Ida-Maija Yli-Kesäniemi

Matemaattisten aineiden aineenopettajaopiskelijoiden ja lukiolaisten käsityksiä graafisesta mallintamisesta

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Lokakuu 2020

TIIVISTELMÄ

Ida-Maija Yli-Kesäniemi: Matemaattisten aineiden aineenopettajaopiskelijoiden ja lukiolaisten käsityksiä graafisesta mallintamisesta
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Lokakuu 2020

Tämän pro gradu -tutkielman aiheena on graafinen mallintaminen. Graafiseen mallintamiseen liittyvät taidot, oli kyse sitten graafien tulkinnasta tai konstruoinnista, ovat nyky-yhteiskunnassa keskeisiä ja niihin viitataankin lukion opetussuunnitelmien perusteissa usein. Aikaisempi tutkimus on osoittanut, että graafisen mallintamisen käsitteelliseen oppimiseen liittyy haasteita.

Tässä tutkimuksessa liikutaan matematiikan ja fysiikan opettamisen ja oppimisen rajapinnassa. Tutkimusjoukkona toimivat matemaattisten aineiden aineenopettajaopiskelijat sekä lukiolaiset. Tutkimuksessa selvitettiin käsityksiä ja kokemuksia sekä graafiseen mallintamiseen vaadittavista tiedoista ja taidoista, että mahdollisista kompastuskivistä. Lukiolaisten kohdalla selvitettiin myös heidän osaamistaan graafisessa mallintamisessa, ja aineenopettajaopiskelijoiden kohdalla heidän ideoitaan opetuksellisesti ratkaista mahdollisia kompastuskiviä graafisessa mallintamisessa. Tutkimus on luonteeltaan kvalitatiivinen tapaustutkimus, ja se toteutettiin tutkimusjoukolle tehtyjen tehtävälomakkeiden pohjalta.

Molemmat tutkittavat ryhmät arvioivat suoran ja sen yhtälön käsitteiden ymmärtämisen oleelliseksi graafisen mallintamisen tehtävän ratkaisemiseksi. Aineenopettajaopiskelijat erittelivät kulmakertoimen ja vakiotermin käsitteiden hallinnan tärkeäksi. Myös teknisempää puolta, sähköisen ohjelman käyttöä, pidettiin yleisesti tärkeänä molemmissa tutkimusryhmissä. Lisäksi yli puolet aineenopettajaopiskelijoista ajatteli, että tiheyden määritelmä olisi tarpeen tuntea. Kompastuskiviksi arveltiin riittämätöntä ymmärrystä suoran yhtälöstä sekä akseleiden virheellistä valintaa. Erityisesti suoran yhtälön ymmärtämiseen liittyviä haasteita oli huomattavissa lukiolaisten ratkaisuista graafisen mallintamisen tehtävään. Aineenopettajaopiskelijat pyrkisivät vastaamaan opiskelijoidensa haasteisiin graafisessa mallintamisessa esimerkein ja käsittelemällä suoran ja tiheyden yhtälöiden analogiaa. Lisäksi he opettaisivat akseleiden oikeaa valintaa sekä ymmärrykseen että muistiin perustuvin keinoin.

Avainsanat: Soveltava matematiikka, fysiikka, graafinen mallintaminen, suoran yhtälö, käsitteellinen ymmärtäminen

Sisältö

1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa kuljetaan matematiikan ja fysiikan opetuksen rajapinnalla. Tätä rajapintaa on välillä mahdoton huomata, sillä erityisesti fysiikan opetuksessa ja oppimisessa vaaditaan myös matemaattisia tietoja ja taitoja. Tämä ei ole ihme, onhan näiden kahden alan historia läheinen. Matematiikan rooli fysiikassa voikin olla moninainen. Se voi todella toimia työkaluna, mutta toisaalta se tarjoaa kielen fysiikan ilmiöiden ja riippuvuuksien kuvailuun sekä mahdollistaa deduktiivisen päättelyn fysiikan ilmiöitä tutkittaessa [1]. Toisaalta fysiikka voi antaa matemaattiselle esitykselle todellisen, reaalimaailmaisen, merkityksen. Miten fysiikka ja matematiikka oikeastaan nivoutuvat yhteen ja miten niiden läheiset suhteet tulisi ottaa huomioon fysiikan opetuksessa? Tässä pro gradu -tutkielmassa pyritään saamaan tähän monitahoiseen kysymykseen vastauksia graafisen mallintamisen osalta.

Fysiikassa käytetään hyväksi monenlaisia esitystapoja. Esimerkiksi riippuvuutta voidaan sanallisen selityksen lisäksi kuvata ainakin taulukoilla, kuvaajilla, kuvilla ja yhtälöillä. Jokaisella edellä kuvatulla mallilla on omat erityispiirteensä, ja ne antavat erilaista informaatiota tutkittavasta aiheesta [2]. Graafisen mallintamisen ja muun visuaalisen informaation välittämiseen liittyvien taitojen merkitys nyky-yhteiskunnassa on kasvanut. Taitoja vaaditaan sekä grafiikan tuottamisessa että tulkitsemisessa. Lisääntyminen juontaa juurensa ajatukseen, että visuaalisesta esityksestä viestin lukeminen käy nopeasti. [3] Vanhan sanonnankin mukaan kuva kertoo enemmän kuin tuhat sanaa. Toisaalta, kuten myös Tairab & Al-Naqbi huomauttivat [4], vain niille, jotka osaavat sitä tulkita.

Fysiikan opetuksessa mallien rooli on myös merkittävä. Opiskelijoiden täytyy osata lukea ja tulkita malleja, mutta myös tuottaa niitä. Lukion opetussuunnitelmien perustassa graafinen mallintaminen ja siihen liittyvä osaaminen on esillä useamminkin oppiaineen kohdalla. Opetussuunnitelmien perusteissa puhutaan sekä graafisten mallien konstruointiin liittyvästä osaamisesta että mallien tulkintaan liittyvästä osaamisesta. [5] [6]. Vanhoja fysiikan ylioppilaskoetehtäviä selatessa huomaa nopeasti, että esimerkiksi kuvaajan tuottaminen mittausdatan perusteella on suosittu ylioppilaskoetehtävä. Tässä pro gradu -tutkielmassa ollaankin kiinnostuneista juuri kuvaajista ja niiden tuottamiseen liittyvistä vaiheista ja haasteista. Kuvaajia käytetään luonnontieteissä paljon, sillä niihin saadaan tehokkaasta tiivistettyä tietoa [3]. Jo Thomson & Tait [7] kuvaavat teoksessaan *Treatise on Natural Philosophy*, kuinka havaintojen tekeminen synnyttää mallin maailmankaikkeuden toiminnasta. Tarkemmalla tarkastelulla havaitaan, että näitä malleja voi yleistää muihinkin tapauksiin. Täten mallien syntyminen on osa tiedonmuodostusta. Kuitenkin oppilaiden graafisen mallintamisen taidot ovat usein heikommat, kuin opettaja arvioi. Mallin ja reaalimaailman eroa ei tunnisteta ja mallintaminen on enemmän algoritminen kuin relationaalinen prosessi. [8]

Kuvaajista erityisesti lineaariset mallit ovat merkittäviä sekä fysiikassa että matematiikassa [2]. Tämän pro gradu -tutkielman aineistonhankinta suoritettiin juuri lineaarisen riippuvuuden ymmärrystä testaavan vanhan fysiikan ylioppilaskoetehtävän avulla. Pospiech et al. [2] ovat tutkineet oppilaiden ymmärrystä lineaarisen riippuvuuden tapauksessa. Pohjana heilläkin toimi graafisen mallinnuksen tehtävä ja he olivat kiinnostuneet nimenomaan vakiotermiin ja kulmakertoimeen liittyvistä käsityksistä. Heidän tutkimustaan ja tuloksiaan esitellään myöhemmin lisää.

Tätä tutkielmaa varten tutustumani kirjallisuuden sekä luonnontieteen koulutuksen parissa työskentelevien kanssa käytyjen keskustelujen pohjalta minulle on muodostunut käsitys graafiseen mallintamiseen liittyvän paljon kompastuskiviä ja virhekäsityksiä. Oppilailla on haasteita niin kuvaajien tuottamisessa, lukemisessa kuin tulkitsemisessakin. Lisäksi tämäkin pro gradu -tutkielma osoittaa, että graafisen mallintamisen tehtäviä tehdään usein tietyllä opitulla kaavalla ymmärtämättä matemaattista tai fysikaalista taustaa. Myös Pospiech et al. [2] päätyivät tutkimuksissaan samanlaisiin tuloksiin. Tällaiset tulokset huolestuttavat, mutta toisaalta mahdollistavat muutoksen opetuksessa ja siten toivottavasti myös oppimisessa. Heikon graafisen mallintamisen ja ylipäätään fysiikan osaamisen taustalla on havaittu olevan oppilaiden haasteet linkittää matemaattista ja fysikaalista osaamista toisiinsa [9]. Opetuksessa pitäisi siis enemmän pystyä luomaan yhteyksiä matematiikan ja fysiikan välille.

Ylioppilaskirjoitukset kokivat perusteellisen muutoksen, kun ne muutettiin paperisesta sähköiseksi. Viimeisenä aineena matematiikka sähköistyi keväällä 2019. Koevastauksia ei ainoastaan kirjoiteta tietokoneella, vaan kokeessa on käytössä useita ohjelmia. Ohjelmista erityisesti LibreOffice Calc, GeoGebra, LoggerPro ja Texas Instruments TI-Nspire CAS ovat tämän pro gradu -tutkielman aihepiirin kannalta kiinnostavia. Kaikilla edellä mainituilla voidaan nimittäin tuottaa graafisia malleja. Ohjelmat sovittavat kuvaajan mitattuihin mittapisteisiin automaattisesti käyttäen pienimmän neliösumman menetelmää. Pienimmän neliösumman menetelmää esitellään myöhemmin luvussa 3. Ennen ylioppilaskokeen sähköisyyttä kuvaajat on piirretty käsin. Sähköisyys onkin muuttanut graafisen mallintamisen tehtävässä vaadittua osaamista. Ennen vaadittiin osaamista mittapisteiden koordinaatistoon sijoittamisen ja kuvaajan sovittamisen saralla, nykyään ohjelman käyttämisen saralla. Muutos painottaa vähemmän teknistä matemaattista suorittamista graafisen mallintamisen tehtävässä. Toisaalta graafisen mallin voi sähköisellä ohjelmalla tuottaa hyvin algoritmisesti toistamalla tunneilla opitut vaiheet sähköisellä ohjelmalla. Tätä mahdollisuutta voidaan onneksi pienentää suunnittelemalla tehtävät soveltavimmiksi tai ainakin sellaisiksi, ettei niistä selviydy ilman aiheen tuntemusta. Varmaa kutenkin on, että sähköisyys ja erilaisten tietokoneohjelmien käyttäminen on yhteiskunnassamme nykypäivää, ja koulumaailman on pystyttävä tarjoamaan edellytyksiä selviytyä yhteiskunnassa. Muutoksia on siis tehtävä.

Tähän pro gradu -tutkimukseen päädyttiin keräämään aineistoa kahdelta eri ryhmältä. Toinen ryhmä on lukiolaiset, joiden vastauksissa kiinnosti paitsi graafisen mallintamisen taidot, myös heidän kokemuksensa graafisesta mallintamisesta. Toinen aineisto hankittiin matemaattisten aineiden aineenopettajaopiskelijoilta. Heidän vastauksissaan kiinnosti, mitä mahdollisia haasteita he arvioivat graafiseen mallintamiseen liittyvän, ja kuinka he näihin haasteisiin vastaisivat omalla opetuksellaan. Nämä kaksi tarkasteltavaa tutkimusryhmää tarjoavat myös mielenkiintoisen vertailumahdollisuuden: kohtaavatko lukiolaisten taidot tai niiden puutteet aineenopettajaopiskelijoiden ajatuksiin haasteista?

2 Teoreettinen viitekehys

Tässä luvussa pureudutaan aikaisempaan tämän pro gradu -tutkielman aiheeseen liittyvään tutkimukseen. Aluksi alalukuun 2.1 on koottu lukion opetussuunnitelman perusteiden mallintamiseen ja erityisesti graafiseen mallintamiseen liittyviä kohtia ja teemoja. Seuraavaksi alaluvussa 2.2 käydään läpi mallintamiseen liittyviä tutkimuksia sekä mallintamisessa havaittuja haasteita oppilaille. Alaluvussa 2.3 perehdytään matematiikan ja fysiikan suhteeseen. Lisäksi alaluvussa 2.4 perehdytään tutkimukseen siitä, mitä ylipäätään tarkoittaa ymmärtää fysiikan yhtälöitä.

2.1 Graafinen mallintaminen opetussuunnitelmien perusteissa

Tässä alaluvussa esitellään graafisen mallintamisen ja siihen liittyvien teemojen ilmenevyyttä lukion opetussuunnitelmien perusteissa. Tämän pro gradu -tutkielman kirjoittamisen aikaan käytössä on opetussuunnitelman perusteet 2015 (LOPS 2015) [5], mutta uusi opetussuunnitelmien perusteet 2019 (LOPS 2019) [6] on jo hyväksytty ja tulee voimaan syksyllä 2021. Siksi tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään molempia opetussuunnitelmien perusteita.

Graafiseen mallintamiseen liittyviä mainintoja löytyy molemmista opetussuunnitelmien perusteista jo fysiikan opetuksen yleisten tavoitteiden alta:
LOPS 2015: ”*osaa muodostaa, tulkita ja arvioida erilaisia malleja sekä käyttää niitä ilmiöiden kuvaamiseen ja ennusteiden tekemiseen*” [5, s. 152]
LOPS 2019: ”*osaa muodostaa, tulkita ja arvioida erilaisia malleja sekä käyttää niitä ja simulaatioita ilmiöiden kuvaamiseen ja ennusteiden tekemiseen*”
ja
”*osaa käyttää asianmukaisia ohjelmia mallintamisen, laskennallisten ja graafisten ratkaisujen sekä tulosten ilmaisemisen välineenä*” [6, s. 251].
Lisäksi molempien opetussuunnitelmien perusteiden fysiikan yleisessä arvioinnissa kerrotaan, että graafinen mallintaminen on yksi keino osoittaa fysiikan taitoja ja niiden soveltamista [5, s. 153] [6, s. 251].

Ensimmäinen pakollinen fysiikan kurssi (LOPS 2015) tai moduuli (LOPS 2019) keskittyy fysiikan luonteeseen luonnontieteenä. Vanhemmassa LOPS:ssa mallintaminen ja erityisesti graafinen mallintaminen on esillä sekä tavoitteissa:
”*ymmärtää, kuinka luonnontieteellinen tieto rakentuu kokeellisen toiminnan ja siihen kytkeytyvän mallintamisen kautta*”
että keskeisissä sisällöissä:
”*tutkimukset ja mallintaminen fysikaalisen tiedon rakentumisessa*”

ja
"*tulosten kerääminen, esittäminen graafisesti ja luotettavuuden arviointi*" [5, s. 153].
Uudessa LOPS:ssa mallintaminen mainitaan jo kuvauksessa:
"*Moduulissa opiskelija saa kuvan fysiikan kokeellisesta luonteesta ja tutustuu kvantitatiiviseen mallintamiseen.*" [6, s. 252]

Tavoitteissa mallintamista tai graafista mallintamista ei erikseen mainita, mutta sen voisi nähdä sisältyvän esimerkiksi "*fysiikassa käytettäviin tiedonhankintamenetelmiin*" [6, s. 252]. Keskeisissä sisällöissä graafinen malli taas on selkeästi esillä: "*mittaaminen, tulosten kerääminen, niiden esittäminen graafisesti ja luotettavuuden arviointi*" ja "*graafinen malli ja lineaarinen malli*"

Muista fysiikan kursseista/moduuleista Voima ja liike -kurssilla (FY4) graafinen mallintaminen on molemmissa opetussuunnitelmien perusteissa esillä tavoitteissa:
LOPS 2015 "*harjaantuu graafisten esitysten käyttämisessä ja tuottamisessa.*" [5, s. 154]
LOPS 2019 "*osaa tuottaa ja analysoida graafisia esityksiä mittausaineistosta*" [6, s. 254]

Matematiikan kursseilla graafisen mallintamiseen liittyviä teemoja käsitellään useilla kursseille. Ensimmäisellä kaikille pakollisella matematiikan kurssilla tavoitteina on muun muassa funktion käsitteen vahvistaminen [5, s. 130] [6, s. 223] ja keskeisenä sisältönä muun muassa funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta [5, s. 130] [6, s. 224] sekä suoraan ja kääntäen verrannollisuus [6, s. 224]. Suoria käsitellään pitkässä matematiikassa ainakin analyyttisen geometrian ja vektoreiden [5, s. 132-133] [6, s. 255] sekä 3d-geometrian [6, s. 228] yhteydessä. Näillä kursseilla tosin suoraa ei käsitellä graafisen mallintamisen näkökulmasta, vaan pikemminkin suoran ominaisuuksien näkökulmasta. Muista aineista kemian [5, s. 160] [6, s. 260, 266], maantiedon [5, s. 147] [6, s. 244] ja yhteiskuntaopin [5, s. 178] opetussuunnitelmien perusteiden alta löytyy mainintoja graafisesta mallintamisesta.

2.2 Mallintaminen ja siihen liittyvät haasteet

Sekä matematiikassa että fysiikassa käytetään monenlaisia malleja. Mallit voivat olla esimerkiksi kaavioita, histogrammeja tai kuvaajia. Täten myös koulussa on tarpeen käsitellä ja opettaa mallintamista. Oppilaiden on opittava sekä mallien konstruointia että tulkitsemista. Tässä pro gradu -tutkielmassa ollaan kiinnostuneita erityisesti kuvaajista, joten tässä alaluvussa keskitytäänkin pääasiassa matemaattiseen graafiseen mallintamiseen.

Edellä listattiin muutamia mallien eri tyyppejä. Malleja voidaan luokitella myös ontologisen aseman mukaan. Mentaalinen malli (mental model) on henkilökohtainen käsitys tai kuva asiasta tai ilmiöstä, esimerkiksi atomista. [10] Mentaalista mallia käytetään paitsi ymmärtämiseen, myös asian selittämisessä muille. Mentaalineen malli toimii käyttäjälleen ilmiötä ja sen osia selittävänä. Kun luotu malli vastaa todellista tieteellistä mallia, voidaan käyttäjän sanoa luoneen pätevän mentaalisen mallin tutkittavasta ilmiöstä. [11] Myös jokin ryhmä voi jakaa mentaalisen mallin. Mentaalinen malli voi olla vaikeasti ymmärrettävä muille kuin mallin omistajalle. Jos se kuitenkin ilmaistaan tai selitetään muille, voidaan puhua ilmastusta mallista (expressed model). Kun ryhmässä jaetaan ilmaistu malli eli kun ryhmän sisäinen yhteisymmärrys mallista löytyy, voidaan puhua konsensusmallista (consensus model). Tutkijoiden ja muiden alan ammattilaisten keskuudessa syntynyt konsensusmallia voidaan kutsua tieteelliseksi malliksi (scientific model). Lisäksi mallia, joka on osoitettu vääräksi tai riittämättömäksi, kutsutaan historialliseksi malliksi (historical model). Koulumaailmasta voidaan vielä löytää ainakin opetussuunnitelmallinen malli yksinkertaistamaan tieteellistä mallia oppimisen kannalta sopivaksi, ja opetuksellinen malli tukemaan opetussuunnitelmallisen mallin oppimista. Joskus opetussuunnitelmalliset mallit ovat hybridimalleja, jotka yhdistävät historiallisia ja konsensusmalleja. [10] Erilaisten ontologisten mallien olemassaolo ja syntyminen olisi tärkeä tiedostaa, jotta opettaja voisi ohjata oppilaidensa mentaalisia malleja kohti yleisesti hyväksyttyjä tieteellisiä malleja. Opettajan tulee tiedostaa myös omat mentaaliset mallinsa ja verrata niitä muihin malleihin, erityisesti tieteelliseen ja opetukseen sekä opetussuunnitelmaan liittyviin malleihin.

Opettamiseen ja koulumaailmaan liittyvät pedagogiset analogiset mallit lisäävät oppilaiden käsitteellistä ymmärrystä. Pedagoginen malli voi liittyä esimerkiksi esitystapaan ja symboleihin. Opettaja voi päättää, miten ilmaisee tai kirjoittaa asian taululle ja käyttää samanaikaisesti monia esitystapoja selventämään asiaa. Taululle voi kirjoittaa yhtälön $s = vt$, mutta viereen voi laittaa tätä selittämään myös yhtälön $matka = nopeus \cdot aika$. Toisaalta alun perin kirjoitettu yhtälö on matemaattinen malli kuljetulle matkalle. Matemaattisten mallien, olivat ne sitten yhtälöitä tai esimerkiksi graafeja, haaste on niiden abstraktisuus. Ne näyttävät suureiden väliset relaatiot tehokkaasti, mutta vain sille, joka osaa niitä tulkita. Koulussa olisikin matemaattisen mallin käyttämisen lisäksi vaadittava myös niiden selittämistä. [8]

Greca & Moreira [11] esittelevät artikkelissaan opiskelijoiden haasteita täsmällisten mentaalisten mallien luomisessa fysiikan opinnoissaan. Ensinnäkin opiskelijoille on haastavaa luoda mentaalinen malli, jonka ennusteet ja selitykset vastaavat fysiikan malleja. Lisäksi puutteet mentaalisen mallin konstruoimisessa johtavat asioiden unohtamiseen tai pelkästään matemaattisten mallien käyttämiseen käsitteiden selittämisessä ja ongelman ratkaisemisessa. Toisaalta mentaalinen malli voi myös vastata niin puhtaan fysikaalista, että matemaattinen malli ilmiöiden selittämisessä menettää merkityksensä. Tällöin opiskelija kykenee kuvailemaan ilmiöitä vain kvalitatiivisesti. Opiskelijat pyrkivät myös usein kehittämään mentaalisia malleja rekursiivisesti alkuperäisiä mallejaan hyödyntäen. Mentaalissa malleissa näkyy voimakkaasti opiskelijan reaalimaailma. Tämä voi johtaa opiskelijan fysikaalisten mallien jäämisen tasolle, jossa ei tarvita tulkintaa. Tällöin opiskelija ei välttämättä selviydy tulkitsemista vaativista tehtävistä.

Oppilaat törmäävät erilaisiin matemaattisiin malleihin jo peruskoulussa, onhan esimerkiksi jokainen fysiikan yhtälö matemaattinen malli jollekin maailmankaikkeuden ilmiölle. Lukioon mentäessä malleja täytyy ymmärtää jo enemmän ja, kuten alaluvussa LOPS huomattiin, osata myös itse sellaisia konstruoida. Mallintaminen, on sitten kyse valmiiden mallien tulkinnasta tai oman mallin konstruoinnista, on taito, jota koulussa harjoitellaan. Martin Carlsen [12] [13] on havainnut oppilaiden matemaattiseen mallintamiseen liittyvässä toiminnassa ilmiön, jota hän nimittää termillä ”resistance”. ”Resistance” on välitila mallintamisen työkalun itsensä ja sen käyttöönoton välillä. Se ilmenee varautumisena siinä, kuinka oppija ottaa uudet työkalut käyttöön. [12] Oppilailla voi olla hallussa mallintamiseen liittyvä matemaattinen funktio, mutta sen soveltaminen kuvaajaan parametrien määrittämiseksi ei silti heti onnistu. Haasteita voi olla esimerkiksi käsitteiden muistamisessa ja varmuudessa tai tarkkuudessa käsitellä parametreja. [13]

Luonnontieteitä opiskelevalla odotetaan olevan tai vähintään muodostuvan hyvä käsitteellinen ymmärrys graafisesta mallintamisesta. Sekä kuvaajien tulkinnasta että tuottamisesta on löydyttävä osaamista. [4] Näitä taitoja opetellaan lukion luonnontieteellisten aineiden, ainakin matematiikan, fysiikan ja kemian tunneilla. Tairab & Al-Naqbi [4] tutkivat noin 15 - 16-vuotiaiden luonnontieteitä opiskelevien taitoja graafisessa mallintamisessa. Heidän tutkimustensa mukaan opiskelijoiden taidot tulkita kuvaajia kvalitatiivisesti olivat matalat. Opiskelijat osasivat vastata yksittäisiä yksityiskohtia käsitteleviin kysymyksiin, mutta kokonaiskuvan luominen kuvaajasta tuntui olevan haastavaa. Opiskelijoilta puuttui ymmärrystä riippuvuussuhteista muuttujien välillä sekä akseleiden valinnasta. He eivät myöskään erottaneet toisistaan erilaisia graafeja, esimerkiksi histogrammit ja kuvaajat menivät sekaisin. Myös Planinic et al. [9] tulivat tutkimuksessaan tulokseen, että yksi suurimmista opiskelijoiden haasteista graafisessa mallintamisessa on ymmärtää, mitä kuvaajalla halutaan sanoa ja mitä ominaisuuksia sillä on.

Graafinen mallintaminen eli jotakin ilmiötä ilmentävän kuvaajan tuottaminen mittausdatan pohjalta vaatii monenlaisia taitoja. Alberto Stefanel [14] tiivistää kuvaajan tulkinnassa vaadittavat taidot neljään teemaan. Ensinnäkin on ymmärrettävä, mitä pisteiden koordinaatit tarkoittavat. Sitten on osattava valita parhaiten tilanteeseen soveltuva eli pisteisiin parhaiten asettuva sovite. Kolmas teema koostuu interpoloinnin ja ekstrapoloinnin käsitteistä ja taidoista käyttää niitä työkaluna. Neljäntenä on ymmärrettävä muuttujien väliset riippuvuudet. Herää kuitenkin ajatus, että jääkö kriittinen tarkastelu Stefanelin mallin [14] ulkopuolella. Myös tulosten tarkkuuden, mielekkyyden ja ylipäätään järkevyyden tarkastelu on muistettava malleja konstruoidessa.

Pospiech et al. [2] ovat tutkimuksessaan tutkineet oppilaiden osaamista ja erityisesti käytetyn menetelmän laatua kuvaajan tuottamisessa. He ovat tutkimuksessaan jakaneet kuvaajan tuottamisprosessin kahteen vaiheeseen: kuvaajan raamien konstruoimiseen ja mittausdatan siirtämiseen kuvaajaksi. Raamien konstruoimiseen kuuluu muuttujien rajaaminen ja niiden välisen relaation tutkiminen sekä akseleiden valinta ja skaalaaminen. Mittausdatan siirtäminen kuvaajaksi tarkoittaa yksittäisten mittapisteiden sijoittamista raamien konstruoinnissa tuotettuun koordinaatistoon sekä muuttujien välisen relaation kuvaamista sopivalla sovitteella. Biologian oppimista käsittelevässä tutkimuksessa, jossa oli käytössä samanlainen jako kuvaajan tuottamisen vaiheista, on todettu, että edellä kuvatun kahden vaiheen osaamisessa on yhteys. Oppilaat, jotka osasivat ensimmäisen vaiheen, osasivat toisenkin ja toisinpäin. [15, ks. Pospiech] Tutkimuksessa ei löydetty yhteyttä kuvaajan konstruoimistaitojen ja biologian osaamisen välillä [15, ks. Pospiech], joten tulosta voisi soveltaa myös fysiikkaan [2].

Kuvaajan konstruoimista voidaan pitää informaation esitystavan muutoksena. Esimerkiksi taulukon sisältämä informaatio voidaan konstruoida kuvaajaksi. Esitystavan muuttaminen voi tapahtua erilaisten aktiviteettien tai toimintatapojen kautta. [2] Pospiech et al. [2] jakoivat nämä toimintatavat kolmeen osaan. Ensinnäkin oppilas voi seurata jotain vanhaa oppimaansa algoritmia, siis jäljitellä esimerkiksi tunnilla oppimaansa. Toiseksi oppilas tutkia tehtävään liittyvien muuttujien riippuvuuden ominaisia piirteitä, esimerkiksi riippuvuuden laatua. Kolmanneksi hän voi konstruoida ensin kuvaajan ja jälkikäteen tarkastella sen järkevyyttä aiemmin opitun perusteella tai verrata kuvaajan ja alkuperäisen datan yhdenmukaisuutta. Tutkimuksen tuloksena kuvaajan raamien konstruoinnissa oppilaat käyttävät lähes pelkästään aiemmin opittuja algoritmeja. Ainoastaan akseleiden valintaan liittyvissä kohdissa käytettiin joskus muita toimintatapoja. Toisessa vaiheessa, mittausdatan siirtämisessä kuvaajaksi, oppilaat käyttivät muitakin toimintatapoja. Mittapisteet vielä sijoitettiin koordinaatistoon vanhoja opittuja algoritmeja käyttäen, mutta sovitteen teossa myös riippuvuuden ominaisuuksien tarkasteluun ja jälkikäteen tarkistamiseen liittyviä aktiviteetteja havaittiin käytettävän. Tutkimus jättää pohtimaan, mitä kuvaajan konstruointitehtävät mittaavat. Tutkimuksen mukaan aiempien algoritmien käyttämisellä, siis ulkoa opettelulla, on suuri rooli oppilaan tuottaessa kuvaajia. Sen sijaan ymmärtämiselle, itse fysiikalla, havaittiin olevan pienempi rooli.

Pospiech et al. [2] ovat tutkineet myös oppilaiden ymmärrystä vakiotermistä ja kulmakertoimesta sekä fysiikkaan että matematiikkaan liittyvissä graafisen mallintamisen tehtävissä. He huomasivat oppilaiden vastaavan tarkemmin matematiikkaan kuin fysiikkaan liittyviin kysymyksiin. Toisaalta algebrallinen ilmaisu tuotti oppilaille vaikeuksia. Tehtävät, joissa pyydettiin määrittämään (determine), olivat oppilaille vaikeampia, kuin tehtävät, joissa pyydettiin vertailemaan (compare). Vakiotermiin liittyvät kysymykset olivat tutkimuksen mukaan oppilaille helpompia, kuin kulmakertoimeen liittyvät ja negatiivinen kulmakerroin osoittautui hankalammaksi kuin positiivinen. Lisäksi määrittäminen kuvaajista oli helpompaa kuin yhtälöistä. Fysiikan tehtävissä oppilaat käyttivät hyväksi dimensioanalyysiä suureiden valinnassa ja osa jopa päätyi käsittelemään yhtälöitä virheellisesti päämääränään dimensioanalyysin mukainen tulos.

Pospiech et al. [2] tutkimuksessa mielenkiintoista oli myös perustelut, joita oppilaat käyttivät vakiotermiä ja kulmakerrointa määrittäessään. Määrityksiä perusteltiin muun muassa määritettävän vakion paikalla yhtälössä. Muutamat muodostivat kuvaajalle yhtälön, kun kysyttiin pystyakselin leikkauspistettä, mutta muuten esitystavan muutoksia käytettiin vähän. Vakiotermille määritettyä arvoa perusteltiin kuvaajasta pystyakselin leikkauspisteenä sekä laskemalla funktion arvoa nollassa. Kulmakertoimelle määritettyä arvoa taas perusteltiin apukolmiolla, kuvaajan jyrkkyydellä sekä laskemalla suhteita esimerkiksi yhtälön vakioille tai muuttujille eli mittaustuloksille. Tämän pro gradu -tutkielman aineiston hankinnan perusteena olevassa vanhassa ylioppilaskoetehtävässä tarvitaan sekä vakiotermin että kulmakertoimen määrittämiseen liittyviä taitoja. Tehtävässä on myös pyydetty perustelemaan vastauksia. Siksi edellä kuvatun tutkimuksen tulokset muodostavat mielenkiintoisen vertailukohdan tälle tutkimukselle.

Myös Planinic et al. [9] ovat tutkineet lukiolaisten ymmärrystä kuvaajan kulmakertoimesta ja vertasivat osaamista matematiikassa ja fysiikassa. He keräsivät aineistonsa teettämällä lukiolaisilla kahden tehtäväparin harjoituksen. Kaikki neljä tehtävää liittyivät suoriin. Toinen parin tehtävistä oli matemaattinen ja toinen fysikaalinen, mutta parin sisällä tehtävät olivat analogisia, vaikka konteksti olikin eri. Tutkimuksessa huomattiin, että opiskelijat selviytyivät paremmin matematiikan tehtävistä kuin fysiikan tehtävistä. Tutkimuksessa selvitettiin myös, miten fysiikan opettajat arvioivat tehtävien haastavuutta opiskelijoille. Suurin osa arvioi matematiikan tehtävät fysiikan tehtäviä haastavammiksi. He perustelivat arviotansa fysiikan reaalimaailmallisuudella ja kontekstisuudella matematiikan abstraktisuuteen verrattuna. [9]

Fysiikan heikon osaamisen taustalla voisi ajatella olevan heikko matemaattinen osaaminen. Tutkimuksissa on kuitenkin havaittu päinvastaista. Usean tutkimuksen mukaan heikon fysiikan osaamattomuuden taustalla ei ole matemaattisten taitojen puute. Toisaalta matemaattinen osaaminen ei takaa menestystä fysiikassa. [9] [16] [17] Planinic et al [9] tutkimuksessa opiskelijat eivät havainneet matematiikan ja fysiikan tehtävien samankaltaisuutta tehtäväparin sisällä, vaan käyttivät eri kontekstin tehtävien ratkaisuun eri menetelmiä. Kuten aiemmin mainittu, fysiikan kokonaisvaltaisessa ymmärtämisessä tarvitaan matemaattista ymmärrystä. Moni käsite voi olla tuttu matematiikan tunnilta, mutta fysiikan tunnilla sille annetaan jokin reaalimaailman merkitys, esimerkiksi kulmakerroin kuvaa suuretta tiheys tai nopeus. Siksi koulumaailmassa linkkien luominen matematiikan ja fysiikan välillä olisi ensiluokkaisen tärkeää. Opiskelijoiden osaamisen on kuitenkin havaittu olevan hyvin lokeroitua, ja siten matemaattisen osaamisen siirtäminen fysiikan kontekstiin haastavaa. Yhden syyn tälle on arveltu olevan aineiden välisten linkkien puute, joka näkyy vaikeutena ymmärtää matematiikan ja fysiikan analogioita. Toisaalta on havaittu myös, että käsitteellistä osaamista erityisesti fysiikassa, mutta myös matematiikassa, pitäisi lisätä. Kaikille kulmakerroin ei edes matemaattisena käsitteenä ollut tuttu, vaan sen luultiin kuvaavan esimerkiksi suoran ja x-akselin välistä kulmaa. [9] Jos ymmärrystä kulmakertoimesta ei ole tai siihen liittyy virheitä, ei sen soveltaminenkaan voi onnistua ainakaan aitoon ymmärrykseen perustuen. Matematiikan ja fysiikan väliseen suhteeseen opetusmielessä perehdytäänkin seuraavassa alaluvussa.

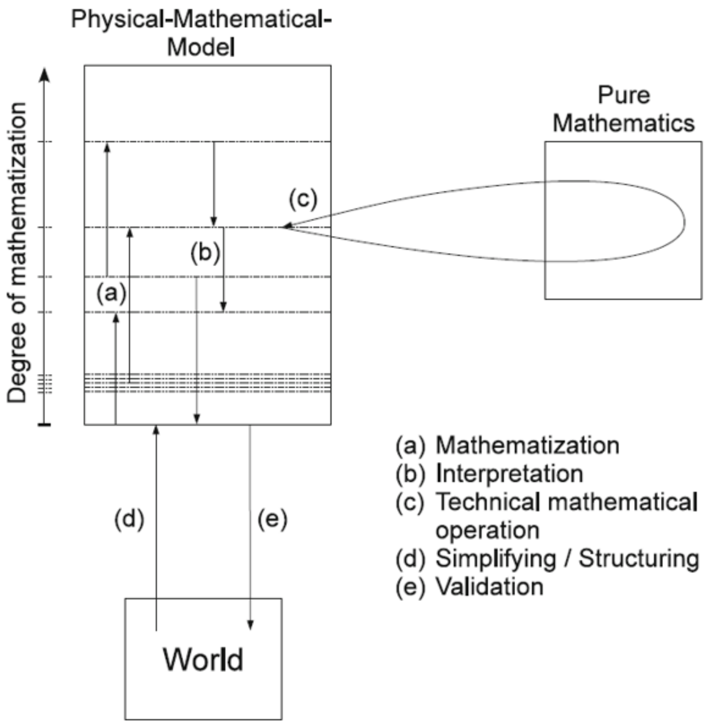
2.3 Matematiikan ja fysiikan suhteesta

Matematiikka ja fysiikka kulkevat usein käsikädessä. Fysiikassa käytetään matematiikkaa täsmällisen esittämisen kielenä ja historian saatossa matematiikkaa on toisinaan ollut tarpeen kehittää juuri fysiikan tarpeisiin, kuten Kjeldsen ja Lützen [18] artikkelissaan osoittivat funktion käsitteelle ja sen yleistymiselle käyneen. Alojen läheiset välit näkyvät myös koulumaailmassa. Fysiikan opetuksessa on mietittävä, missä määrin panostaa matemaattiseen osaamiseen. Matematiikka voidaan nähdä fysiikan työkaluna, teknisenä keinoja saada esimerkiksi lukuarvoja fysikaalisille suureille. Tällöin vaarana on, ettei fysikaalisesta osaamisesta tule käsitteellistä [1]. Greca ja Moreira [11] toteavat artikkelissaan, että matematisointi ei takaa fysikaalista ymmärrystä. Heistä uuden semanttisen tieteen oppiminen vaatii ensin juuri sen tieteenalan syntaksin oppimista. Fysiikan tapauksessa matematisointi tulisi tulla kuvioihin vasta myöhemmin. Toisaalta voidaan miettiä, voisiko matematiikan opetukseen saada jotain hyödyllistä fysiikasta. Tässä alaluvussa esitellään lyhyesti matematiikan ja fysiikan suhdetta lähinnä koulumaailman ja opetuksen näkökulmasta.

Kuten aiemmin opetussuunnitelmien perusteita tutkittaessa huomattiin, mallintamiseen liittyviä teemoja on usein esillä lukion opetussuunnitelmien perusteissa. Mallintaminen, sekä tulkinta että konstruointi, vaatii fysikaalisen osaamisen lisäksi matemaattista osaamista. Matemaattinen osaaminen ja sen opettaminen fysiikan tarpeisiin nähden voidaan jakaa kahteen lajiin, tekniseen ja rakenteelliseen. Teknisiin matemaattisiin taitoihin kuuluu esimerkiksi yhtälön ratkaiseminen, kuvaajan konstruoiminen ja algoritminen työskentely. Rakenteellisiin taitoihin taas kuuluu valmiudet ottaa matemaattinen osaaminen käyttöön fysikaalisen kontekstin jäsentelyssä. [17] Tässäkin pro gradu -tutkielmassa päädyttiin jakamaan osaamista kahteen lajiin, tekniseen ja käsitteelliseen. Vaikka termi on eri, käsitteellinen laji vastaa hyvin Pietrocolan [17] ajatusta rakenteellisesta osaamisesta.

Koulumaailmassa matematiikkaa voidaan pitää ratkaisemisen ja määrittelemisen työkaluna, kun taas tiedemaailmassa fysiikan yhtälöillä, matematiikalla, on tärkeämpi rooli fysiikan ilmiöiden selittämisessä. Oppilaat käyttävät fysiikan yhtälöitä sijoitus-laskemisperiaatteella. Ongelmaan valitaan oikea yhtälö, sijotetaan oikeat suureiden arvot paikoilleen ja saadaan tulos. Näin oppilaille ovat opettaneet opettajat, joita on itse aikanaan opetettu samalla tavalla. [19] Fysiikassa nähdään tarvittavan hyvin teknistä matemattista osaamista. Karam ja Krey [19] pohtivat, että muutos täytyisikin tapahtua fysiikan opettajakoulutuksessa, jotta se voisi siirtyä myös muuhun fysiikan opetukseen. He testasivat ideaansa järjestämällä fysiikan aineenopettajaopiskelijoille kurssin, jossa pyrittiin siirtämään keskittyminen laskemisesta ja kuvailusta selittämiseen ja ymmärtämiseen. Kurssilla keskityttiin kysymään miksi- ja kuinka-kysymyksiä. Opiskelijat kokivat kurssin kokonaisvaltaisen onnistuneeksi ja hyödylliseksi tulevaisuuden ammattiaan kohtaan. Opiskelijat kokivat erityisesti heidän selittämismahdollisuuksiensa laajentuneen ja kurssin kasvattaneen tietoisuutta oppilaiden mahdollisista haasteista ymmärtää yhtälöitä.

Matematiikan käyttämisestä fysiikassa on tehty useampia malleja. Esimerkiksi Blum ja Leiß [20] kehittivät syklisen mallin, joka korostaa kognitiivisia prosesseja. Uhden et al. [1] taas kehittivät tasomallin. He halusivat mallissaan korostaa matematiikan ja fysiikan nivoutumista yhteen. Samalla kummankaan roolia puhtaana tieteenä ei haluttu unohtaa. Toisaalta he halusivat mallista sellaisen, että teknisten ja rakenteellisten matemaattisten taitojen erottaminen olisi mahdollista. Tekniset taidot liitetään mallissa puhtaaseen matemaattiseen työskentelyyn. Rakenteelliset taidot taas näkyvät matematisoinnin ja tulkinnan kautta. Alla on havainnekuva 2.1 mallista.



Kuva 2.1: Tasomalli matematiikan ja fysiikan yhteen nivoutumisesta [1, s. 497]

Mallissa tarkastellaan siis matematisoinnin astetta tasojen avulla. Tasoja on äärettömän paljon, ja ne edustavat oppilaiden käyttämää matematisoinnin tasoa fysikaalista ymmärrystä mittaavassa tilanteessa, esimerkiksi tehtävää ratkaistessa. Alin taso sisältää pelkästään puhtaan kvalitatiivisia fysiikan taitoja. Korkeamman tason voi aina saavuttaa matematisoimalla tehtävää ja ratkaisua, tätä kuvaa nuoli (a). Alemmalle tasolle siirrytään tulkinnan (b) kautta eli kun oppilas pohtii matemaattisen ilmaisun fysikaalista merkitystä. Mallissa puhdas matematiikka on erillään. Nuoli (c) edustaa vain teknisiä matemaattisia taitoja, laskemista, eikä tämän nuolen prosessiin liity fysikaalista referenssiä. Nuolet (d) ja (e) taas kuvaavat fysikaalis–matemaattisen mallin ja reaalimaailman välillä tapahtuvia prosesseja. Reaalimaailman ongelma on idealisoitava fysikaalis–matemaattista tarkastelua varten. Saatu malli taas on validoitava eli vahvistettava toimivaksi reaalimaailmassa. Mallillaan he halusivat korostaa, ettei matematiikan merkitys fysiikan opetuksessa olisi vain merkityksetöntä laskemista, vaan taustalla tulisi olla pyrkimys sanoittaa fysiikkaa matemaattisella kielellä.

Gilbert [10] ehdottaa, että luonnontieteistä voisi tehdä mielenkiintoisempia ja helpommin lähestyttäviä lisäämällä opetuksen autenttisuutta. Opetukseen voisi ottaa mukaan historiallista tai filosofista aspektia, jolloin pystyttäisiin näyttämään prosessia, jolla tuloksiin on päästy. Luonnontieteisiin voidaan liittää kekseliäisyyttä ja luovuutta, joiden avulla luonnontieteelliset saavutukset ovat nousseet kulttuurillisesti merkityksellisiksi. Myös tätä näkökulmaa voisi Gilbertin [10] mielestä korostaa. Myös luonnontieteiden tarjoamien teknologisten ratkaisujen esille tuomista olisi hänestä syytä alleviivata. Nämä ratkaisut näkyvät kaikkialla, ja esimerkiksi sosiaaliseen kanssakäymiseen ja terveyteen liittyvä teknologisen osaamisen taso tulee hyvin lähelle jokaista. Viimeisenä Gilbert [10] muistuttaa, että ilmiöille pitäisi voida tarjota tyydyttäviä selityksiä myös ymmärrettävällä, arkimaailman kielellä. Tämä jakaa varmasti mielipiteitä, kuuluuhan luonnontieteen osaamiseen yhtenä osa-alueena myös käsitteistön hallinta. Kultainen keskitie lienee tässäkin ratkaisu. Selittäessä ei tarvitse käyttää suorastaan virheellisiä käsitteitä, mutta joskus epätarkka käsite tai analogia voi saada ymmärtämään sellaisenkin, jolle teoreettisempi ja käsiteellisempi selitys olisi liian haastava.

2.4 Mitä on fysiikan yhtälön ymmärtäminen?

Opetuksen kognitiivisen vallankumouksen jälkeen opetuksen odotetaan tähtäävään ymmärrykseen. Fysikaalisia ongelmia ja niiden ratkaisemista voidaan lähestyä monin eri tavoin. Usein ongelma todetaan ääneen, jonka jälkeen kerätään annetut ja tarvittavat suureet. Sitten valitaan sopiva yhtälö ja muokataan se sellaiseksi, että kysytty suure saadaan selville. Yksi tapa on pyrkiä aluksi tunnistamaan ongelma tietyn tyyppiseksi ja sitten valita tuttu menetelmä sen ratkaisemiseksi. Tällainen lähestyminen on mahdollista, jos ymmärtää milloin ja miten käyttää yhtälöitä. [21] Herää kuitenkin kysymys, että miten edellä mainitut tavat edistävät fysikaalista ymmärrystä. Opiskelijoiden on todettu itse asiassa tietävän melko paljon fysiikasta arkikokemustenkin perusteella [21]. Jokainen tekee arjessaan havaintoja, jotka ovat seurausta fysikaalisista ilmiöistä. Kun sataa ja paistaa, taivaalla voi nähdä sateenkaaren. Bussin jarruttaessa horjahtaa eteenpäin. Fysiikan opetuksessa näille havainnoille haetaan formaali muoto ja pyritään ymmärtämään esimerkiksi niiden syitä ja seurauksia.

Mitä ylipäätään tarkoittaa fysiikan yhtälöiden ymmärtäminen? Domert et al. [22] pyrkivät vastaamaan tähän tutkimalla korkeakouluopiskelijoiden epistemologisia käsityksiä aiheesta. Tutkimusotoksessa oli sekä alkuvaiheen opiskelijoita että tohtorikoulutettavia. Tutkimusryhmä jakoi aluksi ymmärtämisen kuuteen epistemologiseen komponenttiin, joiden esiintymistä korkeakouluopiskelijoiden vastauksista he etsivät. Tutkimusryhmän mielestä kaikki kuusi komponenttia on tarpeellisia fysiikan yhtälöiden täsmällisen ymmärtämisen kannalta. Komponentit on esitelty lyhyesti alla.

- Komponentti A: Fysikaalisen suureen tunnistaminen yhtälön symbolista
- Komponentti B: Yhtälön taustalla olevien fysiikan lakien ja periaatteiden ymmärtäminen
- Komponentti C: Yhtälön suureiden välisten riippuvuuksien ymmärtäminen
- Komponentti D: Yhteyden luominen fysiikan yhtälön ja arkimaailman välille
- Komponentti E: Ymmärrys siitä, kuinka yhtälöä käytetään
- Komponentti F: Ymmärrys siitä, milloin yhtälöä käytetään

Tutkimuksessa haastateltujen korkeakouluopiskelijoiden mielestä fysiikan yhtälöiden ymmärtäminen tarkoitti useimmin ymmärrystä siitä, kuinka käyttää yhtälöä (komponentti E). Myös symbolien ja suureen yhdistäminen (komponentti A) esiintyi lähes puolella vastaajista. Sen sijaan suureiden välisten riippuvuuksien ymmärtämistä (komponentti C) ei juurikaan esiintynyt korkeakouluopiskelijoiden vastauksissa. [22] Konsensusta sille, mitä fysiikan yhtälöiden ymmärtäminen tarkoittaa, ei löytynyt tutkimuksen otoksesta, mutta voi sitä olla vaikea löytää tutkijoiden keskuudestakaan. Edellä kuvattu Domertin et al. [22] jako on varmasti vain yksi esimerkki, mutta sen myötä pääsee ainakin jäljille siitä, mitä fysiikan yhtälöiden ymmärtäminen voisi tarkoittaa.

Koulumaailmassa oppilaille esitellään kasa fysiikan yhtälöitä ja harjoitellaan niiden käyttämistä esimerkiksi laskemalla tehtäviä. Ymmärtävätkö oppilaat kuitenkaan yhtälöiden fysikaalista merkitystä tai sitä, mistä yhtälöt ovat peräisin? Sherin [21] havaitsi yliopisto-opiskelijoita koskevassa tutkimuksessaan, että silläkin asteella fysiikan yhtälöiden ymmärtämisessä oli puutteita. Opiskelijat saattoivat kertoa ymmärtävänsä, tai jopa pitävänsä ilmeisenä, yhtälön ja sen merkityksen. Silti he eivät kuitenkaan aina osanneet selittää yhtälön termien merkityksiä. Yhtälöitä siis ymmärretään, mutta vain tietyllä tarkkuudella. Lisäksi Sherin havaitsi, että yliopisto-opiskelijat eivät aina lähde johtamaan haluamaansa yhtälöä yleisistä periaatteista, vaan he käyttävät fysikaalisen ongelmanratkaisussa yhtälöstä muotoa, joka on jo muokattu heidän tarvitsemaansa muotoon. [21] Onko syy tälle yhtälön johtamisen usein haastavakin matemaattinen pyörittely, jota ei osata tehdä? Vai ymmärtävätkö opiskelijat edes, että yhtälöt on johdettu jostakin periaatteista? Lukiossa, saati peruskoulussa, yhtälöiden johtaminen voi olla matemaattisesti liian haastavaa. Toisaalta yksittäisen suureen määrittely muiden suureiden avulla voi olla hyvinkin yksinkertaista. Sherinin tutkimus pistääkin miettimään, painotetaanko yhtälöiden alkuperää kuitenkin liian vähän. Esimerkiksi tiheyden määritelmää voi lähestyä myös kokeellisuuden kautta mittaamalla massan ja tilavuuden riippuvuutta, eikä antamalla yhtälöä suoraan.

3 Pienimmän neliösumman menetelmä

Tilastotieteessä tai luonnontieteissä on usein tarpeellista mitata kahden muuttujan välistä riippuvuutta toisistaan. Esimerkiksi fysiikassa voidaan mitata matkaa, joka kuljetaan tietyssä ajassa. Mittauksessa saadaan mittapisteitä, jotka voidaan helposti sijoittaa koordinaatistoon. Mittapisteisiin halutaan sovittaa jokin kuvaaja, jotta riippuvuudella saadaan luotua matemaattinen malli. Kuvaaja voi olla esimerkiksi suora. Mittapisteissä on aina mittauksesta johtuvaa epätarkkuutta, joten mittapisteet eivät asetu täydellisesti millekään suoralle. Tavoitteena onkin saada suora kulkemaan mahdollisimman lähellä jokaista koordinaatistoon piirrettyä mittapistettä. Tässä luvussa perehdytään pienimmän neliösumman menetelmään, jolla sovitus voidaan tehdä edellä kuvattujen tavoitteiden mukaisesti. Myös esimerkiksi ylioppilaskirjoituksissa käytössä olevat ohjelmat sovittavat kuvaajat käyttämällä pienimmän neliösumman menetelmää.

Tämän luvun alla käydään ensin alaluvussa 3.1 läpi joitakin määritelmiä ja merkintöjä, joita tässä pro gradu -tutkielmassa on käytetty. Sitten kuvaillaan tarkemmin matemaattisen mallin tuottamiseen liittyviä tarpeita ja haasteita alaluvussa 3.2 ja 3.3. Varsinaista pienimmän neliösumman menetelmää kuvaillaan alaluvussa 3.4.

3.1 Esitietoja, merkintöjä

Tässä kappaleessa esitellään joitakin käsitteitä ja niiden määritelmiä, joita tarvitaan myöhemmin varsinaisen pienimmän neliösumman menetelmän käsittelyssä.

Tässä tutkielmassa käytetään keskiarvolle seuraavia merkintöjä:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \\
\overline{Y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \\
\overline{XY} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \\
\overline{X^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \\
\overline{X}^2 &= (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2
\end{aligned}$$

Lisäksi myöhemmin tarvitaan muutamia matriiseihin liittyviä määritelmiä sekä niihin liittyviä ominaisuuksia. Tässä tutkielmassa $n \times n$ -identiteettimatriisia merkitään

$$
\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.
$$

Seuraavaksi määritellään kääntyvä matriisi, matriisin transpoosi sekä positiivisesti definiitti matriisi.

Määritelmä 3.1. [23, s. 51] Olkoon $\mathbf{A}$ $n \times n$ -matriisi. Matriisin $\mathbf{A}$ sanotaan olevan *kääntyvä*, jos on olemassa sellainen matriisi $\mathbf{B}$, että

$$
\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.
$$

Matriisia $\mathbf{B}$ sanotaan matriisin $\mathbf{A}$ *käänteismatriisiksi* ja voidaan merkitä myös $\mathbf{A}^{-1}$.

Määritelmä 3.2. [23, s. 38] Olkoon $\mathbf{A}$ $m \times n$ -matriisi. Matriisille $\mathbf{A}$ voidaan määrittää $n \times m$ -*transpoosimatriisi* $\mathbf{B}$ siten, että

$$
b_{ji} = a_{ij}
$$

kaikille $j = 1, \dots, n$ ja $i = 1, \dots, m$. Matriisin $\mathbf{A}$ transpoosimatriisille käytetään merkintää $\mathbf{A}^T$

Määritelmä 3.3. [23, s. 359] Olkoon $\mathbf{A}$ reaalinen symmetrinen $n \times n$ -matriisi sekä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nollasta eroava vektori, jolle

$$
\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.
$$

Täten vektorin $\mathbf{x}$ transpoosi on

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}.
$$

Olkoon v tulo

$$
v = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.
$$

Näin saatu tulo on reaaliluku, eli $v \in \mathbb{R}$. Jos kaikilla nollasta eroavilla vektoreilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tulo v on positiivinen, eli

$$
v = \mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0,
$$

matriisin $\mathbf{A}$ sanotaan olevan *positiivisesti definiitti*.

Lopuksi tarvitaan vielä Hessen matriisi, joka syntyy toisen kertaluvun osittaisderivaatoista. Määritelmä esitetään seuraavaksi.

Määritelmä 3.4. [23, s. 363] [24, s. 803 - 804] Olkoon

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n)$$

reaalinen funktio, jonka kolmannet osittaisderivaatat muuttujien $x_1, \dots, x_n$ suhteen ovat kaikki vakioita. Tällöin funktiolle F voidaan määritellä *Hessen matriisi*

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Tässä tutkielmassa tarvitaan vielä erästä Hessen matriisin ominaisuutta, joka esitellään seuraavaksi.

Lause 3.5. *[23, s. 363] Olkoon F määritelmässä 3.4 esitetty funktio ja $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ funktion F Hessen matriisi. Olkoon $\mathbf{x}_0$ funktion F stationaaripiste eli piste, jossa osittaisderivaatat saavat nollakohtansa. Nyt Hessen matriisille pisteessä $\mathbf{x}_0$ pätee, että jos $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ on positiivisesti definiitti, stationaaripiste $\mathbf{x}_0$ on funktion F lokaali minimi.*

3.2 Regressioanalyysi

Kun halutaan kuvata jonkin selitettävän muuttujan riippuvuutta jostakin toisesta tai toisista selittävistä muuttujista, voidaan käyttää hyväksi regressioanalyysia. Regressioanalyylissa tavoitteena on luoda tutkittujen muuttujien välille tilastollinen malli mittausdatan pohjalta. Tätä tilastollista mallia kutsutaan *regressiomalliksi*. Regressiomallissa oletetaan, että selitettävän muuttujan arvojen vaihtelu riippuu tilastollisesti selittävien muuttujien arvojen vaihtelusta.

Regressioanalyysilla saatu regressiomalli voi olla funktionaaliselta muodoltaan lineaarinen tai epälineaarinen. Lisäksi se voidaan yhtälöidensä määrän mukaan jakaa yhden yhtälön ja moniyhtälöiseen regressiomalliin. [25, s. 268] Tässä Pro Gradu -tutkielmassa keskitytään yksiyhtälöiseen lineaariseen regressiomalliin.

3.3 Regressio-ongelma

Olkoon Y selitettävä muuttuja, jonka riippuu selittävästä muuttujasta X. Tutkittaessa riippuvuutta edellä mainittujen muuttujien välillä saadaan mittapisteistä muodostettua joukko pareja

$$\{(X_1, Y_1,) \dots (X_n, Y_n)\}, n = 1, 2, \dots.$$

[24, s. 855]

Jos muuttujien X ja Y välillä pätee lineaarinen riippuvuus, voidaan sitä kuvata yhtälöllä

$$Y = f(X; \beta), \tag{3.1}$$

missä β edustaa funktion f muodon määrääviä parametreja. Parametrit voivat olla selittävän muuttujan kertoimia tai vakiotermejä. Parametrien määrä ja muoto riippuu haluttavan matemaattisen mallin muodosta. Ongelmana on, ettei voida löytää sellaista havaintoihin perustuvaa parametria β, joka toteuttaisi yhtälön 3.1 kaikille pareille (X_i, Y_i). Täten parametrille β on haettava mahdollisimman hyvä estimaatio eli arvio. [25, s. 269-270]

Edellä todettiin, ettei voida määrittää parametria β, joka toteuttaisi yhtälön 3.1 kaikille pareille (X_i, Y_i). Tämä on seurausta siitä, että selittävän muuttujan X arvon vaihtelevat satunnaisesti havaintoyksiköstä toiseen. Tällöin myös selitettävän muuttujan Y arvot vaihtelevat satunnaisesti. Merkitään tätä satunnaista vaihtelua jäännös- tai virhetermillä ϵ_i, missä indeksi $i = 1, \dots, n$ kertoo, mihin pariin (X_i, Y_i) jäännöstermi viittaa. Nyt edellistä yhtälöä voidaan korjata muotoon

$$Y_i = f(X_i; \beta) + \epsilon_i.$$

Regressioanalyysissa pyritään estimoimaan yllä olevan yhtälön parametri β siten, että se tekisi kaikista jäännöstermeistä ϵ_i mahdollisimman pienet yhtä aikaa. [25, s. 270] Eräs ratkaisu estimaatiolle on pienimmän neliösumman estimaatio, joka esitellään seuraavassa kappaleessa.

3.4 Pienimmän neliösumman estimaatio

Kirjoitetaan kappaleessa 2.2 kuvattu yhtälö lineaariseen muotoon

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i, \tag{3.2}$$

jossa a ja b ovat tuntemattomia parametreja ja ϵ_i havainnosta riippuva jäännöstermi. Tästä yhtälöstä 3.2 on nyt huomattava, että kiinnostavia muuttujia ovat nyt parametrit a ja b. Sen sijaan selitettävä muuttuja Y ja selittävä muuttuja X eivät nimestään huolimatta ole muuttujia, sillä niiden arvot on kiinnitetty mittausdatan perusteella. Arvot toki vaihtelevat indeksistä riippuen, mutta saman indeksin arvot pysyvät samana. Siispä tavoitteena on estimoida arvot nimenomaan parametreille a ja b. Arvot tulisi olla sellaiset, että yhtälön 3.2 avulla selittävän muuttujan

X arvoista voidaan päätellä selitettävän muuttujan Y arvot. Samalla jäännöstermi ϵ halutaan mahdollisimman pieneksi. [24, s. 855]

Pienimmän neliösumman menetelmässä estimaatio parametreille a ja b tehdään tutkimalla jäännöstermien ϵ_i neliöiden summan minimiä. Määritetään arvot näille parametreille mukaillen Glyn Jamesin teosta Advanced Modern Engineering Mathematics [24, s. 855–856] sekä Ilkka Mellinin luentomonistetta Lineaarinen regressioanalyysi [25, s. 290–293]. Tarkoitus on siis määrittää, millä parametrien a ja b arvoilla

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a + bX_i)]^2$$

saa minimiarvonsa.

Merkitään

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2. \tag{3.3}$$

Määritetään nyt funktion Q osittaisderivaatta parametrin a ja b suhteen

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a + bX_i)]^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a + bX_i)] \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a + bX_i)]^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} X_i [Y_i - (a + bX_i)]. \end{aligned}$$

Funtion Q minimi saadaan määritettyjen osittaisderivaattojen nollakohdista, joten määritetään seuraavaksi, milloin

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \tag{3.4}$$

ja

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 0. \tag{3.5}$$

Yhtälölle 3.4 saadaan ratkaisu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n}[Y_i - (a + bX_i)] = 0 \\
&\iff -2\sum_{i=1}^{n} Y_i + 2na + -2b\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\
&\iff na = \sum_{i=1}^{n} Y_i - b\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\iff a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.
\end{aligned}$$

Ratkaisun sisältämät keskiarvot voidaan kirjoittaa muotoon

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}. \tag{3.6}$$

Ratkaistaan seuraavaksi yhtälö 3.5.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} X_i[Y_i - (a + bX_i)] = 0 \\
&\iff -2\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i - aX_i - bX_iX_i) = 0 \\
&\iff -2\sum_{i=1}^{n} X_iY_i + 2a\sum_{i=1}^{n} X_i + 2b\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \\
&\iff -\sum_{i=1}^{n} X_iY_i + a\sum_{i=1}^{n} X_i + b\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \\
&\iff -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_iY_i + a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \\
&\iff -\overline{XY} + a\overline{X} + b\overline{X^2} = 0
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä aiemmin saatuun yhtälön muotoon $a = \overline{Y} - b\overline{X}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&-\overline{XY} + (\overline{Y} - b\overline{X})\overline{X} + b\overline{X^2} = 0 \\
&\iff -\overline{XY} + (\overline{X})(\overline{Y}) - b\overline{X}^2 + b\overline{X^2} = 0 \\
&\iff b(\overline{X^2} - \overline{X}^2) = \overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y}) \\
&\iff b = \frac{\overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y})}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}.
\end{aligned}$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$b = \frac{S_{XY}}{S_X^2}, \tag{3.7}$$

missä

$$S_{XY} = \overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) \tag{3.8}$$

ja

$$S_X^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \tag{3.9}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että saatu osittaisderivaattojen nollakohta todella muodostaa yhtälön 3.3 minimin.

Todistus. Vrt. [25, s. 292 – 293] Tässä todistetaan, että yhtälölle 3.3 löydetty nollakohta muodostaa minimin. Merkitään nollakohtaa tässä (a_0, b_0), jotta on selvää parametrien a ja b arvojen olevan kiinnitetty juuri niiksi arvoiksi, jotka tuottavat nollakohdan yhtälölle 3.3.

Todistusta varten muodostetaan yhtälön 3.3 Hessen matriisi. Jos saatu Hessen matriisi on positiivisesti definiitti nollakohdissa, muodostaa saatu osittaisderivaattojen nollakohta funktiolle Q minimin. Hessen matriisia varten määritetään yhtälölle 3.3 toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2}$ ja $\frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial b}$.

Toisen kertaluvun osittaisderivaataksi parametrin a suhteen saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial Q}{\partial a} \\
&= \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n}[Y_i - (a + bX_i)]^2\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial a}\left(-2\sum_{i=1}^{n}[Y_i - (a + bX_i)]\right) \\
&= 2n.
\end{aligned}$$

Toisen kertaluvun osittaisderivaataksi parametrin b suhteen taas saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} &= \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial Q}{\partial b} \\
&= \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial b}(\sum_{i=1}^{n}[Y_i - (a + bX_i)]^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial b}(-2\sum_{i=1}^{n} X_i[Y_i - (a + bX_i)]) \\
&= \frac{\partial}{\partial b}(-2\sum_{i=1}^{n}[X_iY_i - X_ia - bX_i^2]) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2.
\end{aligned}
$$

Viimeiselle toisen kertaluvun osittaisderivaatalle saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial b} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial Q}{\partial b} \\
&= \frac{\partial}{\partial a}(-2\sum_{i=1}^{n} X_i[Y_i - (a + bX_i)]) \\
&= \frac{\partial}{\partial a}(-2\sum_{i=1}^{n}[X_iY_i - X_ia - bX_i^2]) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} X_i.
\end{aligned}
$$

Kolmannet osittaiderivaatat yhtälölle 3.3 ovat varmasti kaikki vakioita, sillä toisetkin osittaisderivaatat ovat.

Seuraavaksi muodostetaan näistä Hessen matriisi yhtälölle 3.3 nollakohdassa (a_0, b_0), saadaan.

$$
\mathbf{H}(a_0, b_0) = \begin{bmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} X_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} X_i & 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix}.
$$

Seuraavaksi tutkitaan, onko saatu Hessen matriisi $\mathbf{H}(a_0, b_0)$ positiivisesti definiitti. Olkoon $\mathbf{x} \neq 0$ vektori, joka on muotoa

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}.
$$

Täten vektorin $\mathbf{x}$ transpoosiksi saadaan

$$
\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} k & l \end{bmatrix}.
$$

Seuraavaksi lasketaan, mitä on matriisitulo

$$\mathbf{x}^T\mathbf{H}(a_0, b_0)\mathbf{x}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^n X_i \\ 2\sum_{i=1}^n X_i & 2\sum_{i=1}^n X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2nk + 2l\sum_{i=1}^n X_i & 2k\sum_{i=1}^n X_i + 2l\sum_{i=1}^n X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \\
&= k(2nk + 2l\sum_{i=1}^n X_i) + l(2k\sum_{i=1}^n X_i + 2l\sum_{i=1}^n X_i^2) \\
&= 2nk^2 + 2kl\sum_{i=1}^n X_i + 2kl\sum_{i=1}^n X_i + 2l^2\sum_{i=1}^n X_i^2 \\
&= 2nk^2 + 2l^2\sum_{i=1}^n X_i^2 + (2kl\sum_{i=1}^n X_i)^2
\end{aligned}$$

Saadun summalausekkeen termien pitäisi nyt olla positiivisia tai vähintään saada arvo nolla keskenään eri aikaan, jotta koko lauseke olisi positiivinen. Näin on, mutta se vaatii hieman tarkempaa tarkastelua. Lausekkeen ei-negatiivisuus on helppo osoittaa. Neliöön korotuksista seuraa, että $k^2 \geq 0$, $l^2 \geq 0$ ja $X_i^2 \geq 0$, joten $\sum_{i=1}^n X_i^2 \geq 0$. Lisäksi muistetaan, että kerroin $n = 1, 2, \ldots$. Täten kaksi ensimmäistä termiä ovat varmasti ei-negatiivisia. Viimeinen termi on kokonaisuudessaa korotettu neliöön, joten sekin on varmasti ei-negatiivinen.

Seuraavaksi pitäisi osoittaa, että summalauseke ei ole nolla. Tämä seuraa siitä, että lausekkeen termit eivät ole yhtä aikaa nolla. Matriisi $\mathbf{x}$ ei määritelmänsä nojalla voi olla nollamatriisi, jolloin k ja l eivät voi yhtä aikaa olla nollia. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $k = 0$ ja siten $l \neq 0$. Tällöin

$$2nk^2 = 0$$

ja

$$(2kl\sum_{i=1}^n X_i)^2 = 0,$$

mutta

$$2l^2\sum_{i=1}^n X_i^2 > 0,$$

sillä $l \neq 0$, jolloin $l^2 > 0$ ja $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > 0$. Summalausekkeen positiivisuus ja siten nollasta eroavuus seuraa oletuksesta, että selittävällä muuttujalla X_i on välillä $i = 1, \ldots, n$ vähintään kaksi arvoa i ja j, joille $i \neq j$. Oletus on perusteltu, kun muistetaan koko estimoinnin liittyvän regressio-ongelmaan.

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta, jossa jossa $l = 0$ ja $k \neq 0$. Nyt

$$2l^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

ja

$$(2kl \sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = 0,$$

mutta

$$2nk^2 > 0,$$

sillä $k \neq 0$, jolloin $k^2 > 0$. Täten voidaan todeta, etteivät termit voi saada arvoa nolla yhtäaikaa, jolloin saatu summalauseke on positiivinen. Siis

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}(a_0, b_0)\mathbf{x} > 0,$$

jolloin $\mathbf{H}(a_0, b_0)$ on positiivisesti definiitti. Näin on todistettu, että saadut osittaisderivaattojen nollakohdat muodostavat yhtälön 3.3 minimin. $\square$

Seuraavaksi esitetään esimerkki PNS-menetelmän käytöstä. Esimerkiksi valikoitui vuoden 2013 fysiikan ylioppilaskoetehtävä, sillä sitä käsitellään myöhemminkin tämän pro gradu -tutkielman aikana. Ylioppilaskoetehtävä on ylioppilaskirjoituksissa ratkaistu käsin sovittamalla suora mittapisteisiin ja nykyään vastaava tehtävä ratkaistaisiin sähköisesti ohjelmalla, joka laskee tarvittavat parametrit. Ylioppilaskokelaan ei siis tarvitse hallita pienimmän neliösumman menetelmää. Tässä tarvittavat parametrit on kuitenkin ratkaistu sijoittamalla aiemmin saatuihin yleisiin ratkaisuihin parametreille a ja b.

Esimerkki 3.6. Tässä esimerkissä haetaan PNS-menetelmällä ratkaisu seuraavaan vanhaan ylioppilaskoetehtävään [26].
"Laboratoriotyössä kaadetaan asetonia vaa'alle asetettuun mittalasiin. Taulukossa on ilmoitettu asetonin määrä mittalasissa ja vaa'an lukema (mitattu massa).

V (cm^3)	m (g)
25	205
66	230
98	256
136	286
160	305
194	332
218	350
244	371

a) Piirrä kuvaaja, joka esittää massan riippuvuutta asetonin tilavuudesta. (3 p.)

b) Määritä kuvaajan avulla asetonin tiheys. (2 p.)

c) Kuinka suuri on tyhjän mittalasin massa? (1 p.)"

Tehtävää ratkaistaessa tarvitaan fysikaalista tietoa sen verran, että tiedetään aineen massan ja tilavuuden olevan suoraan verrannolliset, ja että verannollisuuskerroin on aineen tiheys.

Yleisesti kahden muuttujan lineaarista riippuvuutta kuvaa yhtälö

$$y = bx + a.$$

Tässä esimerkissä sama yhtälö voidaan kirjoitaa muotoon

$$m = \rho V + m_0,$$

missä m on massa, ρ tiheys, V tilavuus ja m_0 massa tilanteessa, jossa tilavuus on nolla, tässä kontekstissa siis c-kohdassa kysytty mittalasin massa.

Mittaus on toistettu kahdeksan kertaa eli $n = 8$. Merkitään massalle mitattuja datapisteitä $Y_1, \ldots, Y_8$ ja tilavuudelle $X_1, \ldots, X_8$. Nyt parametrit a ja b saadaan laskettua aiemmin määritellyillä yhtälöillä 3.6 ja 3.7.

Ratkaistaan ensin parametri b, jolle saadaan

$$\begin{aligned} b &= \frac{S_{XY}}{S_X^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\ &\approx 0,77. \end{aligned}$$

Parametri a saadaan nyt ratkaistua yhtälöstä

$$\begin{aligned} a &= \overline{Y} - b\overline{X} \\ &\approx 180. \end{aligned}$$

Nyt siis asetonin tiheydeksi saadaan

$$b = \rho \approx 0,77\, \frac{g}{cm^3}$$

ja mittalasin massaksi

$$a = m_0 \approx 180\, g.$$

3.5 Yleinen lineaarinen malli

Edellä kuvattiin tilanne, jossa selitettävä muuttuja Y riippui vain yhdestä selittävästä muuttujasta X. Selittettävä muuttuja voi kuitenkin riippua myös useasta selittävästä muuttujasta $X_{i1}, \dots, X_{ij}, \dots X_{ip}$, missä $p \in \mathbb{N}$ ja indeksi $j = 1, \dots, p$ viittaa mittauksen i selittäviin muuttujiin. Tällöin lineaarinen yhtälö saa muodon

$$Y_i = a + b_1 X_{i1} + \cdots + b_p X_{ip} + \epsilon_i, \tag{3.10}$$

missä a ja $b_1, \dots, b_p$ ovat yhtälön parametrit. Kuten aiemmin, tässäkin parametreille a ja $b_1, \dots, b_p$ halutaan esitimoida arvot, jolla jäännöstermin ϵ_i neliö saadaan mahdollisimman pieneksi jokaiselle mittaukselle.

Parametrien a ja $b_1, \dots, b_p$ estimointi yleisessä lineaarisessa tapauksessa tehdään samalla lailla kuin aiemmin yhden selittävän muuttujan tapauksessa. Aluksi korotetaan yhtälö 3.10 neliöön, jolloin saadaan

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a + b_1 X_{i1} + \cdots + b_p X_{ip})]^2. \tag{3.11}$$

Funktiolle Q etsitään nollakohta osittaisdervioimalla kaikkien parametrien a ja $b_1, \dots, b_p$ suhteen. Tätä varten kirjoitetaan yhtälölle 3.10 matriisiesitys. Matriisiesitykseksi saadaan

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{10} & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1,p} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n0} & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix},$$

missä $x_{10} = x_{20} = \cdots = x_{n0} = 1$. Sama voidaan kirjoittaa lineaariseen muotoon

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon.$$

Tässä parametri β sisältää nyt kaikki parametrit a ja $b_1, \ldots, b_p$.

Tässä pro gradu -tutkielmassa on tarkoitus keskittyä lineaariseen yksiyhtälöiseen eli yhden selittävän muuttujan malliin, joten nollakohtien hakemista ei tässä tutkielmassa esitetä. Ratkaisuksi saadaan kuitenkin jokaiselle parametrille β estimaatio

$$\beta^{est} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}, \tag{3.12}$$

missä $\mathbf{X}^T$ on matriisin $\mathbf{X}$ transpoosi ja $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ on matriisien $\mathbf{X}^T$ ja $\mathbf{X}$ tulon käänteismatriisi. [27, s. 35–37] [25, s. 341]

4 Tutkimusongelma ja tutkimuksen toteutus

Tässä pro gradu -tutkimuksessa aiheena on graafinen mallintaminen ja lineaarinen malli. Tämän luvun alaluvussa 4.1 kerrotaan tutkimuskysymykset, joihin tutkimuksella pyritään saamaan vastauksia. Lisäksi käydään läpi tutkimuksen toteutusta. Aluksi keskitytään tutkimuksen metodeihin alaluvussa 4.2. Seuraavaksi kuvataan aineiston hankintaa ja käsittelyä alaluvuissa 4.3 ja 4.4.

4.1 Tutkimuskysymykset

Tutkimuskysymyksistä muodostui kolme päätutkimuskysymystä, joita tarkennettiin alatutkimuskysymyksillä. Ensimmäinen tutkimuskysymyssarja liittyi kokemuksiin ja ajatuksiin graafisen mallintamisen haastavuudesta. Ensimmäinen päätutkimuskysymys kuuluu:

1. Millaisia haasteita graafiseen mallintamiseen liittyy?

Tätä tarkennetaan seuraavilla alatutkimuskysymyksillä:

1.1 Minkälaisiin haasteisiin lukiolaiset voisivat aineenopettajaopiskelijoiden mielestä törmätä graafisessa mallintamisessa?
1.2 Minkälaisia haasteita graafiseen mallintamiseen liittyy lukiolaisten näkökulmasta?

Toinen tutkimuskysymyssarja liittyi graafisen mallintamisen matemaattiseen perustaan. Tässä sarjassa päätutkimuskysymyksiksi saatiin:

2. Miten graafisen mallintamisen matemaattinen perusta hahmotetaan?

Tarkentavia alakysymyksiä muotoutui kolme:

2.1 Miten aineenopettajaopiskelijat hahmottavat graafisen mallintamisen matemaattisen perustan?
2.2 Miten lukiolaiset hahmottavat graafisen mallintamisen matemaattisen perustan?
2.3 Miten aineenopettajaopiskelijat huomioisivat graafisen mallintamisen matemaattisen perustan opetuksessaan?

Viimeinen kysymyssarja liittyy lukiolaisten käsityksiin omasta osaamisestaan vanhan ylioppilaskoetehtävän ratkaisussa. Päätutkimuskysymykseksi muotoutui nyt:

3. Miten lukiolaiset osasivat ratkaista graafisen mallintamisen tehtävän?

Tälle muotoiltiin alakysymykset:

3.1 Minkälaisena lukiolaiset kokivat yksinkertaisen graafisen mallintamisen tehtävän?
3.2 Kohtasivatko ylioppilaskoetehtävästä saadut pisteet ja kokemukset tehtävän haastavuudesta yksittäisillä lukiolaisilla?

4.2 Tutkimusmetodi

Tämä pro gradu -tutkielma on kvalitatiivinen tapaustutkimus, joka pyrkii kuvailemaan tutkimuskysymysten mukaisia teemoja. Kvalitatiivisessa eli laadullisessa tutkimuksessa keskiössä on elämismaailman tutkiminen. Kvalitatiivinen tutkimus koostuu aiemmin tutkitusta ja niistä muodostetuista teorioista, empiirisestä aineistosta ja tutkijan omasta päättelystä. Aineistoa kerätään esimerkiksi haastattelemalla, havainnoimalla tai erilaisten tutkittavan tuottaman materiaalin analyysilla. Kvalitatiivinen tutkimus on myös usein hypoteesitonta, joka tarkoittaa vahvojen ennakko-oletusten puuttumista. [28]

Kvalitatiivinen tutkimus on prosessi, jossa tutkimuksen teon eri vaiheet elävät ja lopulta mukautuvat toisiinsa kokonaisuudeksi [29]. Tässäkin tutkielmassa prosessi näkyi esimerkiksi aineiston käsittelytavan valinnassa, joka lyötiin lukkoon vasta aineistonkeruun jälkeen. Kvalitatiivista tutkimusta tekevän on hyväksyttävä tämä prosessiluonteisuus ja ymmärrettävä myös oman ajattelunsa kehittyminen prosessin aikana. Kvalitatiivinen tutkimus voidaankin nähdä eräänlaisena oppimistapahtumana. Prosessin aikana ilmenee usein uusia näkökulmia ja kiinnostavia tutkimuksen kohteita. Aloittelevalle tutkijalle voikin olla haastavaa rajata tutkimuksensa lopulliset kysymykset. [29] Toisaalta kvalitatiivisessa tutkimuksessa on muistettava tutkijan asema, joka on itse asiassa aika merkittävä. Tutkija saa ja hänen täytyy prosessin aikana tehdä monenlaisia valintoja. [28]

4.3 Aineiston hankinta

Tähän pro gradu -tutkielmaan on hankittu kaksi aineistoa, toinen Tampereen yliopiston matemaattisten aineiden aineenopettajaopiskelijoilta ja toinen Tampereen yliopiston normaalikoulun lukion opiskelijoilta. Näihin kahteen tutkimusryhmään viitataan tässä tutkielmassa aineenopettajaopiskelijoina ja lukiolaisina. Aineistot kerättiin kyselylomakkeilla, jotka sisälsivät tehtävän lisäksi avoimia ja monivalintakysymyksiä tehtävään liittyen. Tutkimuslomakkeet ovat kokonaisuudessaan liitteinä (liitteet 1 ja 2). Kyselylomakkeet ovat yksi suosituimmista tavoista kerätä aineistoa. Niiden tekemisessä on kiinnitettävä huomiota yksiselitteisyyteen kysymysten asettelussa ja mietittävä tarkkaan, testaavatko kysymykset varmasti sitä, mitä halutaan. Myös kysymysten johdattelevuuteen on syytä kiinnittää huomiota. [30] Tämän pro gradu tutkielman osalta johdattelevuutta mietittiin erityisesti tutkittaessa lukiolaisten graafisessa mallintamisessa kohtaamia haasteita ja muotoillessa siihen liittyviä kysymyksiä. Esimerkiksi matemaattiseen osaamisten liittyvien haasteiden kysely olisi johdatellut ajatukseen, että nimenomaan matemaattiset taidot ovat syynä mahdolliseen osaamattomuuteen fysiikassa. Lopulta kysymyksessa päädyttiin puhumaan yleisesti virheistä ja ongelmista.

Myös kyselylomakkeen rakentamiseen eli kysymysjärjestykseen on syytä kiinnittää huomiota. Usein on tapana sijoittaa alkuun niin sanottuja taustakysymyksiä, jotka toimivat lämmittelynä tai johdatteluna varsinaiseen kyselyyn. [30] Aineenopettajaopiskelijoilta kysyttiin taustatietoina pääainetta ja opetettavia aineita. Lisäksi vanhan ylioppilaskoetehtävän ratkaiseminen toimi johdatteluna aiheeseen. Lukiolaisilta kysyttiin taustatietona käytyjen kurssien lukumäärä. Myös lomakkeen pituuteen on syytä kiinnittää huomiota: liian pitkään kyselyyn ei välttämättä jakseta keskittyä ja tällöin luotettavuus huononee. Kysymyksiin voidaan jopa jättää vastaamatta. Nykyään Internetissä toteutettavien testien etu on, että niissä voidaan merkitä kysymykset pakollisiksi, jolloi vastaaja ei pääse kyselyn loppuun vastaamatta kaikkiin kysymyksiin. [30] Aineenopettajaopiskelijoiden kyselylomake sisälsi taustietojen ja johdattelevan tehtävän ratkaisun lisäksi vain neljä kysymystä, jotka tosin olivat avoimia ja melko laajoja. Kyselylomake kuitenkin toimi heille myös käynnissä olleen ainedidaktiikan kurssin pakollisena etätehtävänä, jolloin kysymyksiä ei voinut jättää välistä, vaikka vastausten luovuttaminen tutkimuksen käyttöön oli tietenkin vapaaehtoista. Lukiolaisten kysely taas oli lyhyt ja kysymykset yksinkertaisia, vanhaa ylioppilaskoetehtävää lukuunottamatta. Lisäksi tehtävät oli lomakkeessa merkitty pakollisiksi, joten kaikkiin oli vastattava.

Kahdelle edellä kuvatulle otosjoukolle teetetyt kyselyt perustuivat samaan ylioppilaskokeen tehtävään ja kysymykset käsittelivät samoja aiheita, mutta kyselyt olivat silti erilliset. Seuraavissa kappaleissa kuvaillaan kyselylomaketta siltä osin, kun siihen liittyi yhtäläisyyksiä otosjoukkojen välillä. Otosjoukkokohtaisia yksityiskohtia aineistonkeräämisessä kuvaillaan myöhemmin alaluvuissa 4.3.1 ja 4.3.2.

Kyselylomakkeen tehtävä oli vuoden 2013 kevään fysiikan ylioppilaskoetehtävä, jossa mittausdatan perusteella määritetään graafisesti asetonin tiheys sekä mittauksessa käytetyn mitta-astian massa. Vaikka vuonna 2013 ylioppilaskokeet on tietenkin tehty vielä paperisena, tässä kyselyssä vastaukset tuotettiin sähköisesti, jotakin soveltuvaa ohjelmaa käyttäen. Tehtävänannossa ohjelmat rajattiin sellaisiin, jotka ovat käytössä sähköisissä ylioppilaskirjoituksissakin. Tehtävän ratkaisuksi vaadittiin määritettyjen lukuarvojen lisäksi kuvakaappausta tuotetusta graafisesta mallista, jonka pohjalta lukuarvot on saatu. Lisäksi pyydettiin perustelemaan vastaukset. Tuotetun graafisen mallin sovitteen yhtälönä, ja siitä saatuina lukuarvoina tiheydelle ja mitta-astian massalle sai käyttää suoraan ohjelman laskemia yhtälöä ja lukuarvoja. Kuvaajan arvoja ei täten tarvinnut itse arvioida.

Tehtävän valitsemisessa otettiin huomioon, että kaikki vastaajat aineenopettajaopiskelijoiden tutkimusjoukosta eivät olleet fysiikan opiskelijoita. Lisäksi huomioitiin tietysti tutkimustavoite, tarkoitus kun ei ollut testata vastaajien osaamista fysiikassa sinänsä, vaan perehtyä käsityksiin graafisen mallintamisen matemaattisesta taustasta sekä kokemuksista siihen liittyvistä mahdollisista kompastuskivistä. Tehtävää valittaessa pyrittiin löytämään mahdollisimman selkeän tehtävänannon omaava tehtävä, joka toimii kyselyssä pidemminkin johdatteluna graafiseen mallintamiseen, ja täten auttaa vastaamaan varsinaisiin kysymyksiin. Vaikka käytetty tehtävä kuitenkin oli nimenomaan fysiikan ylioppilaskoetehtävä, oli siinä vaadittu fysiikan osaaminen itse asiassa hyvin pientä. Tehtävässä täytyi tietää tiheyden määritelmä, muuten pärjäsi soveltaen matemaattista osaamista erityisesti suoran yhtälöstä sekä lineaarisesta riippuvuudesta. Lisäksi vastaaminen molemmilla tutkimusryhmillä tapahtui niin, että määritelmän tarkastaminen muista lähteistä oli mahdollista kyselyyn vastaamisen yhteydessä.

Tehtävään liittyvillä kysymyksillä pyrittiin selvittämään tutkimusryhmän käsityksiä tehtävän ratkaisemiseen tarvittavista tiedoista ja taidoista. Tarkoituksena on kartoittaa, kuinka hyvin vastaajat tunnistavat matemaattiset tiedot, taidot ja käsitteet, joita fysiikassa käytetään työkaluna. Mielenkiintoista on esimerkiksi se, osaako tehtävän hyvin ratkaissut lukiolainen kertoa, millaista matemaattista osaamista ratkaiseminen vaatii. On mahdollista, että tehtävä osataan ratkaista hyvin, mutta se tehdään muistamalla menetelmä oppitunneilta. Toisaalta on mielenkiintoista nähdä, millaisia asioita aineenopettajaopiskelijat korostaisivat opettaessaan asiaa siitä näkökulmasta, että opetuksen pitäisi tukea lukiolaista graafiseen mallintamiseen liittyvissä tehtävissä.

4.3.1 Aineenopettajaopiskelijat

Aineenopettajaopiskelijat ovat matemaattisten aineiden, eli matematiikan, fysiikan, kemian tai tietotekniikan pääaineopiskelijoita, jotka suorittivat parhaillaan aineenopettajan pedagogisia opintoja suuntautuen matemaattisten aineiden opettajiksi. Aineisto kerättiin osana Ainedidaktiikan syventävät ja laajentavat näkökulmat -kurssia, yhtenä kurssin etäkotitehtävänä. Vaikka tehtävän teko kuului kurssin suorittamiseen, tutkimukseen osallistuminen oli tietenkin vapaaehtoista. Lupaa vastauksen käyttöön tutkimustarkoituksessa kysyttiin kyselylomakkeessa. Kyselylomake ladattiin kurssin Moodle-alueelle, jossa se oli opiskelijoiden saatavilla. Myös vastaukset kerättiin Moodleen. Käytetty Moodle-alue oli salasanalla suojattu muilta kuin kurssille osallistuvilta. Täten aineenopettajaopiskelijat pystyivät näkemään toistensa vastaukset, mutta muilla niihin ei ollut pääsyä. Kyselylomakkeissa ei kysytty vastaajan nimeä, mutta nimi kuitenkin oli Moodlessa nähtävillä palautuksen yhteydessä sekä osa vastaajista oli lisännyt oman nimensä tiedoston nimeen. Ennen vastausten analysointia nimitiedot kuitenkin poistettiin ja vastaustiedostot tallennettiin erilliseen kansioon nimillä aineenopettajaopiskelija i, missä i on juokseva numerointi. Numerointi suoritettiin satunnaisessa järjestyksessä. Tällä pyrittiin vähentämään analysoijan mahdollisuutta tunnistaa vastaaja vastauksesta. Osa erikoisemmista pää- ja opetettavien aineiden kombinaatioista kuitenkin mahdollisti osan vastaajien tunnistamisen analysointivaiheessa. Tulosten raportoinnissa tämä mahdollisuus pyrittiin poistamaan esimerkiksi yhdistämällä vastausluokkia.

Aineenopettajaopiskelijoiden aineistonkeruussa toiminut etätehtävä sisälsi viisi varsinaista kysymystä. Tämän lisäksi esitietona kysyttiin pääainetta ja opetettavia aineita. Ensimmäinen kysymys oli edellä kuvattu vanha ylioppilaskoetehtävä. Tässä tutkimusryhmässä tarkoituksena ei ole arvioida ylioppilaskoetehtävän osaamista lainkaan, vaan kohdan tarkoitus oli johdatella aiheeseen ja palauttaa graafinen mallintaminen mieleen. Seuraavissa etätehtävän kysymyksissä pyydetään pohtimaan graafisen mallintamiseen liittyvää oppimista ja opettamista, joten sellaisten tehtävien ratkaisemisen pitäisi olla hyvässä muistissa. Oletuksena onkin, että muiden etätehtävän kohtien vastaukset ovat monipuolisempia, kun vastaaja on ratkaissut ensimmäisen kohdan lämmittelyksi.

Aineenopettajaopiskelijoilta kysyttiin ylioppilaskoetehtävän matemaattista perustaa (kysymys 1) sekä matemaattisia käsitteitä ja taitoja, joita tehtävän ratkaisu vaatii (kysymys 2). Lisäksi kysyttiin muita ylioppilaskoetehtävän ratkaisemisessa tarvittavia taitoja (kysymys 3). Kysymyksessä neljä pyydettiin arvioimaan mahdollisia ongelmia, virheitä tai vääriä käsityksiä, joita ylioppilaskoetehtävää ratkaisevalla lukiolaisilla voisi olla. Näitä pyydettiin peilaamaan myös kohdassa 2 vastaajan mainitsemiin matemaattisiin taitoihin ja käsitteisiin. Viimeisessä kysymyksessä (kysymys 5) vastaajaa pyydettiin pohtimaan, kuinka opetuksellaan pystyisi auttamaan lukiolaista kohdassa 4 mainitsemiensa ongelmien yli.

4.3.2 Lukiolaiset

Lukiolaistutkimusryhmä on Tampereen yliopiston normaalikoulusta. Ryhmäksi valittiin fysiikan toisen kurssin (FY2 Lämpö) opiskelijoiden ryhmä. Tutkimuslupa saatiin normaalikoulun johtavalta rehtorilta ja tietenkin kurssia opettaneelta opettajalta. Opiskelijat saivat kuulla kyselystä tunnilla ja tutkimukseen liittyvät tärkeimmät tiedot oli koottu kyselylomakkeen alkuun. Lisäksi heille annettiin yhteystiedot mahdollisia lisäkysymyksiä varten. Opiskelijat vastasivat kyselyyn kokeeseen kertaavalla tunnilla kotoa, sillä kyselyn teettämishetkellä Suomen kouluissa oli siirrytty etäopetukseen COVID-19-pandemian vuoksi. Kysely toteutettiin Microsoft Officen Forms-kyselynä, johon lukiolaiset saivat linkin opettajaltaan. Käytännön toteutuksen takia kyselyä tehdessä lukiolaisen täytyi olla kirjautuneen O365-tiliinsä, mutta kirjautumistiedot tietenkin poistettiin ennen vastausten käsittelyä. Vastaustiedostot nimettiin muotoon lukiolainen i, missä i on juokseva numerointi. Numerointi suoritettiin satunnaisesti. Opiskelijat eivät voineet tarkastella toistensa vastauksia. Myöskään kurssin opettaja ei nähnyt opiskelijoiden vastauksia.

Esitietoina lukiolaisilta kysyttiin vain käytyjen fysiikan kurssien määrää lukiossa. Varsinainen kysely rakentui, kuten edellä kuvattu, vanhan fysiikan ylioppilaskoetehtävän ympärille. Vastaajaa pyydettiin ratkaisemaan tehtävä ja palauttamaan vastaustiedosto, jossa on sanallisten vastausten lisäksi kuvakaappaus tuotetusta graafista. Tämän jälkeen opiskelijoilta kysyttiin monivalintakysymyksellä ylioppilaskoetehtävän haastavuudesta asteikolla helppo – sopiva – haastava. Vastaajan oli myös mahdollista vastata ”en osaa sanoa” tai lisätä oma vastauksensa. Avoimissa kysymyksissä kysyttiin helppoa/helpointa sekä haastavaa/haastavinta kohtaa tehtävässä. Vastaajaa kehotettiin etsimään molempiin kategorioihin jokin asia, vaikka tehtävä olisikin tuntunut pelkästään helpolta tai haastavalta. Lopuksi lukiolaisilta kysyttiin vielä, mistä matemaattisista tiedoista ja taidoista he luulevat olevan apua tehtävän ratkaisemisessa.

4.4 Aineiston käsittely

Tässä alaluvussa kuvaillaan kerätyn aineiston käsittelytapaa. Koska tutkimus on luonteeltaan laadullinen, myös aineistoa on käsitelty laadullisesti. Tutkimuskyselyt sekä aineenopettajaopiskelijoille että lukiolaisille sisälsivät vanhan ylioppilaskoetehtävän lisäksi avoimia kysymyksiä. Näistä kysymyksistä on aineistoa käsiteltäessä pyritty löytämään vastauksesta toiseen esiintyviä yhtenäisiä käsitteitä tai teemoja. Aineiston käsittelytapaa kummankin tutkimusryhmän kohdalla käsitellään tarkemmin seuraavissa kappaleissa 4.4.1 ja 4.4.2.

4.4.1 Aineenopettajaopiskelijat

Aineenopettajaopiskelijoilta kerätty aineisto koostuu esitietojen lisäksi avointen kysymysten vastauksista. Avointen kysymysten vastauksia käsiteltiin kysymys kerrallaan. Vastaukset pilkottiin muutaman sanan käsitteisiin ja teemoihin, jotka koottiin taulukkoon. Jokainen käsite tai teema kirjattiin vain kerran ja sen jälkeen kyseisen teeman tai käsitteen esiintyminen muissa vastauksissa kirjattiin tukkimiehenkirjanpidolla. Näin tutkittiin eri käsitteiden ja teemojen esiintyvyyttä ja toistumista vastauksissa. Tämän lisäksi tuloksista nostettiin joitakin edustavia lainauksia vastauksista.

Poikkeuksen käsittelytapaan teki viides ja viimeinen kysymys, josta ei kerätty käsitteiden tai teemojen esiintyvyydelle lukumääriä. Vastaukset olivat sen verran pidempiä ja monimutkaisempia, että niiden pilkkominen muutaman sanan käsitteisiin tai teemoihin olisi yksinkertaistanut vastaajan ajatuksia liiaksi. Joitakin usein esiintyviä ajatuksia on toki koottu yhteen. Vastauksia esitellään nostamalla edustavia ajatuksia luvussa 5.

Kuten edellä on kerrottu, aineenopettajaopiskelijoiden ratkaisuja ylioppilaskoetehtävään ei arvioitu tai pisteytetty. Niistä ei muutoinkaan tutkittu mitään erityistä. Ne kuitenkin katsottiin läpi mahdollisten karkeiden virheiden tai virheellisten käsitteiden varalta. Tämä oli tarpeellista, sillä aineenopettajaopiskelijoille kysely toimi etätehtävänä muodostaen kokonaisuuden. Lisäksi viimeisessä kyselyn osiossa pyydettiin palaamaan omaan ratkaisuun. Täten muissa kyselyn osioissa saattaisi olla viitteitä ylioppilaskoetehtävän ratkaisuun tai käytössä samoja virheellisiä käsitteitä, kuin tehtävän ratkaisussa. Tällöin avointen kysymysten vastauksiakin voisi ymmärtää paremmin.

On myös mahdollista, että vastaaja on systemaattisesti käyttänyt epäkorrektia käsitettä tai ilmaissut asian väärin, mutta tarkoittanut oikeaa asiaa. Tässä tutkielmassa tarkoitus ei ole mitata kenenkään matematiikan tai fysiikan osaamista, joten aineistoa käsiteltäessä on pyritty ymmärtämään sitä, mitä vastaaja on tarkoittanut. Tietenkään tätä ei ole tehty mielivaltaisesti, vaan ainoastaan tilanteissa, joissa tulkinnanvaraa ei ole. Esimerkkinä tällaisesta voisi olla erään aineenopettajaopiskelijan vastaus osiossa 3. Siellä pyydettiin arvioimaan mahdollisia ongelmia tai virheitä, joita tehtävää ratkaisevalla lukiolaisella voisi olla. Aineenopettajaopiskelija oli vastannut: ”Opiskelija saattaa luoda tilavuus-massakoordinaatiston ja suoraan kulmakertoimen lukemalla saada liian suuren tiheyden. Vakiotermi, eli massa päätyisi tällöin negatiiviseksi.” Ylioppilaskoetehtävässä tiheyden määrittämiseksi on tarkoituskin luoda tilavuus-massa-koordinaatisto. Sen sijaan luomalla massa-tilavuus-koordinaatiston päädytään vastaajankin kuvailemaan tilanteeseen ja tiheyden määrittäminen monimutkaistuu. Täten aineistoa käsiteltäessä voitiin perustellusti olettaa aineenopettajaopiskelijan tarkoittaneen massa-tilavuus-koordinaatisto, eli tilannetta, jossa akselit on valittu väärin päin.

Aineenopettajaopiskelijoilta saatiin 21 vastausta tämän tutkimuksen kyselyyn. Vastanneilta kysyttiin pääaineita sekä muita opetettavia aineita. Vastauksissa oli mainittu matematiikka, fysiikka, kemia, tietotekniikka/ATK sekä ohjelmistotuotanto. Taulukoissa ohjelmistotuotanto on sijoitettu sarakkeeseen Tietotekniikka/ATK. Yksi vastaajista ei ilmoittanut pääainettaan tai opetettavia aineita. Pääaineiden lukumäärät on koottu taulukkoon 4.1.

Taulukko 4.1: Aineenopettajaopiskelijoiden pääaineiden lukumäärät (N=21).

Pääaine	**Lukumäärä**
Matematiikka	10
Fysiikka	4
Kemia	5
Tietotekniikka/ATK	1
Ei tietoa	1

Opetettavat aineet, pääaineet mukaan lukien, on koottu taulukkoon 4.2. Taulukossa kuhunkin vastaajaan on viitattu nimellä aineenopettajaopiskelija i, missä i on juokseva numerointi.

Numerointi on suoritettu satunnaisessa järjestyksessä, eikä esimerkiksi tehtävän palautusjärjestyksessä.

Taulukko 4.2: Aineenopettajaopiskelijoiden opetettavat aineet.

Opetettavat ainee	**Oppiaine 1**	**Oppiaine 2**	**Oppiaine 3**	**Oppiaine 4**
	Matematiikka	**Fysiikka**	**Kemia**	**Tietotekniikka/ATK**
Aineenopettajaopiskelija 1	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 2	1		1	
Aineenopettajaopiskelija 3	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 4	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 5	1			
Aineenopettajaopiskelija 6	1			
Aineenopettajaopiskelija 7	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 8		1	1	1
Aineenopettajaopiskelija 9	1	1		
Aineenopettajaopiskelija 10	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 11	1	1		
Aineenopettajaopiskelija 12	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 13	1		1	
Aineenopettajaopiskelija 14	1			1
Aineenopettajaopiskelija 15	1	1	1	
Aineenopettajaopiskelija 16	1			1
Aineenopettajaopiskelija 17	1		1	
Aineenopettajaopiskelija 18	1			1
Aineenopettajaopiskelija 19	1			
Aineenopettajaopiskelija 20	1	1		
Aineenopettajaopiskelija 21	-	-	-	-
Yhteensä	19	11	12	4

Taulukosta voisi nostaa huomiona aineenopettajaopiskelija 8:n, jolla matematiikka ei kuulu ollenkaan opetettaviin aineisiin. Lisäksi vastaajista vain noin puolet (11) on ilmoittanut opetettavaksi aineekseen fysiikan. Kymmenellä vastaajalla on opetettavina aineina sekä matematiikka että fysiikka. Kuten luvussa 4.3 kerrottiin, vanha ylioppilaskoetehtävä oli valittu niin, että vaikka se olikin fysiikan ylioppilaskokeesta, sen voi ratkaista ilman suurtakaan fysikaalista tietämystä.

4.4.2 Lukiolaiset

Lukiolaisilta saatu aineisto sisältää seitsemän Tampereen yliopiston normaalikoulun lukion opiskelijan vastauksen. Vanhaan ylioppilaskoetehtävään ja siihen liittyviin kysymyksiin vastaaminen tapahtui FY2-kurssilla kokeeseen valmistavalla tunnilla. Tunti pidettiin yhteiskunnallisen tilanteen takia etäopetuksena.

Vastaajista viisi ilmoitti käyneensä lukiossa kaksi kurssia fysiikkaa. Yksi kertoi käyneensä kolme ja yksi kahdeksan. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan liitetä vastaajia tietoon käytyjen kurssien määrästä. Tähän päädyttiin, sillä kolme ja kahdeksan kurssia suorittaneiden vastaajien vastaukset voisi olla mahdollista tunnistaa ainakin ryhmän, mutta myös mahdollisesti esimerkiksi muiden Tampereen yliopiston normaalikoulun lukion opiskelijoiden ja opettajien toimesta.

Lukiolaisilta kerätyn aineiston käsittely poikkeaa aineenopettajaopiskelijoilta saadun aineiston käsittelystä siten, että lukiolaisten ratkaisut ylioppilaskoetehtävään tarkistettiin ja pisteytettiin. Pisteytysohje koottiin etukäteen. Siinä huomioitiin ylioppilastutkintolautakunnan laatimat hyvän vastauksen piirteet [31], mutta täysin sellaisenaan ne eivät soveltuneet käytettäväksi. Tämä johtuu siitä, että ne on laadittu käsin tehtävälle ratkaisulle, nyt ratkaistaessa käytettiin sähköisiä menetelmiä. Pisteytysohjetta laatiessa käytiin läpi jo pidettyjen sähköisten ylioppilaskokeiden graafisen mallintamisen tehtäviä ja näiden tehtävien hyvän ratkaisun piirteitä linjojen hakemiseksi erityisesti pistevähennyksistä. Nämä kuitenkin skaalattiin tehtävän maksimipistemäärän, joka oli kuusi. Sähköisissä ylioppilastehtävissä maksimipistemäärä tehtävissä on enemmän, 15 tai 20 pistettä. Tarkoitus ei ole verrata pisteitä mihinkään ylioppilaskokeessa saatuihin pistekeskiarvoihin, vertailu tapahtuu ainoastaan vastaajien kesken sekä vastaajan muihin vastauksiin.

Ylioppilastutkintolautakunnan hyvän vastausten piirteitä viime vuosilta tarkasteltaessa voidaan huomata heidän vaativan graafisiin ratkaisuihin oikein perusteltujen vastausten lisäksi myös graafin esittämiseen liittyviä muodollisia seikkoja. Näitä ovat esimerkiksi akseleiden nimeäminen ja skaalaus. Näistäkin puutteista päädyttiin lopulta ottamaan pistemenetyksiä, vaikka tässä tutkimuksessa keskitytäänkin oleellisesti matemaattiseen perustaan. Tutkimuskyselyssä kuitenkin kysytään myös muista ylioppilaskoetehtävän ja siten ylipäätään graafisen mallintamisen ratkaisemiseen tarvittavista taidoista, joista sähköisen ohjelman käyttäminen on tietenkin yksi.

Muut pistemenetykseen johtavat virheet liittyvät kuvaajan tuottamiseen, tuloksen pyöristämiseen ja perustelemattomuuteen. Kuvaajaa konstruoitaessa on koordinaatistoon sijoitettava kaikki mittapisteet oikein, eikä tietenkään ylimääräisiä. Tässä tehtävässä kaikkia mittapisteitä tulee myös käyttää sovitteen tekemisessä, mutta toki jokin toinen mittausdata voisi sisältää karkeita virhepisteitä, jotka voisi perustellen jättää huomioimatta. Sovitteen on oltava lineaarinen. Tulokset on pyöristettävä kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen, mutta kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella annetusta tuloksesta ei vielä rankaista pistemenetyksin. Annetut vastaukset on lisäksi perusteltava, mikä tarkoittaa tässä tehtävässä sovitetun suoran yhtälöön viittaamista vastauksessa. Lukiolaisten ratkaisujen pisteytyksessä käytetyt pisteytysohjeet ovat liitteenä 4.

Lukiolaisilta kysyttiin monivalintakysymyksenä, miltä vanha ylioppilaskoetehtävä heistä tuntui. Tähän kysymykseen saadut vastaukset käsiteltiin kahdella tavalla. Ensinnäkin katsottiin, mikä osuus vastaajista piti ylioppilaskoetehtävää helppona, mikä vaikeana ja niin edelleen. Tämän analyysin osuus jää kuitenkin lähes merkityksettömäksi, sillä vastaajien otos oli pieni. Tästä puhutaan tarkemmin luvuissa 5 ja 7. Mielenkiintoisempi monivalintakysymykselle tehty analyysi on tuloksen vertaaminen vastaajan saamiin pistemääriin ylioppilaskoetehtävässä. Lukiolaisten vastaukset avoimiin kysymyksiin käsiteltiin kuten aineenopettajaopiskelijoiden vastaukset kysymyksiin 2-4. Vastaukset pilkottiin muutaman sanan käsitteisiin ja teemoihin tarkoituksena selvittää niiden ilmentyvyys vastauksissa.

5 Tutkimuksen tulokset

Tähän lukuun on koottu tässä pro gradu -tutkielmassa saadut tulokset. Aineenopettajaopiskelijoiden vastauksia käsitellään alaluvussa 5.1 ja lukiolaisten alaluvussa 5.2. Lopuksi näiden kahden tutkimusryhmän vastauksia vertaillaan alaluvussa 5.3.

5.1 Aineenopettajaopiskelijoiden vastaukset

Aineenopettajaopiskelijoiden kyselyssä ensimmäinen tehtävä oli vanhan ylioppilaskoetehtävän ratkaiseminen. Kuten aiemmin todettu, aineenopettajaopiskelijoiden ratkaisuja ei ole tarkoitus pisteyttää tai käsitellä sen tarkemmin. Kaikkien vastaajien vastauksissa tehtävä oli kuitenkin ratkaistu, ja tuloksena saadut lukuarvot olivat oikein.

Kysymyksiin 2 – 4 pyydettiin vastauksina käsitteitä, tietoja ja taitoja. Vastaukset pilkottiin käsitteisiin sekä muutaman sanan ilmauksiin tiedoista ja taidoista. Luvussa 4.4 käsitellään tarkemmin aineiston käsittelyä. Saadut pilkotut vastaukset on jaettu käsitteellisiin ja teknisiin tietoihin ja taitoihin. Nämä on vielä edelleen jaettu matemaattisiin ja fysikaalisin tietoihin ja taitoihin. Joltain osin saadut neljää luokkaa menevät myös päällekkäin, esimerkiksi käsitteellinen osaaminen matematiikassa ja fysiikassa oli vaikea erottaa osasta vastauksista, tai tiedon ja taidon luokittelu käsitteelliseksi tai tekniseksi tuntui liian mustavalkoiselta. Muutamassa tapauksessa onkin päädytty luokkaan, jossa aineita tai tietojen ja taitojen laatua ei ole eroteltu. Kutakin tällaista valintaa on perusteltu käsittelyn yhteydessä. Joidenkin kysymysten yhteydessä käytössä on viides luokka, joka pitää sisällään muita taitoja. Nämä taidot liittyvät kyllä oleelliset matemaattisen ja fysikaalisen osaamiseen ainakin osaamisen näyttämisen kautta, mutta eivät suoraan lukeudu kumpaankaan. Esimerkkinä tällaisista on sähköisten ohjelmien käyttäminen. Niiden osaaminen on toki sekä matematiikassa että fysiikassa tärkeä, mutta kyseessä ei ole suoraan matemaattinen tai fysikaalinen tieto tai taito.

5.1.1 Matemaattinen perusta

Toinen aineenopettajaopiskelijoiden kysymys käsitteli tehtävän matemaattista taustaa. Kysymys kuului tarkalleen: *”Pohdi tekemäsi ylioppilaskoetehtävän matemaattista perustaa. Mitä matemaattisia käsitteitä ja taitoja opiskelijan tulisi hallita, jotta hän kykenee tehtävän ratkaisemaan?”* Vastauksista löytyi sekä käsiteellisiä että teknisiä taitoja. Lisäksi löytyi yksi sekä käsitteellinen että tekninen taito. Luokat vastaajamäärineen on koottu taulukkoon 5.1.

Kaikkien aineenopettajaopiskelijoiden vastauksista löytyi maininta kuvaajan eli suoran yhtälöstä, kulmakertoimesta tai vakiotermistä. Kuvaajan tai suoran yhtälön yhteydessä käytettiin

Taulukko 5.1: Aineenopettajaopiskelijoiden käsitykset graafisen mallintamisen tehtävän matemaattisesta perustasta (N=21).

Käsitteelliset matemaattiset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Kuvaaja tai suoran yhtälö	18
Kulmakerroin	17
Vakiotermi	14
Lineaarinen malli, riippuvuus	9
Suhde	1
Tekniset matemaattiset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Merkitsevät numerot ja pyöristäminen	4
Kuvaajan piirtäminen	4
Koordinaatisto ja sen käyttäminen	3
Ekstrapolointi	3
Ohjelman valinta ja käyttäminen	2
Yksiköt	1
Sekä tekninen että käsitteellinen matemaattinen tieto tai taito	**Vastaajien lukumäärä**
Sovite	9

muun muassa verbejä hallita ja tulkita. Vakiotermiin viitattiin myös pystyakselin tai y-akselin leikkauspisteenä. Vain kolme aineenopettajaopiskelijaa ei ollut maininnut kuvaajan tai suoran yhtälöä, mutta heiltäkin löytyi maininta kulmakertoimesta ja kahdella kolmesta myös vakiotermistä. Vastaaja, joka oli kolmesta edellä mainitusta käsitteestä maininnut vain kulmakertoimen (aineenopettajaopiskelija 16), oli kuitenkin maininnut suoran sovitteen. Kolme tässä käsiteltyä käsitettä olivat selvästi yleisimmät vastauksissa.

Ylioppilaskoetehtävässä käytetään hyväksi massan ja tiheyden lineaarista riippuvuutta, joka tuottaa kuvaajaksi suoran. Lineaarisesta mallista, riippuvuudesta, lineaarisesta riippuvuudesta tai kahden muuttujan lineaarisesta riippuvuudesta löytyi maininta yhdeksän aineenopettajaopiskelijan vastauksesta. Näistä yksi (aineenopettajaopiskelija 14) oli maininnut myös käsitteen suhde.

Ylioppilaskoetehtävässä kuvaaja saadaan sovittamalla mittapisteisiin suora. Sovite tai suoran/käyrän sovittaminen mainittiin kahdeksassa vastauksessa. Näistä yhdessä (aineenopettajaopiskelija 21) oli maininta, ettei sovitteen teon matemaattista taustaa eli regressiota tarvitse osata. Sen sijaan aineenopettajaopiskelija 5 mainitsi, että *"Kuvaajan piirtämisessä opiskelijan on ymmärrettävä myös kahden muuttujan välisen regressioanalyysin merkitys tehtävään."* Sovitteen tekemisen voisi nähdä teknisenä taitona. Toisaalta jos käsitteellistä ymmärtämistä sovitteesta ei ole, ei sen tarkoituksenmukaisuuttakaan ymmärrä. Täten sen sijoittaminen kumpaankaan, teknisen tai käsiteellisen matemaattisen tiedon tai taidon, luokkaan on haastavaa. Tällä kertaa kaikista vastauksista ei ollut pääteltävissä, kumpaa taitoa vastaaja tarkoitti. Täten sovite luokiteltiin sekä käsitteelliseksi että tekniseksi tiedoksi tai taidoksi.

Ylioppilaskoetehtävässä kysytään lukuarvoja tiheydelle ja mitta-astian massalle. Lopputuloksen pyöristämisen ja pyöristämiseen liittyvän merkitsevien numeroiden osaamisen oli vastauksessaan maininnut viisi vastaajaa. Merkitsevät numerot luokiteltiin tekniseksi tiedoksi tai taidoksi, vaikka sen voisi nähdä olevan myös käsitteellinen. Merkitsevien numeroiden määrittämiseen on olemassa teknisiä sääntöjä, mutta toisaalta erityisesti tutkimuksessa ja mittauksissa mittausolosuhteet määrittävät mittaustarkkuutta ja siksi sääntöjä on osattava myös soveltaa kontekstiin sopiviksi. Fysiikan ymmärrystä mittaavassa tehtävässä merkitsevät numerot siis tosiaan voisivat olla myös käsitteellinen tieto tai taito. Tässä kysymyksessä kysyttiin kuitenkin matemaattisia taitoja, ja matemaattisena tietona tai taitona merkitsevät numerot on tässä tutkimuksessa luokiteltu tekniseksi.

Mitta-astian massaa varten tarvitaan pystyakselin leikkauspiste, joka saadaan näkyviin ekstrapoloimalla sovitettua suoraa. Ekstrapoloinnin oli maininnut kolme vastaajaa. Ekstrapolointikin on taito, jonka voisi fysikaalisessa kontekstissa nähdä hyvinkin käsitteellisenä. Kuitenkin samoilla perusteluilla, kuin edellä sovitteen tapauksessa, se on tässä luokiteltu tekniseksi.

Edellä mainittujen lisäksi teknisiin matemaattisiin tietoihin ja taitoihin luokiteltiin yksiköiden käyttäminen sekä kuvaajan tuottamiseen tarvittavan ohjelman valinta ja käyttötaidot. Lisäksi neljä vastaaja oli maininnut kuvaajan piirtämisen. Koordinaatiston tuntemisesta ja pisteiden sijoittamisesta koordinaatistoon oli mainittu kolmessa vastauksessa. Nämäkin tiedot ja taidot luokiteltiin tässä yhteydessä teknisiksi.

5.1.2 Muut tehtävän kannalta tärkeät taidot

Muihin kuin matemaattisiin tehtävän ratkaisemisessa tarvittuihin tietoihin ja taitoihin pureudutaan kyselylomakkeen kolmannessa tehtävässä, jonka tehtävänanto kuului: *”Mitä muita taitoja tehtävän ratkaiseminen vaatii?”* Tämän kysymyksen vastaukset luokiteltiin kolmeen luokkaan, käsitteelliset ja tekniset fysikaaliset sekä muut tiedot ja taidot. Luokittelu ja vastaajien lukumäärä on koottu taulukkoon 5.2.

Tähän kysymykseen oli löydettävissä kaksi selkeästi suosituinta vastausta, joista toinen liittyi tehtävän ratkaisussa käytetyn ohjelma valintaan ja käyttöön. Ohjelman valinnasta tai käytöstä mainittiin kuudessatoista vastauksessa. Tämän lisäksi kaksi vastaajaa mainitsi ohjelman käytön jo vastauksessaan toiseen kysymykseen, jossa tarkalleen ottaen kysyttiin matemaattisia taitoja. Ohjelman käyttöön liittyvät vastaukset luokiteltiin muihin taitoihin.

Aineenopettajaopiskelijat saivat valita ylioppilaskoetehtävän ratkaisemiseen ohjelman yli-

Taulukko 5.2: Aineenopettajaopiskelijoiden käsitykset graafisen mallintamisen tehtävään vaadittavista muista kuin matemaattisista tiedoista ja taidoista (N=21).

Käsitteelliset fysikaaliset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Tiheyden yhtälö	16
Yksiköiden käyttäminen	3
Alkuperäisen ongelman ymmärtäminen	2
Fysikaalisen suureen ymmärtäminen	2
Kokeellisen menetelmän hahmottaminen	1
Kuvaajan tulkitseminen	1
Akseleiden valitseminen	1
Sovitteen valitseminen	1
Pyöristäminen	1
Tekniset fysikaaliset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Sovitteen/kuvaajan tekeminen	4
Mittausdatan sijittaminen koordinaatistoon	1
Mittausdatan käsitteleminen	1
Muut tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Ohjelman/työkalujen käyttäminen	16

oppilaskoetehtävissä sallittujen ohjelmien listalta. Muutamat olivat kommentoineet valintansa toimivuutta tai erityispiirteitä. Kuvakaappauksen ottaminen ja liittäminen vastaukseen oli mainittu muutamassa vastauksessa. Lisäksi joitakin ohjelman työkaluja ja toimintoja oli mainittu erikseen muutamassa vastauksesta. Alle on koottu muutamia pätkiä vastauksista, joissa edellä mainittuja käsitteitä ja teemoja on käsitelty.

Aineenopettajaopiskelija 16: *"Parhaan mahdollisen työkalun valinta (geogebra se ei ollut) ja sen hallinta."*

Aineenopettajaopiskelija 3: *"Esimerkiksi geogebrassa tulee osata käyttää niin taulukkolaskennan ominaisuuksia kuin algebraikkunaakin. Tietysti myös kuvankaappauksen liittäminen osaksi koevastausta on vaadittavaa."*

Aineenopettajaopiskelija 11: *"Tehtävän ratkaisemiseksi opiskelijan tulee hallita kokeessa sallittujen ohjelmien käyttäminen senverran hyvin, että vähintään kuvaajan piirtäminen ja kuvankaappauksen ottaminen onnistuu. Suositeltavaa olisi myös, että opiskelija osaisi myös laittaa kulmakertoimen näkyviin"*

Lisäksi vastauksista löytyi muutamiakin kuvaajan tuottamiseen liittyviä käsitteitä ja teemoja, jotka luokiteltiin teknisiksi fysikaalisiksi tiedoiksi ja taidoiksi. Nämä olivat vaiheita, jotka on käytävä läpi kuvaajan tuottamiseksi. Tämmöisiä teemoja olivat mittausdatan käsittely ja sijoittaminen koordinaatistoon sekä suoran sovittaminen ja piirtäminen. Näistä oli mainintoja kuudella vastaajalla, joista osan vastauksista löytyi useampi edellä mainittu. Esimerkiksi aineenopettaja 21 kuvasi tehtävän ratkaisemiseen tarvittavia muita taitoja: *"Käytännössä vaatii sen, että osaa joko fysiikan tai kemian tuntien perusteella käsitellä käytännön töistä saatua dataa."*

Edellä mainitut kuvaajan tuottamisen välivaiheisiin liittyvät tekniset fysikaaliset käsitteet ja teemat ovat sellaisia, että ne voisivat olla myös matemaattisia. Ennen kyseiset välivaiheet on tehty käsin, mutta ylioppilaskokeen sähköistyttyä ne saadaan tehtyä käytettävien ohjelmien eri työkaluilla. Täten matemaattinen osaamista ei testata enää esimerkiksi pisteiden sijoittamisessa koordinaatistoon. Vastauksia analysoitaessa on oletettu, että kolmannen tehtävän vastuksissa näillä käsitteillä ja teemoilla on viitattu nimenomaan ohjelman työkalujen käyttöön liittyviin tietoihin ja taitoihin, ei matemaattisiin tietoihin ja taitoihin. Tämä on perusteltua, sillä vastaajat olivat maininneet nämä nimenomaan muita kuin matemaattisia tietoja ja taitoja kysyttäessä.

Aineenopettajaopiskelija 2 oli maininnut suoran sovittamisesta: *"suoran sovitus tai ylipäänsä millainen sovite valitaan milloinkin"*. Tässä vastauksessa sovitteen tekeminen voidaan nähdä myös käsitteellisenä fysikaalisena teemana, sillä vastaukseen liittyi ajatus sovitteen tyypin valinnasta. Vaikka lineaarinen suoran sovitus lienee tavallisin ainakin lukiomaailmassa, muunlaisia sovitteitakin on, ja graafisen mallintamisen tehtävässä sovitteen sopivuutta pitäisi tosiaan arvioida.

Muitakin käsitteellisiä fysikaalisia tietoja ja taitoja oli aineenopettajaopiskelijoiden vastauksissa mainittu runsaasti. Aineenopettajaopiskelijoista peräti kuusitoista oli maininnut vastauksessaan joillakin sanoin tiheyden määritelmän. Näiden lisäksi kaksi vastaajaa oli maininnut tiheyden määritelmän jo tehtävän 2 vastauksessaan. Variaatioita olivat esimerkiksi "*tiheyden yhtälö*", "*tiheyden kaava*"ja "*tiheys=massa/tilavuus*". Tiheyden määritelmään liittyvät teemat olivat toinen selvästi suosituimmista vastauksista.

Kaksi aineenopettajaopiskelijaa (12 ja 14) olivat maininneet fysikaalisen suureen ymmärtämisen. Aineenopettajaopiskelija 12 oli perustellut vastaustaan ylioppilaskoetehtävän c-kohtaan viitaten seuraavasti: *"fysikaalisen suureen ymmärtäminen: ei voi olla massaa, jos ei ole ainetta."*

Lisäksi löytyi joitakin mainintoja kuvaajan tulkitsemisesta ja akseleiden valinnasta. Edellä mainitut liittyvät nimenomaan käsitteelliseen fysikaaliseen ymmärtämiseen, sillä matemaattisesti akselit voisi laittaa kumminpäin vain, ja toisaalta merkitykset kulmakertoimelle ja vakiotermille tulevat nimenomaan fysikaalisista suureista. Myös yksiköiden käyttäminen liittyy käsitteelliseen osaamiseen, sillä esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 2 oli maininnut yksiköiden avulla olevan pääteltävissä akseleiden valinta: *"Tiheyden kohdalla yksikkötarkastelu → tämän avulla voidaan päätellä kummalle akselille massa ja tilavuus sijoitetaan"* Yksi yksikön käyttämisen maininneista oli tosin lisännyt, että myös mahdolliset yksikönmuunnokset tulisi olla hallussa. Yksikönmuunnokset taas voisi nähdä teknisenä taitona.

Kokeellisuuteen liittyviä käsitteitä ja teemoja oli myös mainittu joissakin vastauksissa. Aineenopettaja 6 oli maininnut kokeellisen menetelmän hahmottamisen. Yksi vastaaja (aineenopettajaopiskelija 15) oli maininnut, että ylioppilaskoetehtävää tekevän pitää ymmärtää alkuperäinen ongelma. Lisäksi aineenopettajaopiskelija 5 huomioi, että opiskelijalle ei välttämättä ole selvää ylioppilaskoetehtävän a-kohdassa piirretyn kuvaajan liittyvän myös kohtiin b ja c: *"Opiskelijan on kuitenkin myös ymmärrettävä a-kohdan, eli kuvaajan piirron, vahva yhteys myöhempiin tehtävän kohtiin, vaikkei kohdissa viitatakaan kuvaajasta lukuun."*

Pyöristämisen oli tässä tehtävässä maininnut yksi aineenopettajaopiskelija. Fysikaalisena taitona se päädyttiin luokittelemaan käsitteelliseksi, sillä pelkkä tekninen suorittaminen voi toisinaan johtaa virheellisiin tarkkuuksiin vastauksia annettaessa. Mittaukset sisältävät aina enemmän tai vähemmän virhettä, joten virheen suuruuden arvioiminen on oleellinen osa pyöristystarkkuutta arvioitaessa. Virheanalyysia ei kuitenkaan vielä lukiossakaan opetussuunnitelmien perusteiden mukaan opeteta [6], joten pyöristäminen on käytännössä usein tekninen suoritus.

5.1.3 Mahdolliset haasteet graafisen mallintamisen tehtävässä

Neljännessä aineenopettajaopiskelijoiden kysymyksessä pyydettiin pohtimaan ylioppilaskoetehtävää tehdessä ilmeneviä haasteita ja virheitä, aikaisemmat omat vastaukset huomioiden. Kysymys oli muotoiltu seuraavasti: *"Pohdi kohtien 2 ja 3 perusteella, minkälaisia ongelmia opiskelijalla voisi ilmetä kyseistä YO-koetehtävää tehdessä. Minkälaisia virheitä opiskelija voisi tehdä ja minkälaisia virheellisiä käsityksiä hänellä voisi olla? Pohdi myös, näkyvätkö erityisesti kohdassa 2 mainitsemasi taidot arvioimissasi mahdollisissa ongelmissa."*

Aineenopettajaopiskelijoiden vastauksista neljänteen tehtävään löytyi monia erilaisia käsitteitä ja teemoja, jotka luokiteltiin yhteensä peräti kuuteen eri luokkaan. Perinteisten neljän luokan lisäksi mukaan otettiin jälleen muut tiedot ja taidot sekä tällä kertaa käsitteellisen tiedon ja taidon luokka, jossa yhdistyi sekä matematiikka että fysiikka. Luokat sekä vastaajien lukumäärät on koottu taulukkoon 5.3

Edellä mainittu käsitteellinen sekä matemaattinen että fysikaalinen tieto tai taito liittyi suoran yhtälöön ja sen käyttämiseen. Suoran yhtälön yhteydessä vastauksessa käytettiin esimerkiksi verbejä "hallita", "soveltaa" ja "tulkita". Aineenopettajaopiskelijoista peräti seitsemäntoista vastauksista löytyi suoran yhtälöön liittyvä maininta. Vastauksista ei kuitenkaan välttämättä selvinnyt oliko niillä viitattu matemaattiseen vai fysikaaliseen käsitteelliseen osaamiseen. Tehtävän ratkaisemiseen, ainakin ratkaisemisen perustuessa ymmärrykseen eikä esimerkiksi ulkoa opittuun, nimittäin tarvitaan molempien alojen osaamista. Suora ja sen yhtälö käsitellään matematiikassa, jolloin tulee määritellyksi esimerkiksi kulmakerroin ja vakiotermi. Toisaalta fysikaaliset suuret vasta antavat näille käsitteille tehtävään liittyvän merkityksen. Täten oli selkeintä luokitel-

Taulukko 5.3: Aineenopettajaopiskelijoiden käsitykset mahdollisista virheistä ja haasteista graafisen mallintamisen tehtävässä (N=21).

Käsitteelliset matemaattiset ja fysikaaliset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Suoran yhtälö, tulkitseminen ja soveltaminen	17
Käsitteelliset matemaattiset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Funktio ja sen nollakohdat	1
Tekniset matemaattiset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Pyöristysvirheet	1
Suoranyhtälön käsittely	1
Käsitteelliset fysikaaliset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Akselit väärinpäin	18
Tiheyden määritelmä	7
Sovite puuttuu tai on vääränlainen	7
Kaikkia mittapisteitä ei huomioitu	2
Tiheyden laskemisessa mittalasin massa mukana	2
Suora pakotettu kulkemaan origon kautta	1
Tekniset fysikaaliset tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Yksiköiden sekoittaminen	1
Muut tiedot ja taidot	**Vastaajien lukumäärä**
Ohjelman/työkalujen käyttäminen	12
Aloittamisen vaikeus	1
Huolimattomuus	1

la suora molempien aineiden käsitteellisten tietojen ja taitojen luokkaan. Seuraavaksi esitetään joitakin esimerkkejä suoran yhtälöön liittyvistä vastauksista.

”*Opiskelija ei osaa soveltaa suoran yhtälön eri termien merkityksiä (kulmakerroin ja leikkauspiste) tai käyttää niitä väärinpäin*” (Aineenopettajaopiskelija 2)

”*B-kohdassa tulee ymmärtää tiheyden määrittely eli tiheys saadaan kulmakertoimesta, mitä kulmakerroin oikeastaan ilmoittaa. C-kohdassa täytyy ymmärtää mitä leikkauspiste kertoo, mikä silloin oikeastaan on nesteen tilavuus. Ongelmallista siis on, jos opiskelija ei osaa muodostaa matemaattiselle suoranyhtälölle fysikaalista vastinetta.*” (Aineenopettajaopiskelija 3)

”*Tehtävä on vaikea ratkaista, jos ei hallitse suoran yhtälöä ja ymmärrä, miten sitä voidaan hyödyntää*” (Aineenopettajaopiskelija 19)

Lisäksi aineenopettajaopiskelija 14 käsitteli samaa teemaa vastauksessaan: ”*Tyhjän mittalasin massaa ei välttämättä hoksaa, jos ei ymmärrä funktion käsitettä ja kuvaajan nollakohtien merki-*

tystä. Tämä liittyy funktion ja kuvaajan opiskeluun koko lukion ja yläkoulunkin ajalta. Funktion ja kuvaajan tulkintaa on kuitenkin tehty jo pitkään koulussa. Tehtävää on hankala arvatakaan oikeaksi, jos nämä asiat eivät ole hallussa." Hän mainitsi myös funktion ja sen nollakohdat. Muita käsitteellisiä matemaattisia tietoja ja taitoja ei vastauksissa juuri ollut mainittu.

Teknisiä matemaattisia taitojakaan ei juuri ollut mainittu, mutta eräs aineenopettajaopiskelija oli suoran yhtälön hallinnan yhteydessä liittänyt vastaukseensa myös maininnan suoran yhtälön muokkaamisesta haluttuun muotoon. Tämä voidaan nähdä teknisenä lausekkeen tai yhtälön käsittelytaitona. Yksi mainitsi lisäksi pyöristämisen. Vaikka edellä pyöristäminen on luokiteltu kysymyksen mukaan joko tekniseksi matemaattiseksi tai käsitteelliseksi fysikaaliseksi taidoksi, sijoitettiin se tässä yhteydessä teknisten matemaattisten tietojen ja taitojen luokkaan. Tähän päädyttiin, sillä pyöristämisen käsitteelliseen puoleen liittyvää virhearviointia ei käsitellä lukiossa.

Yksi useimmin löytyneistä teemoista liittyi akseleiden valintaan. Peräti kahdeksantoista vastaajista oli maininnut akseleiden valinnan mahdolliseksi virheeksi tai haasteeksi. Osa oli myös selventänyt sen johtavan liian suureen kulmakertoimeen eli tiheyteen ja negatiiviseen astian massaan. Kuten aiemmin todettiin, matemaattisesti akselit voivat olla kummin päin vain, mutta fysikaalisesti kulmakerroin on tiheys vain, jos pystyakseliksi on valittu massa ja vaaka-akseliksi tilavuus. Täten akseleiden valinta on ehdottomasti käsitteellinen fysikaalinen tieto.

Seitsemän aineenopettajaopiskelijan vastauksessa oli arvioitu tiheyden yhtälön osaamisen olevan mahdollinen ongelma. Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 2 oli kuvaillut ongelmaa:
"*Opiskelija ei tunnista tehtävästä tiheyden fysikaalista määritelmää eli massan ja tilavuuden välistä riippuvuutta tiheydeksi tai muistaa tiheyden määritelmäksi tilavuus/massa*".
Aineenopettajaopiskelija 9 oli vielä lisäksi maininnut yksiköitten sekoittamisen mahdollisuuden.

Lisäksi kuvaajan tuottamisen välivaiheisiin liittyviä mahdollisia kompastuskiviä löydettiin useita. Seitsemän vastaajaa mainitsi mahdolliseksi virheeksi sen, ettei ylioppilaskoetehtävään vastaava sovita pistejoukkoon kuvaajaa, kuvaaja on vääränlainen, eli tässä tapauksessa ei suora, tai jopa yhdistää pisteet murtoviivalla. Myöskin mahdollisuus, ettei tehtävää ratkaiseva käytä kaikkia mittapisteitä ratkaisussaan tai sijoittaa väärän pisteen, oli huomioitu kahden aineenopettajaopiskelijan vastauksessa. Näistä aineenopettajaopiskelija 9 oli epäillyt, että joku vastaaja voisi keksiä ratkaista tehtävän vain yhdellä mittapisteparilla tiheyden yhtälöön sijoittaen. Tähän liittyen kaksi aineenopettajaopiskelijaa oli lisäksi maininnut, että vastaaja voisi tiheyttä laskettaessa ottaa vahingossa huomioon myös mitta-astian massan. Aineenopettajaopiskelija 21 lisäksi epäili, että joku saattaisi pakottaa suoran kulkemaan origon kautta.

Edellä mainitut teemat luokiteltiin käsitteellisiin fysikaalisiin tietoihin ja taitoihin, mutta niissä voisi ilmetä ongelmaa myös sähköisten ohjelmien käytön riittämättömän osaamisen vuoksi. Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 7 oli maininnut useampia edellä kuvattuja ongelmia (tiheyden määritelmä, sovitteen tekeminen, suoran yhtälö ja sen tulkinta) ja lisäksi todennut:

”*Edelliset ongelmat voisivat johtua myös puutteellisista laskenta/piirto-ohjelman käyttötaidoista*”
Sähköinen ohjelma kompastuskivenä tehtävän ratkaisussa oli mainittu kahdessatoista vastauksessa. Ongelmia voisi vastausten perusteella ilmetä itse kuvaajan tuottamisen lisäksi valmiin kuvaajan muotoiluseikoissa kuten akseleiden nimeämisessä.

Edellä mainittujen ongelmien lisäksi aineenopettajaopiskelija 8 ilmaisi ongelmaksi, ettei ylioppilaskoetehtävään vastaava vain tiedä, mistä lähteä liikkeelle. Aineenopettajaopiskelija 20 mainitsi huolimattomuusvirheiden vaaran. Nämä tiedot ja taidot luokiteltiin muiden tietojen ja taitojen luokkaan.

5.1.4 Matemaattisen perustan ja mahdollisten haasteiden huomioiminen opetuksessa

Kysymyksessä viisi aineenopettajaopiskelijoita pyydettiin miettimään, miten he voisivat opetuksellaan tukea lukiolaisten osaamista graafisen mallintamisen tehtävissä. Heitä pyydettiin erityisesti vastaamaan haasteisiin tai ongelmiin, joita he olivat arvioineet mahdollisiksi kysymyksessä neljä. Vastaukset on koottu tähän alalukuun teemoittain otsikoiden.

Tiheyden määritelmän ja akseleiden valinnan opettaminen

Aineenopettajaopiskelija 1 lähtisi liikkeelle käsitteellisesti muistelemalla tiheyden määritelmää: ”*Aloittaisin esittelemällä tiheyden yhtälön. Ratkaisisin yhtälön massan suhteen. Jatkaisin siitä, miten päin mittauspisteet nyt asetetaan kuvaajaan, jotta suoran kulmakerroin vastaa suoraan tiheyttä.*” Teknisen matemaattisen lausekkeen pyörittelyn avulla voitaisiin saada massalle lauseke ja sitä kautta päätellä akseleiden valinta. Päättely perustuu saadun yhtälön soveltamiseen ja vaatii käsitteellistä ymmärtämistä. Myös aineenopettajaopiskelija 3 aloittaisi tehtävän tekemisen vastaavalla pohdinnalla: ”*Ensin täytyy pysähtyä kohtaan massan riippuvuus tilavuudesta. Kumpi riippuu kummasta? Aina y riippuu x:stä eli nyt massa (y-akseli) riippuu tilavuudesta (x-akseli). Tehtävänantoa voidaan lukea myös eteenpäin eli halutaan selvittää tiheys. Miten tiheys on määritelty? Tiheys = massa / tilavuus. Kulmakerroin ilmoittaa aina y:n muutoksen suhteessa x:n muutokseen, eli täytyy valita massa y-akselille ja tilavuus x-akselille.*”

Molemmissa yllä mainituissa vastauksissa oli selvästi lähdetty vastaamaan oppilaiden käsitteellisiin haasteisiin riippuvuussuhteiden kanssa. Akseleiden valinta fysikaalisessa mielessä järkevästi olikin yleisin kompastuskiveksi arvioitu teema kysymyksessä neljä. Aineenopettajaopiskelijat 6 ja 7 olivat maininneet, että olisi mietittävä, mitä akselit tarkoittavat tässä kontekstissa. Muitakin akseleiden valintaan liittyviä vastauksia löytyi paljon, esimerkiksi aineenopettajaopiskelijoilla 16, 18 ja 19. Aineenopettajaopiskelija 17 ehdotti, että lukiolaisille voisi näyttää, mitä tapahtuu, jos akselit valitsee väärin. Osassa, esimerkiksi aineenopettajaopiskelijoiden 7, 8 ja

12, vastauksissa pyrittiin rinnastamaan keskenään samaa tarkoittavia käsitteitä, kuten massan riippuvuus tilavuudesta ja y:n riippuvuus x:stä, sekä haluttiin korostaa erilaisia tapoja sanoa sama asia. Muutamassa vastauksessa kerrottiin myös, että vastaaja korostaisi muuttujan olevan aina x-akselin suure, palauttaen tarkastelun siis tuttuun koordinaatistoon. Joissakin vastauksissa (esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 13) akseleiden valitsemiseen huomion kiinnittäminen opetuksessa oli mainittu, mutta ei ollut tarkemmin kuvailtu, kuinka se tehtäisiin.

Aineenopettajaopiskelija 11 lähti lähestymään akseleiden valintaan liittyviä ongelmia yksikkötarkastelun kautta, jonka hän ajatteli lisäävän käsitteellistä ymmärtämistä: ”*Ensimmäiseen ongelmakohtaan eli siihen kuinka päin akselit laitetaan voi puuttua opetuksen kautta korostamalla, että ennen tehtävän tekemistä kannattaa lukea koko tehtävänanto läpi. Tällöin huomataan, että seuraavassa kohdassa kysytään tiheyttä. Tällöin opiskelijat voi ohjata pohtimaan akseleiden laittamista kulmakertoimen eli tiheyden yksikön kautta miettimällä, jolloin opiskelijat myös varmasti ymmärtävät paremmin oikeiden akselien merkityksen.*”
Hänkin kuitenkin palasi lopuksi edellä mainittuun tapaan palauttaa tarkastelu tuttuun koordinaatistoon lisäämällä: ”*Toisaalta akselien oikein päin laittamiseen voi auttaa myös korostamalla sitä, että tavallisessa koordinaatistossa kuvataan y:n riippuvuutta x:stä.*”

Myös riippuvuuteen liittyviä mainintoja vastauksista löytyi useita, joista osa mainittiinkin jo edellä. Usein riippuvuuden ymmärtämistä olikin korostettu välineenä valita akselit oikein. Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 7: ”*– x- ja y-akselien valinnan merkitys tulisi tehdä selväksi, massan riippuvuus tilavuudesta-> y x:n funktiona.*”
Aineenopettajaopiskelija 9 oli myös maininnut, että olisi tärkeä käydä tarkasti läpi, mitä tarkoittaa kahden suureen riippuvuus. Aineenopettajaopiskelija 17 taas haastaisi lukiolaisen käsitteellistä ymmärrystä kysymällä: ”*Mitä tarkoittaa ”massan riippuvuus tilavuudesta"?*”
Vastaavaan pohdintaan lukiolaisia kehottaisi myös esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 16.

Sovitteen valinnan opettaminen

Lineaarinen riippuvuus ja suora matemaattisena mallina lienee ainakin lukiokontekstissa yleisin, mutta muunlaista riippuvuutta ja muunlaisia mallejakin löytyy. Aineenopettajaopiskelija 15 opettaisi riippuvuuden laatua esimerkkien avulla: ”*Tunneilla voisi painottaa sitä, kuinka kyseiset kuvaajat ja piirretty suora on matemaattinen malli näiden suhteiden riippuvuudelle toisistaan. Lisäksi olisi tärkeä esittää opiskelijoille tai antaa heidän itse tarkastella erilaisia malleja tai riippuvuuksia, jotta olisi varmasti selvää, mikä on lineaarinen suhde ja mikä ei.*”
Hän myös korostaisi kuvaajaa matemaattisen mallina. Aineenopettaja 10 oli myös maininnut, että pitäisi opettaa kiinnittämään huomiota sovitteen valintaan. Myös aineenopettajaopiskelijat 2 ja 12 olivat samoilla jäljillä, sillä heistä opetuksessa pitäisi viljelle termejä lineaarinen ja eksponentiaalinen, jotta ne tulisivat tutuiksi. Aineenopettajaopiskelija 6 painottaisi lukiolaiselle, että

mittapisteitä on oltava määrityksessä useita: ”*On tärkeää, että oppilas ymmärtää, että kokeellisessa työssä pisteet eivät välttämättä aina osu suoralle ja sen takia tiheys määritellään monen pisteen avulla.*”
Aineenopettajaopiskelija 15 taas muistuttaisi, että mittapisteisiin on tehtävä nimenomaan trendiviiva (sovite), ei murtoviivaa.

Edellä mainitut sovitteeseen ja malleihin liittyvät vastaukset liittyivät käsitteellisen ymmärtämisen kehittämiseen. Sovitteet mainittiin usein myös tekniseen osaamiseen eli niiden varsinaisen tekoon liittyen. Näitä vastauksia käsitellään myöhemmin.

Suoran ja funktion opettaminen

Hyvin monissa, lähes kaikissa, vastauksissa mainittiin suoran yhtälön tai sen osien, kulmakertoimen ja vakiotermin, opettaminen. Erityisesti painotettiin yhtälön ymmärtämistä, tulkitsemista ja soveltamista (esimerkiksi aineenopettajaopiskelijat 2, 6, 17, 18, 20 ja 21). Aineenopettajaopiskelijat 7 ja 11 mainitsivat, että suoran yhtälö ja kulmakerroin on kertausta, mutta sekin on hyvä tehdä. Aineenopettajaopiskelija 19 keskittyisi suoran yhtälön käsitteelliseen osaamiseen: ”*– suoran yhtälön esimerkissä opettajana tärkeä opettaa asia niin, että oppilaat ymmärtävät sen eivätkä vain opettele ulkoa, jolloin tällaisen tehtävän tekeminen on helpompaa ja oppilas osaa soveltaa aiemmin opittua tietoaan.*”

Myös funktio mainitaan joissakin vastauksissa, etenkin kun suoran yhtälöä aletaan linkittämään fysiikkaan. Aineenopettaja 14 on sitä mieltä, että funktion käsite kannattaisi kerrata usein: ”*Funktio on asia, joka kannattaa kerrata usein. Kulmakertoimen ja vakiotermin avulla kuvaajan piirtäminen auttaa hahmottamaan niiden merkityksiä.*”

Myös aineenopettajaopiskelija 9 lähtisi kertaamaan tuttua ja linkittämään sitä fysiikkaan: ”*Selitetään, mikä on funktio ja miten se sovelletaan fysiikassa. – Opetellaan mikä on lineaarinen funktio, sen kuvaaja ja mitä tarkoittaa sen akselien leikkauspisteet. Kerrataan mikä on suoran kulmakerroin ja linkitetään sen fysiikkaan.*”

Suoran ja tiheyden yhtälöiden välisen yhteyden opettaminen

Graafisen mallintamisen tehtävissä onkin tarpeen osata soveltaa matemaattista osaamista tehtävän tilanteeseen, tässä tapauksessa fysikaalisen suureen, tiheyden, määrittämiseen. Monissa vastauksissa oli sanoitettu tapoja luoda yhteyttä näiden kahden aineen välille. Alla on muutaman vastaajan esimerkki, kuinka näitä yhteyksiä voisi opetuksella synnyttää. Aineenopettajaopiskelija 12: ”*Korostaisin että näin määritetty fysikaalinen kulmakerroin ilmaiseen massan ja tilavuuden suhdetta eli tiheyttä.*”

Aineenopettajaopiskelija 3: ”*Sovite on suora ja suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Tälle voi* *kuitenkin olla haastavaa laatia fysikaalinen vastine. – Yhtälö saadaan siis muotoon* $m = \rho V + m0$, *missä m on massa,* ρ *asetonin tiheys, V asetonin tilavuus sekä* $m0$ *mittalasin massa, kun asetonia ei ole vielä lisätty.*"

Aineenopettajaopiskelija 4: "*Katsotaan, miten tiheys olikaan määritelty. Tutkitaan, miten tiheyden määritelmä on sidonnainen kuvaajaan eli suoran yhtälöön. Avataan suoran yhtälön kulmakerroin, jonka jälkeen huomataan, että kulmakerroin on sama kuin tiheys.*"
Aineenopettajaopiskelija 20 oli vastannut hyvin samaan tapaan kuin aineenopettajaopiskelija 4.

Aineenopettajaopiskelija 8: "*Tiheyden määritelmästä huomataan massan ja tilavuuden suora verrannollisuus* $m = \rho V$. *Kun tämä yhdistetään tietoon suoran yhtälön yleisestä muodosta* $y = ax + b$ *saadaan sovitesuoran yhtälöstä tiheyden arvo.*"

Kaikissa edellä mainituissa vastauksista lähdetään liikkeelle tutusta suoran yhtälöstä ja otetaan tiheyden määritelmä rinnalle. Kun käsitteellinen ymmärrys matematiikasta on riittävä, yleisten muuttujien x ja y korvaaminen fysikaalisilla suureilla onnistuu ja lineaarinen tehtävän tilannetta kuvaava yhtälö saadaan luotua. Toisaalta käsitteellisen fysikaalisen ymmärtämisen taso paranee, kun yhtälö ja sen kuvaamaan ilmiö liitetään reaalimaailmaan.

Edellisissä vastauksissa mainittiin tiheyden määritelmä muutamaankin kertaan. Näissä vastauksissa oli hieman avattu, kuinka aineenopettajaopiskelija lähtisi opettamaan tiheyden määritelmää ja yhdistämään sitä suoran yhtälöön. Muissakin kuin edellä lainatuissa vastauksissa mainittiin tiheyden määritelmä. Vastauksista ei yleensä selvinnyt, miten tai missä vaiheessa tiheyden määritelmä opiskeltaisiin. Aineenopettajaopiskelija 20 kuitenkin kertoi, että opettaisi tiheyden käsitteen ennen tehtävän ratkaisua:

"*Opettaisin myös tiheyden käsitteen hyvin ennen kuin YO-tehtävän tyylistä tehtävää lähdettäisiin tekemään.*"

Joissakin vastauksissa tiheyden määritelmää nimenomaan kerrattiin tai tarkastettiin (esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 8), samaan tapaan kuin aiemmin lainatussa aineenopettajaopiskelija 4:n vastauksessa. Vastauksista paistoi ajatus, että tiheys määritelmineen on lukiolaisille entuudestaan tuttu. Jotkut vastaajat taas esittelisivät, selvittäisivät tai kävisivät läpi tiheyden yhtälön (esimerkiksi aineenopettajaopiskelijat 1, 7, 11) ilman ajatusta, että tiheyden määritelmä olisi lukiolaisille entuudestaan tuttu.

Suoran yhtälön sekä tiheyden määritelmän yhteydessä vastaajat selvittivät usein tiheyden ja kulmakertoimen yhteyden. Vastauksissa kulmakertoimen ja tiheyden yhteys huomataan joko yhtälöiden lineaarisista ja siten samanlaisista muodoista (esimerkiksi aineenopettajaopiskelijat 3, 4 ja 21) tai se päätellään määritelmän ja kuvaajan perusteella (esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 16). Aineenopettajaopiskelija 3 kertoisi, että: "*kulmakerroin ilmoittaa massan muutoksen jaettuna tilavuuden muutoksella, joka on tiheys.*"

Vaikka kulmakertoimen fysikaalisen merkityksen opettaminen esiintyi useissa vastauksissa, oli vakiotermin fysikaalista merkitystä, eli käytetyssä vanhassa ylioppilaskoetehtävässä mittalasin massaa, käsitelty vielä enemmän. Ennen kaikkea vakiotermiin liittyvät vastaukset olivat tarkempia. Vastauksista oli löydettävissä useampi tapa, jolla aineenopettajaopiskelijat lähtisivät opettamaan vakiotermin fysikaalista merkitystä. Osa tavoista oli käsitteellisempiä ja osa teknisempiä. Selkeimmin käsitteelliset tavat hyödynsivät ajatusmalleja ja kysymyksiä. Missä tilanteessa painoa tulee vain mittalasista tai tilavuus on nolla? Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 7: ”*Siis mietitään, missä tilanteessa painoa tulee vain mittalasista ja kuinka tuo arvo saavutettaisiin kuvaajasta/yhtälöstä.*”

Aineenopettajaopiskelija 4 hyödyntäisi lisäksi suoran yhtälöä ja pyytäisi pohtimaan, miksei suora kulje origon kautta: ”*Viimeisen kohdan vastauksessa päästään taas tulkitsemaan suoran yhtälöä – oppilaille esittäisin kysymyksiä, kuten miksei suora kulje origon kautta? Antaisin heille avoimia kysymyksiä, joihin heidän tulisi pohtia. Koska suora ei kulje origon kautta, tulee siis olla lähtötilanteessa jokin massa – huomataan, että sen on oltava astian massa.*”
Myös aineenopettajaopiskelija 20 johdattelisi oppilaansa pystyakselin leikkauspisteen jäljille origon avulla. Aineenopettajaopiskelija 1 käyttäisi hyödyksi koejärjestelyyn liittyvää kerronnallista esimerkkiä: ”*Suoran nollasta poikkeavan vakiotermin perustelemiseen voisi käyttää kerronnallista esimerkkiä tai demoa. Neste vaatii jonkin mitta-astian, jonka massa toimii arvona m(0). Kiinteiden kappaleiden tiheys taas olisi ainakin periaatteessa mahdollista määrittää ilman mitta-astiaa.*”

Aineenopettajaopiskelija 12 käyttäisi aiemmista hieman poikkeavaa keinoa: ”*Kokonaisen suoran yhtälön kanssa tarkastelisin yksiköitä, josta voidaan havaita vakioterin kuvaavan massaa.*” Hänkin tarkastelisi suoran yhtälöä, mutta lopullinen päättely vakiokertoimesta tehdään yksikkötarkastelun avulla. Tässä tavassa hyödynnetään sekä suora yhtälöön liittyvää käsitteellistä osaamista, että teknistä yksikkötarkastelua.

Tekniseen osaamiseen nojaava opetuskeino vastauksissa liittyi matemaattisen lausekkeen käsittelyyn ja yhtälön ratkaisuun. Näitä olivat vakiotermin eli massan ratkaiseminen suoran yhtälöstä tai tilavuudeksi nollan sijoittaminen. Aineenopettajaopiskelija 8: ”*Jos suoran yhtälö* $y = ax + b$ *on tuttu, pitäisi y-akselin leikkauspisteen ratkaiseminen suoran yhtälöstä onnistua ongelmitta.*”
Hänkin kuitenkin jatkoi vastaustaan: ”*Tässä täytyy keksiä, että tyhjälle mittalasille asetonin tilavuus on nolla, minkä jälkeen ratkaisu on suoraviivainen.*”
Lisäys kielii ajatuksesta, että ilman jotain ”keksimistä”, siis käsitteellistä ymmärrystä, tehtävästä ei selviä.

Kuvaajan käyttämiseen ja fysikaalisten tulkintojen tekemiseen liittyen ekstrapolointi oli myös mainittu parissa vastauksessa. Aineenopettajaopiskelija 11 painottaa, että ekstrapoloinnista on apua muissakin tehtävissä: ”*Opiskelijat tulisi myös totuttaa kuvaajien ekstrapolointiin, jotta he* *pystyvät määrittämään kuvaajien avulla myös asioita, joita ei suoraan mittausdatasta saada selville.*"

Sähköisen ohjelman käytön opettaminen

Moni vastaaja oli myös huomioinut tehtävän ratkaisemisen teknisen puolen, tässä tapauksessa sähköisen ohjelman käyttämiseen liittyvän osaamisen. Muut tekniseen osaamiseen liittyvät huomiot, kuten matemaattisen lausekkeen käsittely, on esitetty jo aiemmin. Ohjelman käyttöön liittyvissä vastauksissa mainittiin esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmat, GeoGebra ja laskimet, joiden monipuolisen käytön osaamiseen moni vastannut aineenopettajaopiskelija kiinnittäisi opetuksessa huomiota. Vaadittavista käyttötaidoista mainittiin ainakin mittausdatan siirtäminen koordinaatistoon ja kuvaajan sovittaminen. Lisäksi aineenopettajaopiskelija 8 opettaisi kuvaajan muodollisista vaatimuksista: *Tätä opettaessa painottaisin, että kuvaajassa on tärkeää näkyä akselien otsikot ja niiden yksiköt.*"
Tämä on tärkeää toki kuvaajan tulkinnan ja luettavuuden kannalta, mutta toisaalta ymmärryksen ja osaamisen näyttämisenkin kannalta.

Seuraavaksi esitellään muutamia ohjelman käyttämiseen liittyviä esimerkkivastauksia:
"*Opetuksessa tulee tietysti myös neuvoa ja ohjeistaa valitun sähköisen ohjelmiston käyttöä, jotta siitä tulisi mahdollisimman rutiininomaista, jolloin tehtävien ratkaisussa voisi keskittyä niiden sisällön hallintaan teknistentaitojen sijaan.*" (Aineenopettajaopiskelija 3)
"*Opetuksessa ottaisin huomioon, että opiskelija osaa käyttää ainakin yhtä ohjelmistoa hyvin. Kuvaajan piirtämisen ja tulkitsemisen pitäisi olla myös rutiininomaista. Opettaisin siis opiskelijat käyttämään ohjelmistoa ensin hyvin, minkä jälkeen pystyisin opettamaan, kuinka tehtäviä ratkaistaan ohjelmiston avulla.*" (Aineenopettajaopiskelija 20)
"*Opettaisin ohjelmiston käyttöä ihan sillä, että sitä harjoitellaan mahdollisimman paljon ja että opiskelijan ei tarvitse jännittää sen käyttöä ja keskittyminen säilyy tehtävän suorittamiseen*" (Aineenopettajaopiskelija 21)
Aineenopettajaopiskelija 3, 20 ja 21 haluaisivat saavuttaa tilanteen, jossa kuvaajien tuottamisen tekninen osaaminen olisi rutiininomaista, jotta vanhan ylioppilaskoetehtävän kaltaiset tehtävät testaisivat muita kuin teknisiä taitoja. Aineenopettajaopiskelija 21 toteaa, että riittävä osaamisentaso saavutetaan harjoittelemalla.

Aineenopettajaopiskelija 14 toteaa, että opettajana hän osaa tietyt ohjelmat, joita hän kannustaisi lukiolaisten käyttävän: "*Oppitunneilla harjoitellaan eri laskinohjelmien käyttöä ja oppilaat tekevät tehtäviä pääsääntöisesti niillä myös kotiläksyksi. Minulla opettajana on hallussa joidenkin laskinohjelmien käyttö, joita kannusta oppilaidenkin käyttävän. Näytän tunneilla, miten lasken tehtävät näillä laskimilla.*"
Ohjelman valintaa kommentoi myös aineenopettajaopiskelija 18, joka valitsisi opetuksessa käy-

tettäväksi ohjelmaksi sen, jota lukiolaiset suosivat. Jos suosituinta ei löytyisi, hän opettaisi useiden ohjelmien käyttöä.

Aineenopettajaopiskelija 19 mainitsi, että kuvaajan tuottamista vaativien tehtävien lisäksi tietokoneohjelmien käyttämistä muunlaisissakaan tehtävissä ei pitäisi unohtaa: ”*myös excelin ja muiden tietokoneohjelmien käyttöä laskujen tekemisessä eikä pelkästään kynää ja paperia*”

Ajatuksia opettamisen käytännön toteuttamisesta

Muutama muukin aineenopettajaopiskelija oli maininnut tehtävien monipuolisuuden sekä erilaisten ratkaisutapojen harjoittelemisen olevan tärkeää oppimisen kannalta. Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 5 kävisi läpi saman tehtävän ratkaisemista eri tavoin: ”*Tehtävien ratkaisemista voisi harjoitella niin kaavaan sijoittamalla, kuvaajasta lukemalla kuin oman kuvaajan tekemiselläkin – kuten YO-tehtävässä.*”
Lisäksi kokeelliset työt ja käytännönläheiset, todelliset esimerkit ja tehtävät oli mainittu useassa vastauksessa (esimerkiksi aineenopettajaopiskelijat 17 ja 19). Aineenopettajaopiskelija 20 painottaisi nimenomaan kokeellisuuden merkitystä oppimisessa: ”*Muutenkin toimintamalleja ja ymmärrystä saa tekemällä kokeelliset työt ja niiden tulosten käsittelyn opiskelijoille tutuksi.*”

Aineenopettajaopiskelija 2 integroisi oppiaineita ja laskisi matematiikan tunnillakin käytännön tehtäviä. Hän myös opettaisi yksikkötarkastelua myös matematiikan tunnilla. Yksikkötarkastelun oli maininnut myös aineenopettajaopiskelija 19, joka opettasi tekemään ne aina laskemisen yhteydessä sekä aineenopettajaopiskelija 7, joka kertoo yksiköistä olevan apua päättelyssä. Myös kuvaajien tulkintaan liittyviä tehtäviä suositeltiin muutamassa vastauksessa. Aineenopettajaopiskelija 7 pitäisi tärkeänä, että samanlaisia tehtäviä laskettaisiin useilla eri suureilla.

Tehtävän ratkaisemisen demonstrointi ja yhteisten esimerkkien teko tunneilla oli myös yleinen vastauksissa ilmennyt keino opettaa graafista mallintamista. Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 13 tekisi esimerkin tunnilla niin, että myös lukiolaiset tekevät mallista ratkaisun saman aikaisesti: ”*Ohjelmistojen käyttö tulee hallita YO-kokeissakin, joten tunneillakin tulisi keskittyä tehtävien tekemiseen ohjelmistojen avulla. Opettaisin tehtävän vastaavan esimerkin avulla siten, että opiskelijat tekisivät omilla koneillaan tehtävää samanaikaisesti. Kuvaajan piirtäminen tehtäisiin vaihe vaiheelta tarpeeksi hitaasti.*”

Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 12 kävisi suoran yhtälön muodostamisen läpi yhteisesti hyvin tarkkaan: ”*Seuraavaksi käsittelisin yhtälön muodostamisen vaihe vaiheelta ”manuaalisesti” x- ja y-arvon muutosten avulla, vaikka tehtävän suorittaminen ei tätä vaadi.*”
Aineenopettajaopiskelija 15 ehdottaa, että tunneilla kuvaajien tuottamista tehtäisiin myös kokeellisen työskentelyn yhteydessä. Hän teettäisi myös tehtäviä, joissa lukiolaiset joutuisivat etsimään virheitä: ”*Vastaavia tehtäviä tulisi oppilaiden tehdä sekä tunneilla kokeellisuuden yhteydessä, että muuten pelkästään tehtäviä. Tehtäviä voisi myös tehdä niin, että antaa oppilaille malli-*

ratkaisun tehtävästä, jossa on jokin virhe, ja antaa heidän etsiä tuo virhe ja pohtia, kuinka se vaikuttaa lopputulokseen."

Työskentelytaitojen opettaminen

Muutamista vastauksista löytyi myös oppimiseen ja vastaustekniikkaan liittyviä vinkkejä. Esimerkiksi aineenopettajaopiskelija 3 palastelisi ongelmia ja tekisi paljon toistoja samankaltaisista tehtävistä. Aineenopettajaopiskelija 4 opettaisi lähtemään liikkeelle perehtymällä tehtävänantoon ja kontekstiin huolellisesti miettimällä, mitä tilanteesta tiedetään. Myös aineenopettajaopiskelijat 8 ja 11 kehottaisivat aina lukemaan tehtävänannon huolella loppuun asti. Jo pelkästään tehtävänannon perusteella voidaan tehdä monenlaisia päättelyitä, joita käyttää alkuun pääsemisessä.

Aineenopettajaopiskelija 7 kehottaisi pohtimaan ratkaisun järkevyyttä, esimerkiksi kuvaajan muotoa. Aineenopettajaopiskelija 19 muistuttaa myös huolimattomuusvirheiden kitkemisestä tarkastamalla saadut tulokset. Lisäksi aineenopettajaopiskelija 20 neuvoisi, että loppuvaiheilla tehtävän ratkaisua pitäisi vielä miettiä vastauksen tarkkuutta sekä muodostaa kokonaiskuva siitä, mitä juuri tuli tehneeksi: "*Lopuksi kiinnitettäisiin huomiota pyöristämiseen ja merkitseviin numeroihin. Lisäksi luettaisiin koko ratkaisu vielä läpi, jotta muodostuu kokonaiskuva asiasta.*"

5.2 Lukiolaisten vastaukset

Tässä alaluvussa käydään läpi lukiolaisten vastauksia sekä vanhasta ylioppilaskokeesta saatuja pistemääriä vastaaja kerrallaan. Pisteytyksessä on kerrottu tarkemmin liitteessä 4. Malliratkaisu tehtävään löytyy liitteestä 3. Vastaajiin viitataan nimellä lukiolainen i, missä i on juokseva numerointi. Numerointi on tehty satunnaisesti, eikä se noudata esimerkiksi vastauksen palautusjärjestystä.

5.2.1 Lukiolaisten pistemäärät graafisen mallintamisen tehtävässä

Kyselyssä käytetty tehtävä on nähtävillä kuvassa 5.1.

Vastaajien saamat pistemäärät tehtävän kohdittain, kokonaispistemäärät sekä pistemäärien keksiarvo, mediaani ja keskihajonta on koottu taulukkoon 5.4. Taulukosta nähdään, että pistemäärät jäivät keskiarvoltaan melko alhaisiksi. Parhaiten osattiin tehtävän a-kohta ja huonoiten c-kohta.

2. Laboratoriotyössä kaadetaan asetonia vaa'alle asetettuun mittalasiin. Taulukossa on ilmoitettu asetonin määrä mittalasissa ja vaa'an lukema (mitattu massa).

V(cm^3)	25	66	98	136	160	194	218	244
m(g)	205	230	256	286	305	332	350	371

a) Piirrä kuvaaja, joka esittää massan riippuvuutta asetonin tilavuudesta. (3 p.)
b) Määritä kuvaajan avulla asetonin tiheys. (2 p.)
c) Kuinka suuri on tyhjän mittalasin massa? (1 p.)

Kuva 5.1: Lukiolaisten kyselylomakkeessa käytetty vanha ylioppilaskoetehtävä kevään 2013 fysiikan kokeesta [26].

Taulukko 5.4: Lukiolaisten saamat pisteet tehtvittäin graafisen mallintamisen tehtävässä (N=7). Kohdassa a maksimipistemäärä oli 3, kohdassa b 2 ja kohdassa c 1. Tehtävän maksimi kokonaispistemäärä oli 6.

Vastaaja	a-kohdan pisteet	b-kohdan pisteet	c-kohdan pisteet	Pisteet yhteensä
Lukiolainen 1	2,5	0	0	2,5
Lukiolainen 2	3	0,5	0	3,5
Lukiolainen 3	3	0,5	1	4,5
Lukiolainen 4	2,5	0	0	2,5
Lukiolainen 5	3	1	0	4
Lukiolainen 6	1	0	0	1
Lukiolainen 7	3	1	0,5	4,5
Keskiarvo	2,6	0,4	0,2	3,2
Mediaani	3	0,5	0	3,5
Keskihajonta	0,7	0,4	0,4	1,3

5.2.2 Lukiolaisten kokemukset graafisen mallintamisen tehtävästä

Lukiolainen 1 saavutti vanhassa ylioppilaskoetehtävässä 2,5 pistettä kuudesta. Hän sai kaikki pisteensä tehtävän kohdasta a, eli kuvaajan piirtämisestä. Sovitetun suoran yhtälöä hän ei ollut laittanut näkyviin, josta seurasi puolen pisteen menetys. Kohdassa b lukiolainen 1 oli alkanut ratkaisemaan tiheyttä kahden mittapisteen avulla laskemalla massan ja tilavuuden muutoksia. Muutosten laskemista hän perusteli sillä, että näin mittalasin massa jää pois laskusta. Kohtaan c hän ei ollut vastannut mitään. Monivalintakysymyksessä tehtävästä lukiolainen 1 oli vastannut tehtävään tuntuneen haastavalta. Helppoa tai helpointa tehtävässä hänestä oli taulukon piirtäminen. Lisäksi hän kertoi luulleensa laskun helpoksi, mutta saaneensa silti väärän arvon.

Haastavaksi tai haastavimmaksi hän täten nimeääkin tiheyden määrittämisen.

Lukiolainen 2 sai tehtävästä 3,5 pistettä. Kohdasta a hän sai täydet pisteet. Hänen vastauksessaan on näkyvissä saadun suoran yhtälö ja siihen on merkitty kulmakertoimen ja vakiotermin lukuarvojen viereen b ja c merkkaamaan niiden olevan vastaukset kyseisiin kohtiin. Vastauksia ei ole kuitenkaan perusteltu tai pyöristetty, joten lukiolainen 2 sai kohdasta b vain puoli pistettä ja kohdasta c ei mitään. Hän ei myöskään ole merkinnyt yksiköitä vastauksilleen. Lukiolainen 2 kertoo tehtävän tuntuneen sopivalta. Helpointa oli "iskeä luvut taulukkoon". Vaikeimmalta hänestä on tuntunut kuvan palauttaminen Formsiin, mikä ei tietenkään liity varsinaisesti tehtävään vaan kyselyn järjestämiseen ja siihen vastaamiseen.

Lukiolainen 3 sai tehtävästä 4,5 pistettä, eli oli toinen suurimman pistemäärän saavuttanut. Hän sai kohdista a ja c täydet pisteet. Kohdan b pistemenetykset johtuivat vastauksen perustelemattomuudesta. Suoran yhtälö oli näkyvillä kuvaajassa, mutta hän ei viitannut siihen millään tavalla. Lukiolainen 3 oli vastaajista ainoa, joka koki tehtävän helpoksi. Hänestä helpointa oli tehdä lineaarinen sovitus. Haastavaa tai haastavinta kohtaa kysyttäessä hän kertoo miettineensä kumpi suureista, massa vai tilavuus, tulisi valita y-akselille.

Lukiolainen 4 sai tehtävästä 2,5 pistettä, kaikki kohdasta a. Pistemenetys a-kohdassa seurasi sovitteen yhtälön puuttumisesta. Kohtiin b ja c hän ei ollut vastannut mitään. Myöskään suoran yhtälöä hänellä ei ollut näkyvillä. Lukiolainen 4 on vastannut monivalintaa "Tehtävä tuntui minusta", ettei osaa sanoa. Hänestäkin helppoa tai helpointa oli taulukon tekeminen, vaikeaa tai vaikeinta taas tiheyden määritys.

Lukiolainen 5 sai tehtävästä 4 pistettä. Hänkin sai kohdasta 3 maksimin kolme pistettä. Kohdassa b hän on saanut oikean vastauksen ja perustellut sen suoran yhtälöllä. Tiheyden määritelmää ei kuitenkaan ole, ja tulos on pyöristämätön, joten hän sai kohdasta vain yhden pisteen. Kohtaan c lukiolainen 5 ei ole osannut vastata. Hän mainitseekin tyhjän mittalasin massan laskemisen haastavaksi tai haastavimmaksi tehtävässä. Yleisesti tehtävän vaikeustaso oli hänestä sopiva ja helppoa tai helpointa kuvaajan tekeminen.

Lukiolainen 6 sai tehtävästä vain yhden pisteen. Kohdassa a hän oli saanut pisteet sijoitettua koordinaatistoon. Hän oli kuitenkin sovitteen sijaan yhdistänyt pisteet murtoviivalla. Lisäksi pistevähennys tuli toisen akselin nimeämättömyydestä. Kohdassa b lukiolainen 6 oli yrittänyt laskea tiheyttä massan ja tilavuuden muutoksen kahdesta mittapisteestä. Hän oli vastaajista ainoa, joka oli kirjoittanut tiheyden määritelmän vastaukseen, mutta koska sitä oli käytetty virheellisesti, ei siitä pisteitä saanut. Kohtaan c hän ei vastannut mitään. Lukiolainen 6 koki tehtävän haastavuuden sopivaksi ja helpoksi tai helpoimmaksi kohdat a ja b. Kohta c oli hänestä vaikea tai vaikein.

Lukiolainen 7 sai tehtävästä 4,5 pistettä ollen toinen suurimman pistemäärän keränneistä. Hänen vastauksestaan puuttuu ainoastaan tiheyden yhtälö. Molemmat tulokset on kuitenkin pyöristetty väärin, joten pistevähennyksiä tulee yhteensä 1,5 pistettä. Lukiolainen 7 koki tehtävän haastavaksi. Helppo tai helpointa hänelle oli kuvaajan piirtäminen ja vaikeaa tai vaikeinta tyhjän mittalasin massa määrittäminen.

Taulukkoon 5.5 on koottu kustakin pisteytettävästä osaamisesta täydet pisteet saaneiden lukiolaisten lukumäärät. Taulukkoon 5.6 taas on koottu pistemenetyksiä kustakin pisteytettävästä osaamisesta saaneiden lukiolaisten lukumäärät.

Taulukko 5.5: Kustakin pisteytettävästä osaamisesta täydet pisteet saaneiden lukiolaisten lukumäärät (N=7).

Pisteytettävä osaaminen	**Vastaajien lukumäärä**
Kohta a	
Mittapisteet	7
Akselit	6
Sovite	6
Suoran yhtälö	4
Kohta b	
Oikea vastaus (myös perustelematon)	4
Perustelu suoran yhtälöllä	2
Suoran yhtälön ja tiheyden analogia	0
Kohta c	
Oikea vastaus (myös perustelematon)	2
Suoran yhtälöllä perusteltu oikea vastaus	2

5.2.3 Lukiolaisten käsitykset graafisen mallintamisen matemaattisesta perustasta

Lukiolaisilta kysyttiin tehtävän tekemisen jälkeen, että minkälaisista matemaattisista tiedoista ja taidoista he ajattelisivat olevan hyötyä tehtävän ratkaisemisen kannalta. Lukiolainen 5 mainitsee, että hyötyä voisi olla suorien tulkinnan osaamisesta ja lukiolainen 7 suoran ymmärtämisestä. Myös lukiolainen 2 on samoilla linjoilla ja mainitsee lisäksi suorien piirtämisen osaamisen olevan tärkeää. Lukiolainen 4 ajattelee, että hyötyä olisi taulukko-ohjelman käyttötaidoista ja lukiolainen 1 taulukon piirtämisen osaamisesta.

Lukiolainen 1 arvelee, että myös yksikönmuunnoksista olisi höytyä. Myös lukiolainen 3 on maininnut, että grammojen muuttaminen kilogrammoiksi on hyvä osata. Lukiolainen 6 ei ole eritellyt höydyllisiä matemaattisia tietoja ja taitoja, vaan on kertonut ”kaikenlaisista taidoista” olevana hyötyä.

Taulukko 5.6: Kustakin pisteytettävästä osaamisesta pistemenetyksiä saaneiden lukiolaisten lukumäärät (N=7).

Pistemenetykset	**Vastaajien lukumäärä**
Kohta a	
Suoran yhtälö puuttuu	3
Sovite puuttuu/vääränlainen	1
Akseleiden valinta/merkitseminen	1
Kohta b	
Ei tutkinut suoran ja tiheyden yhtälöiden välsitä analogiaa	7
Karkea pyöristysvirhe	3
Tiheys määritetty suoraan mittapisteistä	2
Yksikkö puuttuu	1
Perustelematon vastaus	1
Ei vastausta/yritystä	1
Kohta c	
Ei yritystä	3
Karkea pyöristysvirhe	2
Yksikkö puuttuu	1
Väärä vastaus	1

5.3 Aineenopettajaopiskelijoiden ja lukiolaisten vastausten vertailua

Aineenopettajaopiskelijat mainitsivat graafisen mallintamisen tehtävän matemaattiseksi perustaksi useimmin kuvaajan tai suoran yhtälön sekä siihen liittyvät käsitteet kulmakerroin tai vakiotermi. Myös lukiolaisten vastauksista muutamassa oli mainittu vastaavia teemoja. Muutama aineenopettajaopiskelija oli arvioinut pyöristämistaidoista olevan hyötyä, samoin pari lukiolaista. Sen sijaan aineenopettajaopiskelijoiden keskuudessa melko suositut vastaukset sovite ja lineaarinen malli tai riippuvuus eivät esiintyneet lukiolaisten vastauksissa lainkaan. Muutama lukiolainen oli keskittynyt myös teknisempään osaamisen mainiten ohjelman käyttämisen ja taulukon piirtämisen. Aineenopettajaopiskelijoiden vastauksista muihin tarvittaviin taitoihin löytyi runsaasti vastaavia mainintoja. Nämä tulokset on koottu taulukkoon 5.7.

Aineenopettajaopiskelijat arvioivat akseleiden valinnan olevan yleisin haaste graafisen mallintamisen tehtävässä. Tässä tutkimuksessa kuitenkin kaikki lukiolaiset olivat osanneet valita akselit oikein, vaikka akseleiden nimeäminen olikin yhdellä vastaajalla puutteellista. On kuitenkin huomattava, että tehtävänannon taulukossa suureet olivat valmiiksi niin päin, että kuvaaja

Taulukko 5.7: Vertailua aineenopettajaopiskelijoiden (N=21) ja lukiolaisten (N=7) käsityksistä graafisen mallintamisen matemaattisesta perustasta.

Matemaattinen tieto tai taito	**Aineenopettajaopiskelijat**	**Lukiolaiset**
Suorien yhtälöiden ymmärtäminen/tulkitseminen	86 % (18)	43 % (3)
Sähköisen ohjelman/työkalujen käyttäminen	86 % (18)	14 % (1)
Kuvaajan piirtäminen	19 % (4)	14 % (1)
Yksikönmuunnokset	5 % (1)	28 % (2)
Taulukon piirtäminen	0 % (0)	14 % (1)

tuli oikein suoraa sarakkeet valitsemalla.

Toinen aineenopettajaopiskelijoiden vastauksissa erittäin usein esiintynyt arvio haastavasta kohdasta graafisen mallintamisen tehtävässä oli suoran yhtälöön liittyvä tulkitseminen ja soveltaminen. Tämä taas oli kompastuskivi lukiolaisten vastauksissa. Pari ei ollut kirjoittanut sovittamalleen suoralle mitään yhtälöä, ja hekin, jotka olivat, eivät aina olleet osanneet sitä soveltaa. Vastausten perustelu suoran ja tiheyden yhtälöihin nojaten puuttui lähes kaikilta tai se oli vähintään riittämätöntä. Perustelemattomuus olikin yksi tehtävän eniten pistemenetyksiä aiheuttaneista kohdista. Lisäksi erityisesti vakiotermin merkitys oli usealla hukassa ja useampi lukiolainen mainitsikin sen tehtävän haastavaksi tai haastavimmaksi osuudeksi. Myös tiheyden määritelmä ja sovitteen yhtälön vertaaminen siihen puuttui usealta lukiolaiselta. Aineenopettajaopiskelijoistakin kolmasosa arvioi tiheyden määritelmän olevan virhelähde tehtävässä.

Pari lukiolaista oli lähtenyt laskemaan yksittäisen, vierekkäisten mittapisteiden erotusten avulla tiheyttä. Aineenopettajaopiskelijoista seitsemän sivusi aihetta mainitsemalla sovitteen puuttuvan tai olevan vääränlainen ja kaksi, ettei kaikkia mittaisteitä välttämättä käytetä vastauksessa. Yksi lukiolaisista oli jättänyt sovitteen kokonaan pois ja yhdistänyt pisteet murtoviivalla.

Toinen yleinen haaste lukiolaisten vastauksista tuntui olevan pyöristäminen. Pyöristysvirheet olivat usein karkeita, sillä tulos oli usein ilmoitettu suoraan ohjelman antamassa tarkkuudessa. Tästä aiheutui pistevähennyksiä esimerkiksi molemmille korkeimman pistemäärän (4,5 p) saavuttaneelle lukiolaiselle. Aineenopettajaopiskelijoista kuitenkin vain yksi oli maininnut pyöristysvirheet vastauksessaan.

Aineenopettajaopiskelijoiden arvioimia virhelähteitä on verrattu lukiolaisten saamiin pistemenetyksiin taulukossa 5.8. Luokiolaisten pistemenetyksiä on laskettu lukumääränä pisteytettävä osaaminen kerrallaan, joilloin tehtävän eri kohdissa olleet saman käsitteen pistemenetysten lukumäärät on laskettu yhteen.

Taulukko 5.8: Aineenopettajaopiskelijoiden (N=21) arvioimien virhelähteiden ja lukiolaisten saamien pistemenetysten lukumäärien vertailua pisteytettävän osaamisen mukaan.

Pisteytettävä osaaminen	**Aineenopettajaopiskelijat**	**Pistemenetysten lkm**
Akseleiden valinta/merkitseminen	18	1
Perustelematon vastaus (suoran yhtälö)	17	1
Suoran ja tiheyden yhtälöiden analogia	7	7
Sovite puuttuu/vääränlainen	7	1
Mittapisteet puuttuu/virheelliset	2	0
Karkea pyöristysvirhe	1	5
Yksikkö puuttuu	1	2
Ei yritystä	0	4
Suoran yhtälö puuttuu	0	3
Tiheys määritetty suoraan mittapisteistä	0	2
Väärä vastaus	0	1

6 Pohdintaa

Tähän lukuun on koottu tämän pro gradun tekemisen nostamia ajatuksia ja pohdintoja. Lisäksi luvussa verrataan joitakin saatuja tuloksia aiempien tutkimusten tuloksiin. Tutkimuksessa varsinkin lukiolaisten aineisto jäi valitettavan pieneksi ja siksi se onkin täysin riittämätön kuvaamaan osaamista graafisessa mallintamisessa missään muualla, kuin kyseisen fysiikan ryhmän sisällä. Toisaalta tutkimus oli laadultaan kvalitatiivinen tapaustutkimus, joten kattavien ja yleistettävien tulosten saaminen ei tavoitteena ollutkaan. Päätelmiä siitä on siis vaikea tehdä, mutta joitakin kysymyksiä ja ajatuksia aineisto ja sen tulokset nostavat. Sen sijaan aineenopettajilta saatu aineisto oli jo kattavampi ja avasi monenlaisia näkökulmia.

Graafisen mallintamisen tehtävää tehdessä on ymmärrettävä suureiden välisiä riippuvuussuhteita, osattava kirjoittaa ne matemaattisesti ja sovellettava tietoa esimerkiksi akseleiden valintaan. Aineenopettajaopiskelijat olivatkin usein maininneet suoran yhtälön ja siihen liittyviä käsitteitä vastauksissaan graafisen mallintamisen matemaattista perustaa kysellessä ja toisaalta myös mahdollisia virheitä tai haasteita kysellessä. Lukiolaisten vastauksista löytyikin juuri näihin teemoihin liittyviä puutteita, erityisesti mittalasin massan määrittämisessä. He eivät hallinneet suoran yhtälöstä ainakaan vakiotermin merkitystä. Tämä tulos eroaa Pospiechin et al. [2] tuloksista, joissa oppilailla oli ollut haasteita enemmän kulmakertoimen kuin vakiotermin kanssa. Heidän tutkimuksessaan vakiotermi oli määritetty useimmin pystyakselin leikkauspisteestä tai matemaattisesti ratkaistu yhtälöstä. Tämän pro gradun graafisen mallintamisen tehtävässä käytettiin sähköistä ohjelmaa, jolloin vakiotermikin saatiin ohjelman laskeman sovitteen yhtälöstä. Tätä ei kuitenkaan ollut osattu, vaikka määrittämisen ajattelisi olevan aiempaa helpompaa. Täysiin pisteisiin vaadittiin toki myös perustelu suoran yhtälön ja tiheyden määritelmän analogian avulla, mutta pelkkä vastauskin tuotti jo 0,5 pistettä. Kuitenkin tehtävästä kerättiin keskimäärin vain 0,2 pistettä. Herääkin kysymys, onko sähköisen ohjelman käyttäminen vähentänyt oppilaiden ymmärrystä fysiikasta ja sen linkeistä matematiikkaan. Myöskään kulmakertoimen määrittämisessä perustelut puuttuivat tai olivat puutteellisia. Kulmakerroin tosin oli osattu mainita terminä muutamissa vastauksissa.

Pospiech et al. [2] tulivat tutkimuksissaan myös tulokseen, että opiskelijat käyttävät graafisen mallintamisen tehtävässä kaikkein useimmin ulkoa opittuja, toistuvia algoritmeja. Täten oikealla ymmärtämisellä on hyvin pieni rooli. Tämä pro gradu -tutkimus herätti hyvin samanlaisia ajatuksia ja kysymyksiä. Lukiolaiset osasivat konstruoida kuvaajan hyvin, itse asiassa yhtä lukuun ottamatta kaikki saivat kuvaajan tehtyä. Ongelmia ilmeni pääasiassa vasta saadun kuvaajan tulkitsemisessa. Tämä herättää väistämättä epäilyn ulkoa opitun algoritmin käyttämisestä kuvaajaa konstruoitaessa. Toisaalta tänä tietotekniikan aikana konstruoinnin hoitaa joka tapauksessa kone, niin lienee myös tarpeen pohtia ja kyseenalaistaa, miten paljon konstruoinnista on teknisesti järkevää osata ja ymmärtää. Tämä ei kuitenkaan saisi viedä jalansijaa matemaattiselta ja fysikaaliselta osaamiselta, joka tällaisessa tehtävässä näyttäytyy merkitysten tulkintana.

Myös aineenopettajaopiskelijoiden vastauksista löytyi ulkoa opettelun ja ymmärtämisen ristiriitaan liittyviä teemoja. Osa aineenopettajaopiskelijoista esimerkiksi opettaisi akseleiden valintaan muistisääntöjä tai yksikkötarkastelua, joista ensimmäinen perustuu puhtaasti ulkoa opetteluun ja jälkimmäinenkin voi olla hyvin tekninen ja siksi ymmärrystä heikosti lisäävä lähestymistapa. Tämä herättääkin pohtimaan, mihin opetus ohjaa oppilasta, ymmärrykseen vai ulkoa opetteluun. Nykyään valloillaan olevan sosiokonstruktiivisen oppimiskäsityksen puitteissa ymmärtämisen pitäisi olla keskiössä, mutta pyritäänkö siihen aina, ja onko se edes mahdollista? Jos opiskelijalla on aitoa ymmärrystä riippuvuuksista, hän kykenee kyllä päättelemään esimerkiksi akselivalinnat ja tulkitsemaan kuvaajia. Osaaminen ei ole muistin varassa. Toisaalta opiskelijalle, jolle syvällistä ymmärrystä riippuvuuksista ei ole syntynyt, jonkinlainen muistisääntö voi tarjota mahdollisuuden selviytyä tehtävästä. Aineenopettajaopiskelijat käyttäisivät vastausten perusteella sekä ymmärtämiseen että algoritmien ja muistisääntöjen opetteluun liittyviä keinoja, osa myös jonkinlaista sekoitusta näistä. Heillä tokikaan ei ole vielä käytännön opetustyöstä pitkää kokemusta ja siksi olisikin mielenkiintoista tietää, miten pitkään opetustyötä tehneet asian kokevat ja kuinka he opettavat opiskelijoitaan.

Tairab & Al-Naqbi [4] havaitsivat tutkimuksessaan opiskelijoilla olleen haasteita ymmärtää suureiden riippuvuussuhteita ja valita akselit oikein. Siksi pidinkin alkuun yllättävänä, ettei riippuvuuksia mainittu aineenopettajaopiskelijoiden vastauksissa useammin. Vaikka aineenopettajaopiskielijoista vain noin puolet oli maininnut riippuvuuden graafisen mallintamisen matemaattisena perustana, ja kukaan ei suoranaisesti mahdollisena haasteena tai ongelmakohtana, voidaan sitä nähdä sivuttaneen monissa vastauksissa. Esimerkiksi akseleiden valintakin parhaimmillaan on juuri riippuvuuksien käsitteellistä ymmärtämistä ja soveltamista. Lisäksi suoran tai kuvaajan yhtälö ja sen tulkinta oli usein mainittu sekä matemaattista perustaa että mahdollisia haasteita kysyttäessä. Kuvaajan yhtälön tulkinta ja riippuvuudet liittyvät myös oleellisesti toisiinsa. Täten voisi ajatella aineenopettajaopiskelijoiden käsitelleen riippuvuutta epäsuorasti sitä käsitteenä mainitsematta. Sen sijaan Tairabin & Al-Naqbin [4] tulokseen haasteista valita akseleita on helppo yhtyä. Akselit väärin päin oli aineenopettajaopiskelijoiden selkeästi yleisen vastausta graafisen mallintamisen ongelmakohtia kysyttäessä ja lukiolaistenkin vastauksista löytyi siitä maininta. Kukaan lukiolaisista ei tosin sortunut valitsemaan akseleita väärin päin. Tosin, kuten edellä mainittiin, taulukossa arvot olivat valmiiksi oikein päin sähköisen ohjelman toimintaan nähden, joten ei voida sanoa, perustuivatko lukiolaisten oikeat akselivalinnat tietoon vai sattumaan.

Aineenopettajaopiskelijoiden kertomuksista siitä, kuinka he opettaisivat suoran yhtälöä ja sen analogiaa tiheyteen, paistoi matemaattisen tarkastelun vahva asema. Tiheyttä opetettaisiin vertailemalla yhtälöitä ja korvaamalla matemaattisen yhtälön symbolit fysiikan suureiden symboleilla. Kukaan ei ollut kertonut opettavansa tiheyttä esimerkiksi kokeellisuus edellä, jolloin massan ja tilavuuden muutoksien avulla saadaankin uusi suure, joka nimetään tiheydeksi. Herääkin kysymys, että jääkö suureiden ja niiden linkittyminen muihin suureisiin ja siten fysiikan oppiminen pinnalliseksi, jos matematiikkaa painotetaan niin vahvasti niiden opettamisessa. Toisaalta on muistettava, että tämän tutkimuksen aineenopettajaopiskelijoiden joukosta lähes kaikki (19) opiskeli matemattiikkaa, kun fysiikkaa opiskeli vain noin puolet (11). Tämä voi hieman selittää tarkastelun matemaattisuutta.

Kokonaisuudessaan voidaan sanoa, että tähän tutkimukseen osallistuneet aineenopettajaopiskelijat tunnistivat ja löysivät monipuolisia käsitteitä sekä tietoja ja taitoja graafisen mallintamisen takaa. Lisäksi he havaitsivat paljon näihin liittyviä kompastuskiviä ja tapoja huomioida ne opetuksessa. Myös aineenopettajaopiskelijoiden ja lukiolaisten vastaukset sisälsivät paljon yhtymäkohtia. Tutkimusta voisikin jatkaa hankkimalla lisää aineistoa lukiolaisilta, jotta voisi selvittää yleisemmin heidän kokemuksiaan graafisesta mallintamisesta. Samalla voisi arvioida aineenopettajaopiskelijoiden näkemysten yhtenevyyttä laajempaan lukiolaisilta kerättyyn aineistoon.

Tämän pro gradu -tutkielman aineisto rajoittuu yksittäisiin ryhmiin. Erityisesti lukiolaisten ryhmä on keskenään melko heterogeeninen mitä tulee heidän opiskelemiensa fysiikan kurssien määrään. Ainoastaan yhden vastaajan käytyjen kurssien määrä erosi muusta tutkimusryhmästä. Lisäksi tutkimusotos on todella pieni. Täten tulokset eivät ole yleistettävissä kaikkiin lukiolaisiin, eikä niistä voida tehdä esimerkiksi päätelmiä yleisimmistä lukiolaisten kohtaamista haasteista graafisen mallintamisen tehtävissä. Lukiolaisilta kerätystä aineistosta oli kuitenkin löydettävissä kokoonsa nähden yllättävänkin monia kompastuskiviä. Aineenopettajien vastaajajoukko oli jo hieman lukiolaisia suurempi, mutta sekin kerättiin vain yhden yliopiston yhdeltä kurssilta. Täten aineiston ei voi aineenopettajaopiskelijoidenkaan tapauksessa ajatella edustavan koko suomalaista matemaattisten aineiden aineenopettajaksi opiskelevien joukkoa, etenkään vastauksien ilmenevyyden suhteen. Sen sijaan voitaneen olettaa, että samankaltaisia seikkoja nousisi yleisemminkin aineenopettajaopiskelijoiden vastauksissa esille, vaikka määrät voisivatkin olla erilaisia.

Aineenopettajaopiskelijoiden tutkimusjoukossa on myös huomattava, että tutkimuksen ja siten tutkimuskyselyn aihepiiri oli fysiikan ja matematiikan opettamisen rajapinnassa, vaikka vain noin puolet aineenopettajaopiskelijoista oli opiskellut molempia aineita. Vastaajilla oli siten joissain määrin erilaiset lähtökohdat tutkimuskyselyyn vastaamiseen. Lisäksi molempien tutkimusryhmien tapauksessa on muistettava, että tutkimuskysely oli myös kouluun tai opiskeluun liittyvä tehtävä. On mahdollista, ettei kaikkien motivaatio tehtävän tekemiseen ollut korkea ja tehtävä tehtiin keskittymättä siihen täysin. Lisäksi vastaajat ratkaisivat tehtävän ja vastasivat kyselyyn kotoa, joten periaatteessa on mahdollista, että he eivät tehneet tehtäviään itse tai käyttivät apuvälineitä. Aineenopettajaopiskelijoiden kohdalla tosin apuvälineistä tuskin oli hyötyä, sillä tehtyjä tehtäviä ei arvosteltu ja varsinaisissa tutkimuskysymyksissä pyydettiin pohtimaan asioita, jolloin suoria vastauksia sisältäviä lähteitä ei ollut. Lukiolaiset taas olisivat voineet löytää tehtävän malliratkaisun netistä ilman sähköistä ohjelmaa ratkaistuna. Saadut pistemäärät tosin viittaavat siihen, ette malliratkaisuja ollut käytetty.

Aineiston kävi läpi ainoastaan yksi ihminen, jolloin virheiden mahdollisuus on suurempi, kuin usean tarkastellessa aineistoa. Virheet voivat olla joko tulkinnallisia tai puhtaasti tilastollisia vastauksen esiintyvyyksiä kirjatessa. Virheiden mahdollisuutta pyrittiin pienentämään ja siten luotettavuutta lisäämään kommentoimalla ja taulukoimalla vastauksia. Jokainen vastaus käytiin läpi useaan kertaan, ja käsittelyn yhteydessä säilytettiin mahdollisuus yhdistää vastauksesta irrotetut käsitteet ja lainaukset anonyymiin vastaajaan. Tätä varten käsittelyvaiheessa lopulliseen työhön päätyneiden taulukoiden lisäksi oli käytössä laajemmat taulukot. Luotettavuutta etenkin aineenopettajaopiskelijoiden tapauksessa pyrittiin lisäämään myös esittämällä valmiissa työssä runsaasti tehtyjä havaintoja tukevia lainauksia aineistosta. Lisäksi taulukoimalla tuloksia pyrittiin paitsi selkeyttämään ja nopeuttamaan tutkimuksen tulosten lukemista, myös tarjoamaan perusteita tehdylle vertailulle esimerkiksi aineenopettajaopiskelijoiden ja lukiolaisten vastausten yhtäläisyyksistä.

Tutkimuksen suurin anti tekijälleen oli herättää näkemään yksinkertaiselta tuntuvan graafisen mallintamisen tehtävän monitahoisuus. Sellaisen ratkaisemiseen tarvitaan suuri määrä osaamista. Osaaminen koostuu varmasti sekä käsitteellisestä että teknisestä, mutta missä suhteessa, se on kunkin tahoillaan punnittava. Suuri osaamisen määrä tuo mukanaan myös suuren määrän haasteita ja virheiden paikkoja. Opetuksessaan ei varmasti ikinä voi vastata kaikkiin oppilaiden tarpeisiin, mutta vaaranpaikkojen ja haasteiden tunnistaminen sekä pyrkimys huomioida ne vie jo pitkälle.

7 Johtopäätökset

Tässä pro gradu -tutkielmassa kartoitettiin aineenopettajaopiskelijoiden ja lukiolaisten käsityksiä graafisesta mallintamisesta. Aineenopettajaopiskelijoiden käsityksissä oltiin kiinnostuneita erityisesti graafisen mallintamisen matemaattisesta perustasta sekä siihen vaadittavista taidoista. Lisäksi kiinnosti, millaisia haasteita tai ongelmia aineenopettajaopiskelijoiden mielestä graafisen mallintamisen tehtäviin voisi lukiokontekstissa liittyä, ja kuinka he vastaisivat näihin haasteisiin ja ongelmiin opetuksessaan. Lukiolaisilta kerätystä materiaalista taas tutkittiin heidän saamiaan pistemääriään graafisen mallintamisen tehtävässä sekä heidän kokemuksiaan tehtävän ratkaisemisesta. Heiltäkin kysyttiin, mitä matemaattisia tietoja ja taitoja olisi hyvä osata tehtävän ratkaisemista varten. Yleisimmät vastaukset sekä niistä tehtävät päätelmät on koottu tähän lukuun.

Aineenopettajaopiskelijat löysivät runsaasti matemaattisia tietoja ja taitoja, joita tehtävän ratkaiseminen vaatii. Selvästi suosituimmat vastaukset liittyivät suoran yhtälöön, kulmakertoimeen ja vakiotermiin, sillä lähes kaikilta löytyi maininta vähintään yhdestä edellä mainitusta. Lähes puolet vastaajista olivat lisäksi maininneet sovitteen tai lineaarisen riippuvuuden. Muista vastauksista löytyvistä käsitteistä tai teemoista löytyi vain joitakin mainintoja. Erilaisia käsiteellisiä ja teknisiä teemoja löytyi vastauksista lähes yhtä paljon, mutta käsitteellisiksi luokiteltuja tietoja ja taitoja oli silti mainittu selkeästi useammin. Tulos lienee perusteltavissa sillä, että kyseessä oli fysiikan ylioppilaskoetehtävä, jossa testattiin graafisen mallintamisen taitoja, ei laskemista. Tietokoneella tehdessä teknisen matematiikan osaamisen rooli vähenee entisestään, kun esimerkiksi mittapisteiden sovituksen koordinaatistoon tekee tietokoneohjelma.

Suurin osa muista tiedoista ja taidoista, joista aineenopettajaopiskelijat olivat arvioineet olevan hyötyä tehtävän ratkaisussa, olivat fysiikkaan liittyviä. Mainitut tiedot ja taidot luokiteltiin käsitteellisiin ja teknisiin. Käsitteellisiä tietoja ja taitoja esiintyi selvästi eniten, sillä luokkaan löytyi teemojakin teknisiä enemmän ja vastaajamäärät olivat suuremmat. Eniten vastauksista liittyi tiheyden yhtälöön tai määritelmään liittyviä vastauksia, yli kolmeneljäsosalla vastaajista. Muitakin teemoja vastauksista löytyi, mutta niiden esiintyvyys oli maksimissaan muutamia. Toinen usein esiintynyt vastaus liittyi sähköisen ohjelman tai työkalujen käyttöön, jotka luokiteltiin muiksi kuin fysikaalisiksi tiedoiksi ja taidoiksi. Nekin oli maininnut reilu kolmeneljäsosaa vastaajista. Ohjelman käytön osaaminen onkin välttämätöntä tehtävän ratkaisemisen kannalta, sillä tehtävän kohtien b ja c tulokset voidaan määrittää vain kohdassa a piirretyn kuvaajan avulla.

Aineenopettajaopiskelijat arvelivat haasteiden tai ongelmien ilmenevän useimmin akseleiden valinnassa ja suoran yhtälön tulkitsemisessa tai soveltamisessa. Aineenopettajaopiskelijat arvelivat erityisesti tehtävänannossa sanotun ”massan riippuvuus asetonin tilavuudesta” olevan haastava ymmärtää ja johtavan helposti akseleiden valitsemiseen väärinpäin. Suoran yhtälöstä arveltiin, että sen analogisuus tiheyden yhtälön lineaariseen muotoon olisi haastavaa, ja siten vakiotermin ja kulmakertoimen fysikaaliset merkitykset jäisivät ymmärtämättä.

Noin puolet vastaajista arveli, että sähköisen ohjelman käyttäminen aiheuttaisi haasteita. Ongelmia voisi tulla sekä mittapisteiden sijoittamisessa, sovitteen tekemisessä, että kuvaajan muotoilussa. Lisäksi kolmasosa vastaajista mainitsi mahdolliseksi haasteeksi tai ongelmaksi tiheyden määritelmän tai sovitteen. Vastaajat epäilivät, että tiheyden määritelmää ei muisteta tai tunnisteta esitetyn riippuvuuden kuvaavan tiheyttä. Sovitteesta taas pohdittiin, että se voitaisiin tehdä virheellisesti esimerkiksi vain muutaman mittapisteen avulla tai jättää tekemättä ollenkaan. Myös virheellisen muotoinen sovite nähtiin mahdolliseksi. Muitakin teemoja vastauksissa esiintyi, mutta ne olivat yksittäisiä mainintoja.

Aineenopettajaopiskelijat käyttäisivät opetuksessaan monenlaisia keinoja, joilla tukea graafisen mallintamisen oppimista. Akseleiden valinta näyttäytyi yleisimpänä mahdollisena haasteena, joten suurin osa vastaajista käsitteli sitä myös opettamisen kannalta. Aineenopettajaopiskelijat pyrkisivät lisäämään käsitteellistä ymmärrystä riippuvuudesta, jolloin myös akselien valinta helpottuu. Lisäksi he käyttäisivät opetuksessaan erilaisia tapoja ilmaista riippuvuussuhdetta, jotta ne tulivat opiskelijoille tutuiksi. Myös esimerkkejä erilaisista kuvaajista ja akseleiden valinnasta sekä muistisääntöjä muuttujan ja x-akselin yhteydestä ehdotettiin.

Myös suoran yhtälö ja sen osat mainittiin usein vastauksissa. Monet vastaajista pitivät niihin liittyvää teoreettista osaamista kertauksena, mutta tarpeellisena sellaisena. Linkki fysiikkaan, tässä tapauksessa tiheyteen, pyrittiin luomaan ainakin lineaaristen yhtälöiden analogioista sekä tiheyden määritelmän ja kulmakertoimen yhtälön analogioista. Vakiotermin merkityksen opettamiseen sen sijaan tarjottiin runsaasti erilaisia keinoja. Aineenopettajaopiskelijat esimerkiksi ohjaisivat lukiolaiset pohtimaan, milloin tilavuus on nolla tai miksei piirretty suora kulje origon kautta. Myös yksikkötarkastelua tarjottiin työkaluksi ymmärtää vakiotermin fysikaalinen merkitys. Myös teknisiä matemaattisia keinoja tarjottiin yhtälön ratkaisemisen muodossa.

Tiheyden määritelmän opettaminen tuli myös esille useissa vastauksissa. Osa vastaajista käsittelisi sitä kertauksen omaisesti ennen tehtävän ratkaisua. Osa taas esittelisi tai selvittäisi sen, kuten se ei olisi entuudestaan tuttu. Kaikkien vastauksista ei selvinnyt, miten ja milloin tiheyden määritelmä opetettaisiin. Kukaan ei kuitenkaan kertonut määrittelevänsä sitä vanhan ylioppilaskoetehtävän tai sen kaltaisen tehtävän avulla.

Aineenopettajaopiskelijat opettaisivat tehtävän ratkaisemisen vaiheita ohjelman käyttö mukaan lukien esimerkkien ja harjoitustehtävien avulla. Esimerkkejä tehtäisiin tunneilla yhteisesti. Aineenopettajaopiskelijat ohjaisivat lukiolaisia myös työskentelyyn liittyvissä asioissa. Esimerkiksi ohjelman valintaan ja tehtävien ratkaisemiseen annettaisiin neuvoja. Aineenopettajaopiskelijat neuvoisivat lukiolaisia lukemaan koko tehtävän läpi miettien, mitä he tietävät, pyöristämään vastaukset ja lopuksi tarkastamaan koko saadun ratkaisun.

Kaiken kaikkiaan aineenopettajaopiskelijoiden vastauksissa esiintyi melko perinteisiä tapoja opettaa. Vastauksista oli löydettävissä tapoja, joilla selvästi pyrittiin lisäämään aitoa ymmärrystä opetettavasta aiheesta. Silti vastauksista oli aistittavissa myös piirteitä, joissa osaaminen perustuu ulkoa opittuun, esimerkiksi muistisääntöön tai toiminnalliseen algoritmiin.

Lukiolaisten pistemäärät vanhassa ylioppilaskoetehtävässä jäivät melko matalaksi. Korkein saavutettu kokonaispistemäärä oli 4,5 maksimipisteiden ollessa 6 pistettä, ja sen saavutti kaksi lukiolaista. Matalin kerätty kokonaispistemäärä oli 1 piste. Tehtävän pisteiden keskiarvo oli 3,2 ja mediaani 3,5 sekä keskihajonta 1,3. Ylivoimaisesti parhaiten selviydyttiin tehtävän a-kohdasta, josta neljä vastaajaa seitsemästä saavutti täydet 3 pistettä maksimipistemäärän ollessa siis 3 pistetä. Kohdan keskiarvo oli 2,6 pistettä, mediaani 3 ja keskihajonta 0,7. Kukaan lukiolainen ei myöskään jäänyt tehtävässä nollille. Heikoiten meni c-kohta, josta vain kaksi vastaajaa seitsemästä sai pisteitä. Kohdan maksimipistemäärä oli 1, keskiarvo oli 0,2 ja mediaani 0. Keksihajonta c-kohdassa oli 0,4 pistettä. Voidaan siis päätellä, että tällä lukiolaisryhmällä kuvaajan tuottaminen oli hallussa. Mittapisteet saatiin koordinaatistoon ja kuvaaja sovitettua. Ohjelman käyttäminenkin oli siis hallussa. Kaikki vastaajat eivät kuitenkaan merkinneet suoran yhtälöä näkyviin, mutta siitä päädyttiin rokottamaan pisteitä vasta myöhemmissä kohdissa.

Muutama lukiolainen sortui virheellisesti määrittämään tiheyttä yksittäisistä mittapisteistä muutosta laskemalla. Pistemenetyksiä tuli paljon vastausten perustelemattomuudesta sekä pyöristysvirheistä. Yllättävän usein lukiolainen jätti kohdan täysin tyhjäksi, ei siis yrittänyt ollenkaan haastavalta tuntuvan kohdan ratkaisemista. Yksi lukiolainen ei saanut kuvaajaa piirrettyä, sillä hän oli yhdistänyt mittapisteet murtoviivalla. Myös akselit olivat osin nimeämättä. Hän kuitenkin arvioi tehtävän haastavuudeltaan sopivaksi.

Vain yksi vastanneista piti tehtävää helppona ja hän olikin toinen suurimman pistemäärän saaneista. Sen sijaan toinen suurimman pistemäärän saavuttaneista piti tehtävää jopa haastavana. Yksi toinenkin lukiolainen piti tehtävää haastavana. Helppona tai helpoimpana pidettiin taulukon tekemistä, kuvaajan piirtämistä sekä kotia a ja b. Kohtaa c pidettiin useassa vastauksessa haastavana tai haastavimpana. Myös tiheyden määritys ja akseleiden valinta oli mainittu haastavina tai haastavimpina.

Aineenopettajaopiskelijoiden arviot mahdollisista haasteista tai ongelmista graafisen mallintamisen tehtävässä ja lukiolaisten tekemät virheet tehtävän ratkaisussa olivat pääosin hyvin linjassa. Tehdyt virheet olivat yleensä yleisimpien mainittujen haasteiden joukossa. Poikkeuksen tekivät pyöristysvirheet, jotka korostuivat lukiolaisten vastauksissa, mutta vain yksi aineenopettajaopiskelija oli ne maininnut. Tämä ei kuitenkaan välttämättä kerro siitä, että aineenopettajaopiskelijat luulisivat lukiolaisten pyöristämistaitoja paremmiksi, kuin ne ainakaan tässä tutkimusotoksessa olivat. On mahdollista, että aineenopettajaopiskelijat eivät esimerkiksi olleet ajatelleet pyöristämistä oleelliseksi tiedoksi tai taidoksi juuri tämän tehtävän kannalta ja siksi eivät olleet huomanneet sitä mainita.

Aineenopettajaopiskelijat mainitsivat mahdollisiksi kompastuskiviksi usein sähköisen ohjelman käyttämisen taidot. Näiden ilmentyvyyttä lukiolaisten otoksessa ei tässä tutkimuksessa voida päätellä. Esimerkiksi puuttuva sovitteen yhtälö voi olla seurausta siitä, ettei sitä ole osattu teknisesti osattu laittaa näkyviin, mutta sitä ei voi vastauksista aukottomasti päätellä. Yksi lukiolaisista kuitenkin mainitsi sähköisen ohjelman käyttötaidot tärkeäksi tehtävän ratkaisemisen kannalta.

Tässä pro gradu -tutkielmassa päädyttiin hyvin vastaaviin tuloksiin, kuin aiemmissakin tutkimuksissa. Varmaa on, että lukiolaiset kohtaavat graafisessa mallintamisessa monenlaisia haasteita. Lisäksi mallintamisen suorittaminen algoritmisesti, ulkoa opetelluin välivaihein, nousi esille tässäkin tutkimuksessa. Positiivista on, että aineenopettajaopiskelijat tunnistivat paljon mahdollisia kompastuskiviä lukiolaiselle ja osasivat mainita keinoja ratkaista tai ainakin vähentää näitä kompastuskiviä.

Lähteet

[1] Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M. & Pospiech, G. 2011. *Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education.* Science & Education (2012) 21:485–506.

[2] Pospiech, G., Geyer, M. A., Ceuppens, S., De Cock, M., Deprez, J., Dehaene, W., Michelini, M. & Stefanel, A. 2019. *Role of graphs in the mathematization process in physics education.* Journal of Physics: Conference Series 1287.

[3] Glazer, N. 2011. *Challenges with graph interpretation: a review of the literature.* Studies in Science Education, 47:2, 183–210.

[4] Tairab, H. & Al-Naqbi, A. K. 2004. *How do secondary school science students interpret and construct scientific graphs?* Journal of Biological Education, 38:3, 127–132.

[5] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 (pdf) [Viitattu 28.5.2020] Saatavissa: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

[6] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019 (pdf) [Viitattu 28.5.2020] Saatavissa: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

[7] Thomson, W., & Tait, G. 1867. *Treatise of natural philosophy.* Claredon Press, 1867. Illinois'n yliopisto, Urbana-Champaign

[8] Harrison, A. G. & Treagust, D. F. 2000. *A typology of school science models.* Science Education, 2000, vol. 22, no. 9, 1011–1026

[9] Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. & Ivanjek, L. 2012. *Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics.* International Journal of Science and Mathematics Education (2012) 10: 1393–1414.

[10] Gilbert, J. K. 2004. *Models and Modelling: Routes to More Authentic Science Education.* International Journal of Science and Mathematics Education (2004) 2: 115–130.

[11] Greca, I. M. & Moreira, M. A. 2001. *Mental, Physical, and Mathematical Models in the Teaching and Learning of Physics.* Science Education 86(1), 106–121.

[12] Carlsen, M. 2014. *Upper secondary students appropriating the tool of harmonic oscillation: the issue of resistance.* Nordic research in mathematics education – Proceedings of NORMA14, Turku, June 3-6, 2014.

[13] Carlsen M. 2018. *Upper secondary students' mathematical reasoning on sinusoidal function* Educational Studies in Mathematics (2018) 99:277–291.

[14] Stefanel, A. 2019. *Graph in physics education: from representation to conceptual understanding.* In: Pospiech G., Michelini M., Eylon BS. (eds) Mathematics in Physics Education. Springer, Cham.

[15] Lachmayer, S. 2008. *Entwicklung und Überprüfung eines Strukturmodells der Diagrammkompetenz für den Biologieunterricht.* Kiel.

[16] McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. & van Zee, E. H. 1987. *Students difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics.* American Journal of Physics, Volume 55, Issue 6, pp. 503-513 (1987).

[17] Pietrocola, M. 2008. *Mathematics as structural language of physical thought.* Connecting Research in Physics Education with Teacher Education vol 2, ed M Vincentini and E Sassi (ICPE).

[18] Kjeldsen, T. H. & Lützen, J. 2015. *Interactions Between Mathematics and Physics: The History of the Concept of Function – Teaching with and About Nature of Mathematics.* Science & Education (2015) 24:543–559.

[19] Karam, R. & Krey, O. 2015. *Quod erat demonstrandum: Understanding an Explaining Equations in Physics Teacher Education.* Science & Education (2015) 24:661–698.

[20] Blum, W. & Leiß, D. 2005. *Filling up" the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks.* In Working group 13: Applications and modelling, p. 1623.

[21] Sherin, B. L. 2001. *How Students Understand Physics Equations.* Cognition and Instruction, 19(4), 479–541.

[22] Domert, D., Airey, J., Linder, C. & Lippmann Kung, R. 2007. *An exploration of university physics students' epistemological mindsets towards the understanding of physics equations.* NorDiNa 1, 2007.

[23] Leon S. J., *Linear algebra with applications 8th ed.*, 2000/2010, Pearson Education.

[24] James, G., Burley, D., Clements, D., Dyke, P., Searl, J., Steele, N. & Wright, J., *Advanced Modern Engineering Mathematics 3rd ed.*, Harlow 1993/2004, Pearson Education.

[25] Mellin, I, *Tilastolliset menetelmät: Lineaarinen regressioanalyysi*, Teknillinen korkeakoulu 2006 (luentomoniste). [Viitattu 15.4.2020]
Saatavissa: http://math.aalto.fi/opetus/sovtodb/oppikirja/Regranal.pdf

[26] Ylioppilastutkintolautakunta. Fysiikan ylioppilaskoe, kevät 2013 (pdf). [Viitattu: 14.10.2020] Saatavissa: https://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/yo-kokeet/fysiikka_k2013.pdf

[27] Seber, G. A. F. & Lee, A. J., *Linear Regression Analysis 2nd ed.*, Hoboken 2003, John Wiley & Sons.

[28] Saaranen-Kauppinen A. & Puusniekka, A. 2006. *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto* [verkkojulkaisu]. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto [ylläpitäjä ja tuottaja] [Viitattu 15.5.2020] Saatavissa: http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L7_3_2.html

[29] Kiviniemi, Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2 Kivinieni, K. *Laadullinen tutkimus prosessina.* Teoksessa Valli R. (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin. Jyväskylä: PS-kustannus

[30] Valli, R., Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1 Valli, R. *Aineistonkeruu kyselylomakkeella.* Teoksessa Valli R. (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodin valinta ja aineistonkeruu: Virikkeitä aloittelevalle tutkijalle. Jyväskylä: PS-kustannus.

[31] Ylioppilastutkintolautakunta. Hyvän vastauksen piirteet, fysiikan ylioppilaskoe, kevät 2013 (pdf). [Viitattu: 14.10.2020] Saatavissa: https://yle.fi/progressive/fynd/oppiminen/oppiminen.yle.fi/uploads/2013_k_fy.pdf

Liitteet

Liite 1: Aineenopettajaopiskelijoille tarkoitettu tehtävä

Hei kurssilaiset!

Tämän tiedoston tehtävä toimii paitsi kurssin KASPEDA2 Ainedidaktiikan syventävät ja laajentavat näkökulmat etätehtävänä 4, myös minun Pro gradu tutkielmani aineistona. Kaikki teidän vastauksenne käsitellään luottamuksellisesti, eikä tutkielmassa julkaista kenenkään nimiä tai käsitellä vastauksia niin, että vastaaja olisi niistä tunnistettavissa. Mikäli et halua vastauksiasi käytettävän Pro graduni aineistona, voit ilmoittaa siitä alla. Lisätietoja ida-maija.yli-kesaniemi@tuni.fi

T. Ida-Maija Yli-Kesäniemi

Annan luvan käyttää vastaustani Ida-Maija Yli-Kesäniemen Pro gradu tutkielman aineistona: Kyllä/ei

(poista toinen)

Pääaine:

Opetettavat aineet:

Tee alla olevat tehtävät 1-5. Vastaa kuhunkin kohtaan tehtävänannon alle. Lisää vastaustilaa saat Enter-näppäimellä. Huomaathan, että tämä tehtävä tehdään yksilötyönä, eikä muiden etätehtävien tapaan ryhmissä. Tee valmiista vastauksesta PDF-tiedosto ja palauta se Moodle-alueelle. Dokumenttiin ei tarvitse laittaa nimeä, kurssia varten palautuksen näkee Moodle-alueelta.

1. **Tee alla olevassa laatikossa oleva vanha ylioppilaskoetehtävä (YO 2013 kevät). Käytä kuvaajan piirtämiseen jotakin ylioppilaskokeessa saatavilla olevaa ohjelmaa (LibreOffice Calc, GeoGebra, Logger Pro, Casio ClassPad Manager, TI Nspire). Palauta tehtävän alle kuvakaappaus ratkaisustasi kohtaan a, kohtiin b ja c taas voit kirjoittaa vastauksen.**

Laboratoriotyössä kaadetaan asetonia vaa'alle asetettuun mittalasiin. Taulukossa on ilmoitettu asetonin määrä mittalasissa ja vaa'an lukema (mitattu massa).

V (cm^3)	m (g)
25	205
66	230
98	256
136	286
160	305
194	332
218	350
244	371

a) Piirrä kuvaaja, joka esittää massan riippuvuutta asetonin tilavuudesta. (3 p.)

b) Määritä kuvaajan avulla asetonin tiheys. (2 p.)

c) Kuinka suuri on tyhjän mittalasin massa? (1 p.)

2. **Pohdi tekemäsi ylioppilaskoetehtävän matemaattista perustaa. Mitä matemaattisia käsitteitä ja taitoja lukiolaisen tulisi hallita, jotta hän kykenee tehtävän ratkaisemaan?**

Vastaus:

3. **Mitä muita taitoja tehtävän ratkaiseminen vaatii?**

Vastaus:

4. **Pohdi kohtien 2 ja 3 perusteella, minkälaisia ongelmia lukiolaiselle opiskelijalla voisi ilmetä kyseistä YO-koetehtävää tehdessä. Minkälaisia virheitä opiskelija voisi tehdä ja minkälaisia virheellisiä käsityksiä hänellä voisi olla? Pohdi myös, näkyvätkö erityisesti kohdassa 2 mainitsemasi taidot arvioimissasi mahdollisissa ongelmissa.**

Vastaus:

5. **Pohdi, kuinka pystyisit opettajana vastaamaan kohdassa 4 mainitsemiisi ongelmakohtiin ja opetuksellasi auttamaan opiskelijaa niiden yli. Palaa omaan kohdan 1 vastaukseesi ja kerro, miten opettaisit asiaa ja mitä huomioisit vastauksen eri kohdissa. Voit esimerkiksi kopioida vastauksesi tähän alle ja lisätä sitten kommentteja ja huomioita.**

Vastaus:

Liite 2: Lukiolaisten kysely

Tehtävä pro gradu -tutkielmaani varten

Hei!

Olen Ida-Maija Yli-Kesäniemi ja opiskelen Tampereen yliopistossa matematiikkaa, kemiaa ja fysiikkaa. Teen parhaillaan pro gradu -tutkielmaani. Alle olevan tehtävän avulla minulla olisi tarkoituksena kerätä aineistoa pro graduani varten. Vastauksia käsitellään luottamuksellisesti, eikä vastauksia voida yhdistää vastaajaan, eikä vastaajan henkilöllisyys käy ilmi pro gradu -tutkielmasta. Kirjautumistiedot poistetaan jo ennen vastausten käsittelyä. Lisätietoa saa osoitteesta ida-maija.yli-kesaniemi@tuni.fi

Kiitos vastauksista!

T. Ida-Maija Yli-Kesäniemi

...

Hei Ida-Maija! Kun lähetät lomakkeen, sen omistaja näkee nimesi ja sähköpostiosoitteesi.

* Pakollinen

1. Montako kurssia olet opiskellut fysiikkaa lukiossa? *

Kirjoita vastaus

2. Tee alla oleva vanha ylioppilaskoetehtävä (YO 2013 kevät). Käytä kuvaajan piirtämiseen jotakin ylioppilaskokeessa saatavilla olevaa ohjelmaa (LibreOffice Calc, GeoGebra, Logger Pro, Casio ClassPad Manager, TI Nspire). Palauta vastauksesi yhtenä pdf- tai doc-tiedostona, jossa on kuvakaappaus vastauksestasi kohtaan a ja kirjoitetut vastaukset kohtiin b ja c. Taulukon voit kopioida suoraan haluamaasi ohjelmaan. Muista perustella vastauksesi!

Tehtävänanto:
Laboratoriotyössä kaadetaan asetonia vaa'alle asetettuun mittalasiin. Taulukossa on ilmoitettu asetonin määrä mittalasissa ja vaa'an lukema (mitattu massa).

V (cm^3)	m (g)
25	205
66	230
98	256
136	286
160	305
194	332
218	350
244	371

a) Piirrä kuvaaja, joka esittää massan riippuvuutta asetonin tilavuudesta. (3 p.)
b) Määritä kuvaajan avulla asetonin tiheys. (2 p.)
c) Kuinka suuri on tyhjän mittalasin massa? (1 p.) (Ei-anonyymi kysymys ?) *

Lataa tiedosto

Tiedostomäärän rajoitus: 2 Yksittäisen tiedoston enimmäiskoko: 10MB Sallitut tiedostotyypit: Word,Excel,PPT,PDF,Kuva,Video,Ääni

3. Tehtävä tuntui minusta *

- ◯ Helpolta
- ◯ Haastavalta
- ◯ Sopivalta
- ◯ En osaa sanoa
- ◯ Muu

4. Mikä tehtävässä oli helppoa/helpointa? (Pyri löytämään jokin asia, vaikka tehtävä olisi ollut haastava) *

Kirjoita vastaus

5. Mikä tehtävässä oli haastavaa/haastavinta? (Pyri löytämään jokin asia, vaikka tehtävä olisi ollut helppo) *

Kirjoita vastaus

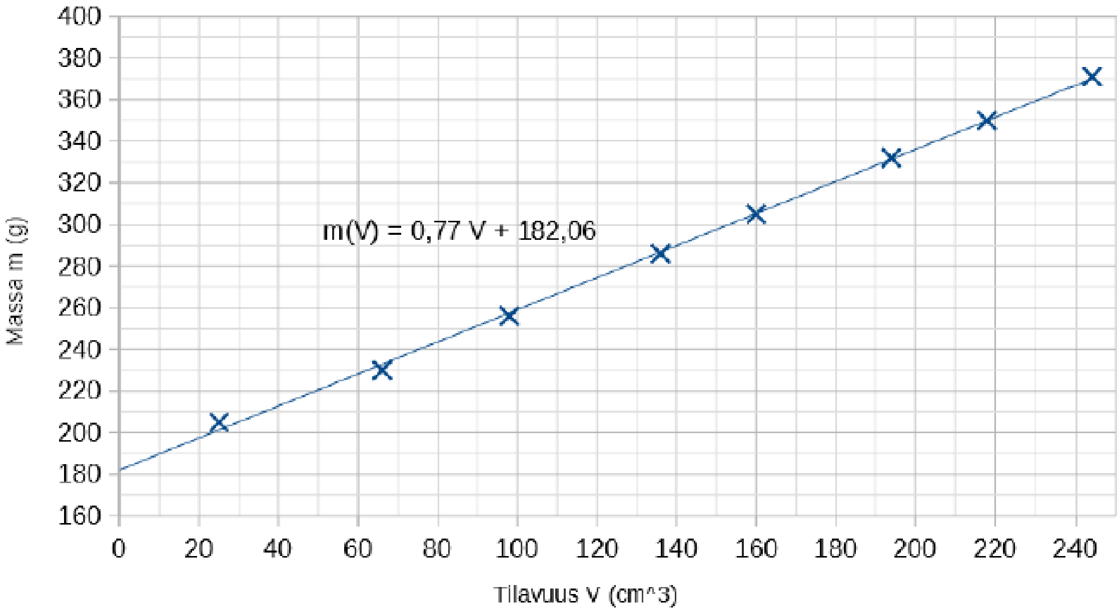
6. Millaisista matemaattisista tiedoista ja taidoista luulet olevan hyötyä tehtävää tehdessä? *

Kirjoita vastaus

Lähetä

Liite 3: Malliratkaisu ylioppilaskoetehtävään

a) Kuva tehty LibreOffice Calcilla, sovite (trendiviiva) lineaarinen.



b) Mittapisteisiin sovitettiin suora, jonka yhtälö on muotoa $m(V) = \rho V + m_0$, missä kulmakerroin ρ on tiheys ja vakiotermi m_0 on massa, kun tilavuus on nolla.
Sovitteen suoran yhtälöksi saadaan Calcilla $m(V) = 0{,}77V + 182{,}06$.
Täten asetonin tiheydeksi saadaan graafisesti $\rho \approx 0{,}77 \frac{g}{cm^3}$.

c) Mittalasin massa saadaan pystyakselin leikkauspisteestä. Pystyakselin leikkauspisteessä tilavuus on nolla, mikä tarkoittaa sitä, ettei asetonia ole vielä lisätty astiaan. Tällöin massaa aiheuttaa vain vaa'alla oleva mitta-astia. Leikkauspiste saadaan näkyviin ekstrapoloimalla saatua kuvaajaa taaksepäin. Saadusta suoran yhtälöstä saadaan mitta-astian massaksi $m_0 \approx 180\ g$

Liite 4: Ylioppilaskoetehtävän arviointi

Pisteytys pro gradu -tutkielmassa:

a) Täysiin pisteisiin (3 p.) mittapisteet ja sopiva sovite yhtälöineen asianmukaisessa koordinaatistossa.
Akselit tulee olla merkitty (suureen tunnus/nimi ja yksikkö) ja skaalattu järkevästi ja asianmukaisesti. Skaalauksen pitää olla näkyvillä.
Mittapisteet ja akselit oikein, myös akseleiden merkkaus 1,5 p
Mittapisteet oikein 1p
Vähennykset:
Mittapisteet puuttuvat -1 p.
Sovite puuttuu/on selkeästi väärä max 1,5p.
Suoran yhtälö puuttuu -1/2 p.
Virheellinen datapiste -1/2 p.
Suureen tunnus/nimi, yksikkö tai skaalaus puuttuu akselilta -1/2 p.
Karkea skaalausvirhe (haittaa lukemista) -1/2 p.

b) Täydet pisteet (2 p.):
Suoranyhtälön ja tiheyden yhtälön analogian avulla perustellen oikea tulos 2 p
Vähennykset:
Vain suoran yhtälö ja sen avulla perusteltu vastaus 1,5 p
Suoran yhtälö näkyvillä, vastaus oikein, mutta ei perusteltu 1 p
tiheyden yhtälö puuttuu -1/2 p
Karkea pyöristysvirhe (sallittu tarkkuus 2-3 merkitsevää numeroa) -1/2 p.
Yksikkö puuttuu -1/2 p
Laskettu suoraan mittapisteistä 0 p

c) Täydet pisteet (1 p.):
Oikea vastaus suoranyhtälö vakiotermistä, kerrottu mistä tulee (voi olla kerrottu kohdassa b) 1 p.
Vähennykset:
Pelkkä vastaus max ½ p.
Karkea pyöristysvirhe (sallittu tarkkuus 2-3 merkitsevää numeroa) -1/2 p.