УДК 681.325
DOI: 10.15587/1729-4061.2020.214899

Впровадження методу образних перетворень для мінімізації функцій Шеффера

М. Т. Соломко, Н. Л. Хомюк, Я. Г. Іващук, В. Д. Назарук, В. Б. Рейнська, Л. В. Зубик, А. М. Попова

Проведеними дослідженнями встановлена можливість зменшення обчислювальної складності, збільшення продуктивності мінімізації булевих функцій у класі досконалих нормальних форм функцій алгебри Шеффера методом образних перетворень.

Поширення методу образних перетворень на мінімізацію функцій алгебри Шеффера дає змогу виявляти нові алгебричні правила логічних перетворень. Особливістю спрощення функцій Шеффера на бінарних структурах 2-(n, b)-блок-схем (англ. 2-(n, b)-designs) є виняткові ситуації. Вони мають застосування як при виведенні результату спрощення функцій з бінарної матриці, так і при введенні функції Шеффера до матриці.

Показано, що досконалу нормальну форму n-містної функції Шеффера можна подати бінарними наборами або матрицею. Логічні операції над структурою матриці забезпечують результат спрощення функцій Шеффера. Це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах таблиці істинності заданої функції та обійтись без допоміжних об'єктів, як то карта Карно, діаграми Вейча, таблиці покриття та ін.

Порівняно з аналогами мінімізації функцій алгебри Шеффера розглянутий метод дозволяє:

– зменшити алгоритмічну складність мінімізації досконалих нормальних форм функцій Шеффера (ДНФШ-1 та ДНФШ-2);

– збільшити продуктивність мінімізації функцій алгебри Шеффера на 100–150 %;

– демонструвати наочність процесу мінімізації ДНФШ-1 або ДНФШ-2;

– забезпечити самодостатність методу образних перетворень для мінімізації функцій алгебри Шеффера за рахунок впровадження ознаки мінімальної функції та мінімізації на повній таблиці істинності ДНФШ-1 і ДНФШ-2.

Є підстави стверджувати, що застосування методу образних перетворень для мінімізації функцій алгебри Шеффера виводить проблему мінімізації ДНФШ-1 та ДНФШ-2 на рівень добре дослідженої задачі у класі диз'юнктивно-кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ) булевих функцій.

Ключові слова: метод образних перетворень, мінімізація функцій Шеффера, штрих Шеффера, терм Шеффера, ДНФШ-1, ДНФШ-2.

1. Вступ

Вся історія цифрових схем ґрунтується на виборі логічного базису та оптимізації функцій у цьому базисі. Базиси Вебба і Шеффера привертають увагу тим, що вони складаються з однієї функції, тобто є монофункціональними та легко реалізуються транзисторними схемами. Базис Шеффера використовує логічні елементи NAND.

Технологічна перевага логічних елементів NOR і NAND випливає із двох положень. По-перше – вони забезпечують функціонально повний базис – кожна булева функція може бути реалізована за допомогою сполучення елементів NOR або NAND (рис. 1).

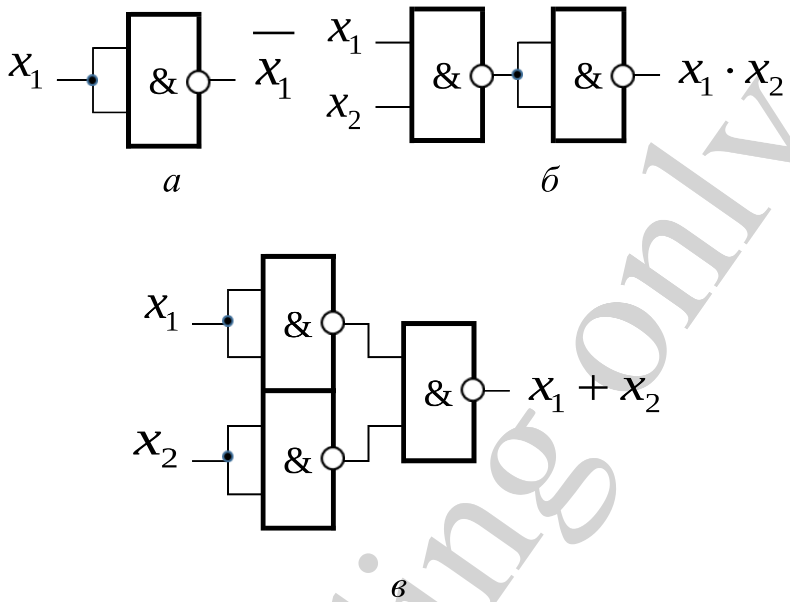


Рис. 1. Реалізація елементів основного базису {НЕ, І, АБО} на елементах І-НЕ: *а* – інвертор, *б* – кон'юнкція, *в* – диз'юнкція

Друге положення полягає у тому, що ці логічні елементи потребують менше транзисторів (наприклад, у логіці NMOS затвор NAND простіший, ніж логічний елемент AND або OR) [1–3]. Однак розробники природньо використовують уявлення на основі логічного базису {AND, OR, NOT}, а не на основі {NOR, NAND}. Крім цього, майже всі відомі методи мінімізації логічних схем, починаючи з карт Карно і до алгоритмів Еспресо, дають результати також на основі {AND, OR, NOT} [4, 5]. Тільки після такої мінімізації спеціальні алгоритми проводять заміну елементів базису {AND, OR, NOT}, на елементи базису {NOR, NAND}. У випадку дворівневої мінімізації у вигляді ДНФ або КНФ, таке відображення є тривіальним. Однак у схемах FPGA характерною є багаторівнева реалізація булевих функцій [6–9]. Оптимальне перетворення багаторівневої схеми з базису {AND, OR, NOT}, у базис {NOR, NAND} є не простим завданням.

Штрих Шеффера є 2-місна логічна операція 2-NAND (рис. 2).

Для позначення операції «штрих Шеффера» зазвичай використовують символи /, | або ↑. Операція «штрих Шеффера» є запереченням кон'юнкції – $f = \left(x_1 / x_2\right) = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$, тому значення операції «штрих Шеффера» «хибно» одержується тільки тоді, коли обидва аргументи x_1 і x_2 приймають значення «істинно» (табл. 1).

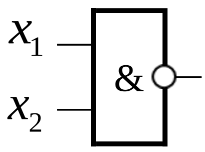


Рис. 2. Логічний елемент 2-NAND

Таблиця 1
Таблиця істинності операції «штрих Шеффера»

x_1	x_2	$f = x_1 / x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Оскільки базис Шеффера належить області оптимізації логічних функцій [10], актуальними залишаються дослідження направлені, зокрема, на вдосконалення таких чинників, як:

– методи спрощення булевих функцій у базисі Шеффера;
– мінімізація логічних схем на основі функцій Шеффера;
– достовірність оптимального результату мінімізації функції;
– вартості процесу мінімізації логічних функцій.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Швидке перетворення багаторівневої логіки базису {AND, OR, NOT}, до функціонально еквівалентної схеми базису {NOR, NAND} розглянуто у статті [11]. Показано, що завдання може бути вирішено шляхом заміни логічних елементів AND і OR на елементи NAND або NOR, однак це вимагає у деяких випадках введення додаткових інверторів або розподілу логічних елементів. У статті запропоновані алгоритми швидкого перетворення ланцюга з базису {AND, OR, NOT} у базис {NOR, NAND}, мінімізуючи при цьому кількість інверторів. Представлені алгоритми дозволяють перетворити будь-яку багаторівневу схему в ланцюг, що є комбінацією логічних елементів NOR, NAND або обох типів універсальних логічних елементів.

Реалізація логічних функцій з використанням вентилів NAND або NOR розглянуто у роботі [12]. Продемонстрована заміна у схемі логічних елементів NOT, OR та AND на логічні елементи NAND. Однозначність заміни логічних елементів з базису {AND, OR, NOT} на елементи з базису {NOR, NAND} забезпечується перетвореннями де Моргана. Процедура заміни логічних елементів завершується оптимізацією схеми, яка полягає у заміні з'єднання з парної кількості інверсій у вигляді функції NOT відрізком провідника.

Алгоритм реалізації булевого значення функцій, використовуючи лише логічні елементи NAND або тільки NOR представлений у роботі [13]. Алгоритм перетворення логічної структури булевого базису до структури монобазису виконується поетапно. Спочатку булева функція, що представлена логічними елементами {AND, OR, NOT}, використовуючи закони де Моргана в різних формах, перетворюється так, щоб у схемі використовувались лише елементи NAND або лише елементи NOR. Далі видаляють надмірні інвертори. У випадку, коли два інвертори послідовно (перевернутий вихід надходить безпосередньо у перевернутий вхід), видаляються обидва інвертори, оскільки вони анулюють один одного. На останньому етапі здійснюється заміна інверторів, що залишились еквівалентними елементами NAND або NOR.

Імплементація логічних схем, використовуючи лише елементи NAND і NOR, розглядається у роботі [14]. Тут зазначається, що елементи NAND і NOR є універсальними логічними елементами, за допомогою яких може бути реалізована будь-яка логічна функція без необхідності використовувати будь-який інший тип логічних елементів. На практиці це вигідно, оскільки елементи NAND та NOR є економічні та легші у виробництві, і є основними елементами, що використовуються у всіх сімействах цифрових логічних мікросхем. Насправді, елементи AND зазвичай реалізуються як елемент NAND, за якими знаходиться інвертори, а не навпаки. Подібним чином, затвор OR зазвичай реалізується як затвор NOR, за яким знаходиться інвертор, а не навпаки. Щоб реалізувати функцію, використовуючи лише елементи NAND, її потрібно спочатку спростити до суми добутку (ДНФ), а щоб реалізувати функцію, використовуючи лише елементи NOR, її потрібно спочатку спростити до добутку суми (КНФ). У роботі [14] показано, що ДНФ функції може бути реалізована лише з використанням елементів NAND, тоді як КНФ функції може бути реалізована, використовуючи лише елементи NOR.

У статті [15] пропонується реалізація повністю оптичних універсальних логічних затворів на основі фотонного кристала NAND та NOR з базовими логічними затворами, а саме NOT, AND та OR у дворівневій логіці з використанням теореми де Моргана. Відповідно до теореми, елементи NAND або NOR можуть бути спроектовані з двома елементами NOT на першому рівні, каскадними до другого рівня OR чи елемента AND, відповідно. Спочатку базові логічні елементи розроблені та оптимізовані таким чином, що їх реалізація при проектуванні шлюзів NAND і NOR не може погіршити порогове значення логічних рівнів. Довжина вхідних хвилеводів у кожній конструкції зберігається загальною, щоб мати зміну перешкод вхідних сигналів з різницею фаз 0° і 180°. Запропоновані основні логічні елементи отримані з коефіцієнтом контрастності 11,04, 8,24 та 5,18 дБ відповідно. Тоді як розрахункові значення коефіцієнта контрастності елементів NAND та NOR становлять 5,81 та 4,02 дБ відповідно. Більше того, швидкість передачі даних запропонованих конструкцій перевищує 7,485 Тбіт/с, що свідчить про їх неминуче використання у високошвидкісних мережах передачі даних.

Оптимізація комбінованих логічних схем з використанням елементів NAND та генетичного програмування розглянуто у статті [16]. Оптимізація логічної схеми, що реалізує булеву функцію, може бути виконана за різними критеріями. Це може бути оптимізація складності схеми, кількості логічних рівнів, кількості напівпровідникових пристроїв у схемі тощо. У роботі [16] автори представляють підхід, що використовує генетичне програмування для оптимізації заданої булевої функції щодо вищезазначених критеріїв. Замість набору логічних елементів {AND, OR, NOT, XOR} були використані універсальні елементи NAND, які забезпечили кращу швидкодію та компактність схеми. Традиційні методи мінімізації логічних структур дають спрощені вирази у двох стандартних формах: сума добутків (SOP) або добуток сум (POS). Форма SOP може бути перетворена у вираз NAND за допомогою процедури, але перетворення не приводить до оптимальної схеми, ні за кількістю логічних елементів, ні за кількістю логічних рівнів. Результати експериментальних досліджень показали, що метод генетичного програмування, який представлений у роботі [16], дає кращі результати, порівняно з перетворенням форми SOP у вираз NAND, щодо кількості затворів, логічних рівнів та напівпровідникових пристроїв схеми.

Загальний погляд на синтетичну біологію як стандартну інженерну сферу та синтетичні обчислювальні конструкції розглянуто у роботі [17]. Серед найбільш поширених логічних одиниць функції NOT і AND є одними з найважливіших елементів. Розглянуто приклад синтетичної реалізації логіки NAND на основі генетичних регуляторних елементів. Більш складні схеми або мікросхеми з комбінацій таких елементів забезпечує планарна технологія. Зазначається, що логічні елементи NOR або NAND можуть бути використані для побудови будь-якої можливої схеми, однак ця екстраполяція не змогла досягти успіху при її застосуванні до синтетичних біологічних конструкцій.

З огляду літературних джерел [11–17] випливає, що метод генетичного програмування, який представлений у роботі [16], дає кращі результати мінімізації логічної функції з використанням універсальних логічних елементів NAND, порівняно з перетворенням форми SOP у структуру NAND, щодо кількості затворів, логічних рівнів і транзисторів схеми. Результат обумовлений застосуванням багатоцільової оптимізації схем за допомогою генетичного програмування. Процес еволюційного проектування логічного ланцюга, таким чином, порівнюється з формами традиційного дизайнерського процесу, що заснований на знаннях дизайну та досвіду аналітичного методу.

Особливість мінімізації булевих функцій методом образних перетворень полягає у застосуванні бінарних матриць, зі встановленим переліком правил скорочення булевих функцій. Результатом скорочення термів бінарної матриці є деяка комбінаторна система, метадані, що можуть пояснювати інші дані, наприклад, визначити мінімальну булеву функцію для іншого базису. Крім зазначеної властивості бінарних матриць, вони також вміщують комбінаторні образи. Характерною особливістю образів є смислова ємність, здатність передавати великий обсяг інформації невеликою кількістю знаків і, як наслідок, імпліціювання значної частини цієї інформації.

Майже всі відомі методи мінімізації логічних функцій, починаючи з карт Карно і до алгоритмів Еспресо, дають результати у булевому базисі. Тільки після такої мінімізації спеціальні алгоритми проводять заміну елементів базису {AND, OR, NOT}, на елементи базису {NOR, NAND} [4, 5, 11–14].

Метод образних перетворень забезпечує мінімізацію логічних функцій безпосередньо в монобазисах, зокрема у базисі Шеффера. Таким чином розглянуті алгоритми та методи мінімізації перемикальних функцій [4, 5, 11–14] і метод образних перетворень посідають відмінні підходи, а відтак вбачають різні перспективи стосовно технологічної можливості мінімізації монофункціональних функцій. Зокрема перспективою є застосування нових алгебричних правил рівносильного перетворення логічних функцій для монобазису {І-НЕ}, що дасть розширення можливостей аналітичного методу.

У зв'язку з цим є підстави вважати, що процедура мінімізації перемикальних функцій, яка представлена алгоритмами та методами мінімізації [11–15], є недостатньою для проведення теоретичних досліджень стосовно оптимальної мінімізації монофункціональних функцій. Це обумовлює необхідність досліджень з рівносильними образними перетвореннями монофункціональних функцій, зокрема для монобазису {І-НЕ}. У прикладному відношенні зазначений підхід дозволяє розширити можливості технології проектування цифрових компонентів для монобазису {І-НЕ}.

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є поширення методу образних перетворень на мінімізацію булевих функцій у класі досконалих нормальних форм функцій алгебри Шеффера (ДНФШ-1 та ДНФШ-2). Це дає можливість спростити, збільшити продуктивність мінімізації функцій Шеффера, розширивши алгебричні правила логічних перетворень.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

– встановити адекватність застосування методу образних перетворень для мінімізації булевих функцій у базисі Шеффера, зокрема визначити герменевтику логічних операцій на бінарних структурах;

– провести аналіз та забезпечити правила спрощення функцій Шеффера у виняткових ситуаціях;

– розширити алгебру Шеффера у частині мінімізації логічних функцій;

– встановити ознаку мінімальної функції Шеффера;

– проаналізувати доцільність застосування образних перетворень для спрощення двох нормальних формах – ДНФШ-1 і ДНФШ-2 на повній таблиці істинності заданої функції Шеффера.

4. Функції Шеффера

Будь-яку логічну функцію в алгебрі Шеффера можна подати у канонічній формі, що має вигляд І-НЕ/І-НЕ (NAND/NAND). Форма І-НЕ/І-НЕ є нормальною (2-рівневою) – як внутрішньою, так і зовнішньою є функція І-НЕ.

Канонічна форма І-НЕ/І-НЕ логічної функції від n змінних, складається з термів Шеффера n-го рангу, об'єднаних операцією І-НЕ.

Терм Шеффера n-го рангу має такий узагальнений вигляд [18]:

$$\overline{x_n^{\sigma_n} \cdot x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_1}} \text{ або } x_n^{\sigma_n} / x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} / \ldots / x_n^{\sigma_1}, \qquad (1)$$

де $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, \text{ якщо } \sigma_i = 1 \\ \bar{x}_i, \text{ якщо } \sigma_i = 0, \end{cases}$ $i = 2,3,...,n,$ $<\sigma_n \sigma_{n-1} ... \sigma_1>$ – бінарний набір.

Будь-якому бінарному набору відповідає терм Шеффера $\overline{x_n^{\sigma_n} \cdot x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \cdot ... \cdot x_n^{\sigma_1}}$ або функція Шеффера $x_n^{\sigma_n} / x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} / ... / x_n^{\sigma_1}$ і, навпаки, – терму Шеффера $\overline{x_n^{\sigma_n} \cdot x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \cdot ... \cdot x_n^{\sigma_1}}$ або функції Шеффера $x_n^{\sigma_n} / x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} / ... / x_n^{\sigma_1}$ відповідає бінарний набір (кортеж). Наприклад, набору <1100> відповідає терм Шеффера $\overline{x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4}$ або функція Шеффера $x_1 / x_2 / \bar{x}_3 / \bar{x}_4$, а терму Шеффера $\overline{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5}$ або функції Шеффера $\bar{x}_1 / x_2 / \bar{x}_3 / \bar{x}_4 / x_5$ відповідає набір <01001>.

Правила виконання операції «штрих Шеффера» мають наступні співвідношення (табл. 2), перевірка яких здійснюється за допомогою таблиць істинності.

Таблиця 2
Правила виконання операції «штрих Шеффера» та формули перетворення

№ з/п	Штрих Шеффера, 2-NAND
1	$x / x = \bar{x}$
2	$x / \bar{x} = 1$
3	$x / 1 = \bar{x}$
4	$x / 0 = 1$
5	$\bar{x} / 0 = 1$
6	$\bar{x} / 1 = x$
7	$x_1 / x_2 = \overline{\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2}$
8	$\bar{x}_1 / \bar{x}_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2}$
9	$\overline{x_1 / x_2} = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2$
10	$\overline{x_1 / x_2} = x_1 x_2$

Перехід від базису Буля до базису Шеффера здійснюють за допомогою рівнянь:

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = \overline{x_1 / x_2} = (x_1 / x_2) / (x_1 / x_2);$$

$$\bar{x}_1 = x_1 / x_2;$$

$$x_1 + x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \bar{x}_1 / \bar{x}_2 = (x_1 / x_1) / (x_2 / x_2).$$

В алгебрі Шеффера справедливий тільки переставний закон:

$$x_1 / x_2 = x_2 / x_1;$$

$$x_1 / x_2 / x_3 = x_2 / x_3 / x_1.$$

Всі визначення для функцій алгебри логіки у базисі {І, АБО, НЕ} мають свої аналоги і для базису Шеффера {І-НЕ} (табл. 3). Заміна базису {І, АБО, НЕ} на базис {І-НЕ} можлива на підставі формул де Моргана:

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}};$$

$$x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}.$$

Таблиця 3
Тезáуруси логічних базисів

№ з/п	Тезáурус базису {І, АБО, НЕ}	Тезáурус базису {І-НЕ}
1	імпліканта	інверсанта
2	проста імпліканта	проста інверсанта
3	Досконала диз’юктивна нормальна форма (ДДНФ)	Досконала нормальна форма Шеффера –1 (ДНФШ-1)
4	Досконала кон’юктивнв нормальна форма (ДКНФ)	Досконала нормальна форма Шеффера –2 (ДНФШ-2)
5	Мінімальна диз’юктивна нормальна форма (МДНФ)	Мінімальна нормальна форма Шеффера –1 (МНФШ-1)
6	Мінімальна кон’юктивна нормальна форма (МКНФ)	Мінімальна нормальна форма Шеффера –2 (МНФШ-2)

Для отримання ДШНФ-1 у таблиці істинності відмічаються ті набори змінних, на яких функція Шеффера повертає одиничне значення. Помічені набори записуються у вигляді термів, у яких як операція використовується «штрих Шеффера». Терми об’єднуються між собою також операцією «штрих Шеффера» (2):

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \mathop{/}_{\alpha} f\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) x_1^{\alpha_1} / x_2^{\alpha_2} / ... / x_n^{\alpha_n}, \qquad (2)$$

де $\alpha_i \in \{0,1\}$ і $x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x, \text{ якщо } \alpha_i = 1 \\ \overline{x}, \text{ якщо } \alpha_i = 0 \end{cases}.$

Якщо змінна для даного терму приймає одиничне значення, то вона береться у прямому коді, інакше – в інверсному.

Приклад 1. Для функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (табл. 4) представити ДШНФ-1.

У відповідності з алгоритмом отримуємо:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right).$$

Для отримання ДШНФ-2 у кожному термі Шеффера змінні об'єднують операцією «штрих Шеффера», від яких він залежить. Якщо змінна для даного терму приймає нульове значення, то вона береться у прямому коді, інакше – в інверсному.

Таблиця 4
Таблиця істинності логічної функції $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

Приклад 2. Для функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (табл. 4) представити ДШНФ-2.

У відповідності з алгоритмом отримуємо:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right).$$

За аналогією з 2-містними функціями розглядаються й n-містні функції Шеффера (S_n) (табл. 5):

$$S_n = x_1 / x_2 / x_3 / \ldots / x_n .$$

Таблиця 5
Таблиця істинності n-містної функції Шеффера (S_{n})

x_1	x_2	x_3	.	.	.	x_{n-1}	x_n	S_n
0	0	0	–	–	–	0	0	1
0	0	0	–	–	–	0	1	1
0	0	1	–	–	–	1	0	0
–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	0	1	–	–	–	0	1	1
1	1	0	–	–	–	1	0	0
1	1	1	–	–	–	1	1	1

При n=2 з табл. 5 отримують 2-містну функцію Шеффера, а при n=1 функція Шеффера вироджуються у функцію заперечення. Тому вираз x/x можна представити як $\overline{x}$.

$$x / x = \overline{x}.$$

Справедливі наступні співвідношення для n-містних функцій Шеффера:

$$x / x / x / \ldots / x = \overline{x};$$

$$x / x / \ldots / x / \overline{x} / \ldots / \overline{x} = 1;$$

$$x_1 / \ldots / x_l / 1 / \ldots / 1 = x_1 / \ldots / x_l;$$

$$x_1 / \ldots / x_l / 0 / \ldots / 0 = 1;$$

$$x_1 / x_2 / \ldots / x_n = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n.$$

5. Результати мінімізації функцій Шеффера методом образних перетворень

Рівносильні образні перетворення при мінімізації функцій Шеффера дають наступний результат:

– визначають герменевтику логічних операцій на бінарних структурах;

– забезпечують правила спрощення функцій Шеффера у виняткових ситуаціях;

– розширюють алгебру Шеффера у частині мінімізації логічних функцій;

– встановлюють ознаку мінімальної функції Шеффера;

– спрощують мінімізацію функцій Шеффера на повній таблиці істинності.

5. 1. Герменевтика логічних операцій на бінарних структурах

У кон'юктивній нормальній формі (КНФ) булевої функції

$$F = \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right) \tag{3}$$

змінні з інверсією $\overline{x}_n$ замінимо на 0_n, а змінні без інверсії x_n замінимо на 1_n, де n – числовий індекс, який визначає розрядність символа-змінної «1» або «0» у макстермі функції (3) [19]. Тоді отримаємо двійковий еквівалент виразу логічної функції у КНФ [19]

$$F_{\text{КНФ}} = \left(0_1 + 0_2 + 0_3\right)\left(0_1 + 0_2 + 1_3\right) \tag{4}$$

або матрицю

$$F_{\text{КНФ}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Диз'юктивну нормально форму (ДНФ) булевої функції

$$F_{\text{ДНФ}} = \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 + \overline{x}_1\,\overline{x}_2 x_3 \qquad (6)$$

можна подати бінарними кодами

$$F = 0_1 0_2 0_3 + 0_1 0_2 1_3 \qquad (7)$$

або матрицею

$$F_{\text{ДНФ}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Споглядаючи матриці (5) і (8) бачимо, що КНФ і ДНФ логічних функцій представлені матрицями з однаковими комбінаторними структурами [19]. Різниця між ними стосовно рівносильних перетворень полягає у герменевтиці логічних операцій. Матриця, що відображає КНФ булевої функції (5), подає макстерми функції та операцію кон'юнкції для них, а матриця, що відображає ДНФ булевої функції (8) – мінтерми функції та операцію диз'юнкції для них.

Комбінаторні структури-образи та рівносильні перетворення на них можна поширити на базис Шеффера. Наприклад, якщо для запису виродження змінних у базисі Шеффера

$$x / x = \overline{x}, \qquad (9)$$

змінну з інверсією $\overline{x}$ замінити на «0», а змінні без інверсії x замінити на «1», то отримаємо двійковий еквівалент виродження змінних у базисі Шеффера

$$1/1 = 0, \qquad (10)$$

або матрицю

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = |\ 1\ | = \overline{x}. \qquad (11)$$

Оскільки вихідна матриця (11) складається з одного стовпчика, і, отже, відсутні умови для виникнення третьої виняткової ситуації (п. 5. 2) при виведенні результату в (11) можна застосовувати першу або другу виняткову ситуацію (п. 5. 2).

Запис виродження змінних у базисі Шеффера (10) за допомогою матриці (11) подає 1-містні терми функції Шеффера та операцію «штрих Шеффера» для них.

По іншому, – виродження змінних (10) у базисі Шеффера має ілюстрацію образу (11).

Якщо операцію (9) поширити на *n*-містні терми Шеффера, отримаємо логічну операцію ідемпотентності змінних для базису Шеффера:

$$\left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_2\right) = \overline{x_1 / x_2}. \tag{12}$$

Перетворення виразу (12) можна продовжити:

$$\overline{x_1 / x_2} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = x_1 x_2. \tag{13}$$

Споглядаючи вираз (13), бачимо, що операція ідемпотентності для 2-містних термів Шеффера відповідає логічному добутку змінних x_1 і x_2.

Операція ідемпотентності (12) у базисі Шеффера має ілюстрацію образу (14):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = |\,1 \quad 1\,| = \overline{x_1 / x_2};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |\,1 \quad 0\,| = \overline{x_2 / \overline{x_2}}. \tag{14}$$

При виведенні результату (14) була застосована друга виняткова ситуація (п. 5. 2).

Операція ідемпотентності для 3-містних термів Шеффера відповідає логічному добутку змінних x_1, x_2 і x_3:

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3\right) = \overline{x_1 / x_2 / x_3}. \tag{15}$$

$$\overline{x_1 / x_2 / x_3} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}} = x_1 x_2 x_3.$$

Доведення ідемпотентності змінних x_1, x_2, x_3 у (15) базується на таких перетвореннях:

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3\right) = \overline{x_1 x_2 x_3} / \overline{x_1 x_2 x_3} = \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) =$$
$$= \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right)} = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}} = x_1 x_2 x_3 = \overline{x_1 / x_2 / x_3}.$$

Операція ідемпотентності (15) у базисі Шеффера має ілюстрацію образу (16):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |\,1 \quad 1 \quad 1\,| = \overline{x_1 / x_2 / x_3};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \, 1 \quad 0 \quad 1 \, \right| = \overline{x_1 / \overline{x_2} / x_3}. \tag{16}$$

При виведенні результату (16) була застосована друга виняткова ситуація (п. 5. 2).

Інші варіанти ідемпотентності змінних для *n*-містних термів Шеффера мають наступний вигляд:

$$\overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} / \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} = x_1 / x_2 / x_3. \tag{17}$$

Доведення результату операції (17) базується на таких перетвореннях:

$$\overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} / \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} = \left(x_1 x_2 x_3\right) / \left(x_1 x_2 x_3\right) =$$
$$= \overline{\left(x_1 x_2 x_3\right) \cdot \left(x_1 x_2 x_3\right)} = \overline{x_1 x_2 x_3} = x_1 / x_2 / x_3.$$

Доведемо перетворення

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} = 1. \tag{18}$$

Доведення:

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} = \left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) / x_3\right) / \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} = \left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right) / \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right)} =$$
$$= \left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right) / \overline{\left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) / x_3\right)} = \left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right) / \overline{\left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right)} = \left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right) / \left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) x_3\right) =$$
$$= \overline{\left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) x_3\right)} = \left(\overline{x_1 x_2 + \overline{x_3}}\right) + \overline{\left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) x_3\right)} =$$
$$= \left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) \cdot x_3\right) + \left(\left(\overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}}\right) + \overline{x_3}\right) = \left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) \cdot x_3\right) + \left(x_1 x_2 + \overline{x_3}\right) =$$
$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) \cdot x_3 + x_1 x_2 + \overline{x_3} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_1 x_2 + \overline{x_3} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_2 + \overline{x_3} = \overline{x_1} + 1 + \overline{x_3} = 1.$$

Перетворення (18) доведено.

Для подання досконалої нормальної форми *n*-місної функції Шеффера (ДНФШ) бінарним еквівалентом або матрицею потрібно змінні з інверсією $\overline{x_n}$ замінити на 0_n, а змінні без інверсії x_n – на 1_n [19], де *n* – числовий індекс, який визначає розрядність символа-змінної «1» або «0» у термах функції Шеффера.

Досконалу нормальну форму 3-містної функції Шеффера

$$F = \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / x_3\right), \tag{19}$$

можна подати бінарними наборами

$$F = \left(0_1 / 0_2 / 0_3\right) / \left(0_1 / 0_2 / 1_3\right), \tag{20}$$

або матрицею

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

У цьому випадку матриця (21) буде екземпляром класу бінарних матриць функцій Шеффера.

Споглядаючи матрицю (21), бачимо, що її комбінаторна структура збігається зі структурами матриць (5) і (8). Різниця між матрицями (21) та (5) і (8) стосовно рівносильних перетворень полягає у герменевтиці логічних операцій: матриця (21) подає терми функції Шеффера та операцію «штрих Шеффера» для них. Зазначену герменевтику доцільно застосовувати при виведенні результату логічних операцій у класі бінарних матриць функцій Шеффера.

Приклад 3. Для функції $f(x_1, x_2, x_3)$ (табл. 6) знайти ДНФШ-1, ДНФШ-2, методом образних перетворень знайти МНФШ-1 і МНФШ-2.

Таблиця 6
Таблиця істинності функції $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

ДНФШ-1 функції $f(x_1, x_2, x_3)$ має такий вигляд:

$$F_{\text{ДНФШ}-1} = \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3\right).$$

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 1 & \end{vmatrix} = \overline{x}_1 x_3 + x_1 x_2 = \left(\overline{x_1} / x_3\right) / \left(x_1 / x_2\right)$$

або

$$F_{\text{МНФШ}-1}=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&&1\\1&1&\end{vmatrix}=\left(\overline{x_1}/x_3\right)/\left(x_1/x_2\right).$$

Для пошуку $F_{\text{МНФШ-1}}$ використані правила склеювання змінних (30), (32).

ДНФШ-2 функції $f(x_1,x_2,x_3)$ має вигляд:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1/x_2/x_3\right)/\left(x_1/\overline{x_2}/x_3\right)/\left(\overline{x_1}/x_2/x_3\right)/\left(\overline{x_1}/x_2/\overline{x_3}\right).$$

$$F_{\text{МНФШ}-2}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&&1\\0&1&\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x_1+x_3\right)\left(\overline{x_1}+x_2\right)=\overline{\left(\overline{x_1}\,\overline{x_3}\right)\left(x_1\overline{x_2}\right)}=\overline{\left(\overline{x_1}/\overline{x_3}\right)/\left(x_1/\overline{x_2}\right)}.$$

або

$$F_{\text{МНФШ}-2}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&&1\\0&1&\end{vmatrix}=\overline{\left(\overline{x_1}/\overline{x_3}\right)/\left(x_1/\overline{x_2}\right)}. \qquad (22)$$

Для пошуку $F_{\text{МНФШ-2}}$ використані правила склеювання змінних (30), (32).

Таким чином при виведенні $F_{\text{МНФШ-2}}$ (22), що вміщує більше одного терма, інвертується весь виведений вираз $F_{\text{МНФШ-2}}$ та змінні завершальної бінарної матриці функції Шеффера.

5. 2. Виняткові ситуації при спрощенні функцій Шеффера на бінарних структурах

При спрощенні функцій Шеффера на бінарних структурах необхідно враховувати виняткові ситуації:

Перша виняткова ситуація. Якщо у спрощеній функції Шеффера є терм (терми), який (які) складається з однієї змінної (тобто терм має максимальний ранг), то змінна, що описує терм, береться в інверсному коді.

У базисі Шеффера один літерал подається у формі:

$$x/x=\overline{x}\ \text{або}\ \overline{x}/\overline{x}=x,$$

якій відповідають логічні елементи (рис. 3).

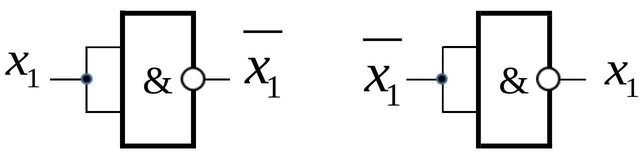


Рис. 3. Логічні елементи для одного літералу у базисі Шеффера

У випадку, коли завершальна бінарна матриця мінімальної функції Шеффера складається з декількох термів, серед яких є терм (терми), які складаються з одного літерала, то літерал необхідно інвертувати.

Приклад 4. Для функції

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \Sigma\left(0,4,5,6,7,8,12,13,14,15\right) \tag{23}$$

знайти МНФШ-1.

У виразі (23) Σ визначає мінтерми при яких функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ повертає "1" на виході.

Досконала нормальна форма ДНФШ-1 для функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (23) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}F_{\text{ДНФШ}-1} = {} & \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / \overline{x_3} / x_4\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3 / \overline{x_4}\right) / \\ & / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3 / x_4\right) / \left(x_1 / \overline{x_2} / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3} / x_4\right) / \\ & / \left(x_1 / x_2 / x_3 / \overline{x_4}\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3 / x_4\right),\end{aligned}$$

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} & 0 & 0 \\ 1 & & \end{array}\right| = \left(\overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \overline{x_2}.$$

У підматриці з блоків 4–7 та 12–15 (виділені червоним кольором), яка вміщує комбінаторну систему 2-(3, 8)-design, застосована операція суперсклеювання змінних [20]. Просте склеювання змінних виділено чорним кольорам. Оскільки завершальна бінарна матриця мінімальної функції Шеффера містить терм з одним літералом, останній при виведенні $F_{\text{МНФШ-1}}$ інвертується. У підсумку буде отримана мінімальна нормальна форма функції Шеффера:

$$F_{\text{МШНФ-1}} = \left(\overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \overline{x_2}.$$

Аналогічний результат можна отримати в алгебрі Шеффера після проведення операції напівсклеювання:

$$\overline{x_2} / \left(\overline{x_2} / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) = \overline{x_2} / \overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}} = \overline{x_2} / x_2 + x_3 + x_4 = \overline{\overline{x_2}\left(x_2 + x_3 + x_4\right)} = x_2 +$$
$$+\overline{\left(x_2 + x_3 + x_4\right)} = x_2 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} = x_2 + \overline{x_3}\,\overline{x_4} = x_2 + \overline{\overline{\overline{x_3}} / \overline{\overline{x_4}}} = \overline{\overline{\overline{x_2}} \cdot \left(\overline{x_3} / \overline{x_4}\right)} = \overline{x_2} / \left(\overline{x_3} / \overline{x_4}\right).$$

Приклад 5. Для функції

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \Sigma\left(0,4,5,6,7,8,12,13,14,15\right) \qquad (24)$$

знайти МНФШ-1.
Рішення:

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} & & 0 & 0 \\ & 0 & & \end{array}\right| = \left(\overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / x_2.$$

Аналогічний результат можна отримати в алгебрі Шеффера після проведення операції напівсклеювання:

$$x_2 / \left(x_2 / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) = x_2 / \overline{x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}} = x_2 / \overline{x_2} + x_3 + x_4 =$$
$$= \overline{x_2\left(\overline{x_2} + x_3 + x_4\right)} = \overline{x_2} + \overline{\left(\overline{x_2} + x_3 + x_4\right)} =$$
$$= \overline{x_2} + x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \overline{x_2} + \overline{x_3}\,\overline{x_4} = \overline{x_2 \cdot \left(\overline{\overline{x_3}\,\overline{x_4}}\right)} = x_2 / \left(\overline{x_3} / \overline{x_4}\right).$$

Приклад 6. Спростити функцію, задану у ДНФШ-1.

$$F_{\text{ДНФШ}-1} = \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \\ / \left(x_1 / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3\right). \tag{25}$$

Рішення:

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 0 & \\ & 1 \end{array}\right| = x_2 / \overline{x_3}. \tag{26}$$

У завершальній бінарній матриці функції Шеффера (26) два терми містять по одній змінній, які при виведенні $F_{\text{МНФШ-1}}$ інвертуються.

Верифікація отриманої МНФШ-1 (26) представлена у табл. 7.

Таблиця 7

Верифікація МНФШ-1 – $x_2 / \overline{x_3}$

№	x_1	x_2	x_3	$F_{\text{ДНФШ-1}}$	$x_2 / \overline{x_3}$	$F_{\text{МНФШ-1}}$
0	0	0	0	1	$0/\overline{0}$	1
1	0	0	1	1	$0/\overline{1}$	1
3	0	1	1	1	$1/\overline{1}$	1
4	1	0	0	1	$0/\overline{0}$	1
5	1	0	1	1	$0/\overline{1}$	1
7	1	1	1	1	$1/\overline{1}$	1
2	0	1	0	0	$1/\overline{0}$	0
6	1	1	0	0	$1/\overline{0}$	0

З огляду табл. 7 бачимо, що МНФШ-1 – $x_2 / \overline{x_3}$ задовольняє задану логічну функцію (25).

Друга виняткова ситуація. Якщо результатом спрощення функції Шеффера є тільки один терм Шеффера, що містить декілька літералів, то береться загальна інверсія над усіма літералами (рис. 4).

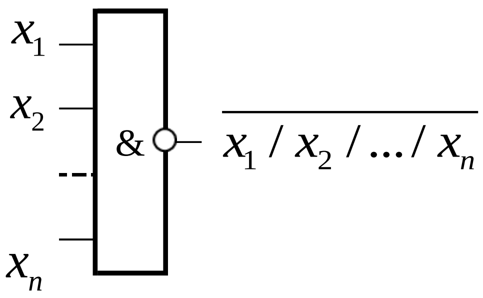


Рис. 4. Логічний елемент *n*-NAND у базисі Шеффера

Приклад 7. Спростити функцію, задану у ДНФШ-1.

$$F_{\text{ДНФШ}-1} = \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / x_3\right).$$

Рішення:

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \; 0 \quad 0 \qquad \right| = \overline{\overline{x_2} / \overline{x_2}}.$$

Приклад 8. Для функції з прикладу 6 спростити ДНФШ-2.

$$F_{\text{ДНФШ}-2} = \left(x_1 / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / x_3\right).$$

Рішення:

$$F_{\text{МНФШ}-2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \qquad 0 \quad 1 \right| =$$
$$= \overline{x_2} + x_3 = \overline{x_2 \overline{x_3}} = x_2 / \overline{x_3}$$

або

$$F_{\text{МНФШ}-2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \qquad 0 \quad 1 \right| = x_2 / \overline{x_3}. \qquad (27)$$

Таким чином, при виведенні $F_{\text{МНФШ-2}}$ (27), що вміщує один терм, змінні завершальної бінарної матриці функції Шеффера інвертуються, а сам терм не інвертується. Зазначимо, що вирази $F_{\text{МНФШ-1}}$ (26) і $F_{\text{МНФШ-2}}$ (27) співпадають.

Приклад 9. Мінімізувати логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, що задана таблицею істинності (табл. 8):

Рішення:

$$F_{\text{МНФШ}-2} = \begin{array}{c|cccc|} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{1} \\ 7 & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 9 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 11 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \end{array} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & & \color{red}{0} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 \end{array}\right| =$$

$$= \left(x_1 + \overline{x}_3 + x_4\right)\left(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3\right)\left(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_4\right) = (\overline{\left(\overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4\right)}\,\overline{\left(\overline{x}_1 x_2 x_3\right)}\,\overline{\left(x_1 \overline{x}_2 x_4\right)} =$$

$$= \overline{\left(\overline{x}_1 / x_3 / \overline{x}_4\right) / \left(\overline{x}_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / \overline{x}_2 / x_4\right)}.$$

МНФШ-2 функції, що задана таблицею істинності (табл. 8):

$$F_{\text{МНФШ}-2} = \overline{\left(\overline{x}_1 / x_3 / \overline{x}_4\right) / \left(\overline{x}_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / \overline{x}_2 / x_4\right)}. \tag{28}$$

Нагадаємо, що при виведенні $F_{\text{МНФШ-2}}$, яка вміщує більше одного терму, інвертується весь виведений вираз $F_{\text{МНФШ-2}}$ та змінні завершальної бінарної матриці Шеффера.

Верифікація МНФШ-2 (28) представлена у табл. 9.

Таблиця 8

Таблиця істинності функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
2	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
9	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	0

Таблиця 9

Верифікація МНФШ-2 – $\overline{\left(\overline{x}_1 / x_3 / \overline{x}_4\right) / \left(\overline{x}_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / \overline{x}_2 / x_4\right)}$

№	x_1	x_2	x_3	x_4	$F_{\text{ДНФШ-2}}$	$\overline{\left(\overline{x}_1 / x_3 / \overline{x}_4\right) / \left(\overline{x}_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / \overline{x}_2 / x_4\right)}$	$F_{\text{МНФШ-2}}$
2	0	0	1	0	0	$\overline{\left(\overline{0}/1/\overline{0}\right)/\left(\overline{0}/0/1\right)/\left(0/\overline{0}/0\right)}$	0
6	0	1	1	0	0	$\overline{\left(\overline{0}/1/\overline{0}\right)/\left(\overline{0}/1/1\right)/\left(0/\overline{1}/0\right)}$	0
7	0	1	1	1	0	$\overline{\left(\overline{0}/1/\overline{1}\right)/\left(\overline{0}/1/1\right)/\left(0/\overline{1}/1\right)}$	0
9	1	0	0	1	0	$\overline{\left(\overline{1}/0/\overline{1}\right)/\left(\overline{1}/0/0\right)/\left(1/\overline{0}/1\right)}$	0
11	1	0	1	1	0	$\overline{\left(\overline{1}/1/\overline{1}\right)/\left(\overline{1}/0/1\right)/\left(1/\overline{0}/1\right)}$	0

З огляду табл. 9 бачимо, що МНФШ-2 $\overline{(\overline{x_1} / x_3 / \overline{x_4}) / (\overline{x_1} / x_2 / x_3) / (x_1 / \overline{x_2} / x_4)}$ задовольняє логічну функцію, що задана табл. 8.

Третя виняткова ситуація. Якщо результатом спрощення функції є тільки один терм, що містить тільки один літерал, то МНФШ буде мати вигляд:

$$f_{\text{МНФШ}} = \overline{\overline{x_n}} = x_n.$$

Таким чином, у третій винятковій ситуації результат спрощення функції Шеффера не змінюється.

У базисі Шеффера літералу з подвійною інверсією відповідає логічний елемент (рис. 5).

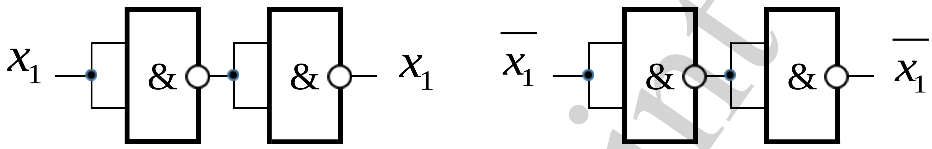


Рис. 5. Логічні елементи для літералу з подвійною інверсією у базисі Шеффера

Прикладом спрощення функцій Шеффера за появи третьої виняткової ситуації, можуть слугувати правила (30), (38), (45).

5. 3. Рівносильні перетвореннями булевих функцій у базисі Шеффера

У загальному випадку під час мінімізації булевих функцій у базисі Шеффера методом образних перетворень можливими є наступні правила алгебри логіки.

Склеювання змінних 2-містних термів ДНФШ-1 можна здійснювати за допомогою перетворення

$$\left(x_1 / x_2\right) / \left(\overline{x}_1 / x_2\right) = x_2. \tag{29}$$

Доведення:

$$\left(x_1 / x_2\right) / \left(\overline{x_1} / x_2\right) = \overline{\left(x_1 x_2\right)} / \overline{\left(\overline{x_1} x_2\right)} = \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) / \left(x_1 + \overline{x_2}\right) = \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2}\right)} =$$
$$= \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_1 \overline{x_2} + \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_2}\left(\overline{x_1} + x_1 + 1\right)} = \overline{\overline{x_2}} = x_2.$$

Рівносильні перетворення для правила склеювання змінних 2-містних термів ДНФШ-1 (29) мають ілюстрацію комбінаторного образу (30):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 \end{vmatrix} = x_2. \tag{30}$$

При виведенні результату склеювання змінних 2-містних термів ДНФШ-1 була врахована третя виняткова ситуація.

Склеювання змінних 3-містних термів ДНФШ-1 можна здійснювати за допомогою перетворення

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) = \overline{x_1 / x_2}. \tag{31}$$

Доведення:

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) = \overline{x_1 x_2 x_3} / \overline{x_1 x_2 \overline{x_3}} = \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right) =$$
$$= \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right)} = \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right)} + \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right)} =$$
$$= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} = x_1 x_2 \left(x_3 + \overline{x_3}\right) = x_1 x_2 = \overline{x_1 / x_2}.$$

Рівносильні перетворення для правила склеювання змінних 3-містних термів ДНФШ-1 (31) мають ілюстрацію образу (32):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \end{vmatrix} = \overline{x_1 / x_2}. \tag{32}$$

При виведенні результату склеювання змінних 3-містних термів ДНФШ-1 була врахована друга виняткова ситуація.

Склеювання змінних 3-містних термів ДНФШ-2.

Нагадаємо, що для отримання ДШНФ-2 у кожному термі Шеффера змінні об’єднуються операцією «штрих Шеффера», від яких він залежить. Якщо змінна для даного терму приймає нульове значення, то вона береться у прямому коді, інакше – в інверсному [21].

Наприклад, 3-містним термам ДНФШ-2

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) \tag{33}$$

відповідають двійкові набори змінних

$$\left(0_1 / 0_2 / 0_3\right) / \left(0_1 / 0_2 / 1_3\right). \tag{34}$$

Перед проведенням операції склеювання змінних для ДНФШ-2 значення двійкових змінних у термах інвертуються.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \end{vmatrix} = \left(x_1 + x_2\right) = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = \overline{x_1} / \overline{x_2}$$

або

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \end{vmatrix} = \overline{x_1} / \overline{x_2}. \tag{35}$$

Верифікація результату склеювання змінних для ДНФШ-2 (35) представлена у табл. 10.

Таблиця 10
Верифікація виразу – $\overline{x_1} / \overline{x_2}$

x_1	x_2	x_3	Значення ДНФШ-2	$\overline{x_1} / \overline{x_2}$	Верифікація
0	0	0	0	$\overline{0} / \overline{0}$	0
0	0	1	0	$\overline{0} / \overline{0}$	0

З огляду табл. 10 бачимо, що результат склеювання змінних – $\overline{x_1} / \overline{x_2}$ задовольняє задані терми ДНФШ-2 (33).

Зазначимо, що вирази результатів склеювання змінних 3-містних термів ДНФШ-1 (32) та ДНФШ-2 (35) є різними. Ця особливість поширюється і на МНФШ-1 та МНФШ-2 з більшим числом термів, що дає змогу вибору оптимальної структури мінімальної функції.

Склеювання змінних 4-містних термів ДНФШ-1 можна здійснювати за допомогою перетворення

$$\left(x_1 / x_2 / x_3 / x_4\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3 / x_4\right) = \overline{x_2 / x_3 / x_4}. \tag{36}$$

Доведення:

$$\begin{aligned} &\left(x_1 / x_2 / x_3 / x_4\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3 / x_4\right) = \overline{\left(x_1 x_2 x_3 x_4\right)} / \overline{\left(\overline{x_1} x_2 x_3 x_4\right)} = \\ &= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right) / \left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right) = \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right)} = \\ &= \overline{\overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}} = x_2 x_3 x_4 = \overline{x_2 / x_3 / x_4}. \end{aligned}$$

Рівносильні перетворення для правила склеювання змінних 4-містних термів ДНФШ-1 (36) мають ілюстрацію образу (37):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{x_2 / x_3 / x_4}. \tag{37}$$

Правило супер-склеювання змінних.

Комбінаторні властивості блок-схеми з повторенням забезпечують правило супер-склеювання змінних [20] у базисі Шеффера.

Приклад 10. Для 3-місних термів ДНФШ-1 правило використання супер-склеювання змінних можна подати в такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_2. \qquad (38)$$

Доведення:

$$\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / \overline{x_3}\right) =$$

$$= \overline{x_1 x_2 x_3} / \overline{\overline{x_1} x_2 x_3} / \overline{x_1 x_2 \overline{x_3}} / \overline{\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}} =$$

$$= \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) / \left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right) / \left(x_1 + \overline{x_2} + x_3\right) =$$

$$= \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2} + x_3\right)} =$$

$$= \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right)} + \overline{\left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right)} + \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right)} + \overline{\left(x_1 + \overline{x_2} + x_3\right)} =$$

$$= x_1 x_2 x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} = x_2 \left(x_1 x_3 + \overline{x_1} x_3 + x_1 \overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}\right) =$$

$$= x_2 \left(x_3 \left(x_1 + \overline{x_1}\right) + \overline{x_3} \left(x_1 + \overline{x_1}\right)\right) = x_2 \left(x_3 + \overline{x_3}\right) = x_2.$$

У правилі (38) використовується 2-(2, 4)-design [19].

Приклад 11. Для 4-місних термів ДНФШ-1 правило супер-склеювання змінних може мати, наприклад, такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overline{x_1 / \overline{x_3}}. \qquad (39)$$

Доведення:

$$\left(x_1/x_2/\overline{x_3}/x_4\right)/\left(x_1/x_2/\overline{x_3}/\overline{x_4}\right)/\left(x_1/\overline{x_2}/\overline{x_3}/x_4\right)/\left(x_1/\overline{x_2}/\overline{x_3}/\overline{x_4}\right)=$$

$$=\overline{x_1x_2\overline{x_3}x_4}/\overline{x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}}/\overline{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4}/\overline{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}}=$$

$$=\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3+\overline{x_4}\right)/\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3+x_4\right)/\left(\overline{x_1}+x_2+x_3+\overline{x_4}\right)/\left(\overline{x_1}+x_2+x_3+x_4\right)=$$

$$=\overline{\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3+\overline{x_4}\right)\cdot\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3+x_4\right)\cdot\left(\overline{x_1}+x_2+x_3+\overline{x_4}\right)\cdot\left(\overline{x_1}+x_2+x_3+x_4\right)}=$$

$$=\overline{\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3+\overline{x_4}\right)}+\overline{\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3+x_4\right)}+\overline{\left(\overline{x_1}+x_2+x_3+\overline{x_4}\right)}+\overline{\left(\overline{x_1}+x_2+x_3+x_4\right)}=$$

$$=\left(x_1x_2\overline{x_3}x_4\right)+\left(x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}\right)+\left(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4\right)+\left(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\right)=$$

$$=x_1\overline{x_3}\left(x_2x_4+x_2\overline{x_4}+\overline{x_2}x_4+\overline{x_2}\,\overline{x_4}\right)=x_1\overline{x_3}\left(x_2\left(x_4+\overline{x_4}\right)+\overline{x_2}\left(x_4+\overline{x_4}\right)\right)=$$

$$=x_1\overline{x_3}\left(x_2+\overline{x_2}\right)=x_1\cdot\overline{x_3}=\overline{x_1/\overline{x_3}}.$$

У правилі (39) використовується 2-(2, 4)-design. Змінні x_1, x_3 можуть займати будь-який розряд (місце) у термі ДНФШ-1.

Правило неповного супер-склеювання змінних.

Комбінаторні властивості неповної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design [20] забезпечують правило неповного супер-склеювання змінних у базисі Шеффера.

Приклад 12. Для 2-місних і 3-місних термів ДНФШ-1 правило неповного супер-склеювання змінних може мати, наприклад, такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} \color{red}0 & \color{red}0 \\ \color{red}1 & \color{red}0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & \color{red}0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & 0 \\ 0 & \end{vmatrix}=x_1/x_2. \tag{40}$$

$$\begin{vmatrix} \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}1 \\ \color{red}0 & \color{red}1 & \color{red}0 \\ \color{red}0 & \color{red}1 & \color{red}1 \\ \color{blue}1 & \color{blue}0 & \color{blue}0 \\ \color{blue}1 & \color{blue}0 & \color{blue}1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \color{red}0 & & \\ \color{blue}1 & \color{blue}0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}=x_1/x_2/x_3. \tag{41}$$

Доведення результату (40):

$$\left(\overline{x_1} / \overline{x_2}\right) / \left(x_1 / \overline{x_2}\right) / \left(\overline{x_1} / x_2\right) = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} / \overline{x_1\overline{x_2}} / \overline{\overline{x_1}x_2} = \left(x_1 + x_2\right) / \left(\overline{x_1} + x_2\right) / \left(x_1 + \overline{x_2}\right) =$$

$$= \overline{\left(x_1 + x_2\right) \cdot \left(\overline{x_1} + x_2\right) \cdot \left(x_1 + \overline{x_2}\right)} = \left(\overline{x_1 + x_2}\right) + \left(\overline{\overline{x_1} + x_2}\right) + \left(\overline{x_1 + \overline{x_2}}\right) =$$

$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 = \overline{x_2}\left(\overline{x_1} + x_1\right) + \overline{x_1}x_2 = \overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 = \overline{x_1} + \overline{x_2} = x_1 / x_2.$$

У правилі (40) використовується 2-(2, 3/4)-design [20]. При виведенні результату операції неповного супер-склеювання змінних 2-містних термів ДНФШ-1 (40) була врахована перша виняткова ситуація.

Аналогічно доводиться і результат (41). У правилі (41) використовується 2-(3, 7/8)-design [20]. При виведенні результату операції неповного супер-склеювання змінних 3-містних термів ДНФШ-1 (41) враховується перша виняткова ситуація.

Узагальнене склеювання змінних можна здійснювати за допомогою перетворення

$$\left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right) = \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right). \qquad (42)$$

Доведення:

$$\left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right) = \overline{\left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right)} / \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right) =$$

$$= \overline{\overline{x_1x_2x_3}} / \overline{\overline{x_1x_2\overline{x_3}}} / \overline{x_1x_3} / \overline{x_2\overline{x_3}} = \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right)} / \overline{x_1} + \overline{x_3} / \overline{x_2} + x_3 =$$

$$= \overline{\overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right)}} / \overline{x_1} + \overline{x_3} / \overline{x_2} + x_3 =$$

$$= \overline{\overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3\right)}} / \overline{x_1} + \overline{x_3} / \overline{x_2} + x_3 =$$

$$= \overline{\left(x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3}\right)} / \overline{x_1} + \overline{x_3} / \overline{x_2} + x_3 = \overline{\left(x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3}\right)} / \overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_2} + x_3\right)} =$$

$$= \overline{\left(\overline{\left(x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3}\right)}\right) \cdot \left(\overline{\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_2} + x_3\right)}\right)} = \left(x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3}\right) + \left(\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right) \cdot \left(\overline{x_2} + x_3\right)\right) =$$

$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_3 + x_2\overline{x_3} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & \overline{x_3} \\ x_1 & & x_3 \\ & x_2 & \overline{x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & & x_3 \\ & x_2 & \overline{x_3} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1x_3 + x_2\overline{x_3} = \overline{x_1x_3} \cdot \overline{x_2\overline{x_3}} = \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right).$$

Отже, $\left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right) = \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right)$, що й треба було довести.

Рівносильні перетворення для правила узагальненого склеювання змінних (42) у базисі Шеффера мають ілюстрацію образу (43):

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}\right| = \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right). \quad (43)$$

Інший варіант правила узагальненого склеювання змінних для ДНФШ-1:

$$\left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right) = \left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right).$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 0 \end{matrix}\right| = \left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_3\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right).$$

Правило поглинання змінних зводиться до перетворень:

1. $x_1 / \left(\overline{x_1} / x_2\right) = \overline{x_1}.$ (44)

Доведення:

$$x_1 / \left(\overline{x_1} / x_2\right) = x_1 / \overline{\overline{x_1} x_2} = x_1 / \left(x_1 + \overline{x_2}\right) = \overline{x_1 \cdot \left(x_1 + \overline{x_2}\right)} = \overline{x_1}.$$

Оскільки ліва частина виразу (44) є вихідною функцією Шеффера, то для її введення до матриці необхідно одну змінну, що представляє терм, інвертувати (перша виняткова ситуація):

$$x_1 / \left(\overline{x_1} / x_2\right) = \left|\begin{matrix} 0 & \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 0 & \quad \end{matrix}\right| = \overline{x_1}. \quad (45)$$

При виведенні результату (45) була застосована третя виняткова ситуація (завершальна матриця функції Шеффера вміщує тільки один терм з однією змінною – результат спрощення функції не змінюється).

2. $\overline{x_1} / \left(x_1 / x_2\right) = x_1.$

Доведення:

$$\overline{x_1} / \left(x_1 / x_2\right) = \overline{x_1} / \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} / \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) = \overline{\overline{x_1} \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right)} = \overline{\overline{x_1}} = x_1.$$

3. $\left(x_1 / x_2\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3\right) = \overline{x_1 / x_2}.$

Доведення:

$$(x_1 / x_2)/(x_1 / x_2 / x_3) = \overline{x_1x_2} / \overline{x_1x_2x_3} = (\overline{x_1} + \overline{x_2})/(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})} = \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})} =$$
$$= x_1x_2 + x_1x_2x_3 = x_1x_2(1 + x_3) = x_1x_2 = \overline{x_1 / x_2}.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \end{array} \right| = \overline{x_1 / x_2}.$$

4. $(x_1 / x_2)/(x_1 / x_2 / x_3 / x_4) = \overline{x_1 / x_2}.$

Доведення:

$$(x_1 / x_2)/(x_1 / x_2 / x_3 / x_4) = \overline{x_1x_2} / \overline{x_1x_2x_3x_4} = (\overline{x_1} + \overline{x_2})/(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}) =$$
$$= \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4})} = \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4})} =$$
$$= x_1x_2 + x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2(1 + x_3x_4) = x_1x_2 = \overline{x_1 / x_2}.$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \end{array} \right| = \overline{x_1 / x_2}.$$

Правило напівсклеювання змінних можна здійснювати за допомогою таких перетворень:

$$(\overline{x_1} / x_2)/(x_1 / x_2 / x_3) = \overline{x_2 / (x_1 / \overline{x_3})}, \qquad (46)$$

$$(\overline{x_1} / x_2)/(x_1 / x_2 / x_3) = \overline{\overline{x_1}x_2} / \overline{(x_2x_3)}. \qquad (47)$$

Доведення результату (46):

$$(\overline{x_1} / x_2)/(x_1 / x_2 / x_3) = \overline{\overline{x_1}x_2} / \overline{x_1x_2x_3} = (x_1 + \overline{x_2})/(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= \overline{(x_1 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})} = \overline{(x_1 + \overline{x_2})} + \overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})} =$$
$$= \overline{x_1}x_2 + x_1x_2x_3 = x_2(\overline{x_1} + x_1x_3) = x_2(\overline{x_1} + x_3) = x_2\overline{(x_1\overline{x_3})} = \overline{x_2 / (x_1 / \overline{x_3})}.$$

Аналогічно доводиться й результат (47).

Правило напівсклеювання змінних (46) має ілюстрацію образу:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{x_1}x_2 + x_2x_3 = x_2\left(\overline{x_1} + x_3\right) = x_2\overline{\left(x_1\overline{x_3}\right)} = \overline{x_2 / \left(x_1 / \overline{x_3}\right)}. \quad (48)$$

Правило напівсклеювання змінних (47) має ілюстрацію образу:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{x_1}x_2 + x_2x_3 = \overline{\overline{x_1}x_2} / \overline{\left(x_2x_3\right)}.$$

Правило

$$x_1 / \left(x_1 / x_2\right) = x_1 / \overline{x_2}$$

доводиться наступними перетвореннями:

$$\begin{aligned} x_1 / \left(x_1 / x_2\right) &= x_1 / \overline{x_1x_2} = \\ &= x_1 / \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right) = \\ &= \overline{x_1 \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right)} = \\ &= \overline{x_1\overline{x_2}} = x_1 / \overline{x_2}. \end{aligned}$$

$$x_1 / \left(x_1 / x_2\right) = \begin{vmatrix} 0 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \\ & 1 \end{vmatrix} = x_1 / \overline{x_2}. \quad (49)$$

При виведенні результату (49) була застосована перша виняткова ситуація.

Оскільки комбінаторна структура таблиць істинності логічних функцій дає більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків таблиці істинності [22], застосування комбінаторних образів для пошуку об’єктів рівносильного перетворення при спрощенні функцій Шеффера є ефективним.

5. 4. Встановлення ознаки мінімальної функції Шеффера

Ознака мінімальної функції Шеффера встановлюється шляхом проведення послідовних процедур скорочення функції на наборах таблиці істинності, за яких функція повертає «1» та «0» на виході. При безпомилковому скороченні заданої функції у двох зазначених процедурах та алгебричному перетворенні другого результату скорочення функції у перший результат, таке алгебричне перетворення буде співпадати з першим результатом скорочення функції.

Приклад 13. Спростити логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ образними перетвореннями, що задана таблицею істинності (табл. 11), та встановити ознаку мінімальної функції.

Рішення.

ДНФШ-1 заданої функції $f(x_1, x_2, x_3)$ має вигляд:

$$F_{\text{ДНФШ}-1} = \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) / \left(x_1 / x_2 / x_3\right).$$

Спрощення ДНФШ-1 функції $f(x_1, x_2, x_3)$ рівносильними образними перетвореннями:

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \end{vmatrix} = \left(x_1 / x_2\right) / \left(x_2 / x_3\right). \qquad (50)$$

Таблиця 11

Таблиця істинності функції $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

ДНФШ-2 заданої функції $f(x_1, x_2, x_3)$ має вигляд:

$$F_{\text{ДНФШ}-2} = \left(x_1 / x_2 / x_3\right) / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right) / \left(x_1 / \overline{x_2} / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / x_3\right) / \left(\overline{x_1} / x_2 / \overline{x_3}\right).$$

Спрощення ДНФШ-2 функції $f(x_1, x_2, x_3)$ рівносильними образними перетвореннями:

$$F_{\text{МНФШ}-2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} = \overline{\left(\overline{x_1} / \overline{x_3}\right) / x_2}. \qquad (51)$$

Алгебричне перетворення виразу (51) до виразу (50):

$$
\begin{aligned}
&\overline{\left(\overline{x_1}/\overline{x_3}\right)/x_2} = \overline{\overline{\left(\overline{x_1}/\overline{x_3}\right)\cdot x_2}} = \left(\overline{x_1}/\overline{x_3}\right)\cdot x_2 = \\
&= \overline{\left(\overline{x_1}\cdot\overline{x_3}\right)}\cdot x_2 = \left(x_1 + x_3\right)x_2 = x_1x_2 + x_2x_3 = \\
&= \overline{\overline{\left(x_1x_2\right)}\cdot\overline{\left(x_2x_3\right)}} = \overline{\left(x_1x_2\right)}/\overline{\left(x_2x_3\right)} = \left(x_1/x_2\right)/\left(x_2/x_3\right).
\end{aligned} \tag{52}
$$

Алгебричні вирази (50) і (52) співпадають, що за ознакою мінімальної функції вказує на отримання мінімальної нормальної форми функції Шеффера процедурою спрощення.

5. 5. Мінімізація функцій Шеффера на повній таблиці істинності

Приклад 14. Мінімізувати логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, яка задана у канонічній формі [23], на повній таблиці істинності образними перетвореннями у двох досконалих нормальних формах – ДНФШ-1 і ДНФШ-2:

$$F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \Sigma\left(0,1,6,8,11,14,15\right). \tag{53}$$

У виразі (53) Σ визначає мінтерми при яких функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ повертає "1" на виході.

Мінімальну функцію обрати за результатами спрощення двох досконалих нормальних форм – ДНФШ-1 і ДНФШ-2.

Мінімізація ДНФШ-1 (53) ілюструється образними перетвореннями:

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \end{array}\right|.$$

МНФШ-1 функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \left(\overline{x_1}/\overline{x_2}/\overline{x_3}\right)/\left(\overline{x_2}/\overline{x_3}/\overline{x_4}\right)/\left(x_2/x_3/\overline{x_4}\right)/\left(x_1/x_3/x_4\right). \tag{54}$$

Мінімізація ДНФШ-2 заданої функції (53):

$$F_{\text{МНФШ}-2}=\left|\begin{array}{c|cccc}2&0&0&1&0\\3&0&0&1&1\\4&0&1&0&0\\5&0&1&0&1\\7&0&1&1&1\\9&1&0&0&1\\10&1&0&1&0\\12&1&1&0&0\\13&1&1&0&1\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}1&1&0&1\\1&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}&1&0&1\\1&&0&0\\&0&1&\\0&1&1&0\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}&1&0&1\\1&&0&0\\&0&1&\\0&&1&0\end{array}\right|.$$

МНФШ-2 функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F_{\text{МНФШ}-2}=\overline{\left(\overline{x_2}/x_3/\overline{x_4}\right)/\left(\overline{x_1}/x_3/x_4\right)/\left(x_2/\overline{x_3}\right)/\left(x_1/\overline{x_3}/x_4\right)}. \tag{55}$$

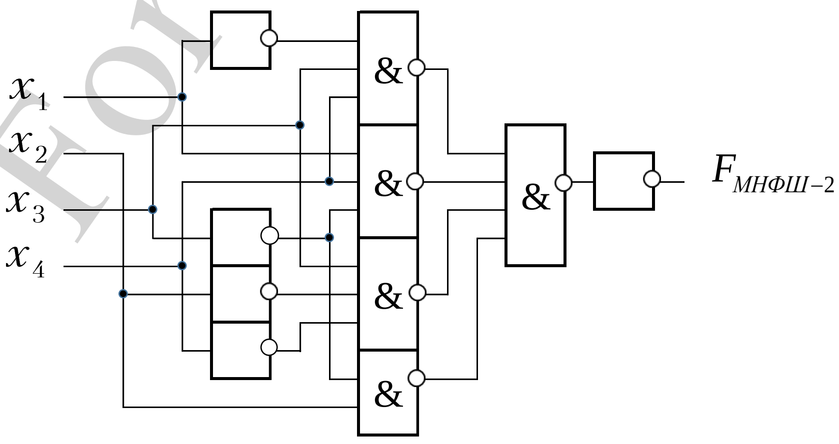
МНФШ-2 (55) містить менше число літералів порівняно з МНФШ-1 (54). Отже, при однаковій функціональності виразів (54) і (55) (табл. 14) останній відповідає простішій структурі (рис. 6, *а*).

З рис. 6 можна бачити, що реалізація комбінаційною схемою МНФШ-2 (рис. 6, *а*) є простішою, оскільки містить 2-входовий логічний елемент І-НЕ, який відсутній на схемі, що реалізує МНФШ-1 (рис. 6, *б*).

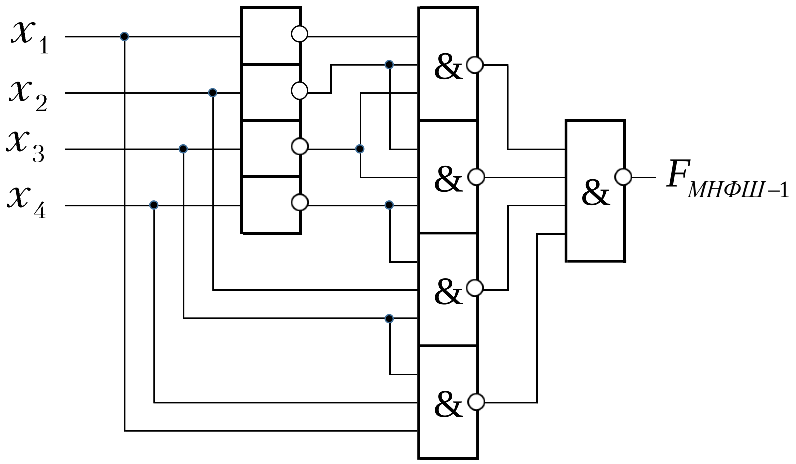
У табл. 14 представлена функціональність МНФШ-2 та МНФШ-1 для функції, що задана канонічною формою (53).

З огляду табл. 14 бачимо, що $F_{\text{МНФШ-2}}$ і $F_{\text{МНФШ-1}}$ мають однакову функціональність, однак $F_{\text{МНФШ-2}}$ має на один літерал менше.

За результатами мінімізації двох нормальних формах – ДНФШ-1 і ДНФШ-2 в якості мінімальної обираємо МНФШ-2 (55).



а



б

Рис. 6. Реалізація мінімальної логічної функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ комбінаційною схемою: *а* – МНФШ-2; *б* – МНФШ-1

Таблиця 14

Таблиця істинності функцій

$$F_{\text{МНФШ}-2} = \overline{\left(\overline{x_1} / x_3 / x_4\right) / \left(x_1 / \overline{x_3} / x_4\right) / \left(\overline{x_2} / x_3 / \overline{x_4}\right) / \left(x_2 / \overline{x_3}\right)};$$

$$F_{\text{МНФШ}-1} = \left(\overline{x_1} / \overline{x_2} / \overline{x_3}\right) / \left(\overline{x_2} / \overline{x_3} / \overline{x_4}\right) / \left(x_2 / x_3 / \overline{x_4}\right) / \left(x_1 / x_3 / x_4\right)$$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	$F_{\text{МНФШ-2}}$	$F_{\text{МНФШ-1}}$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
6	0	1	1	0	1	1
8	1	0	0	0	1	1
11	1	0	1	1	1	1
14	1	1	1	0	1	1
15	1	1	1	1	1	1
№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	$F_{\text{МНФШ-2}}$	$F_{\text{МНФШ-1}}$
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0
7	0	1	1	1	0	0
9	1	0	0	1	0	0
10	1	0	1	0	0	0
12	1	1	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	0

6. Обговорення результатів мінімізації функцій Шеффера методом образних перетворень

Математичний апарат образних перетворень розглянуто у роботах [10, 19, 20, 22, 24]. Герменевтика логічних операцій на бінарних структурах дає достатню дидактику спрощення булевих функцій, у тому числі і для класу досконалих нормальних форм функцій алгебри Шеффера.

Головним завданням мінімізації ДНФШ-1 та ДНФШ-2 є пошук термів, придатних до тієї чи іншої алгебричної операції. Однак при збільшенні кількості змінних алгебричного виразу такий пошук може виявитися досить складним. При спрощенні логічних формул не завжди очевидно, який із законів алгебри логіки необхідно застосувати на тому чи іншому кроці. У свою чергу, образні перетворення, завдяки притаманній їм наглядності та уніфікації оригінальних процедур, дозволяють до певної міри вирішувати цю проблему. В окремих випадках апарат образних перетворень є єдиним засобом продовжити оптимальне спрощення логічного виразу.

Об'єктом вирішення задачі мінімізації булевих функцій у базисі Шеффера методом образних перетворень є бінарні структури з повторенням, якими є власне таблиці істинності заданих функцій. Це дозволяє обійтись без допоміжних об'єктів, як то карта Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, таблиці покриття та ін.

Наприклад, удосконалення першого етапу методу Квайна, що запропоновано Мак-Класкі, можна застосувати і у базисі Шеффера.

Знайдемо МНФШ-1 4-розрядної булевої функції методом Квайна – Мак-Класкі для наборів літералів, при яких функція (56) повертає значення одиниці.

$$F = \{0000,\ 0010,\ 0100,\ 0110,\ 1000,\ 1010,\ 1100,\ 1101,\ 1110\}. \tag{56}$$

Розбиваємо набори змінних на групи в залежності від числа одиниць у них та проводимо склеювання змінних у сусідніх групах (рис. 7).

Отримана тупикова (ТНФШ-1) функції (56), яка одночасно є й МНФШ-1 (57):

$$F_{\text{МНФШ}-1} = x_4 / \left(x_1 / x_2 / \overline{x_3}\right). \tag{57}$$

Знаходження МНФШ-1 методом образних перетворень зводиться до такої процедури:

$$F_{\text{МНФШ}-1}=\left|\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc} & & & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc} & & & 0\\ 1 & 1 & 0 & \end{array}\right|= \tag{58}$$

$$=x_4/\left(x_1/x_2/\overline{x_3}\right).$$

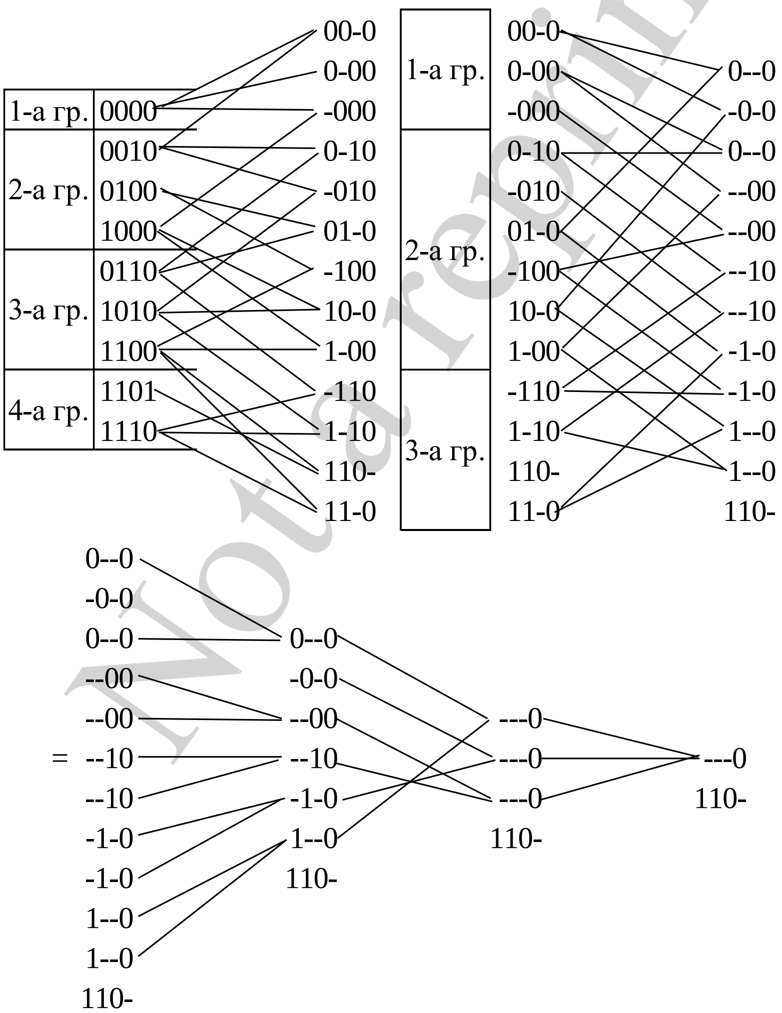


Рис. 7. Розбивка наборів змінних функції (56) на групи з наступними процедурами склеювання, поглинання та ідемпотентності

Результат знаходження МНФШ-1 двома методами однаковий, однак метод образних перетворень є суттєво простішим.

Особливістю розглянутого методу спрощення логічного виразу у ДНФШ-1 та ДНФШ-2 є використання виняткових ситуацій. Вони мають ефективне застосування як при виведенні результату спрощення з бінарної матриці, так і при введенні функції Шеффера до матриці.

Наочність образних перетворень дозволяє здійснювати ручний спосіб мінімізації функцій Шеффрера (з використанням математичного редактора, наприклад MathType v. 7.0) орієнтовно у межах до десяти вхідних змінних.

Застосування методу образних перетворень для мінімізації функцій алгебри Шеффера виводить проблему спрощення ДНФШ-1 та ДНФШ-2 на рівень добре дослідженої задачі у класі диз'юнктивно-кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ) булевих функцій.

Обмеженнями застосування методу є випадки, коли перемикальна функція вміщує логічні операції з декількох базисів. У цьому випадку функцію необхідно представити одним логічним базисом.

Слабка сторона розглянутого методу полягає у малому практичному застосуванні рівносильних образних перетворень для процесу мінімізації функцій Шеффера з подальшим виготовленням відповідних обчислювальних компонентів. Негативні внутрішні фактори методу пов'язані з додатковими часовими витратами на встановлення протоколів спрощення функцій Шеффера з подальшим створенням бібліотеки правил алгебри логіки, що мають ілюстрацію відповідних образних перетворень. Оскільки образні перетворення є універсальним апаратом для мінімізації булевих функцій, перспективою подальших досліджень може бути, наприклад, застосування методу для мінімізації булевих функцій у класі досконалих нормальних форм функцій алгебри Пірса-Вебба.

7. Висновки

1. Встановлено, що мінімізація булевих функцій у базисі Шеффера методом образних перетворень ґрунтується на блок-схемі з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах таблиці істинності функції і, таким чином, обійтись без допоміжних об'єктів, як то карта Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, кубічне представлення та ін.

Досконалу нормальну форму n-містної функції Шеффера можна подати бінарними наборами (20) або матрицею (21), яка у цьому випадку буде подавати терми функції Шеффера та операцію «штрих Шеффера» для них. Така герменевтика має ефективне застосовувати при скороченні логічної функції та при виведенні результату логічних операцій у класі бінарних матриць функцій Шеффера.

2. При спрощенні функцій Шеффера на бінарних структурах необхідно враховувати виняткові ситуації. Всього встановлено три виняткові ситуації. Вони мають ефективне застосування як при виведенні результату мінімізації з бінарної матриці (45), так і при введенні функції Шеффера до матриці (49).

3. Для належної мінімізації функцій Шеффера методом образних перетворень були розроблені правила супер-склеювання змінних (38), (39), неповного

супер-склеювання змінних (40), (41), узагальненого склеювання змінних (43), уточнені правила поглинання (45) та напівсклеювання змінних (48).

4. Виявлено, що образні перетворення спрощують процедуру встановлення ознаки мінімальної функції Шеффера (приклад 13), яка гарантує оптимальне зменшення кількості змінних логічної функції без втрати її функціональності.

5. Виявлено, що досягнути найліпшого результату мінімізації функцій Шеффера можна як у ДНФШ-1, так і у ДНФШ-2 (приклад 14). Звідси випливає, що мінімізацію заданої функції доцільно здійснювати у двох досконалих нормальних формах – ДНФШ-1 і ДНФШ-2, використовуючи повну таблицю істинності. А оптимальну функцію слід обирати за результатами мінімізації двох нормальних форм – ДНФШ-1 та ДНФШ-2.

Література

1. Pucknell, D. A. (1990). Fundamentals of Digital Logic Design: With VLSI Circuit applications. Prentice Hall, 486.

2. Mano, M. M., Kime, C. (2003). Logic and Computer Design Fundamentals. Prentice Hall, 650.

3. Baranov, S. (2008). Logic and System Design of Digital Systems. Tallinn: TUT Press.

4. De Micheli, G. (1994). Synthesis and Optimization of Digital Circuits. McGraw-Hill, 597.

5. Zakrevskij, A., Pottosin, Yu., Cheremisinova, L. (2009). Optimization in Boolean Space. Tallinn: TUT Press. URL: http://www.ester.ee/record=b2461762*est

6. Luba, T. (2000). Synteza układ´ow logicznych. Warszawa: WSISiZ.

7. Rawski, M., Łuba, T., Jachna, Z., Tomaszewicz, P. (2005). The Influence of Functional Decomposition on Modern Digital Design Process. Design of Embedded Control Systems, 193–204. doi: https://doi.org/10.1007/0-387-28327-7_17

8. Bibilo, N. (2009). Decomposition of Boolean Functions by Means of Solving Logical Equations. Minsk: Belaruskaya Navuka.

9. Borowik, G., Łabiak, G., Bukowiec, A. (2015). FSM-Based Logic Controller Synthesis in Programmable Devices with Embedded Memory Blocks. Topics in Intelligent Engineering and Informatics, 123–151. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12652-4_8

10. Riznyk, V., Solomko, M., Tadeyev, P., Nazaruk, V., Zubyk, L., Voloshyn, V. (2020). The algorithm for minimizing Boolean functions using a method of the optimal combination of the sequence of figurative transformations. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3 (4 (105)), 43–60. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.206308

11. Baranov, S., Karatkevich, A. (2018). On Transformation of a Logical Circuit to a Circuit with NAND and NOR Gates Only. INTL JOURNAL OF ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS, 64 (3), 373–378. doi: http://doi.org/10.24425/123535

12. Maxfield, M. (2018). Implementing Logic Functions Using Only NAND or NOR Gates. URL: https://www.eeweb.com/implementing-logic-functions-using-only-nand-or-nor-gates/

13. An algorithm to implement a boolean function using only NAND's or only NOR's. URL: https://cnx.org/contents/vJcXn_C0@4.9:vLMEHoQ0@6/An-algorithm-to-implement-a-boolean-function-using-only-NAND-s-or-only-NOR-s

14. Kana, A. F. (2008). Implimenting logical circuit using NAND and NOR gate only. Digital Logic Design, 47–54. URL: http://american.cs.ucdavis.edu/academic/ecs154a.sum14/postscript/cosc205.pdf

15. Shaik, E. haq, Rangaswamy, N. (2017). Realization of all-optical NAND and NOR logic functions with photonic crystal based NOT, OR and AND gates using De Morgan’s theorem. Journal of Optics, 47 (1), 8–21. doi: https://doi.org/10.1007/s12596-017-0441-y

16. Rajaei, A., Houshmand, M., Rouhani, M. (2011). Optimization of Combinational Logic Circuits Using NAND Gates and Genetic Programming. Soft Computing in Industrial Applications, 405–414. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20505-7_36

17. Macia, J., Sole, R. (2014). How to Make a Synthetic Multicellular Computer. PLoS ONE, 9 (2), e81248. doi: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0081248

18. Дичка, І. А., Тарасенко, В. П., Онай, М. В. (2019). Основи прикладної теорії цифрових автоматів. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 508.

19. Riznyk, V., Solomko, M. (2018). Minimization of conjunctive normal forms of boolean functions by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 5 (2 (43)), 42–55. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.146312

20. Riznyk, V., Solomko, M. (2017). Application of super-sticking algebraic operation of variables for Boolean functions minimization by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 6 (2 (38)), 60–76. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.118336

21. Гавриленко, С. Ю., Клименко, А. М., Носков, В. І. (2014). Логіка дискретних автоматів. Харків, 129. URL: http://web.kpi.kharkov.ua/otp/wp-content/uploads/sites/152/2016/05/Kompyuterna_logika_2sem_praktikum.pdf

22. Riznyk, V., Solomko, M. (2017). Minimization of Boolean functions by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 4 (2 (36)), 49–64. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.108532

23. Rytsar, B. Ye. (2015). New minimization method of logical functions in polynomial set-theoretical format. 1. Generalized rules of conjuncterms simplification. Управляющие системы и машины, 2, 39–57.

24. Riznyk, V., Solomko, M. (2018). Research of 5-bit boolean functions minimization protocols by combinatorial method. Technology Audit and Production Reserves, 4 (2 (42)), 41–52. doi: https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.140351