

ANALISIS KESTABILAN TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT FLU BURUNG (*AVIAN INFLUENZA*)

*STABILITY ANALYSIS OF DISEASE SPREADS BIRD FLU (*AVIAN INFLUENZA*)*

Jean. F. de Queljoe^{1*}, F. Y. Rumlawang, S.Si, M.Si², L. J. Sinay, S.Si, M.Sc³

^{1,2,3}Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pattimura
Jalan Ir. M. Putuhena Kampus Unpatti Poka Ambon Indonesia

e-mail: ¹jean_dequeljoe@yahoo.com, ²rumlawang@yahoo.com, ³lexyz2@gmail.com

Abstrak

Flu burung atau dikenal dengan istilah avian flu atau *Avian Influenza* (AI) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza tipe A dengan diameter 90-120 nanometer. Model matematika mengenai penyebaran penyakit (model epidemi) adalah metode yang tepat untuk mempresentasikan pola penyebaran penyakit flu burung dari unggas ke manusia. Model dasar epidemi dikenal dengan SIR. Dari pembahasan diperoleh model dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan analisis yang dilakukan diperoleh $R_0 = \frac{\omega c}{b(b+m)}$, sehingga jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil atau penyakit flu burung akan menghilang dan jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil atau penyakit flu burung akan menghilang. Dalam penelitian ini digunakan software Maple untuk proses simulasi numerik.

Kata Kunci : *Flu Burung, model matematika, titik kesetimbangan, model SIR, maple*

Abstract

Bird flu, known as avian flu or Avian Influenza (AI) is an infectious disease caused by influenza type A virus with a diameter of 90-120 nanometers. The mathematical model regarding the spread of disease (epidemic model) is the right method to present the pattern of the spread of bird flu from birds to humans. The basic epidemic model is known as SIR. From the discussion, two equilibrium models were obtained, namely disease-free equilibrium points and endemic equilibrium points. Based on the analysis carried out obtained $R_0 = \frac{\omega c}{b(b+m)}$, so that if $R_0 > 1$ then the stable endemic equilibrium point or bird flu disease will disappear and if $R_0 < 1$ then the disease free equilibrium point or bird flu disease will disappear. In this study Maple software was used for numerical simulation processes.

Keywords: *Bird flu, mathematical model, equilibrium point, SIR model, maple*

1. PENDAHULUAN

Avian Influenza (AI) atau flu burung sambar unggas merupakan penyakit *zoonosis* yang ditularkan oleh virus Avian Influenza tipe A sub tipe H5N1 dari *family orthomyxoviride*. Penyakit ini merupakan salah satu penyakit hewan menular yang bersifat akut. Umumnya penyakit tersebut biasanya menyerang unggas dan adanya perkembangan waktu dan virus, penyakit ini juga ikut menyerang manusia [1].

Penyakit flu burung banyak menarik perhatian karena penularannya yang sangat cepat dengan angka kematian yang cukup tinggi. Berawal dari tahun 1997 infeksi flu burung telah menular dari unggas ke manusia dan saat itu telah terjadi 3 kali *outbreak* infeksi virus influenza A sub tipe H5N1 [2]. Flu burung di manusia pertama kali ditemukan di Hongkong pada tahun 1997 yang menginfeksi 18 orang diantaranya 6 orang meninggal dunia. Akibatnya dengan meningkatnya virus flu burung yang disebabkan oleh virus Avian Influenza tipe A sub tipe H5N1 makanya kebanyakan ditemukan pada unggas dan dapat menular pada hewan lain dan manusia [2].

Model matematika mempunyai kapastabilitas dalam pemahaman penyebaran penyakit menular. Oleh karena itu, dalam penelitian ini peneliti tertarik untuk mempresentasikan model

Submitted: 27th Oktober 2020

Accepted: 20th November 2020

matematika penyebaran penyakit flu burungnya[3]. Model matematika penyebaran penyakit flu burung merupakan suatu model yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit flu burung pada populasi unggas dan manusia. Dalam penelitian ini, saya akan menganalisis kestabilan dari model matematika penyebaran penyakit flu burung pada populasi unggas dan manusia[4]. Model matematika yang diinginkan dalam penelitian virus influenza yang disebabkan oleh virus H5N1 yaitu model matematika tipe SIR. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda seperti bidang fisika, ilmu biologi dan kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, dan juga problem – problem jaringan komputer dapat diaplikasikan ke dalam model matematika[5].

Secara normal virus tersebut hanya menginfeksi ternak unggas seperti ayam, kalkun, dan itik. Namun data terakhir menunjukkan bahwa virus AI bisa menginfeksi ternak ruminansia terutama babi. Walaupun hampir semua jenis unggas dapat terinfeksi virus yang terkenal sangat ganas ini tetapi yang diketahui jauh lebih rentan adalah jenis unggas yang dternakkan secara massal seperti ayam, puyuh, dan itik. *Influenza* adalah penyakit yang disebabkan oleh virus *myxovirus* yang sampai saat ini dikenal tiga tipe yaitu tipe A, B, dan C. Virus *influenza* juga tidak dapat diobati, untuk mengatasi infeksi sekunder oleh bakteri hanya dengan pemberian antibiotik dan antibakteri[6].

Pada penelitian ini akan digunakan metode *Routh-Hurwitz* untuk menentukan titik kestabilannya dan mencari nilai reproduksi awal, dengan memperhatikan persamaan karakteristik dari model yang diperoleh.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Tipe Penelitian

Tipe penelitian adalah studi pustaka, yaitu mempelajari beberapa literature yang berhubungan dengan penelitian kemudian mencoba membahas inti permasalahan tersebut dengan menuangkan secara benar.

2.2 Bahan dan Materi Penelitian

Bahan atau materi yang digunakan dalam penelitian ini berupa karya ilmiah para matematikawan yang disajikan dalam bentuk jurnal, buku cetak dan informasi ilmiah lainnya yang diperoleh dari materi-materi kuliah maupun media elektronik seperti internet.

2.3 Prosedur Penelitian

Adapun prosedur penelitian :

1. Menentukan judul penelitian
2. Mendeskripsikan model matematika virus flu burung
3. Menganalisis sistem kestabilan titik kesetimbangan
4. Membuat simulasi numerik analisa hasil Simulasi
5. Menyimpulkan penelitian

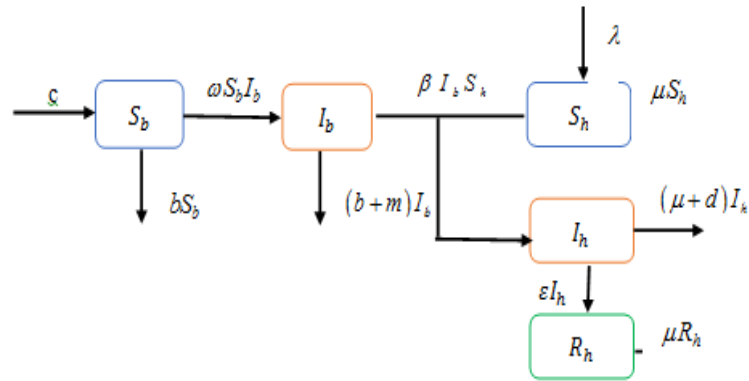
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Penyebaran Penyakit Flu Burung (*Avian Influenza*)

Pada penyebaran flu burung untuk populasi burung dibagi menjadi dua kelompok yaitu pertama, *Susceptible* (S_b) atau populasi yang rentan terhadap penyakit flu burung dan kedua, *infected* (I_b) atau populasi yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke populasi lainnya sehingga jumlah burung dalam suatu populasi adalah $S_b + I_b = N_b$.

Pada penyebaran flu burung untuk populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok yaitu pertama, *Susceptible* (S_h) atau populasi yang rentan terhadap penyakit flu burung. Kedua, *Infected* (I_h) atau populasi yang terinfeksi tetapi tidak menular ke populasi lainnya[7]. Ketiga, *Recovered* (R_h) atau populasi yang sembuh dan tidak terinfeksi lagi oleh flu burung, sehingga jumlah manusia dalam suatu populasi adalah $S_h + I_h + R_h = N_h$.

Model penyebaran penyakit flu burung digambarkan dalam diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Flu Burung

Dengan persamaan model matematika sebagai berikut:

$$\frac{dS_b}{dt} = c - bS_b - \omega S_b I_b \quad (1)$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \omega S_b I_b - (b + m) I_b \quad (2)$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h \quad (3)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu) I_h \quad (4)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \varepsilon I_h - \mu R_h \quad (5)$$

Dengan:

S_b : Jumlah burung *susceptible* pada saat t .

I_b : Jumlah burung *infected* pada saat t .

S_h : Jumlah manusia *susceptible* pada saat t .

I_h : Jumlah manusia *infected* pada saat t .

R_h : Jumlah manusia *recovered* pada saat t .

c : Pertambahan burung *susceptible* setiap satuan waktu.

b : Laju kematian dan emigrasi burung *susceptible* dan *infected*.

ω : Laju interaksi burung *susceptible* dengan burung *infected* yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung.

m : Laju kematian burung *infected* yang disebabkan karena penyakit flu burung.

λ : Pertambahan manusia *susceptible* setiap satuan waktu.

μ : Laju kematian dan emigrasi manusia *susceptible*, *infected*, dan *recovered*.

β : Laju interaksi manusia *susceptible* dengan burung *infected* yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung.

ε : Laju manusia *infected* yang kemudian sembuh dari penyakit flu burung dan menjadi manusia *recovered*.

d : Invers dari rata-rata periode infeksi flu burung liar.

4.2 Analisis Sistem Dinamik

Setiap persamaan di atas memiliki kondisi awal secara umum, yaitu :

$S_b = 0, I_b = 0, S_h = 0, I_h = 0, R_h = 0$, dengan setiap nilai awal bernilai positif. Dengan sistem dinamik dari persamaan (4.1) – (4.5) dapat ditemukan titik tetapnya atau titik setimbangnya dan ditentukan karakteristik stabilitasnya.

Titik setimbangnya adalah titik invariant terhadap waktu. Maka diketahui $\frac{dS_b}{dt} = 0, \frac{dI_b}{dt} = 0, \frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dI_h}{dt} = 0, \frac{dR_h}{dt} = 0$. Ada dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang endemik.

4.3 Titik Setimbang Bebas Penyakit

Jika diambil $I_b = 0$, maka akan diperoleh titik setimbang bebas penyakit dimana pada keadaan ini semua populasi yang terinfeksi virus flu burung sudah tidak ada. Untuk mendapatkan titik setimbang maka dari persamaan (2) diperoleh :

$$\begin{aligned}\omega S_b I_b - (b + m) I_b &= 0 \\ (\omega S_b - b - m) I_b &= 0\end{aligned}$$

Jika difaktorkan, maka dapat diperoleh:

$$I_b = 0 \tag{6}$$

$$\omega S_b - b - m = 0$$

$$\omega S_b = b + m$$

$$S_b = \frac{b + m}{\omega} \tag{7}$$

Karena diperoleh $I_b = 0$, maka selanjutnya mensubstitusikan persamaan $I_b = 0$ ke persamaan (1) sehingga diperoleh:

$$c - bS_b - \omega S_b I_b = 0$$

$$c - bS_b - \omega S_b (0) = 0$$

$$c - bS_b = 0$$

$$bS_b = c$$

$$S_b = \frac{c}{b} \tag{8}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (6) ke persamaan (3) diperoleh:

$$\lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h = 0$$

$$\lambda - (\mu + \beta I_b) S_h = 0$$

$$\lambda - (\mu + \beta (0)) S_h = 0$$

$$\lambda - \mu S_h = 0$$

$$\mu S_h = -\lambda$$

$$S_h = \frac{-\lambda}{\mu} \tag{9}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (6) ke persamaan (4) diperoleh:

$$\begin{aligned}
\beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu) I_h &= 0 \\
\beta(0) S_h - (\varepsilon + d + \mu) I_h &= 0 \\
-(\varepsilon + d + \mu) I_h &= 0 \\
I_h &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (6) ke persamaan (5) diperoleh:

$$\begin{aligned}
\varepsilon I_h - \mu R_h &= 0 \\
\varepsilon(0) - \mu R_h &= 0 \\
-\mu R_h &= 0 \\
R_h &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu titik kesetimbangan dimana $I_b, I_h = 0$ atau tidak ada individu yang infeksi dengan titik kesetimbangan sebagai berikut

$$E(S_b, I_b, S_h, I_h, R_h) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$$

4.4 Titik Setimbang Endemik

Titik setimbang endemik dipengaruhi oleh populasi yang terinfeksi virus flu burung dengan $S_b \neq 0, I_b \neq 0, S_h \neq 0, I_h \neq 0,$ dan $R_h \neq 0.$

$$\begin{aligned}
\frac{dS_b}{dt} &= c - bS_b - \omega S_b I_b \\
c - bS_b - \omega S_b I_b &= 0 \\
c - b \left(\frac{b+m}{\omega} \right) - \omega \left(\frac{b+m}{\omega} \right) I_b &= 0 \\
c - \left(\frac{b^2 + bm}{\omega} \right) - (b+m) I_b &= 0 \\
(b+m) I_b &= c - \left(\frac{b^2 + bm}{\omega} \right) \\
(b+m) I_b &= \frac{c\omega - (b+m)b}{\omega} \\
I_b &= \frac{c\omega - (b+m)b}{\omega(b+m)} \\
I_b &= \frac{c\omega - b^2 + bm}{\omega(b+m)} \\
\frac{dS_h}{dt} &= \lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h
\end{aligned} \tag{12}$$

Dari persamaan (12) diperoleh :

$$\begin{aligned}
\lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h &= 0 \\
\lambda - (\mu + \beta I_b) S_h &= 0 \\
\lambda - \left(\mu + \frac{\beta c\omega - \beta b^2 - \beta bm}{\omega(b+m)} \right) S_h &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\mu + \frac{\beta c \omega - \beta b^2 - \beta b m}{\omega(b+m)} \right) S_h = \lambda$$

$$\left(\frac{\mu \omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}{\omega(b+m)} \right) S_h = \lambda$$

$$S_h = \frac{\lambda \omega(b+m)}{-\mu \omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)} \quad (13)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu) I_h$$

Dari persamaan (12) dan (13) diperoleh :

$$\beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu) I_h = 0$$

$$(\varepsilon + d + \mu) I_h = \beta I_b S_h$$

$$(\varepsilon + d + \mu) I_h = \beta \left(\frac{c\omega - b^2 - bm}{\omega(b+m)} \right) \left(\frac{\lambda \omega(b+m)}{-\mu \omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)} \right)$$

$$(\varepsilon + d + \mu) I_h = \frac{\beta(c\omega - b^2 - bm) \lambda}{(-\mu \omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))}$$

$$I_h = \frac{\beta(c\omega - b^2 - bm) \lambda}{(-\mu \omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)} \quad (14)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \varepsilon I_h - \mu R_h$$

Dari persamaan (4.14) diperoleh :

$$\varepsilon I_h - \mu R_h = 0$$

$$\mu R_h = \varepsilon I_h$$

$$R_h = \frac{\varepsilon}{\mu} I_h$$

$$R_h = \frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{\beta(c\omega - b^2 - bm) \lambda}{(-\mu \omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)} \right)$$

$$R_h = \frac{\varepsilon \beta(c\omega - b^2 - bm) \lambda}{\mu(-\mu \omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)} \quad (15)$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yang lain yaitu

$$E^* = \left(\frac{(b+m)}{\omega}, \frac{c\omega - b^2 - bm}{\omega(b+m)}, \frac{\lambda \omega(b+m)}{-\mu \omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}, \frac{\beta(c\omega - b^2 - bm) \lambda}{(-\mu \omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)}, \frac{\varepsilon \beta(c\omega - b^2 - bm) \lambda}{\mu(-\mu \omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)} \right)$$

Dimana titik kesetimbangan E^* adalah titik kesetimbangan endemik.

4.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Misalkan :

$$f = c - bS_b - \omega S_b I_b$$

$$g = \omega S_b I_b - (b + m) I_b$$

$$h = \lambda - \mu S_h - \beta I_b S_h$$

$$i = \beta I_b S_h - (\varepsilon + d + \mu) I_h, \text{ dan}$$

$$j = \varepsilon I_h - \mu R_h$$

Untuk analisa kestabilan titik keseimbangan, dapat dibentuk matriks Jacobian dari persamaan (1) – (5) sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} fS_b & fI_b & fS_h & fI_h & fR_h \\ gS_b & gI_b & gS_h & gI_h & gR_h \\ hS_b & hI_b & hS_h & hI_h & hR_h \\ iS_b & iI_b & iS_h & iI_h & iR_h \\ jS_b & jI_b & jS_h & jI_h & jR_h \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} -b - \omega I_b & -\omega S_b & 0 & 0 & 0 \\ \omega I_b & \omega S_b - (b + m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta S_h & -\mu - \beta I_b & 0 & 0 \\ 0 & \beta S_h & \beta I_b & -(\varepsilon + d + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dilakukan analisa kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik.

4.6 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Berdasarkan titik keseimbangan bebas penyakit maka diperoleh matriks jacobian dengan

mensubstitusikan $E = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$ sebagai berikut[8]:

$$A = \begin{bmatrix} -b & -\omega \frac{c}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega \frac{c}{b} - (b + m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta \frac{\lambda}{\mu} & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\lambda}{\mu} & 0 & -(\varepsilon + d + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -b & -\omega \frac{c}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega \frac{c}{b} - (b+m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta \frac{\lambda}{\mu} & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\lambda}{\mu} & 0 & -(\varepsilon + d + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -\mu \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + b & -\omega \frac{c}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \omega \frac{c}{b} - (b+m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta \frac{\lambda}{\mu} & \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta \frac{\lambda}{\mu} & 0 & \lambda + (\varepsilon + d + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik:

$$(\lambda + b) \left(\lambda - \omega \frac{c}{b} - (b+m) \right) (\lambda + \mu) (\lambda + (\varepsilon + d + \mu)) (\lambda + \mu) = 0$$

Maka diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -b$$

$$\lambda_2 = \omega \frac{c}{b} - (b+m)$$

$$\lambda_3 = -\mu$$

$$\lambda_4 = -(\varepsilon + d + \mu)$$

$$\lambda_5 = -\mu$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika semua parameter λ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ bernilai negatif. Karena semua parameter selalu bernilai positif maka λ_1 , λ_3 , λ_4 , dan λ_5 bernilai negatif. Dengan demikian, supaya titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil maka nilai λ_2 bernilai negatif.

Sehingga : $\omega \frac{c}{b} - (b+m) < 0$

$$\frac{\omega c}{b} < b + m$$

$$\omega c < b(b + m)$$

$$\frac{\omega c}{b(b + m)} < 1$$

4.7 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan titik kesetimbangan bebas endemik maka diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$\text{Misalkan } X = \frac{c\omega - b^2 + bm}{\omega(b+m)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -b - \omega(X) & -\omega\left(\frac{b+m}{\omega}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \omega(X) & \omega\left(\frac{b+m}{\omega}\right) - (b+m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\left(\frac{\lambda\omega(b+m)}{-\mu\omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}\right) & -\mu - \beta(X) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda\omega(b+m)}{-\mu\omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}\right) & \beta(X) & -(\varepsilon + d + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - (-b - \omega(X)) & -\omega\left(\frac{b+m}{\omega}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \omega(X) & \lambda - \left(\omega\left(\frac{b+m}{\omega}\right) - (b+m)\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\left(\frac{\lambda\omega(b+m)}{-\mu\omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}\right) & \lambda - (-\mu - \beta(X)) & 0 & 0 \\ 0 & \beta\left(\frac{\lambda\omega(b+m)}{-\mu\omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}\right) & \beta(X) & \lambda + (\varepsilon + d + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan program maple, maka diperoleh persamaan karakteristik berikut :

$$\left(\left(-\frac{\mu\omega b - \mu\omega m - \beta c\omega + \beta b^2 + \beta b m - \lambda\omega\beta - \lambda\omega m}{\omega(b+m)} (\varepsilon + d + \mu + \lambda)(\mu + \lambda) \right) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{(b+m)} (c\omega + 2\lambda b + 2\lambda m + (c^2\omega^2 - 8bc\omega m + 12b^3m + 4b^4 - 4cb^2\omega + 12b^2m^2 - 4c\omega m^2 + 4bm^3)^{1/2} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{b+m} (-c\omega - 2\lambda b - 2\lambda m + (c^2\omega^2 - 8bc\omega m + 12b^3m + 4b^4 - 4cb^2\omega + 12b^2m^2 - 4c\omega m^2 + 4bm^3)^{1/2}) \right) \right) = 0$$

Maka diperoleh nilai eigen :

$$\lambda_1 = \frac{-\mu\omega b - \mu\omega m - \beta c\omega + \beta b^2 + \beta b m}{\omega(b+m)}$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon - d - \mu$$

$$\lambda_3 = -\mu$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2(b+m)}(c\omega + Y)$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{-2(b+m)}(-c\omega - Y)$$

Dimana $Y = \sqrt{c^2\omega^2 - 8bcm\omega + 12b^3m + 4b^4 - 4cb^2\omega + 12b^2\omega^2 - 4com^2 + 4bm^3}$

4.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Dari analisis titik kesetimbangan dapat ditentukan $R_0 = \frac{\omega c}{b(b+m)}$. Sehingga jika:

1. $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil atau penyakit flu burung akan mewabah.
2. $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil atau penyakit flu burung akan menghilang.

4.9 Simulasi Numerik

Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi secara numerik untuk meninjau keadaan bebas penyakit dan keadaan endemik disajikan pada Tabel 1. Jumlah populasi burung diperkirakan $-c/b = 500$ jiwa. Biasanya rata-rata umur unggas adalah $b = 0.01$ hari karena migrasi atau pemasaran. Karena itu, tingkat kelahiran adalah sekitar $c = 5$ jiwa per hari[9]. Karena diperkirakan periode menular burung yang terinfeksi berkisar 5 sampai 17.6 dan diasumsikan bahwa periode infeksi sekitar $m = 0.1$ per hari. Dapat diperkirakan transmisi dari burung adalah $\omega = 0.0004$ per hari. Diasumsikan bahwa rata-rata populasi manusia yang efektif adalah sekitar $\mu = 0.00274$ per hari, tingkat kelahiran manusia adalah $\lambda = 2.74$ orang per hari. Hal ini dianggap sebagai periode menular yang terinfeksi, manusia yang terinfeksi dengan virus flu burung adalah sekitar 9 hari. The Writing Committee of the World Health Organization (WHO) Consultation on Human Influenza A/H5, 2006). Periode infeksi flu burung liar adalah $d = 0.1$ per hari. Tingkat transmisi antara manusia dengan burung yang terinfeksi yang dapat mengakibatkan penularan penyakit flu burung adalah $\beta = 0.0002$ per hari. Bermutasi ke manusia yang terinfeksi dan kemudian sembuh adalah $\varepsilon = 0.0005$ per hari.

Tabel 1. Nilai Parameter Penyakit Flu Burung

Parameter	Nilai Estimasi	
	Bebas Penyakit	Endemik
c	5	5
b	0.01	0.01
ω	0.00041	0.00041
m	0.1	0.1
λ	2.74	2.74
μ	0.00274	0.00274
β	0.0002	0.0002
ε	0.0005	0.0005
d	0.1	0.1
R_0	0.186364	1.863636

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai numerik yang diberikan di atas maka model flu burung berdasarkan persamaan (1)-(5) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dS_b}{dt} &= 5 - 0.01 S_b - 0.00041 S_b I_b \\ &= 5 - (0.01 + 0.00041 I_b) S_b \\ \frac{dI_b}{dt} &= 0.00041 S_b I_b - (0.01 + 0.1) I_b \\ &= (0.00041 S_b - 0.11) I_b \end{aligned}$$

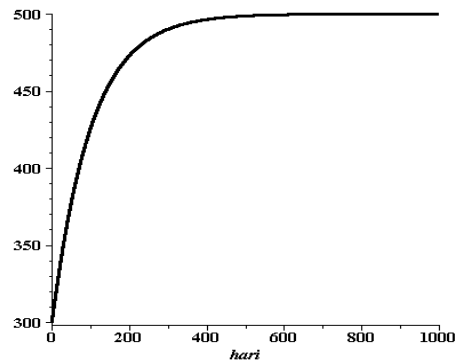
$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= 2.74 - 0.00274 S_h - 0.0002 I_b S_h \\ &= 2.74 - (0.00274 - 0.0002 I_b) S_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= 0.0002 I_b S_h - (0.0005 + 0.1 + 0.00274) I_h \\ &= 0.0002 I_b S_h - 0.10324 I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= 0.0005 I_h - 0.00274 R_h \end{aligned}$$

Proses simulasi dilakukan pada waktu awal $t_{awal} = 0$ dan waktu akhir $t_{akhir} = 1000$ hari. Dengan kondisi awal masing-masing variabel keadaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S_b(0) &= 300 \\ I_b(0) &= 15 \\ S_h(0) &= 500 \\ I_h(0) &= 10 \\ R_h(0) &= 1 \end{aligned}$$

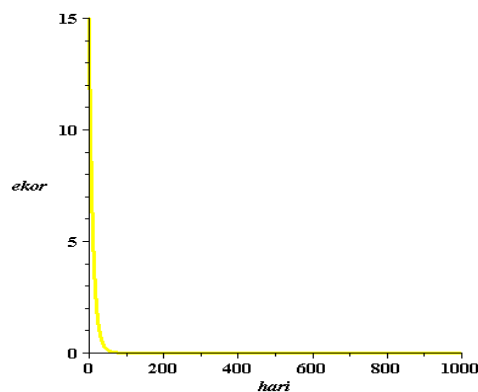
4.10 Simulasi Numerik dalam keadaan Bebas Penyakit

Grafik hasil simulasi numerik dalam keadaan bebas penyakit untuk $R_0 = 0,1863636 < 1$.



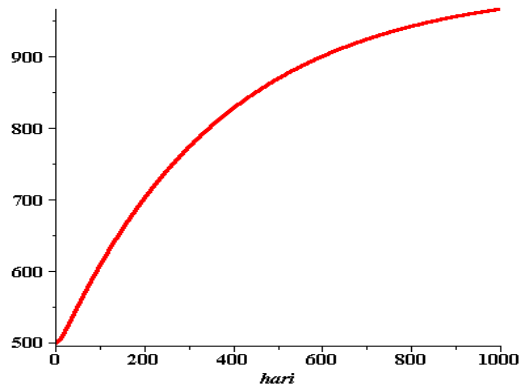
Gambar 2. Grafik S_b pada saat t

Berdasarkan Gambar 2, menunjukkan bahwa populasi burung yang rentan terhadap flu burung, mengalami kenaikan hingga $t = 500$, sehingga burung yang rentan terhadap flu burung semakin bertambah.



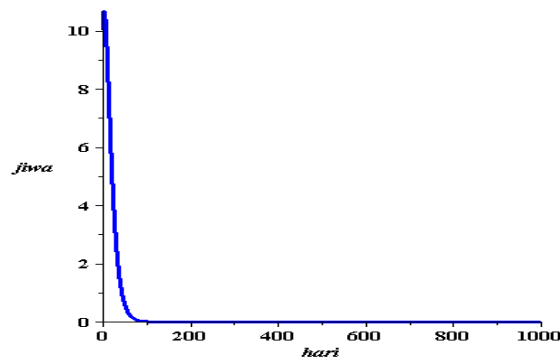
Gambar 3. Grafik I_b pada saat t

Berdasarkan Gambar 3, menunjukkan populasi burung yang terinfeksi tetapi tidak menular ke populasi lainnya, pada hari ke 100 jumlah populasi burung yang terinfeksi sudah berada pada titik kesetimbangan.



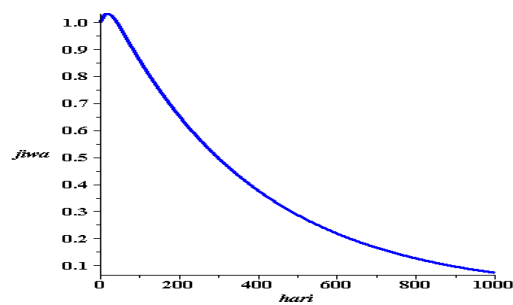
Gambar 4. Grafik S_h pada saat t

Berdasarkan Gambar 4. menunjukkan Populasi manusia yang rentan terhadap flu burung mengalami penambahan individu pada waktu $t = 500$.



Gambar 5. Grafik I_h pada saat t

Berdasarkan Gambar 5, menunjukkan grafik populasi manusia yang rentan terhadap flu burung. Karena manusia yang rentan terhadap flu burung kehilangan kekebalan, sehingga menjadi manusia yang terinfeksi dan pada hari ke 100 manusia yang terinfeksi sudah berada pada titik kesetimbangan 0.

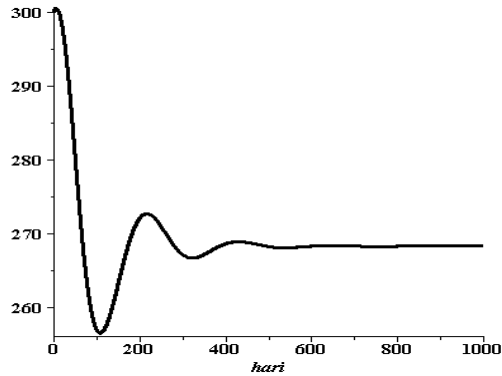


Gambar 6. Grafik R_h pada saat t

Berdasarkan Gambar 6, menunjukkan grafik populasi manusia yang sembuh dan tidak terinfeksi lagi oleh virus flu burung. Lama-kelamaan tidak ada lagi manusia yang terinfeksi, maka manusia yang sembuh dan tidak lagi terinfeksi lagi akan stabil pada titik kesetimbangan 0.

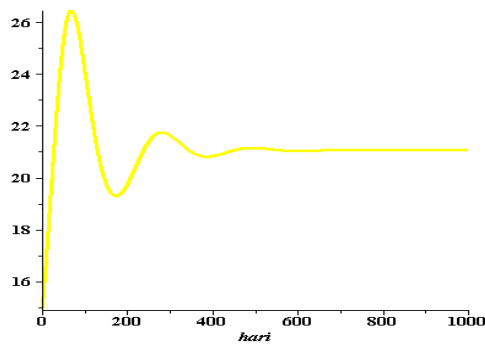
4.11 Simulasi Numerik dalam keadaan Endemik

Grafik hasil simulasi numerik dalam keadaan endemik untuk $R_0 = 1,863636 > 1$.



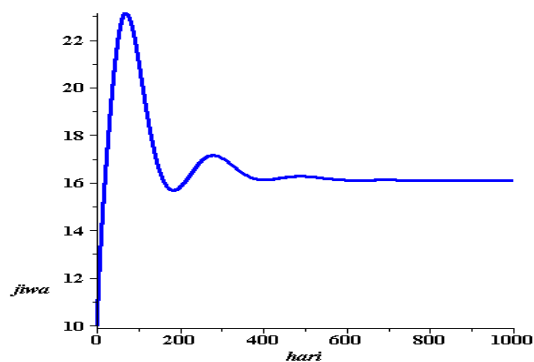
Gambar 7. Grafik S_b pada saat t

Berdasarkan Gambar 7, menunjukkan bahwa populasi burung yang terinfeksi mengalami penurunan disebabkan oleh burung yang terinfeksi menjadi kelompok populasi burung yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke populasi lainnya.



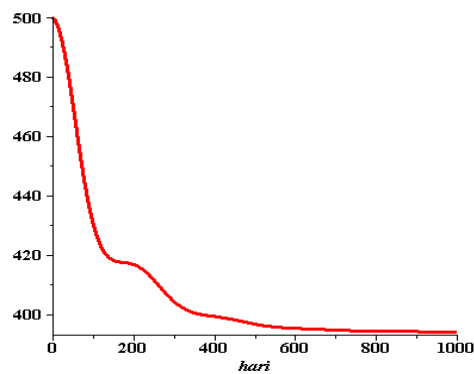
Gambar 8. Grafik I_b pada saat t

Berdasarkan Gambar 8, menunjukkan bahwa kelompok burung yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke populasi lainnya mengalami kenaikan dan stabil pada hari ke 500.



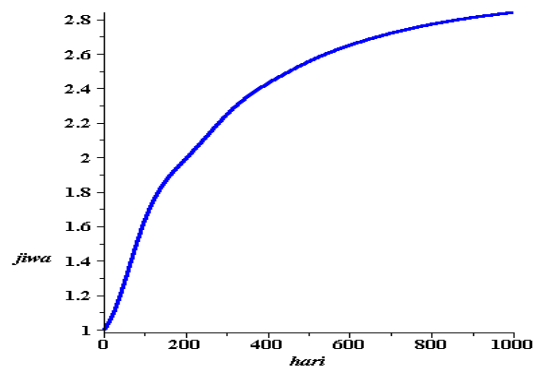
Gambar 9. Grafik S_h pada saat t

Berdasarkan Gambar 9, menunjukkan bahwa populasi manusia yang rentan terhadap flu burung mengalami penurunan pada hari ke 200 dan stabil pada hari ke 500.



Gambar 10. Grafik I_h pada saat t

Berdasarkan Gambar 10 menunjukkan bahwa populasi kelompok manusia yang terinfeksi tetapi tidak menular ke populasi lainnya mengalami penurunan pada hari ke 200 dan setelah hari lebih dari 1000, trayektori sudah berada pada titik kesetimbangannya.



Gambar 11. Grafik R_h pada saat t

Berdasarkan Gambar 11, menunjukkan populasi manusia yang sembuh dan tidak terinfeksi lagi oleh virus flu burung mengalami kenaikan, ini disebabkan kelompok manusia yang terinfeksi tetapi tidak menular ke populasi lainnya sembuh dan menjadi kelompok manusia yang sembuh dan tidak terinfeksi virus flu burung.

5 KESIMPULAN

Berdasarkan rumusan masalah, hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan berikut :

1. Berdasarkan analisis kestabilan model matematika virus flu burung diperoleh bahwa titik setimbangan bebas penyakit adalah $E(S_b, I_b, S_h, I_h, R_h) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$, sedangkan titik setimbangan endemik adalah

$$E^* = \left(\frac{(b+m) \cdot c\omega - b^2 - bm}{\omega}, \frac{\lambda\omega(b+m)}{-\mu\omega(b+m) + \beta(c\omega - b^2 - bm)}, \frac{\beta(c\omega - b^2 - bm)\lambda}{(-\mu\omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)}, \frac{\varepsilon\beta(c\omega - b^2 - bm)\lambda}{\mu(-\mu\omega(b+m) - \beta(c\omega - b^2 - bm))(\varepsilon + d + \mu)} \right)$$

2. a. Berdasarkan analisis kestabilan pada keadaan bebas penyakit untuk $R_0 = 0,1863636 < 1$ pada populasi flu burung *susceptible* mengalami kenaikan hingga $t = 500$ dan pada waktu t ke 100 jumlah populasi burung yang terinfeksi sudah berada pada titik nol. sedangkan pada populasi manusia *susceptible* mengalami penambahan individu pada waktu $t = 500$ karena manusia *susceptible* kehilangan kekebalan sehingga menjadi manusia yang terinfeksi tetapi pada waktu t ke 100 manusia *infected* mengalami penurunan akibatnya lama kelamaan tidak ada lagi manusia yang terinfeksi.
- b. Berdasarkan analisis kestabilan dalam keadaan endemik pada hari ke 500 untuk $R_0 = 0,1863636 > 1$ populasi *susceptible* mengalami penurunan disebabkan oleh burung yang terinfeksi dan pada hari ke 200 populasi kelompok manusia *susceptible* mengalami kenaikan karena kelompok manusia *susceptible* terinfeksi tetapi >1000 hari trayektori sudah berada pada titik kesetimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sya'baningtyas, F. S., Chotim, M., & Kharis, M. (2013). MODEL MATEMATIKA WABAH FLU BURUNG PADA POPULASI UNGGAS DENGAN PENGARUH VAKSINASI. *Unnes Journal of Mathematics*, 2(2).
- [2] Purwanti, S. R. (2010). ANALISA KESTABILAN MODEL DINAMIK PENYEBARAN VIRUS FLU BURUNG PADA POPULASI MANUSIA DAN BURUNG (Doctoral dissertation, Faculty of Mathematics and Natural science).
- [3] Rahmalia, D. (2015). Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Unisa Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, 1(01), 11-19.
- [4] Widowati dan Sutimin, 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro. Semarang.
- [5] Rahmalia, D. 2011. *Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung*. ITS
- [6] Radji, M. 2006. *Avian Influenza A (H5N1): Patogenesis, Pencegahan, dan Penyebaran pada Manusias*
- [7] Nuryaman, A. (2016). Simulasi Numerik Model Matematika Dinamika Reaksi Oksidasi dengan Konsentrasi Gas Umpan Periodik. In *Prosiding Seminar Nasional Sains Matematika Informatika dan Aplikasinya IV* (Vol. 4, No. 4, pp. 139-145). FMIPA Universitas Lampung.
- [8] Rumlawang, F. Y., & Nanlohy, M. I. (2011). Analisa Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Rabies. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 5(2), 39-44.
- [9] Sugiarto, B., Akhmad, A., & Indra, M. (2018). APLIKASI METODE ANALITIS DAN PEMODELAN NUMERIK UNTUK PREDIKSI INTRUSI AIR LAUT DI KABUPATEN JENEPONTO.