UBER DEN EINFLUSS VON METERGROSSE UND MASS ENTRAGHEIT AUF DIE MESSUNG TURBULENTER SPEKTRA MIT DEM HYDROMETRISCHEN FLUGEL

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Rohnisch zum 65. Geburtstage gewidmet

von

Dr.-Ing. Erich J. Plate
Assoc. Prof. of Civil Engineering, Colorado State University
Ft. Collins, Colorado, U.S.A.

May 1967

CER66-67EJP55

UBER DEN EINFLUSS VON METERGRÖSSE UND MASSENTRÄGHEIT AUF DIE MESSUNG TURBULENTER SPEKTRA MIT DEM HYDROMETRISCHEN FLÜGEL

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Röhnisch zum 65. Geburtstage gewidmet

von

Dr.-Ing. Erich J. Plate
Assoc. Prof. of Civil Engineering, Colorado State University
Ft. Collins, Colorado, U.S.A.

May 1967

CER66-67EJP55

ÜBER DEN EINFLUSS VON METERGRÖSSE UND MASSENTRÄGHEIT AUF DIE MESSUNG TURBULENTER SPEKTRA MIT DEM HYDROMETRISCHEN FLÜGEL

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Röhnisch zum 65. Geburtstage gewidmet

von

Dr.-Ing. Erich J. Plate
Assoc. Prof. of Civil Engineering, Colorado State University
Ft. Collins, Colo. U.S.A.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird untersucht, wie aus dem Spektrum der Umdrehungszahlschwankungen eines hydrometrischen Meßflügels das Spektrum der in einem Punkte des Strömungsfeldes achsialen Turbulenz gewonnen werden kann. Die Untersuchung beginnt mit einer Herleitung der Bewegungsgleichung für den Meßflügel. Diese wird benützt, um Korrekturen für die Mittelbildung des Flügels im Raum (infolge der endlichen Grösse des Gerätes) und in der Zeit (infolge der Massenträgheit des Gerätes) abzuleiten.

Die Berücksichtigung des räumlichen Auflösungsvermögens führt auf einen von der Turbulenzfrequenz abhängigen Wirkungsgrad, der von der Art der Turbulenz bestimmt ist, und daher im Allgemeinen analytisch nicht erfassbar ist. Für die Berechnung des Einflusses der Massenträgheit kann von der Bewegungsgleichung des Flügels ausgegangen werden, die durch die Annahme kleiner turbulenter Schwankungen im Vergleich zur mittleren Anströmungsgeschwindigkeit zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten reduziert wird, für die die Gesetzmässigkeiten zwischen Eingangs- und Ausgangsspektra bei linearen Systemen unter der Einwirkung regelloser stationärer Erregerfunktionen gültig sind.

Eine weitere Vereinfachung der Bewegungsgleichung zeigt die Möglichkeit auf, die Systemfunktion durch Erregung des Flügels mit einer Stufenfunktion zu gewinnen. Versuche wurden daher durchgeführt, die Ergebnisse brachten, die gut mit der Theorie übereinstimmen.

Zum Abschluss wird die relative Grösse der beiden Einflüsse abgeschätz und festgestellt, daß für die zur Verfügung stehenden Meßflügel wahrscheinlich die Begrenzung der Anwendbarkeit durch das räumliche Auflösungsvermögen bestimmt ist.

Einleitung

Ein über den Rahmen des bestehenden Wissens hinausgehendes besseres Verständnis der Abflußvorgänge in natürlichen Wasserläufen erfordert Kenntnisse über die turbulente Sekundärbewegung, die zur Zeit nur experimentell gewonnen werden können. Leider stehen nur wenige Meßgeräte für solche Messungen zur Verfügung. Das Hitzdrahtanemometer, das sich in aerodynamischen Laborversuchen tausendfach bewährt hat, kann in natürlichen Gewässern weder in seiner ursprünglichen Form als feiner Platindraht, noch in der Abwandlung als dünner Platinfilm auf einem robusten Trägermaterial, angewendet werden, weil durch unvermeidliche Ablagerungen von Verunreinigungen des Wassers auf dem Platin die Eichung des Gerätes nur sehr kurzzeitig erhalten bleibt. Hinzu kommt die Empfindlichkeit des Gerätes gegen mechanische Beschädigung durch Geschiebeteilchen oder andere im Wasser vorhandene Feststoffe, sodaß die Anwendung des Hitzdrahts auf lange Sicht hinaus noch auf das Labor beschränkt bleiben muss, wo Neueichungen mit relativ geringem Aufwand durchgeführt werden können.

Demgegenüber ist der bewährte Messflügel ein Gerät, das auf Jahre hinaus seine Eichung erhält, selbst bei Anwendung in verschmutzten oder geschiebeführenden Gewässern. Mit modernen Herstellungsmethoden können Flügel hergestellt werden, die kleine Abmessungen und ein geringes spezifisches Gewicht haben, sodass sie sehr wohl auf die turbulenten Geschwindigkeitsänderungen ansprechen. Typische Beispiele sind in Abb. 1 gezeigt. Laboratoriumsversuche, bei denen Messflügel zur Ermittlung von turbulenten Grössen benutzt wurden, liegen bereits von verschiedenen Seiten vor (Jonsson (7), Schuyf (11) ~~Schijf (1966)~~). Diese Messungen wurden mit sehr kleinen, hochempfindlichen Laborpropellern durchgeführt. Dabei wurden die Schwankungen der Flügelumdrehungszahl direkt mit Hilfe der für konstante Geschwindigkeiten gültigen Eichkurve in Geschwindigkeitsschwankungen übersetzt und die aus den Schwankungen ausgewerteten Spektra und Intensitäten der Turbulenz mit turbulenten Grössen aus Windkanalversuchen verglichen, wobei wenigstens qualitative Übereinstimmung festgestellt werden konnte.

Bei den grösseren und schwereren Flügeln, die in einem natürlichen Gewässer benutzt werden müssen, ist eine direkte Übertragung der gemessenen Schwankungen der Umdrehungszahl auf turbulente Geschwindigkeiten nicht möglich, weil durch die Massenträgheit des Instrumentes die höheren Frequenzen der Turbulenz gedämpft werden und weil die Größe des Meters zu einer räumlichen Mittelung führt. Dieser Instrumenteneinfluß muß aus dem Meßergebnis bereinigt werden, damit eine richtige Deutung der Messungen erhalten werden kann. Es entsteht also die Aufgabe, aus dem vom Instrument verfälschten Ausgang des Messinstrumentes, der dem Beobachter allein zur Verfügung steht, rückwärts den unverfälschten Eingang infolge der Turbulenz zu gewinnen. Diese Aufgabe soll in dieser Arbeit behandelt werden.

Zur Lösung dieses Problems wird die vereinfachende Annahme getroffen, dass zunächst die ganze Turbulenz nur in Richtung der mittleren Anströmungsgeschwindigkeit wirkt, die parallel zur Achse des Meßflügels liegt, d.h. daß nur eine achsiale Turbulenzkomponente wirksam ist. Für diesen Fall kann die Bewegungsgleichung für einen Messflügel näherungsweise angegeben werden, wie vom Verfasser vor Kurzem gezeigt wurde (Plate (19)). Die der Herleitung der Bewegungsgleichung zugrundeliegenden Gedankengänge sollen hier zunächst wiederholt werden. Die Bewegungsgleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit einem vom Eingang abhängigen Koeffizienten. Wird diese für einen sinusförmigen Eingang über eine Periode gemittelt, so zeigt sich, dass der Flügel in einer turbulenten Strömung eine grössere Umdrehungszahl ergibt, als es der mittleren Geschwindigkeit entsprochen hätte. Dies Ergebnis stimmt mit Beobachtungen von Fischer (4) überein, der durch einen geeigneten Excenter seine Messflügel in peridische Schwingungen versetzte und gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit durch eine Schlepprinne zog.

Für kleine Schwingungen der Turbulenz, wie sie die Regel sind, kann die Bewegungsgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Beiwerten vereinfacht werden. Diese Gleichung ist die Systemgleichung des Meßflügels. Wird für sie eine willkürlich schwankende Erregerfunktion gewählt, die jedoch kontinuierlich ist, so folgt, dass der Systemausgang in den Eingang umgerechnet werden kann, wenn die Parameter der Bewegungsgleichung angegeben werden können und wenn das räumliche Auflösungsvermögen bekannt ist. Wie dies in praktischen Fällen durchgeführt werden kann, wird an einem Beispiel gezeigt.

Die Bewegungsgleichung des Meßflügels

Wie bei üblichen Propellerberechnungen wird die Bewegungsgleichung für den Meßflügel mit Hilfe eines schmalen Streifens abgeleitet, der aus einem Propellerflügel im Abstande r von der Propellerachse herausgeschnitten wird. Dabei wird angenommen, daß der Flügel in einer turbulenzfreien und stetigen Strömung mit Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u}$ eine Drehzahl n_o hat, die sich mit Hilfe der üblichen, in einer Schlepprinne entstandenen Eichkurve ermitteln läßt. Ist der mittleren Strömung eine turbulente Sekundärströmung überlagert, dann ändert sich mit der momentanen Geschwindigkeit auch die Drehzahl. Für die folgenden Untersuchungen wird jedoch vorausgesetzt, daß die Drehzahländerungen sehr klein sind. Somit entsteht die Aufgabe, zunächst die Strömungsgeometrie mit der Propellerdrehzahl für eine stetige Strömung um das Propellerelement in Beziehung zu setzen, und dann die dynamische Gleichung des Propellers unter der Annahme kleiner Störungen der Umdrehungszahl infolge der Turbulenz abzuleiten. Zur weiteren Vereinfachung wird eine axiale Turbulenz zugrundegelegt, d.h. nur solche turbulenten Geschwindigkeitsänderungen werden berücksichtigt, die parallel zur Geschwindigkeit $\bar{u}$ wirken.

Zur Ermittlung der auf das Propellerelement wirkenden stetigen Strömungskräfte wird die Gleichgewichtsbeziehung für die auf das Propellerstreifenelement wirkenden Kräfte aufgestellt, wie in Abb. 2 gezeigt ist. Auf das Streifenelement wirken ein Widerstand und ein Auftrieb, die formal durch die folgenden Gleichungen definiert sind:

$$dW_o = \frac{1}{2} \varrho \, w_o^2 \, b \, C_{do} \, dr \qquad (1)$$

und

$$dA_o = \frac{1}{2} \varrho \, w_o^2 \, b \, C_{ao} \, dr \qquad (2)$$

wobei b die Streifentiefe und ϱ die Dichte der anströmenden Flüssigkeit ist. Ferner ist w_o die Anströmgeschwindigkeit bezogen auf den Propellerstreifen, d.h. die Relativgeschwindigkeit zwischen Propellerstreifen und Anströmungsgeschwindigkeit $\bar{u}$. Diese wird erhalten, indem dem Strömungsfeld eine Umdrehung mit Winkelgeschwindigkeit $2\pi n_o$ überlagert wird, die der Umdrehung des Propellers entgegenwirkt. Infolgedessen hat die Relativgeschwindigkeit den Betrag:

$$w_o = \frac{\bar{u}}{\cos(\beta - \alpha_o)} = \frac{\bar{u}}{\cos \delta_o} \qquad (3)$$

wobei ß der Anstellwinkel zwischen Propellerstreifen und Propellerachse ist, während α_o der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor w_o und dem Streifenelement des Propellers ist. Der Widerstandsbeiwert des Propellerstreifens ist durch C_{do} gegeben, und C_{ao} ist der Auftriebskoeffizient. Einer theoretischen Ermittlung der Beiwerte C_{ao} und C_{do} stehen erhebliche analytische Schwierigkeiten im Wege, vor allem weil durch die Propellerflügel schraubenförmige Wirbel entstehen, deren Einwirkung auf Widerstand und Auftrieb analytisch nicht einfach zu erfassen ist (siehe z.B. Prandtl (10) S.388). Deshalb werden diese Werte in der folgenden Rechnung als experimentell zu ermittelnde Konstante eingesetzt. Im allgemeinen werden sich diese Werte jedoch mit dem Abstand von der Propellerachse ändern, und ihre Grösse wird von der Flügelform und der Propellerart abhängig sein.

Das Drehmoment infolge ~~von~~ Widerstand und Auftrieb wird durch Projektion dieser Kräfte auf die Umdrehungsrichtung des Propellers gefunden. ~~Aus~~ Das Drehmoment ~~infolge~~ T_o des Propellers~~treifenelements~~ erhält man dann durch Integration über die Länge l des Propellerflügels. Unter Anwendung von Gl. 3 erhält man somit:

$$T_o = s\int_0^l (dL_o \cos\delta_o - dD_o \sin\delta_o) \cancel{r\,b\,dr} = \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2 s\int_0^l \frac{C_{ao}\cos\delta_o - C_{do}\sin\delta_o}{\cos^2\delta_o}\, b\,r\,dr$$

wobei s die Anzahl der Propellerflügel des betrachteten Propellers ist. Diese Gleichung ist auch von Jepson (6) für den Meßflügel angegeben worden. Da für die meisten Flügel für kleine Anstellwinkel der Auftriebsbeiwert proportional zum Anstellwinkel α_o ist, wird gesetzt:

$$C_{ao} = C_o\,\alpha_o \tag{5}$$

Ferner ist der Widerstandsbeiwert praktisch konstant. Wird nun angenommen, daß das auf der Lagerreibung beruhende Drehmoment T_o vernachlässigt werden kann, und daß C_o und C_{do} unabhängig von r sind, dann erhält man die folgende Bestimmungsgleichung für α_o:

$$C_o\alpha_o\cos\delta_o - C_{do}\sin\delta_o = 0 \tag{6}$$

und da α_o ein sehr kleiner Winkel ist, ergibt sich, mit $tg(\beta-\alpha) \approx tg\beta$ -

$$\alpha_o = \frac{C_{do}}{C_o}\,tg\,\delta_o = \frac{C_{do}/C_o}{1+C_{do}/C_o}\,tg\,\beta\,. \tag{7}$$

Der Winkel α_0 bestimmt die Gleichgewichtslage, um die infolge der Turbulenz kleine Abweichungen in der Drehzahl zu kleinen Abweichungen im Anstellwinkel führen. Besteht die Anströmgeschwindigkeit aus der Geschwindigkeit $\bar{u}$ und der parallel zu $\bar{u}$ gerichteten zeitlich veränderlichen Geschwindigkeitskomponente u', dann entsteht eine momentane Änderung der Drehzahl, die jedoch wegen der Massenträgheit des Propellers der Geschwindigkeitsänderung u' nicht direkt folgt. Vielmehr entsteht ein momentaner Anströmungswinkel α, wie in Abb. 3 gezeigt ist, der durch die die folgende Beziehung für den Propellerstreifen bestimmt ist:

$$\frac{v}{u} = \mathrm{tg}\left[\delta_0 - (\alpha - \alpha_0)\right] \quad \text{und} \quad \frac{\bar{v}}{\bar{u}} = \mathrm{tg}\,\delta_0 \tag{8}$$

wobei $v = 2\pi n r$ die Momentangeschwindigkeit des Propellerstreifens ist.

Die Bewegungsgleichung Gl. 4 für die Drehzahl n des in einer turbulenten Strömung eingetauchten Meßflügels wird dann:

$$T = \int_0^l r\,(dA \cos\delta_0 - dW \sin\delta_0)\,\cancel{r\,b\,dr} \tag{9}$$

wobei l die Flügellänge bedeutet und T sowohl aus dem Reibungsanteil als auch aus dem Trägheitsanteil besteht. Wird ersterer wieder vernachlässigt, so erhält man für T:

$$T = 2\pi J \frac{dn}{dt} \tag{10}$$

In dieser Gleichung ist J das Massenträgheitsmoment des im Wasser rotierenden Propellers. Für die Bestimmung des Widerstandes dW und des Auftriebs dA kann man nun jedoch nicht einfach C_{do} und C_{ao} durch Beiwerte C_d und C_a ersetzen. Wie aus der Theorie schwingender Tragflügel in der Aerodynamik bekannt ist, entsteht infolge der Schwingungen sowohl eine zusätzliche induzierte Masse, wie auch ein Widerstandsbeiwert und ein Auftriebsbeiwert, die von der Frequenz der Schwingung abhängig sind. Insbesondere erhält man für eine Propellerfläche, die durch eine zur Strömungsrichtung geneigte Platte dargestellt werden kann, für sinusförmige Schwingungen einen durch folgende Gleichung gegebenen Auftrieb (beispielsweise nach Bisplinghoff, Ashley und Halfman(1)):

$$dA = \left\{ \pi \rho b^2 \ddot{h} \cos\delta_0 + \frac{1}{2} \rho \frac{u^2}{\cos^2\delta_0} C_1(k)\, b\, C_0 \left[\alpha \right] \right\} dr \tag{11}$$

Hierin bedeutet h die Lageänderung der Platte bezogen auf die der konstanten Anströmgeschwindigkeit entsprechenden Lage, und $C_1(k)$ ist ein von der Strouhalzahl der Platte:

$$k = \frac{\omega \bar{b}}{\bar{u}} \tag{12}$$

abhängiger dimensionsloser Faktor. Dieser entsteht durch die Rückwirkung der sich hinter der Platte bildenden Wirbel (mit der Frequenz ω der Schwingung) auf die Strömung um die Platte. Für einen Propeller ist die Wirbelstruktur sicherlich anders als die der Platte, und die für den Fall der Platte angegebenen Werte von $C_1(k)$ können daher nicht direkt auf den Propeller übertragen werden. Dagegen lassen sich die anderen Glieder der Gl.11 sehr wohl auf den Propeller übertragen, und es ergibt sich die Gleichung:

$$2\pi J \frac{dn}{dt} = s \int_0^l \left(\pi \rho b^2 \ddot{h} \cos\delta_0 + \frac{1}{2}\rho \frac{u^2 b}{\cos^2\delta_0} C_1(k)\, C_0\, \alpha \cos\delta_0 - \frac{1}{2}\rho \frac{u^2 b}{\cos^2\delta_0} C_2(k)\, C_{d0} \sin\delta_0 \right) r\,dr \tag{13}$$

bei der der Widerstandsbeiwert durch die Beziehung:

$$C_d = C_{d0} \cdot C_2(k) \tag{14}$$

ausgedrückt wurde. Die Koeffizienten $C_1(k)$ und $C_2(k)$ sind hierbei als bekannt vorausgesetzt, oder sie müssen durch gesonderte Versuche ermittelt werden.

In Gl. 13 erscheint als neue Unbekannte die Grösse $\ddot{h}$. Diese ist durch die Momentangeschwindigkeit $v' = v - v_0$ nach Abb. 3 bestimmt:

$$\dot{h} = v_0 - v = -v' = 2\pi r (n - n_0) \tag{15}$$

und somit erhält man für kleine Winkel α und α_0:

$$\alpha = \operatorname{tg}\beta - \frac{v_0 + v'}{u} \tag{16}$$

$$\alpha - \alpha_0 = \operatorname{tg}\delta_0 - \operatorname{tg}\delta \quad . \tag{17}$$

und mit $\bar{u} = u - u'$, $v_0 = 2\pi r n_0$ und $v = 2\pi r n$:

$$\alpha = \alpha_0 + \left(\frac{v_0}{\bar{u}} - \frac{v}{u} \right) . \tag{18}$$

Nach Gl. 15 gilt ferner:

$$\ddot{h} = - \frac{dv'}{dt} = - 2\pi r \frac{d(n - n_0)}{dt} \tag{19}$$

sodaß man schliesslich die Bewegungsgleichung für den Meßflügel in folgender Form erhält:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{J}{\rho}\frac{dn}{dt} = {} & s\int_0^{\ell} r\pi\,\theta^2\left(\frac{du}{dt}\frac{n_0}{u} - \frac{dn}{dt}\right) r\,dr \\
& + \frac{1}{2}s\int_0^{\ell} \frac{u^2\theta r^2}{\cos\delta_0} C_1(k)\,C_0\left(\frac{n_0}{\bar{u}} - \frac{n}{u}\right)dr \\
& + \frac{1}{2}s\int_0^{\ell} \frac{u^2\theta r}{2\pi\cos\delta_0}\left[C_1(k)\,C_0\,\alpha_0 - C_2(k)\,C_{D0}\,tg\,\delta_0\right]dr
\end{aligned}
\right\} \qquad (20)
$$

Der Klammerausdruck im letzten Integral der rechten Seite , der mit K bezeichnet sei, kann vereinfacht werden, wenn die Anfangsbedingungen Gl. 7 berücksichtigt werden. Es folgt dann:

$$
C_1(k)\,C_0\,\alpha_0 - C_2(k)\,C_{D0}\,tg\,\delta_0 = K = C_{D0}\,tg\,\delta_0\,C_1(k)\left[1 - \frac{C_2(k)}{C_1(k)}\right] \qquad (21)
$$

Wird ferner noch Gl. 8 herangezogen, so ergibt sich mit $v_0 = 2\pi r \cdot n_0$:

$$
K = 2\pi r\,C_{D0}\,\frac{n_0}{\bar{u}}\,C_1(k)\left[1 - \frac{C_2(k)}{C_1(k)}\right] \qquad (22)
$$

und folglich erhält man für das letzte Integral von Gl. 20:

$$
\frac{1}{2}s\int_0^{\ell} \frac{u^2\theta r^2 n_0}{\cos\delta_0\,\bar{u}}\,C_0\,C_1(k)\,\frac{C_{D0}}{C_0}\left[1 - \frac{C_2(k)}{C_1(k)}\right]dr. \qquad (23)
$$

Sowohl u und u' als auch n und n_0 sind von r unabhängig und können daher vor die Integrale gezogen werden. Damit erhält man dann Gl. 20 in der folgenden Form:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{J}{\rho}\frac{dn}{dt} = {} & \left(\frac{du}{dt}\frac{n_0}{u} - \frac{dn}{dt}\right)\cdot \pi s\int_0^{\ell} r^2\theta^2\,dr \\
& + u^2\left(\frac{n_0}{\bar{u}} - \frac{n}{u}\right)\cdot\frac{1}{2}s\int_0^{\ell} \frac{\theta r^2}{\cos\delta_0}\,C_1(k)\,C_0\,dr \\
& + u^2\frac{n_0}{\bar{u}}\cdot\frac{1}{2}s\int_0^{\ell} \frac{\theta r^2}{\cos\delta_0}\,C_1(k)\,C_0\cdot\left[1 - \frac{C_2(k)}{C_1(k)}\right]\frac{C_{D0}}{C_0}\,dr
\end{aligned}
\right\} \qquad (24)
$$

oder in vereinfachter Schreibweise:

$$
\frac{J}{\rho}\frac{dn}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\frac{n_0}{u} - \frac{dn}{dt}\right)M_1 + u^2\left(\frac{n_0}{\bar{u}} - \frac{n}{u}\right)M_2 + u^2\frac{n_0}{\bar{u}}M_3 \qquad (25)
$$

wobei die folgenden Abkürzungen benützt wurden:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \pi s \int_0^{\ell} r^2 b^2 \, dr \cdot \cos^2\delta_0 \, dr \\
M_2 &= \frac{1}{2} s \int_0^{\ell} \frac{b r^2}{\cos\delta_0} C_1(k) C_0 \, dr \\
M_3 &= \frac{1}{2} s \int_0^{\ell} \frac{b r^2}{\cos\delta_0} C_1(k) C_0 \frac{C_{D0}}{C_0} \left[1 - \frac{C_2(k)}{C_1(k)} \right] dr .
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Zur Vereinfachung wird folgende Schreibweise engeführt:

$$
a_2 = \frac{\bar{u} M_2}{\frac{J}{\rho} + M_1} \qquad a_3 = \frac{\bar{u} M_3}{\frac{J}{\rho} + M_1} . \tag{27}
$$

Es gilt ferner die folgende Beziehung:

$$
u^2 \left(\frac{n_0}{\bar{u}} - \frac{n}{u} \right) = \frac{n_0}{\bar{u}} \left[-u\bar{u} \left(\frac{n - n_0}{n_0} \right) + u u' \right] . \tag{28}
$$

Wird weiterhin Gl. 24 noch durch $n_0/\bar{u}$ dividiert, und werden die folgenden Abkürzungen benützt:

$$
u_* = \frac{u'}{\bar{u}} \qquad m = \frac{n - n_0}{n_0} \tag{29}
$$

so erhält man schliesslich:

$$
\frac{dm}{dt} + (u_* + 1) m a_2 = (u_* + 1) u_* a_2 + (u_* + 1)^2 a_3 \tag{30}
$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des hydrometrischen Flügels. Hierin hängt der Koeffizient von m von der Momentangeschwindigkeit ab. Obgleich es sich bei Gl. 30 um eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung handelt, kann daher eine Lösung der Bewegungsgleichung nicht durch Elementarfunktionen angegeben werden. Darüber hinaus wird eine Deutung der Lösung noch erheblich erschwert durch die Abhängigkeit der Koeffizienten a_2 und a_3 von den Strouhalzahl k.

Für die einfachste Art einer Schwankungsbewegung:

$$\frac{u'}{\bar{u}} = a \sin \omega t \tag{31}$$

hat der Verfasser in der zitierten ~~einer~~ früheren Arbeit (   ) die Lösung angegeben. Sie lautet:

$$m = \frac{a_3}{a_2} + a \sin \omega t \left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right) - a\omega e^{-a_2\left(t - \frac{a}{\omega}\cos\omega t\right)} \left[1 + \frac{a_3}{a_2}\right] \int_0^t \cos\omega t \, e^{a_2\left(t - \frac{a}{\omega}\cos\omega t\right)} dt \tag{32}$$

und ist nicht ohne Schwierigkeiten zu deuten. Der Verfasser hat diese Gleichung über eine Periode der Sinusschwingung integriert und einen zeitlichen Mittelwert $\bar{m}$ erhalten:

$$\bar{m} = \frac{a_3}{a_2} + \frac{1}{4\pi} a^2 \left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right) \frac{(\omega/a_2)^2}{1 + (\omega/a_2)^2} + O\left[\frac{a^4}{(\omega/a_2)^4}\right] \tag{33}$$

der ein Maß dafür gibt, wie die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen den Eichwert des Meßflügels verfälschen und scheinbar eine Geschwindigkeit anzeigen, die höher als die tatsächliche mittlere Geschwindigkeit ist. Für einen Wert $a_3/a_2 = 0$, wie er etwa zu erwarten ist, und eine Schwingungsamplitude a, die wesentlich kleiner als 1 ist, ergibt sich somit eine Abweichung der beobachteten Drehzahl von der durch die Eichkurve bestimmten Drehzahl, die mit dem Quadrat der dimensionslosen Turbulenzamplitude a anwächst. Dieses Ergebnis für niedrige Frequenzen ist qualitativ recht gut mit Versuchsergebnissen von Fischer (4) in Einklang, wie in (9) gezeigt wurde.

Anwendung der Bewegungsgleichung auf Turbulenzmessungen

Besteht die Turbulenz nicht aus einer einzigen Sinusbewegung sondern aus einer Überlagerung von einer grossen Anzahl von willkürlich überlagerten Schwankungen, dann kann Gl. 30 nicht mehr gelöst werden. Es ist jedoch aus der Gl. 30 ersichtlich, daß nur Schwankungen u_* einen wesentlichen Einfluß auf die Lösung haben, die etwa 10% betragen. Die einer bestimmten Frequenz ω zugeordnete Turbulenz wird jedoch im allgemeinen viel niedriger liegen, sodaß die Möglichkeit besteht, für die Messung der Turbulenz u_* in Gl. 30 im Vergleich zu $\bar{u}$ zu vernachlässigen. Dann erhält man die vereinfachte Gleichung:

$$\frac{dm}{dt} + a_2 m = \frac{du_*}{dt} + u_* a_2 + a_3 \tag{34}$$

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für die Diskussion der Einwirkung des Messflügels auf die Messung von turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen in axialer Richtung.

Gl. 34 ist für eine achsiale Geschwindigkeit abgeleitet worden, die nur zeitlich veränderlich ist. Diese Vereinfachung trifft jedoch bei Turbulenz nicht zu. Vielmehr muss sowohl die zeitliche als auch die räumliche Schwankung der Turbulenz bei der Beurteilung von Meßergebnissen berücksichtigt werden. Diese Aufgabe lässt sich für das momentane Geschwindigkeitsfeld nicht lösen. Statt dessen muß man mit zeitlichen Mittelwerten arbeiten, die so gewählt werden müssen, dass sie die zweckmässigste Aussage über die Turbulenz machen.

Die statistische Größe, die für praktische Zwecke am brauchbarste n ist, ist zweifellos das Energiespektrum der Turbulenz, weil sich aus dem Energiespektrum die Gesamtenergie der Turbulenz berechnen läßt, und weil sich alle Einwirkungen des Meßflügels auf die Turbulenzmessung am einfachsten im Spektrum korrigieren lassen. Es soll daher untersucht werden, wie das Spektrum der Turbulenz eines Punktes im zu messenden Geschwindigkeitsfeld aus dem mit dem hydrometrischen Flügel bestimmten Spektrum der Umdrehungsgeschwindigkeit gewonnen werden kann.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist Gl. 34. Allerdings muß, zur Berücksichtigung der räumlichen Veränderlichkeit der Turbulenten Geschwindigkeitskomponente u_* , das Produkt $a_2 . u_*$ nach Gl. 20 geschrieben werden:

$$a_2 u_* \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \int_0^{l} u_*(r;t) \, \frac{C_1(k) C_0}{\frac{J}{\rho} + M_1} \, \frac{b r^2}{\cos \delta_0} \, dr \qquad (35)$$

weil die Geschwindigkeit u_* ja nicht länger von r unabhängig ist. Wird nun noch a_3 vernachlässigt, und werden die nicht von r abhängigen Grössen vor das Integral gezogen, so erhält man Gl 34 in der Form:

$$\frac{dm}{dt} + a_2 m = a_2 A \sum_{i=1}^{s} \int_0^{l} u_*(r;t) \, b r^2 \, dr \qquad (36)$$

wobei:

$$A = \frac{1}{2} \frac{C_1(k) \, C_0}{a_2 \left(\frac{J}{\rho} + M_1 \right) \cos \delta_0} \qquad (37)$$

Um den Einfluß der dynamischen Grössen des Messflügels getrennt von der räumlichen Verteilung betrachten zu können, führen wir noch die räumlich gemittelte Geschwindigkeit:

$$u'_*(t) = \sum_{i=1}^{s} A \int_0^{l} u_*(r;t)\, b\, r^2\, dr \tag{38}$$

ein, die von r unabhängig ist. Die Aufgabe ist nun, aus dem Messflügelspektrum das Spektrum von $u_*(r;t)$ zu gewinnen.

Bekanntlich erhält man das Energiespektrum durch Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion. Die Autokorrelationsfunktion, die in diesem Falle von Interesse ist, ist die der Geschwindigkeit $u'_*(t)$, die wie folgt definiert ist:

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u'_*(t)\, u'_*(t+\tau)\, dt \tag{39}$$

und folglich:

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{ \int_0^{l} \sum_{i=1}^{s} A\, u_*(r;t)\, b\, r^2\, dr \cdot \int_0^{l} \sum_{i=1}^{s} A\, u_*(r;t+\tau)\, b\, r^2\, dr \right\} dt \tag{40}$$

Wird in dem einen Integral die Integrationsveränderliche durch r' ersetzt, dann kann das Produkt der Integrale formal durch das Doppelintegral:

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \int_0^{l}\int_0^{l} u_{i*}(r;t)\, b(r)\, r^2\, u_{j*}(r';t+\tau)\, b(r')\, r'^2\, dr\, dr'\, dt \tag{41}$$

ersetzt werden. Da hierin nur die Geschwindigkeiten von der Zeit abhängig sind, so kann die Mittelwertbildung unter dem Integral vorgenommen werden. Wird schliesslich noch die Grösse:

$$R_{ij}(\tau; r, r') = \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^{T} u_{i*}(r,t)\, u_{j*}(r', t+\tau)\, dt \tag{42}$$

eingeführt, so ergibt sich:

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \int_0^{l}\int_0^{l} R_{ij}(\tau; r, r')\, b(r')\, r'^2\, b(r)\, r^2\, dr\, dr' \tag{43}$$

Die Grösse $R_{ij}(r,r';t)$ ist die Kreuzkorrelation zwischen Geschwindigkeiten zur Zeit t im Punkte r des i-ten Flügels und Geschwindigkeiten zur Zeit t+τ im Punkte r' des j-ten Flügels. Gl.43 entspricht einer zuerst von Liepmann (8) angegebenen Beziehung für die Belastung eines Tragflügels durch regellos veränderliche Lasten. Davenport (3) dessen Schreibweise hier gewählt wurde, hat die Ergebnisse von Liepmann auf Bauelemente unter Windlasten übertragen. Der wesentliche Unterschied zwischen Liepmann und Davenports Ergebnissen und Gl. 43

liegt darin, daß sich das Bezugssystem dreht. Ist also die Turbulenz selbst stationär, so wird die Korrelationsfunktion nicht nur durch die Gewichtsfunktion $b(r)r^2$ sondern auch durch die Umdrehung des Systems geändert. Es ergibt sich ein recht verwickelter Zusammenhang zwischen der Korrelationsfunktion $R_0(0;\tau)$, die an einem Punkte gemessen werden kann, (etwa mit einem idealen Instrument, das eine Messung an einem mathematischen Punkt durchführen kann), und der Korrelation R_{ij}, der hier nicht weiter quantitativ verfolgt werden soll, weil selbst eine vollständige quantitative Untersuchung erst dann von Wert sein kann, wenn im Voraus eine Aussage über die Form der stationären Funktion $R_0(0;\tau)$ gemacht werden kann. Es ist daher für den vorliegenden Fall ausreichend, wenn das qualitativ zu erwartende Ergebnis an zwei Extremfällen diskutiert wird.

Zu diesem Zweck sei zunächst das Spektrum $S(\omega)$ der Funktion $R(\tau)$ abgeleitet. Bekanntlich erhält man das Spektrum durch Bildung der Fourier Transformation von $R(\tau)$. Folglich erhält man:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{44}$$

oder:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \int_0^l \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r;r';\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \, b(r') r'^2 b(r) r^2 \, dr \, dr' \tag{45}$$

Es sei weiterhin noch das Spektrum:

$$S_{ij}(r;r';\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r,r';\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{46}$$

eingeführt, sowie das mit $S_0(0;\omega)$ bezeichnete Spektrum, das mit dem idealen Meßinstrument gemessen würde. Damit erhält man Gl. 45 in der folgenden Form:

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \int_0^l \int_0^l S_{ij}(r;r';\omega) \, b(r') r'^2 b(r) r^2 \, dr \, dr' \tag{47}$$

Wird schliesslich noch die Größe:

$$\varphi_{ij}(r,r';\omega) = \frac{S_{ij}(r,r';\omega) \left[\int_0^l b(r) r^2 dr \right]^2}{S_0(0,\omega)} \quad \text{und} \quad \eta(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \int_0^l \int_0^l \varphi_{ij}(r,r';\omega) \frac{b(r') r'^2 \cdot b(r) r^2}{\left[\int_0^l b(r) r^2 dr \right]} dr \, dr' \tag{48}$$

eingeführt, so erhält man die Beziehung zwischen dem mit dem idealen Instrument gemessenen Spektrum und dem Spektrum $S(\omega)$, das mit einem trägheitsfreien Meßflügel gemessen werden könnte:

$$\mathcal{S}(\omega) = \eta(\omega)\cdot S_0(0,\omega) \tag{49}$$

Hierin spielt also $\eta(\omega)$ die Rolle eines Wirkungsgrades für das räumliche Auflösungsvermögen des Meßflügels. Dieser Wirkungsgrad ist im allgemeinen frequenzabhängig, und zwar wird er bei niedrigen Frequenzen näher bei eins liegen als bei hohen Frequenzen. Der Grund hierfür lieg in der Tatsache begründet, das Turbulenzwirbel mit hohen Frequenzen kleine Abmessungen haben, während die großen Wirbel bei den niedrigen Frequenzen liegen. Glücklicherweise liegt bei turbulenten Bewegungen der meiste Teil der Gesamtenergie in den Wirbeln mit ~~hohen Frequen~~ niedrigen Frequenzen, die ~~daher~~ auch am getreuesten wiedergegeben werden. Insbesondere bedeutet, wenn alle Wirbel groß sind im Vergleich zu den Abmessungen des Gerätes, ~~dann bedeutet das,~~ dass das Spektrum S_{ij} praktisch von r und r' unabhängig ist und der Wirkungsgrad nimmt den Wert eins an für alle Frequenzen. Sind dagegen alle Wirbel sehr klein im Vergleich zu den Abmessungen des Meßflügels, dann sinkt der Wirkungsgrad auf null ab: der Meßflügel "sieht" dann nur die mittlere Geschwindigkeit der Strömung. Ein empirisches ~~MM~~ Maß für den Gesamtwirkungsgrad kann dadurch erhalten werden, daß man für einen gegebenen Meßflügel die gemessene Gesamtenergie E_M dividiert durch die wirkliche Gesamtenergie E_t. Dies Verhältnis, das ~~das~~ einem mittleren Wirkungsgrad $\bar{\eta}$ entspricht:

$$\frac{E_m}{E_t} = \int_0^\infty S(\omega)\,d\omega \Big/ \int_0^\infty S_0(0;\omega)\,d\omega = \frac{\int_0^\infty \eta(\omega)\,S_0(0;\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty S_0(0;\omega)\,d\omega} = \bar{\eta} \tag{50}$$

weil ja bekanntlich die Fläche unter dem Spektrum gleich der Gesamtenergie ist, wird umso näher bei eins liegen, je vorherrschender die grossen Wirbel sind. Ein Wirbel ~~xmxSx~~ ist groß im Sinne der Flügelmessung, wenn seine Abmessungen groß im Vergleich zum Flügeldurchmesser D sind. Ein Maß für die grossen Wirbel ist die sogenannte Makrodimension der Turbulenz :

$$\Lambda := \int_0^\infty \mathcal{R}(r)\,dr \tag{51}$$

wobei $\mathcal{R}(r)$ die ~~Ko~~ Autokorrelationsfunktion:

$$\mathcal{R}(r) = \frac{1}{L}\int^{L} \frac{u'(x)\,u'(x+r)}{\overline{u'^2}}\,dx \tag{52}$$

Hierin ist u'(x) die turbulente, achsiale Geschwindigkeitskomponente im Punkte x, und u'(x + r) die gleichzeitig im Punkte x+r auftretende Geschwindigkeitskomponente. Nach Messungen von Schuyf (11) in der Turbulenz hinter Gittern ergibt sich für den Delft-Flügel von Abb.1 ein mittlerer Wirkungsgrad $\overline{\eta}$ von 0,5 bei $\frac{\Lambda}{D}$ = 0,7, der etwa linear auf den Wert eins bei $\frac{\Lambda}{D}$ = 1,5 ansteigt.

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung des Einflusses der Massenträgheit des Propellers auf ~~denxMeßfkk~~ die Messung zu. Im Gegensatz zum Einfluß räumlichen Auflösungsvermögens hängt dieser Einfluss nicht von der Turbulenzstruktur ab, sondern ist durch das Instrument selber gegeben. Bekanntlich gilt für eine lineare Differentialgleichung die folgende Beziehung zwischen dem gemessenen Spektrum $S_m(\omega)$ und dem Eingangsspektrum $S(\omega)$:

$$S_m(\omega) = \left| H(\omega) \right|^2 \cdot S(\omega) \qquad (53)$$

Dabei bedeutet die Funktion $H(\omega)$ die Systemfunktion des linearen, durch die gewöhnliche Differentialgleichung beschriebenen System, in diesem Falle also die aus der linearisierten Gl. 34 entwickelte Systemfunktion Das Eingangsspektrum $S(\omega)$ ist das Spektrum der durch Gl. 38 definierten Geschwindigkeit $u'_*(t)$, das durch Gl. 49 mit dem eigentlich zu messenden Punktspektrum verbunden ist.

Die Systemfunktion $H(\omega)$ wird erhalten, indem das System in Gl. 34 (nach Vernachlässigung von a_3) durch eine sinusförmige Schwankungsbewegung erregt wird. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß a_2 den Koeffizienten $C_1(k)$ enthält. ~~Wiexerwähntxwurde, xist C1(k)xeine~~ Dieser Koeffizient modifiziert nicht nur die Grösse des Auftriebs, sondern führt darüber hinaus ~~dux~~ zu einer Phasenverschiebung zwischen Erregerfunktion und Meßgrösse. $C_1(k)$ ist daher zweckmässig durch eine komplexe Zahl zu ersetzen; und auch für die Erregerfunktion, in diesem Falle also $u'_*(t)$, wird eine komplexe ~~Erregx~~ Funktion, deren Realteil die Sinusfunktion ist, gesetzt. Damit wird auch a_2 eine komplexe Zahl, die wir schreiben:

$$a_2 = G_1 + G_2 i \qquad i = \sqrt{-1} \qquad (54)$$

womit Gl. 34 folgende Form erhält:

$$\frac{dm}{dt} + (b_1 + ib_2)m = (b_1 + ib_2)u_* \tag{55}$$

Dabei wurde wiederum a_3 vernachlässigt. Um einen sinusförmigen Realteil von der Form Gl. 31 zu erhalten, wird die Erregergeschwindigkeit in der Form

$$u_* = -ia\, e^{i\omega t} \tag{56}$$

angesetzt. Dann erhält man für m die folgende Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung Gl. 55:

$$m = a|H(\omega)|\, e^{i(\omega t + \phi)} \tag{57}$$

Hierin bedeutet ~~daxx~~ $|H(\omega)|$ den absoluten Wert der Systemfunktion, der durch:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1^2 + (\omega + b_2)^2} \tag{58}$$

gegeben ist, während der Phasenwinkel ϕ folgender Gleichung:

$$\phi = \operatorname{arctg} = \frac{-\{b_1^2 + b_2(b_2+\omega)\}}{b_1\omega} \tag{59}$$

gehorcht.

Damit ist die Frage nach der Einwirkung des Meßflügels auf die Messung des Turbulenzspektrums formal geläst. Wird noch der Ausdruck für $H(\omega)$ nach Gl. 58 und der Ausdruck für $S(\omega)$ nach Gl. 49 in Gl. 53 eingesetzt so erhält man das Ergebnis:

$$S_m(\omega) = |H(\omega)|^2 \eta(\omega) \cdot S_0(0,\omega). \tag{60}$$

Wie erwähnt, ist die Systemfunktion $H(\omega)$ eine nur von den Abmessungen und dem Material des Meßflügels abhängige Grösse, die daher ein für alle Male durch ein Experiment bestimmt werden kann. Als Versuchsanordnung empfiehlt sich hierfür die Einrichtung von Fischer, nach der der Meßflügel gleichzeitig durch eine Schlepprinne gezogen und in sinusförmige Schwingungen mit Frequenz ω versetzt wurde. Wird bei solchen Versuchen gleichzeitig die Schwankungsgeschwindigkeit, d.h. die zeitliche Ableitung der Flügelposition gegen die momentane Drehzahl auf einem Schreibgerät abgetragen, dann kann der Phasenwinkel ϕ aus der Verschiebung von Eingan

gegen Ausgang bestimmt werden, während sich die Systemfunktion als Verhältnis der beiden Amplituden bei ω , dividiert durch das Amplitudenverhältnis bei $\omega = 0$, ergibt.
Eine Vereinfachung des Ergebnisses erhält man, wenn die Frequenzabhängigkeit von $C_1(k)$ und damit von a_2 vernachlässigt werden kann. Dann ist $b_1 = a_2$ und $b_2 = 0$, und a_2 ist die Eigenfrequenz des Meßflügels ω_n
Folglich ergibt sich die Systemfunktion zu:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad (61)$$

die vollständig durch die Eigenfrequenz bestimmt ist. Liegt die Eigenfrequenz des Meßflügels sehr viel höher als die höchste Frequenz der zu messenden Turbulenz, dann ist der Einfluß des Messgeräts auf die Messung vernachlässigbar klein. Enthält die Turbulenz dagegen wesentliche Energiemenge bei Frequenzen, die höher als die Eigenfrequenz des Meßgerätes liegen, dann wird das Spektrum in verzerrter Form wiedergegeben. Ein Maß für die Verzerrung des Spektrums durch die Massenträgheit des Systems könnte analog zur ~~Äkx~~ Definition des Wirkungsgrades für das Auflösungsvermögen auf empirischem Wege angegeben werden. Das ist jedoch hier nicht erforderlich, weil ja die Form der Korrekturfunktion $H(\omega)$ bekannt ist. ~~Kxxxxxxx~~

Die Einflüsse ~~dex~~ des räumlichen Auflösungsvermögens und der Massenträgheit lassen sich am besten in einer graphischen Darstellung verfolgen, bei der das Spektrum der gemessenen Grösse, der Wirkungsgrad $\eta(\omega)$ und das Quadrat der Systemfunktion gegen die mit der Eigenfrequenz $a_2 = \omega_n$ dimensionslos gemachte Frequenz $\frac{\omega}{\omega_n}$ auf doppelt- logarithmischem Papier abgetragen wird. Das Punktspektrum $S_0(0;\omega)$ erhält man aus dieser graphischen Darstellung, indem man die Logarithmen addiert. Dies ist schematisch in Abb. 4 gezeigt. Beide Einflüsse wirken sich am stärksten bei den hohen Frequenzen aus. Da hier jedoch der Energiegehalt ohnedies niedrig liegt, so kann man erwarten, dass im Allgemeinen ~~xxxxxxxxxxx~~ durch eine Korrektur des gemessenen Spektrums für die Massenträgheit bereits eine genügend gute Korrektur des Spektrums erreicht werden kann, wenn die Aufgabe nur darin besteht, die turbulente Gesamtenergie zu bestimmen. Sollen jedoch Rückschlüsse auch auf die Form des Spektrums bei hohen Frequenzen gezogen werden, so muss noch über diese Korrektur hinaus der Wirkungsgrad η berücksichtigt werden. Hier liegt in der Meinung des Verfassers das schwierigste Problem bei der Messung der Turbulenz mit Meßflügeln, weil für den Wirkungsgrad Angaben nur dann gemacht werden können, wenn die Turbulenzstruktur bereits bekannt ist.

Experimentelle Ermittlung der Meßflügelfaktoren

In diesem Abschnitt soll zunächst eine vereinfachte Beziehung für die nach Gl. 61 die Systemfunktion bestimmende Zeitkonstante $T = 1/a_2$ hergeleitet werden. Dann werden Versuche angegeben, nach denen die Zeitkonstante experimentell durch Stufenfunktionen der Geschwindigkeit ermittelt wurden, und diese mit der theoretischen Beziehung für die Eigenfrequenz verglichen. Schliesslich wird noch die relative Wichtigkeit von Systemfunktion und Auflösungsvermögen diskutiert.
Unter Verwendung von Gl.26 und Gl.27 folgt für die Eigenfrequenz:

$$\omega_A = a_2 = \frac{\bar{u} \int_0^l \frac{b r^2}{\cos \delta_0} C_0 \, dr}{\frac{J}{\rho s \pi} + \int_0^l r^2 b^2 \cos^2 \delta_0 \, dr} C_1(k) \qquad (62)$$

die streng genommen nur für sinusförmige Schwingungen der Geschwindigkeit um den Mittelwert $\bar{u}$ gültig ist. Für andere Erregergeschwindigkeiten, etwa für eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit von null auf den Wert $\bar{u}$, ist die Annahme der kleinen Schwingung im Allgemeinen nicht zulässig, und Gl.62 gilt nur als erste Annäherung. Ferner wird auch die virtuelle Masse einen Wert annehmen, der von der Art der Erregerfunktion abhängig ist, d.h. das Integral unter dem Bruchstrich in Gl.62 kann einen anderen Wert haben, der jedoch in den meisten Fällen sich nicht wesentlich von dem in Gl.62 benutzten Ausdruck unterscheiden wird. Wir können daher mit guter Näherung annehmen, dass Gl.62 auch für einen Geschwindigkeitssprung gültig ist.

In seiner Diskussion der Eigenfrequenz von Propellermetern unter der Einwirkung einer sprunghaften Geschwindigkeitsänderung $\bar{u}$ hat Jepson (6) eine Formel erhalten, die ebenfalls eine Proportionalität zwischen Eigenfrequenz und $\bar{u}$ anzeigt. Im Wesentlichen stimmt Jepson Ergebnis mit Gl. 62 überein, wenn an die Stelle der mittleren Geschwindigkeit der Geschwindigkeitssprung gesetzt wird, und wenn die virtuelle Masse vernachlässigt wird. Ferner hat Jepson keine Strouhalzahlabhängigkeit berücksichtigt, sodaß $C_1(k)$ gleich 1 gesetzt ist. Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen von Grey (5) hat Jepson vor allem versucht, die gegenseitige Beeinflussung der Propellerflügel zu berücksichtigen, d.h. er hat versucht, den Beiwert C_0 mit einer der Gitterwirkung des Propellers entsprechenden Korrektur zu versehen. Diese Wirkung wird hier jedoch durch die empirische Bestimmung des Proportionalitätsfaktors zwischen Geschwindigkeit $\bar{u}$ und Eigenfrequenz erfasst.

Die virtuelle Masse wird im Allgemeinen nur dann vernachlässigbar sein, wenn sie klein im Vergleich zum Massenträgheitsmoment ist. Das ist jedoch bei den sinusförmigen Geschwindigkeitsänderungen nicht der Fall, und es wird vorgezogen, den für die Sinusbewegung gültigen Wert für alle Arten von Geschwindigkeitsänderungen zugrunde zu legen. Es kann gezeigt werden, daß in diesem Fall bei den meisten Meßflügeln die virtuelle Masse einen wesentlich grösseren Einfluß hat als das Massenträgheitsmoment. Wird nämlich in erster Näherung das Massenträgheitsmoment der Nabe im Vergleich zu dem der Propellerflügel vernachlässigt (was besonders bei Messpropellern mit langen Flügeln zulässig ist, wie etwa dem in Abb. 1 gezeigten Delft-Meter), so wird

$$J \approx s \rho_M \int_0^l r^2 b \bar{d} \, dr \qquad \cancel{(35)} \ (63$$

und somit:

$$\omega_A = \bar{u} \frac{\int_0^l \frac{b r^2}{\cos\delta_0} C_0 \, dr}{2\pi \int_0^l r^2 b^2 \left(\frac{\rho_M \bar{d}}{\rho \pi b} + \cos^2\delta_0 \right) dr} C_1(k) \qquad \cancel{(37)} \ (64$$

wobei $\bar{d}$ die mittlere Dicke der Flügel ist.

Für die meisten Messflügel im Wasser ist der Ausdruck $\frac{\rho_M \bar{d}}{\rho \pi b} << 1$, und daher kann in erster Näherung die Massenträgheit im Vergleich z virtuellen Masse vernachlässigt werden. Eine weitere Vereinfachung wird durch Einführung der mittleren Breite

$$\bar{b} = \frac{\int_0^l b^2 r^2 dr}{\int_0^l b r^2 dr} \qquad \cancel{(38)} \ (6$$

erreicht. Da ferner ~~nach~~. gesetzt werden kann:

$$\cos\beta \approx \cos\delta_0 \cancel{\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\bar{u}}{v_0}\right)^2}}} \qquad . \cancel{(39)} \ (6$$

unabhängig von r ~~wegen $\bar{u}/v_0 << 1$~~, und weil ~~sowohl~~ C_0 ebenfalls ~~als auch $C_1(k)$~~) von r unabhängig ist ~~sind~~, folgt schliesslich:

$$\omega_A = \bar{u} \frac{C_0 C_1(k)}{2\pi \bar{b} \cos^3\beta} \qquad \cancel{(40)} \ (6$$

als vereinfachte Formel for die Eigenfrequenz des Propellermeters. Besonders bemerkenswert ist, daß die Propellermasse in dieser Formel nicht mehr erscheint, sodass bei Messflügeln mit langen Flügeln das Herstellungsmaterial nach konstruktiven Gesichtspunkten gewählt werden kann, ohne daß die Wahl des Materials die Turbulenzmessungen beeinflußt.

a. Experimentelle Ermittlung der Zeitkonstanten

Gleichung 34 mit Gl. 62 ermöglicht eine einfache experimentelle Ermittlung der Eigenfrequenz ω_n und liefert damit die Größe, die für die Ermittlung der Trägheitswirkung auf die Turbulenzmessung benötigt wird. Wird nämlich der Messflügel durch eine Stufenfunktion, die aus einer plötzlichen Geschwindigkeitsänderung von Null auf $\bar{u}$ besteht, erregt, dann wird sich nach Gl. 34 die Umdrehungszahl des Propellers exponentiell der der Eichkurve für $u = \bar{u}$ entsprechenden Umdrehungszahl annähern und diese nach einem Zeitabschnitt, der etwa 2 bis 3 Zeitkonstanten entspricht, erreichen. Nach einer Zeitkonstanten erreicht die Umdrehungszahl den Wert $n = 0{,}63 n_o$. Folglich kann man die Zeitkonstante experimentell als die Zeit ermitteln, bei der nach Erregung mit der Stufenfunktion die Umdrehungszahl 63% des Endwertes erreicht hat. Nach diesem Prinzip wurden Versuche zur Bestimmung der Zeitkonstanten mit ~~einem~~ im in Abb. 1 gezeigten Ott- Meter ~~Typ Arkansas~~ durchgeführt.

Die Versuche erfolgten in einem Laborgerinne mit einer Breite von ca. 15 cm und einer Wasserfliesstiefe von ca. 60 cm, in dem durch Änderungen in der Durchflusswassermenge und Einstellung des Endschützes Wassergeschwindigkeiten von 0,3 bis 1 m/s erhalten werden konnten. Durch Messungen mit dem für die Versuche benutzten Flügel konnte fastgestellt werden, daß sich die Geschwindigkeit nur ganz geringfügig über den Durchmesser des Messflügels änderte, sodass die mit dem Flügel gemessene Punktgeschwindigkeit als konstant vorausgesetzt werden konnte. Die Stufengeschwindigkeit wurde ganz einfach dadurch erzeugt, dass der Flügel mit einem dünnen Stab vor Versuchsbeginn festgehalten wurde. Bei Versuchsbeginn wurde der Stab plötzlich entfernt und damit der Messflügel losgelassen. Die Drehzahl wurde als Funktion der Zeit mit einem Schreibgerät Typ Brush Mark III aufgezeichnet. Das Gerät hat eine Papiervorschubgeschwindigkeit von 20 cm/s und eine natürliche Frequenz des Schreibstiftes von 30 Hz.

Der Ott-Flügel war im der Werkstatt des Hydraulischen Laboratoriums der Colorado State University umgeändert worden, sodass jede Umdrehung 60 elektrische Widerstandsänderungen erzeugte, die durch ein zum Delft- Laborflügel gehörendes Gerät Typ Mimosa Nr. 225486 in Pulse umgewandelt wurden. Die Pulse wurden durch ein Hewlett-Packard Typ 500B Frequenzmessgerät in eine der Frequenz proportionalen Analogspannung umgewandelt, die dann mittels des Schreibgeräts aufgezeichnet wurde. Ein typisches Ergebnis ist in Abb. 5 dargestellt. Die Versuchsergebnisse wurden ausgewertet, in dem zunächst die Kurvenordinaten aus dem Aufschrieb abgegriffenwurden. Dann wurde der für $t = 0$ erhaltene Ordinatenwert abezogen und die Differenz e zwischen Maximalordinate e'_{max} und der örtlichen Ordinate e' gebildet und durch e'_{max} dividiert. Der Wert $(e'_{max}-e')/e'_{max}$ wurde schliesslich gegen t abgetragen. Das Ergebnis der Versuchsreihe ist in Abb. 6 gezeigt. Die Kurven folgen recht gut dem theoretisch geforderten exponentiellen Verlauf, und die Zeitkonstante kann aus den Geraden der Abb. 6 bei $(e'_{max}-e')/e'_{max} = 0,6$ abgegriffen werden. In Abb. 7 wurde T gegen $1/\bar{u}$ abgetragen. Die Ergebnisse bestätigen recht gut den nach Gl. 67 geforderten linearen Zusammenhang zwischen $1/\bar{u}$ und T. Mit guter Näherung erhält man die Beziehung:

$$T = 2.3 \, \frac{1}{\bar{u}} \; [sec] \qquad (\bar{u} \text{ in } cm/sec) \tag{68}$$

und somit:

$$\omega_n = \frac{1}{T} = 0.44 \, \bar{u} \tag{69}$$

Dieser Ausdruck muß mit Gl. 67 für den benützten Flügel verglichen werden. Aus den Abmessungen des Flügels erhält man etwa $\cos\beta = 0,85$ und $\bar{b} = 5$ cm. Somit erhält man aus Gl. 67 $C_o = 2,7\pi$, ein Wert, der recht gut mit dem Auftriebsbeiwert $C_o = 2\pi$ für eine unendlich lange, flache Platte übereinstimmt. Die Tatsache, das der Wert höher statt niedriger als der Vergleichswert für eine unendlich lange Platte ist, dürfte auf Experimentierfehler zurückzuführen sein. Genauere Versuche sollen in der näheren Zukunft durchgeführt werden, um diese Frage zu klären.

Ein ähnlicher Flügel wie der hier benützte ist auch von Jepson (6) untersucht worden. Der Flügel hatte eine verhältnismäßig große Nabe, einen Propellerdurchmesser von 2 cm, und war in einer Rohrleitung eingebaut. Die von Jepson zitierten Versuche ergaben eine Zeitkonstante, die ebenfalls umgekehrt proportional zur Stufengeschwindigkeit war, mit einem Proportionalitätsfaktor von 2 cm, also durchaus im Bereich der vorliegenden Versuche. Weiterhin hat Schuyf (11) bei einem Delft-Meßflügel eine Eigenfrequenz von 25 Hz(?) bei einer Geschwindigkeitsstufe von 5,6 m/s gefunden, woraus sich ein Proportionalitätsfaktor zwischen T und $1/\bar{u}$ von 0,27 cm berechnet. Schuyf benutzte für seine Versuche eine sehr steife Feder, an derem freien Ende der Meßflügel befestigt war. Die Feder wurde bei Beginn des Versuches durch einen Draht in ausgelenkter Lage gehalten, und durch Durchbrennen des Drahtes in Bewegung gesetzt. Diese Versuchsanordnung ergibt Belastung durch eine Impulsfunktion, die durch die Eigenschwingung der Feder in eine gedämpfte Schwingung umgewandelt wurde, sodass die Versuche recht schwierig zu deuten sind. Für den Delft-Flügel beträgt die nach Gl. 65 berechnete mittlere Breite $\bar{b}$ etwa 0,6 cm. Somit zeigt sich, daß das Verhältnis der mittleren Breiten des Ott- und des Delftflügels von 0,12 fast genau dem Verhältnis der entsprechenden Proportionalitätsfaktoren (= 0,117) entspricht. Es kann hieraus geschlossen werden, daß ein Meßgerät mit günstigsten Abmessungen vor allem dadurch entsteht, daß die mittlere Flügelbreite so klein wie möglich gehalten wird.

Zum Abschluss soll noch ein Versuch gemacht werden, die relative Bedeutung von räumlichem Auflösungsvermögen zu zeitlicher Abhängigkeit zu bestimmen. Hierfür sei vorausgesetzt, dass die Turbulenzwirbel etwa Zigarrförmig geformt sind, mit einer Länge, die etwa gleich der 10-fachen Breite und Höhe ist. Solche Wirbel werden mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ am Meßflügel vorbeigetrieben. Ein Maß für die räumliche Ausdehnung ist durch die Wirbelgrösse gegeben, die gleich dem Durchmesser des Meßflügels in Querrichtung ist, d.h. L = D, wobei D der Flügeldurchmesser und L die Wirbelbreite ist. Ein Wirbel von der Breite L hat etwa eine Länge von 10 L, die wiederum durch die Beziehung:

$$\omega = \frac{2\pi\bar{u}}{10L} \tag{70}$$

auf eine Frequenz bezogen werden kann. Folglich erhält man für die Frequenz des Wirbels von der Breite L = D die Beziehung:

$$\omega_r = 0.63\,\frac{\bar{u}}{D} \tag{71}$$

Ein Maß für die relative Bedeutung der räumlichen Auflösung im Vergleich zur Massenträgheit wird durch das Verhältnis ω_r/ω_n erhalten; nach Gl. 71 und Gl. 67 folgt:

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = 4\,\frac{\cos^3\beta}{C_0 C_1(k)}\,\frac{\bar{b}}{D} \tag{72}$$

Für den hier untersuchten Ott-Flügel folgt:

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = 0.48 \tag{73}$$

und für den Delft-Flügel:

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = 0.085 \tag{74}$$

sodaß für beide Meter das räumliche Auflösungsvermögen beschränkter is
als die Trägheitswirkung.

Literatur

1. R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, und R.L. Halfman: "Aeroelasticity" Addison- Wesley Publishing Co., Cambridge, Massachussets, 1955

2. B. Chaix:"Field and laboratory tests concerning the effect of turbulence on various current meters" U.S.Army Engineers Waterways E periment Station, Corps of Engineers, Vicksburg, (Übersetzung) April 1966

3. A.G. Davenport:" The response of slender, line like structures to a gusty wind" Institute of Civil Engineers, London, Proceedings 1962, S.387

4. M. Fischer:" Versuche über den Einfluß der turbulenten Strömung auf hydrometrische Flügel durch Nachahmung der Turbulenz im Schle tank" International Current MeterGroup, Bericht Nr. 20, East Kilbridge, Glasgow: National Engineering Laboratory, 1966

5. T. Grey:"The transient response of turbine type flow meters" Jet Propulsion, Februar 1956

6. P. Jepson:" Transient response of helical flow meters" Journal of Mechanical Engineering Science, Bd. 6 Nr.4 1964, S.337-342

7. I.G. Jonsson"On turbulence in open channel flow" Acta Polytechnic Scandinavia, Civil Engr. Ser. Nr. 31, Kopenhagen 1965

8. H.W. Liepmann "On the application of statistical concepts to the buffeting problem" Journal of Aeronautical Sciences, Bd. 19, Nr. 12, 1952, S. 793

9. E.J. Plate "The effect of axial velocity fluctuations on the response of a helical flow meter" International Association of Hydraulic Research, Ft. Collins Konferenz, September 1967 (im Druck)

10. L. Prandtl:"Führer durch die Strömungslehre" 6.Aufl. Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1965

11. J.P. Schuyf"The measurement of turbulent velocity fluctuations wi a propeller type current meter" Journal of Hydraulic Research, Bd. 5, Nr.2, 1966 S.37-53

Liste der Abbildungen

$$\frac{dm}{dt} + a_2 m = u_* a_2 \qquad \text{für } a_2 = \text{const},$$

$$u_* = \alpha \sin \omega t \qquad m = A(\omega)\sin(\omega t + \phi) \qquad A(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{a_2}\right)^2}} \qquad \tan\phi = -\frac{\omega}{a_2}$$

$$\frac{dm}{dt} + a_2 m = u_* a_2 \qquad \text{für } a_2 = a + bi \qquad m = (\beta + i\gamma)e^{i\omega t}$$

$$\gamma = \frac{a^2 d}{a^2 + (b+\omega)^2} \qquad \beta = -d\, a^2\omega$$