{*(p)}(M) = \int_{D_p M} \Psi^{*(p)}(M) dl$, $\int_{D_p C_p} \sigma \varphi_n'^{(p)}(M) dl = Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}$;

$$G_\omega^{(p,1)} = \left\{ \omega^{(p)} : \varphi_*^{(p)} < \varphi^{(p)} < \varphi_0^{(p)}, Q_2^{(p)} < \psi^{(p)} < Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)} \right\},$$

$$G_\omega^{(p,2)} = \left\{ \omega^{(p)} : \varphi_*^{(p)} < \varphi^{(p)} < \varphi_0^{(p)}, 0 < \psi^{(p)} < Q_2^{(p)} \right\},$$

$$G_\omega^{(p,3)} = \left\{ \omega^{(p)} : \varphi_0^{(p)} < \varphi^{(p)} < \varphi^{*(p)}, 0 < \psi^{(p)} < Q_3^{(p)} \right\},$$

$$G_{\omega}^{(p,4)} = \left\{ \omega^{(p)} : \varphi_0^{(p)} < \varphi^{(p)} < \varphi^{*(p)}, Q_3^{(p)} < \psi^{(p)} < Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)} \right\}.$$

Враховуючи безумовні переваги [8] переходу до обернених відображень $z^{(p)}(\omega) = x^{(p)}(\varphi, \psi) + iy^{(p)}(\varphi, \psi)$ областей $G_{\omega}^{(p)}$ на області $G_z^{(p)}$, запишемо задачу (1), (2), (5), (7)–(9) у вигляді [8, 10]:

$$\frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} = \sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} = -\sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi}; \quad (10)$$

$$x^{(p)}(\varphi, Q_2^{(p)} - 0) = x^{(p)}(\varphi, Q_2^{(p)} + 0),$$

$$y^{(p)}(\varphi, Q_2^{(p)} - 0) = y^{(p)}(\varphi, Q_2^{(p)} + 0),$$

$$\left(\varphi_*^{(p)} \leq \varphi < \varphi_0^{(p)} \cup \varphi_0^{(p)} < \varphi \leq \varphi^{*(p)} \right),$$

$$x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi) = x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi),$$

$$y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi) = y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi), \quad (0 \leq \psi \leq Q_2^{(p)}); \quad (11)$$

$$x^{(p)}(\varphi, Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}) = \bar{x}^{(p)}(\varphi),$$

$$y^{(p)}(\varphi, Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}) = 0 \quad \left(\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi_0^{(p)} \right),$$

$$x^{(p)}(\varphi, 0) = \underline{x}^{(p)}(\varphi), \quad y^{(p)}(\varphi, 0) = 0 \quad \left(\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)} \right),$$

$$x^{(p)}(\varphi, Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}) = \bar{\bar{x}}^{(p)}(\varphi),$$

$$y^{(p)}(\varphi, Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}) = 0 \quad \left(\varphi_0^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)} \right),$$

$$x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) = x_*^{(p)}(\psi),$$

$$y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) = 0 \quad (0 \leq \psi \leq Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}),$$

$$x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) = x^{*(p)}(\psi),$$

$$y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) = 0 \quad (0 \leq \psi \leq Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}),$$

$$-a/2 \leq x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi) \leq x_Q^{(p)},$$

$$y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi) = b \left(0 \leq \psi - Q_2^{(p)} \leq Q_{B^1}^{(p)} \right),$$

$$x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi) = -a/2,$$

$$0 \leq y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi) \leq b \left(Q_{B^1}^{(p)} < \psi - Q_2^{(p)} \leq Q_{C^1}^{(p)} \right),$$

$$x_Q^{(p)} \leq x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi) \leq a/2,$$

$$y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi) = b \left(0 \leq \psi - Q_3^{(p)} \leq Q_{C^1}^{(p)} \right),$$

$$x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi) = a/2,$$

$$0 \leq y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi) \leq b \left(Q_{C^1}^{(p)} < \psi - Q_3^{(p)} \leq Q_{C^1}^{(p)} \right) \quad (12)$$

за умови ідентифікації (1), де $x = \bar{x}^{(p)}(\varphi)$, $x = \underline{x}^{(p)}(\varphi)$, $x = \bar{\bar{x}}^{(p)}(\varphi)$, $x = x_*^{(p)}(\psi)$, $x = x^{*(p)}(\psi)$ – функції, побудовані шляхом інтерполювання експериментально отриманих їх значень $\bar{x}_i^{(p)}$, $\underline{x}_i^{(p)}$, $\bar{\bar{x}}_i^{(p)}$, $x_{j_*}^{(p)}$, $x_{j_*}^{*(p)}$ при деяких аргументах $\bar{\varphi}_i^{(p)}$, $\underline{\varphi}_i^{(p)}$, $\bar{\bar{\varphi}}_i^{(p)}$, $\psi_{j_*}^{(p)}$, $\psi_{j_*}^{*(p)}$ на ділянках B^0B_p , A_pD_p , C^0C_p , A_pB_p та C_pD_p , відповідно; $Q_2^{(p)} + Q_{B^1}^{(p)}$ і $Q_3^{(p)} + Q_{C^1}^{(p)}$ – значення витрат у точках B^1 і C^1 , відповідно. При цьому, при наближеному розв'язанні даної задачі, замість узагальнень умов Коші-Рімана (10), зручно використовувати узагальнення рівнянь Лапласа у всіх внутрішніх точках областей $G_\omega^{(p)}$ та умови ортогональності на їх границях [8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0; \end{cases} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi, Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)})}{\partial \psi} = 0, \varphi \in (\varphi_*^{(p)}, \varphi_0^{(p)}), \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi, 0)}{\partial \psi} = 0, \varphi \in (\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}), \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi, Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)})}{\partial \psi} = 0, \varphi \in (\varphi_0^{(p)}, \varphi^{*(p)}), \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi_0^{(p)}, Q_2^{(p)})}{\partial \psi} = 0, \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi)}{\partial \varphi} = 0, \psi \in (0, Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}), \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi)}{\partial \varphi} = 0, \psi \in (0, Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}), \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi)}{\partial \varphi} = 0, \psi \in (Q_2^{(p)}, Q_2^{(p)} + Q_{B^1}^{(p)}], \\
\frac{\partial y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} - 0, \psi)}{\partial \varphi} = 0, \psi \in [Q_2^{(p)} + Q_{B^1}^{(p)}, Q_1^{(p)} + Q_2^{(p)}), \\
\frac{\partial x^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi)}{\partial \varphi} = 0, \psi \in (Q_3^{(p)}, Q_3^{(p)} + Q_{C^1}^{(p)}], \\
\frac{\partial y^{(p)}(\varphi_0^{(p)} + 0, \psi)}{\partial \varphi} = 0, \psi \in [Q_3^{(p)} + Q_{C^1}^{(p)}, Q_3^{(p)} + Q_4^{(p)}).
\end{array} \right. \quad (14)$$

Реконструкцію КП здійснюємо за умови мінімізації функціонала [10], який не передбачає використання процедур обернення матриць, а тому, не потребує регуляризації [3]

$$\Phi(\sigma) = \sum_{p=1}^{\tilde{p}} \sum_{(\tilde{x}_{i,j}^{(p)}, \tilde{y}_{i,j}^{(p)}) \in \bar{G}_z^{(p)}} \left(\sigma \begin{pmatrix} \tilde{x}_{i,j}^{(p)}, \tilde{y}_{i,j}^{(p)}, \chi, \alpha_1, \varepsilon_1, x_1, \\ y_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon_s, x_s, y_s \end{pmatrix} - \right. \\
\left. -f(\tilde{x}_{i,j}^{(p)}, \tilde{y}_{i,j}^{(p)}) \right)^2 \rightarrow \min. \quad (15)$$

Тут сумування здійснюється за даними у біжучих вузлах $(\tilde{x}_{i,j}^{(p)}, \tilde{y}_{i,j}^{(p)})$ відповідної динамічної сітки, і лише у точках з досить великим значенням гео-

метричного фактору; $f(x^{(p)}, y^{(p)}) = \sqrt{\left(\frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi}\right)^2} / \sqrt{\left(\frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi}\right)^2}$

– функція, що характеризує деякий «ітераційно-проміжний» розподіл КП на p -й інжекції.

Наближений розв’язок задачі (1), (11)–(14) за умови мінімізації функціоналу (15) шукатимемо, аналогічно до [8, 10], на рівномірній сітці у сіткових областях $G_{\omega}^{\gamma(p)} = \bigcup_{\xi=1}^4 G_{\omega}^{\gamma(p,\xi)} \cup \bigcup_{\xi=1}^3 G_{\omega}^{\gamma(p,\xi)} \cap G_{\omega}^{\gamma(p,\xi+1)}$, де

$$G_{\omega}^{\gamma(p,1)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\varphi_i^{(p,1)}, \psi_j^{(p,1)} \right) : \varphi_i^{(p,1)} = \varphi_*^{(p)} + i\Delta\varphi^{(p,1)}, i=\overline{0, m_1^{(p)}}; \\ \psi_j^{(p,1)} = Q_2^{(p)} + j\Delta\psi^{(p,1)}, j=\overline{0, n_1^{(p)}}; \\ \Delta\varphi^{(p,1)} = \left(\varphi_0^{(p)} - \varphi_*^{(p)} \right) / m_1^{(p)}, \\ \Delta\psi^{(p,1)} = Q_1^{(p)} / n_1^{(p)}, \gamma^{(p,1)} = \Delta\varphi^{(p,1)} / \Delta\psi^{(p,1)} \end{array} \right\},$$

$$G_{\omega}^{\gamma(p,2)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\varphi_i^{(p,2)}, \psi_j^{(p,2)} \right) : \varphi_i^{(p,2)} = \varphi_*^{(p)} + i\Delta\varphi^{(p,2)}, \\ i=\overline{0, m_2^{(p)}}; \psi_j^{(p,2)} = j\Delta\psi^{(p,2)}, j=\overline{0, n_2^{(p)}}; \\ \Delta\varphi^{(p,2)} = \left(\varphi_0^{(p)} - \varphi_*^{(p)} \right) / m_2^{(p)}, \\ \Delta\psi^{(p,2)} = Q_2^{(p)} / n_2^{(p)}, \gamma^{(p,2)} = \Delta\varphi^{(p,2)} / \Delta\psi^{(p,2)} \end{array} \right\},$$

$$G_{\omega}^{\gamma(p,3)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\varphi_i^{(p,3)}, \psi_j^{(p,3)} \right) : \varphi_i^{(p,3)} = \varphi_*^{(p)} + \varphi_0^{(p)} + i\Delta\varphi^{(p,3)}, \\ i=\overline{0, m_3^{(p)}}; \psi_j^{(p,3)} = j\Delta\psi^{(p,3)}, j=\overline{0, n_3^{(p)}}; \\ \Delta\varphi^{(p,3)} = \left(\varphi_*^{(p)} - \varphi_0^{(p)} \right) / m_3^{(p)}, \\ \Delta\psi^{(p,3)} = Q_3^{(p)} / n_3^{(p)}, \gamma^{(p,3)} = \Delta\varphi^{(p,3)} / \Delta\psi^{(p,3)} \end{array} \right\},$$

$$G_{\omega}^{\gamma(p,4)} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\varphi_i^{(p,4)}, \psi_j^{(p,4)} \right) : \varphi_i^{(p,4)} = \varphi_*^{(p)} + \varphi_0^{(p)} + i\Delta\varphi^{(p,4)}, \\ i=\overline{0, m_4^{(p)}}; \psi_j^{(p,4)} = Q_3^{(p)} + j\Delta\psi^{(p,4)}, j=\overline{0, n_4^{(p)}}; \\ \Delta\varphi^{(p,4)} = \left(\varphi_*^{(p)} - \varphi_0^{(p)} \right) / m_4^{(p)}, \\ \Delta\psi^{(p,4)} = Q_4^{(p)} / n_4^{(p)}, \gamma^{(p,4)} = \Delta\varphi^{(p,4)} / \Delta\psi^{(p,4)} \end{array} \right\}.$$

Відповідні різницеві представлення, у такому випадку, запишемо у вигляді [8, 10]:

$$\left[\begin{array}{l}
x_{i,j}^{(p,\xi)} = \frac{0.5}{1 + \tilde{\gamma}^{(p,\xi)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)2}} \times \\
\left(x_{i+1,j}^{(p,\xi)} + x_{i-1,j}^{(p,\xi)} + \tilde{\gamma}^{(p,\xi)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)2} (x_{i,j-1}^{(p,\xi)} + x_{i,j+1}^{(p,\xi)}) + \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial x} (x_{i,j+1}^{(p,\xi)} - x_{i,j-1}^{(p,\xi)}) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial y} (y_{i,j+1}^{(p,\xi)} - y_{i,j-1}^{(p,\xi)}) \right) \right) \times \\
\times \\
\left(\frac{0.25 \tilde{\gamma}^{(p,\xi)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{(x_{i,j+1}^{(p,\xi)} - x_{i,j-1}^{(p,\xi)})^{-1}} - \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial x} (x_{i+1,j}^{(p,\xi)} - x_{i-1,j}^{(p,\xi)}) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial y} (y_{i+1,j}^{(p,\xi)} - y_{i-1,j}^{(p,\xi)}) \right) \frac{x_{i+1,j}^{(p,\xi)} - x_{i-1,j}^{(p,\xi)}}{4 \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}} \right) \\
y_{i,j}^{(p,l)} = \frac{0.5}{1 + \tilde{\gamma}^{(p,\xi)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)2}} \times \\
\left(y_{i+1,j}^{(p,\xi)} + y_{i-1,j}^{(p,\xi)} + \tilde{\gamma}^{(p,\xi)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)2} (y_{i,j-1}^{(p,\xi)} + y_{i,j+1}^{(p,\xi)}) + \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial x} (x_{i,j+1}^{(p,\xi)} - x_{i,j-1}^{(p,\xi)}) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial y} (y_{i,j+1}^{(p,\xi)} - y_{i,j-1}^{(p,\xi)}) \right) \right) \times \\
\times \\
\left(\frac{0.25 \tilde{\gamma}^{(p,\xi)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{(y_{i,j+1}^{(p,\xi)} - y_{i,j-1}^{(p,\xi)})^{-1}} - \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial x} (x_{i+1,j}^{(p,\xi)} - x_{i-1,j}^{(p,\xi)}) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}}{\partial y} (y_{i+1,j}^{(p,\xi)} - y_{i-1,j}^{(p,\xi)}) \right) \frac{y_{i+1,j}^{(p,\xi)} - y_{i-1,j}^{(p,\xi)}}{4 \sigma_{i,j}^{\gamma(p,\xi)}} \right)
\end{array} \right]; (16)$$

$$x_{i,n_1^{(p)}}^{(p,1)} = \bar{x}^{(p)}(\varphi_i^{(p,1)}), \quad y_{i,n_1^{(p)}}^{(p,1)} = 0 \quad (0 \leq i \leq m_1^{(p)}),$$

$$x_{i,0}^{(p,2)} = \underline{x}^{(p)}(\varphi_i^{(p,2)}), \quad y_{i,0}^{(p,2)} = 0 \quad (0 \leq i \leq m_2^{(p)}),$$

$$x_{i,0}^{(p,3)} = \underline{x}^{(p)}(\varphi_i^{(p,3)}), \quad y_{i,0}^{(p,3)} = 0 \quad (0 \leq i \leq m_3^{(p)}),$$

$$x_{i,n_4^{(p)}}^{(p,4)} = \bar{x}^{(p)}(\varphi_i^{(p,4)}), \quad y_{i,n_4^{(p)}}^{(p,4)} = 0 \quad (0 \leq i \leq m_4^{(p)}),$$

$$x_{0,j}^{(p,1)} = x_*^{(p)}(\psi_j^{(p,1)}), \quad y_{0,j}^{(p,1)} = 0 \quad (0 \leq j \leq n_1^{(p)}),$$

$$x_{0,j}^{(p,2)} = x_*^{(p)}(\psi_j^{(p,2)}), \quad y_{0,j}^{(p,2)} = 0 \quad (0 \leq j \leq n_2^{(p)}),$$

$$\begin{aligned}
x_{m_3^{(p)},j}^{(p,3)} &= x^{*(p)}\left(\psi_j^{(p,3)}\right), \quad y_{m_3^{(p)},j}^{(p,3)} = 0 \quad (0 \leq j \leq n_3^{(p)}), \\
x_{m_4^{(p)},j}^{(p,4)} &= x^{*(p)}\left(\psi_j^{(p,4)}\right), \quad y_{m_4^{(p)},j}^{(p,4)} = 0 \quad (0 \leq j \leq n_4^{(p)}), \\
-a/2 &\leq x_{m_1^{(p)},j}^{(p,1)} \leq x_{\underline{0}}^{(p)}, \quad y_{m_1^{(p)},j}^{(p,1)} = b \quad (0 \leq j \leq n_{B^1}^{(p)}), \\
x_{m_1^{(p)},j}^{(p,1)} &= -a/2, \quad 0 \leq y_{m_1^{(p)},j}^{(p,1)} \leq b \quad (n_{B^1}^{(p)} + 1 \leq j \leq n_1^{(p)}), \\
x_{\underline{0}}^{(p)} &\leq x_{0,j}^{(p,4)} \leq a/2, \quad y_{0,j}^{(p,4)} = b \quad (0 \leq j \leq n_{C^1}^{(p)}), \\
x_{0,j}^{(p,4)} &= a/2, \quad 0 \leq y_{0,j}^{(p,4)} \leq b \quad (n_{C^1}^{(p)} + 1 \leq j \leq n_4^{(p)});
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
x_{i,n_1^{(p)}}^{(p,1)} &= x_{i,n_1^{(p)}-1}^{(p,1)}, \quad i = \overline{1, m_1^{(p)} - 1}, \quad x_{i,0}^{(p,2)} = x_{i,1}^{(p,2)}, \\
i &= \overline{1, m_2^{(p)}}, \quad x_{i,0}^{(p,3)} = x_{i,1}^{(p,3)}, \quad i = \overline{0, m_3^{(p)} - 1}, \\
x_{i,n_4^{(p)}}^{(p,4)} &= x_{i,n_4^{(p)}-1}^{(p,4)}, \quad i = \overline{1, m_4^{(p)} - 1}, \\
x_{m_1^{(p)},0}^{(p,1)} &= x_{m_2^{(p)},n_2^{(p)}}^{(p,2)} = x_{0,n_3^{(p)}}^{(p,3)} = x_{0,0}^{(p,4)} = x_{0,n_3^{(p)}-1}^{(p,3)}, \\
x_{0,j}^{(p,1)} &= x_{1,j}^{(p,1)}, \quad j = \overline{0, n_1^{(p)} - 1}, \quad x_{0,j}^{(p,2)} = x_{1,j}^{(p,2)}, \quad j = \overline{1, n_2^{(p)}}, \\
x_{m_3^{(p)},j}^{(p,3)} &= x_{m_3^{(p)}-1,j}^{(p,3)}, \quad j = \overline{1, n_3^{(p)}}, \quad x_{m_4^{(p)},j}^{(p,4)} = x_{m_4^{(p)}-1,j}^{(p,4)}, \\
j &= \overline{0, n_4^{(p)} - 1}, \quad x_{m_1^{(p)},j}^{(p,1)} = x_{m_1^{(p)}-1,j}^{(p,1)}, \quad j = \overline{1, n_{B^1}^{(p)}}, \\
y_{m_1^{(p)},j}^{(p,1)} &= y_{m_1^{(p)}-1,j}^{(p,1)}, \quad j = \overline{n_{B^1}^{(p)}, n_1^{(p)} - 1}, \quad x_{0,j}^{(p,4)} = x_{1,j}^{(p,4)}, \\
j &= \overline{1, n_{C^1}^{(p)}}, \quad y_{0,j}^{(p,4)} = y_{1,j}^{(p,4)}, \quad j = \overline{n_{C^1}^{(p)}, n_4^{(p)} - 1};
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\Phi(\sigma) \stackrel{df}{=} \sum_{p, \xi=1}^{\tilde{p}, 4} \sum_{i, j} \left[\frac{\sigma \left(\begin{matrix} x_{i,j}^{(p,\xi)}, y_{i,j}^{(p,\xi)}, \chi, \alpha_1, \varepsilon_1 \\ x_1, y_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon_s, x_s, y_s \end{matrix} \right) - \frac{d(z_{i-1,j-1}^{(p,\xi,l)} + z_{i+1,j-1}^{(p,\xi,l)}) + d(z_{i-1,j+1}^{(p,\xi,l)} + z_{i+1,j+1}^{(p,\xi,l)})}{d(z_{i-1,j-1}^{(p,\xi,l)} + z_{i-1,j+1}^{(p,\xi,l)}) + d(z_{i+1,j-1}^{(p,\xi,l)} + z_{i+1,j+1}^{(p,\xi,l)})} \frac{1}{\tilde{\gamma}^{(p,\xi)}}}{1} \right]^2. \quad (19)$$

Тут $\gamma^{(p,\xi)}$ – квазіконформні інваріанти [8] для областей $G_\omega^{\gamma^{(p,\xi)}}$; $\left(x_{m_1^{(p)}, n_{B^1}^{(p)}}, y_{m_1^{(p)}, n_{B^1}^{(p)}} \right)$ і $\left(x_{0, n_{C^1}^{(p)}}, y_{0, n_{C^1}^{(p)}} \right)$ – вузли з витратами $\left[Q_{B^1}^{(p)} / \Delta \Psi^{(p,1)} \right] \Delta \Psi^{(p,1)}$ і $\left[Q_{C^1}^{(p)} / \Delta \Psi^{(p,4)} \right] \Delta \Psi^{(p,4)}$ через ділянки $\bar{O}_p B^0$ і $\bar{O}_p C^0$, відповідно; індекси та значення квазіконформних інваріантів формул (16) та (19) визначаються згідно табл. 1, і беруться в розрахунок виразу (19) лише у вузлах із порівняно великим значенням геометричного фактору;

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$x_{i,j}^{(p,\xi)} = x^{(p,\xi)}(\varphi_i^{(p,\xi)}, \psi_j^{(p,\xi)}),$$

$$y_{i,j}^{(p,\xi)} = y^{(p,\xi)}(\varphi_i^{(p,\xi)}, \psi_j^{(p,\xi)}),$$

$$\sigma_{i,j}^{\gamma^{(p,\xi)}} = \sigma(x_{i,j}^{(p,\xi)}, y_{i,j}^{(p,\xi)}), \quad (x_{i,j}^{(p,\xi)}, y_{i,j}^{(p,\xi)}) \in G_z^{(p,\xi)},$$

$$p = \bar{1}, \tilde{p}, \quad \xi = \bar{1}, 4;$$

$$x_{i,-1}^{(p,1)} = x_{i, n_2^{(p)}-1}^{(p,2)}, \quad y_{i,-1}^{(p,1)} = y_{i, n_2^{(p)}-1}^{(p,2)}, \quad x_{i, n_2^{(p)}+1}^{(p,2)} = x_{i,1}^{(p,1)},$$

$$y_{i, n_2^{(p)}+1}^{(p,2)} = y_{i,1}^{(p,1)}, \quad x_{-1,j}^{(p,3)} = x_{m_2^{(p)}-1,j}^{(p,2)}, \quad y_{-1,j}^{(p,3)} = y_{m_2^{(p)}-1,j}^{(p,2)},$$

$$x_{m_2^{(p)}+1,j}^{(p,2)} = x_{1,j}^{(p,3)}, \quad y_{m_2^{(p)}+1,j}^{(p,2)} = y_{1,j}^{(p,3)}, \quad x_{i,-1}^{(p,4)} = x_{i, n_3^{(p)}-1}^{(p,3)},$$

$$y_{i,-1}^{(p,4)} = y_{i, n_3^{(p)}-1}^{(p,3)}, \quad x_{i, n_3^{(p)}+1}^{(p,4)} = x_{i,1}^{(p,3)}, \quad y_{i, n_3^{(p)}+1}^{(p,4)} = y_{i,1}^{(p,3)}.$$

Варто зазначити [8], що різницева формула (16) побудована із застосуванням схеми типу «хрест» і використовується для порівняно швидкого проведення уточнення координат внутрішніх вузлів електродинамічних сіток. Вирази (17) та (18) – це умови ортогональності та крайові умови, відповідно; перші з них сформовані за допомогою лівих та правих різницевих схем першого поряд-

ку. Мінімізуючий функціонал (19) призначений для безпосередньої ідентифікації КП і побудований з міркувань квазіконформної подібності в малому криволінійних чотирикутників двох подібностей.

Таблиця 1

Залежності між індексами та значеннями квазіконформних інваріантів формул (16) та (19)

ξ	i	j	$\tilde{\gamma}^{(p,\xi)}$
1, 2, 3, 4	$\overline{1, m_\xi^{(p)} - 1}$	$\overline{1, n_\xi^{(p)} - 1}$	$\gamma^{(p,\xi)}$
1, 4	$\overline{1, m_\xi^{(p)} - 1}$	0	$\sqrt{\gamma^{(p,\xi)} \gamma^{(p,(\xi+5)/3)}}$
2	$m_2^{(p)}$	$\overline{1, n_2^{(p)} - 1}$	$\sqrt{\gamma^{(p,2)} \gamma^{(p,3)}}$

6. Алгоритм числового розв'язання різницевої задачі (16)–(19)

Полягає у почерговій параметризації квазіконформних інваріантів, внутрішніх та частини граничних вузлів сіткових областей і КП, з використанням ідей методу блочної ітерації [8–10]. Перш за все, задаємо наступні дані:

1) допоміжні параметри q_1 і q_2 , параметр точності ε , кількість сплесків s , кількість інжекцій \tilde{r} , номери наближення $l=0$ і $r=0$ шуканих функцій та параметрів;

2) квазіпотенціали $\varphi_*^{(p)}$, $\varphi_0^{(p)}$, $\varphi^{*(p)}$ та витрати $Q_{12}^{(p)}$ і $Q_{34}^{(p)}$ на відповідних ділянках $A_p B_p$ і $C_p D_p$;

3) початкові наближення параметрів КП $\chi^{(l)}$, $\alpha_k^{(l)}$, $\varepsilon_k^{(l)}$, $x_k^{(l)}$, $y_k^{(l)}$ ($k=1, \dots, s$);

4) кількість вузлів розбиття сіток рис. 1;

$$m_1^{(p)}, m_2^{(p)} = m_1^{(p)},$$

$$m_3^{(p)} = \left[m_1^{(p)} \frac{\varphi^{*(p)} - \varphi_0^{(p)}}{\varphi_0^{(p)} - \varphi_*^{(p)}} + 0.5 \right],$$

$$m_4^{(p)} = m_3^{(p)},$$

$$n_{12}^{(p)} = \left[m_1^{(p)} \frac{Q_{12}^{(p)}}{\varphi_0^{(p)} - \varphi_*^{(p)}} + 0.5 \right],$$

$$n_{34}^{(p)} = \left[m_4^{(p)} \frac{Q_{34}^{(p)}}{\varphi^{*(p)} - \varphi_0^{(p)}} + 0.5 \right],$$

$$n_\xi^{(p,l)} = \left[0.5 \min(n_{12}^{(p)}, n_{34}^{(p)}) + 0.5 \right]$$

$$(\xi=2,3), n_1^{(p,l)} = n_{12}^{(p)} - n_2^{(p,l)}, n_4^{(p,l)} = n_{34}^{(p)} - n_3^{(p,l)},$$

$$n_{B^1}^{(p,l)} \quad (n_{B^1}^{(p,l)} < n_1^{(p,l)}), \quad n_{C^1}^{(p,l)} \quad (n_{C^1}^{(p,l)} < n_4^{(p,l)});$$

- 5) параметри задання характерних точок на границях $x_A^{(p)}$, $x_B^{(p)}$, $x_C^{(p)}$, $x_D^{(p)}$;
 б) ширину a і висоту b досліджуваної області;
 7) координати граничних (на ділянках $B^0B^1C^1C^0$)

$$x_{i,n_1^{(p)}}^{(p,1)}, \quad y_{i,n_1^{(p)}}^{(p,1)} \quad (i = \overline{0, m_1^{(p)}}),$$

$$x_{i,0}^{(p,2)}, \quad y_{i,0}^{(p,2)} \quad (i = \overline{0, m_2^{(p)}}), \quad x_{i,0}^{(p,3)}, \quad y_{i,0}^{(p,3)} \quad (i = \overline{0, m_3^{(p)}}),$$

$$x_{i,n_4^{(p)}}^{(p,4)}, \quad y_{i,n_4^{(p)}}^{(p,4)} \quad (i = \overline{0, m_4^{(p)}}), \quad x_{0,j}^{(p,1)}, \quad y_{0,j}^{(p,1)} \quad (j = \overline{0, n_1^{(p)}}),$$

$$x_{0,j}^{(p,2)}, \quad y_{0,j}^{(p,2)} \quad (j = \overline{0, n_2^{(p)}}),$$

$$x_{m_3^{(p)},j}^{(p,3)}, \quad y_{m_3^{(p)},j}^{(p,3)} \quad (j = \overline{0, n_3^{(p)}}), \quad x_{m_4^{(p)},j}^{(p,4)}, \quad y_{m_4^{(p)},j}^{(p,4)} \quad (j = \overline{0, n_4^{(p)}})$$

та внутрішніх $x_{i,j}^{(p,\xi,l)}$, $y_{i,j}^{(p,\xi,l)}$

$$(i = \overline{1, m_\xi^{(p)}} - 1, \quad j = \overline{0, n_\xi^{(p,l)}} - 1, \quad \xi=1,4),$$

$$x_{i,j}^{(p,\xi,l)}, \quad y_{i,j}^{(p,\xi,l)} \quad (i = \overline{1, m_\xi^{(p)}} - 1, \quad j = \overline{1, n_\xi^{(p,l)}} - 1, \quad \xi=2,3),$$

$$x_{0,j}^{(p,3,l)} = x_{m_2^{(p)},j}^{(p,2,l)}, \quad y_{0,j}^{(p,3,l)} = y_{m_2^{(p)},j}^{(p,2,l)} \quad (j = \overline{1, n_2^{(p,l)}} - 1)$$

вузлів;

- 8) квазіпотенціали $\overline{\overline{\phi}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $\overline{\overline{\phi}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $\underline{\phi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}$ та локальні густини струму

$$\Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \quad \Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)}$$

(а, отже, $\psi_*^{(p)}(M)$, $\psi^{*(p)}(M)$) у точках

$$\left(\overline{\overline{x}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \overline{\overline{y}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \right), \quad \left(\overline{\overline{x}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \overline{\overline{y}}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \right),$$

$$\left(\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} \right), \quad \left(x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, y_{*j_*^{(p)}}^{(p)} \right),$$

$$\left(x_{j^{*(p)}}^{*(p)}, y_{j^{*(p)}}^{*(p)} \right),$$

на основі чого будуються функції

$$x = \bar{x}^{(p)}(\varphi), \quad x = \underline{x}^{(p)}(\varphi),$$

$$x = \bar{\bar{x}}^{(p)}(\varphi), \quad x = x_*^{(p)}(\psi),$$

$$x = x^{*(p)}(\psi)$$

шляхом інтерполяції.

Обчислюємо

$$\Delta\varphi^{(p,\xi)} = (\varphi_0^{(p)} - \varphi_*^{(p)}) / m_\xi^{(p)} \quad (\xi=1,2),$$

$$\Delta\varphi^{(p,\xi)} = (\varphi^{*(p)} - \varphi_0^{(p)}) / m_\xi^{(p)} \quad (\xi=3,4),$$

координати граничних вузлів

$$x_{m_1^{(p)},j}^{(p,1,l)}, \quad y_{m_1^{(p)},j}^{(p,1,l)} \quad \left(j = \overline{0, n_1^{(p,l)} - 1} \right),$$

$$x_{0,j}^{(p,4,l)}, \quad y_{0,j}^{(p,4,l)} \quad \left(j = \overline{0, n_4^{(p,l)} - 1} \right),$$

$$x_{m_2^{(p)},n_2^{(p,l)}}^{(p,2,l)} = x_{0,n_3^{(p,l)}}^{(p,3,l)} = x_{m_1^{(p)},0}^{(p,1,l)}, \quad y_{m_2^{(p)},n_2^{(p,l)}}^{(p,2,l)} = y_{0,n_3^{(p,l)}}^{(p,3,l)} = y_{m_1^{(p)},0}^{(p,1,l)} \quad (20)$$

на ділянках $B_p A_p D_p C_p$ за формулою (17) та квазіконформні інваріанти

$$\gamma^{(p,\xi,l)} = \frac{4}{m_\xi^{(p)} n_\xi^{(p,l)}} \times$$

$$\sum_{i,j=0}^{m_\xi^{(p)}-1, n_\xi^{(p,l)}-1} \frac{d(z_{i,j}^{(p,\xi,l)}, z_{i+1,j}^{(p,\xi,l)}) + d(z_{i,j+1}^{(p,\xi,l)}, z_{i+1,j+1}^{(p,\xi,l)})}{\sigma_{i,j}^{(p,\xi,l)} + \sigma_{i+1,j}^{(p,\xi,l)} + \sigma_{i,j+1}^{(p,\xi,l)} + \sigma_{i+1,j+1}^{(p,\xi,l)}} / \quad \xi = \overline{1,4}. \quad (21)$$

$$/ \left(d(z_{i,j}^{(p,\xi,l)}, z_{i,j+1}^{(p,\xi,l)}) + d(z_{i+1,j}^{(p,\xi,l)}, z_{i+1,j+1}^{(p,\xi,l)}) \right),$$

Для $p = \overline{1, \tilde{p}}$ послідовно ітераційно уточнюємо квазіконформні інваріанти $\gamma^{(p,\xi,l)}$, всі внутрішні та частину граничних вузлів (20) за формулами (21), (16) та (17), (18), відповідно, із одночасним збільшенням параметра l . При цьому, не ва-

рто допускати, щоб $n_{B^i}^{(p,l)} < 4$ і $n_{C^i}^{(p,l)} < 4$; рівняння систем (17)–(18) необхідно комбінувати таким чином, щоб відстані між приграничними і граничними вузлами ставали якомога меншими. Далі, кожні q_1 ітерацій, перевіряємо чи одночасно $\frac{\gamma^{(p,2,l)}m_2^{(p)} + \gamma^{(p,3,l)}m_3^{(p)}}{m_2^{(p)} + m_3^{(p)}} < \frac{\gamma^{(p,1,l)} + \gamma^{(p,4,l)}}{2}$, $n_1^{(p,l)} > 10$, $n_4^{(p,l)} > 10$. У позитивному випадку, зменшуємо $n_1^{(p,l)}$, $n_4^{(p,l)}$ та збільшуємо $n_2^{(p,l)}$, $n_3^{(p,l)}$. Інакше, якщо $\frac{\gamma^{(p,2,l)}m_2^{(p)} + \gamma^{(p,3,l)}m_3^{(p)}}{m_2^{(p)} + m_3^{(p)}} > \frac{\gamma^{(p,1,l)} + \gamma^{(p,4,l)}}{2}$, $n_2^{(p,l)} > 10$, то, навпаки, зменшуємо $n_2^{(p,l)}$, $n_3^{(p,l)}$ та збільшуємо $n_1^{(p,l)}$, $n_4^{(p,l)}$. Крім того, кожні q_2 ітерацій перевіряємо чи вузли сітки достатньо стабілізувались, наприклад, використовуючи формули [8]. У позитивному випадку, збільшуємо r та уточнюємо параметри КП $\chi^{(r)}$, $\alpha_k^{(r)}$, $\varepsilon_k^{(r)}$, $x_k^{(r)}$, $y_k^{(r)}$ ($k=1, \dots, s$) із використанням одного з методів глобальної оптимізації, наприклад, [11] щодо формули (19). Якщо $|\Phi^{(r)} - \Phi^{(r-1)}| < \varepsilon$ (фіктивно покладемо $\Phi^{(0)}=0$), то завершуємо ітераційний процес, виводимо на екран реконструйоване зображення та, при необхідності, електродинамічні сітки, області комплексного квазіпотенціалу, поля густин струму, величини витрат $Q_{\xi}^{(p)} = \Delta\varphi^{(p,\xi)} / \Delta\gamma^{(p,\xi,l)}$ ($\xi = \overline{1,4}$) тощо. Інакше – починаємо ітераційний процес заново.

7. Результати числових розрахунків параметрів КП засобами ЕРТ всередині фрагмента ґрунтового масиву

Числові розрахунки проводились за даними, отриманими за допомогою повнодіапазонної градієнтної установки [2, 4]. При цьому, розв'язування різницевої задачі (1), (16)–(18) пропонується здійснювати не у єдиній області рис. 1, а, а в достатньо великих \tilde{p}_h підобластях з поздовжніми $a_p = x_C^{(p)} - x_B^{(p)} + 180$ і поперечними $b_p = 0.5a_p$ розмірами ($p = \overline{1, \tilde{p}}$). При такому розбитті на підзадачі, з одного боку, мають місце досить малі значення геометричного фактору на границях, а з іншого – забезпечується економія машинного часу. Тут $a=a_p$, $b=b_p$ ($B^0 = B_p^0$, $C^0 = C_p^0$, $B^1 = B_p^1$, $C^1 = C_p^1$). На рис. 2 зображено приклади розрахункових сіток для 1-ї та 200-ї інжекцій. Саму ж процедуру уточнення вузлів сіток проводимо не при \tilde{p} ситуаційних випадках прикладання квазіпотенціалів із фіксованим КП, а при \tilde{p} різних варіантах розподілу КП при «блочно» фіксованих ділянках прикладання квазіпотенціалів. При цьому, з метою пришвидшення розрахунків, варто початкові наближення координат вузлів чергової інжекції обирати як розраховані з попередньої інжекції. Для зручності викладок, введемо також параметри \tilde{p}_w та \tilde{p}_h [2] для позначення загальної кількості ділянок прикладання квазіпотенціалів та різних відстаней прикладання, відповідно.

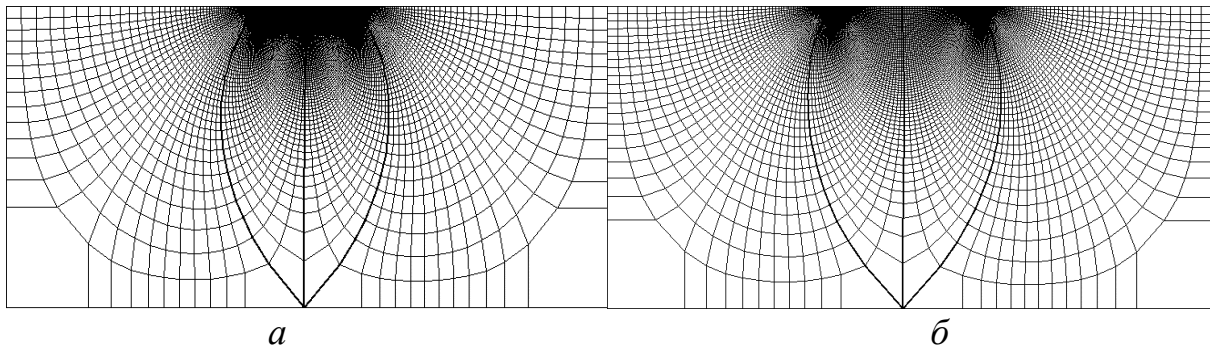


Рис. 2. Приклади розрахункових сіток: для a – 1-ї інжекції; b – 200-ї інжекції

Експериментальні дані значень функцій квазіпотенціалу та локальних густин струму вздовж ділянок $B_p^0 A_p B_p D_p C_p C_p^0$, при заданих параметрах КП χ , α_k , ε_k , x_k , y_k ($k=1, \dots, s$) і потенціалах $\varphi_*^{(p)}$, $\varphi_0^{(p)}$, $\varphi^{*(p)}$, отримувались за допомогою розробленої раніше нами програми імітації фізичного експерименту. При заданих

$$q_1=50, q_2=200, s=1,$$

$$\tilde{p}_h=2, \tilde{p}_w=61, \tilde{p}=(\tilde{p}_w-\tilde{p}_h+1),$$

$$m_1^{(p)} = 80, n_{B^1}^{(p,l)} = n_{C^1}^{(p,l)} = 5,$$

$$0.1 \leq \chi \leq 2, -2 \leq \alpha_k \leq 2, 1 \leq \varepsilon_k \leq 10000,$$

$$-0.25a_p \leq x_k \leq 0.25a_p, 0 \leq y_k \leq 0.5b_p,$$

$$\chi^{(l)} = 1, \alpha_k^{(l)} = 0, \varepsilon_k^{(l)} = 1,$$

$$x_k^{(l)} = 0, y_k^{(l)} = 0 \quad (l=0, k=\overline{1, s}),$$

$$x_A^{(p)} = -5(p_h+1),$$

при

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{p}_w + p_h - \\ -2\tilde{p}_h \end{array} \right) (p_h - 1) < p \leq \left(\begin{array}{c} \tilde{p}_w + p_h - \\ -2\tilde{p}_h + 1 \end{array} \right) p_h,$$

$$x_D^{(p)} = -x_A^{(p)}, x_B^{(p)} = x_A^{(p)} - 10, x_C^{(p)} = x_D^{(p)} + 10,$$

$$\varphi_*^{(p)} = -2, \varphi_0^{(p)} = 0, \varphi^{*(p)} = 2 \quad (p = \overline{1, \tilde{p}}, p_h = \overline{1, \tilde{p}_h})$$

та відомому еталоні рис. 3, *а* обчислювальний процес виявився збіжним, а розв'язок (рис. 3, *б*) «в розумних межах» відповідає очікуваному. Таких результатів вдалось досягти навіть при не виконанні вимоги щодо глибини досліджень, яка, згідно [2], не повинна перевищувати 1/3–1/6 максимальної відстані між ділянками $A_p B_p$ та $C_p D_p$.

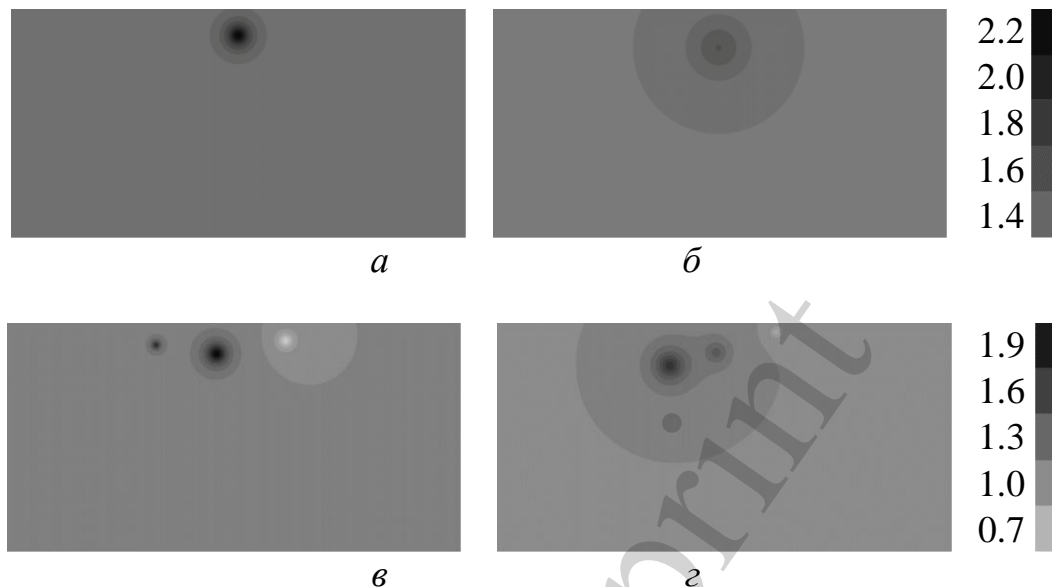


Рис. 3. Томографічні зображення розподілу значень КП в градації сірого: *а* – еталон із одним сплеском ($\chi=1.3$, $\alpha_0=1$, $\varepsilon_0=120$, $x_0=0$, $y_0=30$); *б* – відповідне реконструйоване зображення; *в* – еталон із трьома сплесками ($\chi=1$, $\alpha_0=0.7$, $\varepsilon_0=20$, $x_0=-90$, $y_0=25$, $\alpha_1=1$, $\varepsilon_1=100$, $x_1=-20$, $y_1=35$, $\alpha_2=-0.55$, $\varepsilon_2=50$, $x_2=60$, $y_2=20$); *г* – відповідне реконструйоване зображення

Ускладнивши структуру середовища шляхом задання $s=3$ сплесків та збільшивши кількість вхідних даних за допомогою параметра $\tilde{p}_h=4$, реконструйовано зображення рис. 3, *г* при еталонному рис. 3, *в*.

8. Обговорення результатів наближеного розв'язання задачі реконструкції зображення фрагмента ґрунтового масиву засобами ЕРТ

Як відомо [1], при розв'язанні задач засобами ЕРТ, не існує загального механізму порівняння якості отриманих зображень з еталонними. Оскільки найчастіше ЕРТ застосовують лише для визначення координат неоднорідностей в області [1, 2, 12], то, аналогічно до [9], у якості основного критерію, візьмемо нев'язки відстаней між «піками» значень КП.

На рис. 3, *б* при розрахованих параметрах $\hat{\chi}=1.271533$, $\hat{\alpha}_0=0.3321661$, $\hat{\varepsilon}_0=919.6152$, $\hat{x}_0=-1.254098$, $\hat{y}_0=43.75537$ нев'язка координат сплесків рівна 13.81242. Такий результат при всього $\tilde{p}_h=2$ можна пояснити невеликою кількістю шуканих параметрів. При цьому, функціонал (19) набуває значення 58249, що в середньому відповідає похибці величиною 0.018 на вузол, проте, очевидно, вона досягає суттєво більших значень на окремих ділянках.

На рис. 3, з при розрахованих параметрах $\hat{\chi} = 0.9853642$, $\hat{\alpha}_0 = 0.3160008$, $\hat{\varepsilon}_0 = 152.4604$, $\hat{x}_0 = -8.698875$, $\hat{y}_0 = 33.48841$, $\hat{\alpha}_1 = -0.2597447$, $\hat{\varepsilon}_1 = 27.3199$, $\hat{x}_1 = 59.79078$, $\hat{y}_1 = 10.39442$, $\hat{\alpha}_2 = 0.6426869$, $\hat{\varepsilon}_2 = 243.1526$, $\hat{x}_2 = -62.94914$, $\hat{y}_2 = 48.82635$ нев'язки координат «піків» значень КП наступні: 36.71644, 11.40177, 9.60786. У даному випадку, функціонал (19) набуває значення 194031, що в середньому відповідає похибці величиною 0.045 на вузол.

В обох розглянутих випадках, спостерігаються схожі динаміки розподілів значень КП у порівнянні з еталонними. А саме: очікувано [10], що розраховані зображення є розмитими, тобто отримано менші значення КП у центрах сплесків при більших їх масштабах. При цьому, координати реконструйованих «піків» по осі у знаходяться нижче, ніж на еталоні. Наведені факти пояснюються, з одного боку, властивостями функціоналів виду (15), що мінімізують квадрат похибки у низці вузлів одночасно, а з іншого – похибками методу квазіконформних відображень. Рівень останніх можливо дещо знизити одним із наступних шляхів:

- збільшенням кількості ділянок одночасного прикладання квазіпотенціалів, що, проте, може призвести до надто великого згущення околів суттєвого порушення квазіконформності; це можливо вирішити шляхом «заміни» гладкості у кутових точках на ортогональність;

- використанням точніших типів даних з метою зменшення накопичуваної в обчислювальному процесі похибки заокруглення, що, з іншого боку, негативно впливатиме на швидкість розрахунків;

- застосуванням точніших схем побудови сітки, що, з іншого боку, призведе до сповільнення обчислень;

- уникненням великих за розміром ділянок порушення квазіконформності навколо точок B_p^1 , C_p^1 шляхом зміни форми еквіпотенціальних ліній $B_p^0 B_p^1 C_p^1 C_p^0$ на більш гладкі;

- заданням більшої точності завершення процесу розрахунків: як на етапі імітації фізичного експерименту, так і в процесі ідентифікації КП.

Проблеми ж, які виникають через вигляд функціоналу (15), подібно до [1, 3], можна частково вирішити шляхом суттєвої зміни його вигляду або регуляризацією.

Варто зазначити, що проведене дослідження стосується ізотропних середовищ із наявними сплесками значень КП. Але аналогічно до [9], відповідні дослідження неважко поширити й на інші середовища, включаючи анізотропні. Проте в останньому випадку необхідно володіти додатковою інформацією про структуру тензора провідності [1, 6, 9].

Проведені дослідження також неважко поширити на випадок криволінійних поверхонь ґрунту [2, 12]. Проте тут важливою є наявність на досить великих територіях умов для кріплення електродів; інакше ж приймати рішення про застосування іншої схеми інжектування зарядів [2, 4, 5]. Зокрема від останнього суттєво залежить допустима глибина досліджень [2, 5].

Розраховані ж зображення не завжди легко вдається правильно трактувати, в першу чергу, через схожі електричні характеристики низки складових ґрунто-

вого масиву. Наприклад [2], лігніт, залежно від його стану, має такі ж значення КП, що й прісна вода.

Дослідження, аналогічно до [2], не стосується реконструкції зображення надто глибинних шарів ґрунту. Також залишаються проблеми при ідентифікації параметрів сильно контрастних середовищ.

В перспективі: перенесення розробленого алгоритму на простір [2], анізотропію [1, 6, 9] та випадки кусково-однорідних середовищ [2] із використанням умов неідеального контакту [13]. Окрім цього, важливою є розробка механізмів враховування різного роду додаткових умов про досліджуване середовище, зокрема, дискретні дані з глибинних шарів ґрунту [2, 4, 6]. Також доцільно розвинути розроблений підхід на випадки реконструкції зображення міжсвердловинного простору [2, 4, 6]. Важливим є питання розпаралелення обчислень типу [9], зважаючи на великі обсяги розрахунків.

9. Висновки

1. Перенесено розроблену в [10] методику реконструкції зображень суцільних об'єктів із відомими додатковими умовами вздовж усієї границі на випадок ідентифікації параметрів структур фрагментів ґрунтових масивів при нерівномірному заданні додаткових крайових умов. При цьому, реконструкція зображення відбувається лише в підобласті, в якій значення геометричного фактору є порівняно великим. Особливістю й перевагою запропонованого підходу є не лише уникнення використання дельта функцій Дірака, тобто «точковості» ділянок прикладання електродів, а й застосування якісно нових даних на ділянках прикладання потенціалів. Крім цього, передбачається, для кожної із відповідних інжекцій, наявність на границі області лише еквіпотенціальних ліній, із заданими функціями локальних густин струму, та ліній течії, із відомими розподілами квазіпотенціалу на них.

2. Розроблено алгоритм реконструкції зображення фрагмента ґрунтового масиву засобами електрорезистивної томографії за умови нерівномірного розподілу даних вздовж границі. Він передбачає почергову параметризацію величин квазіконформних інваріантів, внутрішніх та частини граничних вузлів сіткових областей і коефіцієнта провідності, з використанням ідей методу блочної ітерації. З метою пришвидшення обчислень також запропоновано модифікацію наведеного алгоритму.

3. Перспективність подальшого практичного впровадження запропонованого методу слідує із його здатності давати наближений результат при порівняно невисоких затратах. Зокрема, хоч із збільшенням віддалі від контактних електродів максимальна якість реконструкції стрімко падає, все ж, можливим є зменшення рівня похибки мінімізуючого функціоналу. Це дозволить отримувати точніші розв'язки, в першу чергу, в підобластях із досить великим значенням геометричного фактору. Досягнути такого ефекту можливо шляхом зменшення розмірів ділянок порушення квазіконформності, застосуванням точніших типів даних та різницевих схем при комп'ютерних розрахунках.

Література

1. Holder, D. (Ed.) (2004). *Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications*. CRC Press, 456. doi: <https://doi.org/10.1201/9781420034462>
2. Loke, M. H. (2020). Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys. URL: <https://www.geotomosoft.com/coursenotes.zip>
3. Пеккер, Я. С., Бразовский, К. С., Усов, В. Ю., Плотников, М. П., Уманский, О. С. (2004). *Электроимпедансная томография*. Томск: НТЛ, 192.
4. Kanli, A. I. (Ed.) (2019). *Applied Geophysics with Case Studies on Environmental, Exploration and Engineering Geophysics*. London: IntechOpen. doi: <https://doi.org/10.5772/intechopen.78490>
5. Dahlin, T., Zhou, B. (2005). Multiple-gradient array measurements for multichannel 2D resistivity imaging. *Near Surface Geophysics*, 4 (2), 113–123. doi: <https://doi.org/10.3997/1873-0604.2005037>
6. Herwanger, J. V., Pain, C. C., Binley, A., de Oliveira, C. R. E., Worthington, M. H. (2004). Anisotropic resistivity tomography. *Geophysical Journal International*, 158 (2), 409–425. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.2004.02314.x>
7. Pessel, M., Gibert, D. (2003). Multiscale electrical impedance tomography. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 108 (B1). doi: <https://doi.org/10.1029/2001jb000233>
8. Бомба, А. Я., Каштан, С. С., Пригорницький, Д. О., Ярошак, С. В. (2013). *Методи комплексного аналізу*. Рівне: Національний університет водного господарства та природокористування, 430.
9. Bomba, A. Y., Kuzlo, M. T., Michuta, O. R., Boichura, M. V. (2019). On a method of image reconstruction of anisotropic media using applied quasipotential tomographic data. *Mathematical Modeling and Computing*, 6 (2), 211–219. doi: <https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.211>
10. Bomba, A., Boichura, M. (2017). On a numerical quasiconformal mapping method for the medium parameters identification using applied quasipotential tomography. *Mathematical Modeling and Computing*, 4 (1), 10–20. doi: <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.010>
11. Aguiar e Oliveira Junior, H., Ingber, L., Petraglia, A., Rembold Petraglia, M., Augusta Soares Machado, M. (2012). *Stochastic Global Optimization and Its Applications with Fuzzy Adaptive Simulated Annealing*. Heidelberg: Springer-Verlag. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-27479-4>
12. Rymarczyk, T., Adamkiewicz, P. (2017). Monitoring damage and dampness in flood embankment by electrical impedance tomography. *Informatics Control Measurement in Economy and Environment Protection*, 7 (1), 59–62. doi: <https://doi.org/10.5604/01.3001.0010.4584>
13. Ulyanchuk-Martyniuk, O., Michuta, O., Ivanchuk, N. (2020). Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (10 (106)), 18–26. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210044>