



Université Mohamed Khider – Biskra, Algérie
Université de Reims Champagne Ardenne, France



THÈSE EN CO-TUTELLE

Présentée à l'université de Biskra
Pour Obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences
Université Mohamed Khider - Biskra

Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne

Option: Génie Mécanique

Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Éléments Finis Spéciaux

par :

Lakhdar SEDIRA

Soutenue publiquement le 02 Juin 2013

Devant le jury composé de:

Noureddine MOUMMI	Professeur	Président	UMK, Biskra (Algérie)
Jean Louis BATOZ	Professeur	Rapporteur	UT, Compiègne (France)
Fodil.HAMMADI	Maître de Conférences (A)	Rapporteur	U. de Bechar (Algérie)
Hocine.KEBIR	Maître de Conférences, HDR	Examineur	UT., Compiègne (France)
Rezak.AYAD	Professeur	Directeur de Thèse	URCA, Reims (France)
Mabrouk.HECINI	Professeur	Directeur de Thèse	UMK, Biskra (Algérie)
Daniel. SCIDA	Maître de Conférences	Invité	URCA, Reims (France)

A mes parents, mes frères et sœurs

A ma femme Lamia, et mes enfants Fadi,

Serine et Yousef.

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé conjointement entre l'université de Biskra (Algérie) et l'université de Reims Champagne-Ardenne (France).

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse qui m'ont encadré durant la période de la thèse.

Le professeur Rezak AYAD, directeur de thèse en France (URCA), pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour sa patience et son encouragement à mener au bien ce travail, en m'accueillant dans son équipe avec un soutien scientifique et humain qui dépasse largement cette thèse.

Le professeur Mabrouk HECINI, directeur de thèse en Algérie, d'avoir su m'encourager à finir ce travail, de m'avoir donné la possibilité de relancer le projet de cette thèse, pour sa constance et ces qualités humaines. Je leur dis, tous les deux, merci infiniment.

Je suis particulièrement reconnaissant à:

- Monsieur le professeur Jean Louis BATOZ de l'université de Technologie de Compiègne de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteur de cette thèse.
- Monsieur le rapporteur Fodil HAMMADI, Maître de conférences de l'université de Bechar, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail et d'avoir accepté de participer au jury.
- Monsieur le professeur Nouredine MOUMMI de l'université de Biskra, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Monsieur Hocine KEBBIR, maître des conférences (HDR) de l'université de Technologie de Compiègne, pour avoir accepté de juger mon travail et participer au jury.
- Un remerciement particulier à Monsieur Daniel SCIDA, Maître de conférences et chef de département de Génie mécanique et productive à l'IUT de Troyes, d'avoir accepté notre invitation et participer au jury.

- Une grande partie de cette thèse s'est déroulée à l'université de Reims. Je souhaite par conséquent remercier le professeur Jean-Paul CHOPART, directeur du Laboratoire LISM (Laboratoire d'Ingénierie et Sciences des Matériaux) et de l'école doctorale, de m'avoir accueilli durant la période de la finalisation de ma thèse, ce qui m'a permis de travailler efficacement. Je voudrais également adresser mes remerciements à tous les membres du laboratoire LISM et LGM (Laboratoire de Génie Mécanique), thésards,

- permanents, techniciens et secrétaires, pour leurs collaboration et l'ambiance amicale dans les groupes.
- L'intégration des éléments développés dans le code ABAQUS n'aurait pas été possible sans l'implication de mes collègues: Messieurs Wajdi ZOUARI et Mustapha ASSARAR que je souhaite également remercier pour tout le travail réalisé et l'accueil convivial à IUT de Troyes.
 - Je voudrais remercier toute l'équipe de l'école doctorale: directeurs, responsables et secrétaires, d'avoir veillé à la bonne formation dans notre parcours doctoral, pour leur présence et leur soutien administratif. Je suis très reconnaissant à Madame Estelle ODINOT de l'effort considérable dédié à la gestion de notre parcours de la thèse.
 - Merci également aux personnels du CROUS de Reims, qu'ils étaient très accueillants pendant mon séjour de dix-huit mois. Un remerciement particulier à la responsable du service des relations internationales, Madame Sylvie PERIQUET, qui a veillé à nous assurer les meilleures conditions de vie, sa présence a été remarquable dans notre intégration culturelle et sociale.

Mes remerciements vont particulièrement à:

Monsieur Kamel MEFTAHA, le plus ancien ami, pour son soutien moral et scientifique durant notre parcours doctoral, d'avoir su me présenter la réalité de manière à en dégager les aspects plaisants et insolites.

Mes collègues et amis, rencontrés dans le cadre de travail, surtout Belkacem BOUMARAF, Salim MAATALAH, Abdelmonem ELOUAER, Lyamine MESSADIA et Mamadou, pour leur soutien moral, ayant se partagés des meilleurs moments.

A mes parents qui ont toujours su me soutenir et me remotiver au cours de mes études longues et pas toujours simples.

A mon épouse et mes enfants, d'avoir donné un sens à mes efforts, et pour leur patience et encouragement.

Enfin, je ne manquerai pas de remercier les ministères Algérien et Français de l'enseignement supérieur, pour m'avoir octroyé une bourse PROFAS-B «ex- BAF» de dix huit et qui m'ont permis de finaliser cette thèse doctorale.

Table des matières

NOTATIONS	VII
LISTE DES FIGURES	IX
LISTE DES TABLEAUX	XII
INTRODUCTION GENERALE	1
1 INTRODUCTION	1
2 OBJECTIFS DE LA THESE	2
3 PLAN DE LA THESE	3
CHAPITRE 1 THEORIES AUX ELEMENTS FINIS DES PLAQUES ET COQUES COMPOSITES. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE .	5
1.1 INTRODUCTION	5
1.2 THEORIES DE MONOCOUCHE EQUIVALENTE, PAR COUCHE	6
1.3 THEORIES GLOBALES DE DEFORMATIONS ET LEURS FORMULATIONS PAR ELEMENTS FINIS	7
1.3.1 <i>Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre</i>	9
1.3.2 <i>Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur</i>	9
1.3.3 <i>Eléments finis basés sur les théories du premier ordre</i>	13
1.3.4 <i>Eléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur</i>	17
1.4 CONDITIONS C_z^0 : L'ANISOTROPIE TRANSVERSE, L'EFFET DU ZIGZAG ET LA CONTINUTE INTER LAMINAIRE	19
1.4.1 <i>Théories de zigzag</i>	21
1.4.2 <i>Eléments finis d'ordre supérieur vérifiant les critères de continuités</i>	29
1.5 THEORIES PAR COUCHE ET LEUR RAFFINEMENT	32
1.5.1 <i>Théories par couche</i>	32
1.5.2 <i>Théories Global /Local</i>	35
1.6 CONCLUSION	40
CHAPITRE 2 MODELE DISCRET EN DEPLACEMENTS AVEC UNE FONCTION ZIGZAG POUR LES PLAQUES COMPOSITES. FORMULATION THEORIQUE	43
2.1 INTRODUCTION	43
2.2 FORMULATION THEORIQUE DE L'ELEMENT FINI DISCRET DE PLAQUE AVEC ZIGZAG DMQPZ	44
2.2.1 <i>Champs des déplacements</i>	44
2.2.2 <i>Champs des déformations</i>	47
2.2.3 <i>Equations de l'équilibre statique et efforts résultants-déformations</i>	51
2.2.4 <i>Elimination des variables $\Delta\beta_{sk}$</i>	52

2.2.5	<i>Matrice de rigidité élémentaire</i>	58
2.3	CALCUL DES CONTRAINTES PLANES ET DE CISAILLEMENT TRANSVERSAL	59
2.4	FORMULATION DE LA MATRICE MASSE ELEMENTAIRE DU MODELE PLAQUE COMPOSITE	61
2.5	CONCLUSION	62
CHAPITRE 3	VALIDATION NUMERIQUE DU MODELE DE PLAQUES COMPOSITES DMQPZ	63
3.1	INTRODUCTION	63
3.2	RESULTATS DES CAS TESTS STANDARDS DE PLAQUES MULTICOUCHES STRATIFIEES/SANDWICH	64
3.2.1	<i>Plaques stratifiées composites à 3 et 9 couches</i>	64
3.2.2	<i>Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme</i>	70
3.2.3	<i>Plaque carrée et rectangulaire avec deux types de charges</i>	73
3.2.4	<i>Plaque carrée sandwich (f/c/f), charge uniforme</i>	80
3.2.5	<i>Plaque carrée sandwich (f/c/f) sous chargement sinusoïdal</i>	84
3.2.6	<i>Plaque carrée sandwich (f(0,90),c, f(90,0)) sous charge uniforme</i>	86
3.3	TESTS DE VIBRATIONS LIBRES DES STRUCTURES COMPOSITES	88
3.3.1	<i>Plaque carrée isotrope simplement supportée</i>	88
3.3.2	<i>Plaque carrée sandwich simplement supportée</i>	90
3.3.3	<i>Carton ondulé</i>	91
3.3.4	<i>Plaque carrée multicouche croisée (0/90/90/0)</i>	96
CHAPITRE 4	FORMULATION THEORIQUE DU MODELE DE COQUES COMPOSITES A EFFET ZIGZAG	101
4.1	INTRODUCTION	101
4.2	DESCRIPTION GEOMETRIQUE D'UNE COQUE	102
4.2.1	<i>Description d'un point sur la surface moyenne</i>	102
4.2.2	<i>Description d'un point quelconque de la coque</i>	104
4.3	CHAMPS DE DEPLACEMENTS VIRTUELS	106
4.4	EXPRESSIONS DE DEFORMATIONS VIRTUELLES	107
4.4.1	<i>Représentations des déformations</i>	111
4.5	MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE	115
4.5.1	<i>Matrice de rigidité fictive</i>	117
4.5.2	<i>Passage au repère global</i>	118
4.6	CALCUL DES CONTRAINTES	118
4.6.1	<i>Calcul des dérivées d'efforts résultants</i>	121
4.7	FORMULATION DE LA MATRICE MASSE ELEMENTAIRE DU MODELE DDM DES COQUES COMPOSITES	123
CHAPITRE 5	VALIDATION NUMERIQUE DES MODELES DE COQUES COMPOSITES AVEC ET SANS EFFET ZIGZAG	126
5.1	INTRODUCTION	126

5.2	APPLICATIONS AUX STRUCTURES COQUES ISOTROPES	126
5.2.1	<i>Cylindre pincé avec diaphragme</i>	126
5.2.2	<i>Poutre vrillé sous chargement concentré</i>	130
5.2.3	<i>Hémisphère pincé sous chargement diamétralement opposées</i>	132
5.2.4	<i>Paraboloïde hyperbolique</i>	133
5.3	APPLICATIONS AUX STRUCTURES COQUES COMPOSITES (STRATIFIES MULTICOUCHES, SANDWICHES).....	134
5.3.1	<i>Cylindre orthotrope sous pression</i>	134
5.3.2	<i>Plaque sandwich non-symétrique</i>	136
5.3.3	<i>Cylindre multicouche croisé</i>	138
5.4	ETUDE DE VIBRATIONS LIBRES DE STRUCTURES COMPOSITES.....	139
5.4.1	<i>Vibrations libres d'une aube de compresseur isotrope</i>	139
5.4.2	<i>Vibrations libres de panneaux composites</i>	140
CHAPITRE 6	MODELE DISCRET DE COQUE NON-LINEAIRE GEOMETRIQUE. FORMULATION ET EVALUATION	144
6.1	INTRODUCTION	144
6.2	FORMULATION VARIATIONNELLE LAGRANGIENNE ACTUALISEE A CHAQUE ITERATION (FLAI).....	144
6.2.1	<i>La matrice de rigidité linéaire</i>	146
6.2.2	<i>La matrice de rigidité géométrique de l'élément DMQS</i>	146
6.2.3	<i>Vecteur de forces résiduelles</i>	147
6.3	PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS	147
6.3.1	<i>Poutre console sous chargement de flexion</i>	148
6.3.2	<i>Panneau cylindrique articulé</i>	151
6.3.3	<i>Hémisphère pincé</i>	156
6.3.4	<i>Panneau encastré</i>	160
	CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	162
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	164
ANNEXE A	176
A.1	RELATIONS CONTRAINTES-DEFORMATIONS SELON LA THEORIE DE MINDLIN- REISSNER	176
A.1.1	<i>Plaque homogène isotrope</i>	176
A.1.2	<i>Plaque composite (stratifiée)</i>	176
A.2	CALCUL DES FACTEURS DE CORRECTION DU CISAILLEMENT TRANSVERSE POUR LES PLAQUES STRATIFIEES/SANDWICH.....	177
ANNEXE B ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.	
B.1	COMPOSANTES DES VITESSES D'UN POINT QUELCONQUE \mathbf{q} D'UNE PLAQUE ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.	

Notations

X, Y, Z	Repère cartésien global
x, y, z	Repère cartésien local
ξ, η, ζ	Repère naturelle
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Base du repère global
$(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$	Base du repère cartésien local
$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n})$	Base covariante (naturelle) au point p
$(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{n})$	Base contravariante (duale) au point p
\vec{n}	Normale locale
L, T, z	Repère d'orthotropie
\vec{X}_p	Vecteur position d'un point de la surface moyenne
\vec{X}_q	Vecteur position d'un point quelconque
x_i, y_i, z_i	Coordonnées cartésiennes du nœud i
u, v, w	Déplacements d'un point de la surface moyenne de la coque
u_i, v_i, w_i	Déplacements nodaux du nœud i .
u_1^M, u_2^M	Déplacements dus au zigzag d'un point quelconque
$\langle u_n \rangle, \langle U_n \rangle$	Vecteur des degrés de liberté nodaux dans le repère local et global
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotations autour des axes x, y et z
dV	Élément de volume
dA	Élément de la surface moyenne de la coque ou de la plaque
h	Épaisseur
$\langle \sigma \rangle$	Vecteur des contraintes planes
$\langle \tau \rangle$	Vecteur des contraintes du cisaillement transverse
$\langle e \rangle$	Vecteur des déformations de membrane
$\langle \chi \rangle$	Vecteur des courbures de flexion
$\langle \varepsilon \rangle$	Vecteur des déformations planes
$\langle \gamma \rangle$	Vecteur des déformations du cisaillement transverse
$\langle N \rangle$	Effort normal
$\langle M \rangle$	Moment de flexion
$\langle T \rangle$	Effort tranchant
$\langle H_p \rangle$	Effort dans le plan dû au zigzag

$\langle H_T \rangle$	Effort tranchant dû au zigzag
$[\sigma]$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$[S]$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce
$[E]$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
$[F]$	Tenseur gradient de déformations
$[L]$	Tenseur gradient de déplacements
W_{int}	Travail virtuel interne
W_{ext}	Travail virtuel externe
$\{R\}$	Vecteur de forces résiduelles (hors-équilibres)
« * »	Grandeur virtuelle
$\frac{\partial}{\partial x}$ ou « ,x »	Dérivation partielle par rapport à x
dx	Différentielle ou incrément
δx	Variation
Δx	Accroissement
N_i	Fonctions d'interpolation
J	Jacobien
j	Jacobien inverse
$[k]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[k_i^e]$	Matrice tangente (élémentaire)
$[k_l^e]$	Matrice de rigidité linéaire
$[k_o^e]$	Matrice de rigidité géométrique (des contraintes initiales).
$[M]$	Matrice masse
λ	Valeur propre
ω	Fréquence propre
ρ	Masse volumique
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
E_1, E_2, E_3	Modules d'Young dans les directions d'orthotropie 1, 2 et 3
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Modules de cisaillement dans les plans 1-2, 1-3 et 2-3
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	Coefficients de Poisson
h_k	Epaisseur de la couche k
nc	Nombre des couches

Liste des figures

<i>Figure 1.1 Théories des plaques multicouches, Conditions C_z^0</i>	7
<i>Figure 1.2 Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche.</i>	8
<i>Figure 1.3 Différentes approches globales de la formulation des plaques multicouches</i>	11
<i>Figure 1.4 Les conditions C_z^0, Comparaison de champs des déplacements et des contraintes transverses dans des structures monocouche et à trois couches</i>	20
<i>Figure 1.5 Notation détaillée des contraintes sur les interfaces</i>	21
<i>Figure 1.6 Configuration du déplacement selon l'approche de Cho</i>	26
<i>Figure 1.7 Représentation géométrique de la fonction zigzag de Murakami, structure à quatre couches</i>	28
<i>Figure 1.8. Segment schématique d'une plaque multicouche</i>	38
<i>Figure 2.1 Cinématique du modèle de Reissner-Murakami-Carrera avec zigzag, déplacement u</i>	45
<i>Figure 2.2 Cosinus directeur sur un bord élémentaire k</i>	46
<i>Figure 2.3 Interpolation des rotations aux mi- côtés</i>	47
<i>Figure 2.4 Elément DMQPz de plaques multicouches</i>	47
<i>Figure 2.5 Déformations de CT de bords</i>	51
<i>Figure 2.6 hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire $i-j$</i>	56
<i>Figure 3.1 Plaque carrée multicouche, données du problème.</i>	65
<i>Figure 3.2 Influence de l'éclatement a/h sur la flèche au centre de la plaque carrée composite à 3 couches simplement supportée.</i>	66
<i>Figure 3.3 Distribution de la contrainte de cisaillement τ_{yz} le long de l'épaisseur, plaque à 3 couches, $S=4$.</i>	68
<i>Figure 3.4 Distribution de la contrainte de cisaillement τ_{xz} le long de l'épaisseur, plaque à 3 couches, $S=4$.</i>	69
<i>Figure 3.5 Distribution de la contrainte de cisaillement τ_{yz}, plaque à 9 couches, ($S=4$)</i>	69
<i>Figure 3.6 Distribution de la contrainte de cisaillement, τ_{xz}, plaque à 9 couches, $S=4$</i>	70
<i>Figure 3.7. Plaque sandwich, données du problème.</i>	71
<i>Figure 3.8 Plaque rectangulaire composite à 3 couches, simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal</i>	73
<i>Figure 3.9. Déplacement plan suivant l'épaisseur de la plaque multicouche, $a/h = 4$</i> 77	77

<i>Figure 3.10. Distribution de la contrainte plane suivant l'épaisseur de la plaque multicouche, $a/h = 4$</i>	<i>77</i>
<i>Figure 3.11 Distribution de la contrainte de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque, $a/h = 4$</i>	<i>78</i>
<i>Figure 3.12 Distribution de la contrainte de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque, $a/h = 4$</i>	<i>78</i>
<i>Figure 3.13 Plaque sandwich à un seul cœur $f/c/f$.....</i>	<i>81</i>
<i>Figure 3.14 Contrainte du cisaillement transverse τ_{yz} au point B, cas 1.</i>	<i>83</i>
<i>Figure 3.15 Contrainte du cisaillement transverse τ_{yz} au point B, cas 2.</i>	<i>83</i>
<i>Figure 3.16 Contrainte du cisaillement transverse τ_{xz} au point $D(0, a/2, z)$, maillage 6×6.</i>	<i>87</i>
<i>Figure 3.17 Plaque carrée isotrope simplement supporté, influence de a/h sur la fréquence propre ω_1</i>	<i>89</i>
<i>Figure 3.18 Montage expérimentale de vibration libre d'une plaque rectangulaire en carton ondulé.....</i>	<i>91</i>
<i>Figure 3.19. Accélération du point P. Plaque de longueur $L = 200$ mm</i>	<i>92</i>
<i>Figure 3.20. FFT de l'accélération du point P. Plaque de longueur $L = 200$ mm</i>	<i>93</i>
<i>Figure 3.21 Vibrations libres du carton ondulé ($L = 100$ mm), les six premiers modes propres.</i>	<i>94</i>
<i>Figure 3.22 Variation de la première pulsation propre pour différents longueurs de la plaque.</i>	<i>95</i>
<i>Figure 3.23 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encastree, fréquence ω_1, $S=5$.....</i>	<i>99</i>
<i>Figure 3.24 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encastree, fréquence ω_6, $S=5$.....</i>	<i>99</i>
<i>Figure 3.25 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encastree, Fréquence ω_1, $S=10$.....</i>	<i>100</i>
<i>Figure 3.26 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encastree, Fréquence ω_6, $S=10$</i>	<i>100</i>
<i>Figure 4.1 Discrétisation géométrie d'une coque avec un ... élément quadrilatère courbe</i>	<i>102</i>
<i>Figure 4.2 vecteurs de bases</i>	<i>103</i>
<i>Figure 4.3 Présentation des rotations sur les côtés</i>	<i>107</i>
<i>Figure 5.1 Cylindre pincé avec diaphragmes, données géométriques et mécaniques ..</i>	<i>127</i>
<i>Figure 5.2 Cylindre pincé avec diaphragmes: déformée globale d'un huitième du cylindre (12×12).....</i>	<i>127</i>
<i>Figure 5.3 Cylindre pincé. l'allure du déplacement normal W le long des côtés DC et BC.</i>	<i>128</i>
<i>Figure 5.4 Cylindre pincé avec diaphragmes, déformée globale, maillage avec l'élément DMQS (32×100) sur Abaqus.</i>	<i>129</i>
<i>Figure 5.5 Poutre vrillée. Données.....</i>	<i>130</i>
<i>Figure 5.6 Hémisphère pincé. Données</i>	<i>132</i>

<i>Figure 5.7</i>	<i>Paraboloïde hyperbolique, données du problème</i>	133
<i>Figure 5.8</i>	<i>Paraboloïde hyperbolique, convergence du déplacement normal W_0</i>	134
<i>Figure 5.9</i>	<i>Cylindre orthotrope. Géométrie et données.</i>	135
<i>Figure 5.10</i>	<i>Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniformément répartie, données du problème.</i>	136
<i>Figure 5.11</i>	<i>Distribution de la contrainte τ_{xz} suivant l'épaisseur de la plaque sandwich non symétrique ($L/h = 10$).</i>	137
<i>Figure 5.12</i>	<i>Cylindre simplement supporté sous chargement doublement sinusoïdal, données géométriques.</i>	138
<i>Figure 5.13</i>	<i>Modèle simplifié d'aube de compresseur, données géométriques et mécaniques</i>	140
<i>Figure 5.14</i>	<i>Panneau composite, données géométriques et matérielles.</i>	141
<i>Figure 5.15</i>	<i>Fréquences propres de panneaux cylindriques composites.</i>	142
<i>Figure 6.1</i>	<i>Poutre console sous chargement de flexion, géométrie et chargement.</i>	148
<i>Figure 6.2</i>	<i>Panneau cylindrique articulé, géométrie et données.</i>	151
<i>Figure 6.3</i>	<i>Convergence du déplacement aux points A et B ($h=12.7$ mm).</i>	152
<i>Figure 6.4</i>	<i>Convergence du déplacement au point A ($h=6.35$ mm)</i>	154
<i>Figure 6.5</i>	<i>Hémisphère pincé. Géométrie et données</i>	156
<i>Figure 6.6</i>	<i>Déplacement U_A, maillage 16×16.</i>	157
<i>Figure 6.7</i>	<i>Déplacement ($-U_B$), maillage 16×16</i>	158
<i>Figure 6.8</i>	<i>Déformées de l'hémisphère pincé</i>	159
<i>Figure 6.9</i>	<i>Panneau cylindrique articulé, géométrie et données.</i>	160
<i>Figure 6.10</i>	<i>Panneau encasté, influence du nombre d'éléments.</i>	161
<i>Figure A.1</i>	<i>Couche orthotrope</i>	177
<i>Figure A.2</i>	<i>Organigramme de calcul des facteurs de correction de CT par la méthode totale.</i>	Erreur ! Signet non défini.
<i>Figure A.3</i>	<i>Organigramme de calcul des facteurs de correction de CT par la méthode flexion</i>	Erreur ! Signet non défini.

Liste des tableaux

Tableau 2.1 Les fonctions de forme utilisées dans l'élément quadrilatère	45
Tableau 3.1 Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 3 couches (0/90/0), contraintes planes maximales	66
Tableau 3.2. Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 3 couches (0/90/0), déplacement et contraintes de CT maximales	67
Tableau 3.3 Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 9 couches, contraintes planes maximales, maillage (6x6)	67
Tableau 3.4 Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 9 couches, déplacement et contraintes de CT maximales.	68
Tableau 3.5 Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme, déplacement w_c	71
Tableau 3.6. Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme, contrainte σ_{xc}	72
Tableau 3.7 Flèche et contraintes dans la plaque multicouche (0/90/0) sous chargement. sinusoïdal, $b/a = 1$	74
Tableau 3.8 Flèche et les contraintes dans la plaque rectangulaire $b/a = 3$ multicouche (0/90/0) sous chargement sinusoïdal.	76
Tableau 3.9 Plaque carrée composite à 3 couches (0/90/0), de même épaisseur simplement supportée sous chargement uniforme. Déplacement transversal et des contraintes maximums.	80
Tableau 3.10 plaque carrée sandwich (f/c/f). Résultats de la flèche au centre de la plaque.....	82
Tableau 3.11 Plaque carrée sandwich (f/c/f). Résultats des contraintes de CT maximales	82
Tableau 3.12. Déplacement transverse, contraintes du cisaillement dans la plaque carrée sandwich (f/c/f) soumise à une charge sinusoïdale	85
Tableau 3.13. Contraintes planes dans la plaque carrée sandwich (f/c/f), simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale.	85
Tableau 3.14 Plaque carrée sandwich (f(0,90), c, f(90,0)) sous chargement uniforme. déplacement transversal au point C, contrainte plane et contraintes de CT maximales.	87
Tableau 3.15. Plaque carrée isotrope simplement supportée, $\nu=0.3$, Influence de a/h sur la fréquence fondamentale (maillage 6×6).....	88
Tableau 3.16. Plaque carrée isotrope simplement supportée : $\nu=0.3$, $a/h=10$, les quatre premières fréquences propres	89
Tableau 3.17 Fréquence de la vibration libre de la plaque sandwich à 3 couches.	90

<i>Tableau 3.18 Caractéristiques géométriques et mécanique du carton ondulé utilisé pour l'essai vibration libre</i>	91
<i>Tableau 3.19 Résultats numériques et expérimentaux des pulsations propres.</i>	95
<i>Tableau 3.20 Vibrations libres du carton ondulé (L = 100 mm), les six premières fréquences propres.</i>	95
<i>Tableau 3.21 Fréquences naturelles ω_n, de la plaque carrée multicouche (0/90/90/0) encastrée.</i>	98
<i>Tableau 5.1 Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence de la flèche normale WC.</i>	128
<i>Tableau 5.2 Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence du déplacement tangentiel V_D.</i>	129
<i>Tableau 5.3 Poutre vrillée, résultats des déplacements en A pour h = 0.32</i>	131
<i>Tableau 5.4 Poutre vrillée, résultats des déplacements en A pour h = 0.0032</i>	131
<i>Tableau 5.5 Hémisphère pincé. Convergence de U_A.</i>	133
<i>Tableau 5.6 Cylindre orthotrope sous pression interne. Déplacement maximal et moments.</i>	135
<i>Tableau 5.7 Plaque carré sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme- Comparaison des déplacements.</i>	137
<i>Tableau 5.8 Cylindre simplement supporté, flèche au point C.</i>	138
<i>Tableau 5.9 Fréquences propres ($f = \omega/2\pi$) de vibration libre d'une aube de compresseur. influence de maillage</i>	140
<i>Tableau 5.10 Fréquences propres ($f = \omega/2\pi$) de vibrations libres de panneaux composites.</i>	143
<i>Tableau 6.1 Influence du maillage sur la convergence du déplacement transversal w</i>	149
<i>Tableau 6.2 Influence du maillage sur la convergence du déplacement axial U.</i>	149
<i>Tableau 6.3 Erreurs sur le déplacement axial U pour les différents pas (10 éléments)</i>	150
<i>Tableau 6.4 Erreurs sur le déplacement transversal W pour les différents pas (10 éléments)</i>	150
<i>Tableau 6.5 Panneau cylindrique articulé ($h_1 = 12.7\text{mm}$), maillage 4×6</i>	153
<i>Tableau 6.6 Panneau cylindrique articulé ($h_1 = 12.7\text{mm}$), maillage 10×12</i>	154
<i>Tableau 6.7 Panneau cylindrique articulé ($h_1 = 6.35\text{ mm}$), maillage 10×12</i>	155
<i>Tableau 6.8 Hémisphère pincé, déplacement (UA), maillage 16×16</i>	157
<i>Tableau 6.9 Hémisphère pincé, déplacement ($-VB$), maillage 16×16.</i>	158

RESUME

La présente thèse doctorale traite de la formulation et l'évaluation élément fini d'un model variationnel de Mindlin discret et modifié pour l'analyse du comportement statique et dynamique, linéaire et non linéaire des plaques et coques composites. Incluant des termes additionnels de type zigzag, en vue d'améliorer la précision de contraintes, le modèle a été reformulé afin de prendre en considération la variation linéaire par couche du déplacement. En conséquence, deux éléments finis de plaques et coques à quatre nœuds, baptisés respectivement DMQP et DMQS (Discret Mindlin Quadrilateral Plates/ Shells), améliorés par un champ de rotations quadratique ont été développés et validés sur les codes de calcul REFLEX et ABAQUS. Les deux éléments incluant l'effet de zigzag ont été développés, dans une seconde version, et validés à travers quelques problèmes tests statiques et dynamiques connus de la littérature, mettant en évidence l'indépendance vis-à-vis de la correction du cisaillement transverse et notamment la précision des contraintes par rapport au modèle initial sans l'effet de zigzag.

Les résultats satisfaisants de ce modèle constatés à travers les cas-tests linéaires de coque isotropes, nous ont motivés à étendre la présente approche aux applications non-linéaires géométriques. Un élément isoparamétrique courbe de coque a été développé à cet effet, avec l'hypothèse des petites déformations élastiques et grands déplacements et rotations modérées. Il est géométriquement simple et ne possède que quatre nœuds aux sommets et 6 ddl/nœud. Le calcul élémentaire de la matrice de rigidité tangente consiste à associer la partie linéaire du modèle de coque courbe (DMQS) avec celle non linéaire de l'élément standard Q4 de membrane. Une formulation lagrangienne actualisée à chaque itération (FLAI) a été utilisée avec la méthode de résolution de Newton-Raphson. Quelques tests standards non-linéaires des structures coques sont présentés, ils montrent un très bon comportement global et une convergence meilleure que celle d'éléments pareils.

Mots clés:

Éléments finis, Mindlin Discret, Plaques, Coques, Zigzag, Non linéarité géométrique

ملخص

تعالج أطروحة الدكتوراه هذه صياغة وتقييم العناصر المتناهية لنموذج ماندلين المتباين من اجل تحليل السلوك الساكن و الديناميكي، الخطي و الغير خطي للصفائح و القواقع المركبة من عدة مواد. أعيد تشكيل النموذج من اجل الاخذ بعين الاعتبار التغير الخطي للانتقال بشكل طبقي بإدراج قيم اضافية من نوع متعرج من اجل تحسين دقة الاجهادات. و كنتيجة لذلك تم انشاء عنصرين متناهيين للصفائح و القواقع ذوي أربع عقد، سمية على الترتيب DMQP/ml و DMQS/ml, محسنة بحقل دوران تربيعي، طورتا و اختبرتا على البرامج الحاسوبية REFLEX و ABAQUS. من جهة اخرى تم تطوير هاذين العنصرين بإدخال الأثر المتعرج عليهما. حيث اختبرا عن طريق عدة امثلة عديدة توضح بشكل خاص استقلاليتهما عن التصحيح المتعلق بالقص العمودي الى جانب دقتهما في حساب الاجهادات مقارنة بالنموذج الأولي.

النتائج المرضية الملاحظة على هذا النموذج من خلال الاختبارات الخطية على القواقع المتجانسة شجعتنا لتوسيع مجال هذا التصور للتطبيقات الغير خطية هندسيا. لذلك تم انشاء عنصر متناهي مع فرضية التشوهات المرنة الصغيرة و الانتقالات الكبيرة. يتميز هذا العنصر بالبساطة الهندسية كما لا يحتوي إلا على اربع عقد و 6 درجات حرية بكل عقدة. طريقة التركيب المستعملة في انشاء هذا العنصر تعتمد على حساب المصفوفة المماسية بدمج الجزء الخطي للنموذج DMQS مع النموذج الغير خطي للعنصر الغشائي Q4. تم استعمال صياغة لاغرونج المحدثة في كل كرة (FLAI) مع طريقة الحل لنيوتن-رافسن الافتراضية. بينت نتائج الأمثلة التي تم التطرق إليها السلوك الجيد لهذه العناصر و التقارب الأحسن مقارنة بعناصر مشابهة.

الكلمات المفتاحية:

العناصر المتناهية، نموذج ماندلين المنفصل، الصفائح، القواقع، المتعرج، الغير خطية هندسيا

ABSTRACT

This doctoral thesis deals with the finite element formulation and evaluation of a modified Mindlin's discrete variational model for static, dynamic, linear and non-linear composite plates and shells analysis. Including additional terms of zigzag type, in order to improve the accuracy of stress, the model has been reformulated to take into account the linear piecewise of displacement variation. Consequently, two finite plate and shell elements with four nodes, called DMQP and DMQS (Discrete Quadrilateral Mindlin Plates and Shells respectively), enhanced by quadratic field rotations, have been developed and validated under REFLEX and ABAQUS codes.

Both elements including the zigzag effect have been also developed in a second version, and validated through several static and dynamic test problems known from the literature, highlighting the independence towards the transverse shear correction and in particular the stress accuracy with respect to the initial model without the zigzag effect.

The satisfactory results of this model found through cases of linear isotropic shell tests, motivated us to extend this approach to the non-linear geometric applications. An isoparametric curve element of shell has been developed for this purpose, where small elastic deformation assumptions of and large displacements and moderate rotations are adopted. It is geometrically simple and has only four nodes at corners and 6 DOF/node. The elementary calculation of the tangent stiffness matrix consists in combining the linear part of the curved shell element (DMQS) with that of the membrane Q4 non-linear part. An Updated Lagrangian Formulation at each Iteration (ULFI) is used with Newton-Raphson resolution Method. Some standard tests of nonlinear geometrical shell structures are presented; they show a very good convergence and global behavior better than such elements.

Keywords:

Finite elements, Discrete Mindlin, Plates, Shells, Zigzag, geometric nonlinearity

1 Introduction

Le présent travail doctoral s'inscrit dans le cadre d'un programme d'échange et de collaboration scientifique entre le groupe de recherche GRESPI/LMN (LISM par la suite) de l'université de Reims et le laboratoire de Génie Mécanique de l'Université de Biskra (Algérie). Le thème principal de la collaboration est le développement de nouveaux éléments finis dits « spéciaux » à valeur ajoutée pour l'analyse du comportement mécanique 2D et 3D des structures composites. Il s'agit pour notre part de développer des éléments finis spéciaux d'ordre supérieur, plus simples et aussi précis que ceux existants dans la littérature et dans les codes industriels de calcul des structures.

Dans la thématique de modélisation, et jusqu'à l'avant dernière décennie, tous les chercheurs ont surmonté, d'une manière ou d'une autre, les difficultés numériques fréquemment gênantes rencontrées dans les modèles éléments finis issus des théories correspondantes. L'examen des modèles 2D existants permet de conclure que la tendance actuelle s'attachera à limiter le nombre de degrés de liberté nécessaire à une modélisation fiable et réaliste avec des formes cinématiques ou mécaniques réputées simples et robustes. Cela se traduit par le maintien des formes standards, à savoir le quadrilatère et le triangle à quatre et trois nœuds respectivement, comme support de tout développement futur d'un nouveau modèle élément fini. Par contre, cette plate forme ne peut à leur seule représenter des variations brusques des contraintes suivant l'épaisseur, du fait d'une discrétisation non fiable liée au manque des entités géométriques (nœuds) à travers l'épaisseur et de la platitude des variables cinématiques suivant l'épaisseur. Toutefois, l'exigence de décrire la forme parabolique du profil des contraintes ramène la question sur les modèles mixtes ou les modèles d'ordre supérieur qui nécessitent en eux-mêmes une certaine affinité entre les couches qu'elle s'avère difficile à se concrétiser avec un seul point suivant la totalité de l'épaisseur de la structure.

Ainsi, nous présentons dans cette thèse doctorale, une contribution à la modélisation du comportement des plaques et coques multicouches/sandwichs avec un développement des éléments finis basés sur l'aspect global des quelques approches pour l'analyse linéaire et non-linéaire, statique et dynamiques des structures isotropes et composites. Les premiers travaux ont consisté à élaborer une synthèse

bibliographique sur les différentes formulations théoriques et les éléments finis correspondants appliqués à l'analyse du comportement des structures composites. Ensuite, et dans le but de préserver les spécificités du nouveau modèle en déplacement, basé sur l'approche discrète au sens de Mindlin, labellisé DDM (Discret Displacement Model), deux éléments finis de plaques et coques composites ont été développés et validés. Rappelons que ce modèle est inspiré d'un modèle restreint aux structures isotropes formulé et validé par Katili [1, 2] et développé par la suite pour les structures composites par Ayad [3] et Sakami [4] dans le cadre d'une thèse doctorale. Outre la prise en compte de la non-linéarité géométrique du modèle coque correspondant à l'élément DMQS (Discret Mindlin Quadrilateral Shell), les travaux de développement se focalisent notamment sur l'effet de la fonction de zigzag proposé par Murakami [5] incorporée dans les deux modèles de plaques et coques (DMQP et DMQS), et sur leur dépendance vis-à-vis des coefficients de correction du cisaillement transverse, d'une part, et dans l'amélioration de la distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la structure d'autre part.

2 Objectifs de la thèse

Après une évaluation globale des études antérieures dans la littérature pour l'analyse des coques, nous constatons que la plupart des formulations sont basées sur des fonctionnels mixtes ou en déplacement avec des éléments finis d'ordre inférieurs. Ces formulations sont limitées à l'analyse des matériaux isotropes avec peu d'applications sur les composites stratifiés, leur performance est fiable et demeure limitée aux réponses globales. Cela nous a motivé à adopter la notion des termes de zigzag comme valeur ajoutée aux modèles développés récemment au niveau du groupe de recherche GRESPI. Ce travail porte sur l'amélioration du modèle discret en déplacement de Mindlin, en proposant deux éléments finis améliorées, pour le calcul et l'analyse linéaire et non linéaire des structures plaques et coques composites. Plus précisément, notre objectif dans ce travail se résume ainsi:

- Valoriser le modèle DDM par la reformulation et la mise en œuvre de deux éléments finis de plaques et coques multicouches DMQP et DMQS (riches en flexion et projetés en cisaillement).
- Pallier à l'insuffisance liée à la limite en précision des contraintes (essentiellement du cisaillement transverse) inhérentes généralement aux modèles du premier ordre, observée sur certains problèmes 2D/3D des plaques/coques composites. Cela est traduit par l'insertion des termes de zigzag, issus de l'approche de Murakami, dans le modèle initiale. Deux éléments finis raffinés avec zigzag sont développés à cet effet.
- Elargir le domaine d'application du présent modèle aux applications non linéaires géométrique, en adoptant une formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI).

3 Plan de la thèse

La thématique de recherche consiste au développement des éléments finis fondés sur le concept discret de Mindlin et qui tient en compte l'effet de zigzag comme termes d'ordre élevé. Le mémoire de thèse débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de six chapitres et s'achève par une conclusion et des perspectives. Dans le premier chapitre, nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des théories de plaques et coques composites et les éléments finis correspondantes. L'étude repose sur les travaux réalisés durant la dernière décennie, faisant chaque fois le recours à leurs descriptions authentiques fondées sur des théories antérieures. L'évaluation de la performance et l'efficacité numériques de ces contributions demeure dans un cadre général de comparaison et qui ne dépassent pas ce qu'ont été signalé par les auteurs eux mêmes.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation théorique et l'aspect variationnel du nouveau modèle de plaques DDM concrétisé par un élément fini quadrilatère à quatre nœuds. Le champ de déplacement de cet élément est enrichi par des termes quadratiques introduites dans les variables cinématiques de rotations, ce qui y nécessite des entités géométriques sur les mi-cotés, généralement gênantes pour l'ingénieur. Par conséquent, nous avons adopté deux hypothèses: l'une cinématique et l'autre mécanique afin de rendre la géométrie de l'élément plus simple et ne comporte que des nœuds aux sommets. D'autre part, en mesure d'améliorer la réponse locale du modèle proposé, et qui possède toutefois un aspect du premier ordre. Une attention particulière est portée à l'incorporation de la fonction de zigzag de Murakami dans le but d'attribuer des termes supérieurs au modèle primitif. Rappelons que la formulation de tous les modèles se traduit par une géométrie identique. Dans cette partie, seulement la cinématique et les lois d'équilibre seront attribués à ce nouveau modèle, en étalant à la fin, la formulation des contraintes et le calcul de la matrice masse correspondantes.

Le troisième chapitre est consacré à la validation du nouveau modèle, en mettant l'accent sur les structures multicouches stratifiées ou sandwich, avec différentes dispositions des couches et des matériaux. La validation du présent modèle sur le comportement vibratoire des structures réelles est mis en évidence par des tests sur le carton ondulé (sandwich) qui a été abondamment commenté dans des travaux précédentes [4, 6-8]. La réponse harmonique de quelques structures en vibration libre est testée également pour les deux versions du modèle DDM.

Les résultats obtenus dans le chapitre 3 et le succès de la mise en œuvre du nouveau concept du modèle DDM avec zigzag sur les plaques composites nous ont donnés les ambitions d'adopter la fonction de zigzag dans le modèle de coque correspondant. Cela est illustré dans le quatrième chapitre avec une description détaillée de la géométrie et l'écriture tensorielle du gradient de déformation. La formulation variationnelle décrite dans cette section nous a conduits à définir les

matrices de rigidité et de masse. Les lois d'équilibre et la formulation des contraintes sont regroupés dans la dernière section du chapitre.

Au cours de la première section du chapitre 5, différents exemples sont étudiés pour valider la capacité des éléments coques DMQS, DMQSZ à prédire un bon comportement des structures coques composites, une seconde section du chapitre est consacré à l'application des éléments développés pour étudier leur réponse au comportement vibratoire de quelques structures cylindriques.

Le sixième chapitre sera consacré à l'étude non linéaire géométrique des coques de formes quelconques en incluant les petites déformations élastiques avec des grands déplacements et des rotations modérés. On présentera en premier lieu, la formulation de l'élément quadrilatère DMQS préalablement défini dans le chapitre quatre, en considérant une formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération. Des exemples de validation seront donnés par la suite, ces tests mettent en évidence la validité de l'approche non linéaire et la démarche de construction de l'élément proposé.

Chapitre 1 Théories aux éléments finis des plaques et coques composites. Synthèse bibliographique

1.1 Introduction

L'abondance des théories développées ces dernières décennies pour la modélisation et l'analyse des plaques et coques composites est importante, des théories ayant but de réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel et de respecter les conditions issues de la mécanique des milieux continus. Selon ces exigences qui ne sont jamais réalisées simultanément se révèle une pléthore de théories et de formulations qui s'adaptent bien à la modélisation par éléments finis.

Les théories des plaques/coques des structures multicouches peuvent être développées en faisant d'une part, le choix approprié de trois points suivants : la méthode d'élimination de la variable d'épaisseur z (axiomatique, asymptotique), le choix des variables inconnues (formulation contrainte, déplacement ou mixte) et finalement selon la description (approximation) des variables (modèle monocouche équivalente dit par fois modèle global, modèle par-couche, modèle global-local...etc.), et d'autre part les différentes conditions cinématiques et mécaniques à remplir au niveau des interfaces, à l'intérieur des couches et inter éléments.

Ainsi, leur classification devient de plus en plus compliquée et par fois chevauchante. Dans un bref aperçu, on a constaté deux aspects fondamentaux faisant la différence entre les différentes approches ainsi que leur classification : la description des variables (déplacements ou contraintes) suivant la direction de l'épaisseur, et leur aptitude à satisfaire les exigences de continuité. Selon ces critères, plusieurs combinaisons ont été faites, citant, en premier lieu, les théories globales en déplacement, dont les variables sont introduites pour toute la plaque/coque, d'où ils font généralement référence à leur surface moyenne. Elles se scindent en: les théories classiques des multicouches, les théories de déformation en cisaillement du premier ordre, les théories de Valsov- Reddy et les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. D'autre coté, des théories globales améliorées provenant de la prise en compte de la condition de continuité des déplacements dans les théories globales. Une autre théorie appelée «théorie de zig zag» dérive également du modèle global, en imposant la continuité des contraintes sur les interfaces, tout en vérifiant que les faces supérieures et inférieures sont libres en contraintes de cisaillement, des autres théories sont développées par la suite, nommées les théories par-couche, dans lesquelles, chaque couche est vue comme une plaque/coque indépendante. Par

conséquent, le nombre des variables indépendantes dépend du nombre de couches, et les équations de mouvement seront écrites pour chaque couche constitutive. Cette approche est tellement coûteuse que les scientifiques ont eu tendances d'introduire des conditions additionnelles de déplacements et de contraintes sur les interfaces des couches, tout en minimisant le nombre des variables inconnues. Ceci les a amené à développer deux autres théories : les théories en déplacement globale- locale et les théories raffinées qui se coïncident avec celles déjà précitées, dites les théories de zigzag, figure 1.1

1.2 Théories de monocouche équivalente, par couche

Nombreuses théories basées sur le modèle en déplacement ont été proposées avec une description thématique qui dérive de la cinématique des plaques multicouches, basée sur l'hypothèse de variation du champ du déplacement à travers l'épaisseur de multicouche. Ces théories peuvent être divisées en deux classes générales: les théories 'monocouche équivalente' (ESLM¹) et les théories par couche (Layer-wise).

Les théories de monocouche équivalente sont caractérisées par des déplacements supposés C^1 continuité sur l'intervalle de l'épaisseur de la structure multicouche (figure 1.2) La variation de ces déplacements permet à la formulation du travail virtuel d'être pré- intégrée le long de l'épaisseur, ainsi, réduire le problème 3D à un problème 2D. Pour ce type des structures, cela revient à remplacer la plaque multicouche hétérogène par une monocouche homogène statiquement équivalente. Pour plusieurs applications, les modèles ESLM fournissent une description suffisamment exacte de la réponse globale (par exemple la flèche transversale, fréquence de vibration, la charge critique du flambement, la force et le moment résultantes); cependant, ces modèles sont souvent inadéquats pour déterminer le champ de contrainte 3D au niveau des plis. Les principaux avantages des modèles ESLM sont leur simplicité inhérente et leur faible coût de calcul, dû au petit nombre des variables dépendantes qui doivent être déterminer. Le désavantage majeur des modèles ESLM dans la modélisation des composites multicouches est que les composantes de déformation en cisaillement sont continues à travers les interfaces de couches dont la matière est différente. Ainsi, les composantes de contrainte transverse sont discontinues aux interfaces des couches. Cet inconvénient apparait dans les structures multicouches relativement épaisses, ou dans des régions locales soumises aux charges complexes ou à des discontinuités géométriques ou matérielles [9].

Contrairement aux théories ESLM, les théories par-couche supposent des champs de déplacement développés séparément d'une couche matérielle à l'autre. Elles consistent donc à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes stratifiées, et permettre la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis.

¹ Equivalent Single Layer models.

En dépit du succès des modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse [9], ces modèles ne sont pas capables de déterminer correctement les contraintes inter- laminaires tout près de discontinuités tels que les trous, bords libres en traction ...etc.

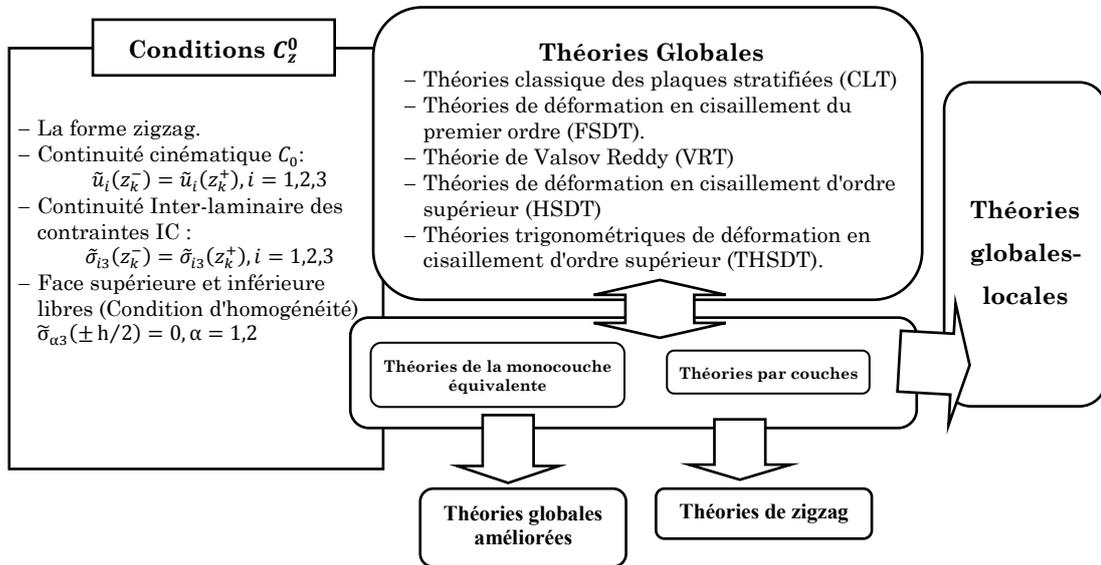


Figure.1.1 Théories des plaques multicouches, Conditions C_z^0 .

Dans la modélisation de ces effets locaux, l'inclusion de la déformation normale transverse est importante pour deux raisons: premièrement, la contrainte normale transverse est une contrainte généralement significative dans ces régions, si ce n'est pas la dominante. Deuxièmement, comme rapporté par Robbins et Reddy [10], les modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse ne satisfont pas les conditions aux limites en traction concernant les contraintes du cisaillement transverse au niveau des bords libres du composite stratifié. Un examen des conditions aux limites naturelles pour les équations différentielles de mouvement développées dans les références [11-14] (pour le cas des théories par-couche qui négligent la déformation normale transverse) révèle que les contraintes en cisaillement transverse satisfont les conditions aux limites en traction au bord libre de la structure, dans le sens intégral uniquement et non pas dans le sens local (malgré le niveau de raffinement suivant l'épaisseur).

1.3 Théories globales de déformations et leurs formulations par éléments finis

L'anisotropie importante, la non-homogénéité qui recouvrent quelques nouveaux matériaux composites requéraient l'amélioration continue de la théorie

classique des plaques (CPT)² qui se base sur les fameuses hypothèses de kirchhoff. En conséquence, des approches de modélisation qui exigent la prise en compte des déformations du cisaillement transverse ont constitué le sujet d'une sérieuse recherche dans les quatre dernières décennies. Il convient de mentionner ici les travaux de Bert [15], Noor et al. [16, 17].

Quelques approches de modélisation sont des extensions d'approches similaires à celles utilisées dans les plaques isotropes. Celles appartenant à cette catégorie nommées « Smeared Laminate Models », sont des modèles basés sur des hypothèses globales (pour la totalité de la stratification). Ils sont caractérisés par une distribution linéaire ou non-linéaire des déplacements plans ou des contraintes de cisaillement transverse suivant la direction de l'épaisseur. Ces approches considèrent toutes les couches comme une monocouche anisotrope équivalente [18].

Citant par exemple les deux théories largement discutées dans la littérature spécialisée, et qui sont fondées sur une distribution linéaire globale: la théorie classique de plaques (CPT) basée sur la négligence des déformations de cisaillement transverse et des déformations et des contraintes normales [19] ainsi que la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT³) dont les déformations du cisaillement transverse sont supposées constantes a travers l'épaisseur [20] et la composante de déformation normale et celle de la contrainte transverse sont négligées. En revanche les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT⁴) constituent de leur part des exemples de modèles globales basés sur une distribution non- linéaire [21-28]. Du point de vue conditions de contact, des contraintes de cisaillement incompatibles entre toutes les couches adjacentes résulteraient comme conséquence.

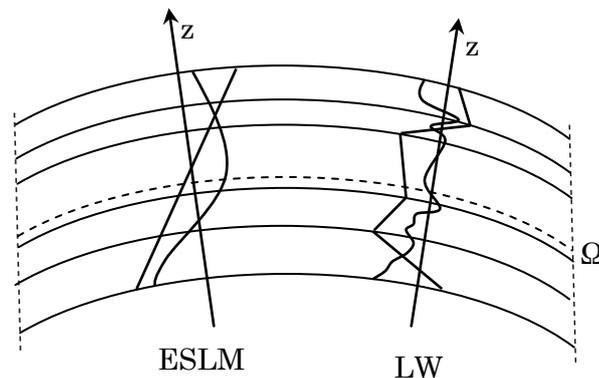


Figure 1.2 Description linéaire et non-linéaire suivant z des approches monocouche équivalente et par-couche[29].

² Classical Plate Theory

³ First-order Shear Deformation Theory

⁴ Higher order Shear Deformation Theory

1.3.1 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

La modélisation appropriée des plaques composites et sandwich qui prend en compte les déformations en cisaillement est devenue l'une des domaines actifs de recherche dans nos jours. Cette tendance est dû au faible module de cisaillement transverse des matériaux composites par rapport à leurs rigidités extensionnelles. La construction elle même de multicouche donne en plus une distribution complexe de ces déformations.

Dans ce contexte, la première tentative a été faite par Medwadowski [30], limitée pour les plaques orthotropes. Yang et al. [31], avaient incorporé par la suite l'effet des déformations en cisaillement dans les plaques composites, prenant une telle déformation constante sur toute l'épaisseur de la plaque. Ceci a été communément connu par la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, qui est identique à l'hypothèse du Mindlin [32] proposée pour les plaques isotropes (équation 1.1). Comme la variation non linéaire des déplacements plans suivant l'épaisseur est supposée linéaire, cette théorie requiert un facteur arbitraire de correction du cisaillement.

$$\begin{aligned}u_i(x, y, z) &= u_i^0(x, y) + z\phi_i(x, y), \quad i = 1, 2 \\u_3(x, y, z) &= u_3^0(x, y)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Néanmoins, dans quelques études subséquentes, l'aspect réel de la variation non linéaire des déplacements plans, déjà précité est pris en compte. Dans la plus part des cas, une variation cubique des déplacements plans est considérée afin d'avoir une allure parabolique de la déformation en cisaillement correspondante. Ces théories sont connues par les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur.

1.3.2 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur

Depuis le travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les théories du Love-Kirchhoff, de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir de cinématiques ou de champs de contraintes plus raffinés. Une exigence réclamée par Koiter [33] sur des considérations énergétiques, est recommandée pour toute amélioration des théories des plaques minces, signale que tout raffinement de celles-ci est en général n'a pas de signification à moins que l'effet simultané de la contrainte normale et les contraintes du cisaillement transverse soit pris en compte[29]. Dans certaine mesure, Vlasov [34] et Reddy [25] ont réussi à remplir les conditions homogènes au niveau des faces supérieure et inférieure de la structure multicouche, telle condition n'était pas vérifiée auparavant soit dans la théorie de Reissner-Mindlin ou dans les théories du premier ordre.

Néanmoins, la recommandation de Koiter n'a été pas respectée dans les deux théories, à savoir: la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et celle de Vlasov-Reddy, excepté la formulation de Hildebrand, Reissner et Thomas [35] dont le modèle de déplacement est ainsi présenté:

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z) &= u_i^0 + z\phi_i \quad i = 1,2 \\ u_3(x, y, z) &= u_3^0 + z\phi_3 + z^2\phi_4 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous remarquons que les variables additionnelles, par rapport au cas du FSDT, sont introduites dans le développement du déplacement transverse.

A fin de s'affranchir de limitations liées aux théories de déformation en cisaillement du premier ordre qui considèrent une variation constante de déformation transverse à travers l'épaisseur de la plaque, et qui nécessitent des facteurs arbitraires de correction, les théories d'ordre supérieur ont été développées. Elles impliquent des termes d'ordre élevé correspondent au développement de Taylor dans les champs des déplacements, chaque terme additionnel correspond à une variable dépendante. Contrairement aux théories du premier ordre, ces théories sont fondées sur une variation cubique (ou plus) des déplacements dans le plan afin d'obtenir une variation parabolique (ou plus) des déformations de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque. Dans le cas général, selon Carrera [29], les théories d'ordre supérieur sont basées sur des champs de déplacements de la forme suivante :

$$u_i(x, y, z) = u_{i0} + zu_{i1} + z^2u_{i2} + \dots + z^{N_i}u_{iN_i} \quad i = 1,2,3 \quad (1.3)$$

Avec N_i sont les ordres de développements utilisées dans les variables de déplacements. Les champs de déplacements relatifs à la théorie HSDT se sont reportés sur la figure 1.3.

Hildebrand et al. [35] ont eu la primeur d'introduire cette approche dans les théories des plaques et coques. Nelson et Lorch [36], Librescu [37], ont présenté des déplacements d'ordre élevé basés sur les mêmes théories pour l'analyse des plaques multicouches. Lo et al. [28, 38] ont proposé une solution approchée pour les plaques multicouches selon le modèle en déplacement d'ordre supérieur et qui prend en considération l'effet de la déformation normale transverse. Levinson [23] et Murthy [24] ont proposé également des théories de déformation en cisaillement d'ordre trois, dont les équations d'équilibre ne sont pas variationnellement compatibles avec les déplacements. D'après Bickford [39] et Reddy [25, 40], recourant dans leurs analyses à la théorie celle du premier ordre déjà utilisé par Whitney et Pagano [20], les déplacements proposés ont été de point de vue cinématique, les plus fréquents dans l'ensemble des déplacements d'ordre supérieur [41].

Ayant basé sur la cinématique développée par Levinson, Bickford [39] a proposé une théorie des poutres d'ordre supérieur qui contourne le désavantage de l'approche originale. Une autre forme cohérente avec les modèles cinématiques originellement proposés par Levinson et Murthy a été formulée ultérieurement par Reddy [25]. Elle est complètement simple, respecte les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les faces supérieures et inférieures de la plaque, et n'inclut plus des variables additionnelles. Cette théorie n'est en quelque sorte que l'extension du raffinement de la théorie de Reissner-Mindlin établi par Valsov [34]. Elle est communément connue par la théorie de Valsov-Reddy du troisième ordre dont les déplacements sont ainsi :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - c_1 z^3(\phi_x + \partial w_0/\partial x) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - c_1 z^3(\phi_y + \partial w_0/\partial y) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Où les termes (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) ont le même sens physique que ceux mentionnés dans la théorie du premier ordre. Elles indiquent respectivement les déplacements et les rotations de la normale du plan moyen ($z = 0$). Cependant les champs de déplacements de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre sont obtenus en imposant $c_1 = 0$, sinon $c_1 = 4/(3h^2)$ [42-44].

Bien que cette théorie semble implicitement élégante dans sa formulation, elle souffre d'un défaut fâcheux éprouvé quand elle est implémentée dans une analyse élément fini. En effet, l'expression des déplacements plans contient une dérivée première du déplacement transversal (w) et les termes de déformations impliquent donc des dérivées du deuxième ordre et nécessitent une continuité C^1 du déplacement w le long des cotés de deux éléments adjacents. Cependant, il y avait des théories de plaque où le problème précité ne survient pas, citant par exemple la théorie de Kant [45] que remonte à 1982, où il fut le premier qui a trouvé une forme variationnelle consistante des équations d'équilibre pour la flexion des plaques multicouches symétriques. Il est à noter que cette théorie en incluait des inconnus supplémentaires, et qui ne possèdent aucune signification physique, telle théorie ne pourrait donc être trop attirante pour l'usage pratique.

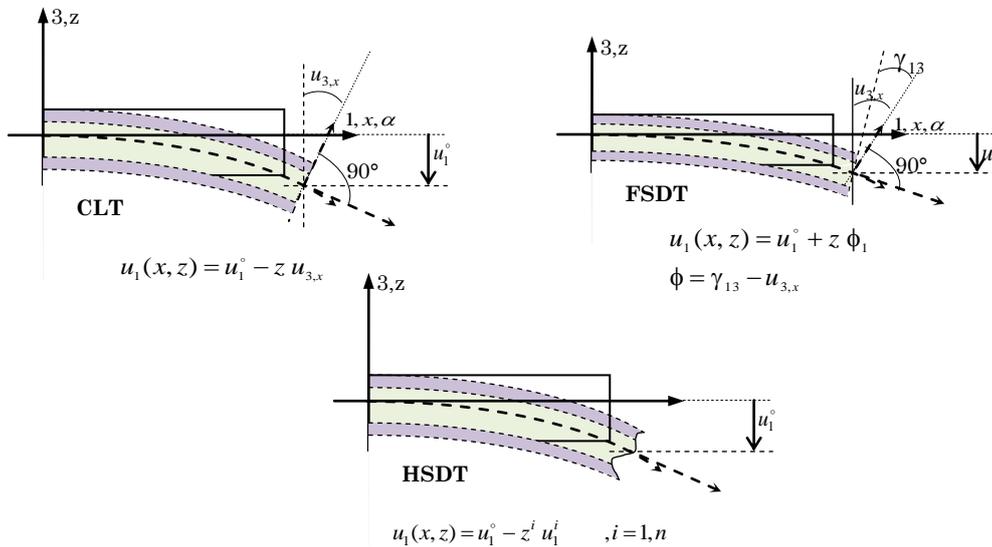


Figure 1.3 Différentes approches globales de la formulation des plaques multicouches

Le lecteur peut se référer au travail de Noor et Burton [16], dans lequel ils ont présenté une liste complète des références concernant les théories de déformation en cisaillement du premier et d'ordre supérieur. Elles comportent l'analyse statique, dynamique et de flambement des structures composites multicouches.

Rohwer [46] a regroupé dans une étude comparative diverses théories d'ordre supérieur pour l'analyse de flexion des plaques composites multicouches, où il a mis en valeur les avantages et les inconvénients de différentes théories. Les investigations numériques complètes faites par l'auteur ont montré que la théorie de Murthy et celle de Reddy sont plus avantageuses parmi les théories d'ordre supérieur. Celle de Reddy, demeure la plus fameuse et la plus simple dans l'analyse des plaques composites, selon Ferreira [47].

Reprenant la démarche de Kant [48], où il a proposé autrement une formulation analytique et des solutions basées sur des théories raffinées servant à l'analyse des problèmes statiques des plaques multicouches et sandwich simplement supportées. Cette théorie s'inspire de la solution d'élasticité, qui reflète une variation parabolique suivant l'épaisseur de la plaque de contraintes de cisaillement, et qui implique des fonctions cubiques des déplacements plans, dont une forme non linéaire de la déformation normale transverse est exigée. Une comparaison a été faite avec des solutions d'élasticité tridimensionnel montre que cette théorie prévoit le déplacement transversal et les contraintes planes d'une façon plus fiable que les autres théories mentionnées dans son écrit.

Sur la base de la même théorie, Matsunaga [49] s'est investi dans l'analyse de distributions des contraintes et de déplacement dans les plaques stratifiées croisées (cross-ply) et sandwich, soumises à une pression latérale. Les contraintes normales et de cisaillement sont obtenus par intégration des équations d'équilibre tridimensionnel suivant la direction de l'épaisseur. L'ordre de l'approximation de la théorie peut être estimé en corrélation avec le rapport du côté de la plaque et son épaisseur d'une part, et le nombre de couches et l'ordre d'empilement d'autre part. Le travail traite l'impact de différentes conditions de continuité du déplacement sur la théorie tridimensionnelle par couche de Pagano [50]. La continuité de tous les déplacements (plans et normaux) sur les interfaces est de type C^0 , et celle de monocouche utilisée (ordre supérieur est généralement supérieure à C^1).

Selon la même démarche et dans un travail subséquent de comparaison avec les théories 3D par-couche, l'effet des charges thermiques a été cette fois-ci étudié. Matsunaga [51] a évalué les contraintes inter laminaires et les déplacements dans les mêmes structures. L'auteur a montré que la théorie adoptée (2D monocouche) est entièrement acceptable. S'en rapportant à Wu et al. [52], ils ont constaté d'autant que la théorie adoptée comporte un nombre des variables indépendant de celui de couches, elle ne satisfait pas les conditions de continuité de contraintes du cisaillement transverse entre les couches. Même remarque a été signalée sur la base des tests numériques effectués dans le travail de Zenkour [53]. Les solutions analytiques présentées sont basées sur la théorie globale d'ordre supérieur, elles correspondent aux plaques stratifiées croisées.

Swaminathan et Patil [54] ont présenté de leur part des formulations et des solutions analytiques pour l'analyse statique des stratifiés alternés antisymétriques (antisymetric angle-ply) et des plaques sandwichs simplement supportées. Les

formulations sont raffinées de telle sorte qu'elles tiennent compte de l'effet du cisaillement transverse et les déformations normales transverses. L'exactitude de leur modèle avec douze degré de liberté a été constatée par rapport aux autres modèles d'ordre supérieur (cinq et neuf)

Dans le but de développer une théorie simple de déformation en cisaillement d'ordre supérieur pour la flexion-cisaillement des plaques, Shi [41] a critiqué les conditions aux limites utilisées dans la théorie de Reddy et il a proposé une théorie alternative qui se base sur trois parties; un système des équations différentielles d'équilibre d'ordre dix en terme de trois fonctions des déplacements généralisés, cinq conditions aux limites sur chaque bord de la plaque et des champs du déplacement d'ordre trois. L'auteur a défendu fortement son point de vue de formulation en basant sur les conditions aux limites utilisées sur les bords en comparant à celles utilisées dans la formulation de Reddy [25, 40], dont le nombre est quatre. La théorie a été exploitée par la suite à la résolution analytique de torsion des plaques rectangulaires et quelques problèmes de flexion des plaques et des poutres avec différentes conditions aux limites. Les résultats sont en accord avec les solutions d'élasticité tridimensionnelle, ce qui pourrait être encourageant pour le développement d'éléments finis.

L'un des avantages des théories d'ordre supérieur est que le calcul des facteurs de correction du cisaillement n'est pas nécessaire, en comparant avec les théories du premier ordre. Ces théories peuvent donner des résultats plus améliorés, cependant elles ne sont pas capables de reproduire une variation des déplacements plans sous forme de zigzag suivant la direction de l'épaisseur (voir la section §1.4). Outre qu'elles violent la continuité inter laminaire, les théories d'ordre supérieur perdent leur capacité de calculer correctement les contraintes transverses à partir des équations constitutives. Cho et Kim [55] l'ont montré, en revanche que l'usage des équations constitutives est attrayant, alors que la méthode des équations d'équilibre est généralement la plus adoptée [56].

1.3.3 Eléments finis basés sur les théories du premier ordre

Durant les dernières décennies, une pléthore d'éléments finis ont été développés, dont la plus part sont basés sur des théories du premier ordre (Reissner/Mindlin pour les plaques en flexion/CT⁵ ou de Kirchoff pour les plaques minces sans l'effet du CT). Quant aux structures isotropes monocouche, des bons résultats ont été obtenus en utilisant des éléments basés sur le modèle Reissner-Mindlin ou le modèle mixte de Hellinger-Reissner [57-60]. Le recours à des techniques supplémentaires se fait pour éliminer les faux mécanismes numériques fréquemment rencontrés [61] dans les deux modèles. Ces techniques sont d'une importance fondamentale quand l'élément est appliqué au problème non-linéaire [62]. Une liste

⁵ Cisaillement transverse

non exhaustive d'éléments finis du premier ordre, en particulier pour les plaques épaisses en flexion/CT, vaut ainsi d'être citée :

Les éléments DSQ et DST de Lardeur [63] sont basés sur un modèle variationnel mixte modifié. L'auteur calcule la déformation de CT en partant des équations d'équilibre ($\{\gamma\}$ constant, w cubique, β quadratique). Ensuite, il ajoute à chaque côté de l'élément deux variables cinématiques ($w_{,x}, w_{,y}$) et deux rotations au milieu (β_s, β_n). Il obtient ainsi huit rotations et quatre déplacements transverse pour un quadrilatère qui seront éliminés par les équations d'équilibre. Les deux éléments sont à labri de verrouillage et ne présentent pas de modes parasites. Cependant, la formulation théorique reste complexe et nécessite le calcul des facteurs de correction pour chaque type de problème [6] ;

Selon une formulation mixte en contrainte de type Hellinger-Reissner, Bouabdallah [64] a formulé un élément quadrilatéral à 4 nœuds. Toutes les contraintes sont définies dans un seul vecteur $\{\sigma\}$ et s'expriment en termes indéterminés α . Les modes parasites ont été contrôlés par au moins 14 paramètres et qui sont éliminés par la suite par condensation statique au niveau élémentaire. Quoique l'élément a donné des bons résultats, cette technique reste limitée à l'application aux structures courbes essentiellement cylindriques et fait recours d'autre part aux facteurs de correction du CT pour bien simuler le comportement mécanique de ce type des structures.

L'élément fini proposé par Katili [1] pour les plaques est basé sur la théorie des plaques épaisses de Reissner/Mindlin (théorie du premier ordre). La fonctionnelle utilisée est de type mixte modifié de Hu-Washizu. Les variables cinématiques ($w, \beta_x, \text{et } \beta_y$) de continuité C^0 sont interpolées de manière quadratique en introduisant des variables α_k , au milieu du côté k . Ces variables sont éliminés par une technique utilisant les équations d'équilibre. L'élément fini, baptisé DST-BK surmonte le verrouillage en CT et ne présente aucun mode parasite. Néanmoins, la correction du cisaillement transverse est un calcul incontournable.

Auricchio [65] a formulé un élément à 4 nœuds et 5ddl/nœud, baptisé ELM4. Celui-ci est obtenu via une approche mixte améliorée. La formulation variationnelle adoptée introduit des modes incompatibles pour améliorer la précision sur les déformations planes.

L'élément « CTMQ20 » de Cen [66], est un élément fini simple de plaque en flexion/CT à 4 nœuds et 5ddl/nœud, basé sur la théorie du premier ordre. Il est proposé pour l'analyse des plaques composites et stratifiées à disposition arbitraire. Cet élément est construit selon la procédure suivante : Les fonctions de variation de la rotation et de la déformation du CT le long de chaque côté de l'élément sont déterminées à l'aide de la théorie des poutres de Timochenko. Les champs élémentaires des déplacements plans et des rotations ainsi que le champ des déformations du CT sont déterminés par l'utilisation d'une technique d'interpolation

améliorée. En outre, une procédure hybride simple est également proposée pour améliorer les solutions de contrainte.

Belinha et al. [67] ont étendu puis utilisé la méthode EFGM (Element Free Galerkin Method) pour l'analyse des plaques anisotropes et stratifiées, en considérant la théorie de Reissner-Mindlin (FSMT). Les fonctions d'approximation sont calculées sur la base d'une approche au sens des moindres carrés (MLS: Moving Least Square). Le verrouillage en CT est évité en utilisant de polynômes d'interpolation appropriés. La continuité étant bien assurée selon les auteurs.

Moleiro et al. [68] ont récemment présenté un modèle d'élément fini mixte à 4 nœuds et 5 ddl/nœud pour l'analyse statique des plaques composites stratifiées. La formulation est basée sur un principe variationnel au sens des moindres carrés que les auteurs considèrent comme une approche alternative aux modèles éléments finis issus de formulations variationnelles faibles classiques.

Suite à la série des éléments finis proposés et développés depuis 1993 par Ayad [57-60, 69] pour les structures plaques et coques isotropes, une tenue importante a été consacrée aux structures composites. En se basant sur le modèle mixte projetée en cisaillement (MiSP : Mixed with Shear Projection), le développement se poursuivait. Dans un premier lieu, un élément fini mixte-hybride baptisé MiSP4/ml a été développé par l'auteur et son groupe [6], [70]. C'était une adaptation du modèle MiSP4 isotrope au cas des plaques stratifiées et sandwich. Cela a permis à ce modèle de gagner du terrain dans la modélisation des plaques composites, quelque soit le nombre de couches et sans recourir aux facteurs de correction. L'élément fini proposé est de forme quadrilatéral à 4 nœuds et 3 ddl/nœud. Il est libre de tout verrouillage en CT et présente des performances appréciables en matière de précision, comparativement aux éléments issus des théories d'ordre supérieur, souvent complexes et coûteux en temps de calcul. Les développements qui viennent en second lieu étaient deux modèles d'éléments finis isoparamétriques courbes à 4 nœuds pour l'analyse des coques composites multicouches. Le premier modèle est mixte hybride naturel, baptisé NHMiSP4/ml (Natural Hybrid Mixed with Shear Projection 4-node/multilayer). La partie membrane est complètement hybride naturelle, au sens de Pian modifiée, et la partie flexion/CT est mixte-hybride, offrant toutes les deux un avantage de taille à l'élément, en terme de précision sur les contraintes, avec une sensibilité moindre aux distorsions de maillages. Le second modèle, baptisé HMiSP4/Q4/ml, développe une formulation en déplacement pour la membrane et une formulation mixte-hybride en flexion/CT. Ce modèle a été formulé pour tester son aptitude à reproduire de bons résultats en dépit d'une représentation moins riche de la membrane. Un des avantages de ces deux modèles de coques est la prise en compte dans la formulation théorique du gauchissement dans les coques. Leur adaptation aux coques multicouches suit la même démarche que pour la plaque multicouche. Les facteurs de correction du CT sont également évités.

Basant sur l'hypothèse du Mindlin [32] proposée pour les plaques isotropes, un nouveau modèle variationnelle en déplacement dit de Mindlin discret (DDM:

Displacement Discrete Mindlin) est développé également par Ayad [3]. Sa projection a été faite sur deux éléments finis de plaque et de coque courbe géométriquement simple (4 et 3 nœuds) [3]. Ils prennent en compte de l'effet du cisaillement transverse à travers l'épaisseur. Le modèle DDM introduit de manière discrète deux hypothèses de Mindlin. La première hypothèse est cinématique, elle consiste à introduire sous la forme d'une intégrale de contour une équation cinématique de la déformation de CT. Elle permet l'élimination du verrouillage en CT sans introduire des fonctions bulles ou sans recourir à l'intégration réduite ou sélective. Il s'agit de l'approche des déformations de CT de substitution, connue sous le nom de « ANS method : Assumed Natural Strains ». La seconde hypothèse fait appel à deux lois de comportement, l'une en flexion et l'autre en CT, et deux équations d'équilibre d'une plaque en flexion/CT. Elle a pour principal avantage une élimination locale des degrés de liberté de rotation, introduits initialement au milieu des bords élémentaires par le biais d'une approximation quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne. Ces hypothèses ont été modifiées localement afin d'être utilisées pour les plaques/coques stratifiées composites. Le modèle de plaque dérivé, baptisé DDM, a été appliqué au début sur un triangle à 3 nœuds (DMTP: Discrete Mindlin Triangle for plate) [71], ensuite dupliqué sous un autre élément à quatre nœuds avec 5 ddl/nœud pour les coques composites. Les tests ont été effectués sur des problèmes standards, statique et dynamiques. Ils montraient des réponses globales précises avec un cout réduit, qui rend le modèle DDM comme alternative aux éléments finis de Kirchhoff discrets, connu pour leur simplicité et leur robustesse.

Une reformulation en contraintes hybrides est adoptée par Daghia et al. [72] comme généralisation de celle présentée par De Miranda et Ubertini [73] pour les plaques isotropes. L'approximation du déplacement transverse est améliorée en y reliant avec les rotations nodales, une approximation convenable est choisie cependant pour les contraintes résultantes. Les contraintes transverses à travers l'épaisseur du multicouche sont reconstruites a posteriori en utilisant l'équilibre tridimensionnel. Pour améliorer les résultats, les contraintes résultantes entrant dans le processus de reconstruction sont d'abord récupérées à l'aide d'une procédure basée sur le rapiéçage super-convergent (superconvergent patch-based procedure) nommée recouvrement par compatibilité dans les patchs (Recovery by Compatibility in Patches), et qui est bien étendue dans cette contribution pour les plaques multicouches. Ce traitement préliminaire est très efficace du point de vue calcul et généralement utile soit pour évaluer avec précision les contraintes résultantes soit pour estimer l'erreur de discrétisation. En effet, dans le même contexte, il joue également un rôle clé dans la prédiction, de manière efficace, les profils de contraintes du cisaillement. Il garantit la convergence globale de l'ensemble de la stratégie de reconstruction, qui ne nécessite pas de correction pour s'accommoder aux défauts d'équilibre.

Ainsi, comme extension de l'élément 98Q4, proposée récemment par De Miranda et Ubertini [73], un nouveau élément a été reformulé afin d'inclure le

couplage de membrane-flexion, typique des plaques multicouches non-symétriques. L'élément est un quadrilatère à quatre nœuds, développé sur la base d'une formulation hybride en contraintes. L'élément obtenu a cinq degrés de liberté par nœud et ne comporte que des déplacements compatibles comme variables primaires. Il est sans blocage et passe tous les patch- tests. Les contraintes résultantes sont équilibrées par élément. Néanmoins, l'élément représente une petite sensibilité aux distorsions géométriques.

Il convient de noter que la stratégie de reconstruction des contraintes de cisaillement transverse basée sur le recouvrement par compatibilité dans les Patches (RCP) pourrait être adoptée avec succès avec n'importe quel élément fini de plaque.

1.3.4 Eléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur

La formulation des éléments finis fournit une méthode d'analyse convenable pour les structures stratifiées ou sandwich ayant des géométries complexes, avec des chargements arbitraires aussi bien que des conditions de disposition diverses (stratifiés symétriques et non symétriques, comportement orthotrope et anisotrope), [74]. En outre, l'usage de l'approximation par élément fini a été bien établi dans les problèmes non - linéaire [75, 76]. Dans ce sujet, c'est bien connu que les théories des plaques avec C^1 continuité sont numériquement faibles du point de vue simplicité et efficacité [77, 78].

La supériorité des éléments formulés présentant une continuité C^1 dans l'analyse linéaire et non linéaire a été montrée dans plusieurs publications [61, 79]. Les exigences d'un élément efficace pour l'analyse linéaire et non-linéaire qui proviennent de l'analyse des plaques et coques isotropes monocouche ont été bien établies dans la littérature technique. Ces exigences sont résumées par Bathe et Dvorkine [62], et qu'on peut les étendre aux structures multicouches en tenant compte les remarques suivantes:

1. Le nombre de degrés de liberté doit être indépendant du nombre des couches;
2. Le modèle en déplacement adopté doit être de continuité type C^0 ;
3. L'élément doit être simple à l'utilisation;
4. Aucun facteur d'ajustement numérique ou de correction du cisaillement ne doit faire partie de la formulation;
5. L'élément devrait passer les patch-tests.
6. L'élément doit être capable de s'appliquer aux problèmes de non- linéarité géométrique tels que les grands déplacements et les grandes rotations.

Basant sur les modèles HSDT, beaucoup d'éléments finis ont été proposés. Kant et al. [80] sont les premiers qui ont présentés une formulation d'élément fini basée sur la théorie de flexion d'ordre supérieur. Cette théorie prend en considération outre la loi de Hooke tridimensionnelle, l'effet de déformation normale et du cisaillement transverse.

Le lecteur peut se référer aux articles [17, 81], dans lesquels les éléments ne satisfont pas toutes les exigences dans la liste précitée; Ils ne sont pas formulés principalement sur le critère de C^0 continuité. Pour Carrera, seulement les tentatives suivantes peuvent être mentionnées à l'égard des éléments finis HSDT qui incluent la condition C^0 : Le premier est celui réalisé par Pandya et Kant [82-84], dont les auteurs ont étendu la théorie élaborée par Kant [45] pour présenter des formulations éléments finis de type C^0 , respectivement pour les plaques stratifiées symétriques et non symétriques et les panneaux sandwichs. Dans ces travaux, les résultats ont été améliorés par rapport au modèle Reissner-Mindlin standard, ayant utilisé un développement d'ordre supérieur pour le déplacement à travers l'épaisseur. L'élément résultant représente une amélioration vis à vis aux résultats de FSDT mais n'inclut pas l'effet du zigzag et n'accomplit pas la continuité inter-laminaire, à savoir, les conditions d'équilibre pour les contraintes sur chaque interface.

Dans ce cadre, Phan et Reddy [85] ont fait une tentative d'améliorer un élément conforme des plaques minces. L'élément de base est formulé par Bogner et al. [86], étant rectangulaire à quatre nœuds d'où les degrés de liberté par nœud sont : w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ et $\partial^2 w/\partial x \partial y$ (le champ de w est une interpolation bi-cubique). Concernant l'élément développé par Phan et al. [85], les variables des champs supplémentaires utilisées sont les déplacements plans u , v et les rotations de la normale $\theta_x(\partial w/\partial x + \gamma_x)$, $\theta_y(\partial w/\partial y + \gamma_y)$. Elles sont rapprochées par des fonctions bilinéaires. Comme les déformations en cisaillement transverse varient à travers l'épaisseur de la plaque, γ_x et γ_y correspondent à celles du plan moyen de la plaque [87]. Ainsi, Ils ont fait une tentative dans laquelle les composantes de déformation en cisaillement transverse (γ_x, γ_y) sont prises au lieu des rotations de la normale (θ_x, θ_y) . L'élément, quoiqu'il est assez simple, sa forme ne le permet pas d'être utilisé que dans des plaques de formes rectangulaires.

Basant sur la théorie de Reddy d'ordre supérieur, Nayak et al. [88] ont formulé deux éléments finis (quatre et neuf nœuds) avec sept d.d.l/nœud. Les auteurs ont adopté une interpolation propre à la déformation du cisaillement transverse. Le phénomène de blocage a été maîtrisé par les techniques de Dvorkin et Bathe [89], et Huang et Hinton [90] respectivement pour les éléments à quatre et neuf nœuds. Les éléments sont validés avec des tests de vibration libre des plaques multicouches et sandwich. Ceci a montré l'applicabilité de tous les éléments de type Reddy à l'analyse dynamique. Les mêmes auteurs [91] ont exploité par la suite l'élément à neuf nœuds dans des analyses du flambage et de vibration libre des plaques multicouches et sandwich soumises à des contraintes initiales.

Le succès de la dernière théorie a permis à Sheikh et Chakrabarti [87] de formuler un élément triangulaire d'ordre supérieur, à six nœuds et six ddl/nœud. La formulation est basée sur des champs de déplacement indépendants. De point de vue numérique, l'élément s'avère entièrement performant.

Khare et al. [92] ont formulé un élément coque d'ordre supérieur à facette plane, avec neuf degré de liberté par nœud, en se basant sur un élément quadrilatère

isoparamétrique 2D à neuf nœud, du type Lagrange, avec continuité C^0 . La validation a été faite sur la vibration libre des plaques et coques isotropes, multicouches et sandwich, simplement supportées. L'élément développé présente une précision clairement élevée dans les panneaux sandwich cependant elle est semblable au modèle du premier ordre dans le calcul des fréquences naturelles pour les multicouches.

Pervez et al. [93] ont formulé un élément bidimensionnel avec sept ddl/nœud dont les champs des déplacements sont comparables à ceux utilisés par Nayak [88]. L'élément se base sur la théorie de Reddy (des déplacements semblables mais ne sont pas identiques) dont les déformations de cisaillement transverse subissent une variation parabolique suivant l'épaisseur. Des travaux similaires utilisent la même théorie ont été réalisés par Nelson et Lorch [36], Lo et al. [28], Reddy [40], Kant et Sawaminathan [48].

En 2006, Un élément quadrilatère iso-paramétrique à neuf nœuds, avec une continuité C^0 , travaillant en flexion a été formulé par Goswami [94]. En se basant sur la théorie d'ordre supérieur, avec une variation parabolique des déformations en cisaillement transverse et une déformation normale linéaire suivant l'épaisseur de la plaque, l'élément formulé sans correction de déformations transversales, montre des performances élevées par rapport au modèle du premier ordre.

1.4 Conditions C_z^0 : l'anisotropie transverse, l'effet du zigzag et la continuité inter laminaire

Un rôle supplémentaire des structures multicouches est lié à leur aptitude de présenter des propriétés physico-mécaniques distinctes dans la direction de l'épaisseur. Cela engendre des champs de déplacement caractérisés par des forts gradients suivant l'épaisseur délimités par les interfaces de couches, ce qu'est reconnu par la forme zigzag des champs de déplacement.

D'autre part, les contraintes planes $\sigma_p = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ peuvent être discontinues sur les interfaces des couches. Néanmoins, et pour des raisons d'équilibre (théorème de Cauchy), les contraintes transversales $\sigma_n = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz})$ doivent remplir la continuité sur les interfaces. Ces critères constituent ce qu'on appelle les conditions de continuité inter- laminaires des contraintes transverses.

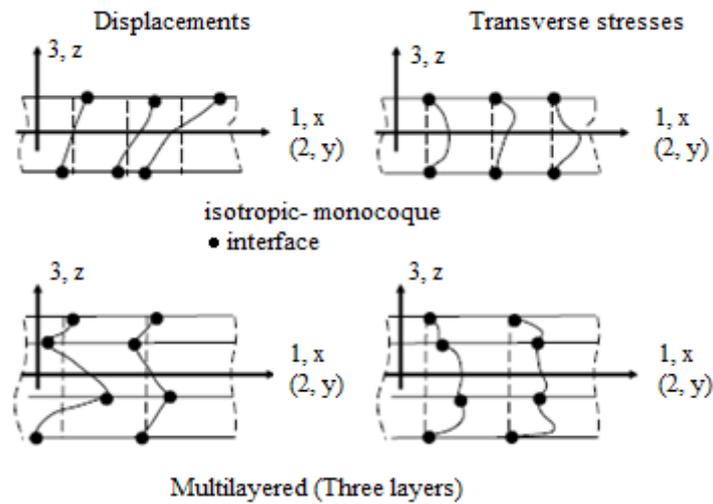


Figure 1.4 Les conditions C_z^0 , Comparaison de champs des déplacements et des contraintes transverse dans des structures monocouche et à trois couches [29]

La figure 1.4 permet de schématiser les différentes formes de distributions du déplacement (u ou v) et des contraintes transverse σ_n dans une structure isotrope ou multicouche, qui découlent d'une analyse 3D ou des résultats expérimentaux.

La figure 1.5 montre les détails des contraintes aux interfaces, où les composantes planes sont illustrées dans un motif de comparaison. Il s'avère évident que les déplacements et les contraintes, dues aux conditions de compatibilité et d'équilibre, respectivement, sont des fonctions de continuité C^0 dans la direction z , dans la majorité des cas, leurs dérivées premières sont discontinues. Selon Carrera [95, 96], le zigzag et la continuité inter-laminaire sont regroupés sous les conditions C_z^0 , donc, remplir ces conditions constitue un point crucial dans n'importe quel développement convenable aux structures multicouches.

En outre, l'anisotropie dans le plan pourrait introduire un couplage supplémentaire entre les déformations dans et/ou hors plan (comme le cas du panneau composite non symétrique [19, 43]), ce qui produit un grand déplacement même pour un niveau faible de la charge appliquée [76, 97, 98].

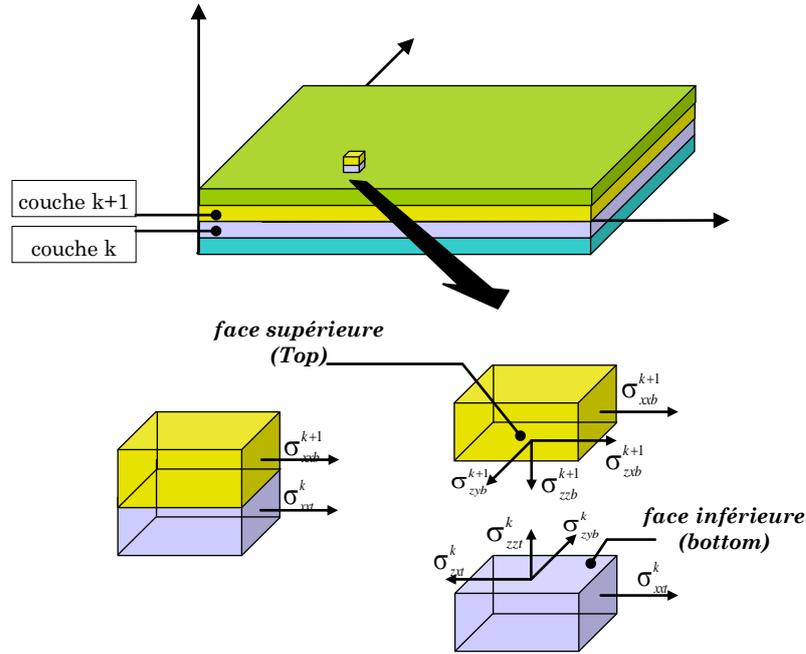


Figure 1.5 Notation détaillée des contraintes sur les interfaces [29].

1.4.1 Théories de zigzag

L'extension de CLT, FSDT et HSDT aux plaques multicouches ne permet pas l'accomplissement des conditions de C_z^0 , c.-à-d. la forme zigzag et la continuité inter-laminaire. Une exception est donnée par la théorie de Vlasov-Reddy, laquelle vérifie les conditions homogènes du cisaillement transverse aux niveaux des faces supérieures et inférieures des plaques/coques.

Cependant, Il est montré que la théorie d'ordre supérieur pourrait fournir en général des résultats acceptables [29, 99]; même s'il s'agit d'une analyse des structures épaisses. Néanmoins, elle donne des contraintes de cisaillement (selon la loi de Hooke) moins précises. Une méthode possible d'améliorer l'évaluation de ces contraintes, consiste à les corriger par intégration directe des équations d'équilibre tridimensionnel où l'exactitude des résultats n'est pas garantie. Par conséquent, l'idée fondamentale du développement des théories du zigzag est apparue pour y remédier. Elle consiste à proposer certains modèles de déplacement (ou de contraintes dans le modèle mixte) dans chaque couche. Ensuite, le nombre de variables inconnues est réduit en utilisant les conditions de compatibilité et d'équilibre à l'interface.

De point de vue historique, les contributions les plus considérables aux théories de zigzag nous reportent à l'école russe d'autrefois. La première théorie du zigzag a été donnée par Lekhnitskii [100] pour les structures poutre. Par la suite, Ambartsumian [101, 102] a ajouté des contributions remarquables aux plaques et coques. Plus récemment, une méthode dépendante de la formulation des théories du zigzag des plaques et coques a été développée par Reissner [103, 104]. Beaucoup d'autres théories étaient connues, lesquelles sont basées sur les contributions

originales de ces trois scientifiques. Une note historique, récemment signalé par Carrera [105], dont il a proposé d'authentifier les trois principales théories selon leurs fondateurs, ainsi : Lekhnitskii-Ren, Ambartsumian-Whitney-Rath-Das et finalement Reissner-Murakami-Carrera.

1.4.1.1. Théorie de Lekhnitskii-Ren

La première contribution dans le but de présenter une distribution appropriée au cisaillement transverse à travers l'épaisseur dans les matériaux stratifiés remonte aux travaux de Lekhnitskii [100, 106], Il était le premier à proposer une théorie de zigzag pour les poutres multicouches, écrivant les équations du mouvement (3D) dans le cas du problème des contraintes planes d'une poutre cantilever. Le problème a été formulé en termes de fonction de contraintes. Une approximation au sens axiomatique pour cette fonction a été ensuite introduite pour chaque couche, alors que les constantes de couche ont été calculées pour chaque couche en utilisant les données des conditions aux limites C_z^0 . Finalement, des formules explicites pour les contraintes et les déplacements ont été établies. Bien que la théorie de Lekhnitskii ait été publiée dans les années trente du dernier siècle et ait été rapportée dans un court paragraphe de l'édition anglaise de son ouvrage [106], elle a été systématiquement oubliée dans la littérature récente [29].

Toutefois, Ren [107, 108] est le seul scientifique qui a reproduit le travail de Lekhnitskii décrit dans le paragraphe précédent. Plus précisément, dans ces deux travaux, il a étendu la théorie de Lekhnitskii aux plaques orthotropes et anisotropes. Outre le maintien de la continuité des contraintes de cisaillement aux interfaces des couches, cette théorie considère également l'effet de deux modules d'élasticité et le coefficient de Poisson dans le plan sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse et par conséquent sur le champ de déformation.

Il a proposé une distribution des contraintes du cisaillement transverse dans une plaque multicouche, composée par N_l couches orthotropes, comme suit.

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^k(x, y, z) &= \xi_x(x, y)a^k(z) + \eta_x(x, y)c^k(z) \\ \sigma_{yz}^k(x, y, z) &= \xi_y(x, y)b^k(z) + \eta_y(x, y)g^k(z)\end{aligned}\tag{1.5}$$

Quatre fonctions indépendantes de x, y ont été introduites pour décrire les contraintes du cisaillement transverse. Les constantes de couche (a^k, b^k, c^k, g^k) sont fonction parabolique de la coordonnée de l'épaisseur z . Leurs formules pourraient être mentionnées dans le travail original. La formulation (relation 1.5) représente un champ continu de contrainte du cisaillement transverse, qui est parabolique dans chaque couche. Les champs du déplacement sont obtenus en intégrant la relation du déformation/déplacement et en imposant des conditions de compatibilité pour le déplacement à l'interface. Le champ du déplacement final prend la forme de zigzag suivante:

$$\begin{aligned}
 u^k(x, y, z) &= u_0(x, y) - w_{,x} + \xi_x(x, y)A^k(z) + \eta_x(x, y)C^k(z) \\
 v^k(x, y, z) &= v_0(x, y) - w_{,y} + \xi_y(x, y)B^k(z) + \eta_y(x, y)G^k(z) \\
 w^k(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Où $A^k(z)$, $B^k(z)$, $C^k(z)$ et $G^k(z)$ sont obtenus en intégrant les termes $a^k(z)$, $b^k(z)$, $c^k(z)$ et $g^k(z)$ correspondants (équation 1.5). La relation 1.6 représente un champ de déplacement cubique dans chaque couche et continu par-morceaux (piecewise) dans la direction de l'épaisseur z .

Récemment, Stürzenbecher [109] a développé une théorie axiomatique de plaque pour les plaques stratifiés/ sandwich composites croisées, basée sur le choix approprié des fonctions de distribution des contraintes du cisaillement transverses, qui ont été développées par Lekhnitskii pour les poutres et appliquées plus tard sur les plaques par Ren. En recourant aux équations d'équilibre, l'approche présentée permet d'identifier les relations entre tous les composants réduites de la rigidité plane et les contraintes de cisaillement transverse. Par conséquent, le nombre de variables indépendantes est réduit à six. Ce qui constitue les principales améliorations de cette théorie par rapport aux travaux de Ren [107].

En effet, cette théorie montre un bon accord avec les solutions d'élasticité relatives à des rapports largeur/épaisseur aussi faible que quatre, également dans le cas du comportement de multicouche anisotrope. En négligeant les effets de la contrainte σ_{zz} , les distributions transversales des contraintes de cisaillement dans les plaques épaisses ne peuvent être reproduites avec une précision suffisante. En dépit de bonne performance constatée dans les plaques minces et modérément épaisses, comparée à celle obtenue par la théorie des plaques de Ren, cette théorie fournit au moins la même précision, encore mieux pour les contraintes de cisaillement transverse, avec moindre coût de calcul. Ceci la rend attrayante pour l'analyse mécanique des composites stratifiés.

1.4.1.2. Théorie d'Ambartsumian-Whitney-Rath-Das

L'approche d'Ambartsumian-Whitney-Rath-Das [101,102,110,111] est une technique qui prend en compte l'effet du zigzag dans la distribution des déplacements. Elle a la particularité de préserver le même nombre des variables inconnues que FSDT, qui sont trois déplacements et deux rotations (ou les déformations de cisaillement).

Illustrant la formulation initiale des déplacements issue de champs de contraintes suivant :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}^k(x, y, z) &= (Q_{55}^k f(z) + a_{55}^k)\phi_x(x, y) + (Q_{45}^k f(z) + a_{45}^k)\phi_y(x, y) \\
 \sigma_{yz}^k(x, y, z) &= (Q_{45}^k f(z) + a_{55}^k)\phi_x(x, y) + (Q_{44}^k f(z) + a_{44}^k)\phi_y(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

La fonction $f(z)$ dépend du cas de symétrie de la stratification, dont la forme est définie en utilisant les conditions homogènes (nullité des contraintes sur les faces supérieures et inférieures), tandis que les constantes de couches a_{44}^k , a_{45}^k et a_{55}^k sont

déterminées par les conditions de continuité entre les couches. En proposant un champ de déplacement transversal constant suivant l'épaisseur ($\varepsilon_{zz} = 0$), et après intégration des déformations, les déplacements ci-dessous sont obtenus:

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= -zw_{,x} + \left(J(z) + g_1^k(z) \right) \phi_x(x, y) + g_2^k(z) \phi_y(x, y) \\ v^k(x, y, z) &= -zw_{,y} + \left(J(z) + g_3^k(z) \right) \phi_y(x, y) + g_4^k(z) \phi_x(x, y) \\ w^k(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Di Sciuva [112] a proposé dans une série de travaux [113-115] un modèle de déplacement en vue d'améliorer les réponses globales prévues (flexions, fréquences naturelles et charges de flambement) des plaques épaisses multicouches. En comparant avec l'approche de Whitney et Pagano [20] ou celles de même ordre, l'auteur a mené cette formulation sans augmenter les difficultés. Le modèle est défini d'une part, par une distribution linéaire par morceaux concernant les déplacements plans dans le sens de l'épaisseur, et permet de satisfaire les conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverse d'autre part, [29, 101, 102, 110]. Donc le modèle basé sur les champs de déplacements (relations 1.8) a été développé sur une approximation linéaire (2D) consistante. Les tests numériques ont montré sa performance sans requérir aux facteurs de correction de cisaillement. Néanmoins, ce modèle ne peut pas garantir la condition de nullité des contraintes de cisaillement transverses aux niveaux des surfaces libres.

$$\begin{aligned} u &= u^0 + z(\gamma_x - w_{,x}^0) + \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k(z - z_k) Y(z - z_k) \\ v &= v^0 + z(\gamma_y - w_{,y}^0) + \sum_{k=1}^{N-1} \vartheta_k(z - z_k) Y(z - z_k) \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$Y(z - z_k)$ est la fonction d'Heaviside (échelon retardé).

$\varphi_k(z - z_k)$, $\vartheta_k(z - z_k)$ sont des fonctions qui se déterminent en satisfaisant les conditions d'équilibre pour les contraintes de cisaillements transverses sur l'interface k . Elles sont aisément obtenues et s'écrivent ainsi:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= a_k \gamma_x \\ \vartheta_k &= b_k \gamma_y \end{aligned} \quad (1.10)$$

Il s'avère clairement que les déplacements u et v qui sont linéaires par couche engendrent des coefficients a_k et b_k indépendantes de la coordonnée z , (relation 1.10). En effet, les conditions homogènes des contraintes de cisaillement transverse sur les faces supérieures et inférieures ne sont pas satisfaites.

$$\begin{aligned} a_k &= \left[\frac{Q_{44}(k)}{Q_{44}(k+1)} - 1 \right] \left(1 + \sum_{q=1}^{k-1} a_q \right) \\ b_k &= \left[\frac{Q_{55}(k)}{Q_{55}(k+1)} - 1 \right] \left(1 + \sum_{q=1}^{k-1} b_q \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

suivant la même démarche et dans un travail ultérieur [116], Di Sciuva a proposé une formulation d'ordre élevé qui permet une variation non- linéaire (cubique) de

déplacements plans à travers l'épaisseur de la plaque multicouche., Elle remplit a priori les conditions de continuité géométrique et des contraintes sur les interfaces. La condition statique de nullité des contraintes du cisaillement transverse sur les surfaces supérieures et inférieures est également vérifiée, au moins pour les plaques multicouches symétriques. Les champs de déplacements utilisés dans cette formulation sont donnés ainsi :

$$\begin{aligned} u &= u^0 - zw_{,x}^0 + f(z)g_x + \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k(z - z_k)Y(z - z_k) \\ v &= v^0 - zw_{,y}^0 + f(z)g_y + \sum_{k=1}^{N-1} \vartheta_k(z - z_k)Y(z - z_k) \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Avec

$$f(z) = z \left(\delta_F - \delta_T \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (1.13)$$

Dans le même contexte d'une théorie semblable, baptisée EHOPT⁶, avec un nombre des variables préliminaires identique à celui du premier ordre, Cho et al. [117] ont combiné la théorie de plaque d'ordre supérieur de Reddy [25] et celle du zigzag par couche améliorée par Di Sciuva [118]. Ainsi, ils ont proposé une formulation (équation 1.14) qui reflète une variation cubique des déplacements plans et qu'elle prend en compte outre la distribution parabolique de déformation transverse, la forme zigzag linéaire. Cette formulation vérifie la discontinuité des déformations entre les couches (selon l'exigence de continuité des contraintes), où les déformations normales transverses sont négligées.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^0 + \sum_{k=0}^{n_u-1} S_\alpha^k (z - z_k^u) H(z - z_k) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n_l-1} T_\alpha^k (z - \zeta_k) H(-z + \zeta_k) + \xi_\alpha z^2 + \psi_\alpha z^3 \\ u_3 &= w(x_1, x_2) \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Où u_α et w sont les déplacements du point (x_1, x_2) situé dans le plan moyen. n_u et n_l sont respectivement les nombre de couches dans la moitié supérieure et inférieure de la plaque. La disposition de la structure stratifiée multicouche et la configuration des déplacements sont illustrés sur la figure 1.6. En définissant ψ_α comme rotation relative au plan moyen d'une fibre initialement normale à ce plan, elle est évaluée ainsi:

$$\left. \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right|_{z=0^+} = S_\alpha^0 = \psi_\alpha \quad (1.15)$$

Les conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les faces supérieures et inférieures seraient satisfaites en écrivant:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= -\frac{4}{3h^2} \left[w_{,\alpha} + \frac{1}{2} (\sum_{k=0}^{n_u-1} S_\alpha^k + \sum_{k=0}^{n_l-1} T_\alpha^k) \right] \\ \xi_\alpha &= -\frac{1}{2h} \left[(\sum_{k=0}^{n_u-1} S_\alpha^k - \sum_{k=0}^{n_l-1} T_\alpha^k) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

⁶ Efficient higher order plate theory

En imposant la condition de continuité inter-couches, on obtient un système d'équations algébriques, d'où les valeurs de S et T sont obtenus ainsi:

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^k &= a_{\alpha\gamma}^k(w_{,\gamma} + \psi_{\gamma}) + b_{\alpha\gamma}^k w_{,\gamma}, & k = 0, 1, 2, \dots, n_u - 1 \\ T_{\alpha}^k &= c_{\alpha\gamma}^k(w_{,\gamma} + \psi_{\gamma}) + d_{\alpha\gamma}^k w_{,\gamma}, & k = 0, 1, 2, \dots, n_l - 1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Les coefficients $a_{\alpha\gamma}^k$, $b_{\alpha\gamma}^k$, $c_{\alpha\gamma}^k$ et $d_{\alpha\gamma}^k$ sont fonctions des propriétés du matériau et les épaisseurs de couches. Le lecteur peut se référer aux travaux [29, 117] où la formulation est détaillée, le calcul des coefficients n'est pas mentionné toutefois.

Il est à noter que la présente approche est basée initialement sur la le concept d'Ambartsumian. Durant les deux dernières décennies, plusieurs contributions, visant le raffinement des modèles des plaques et/ou coques composites, se portaient vers l'adoption de cette démarche.

Dans la plupart des cas, une telle théorie de zigzag d'ordre supérieur nécessite des fonctions de continuité C^1 dans son implémentation élément EF⁷, ce que n'est pas si courant dans l'analyse des plaques/coques par les codes EF commerciaux.

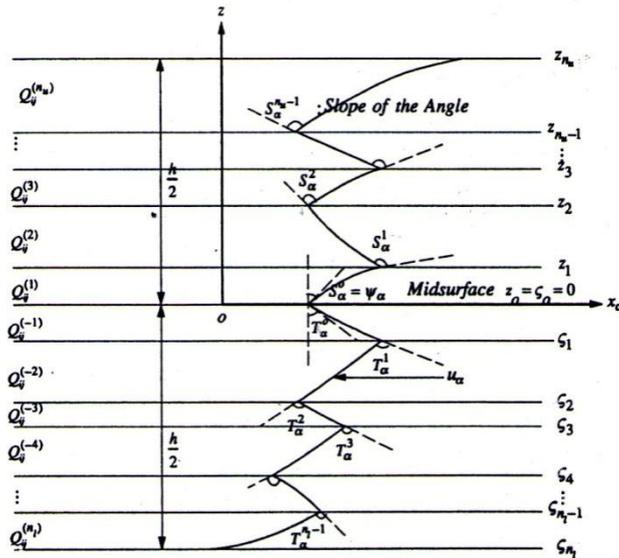


Figure 1.6 Configuration du déplacement selon l'approche de Cho [117].

En comparant aux modèles isoparamétriques de type C^0 , ces théories se heurtent à leur limitation pratique vis à vis les packages EF qui ne tiennent pas en compte que les degrés de liberté ayant un sens physique.

A cet effet, une démarche de transformation de l'énergie de déformation d'une théorie de zigzag d'ordre supérieur en une théorie de zigzag d'ordre inférieur, a permis aux plusieurs chercheurs de préserver certains avantages dans le concept des formulations d'ordre inférieur. Citant le travail de Oh et al. [119], qui ont développé une théorie améliorée de déformation en cisaillement d'ordre inférieur, baptisée

⁷ Eléments finis

ELSDT (Enhanced lower-order shear deformation), afin de fournir un outil simple et précis pour l'analyse des plaques intelligentes (smart plates) sous charges combinées (mécaniques, électriques ainsi que thermiques). Elle s'obtient systématiquement en minimisant les erreurs de moindre carré entre la théorie du premier ordre et celle d'ordre supérieur. La présente théorie se base sur une version modifiée de la théorie nommée EHOPT, illustrée ci-dessus, (équation 1.14), [120-122], qui ne nécessite qu'une continuité C^0 . La théorie établie comprend à la fois, une fonction zigzag linéaire, un polynôme cubique pour les déplacements dans le plan, un polynôme quadratique pour le déplacement hors plan et une fonction par-couche (layerwise function) pour le potentiel électrique.

L'évaluation numérique effectuée sur les plaques intelligentes sous conditions de chargement combiné montre un bon accord avec celle de la théorie EHOPT. En outre, les éléments finis basés sur cette théorie peuvent être facilement implémentés dans les codes éléments fins commerciaux. En d'autres termes, le type des éléments finis existant basés sur le concept de Reissner-Mindlin peuvent être appliqué sans une modification importante.

1.4.1.3. Théorie de Reissner-Murakami-Carrera

Dans le cadre des applications multicouches de la théorie de Reissner, Murakami a introduit pour la première fois une fonction de la coordonnée de l'épaisseur capable d'imiter l'effet du zigzag. Dans la référence [99], une telle fonction nommée « la fonction du zigzag de Murakami » [5], définie par la formule suivante:

$$M(z) = (-1)^l \zeta_l \quad ; \quad \zeta_l = 2 z_l / h_l \quad (1.18a,b)$$

ζ_l est la coordonnée adimensionnelle d'un point situé sur la couche l .

$$z_l = z - z_{0l} \quad (1.18c)$$

z_l est la distance du même point par rapport au plan moyen local (de coordonnée z_{0l}) lié à la couche l , dont l'épaisseur est h_l .

La forme de cette fonction est illustrée graphiquement sur la figure 1.7. Elle a les propriétés locales d'une valeur nulle sur le plan moyen de chaque couche et des valeurs ± 1 aux interfaces. La puissance de cette théorie est clairement constatée surtout lorsque la condition de la continuité inter laminaire est systématiquement satisfaite [123]. Comme cette fonction s'insère facilement dans les champs de déplacements plans autant que hors plan, elle présente des grands avantages par rapport aux autres théories, telles que de Likhitskii ou d'Ambartsumian [29]. Il convient de noter qu'elle est applicable pour toutes les théories classiques (monocouche équivalente) des plaques multicouches (CLT, FSDT et HSDT).

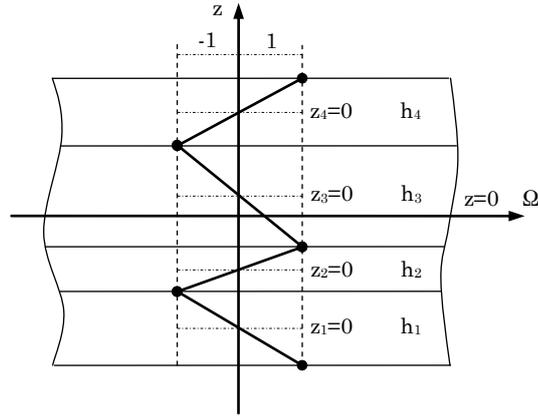


Figure 1.7 Représentation géométrique de la fonction zigzag de Murakami, structure à quatre couches

Nous commençons par la théorie du premier ordre, le terme $(-1)^k \zeta_k u^M$ dans la formule (1.19) correspond au zigzag dont le degré de liberté additionnel u^M a un sens de déplacement.

$$u = u^0 + zu^1 + (-1)^k \zeta_k u^M \quad (1.19)$$

L'application de la formulation du zigzag de Murakami sur la théorie de FSDT conduit au modèle du déplacement suivant:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + zu_1^1 + M(z)u_1^M \\ u_2 &= u_2^0 + zu_2^1 + M(z)u_2^M \\ u_3 &= u_3^0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Où 1, 2 et 3 sont les trois directions orthogonales du repère de la plaque/coque, dont le troisième fait référence à la direction de l'épaisseur.

u_1^M et u_2^M sont les amplitudes effectives de l'effet du zigzag, ayant le sens de déplacements. En effet, ces termes ont une description intrinsèque du modèle monocouche équivalente (ESLM), cette réalité ne constitue pas une limitation de MZZF⁸ puisque cette dernière possède la même description que les autres théories de structures multicouches d'Ambartsumian (AMT⁹) et de Likhitskii (LMT¹⁰).

Donc, le modèle de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre amélioré par la fonction zigzag possède sept degrés de liberté, deux fois plus que le modèle classique FSDT. Le raffinement des théories d'ordre supérieur se fait d'une manière semblable, ainsi on définit les champs de déplacements:

⁸ Murakami Zig-Zag Function

⁹ Lekhnitskii Multilayered Theory

¹⁰ Ambartsumian Multilayered Theory

$$u_i = u_i^0 + z u_i^1 + z^2 u_i^2 + \dots + z^N u_i^N + (-1)^k \zeta_k u^M \quad i = 1, 3 \quad (1.21)$$

Concernant le cas de la théorie de Reddy-valsov (HSDT), l'introduction de la fonction de Murakami dans les déplacements plans et l'accomplissement de la condition d'homogénéité des contraintes du cisaillement minimise d'une part les variables additionnelles à un nombre identique à celui de FSDT raffinée, et apporte une distribution parabolique des déformations de cisaillement transverse d'autre part, [124]. Les composantes de déplacements s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} u &= u^0 - \frac{4z^3}{3h^2} w_{,x} + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \varphi_x + \left(\zeta_k - \frac{8z^3}{3h_k h^2} \right) (-1)^k u^M \\ v &= v^0 - \frac{4z^3}{3h^2} w_{,y} + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \varphi_y + \left(\zeta_k - \frac{8z^3}{3h_k h^2} \right) (-1)^k v^M \\ w &= w^0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.4.2 Éléments finis d'ordre supérieur vérifiant les critères de continuités

1.4.2.1. Éléments finis basés sur les théories d'Ambartsumian

La forme zigzag inspirée du modèle proposé par Ambartsumian a été largement utilisée par plusieurs chercheurs, citant le cas du travaux réalisés par Di-Sciuva, dans lesquels il a pu introduire cette forme dans les déplacements plans que ce soit du premier ordre [112, 113, 115, 125] ou d'ordre supérieur [18, 116, 118]. Ces contributions ont été appelées (Refined first/higher order shear deformation plate theory).

Outre les privilèges déjà discutés (§ 1.3.2), en comparant avec les théories d'ordre supérieur qui ne satisfont pas les conditions de continuité des contraintes aux interfaces et dans certains cas leur nullité sur les faces supérieures et inférieures, l'auteur a proposé une représentation des déplacements/contraintes planes plus améliorée. L'introduction du modèle zigzag dans la théorie du premier ordre (FSDT) donne des prédictions comparables à celles d'un modèle d'ordre supérieur, si n'étaient pas mieux dans certains cas. La même remarque a été constatée dans la formulation de l'élément fini quadrilatère conçu pour les plaques multicouches [126, 127].

Ayant basé sur le modèle raffiné en déformation d'ordre supérieur, élaboré dans les travaux [116, 118], deux éléments finis ont été formulés par Di Sciuva. En 1991, un élément quadrilatère de plaque a été formulé sur la base du modèle RHSDT¹¹ [18]. L'élément est un quadrilatère à quatre nœuds aux sommets avec dix dll/nœud, baptisé RHQ40. Les paramètres nodaux sont: les cinq déplacements généralisés u_α, w , g_α , les deux rotations totales $\partial_\alpha w$, les deux courbures $\partial_{\alpha\alpha} w$ et la

¹¹ Refined Higher Shear Deformation Theory

torsion $\partial_{\alpha\beta}w$ de la surface de référence Ω . La formulation de l'élément nécessite une approximation C^1 de la flèche transverse w , et C^0 des déplacements u_α et les rotations de cisaillement g_α . L'élément est conforme dû à la continuité des déplacements et des courbures à travers les éléments adjacents, comme il est capable de représenter les déformations constantes et les mouvements d'un corps rigide.

Une année plus tard, par le même auteur et sur la même base de la théorie (RHSDT), un autre élément triangulaire pour les plaques multicouches a été formulé [128], ayant une forme arbitraire avec trois nœuds et dix d.l./nœud. L'élément est complètement conforme (de haute précision) et requière uniquement cinq déplacements généralisés pour décrire la cinématique de déformation de la plaque stratifiée. Il satisfait à priori les conditions de continuité géométrique et des contraintes sur les interfaces. Les mêmes exigences de continuité de l'élément RHQ40 sont réclamées dans toutes les approximations de cet élément.

Outre que les deux éléments présentent les avantages liées à la théorie raffinée du troisième ordre, présentée dans [116] et qu'ils montrent une précision élevée comparable aux éléments basés sur la formulation dite de la couche discrète (ou par couche) et à ceux formulés par Reddy et al. [129, 130], les deux éléments possèdent un nombre de variables nodales élémentaires indépendant du nombre des couches.

En 1994, Cho et al. [131] ont développé un élément triangulaire basé sur une théorie d'ordre supérieur efficace (Efficient Higher Order Theory) (relation 1.14) pour les plaques multicouches symétriques, [117, 132]. L'élément formulé est non-conforme, et ne nécessite que cinq d.d./nœud, les degrés de liberté nodaux ne dépendent pas du nombre de couches. Les auteurs ont montré la performance de leur élément par rapport aux éléments quadrilatères existants, surtout pour les structures à contours courbes. Notant qu'il passe adéquatement les patch-tests de flexion et de cisaillement avec des maillages arbitraires.

En revanche, Cho et al. [133] ont constaté que les éléments basés sur la formulation de Di Sciuva [18, 128] souffrent d'un défaut fâcheux, qui est l'exigence de la continuité C^1 du degré de liberté de la flèche transverse w afin que son interpolation du type Hermiten puisse être impliquée dans les modèles éléments finis [125, 126]. La présence de degrés de liberté additionnels de rotations (gradient de w) dans les modèles éléments finis rendent gênant, si ce n'est pas impossible, leur implémentation dans des codes commerciaux. D'où ils ont proposé un élément tridimensionnel à huit nœuds basé sur une théorie dite (Sublaminated Theory), qui combine à la fois les avantages de la théorie par couche et celle d'ordre supérieur avec zigzag. Ce modèle permet de considérer la plaque stratifiée comme un ensemble de subdivisions, chacune regroupe plusieurs couches. Leur élément présente une bonne précision, le fait qu'il comporte cinq d.d./noeud (trois translations et deux rotations) le rend simple à l'utilisation et compatible avec les exigences des codes élément fini commerciaux.

En 2003, Topdar, Sheikh et Dhang [134] ont constaté, pour formuler leur élément fini des plaques multicouches et sandwich, que la théorie proposée par Cho et Parmerter [117] (relation 1.14) est la plus adéquate à adopter parmi les théories raffinées de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT). Telle théorie satisfait complètement l'exigence de la continuité inter-élément (continuité C^1 du déplacement transverse le long des cotés de l'élément, comme c'est exigée dans la théorie de Reddy du troisième ordre). Le concept de l'élément conforme des plaques minces proposé par Bogner et al. [86] a été utilisé également pour développer cet élément rectangulaire à quatre nœuds, d'où il reflète des bonnes performances en termes d'exactitude des résultats.

Dans la même année, et dans le but de valoriser la théorie de Reddy d'ordre supérieur avec une formulation en déplacement, Cheikh et Chakrabarti [87] ont montré que la technique adoptée, est ainsi applicable pour une forme triangulaire avec un élément conforme des plaques minces, ayant trois nœuds aux sommets et trois aux mi-cotés avec des degrés de liberté indépendants : u , v , w , θ_x , θ_y , γ_x et γ_y . De point de vue numérique, l'élément est entièrement performant, libre du problème de blocage en cisaillement et ne possède aucun mode parasite. L'auteur a adopté cette théorie pour la modélisation des plaques multicouches, avec une application très ample. En revanche, il a retourné dans quelques contributions ultérieures - dans les travaux réalisés en collaboration avec Pandit et al. [135, 136] - à l'approche de Cho et Parmerter concernant les formulations qui se rapportent aux plaques sandwich à cœurs légèrement compressible.

1.4.2.2. Éléments finis basés sur les théories de Murakami

D'après la théorie de déformation d'ordre supérieur (HSDT) présentée par Toledano et Murakami [137], Rao et Meyer-Piening [138] ont développé un élément de plaque qui inclut les conditions de C^0 ainsi que l'effet du zigzag et l'équilibre inter laminaire pour le cisaillement transverse. Le théorème variationnel mixte de Reissner a été utilisé afin de d'écrire le système d'équations, d'où la contrainte normale est prise en considération et toutes les variables relatives aux contraintes seront éliminées par la suite [139]. L'élément fini résultant a présenté quatorze degrés de liberté par nœud, ce qui le rend numériquement coûteux. L'analyse a été restreinte aux éléments à huit nœuds et aux plaques épaisses. Une troisième tentative a été faite par Carrera [139] pour imposer la continuité C^0 dans le modèle HSDT proposé par Savithri et Varadan [140]. Une technique de pénalité a été utilisée, mais les résultats obtenus ont montré une défaillance numérique.

Carrera [74] a présenté des éléments finis pour les plaques multicouches qui réunissent des exigences de calcul et qui impliquent d'une part, une distribution zigzag suivant l'épaisseur dans les déplacements plans uniquement, et la continuité des contraintes de cisaillements transverses d'autre part. Ces éléments constituent une extension aux éléments C^0 standards (quatre, huit et neuf nœuds) formulés

suivant le principe de Reissner-Mindlin. Afin d'éliminer les contraintes inconnues, le modèle variationnel mixte de Reissner a été adopté.

En 2005, Demasi [123] a illustré par une série de tests, la fiabilité des éléments finis basés sur une formulation combinée par l'une des théories CLT, FSDT, HSDT et le modèle zigzag de Murakami. Les résultats montrent une bonne corrélation des déplacements avec la formulation analytique correspondante. L'auteur a constaté cependant une insuffisance particulière du présent modèle (Murakami) à représenter les effets locaux (contraintes transverses), d'où les théories par couche (layerwise) ou tridimensionnelles sont recommandées.

1.5 Théories par couche et leur raffinement

1.5.1 Théories par couche

Les théories mentionnées précédemment ayant un nombre de variables inconnues indépendant du nombre de couches sont des modèles de la monocouche équivalente (ESLM). Bien que ces théories puissent décrire les déformations normales et de cisaillement transverse, elles sont cinématiquement homogène dans le sens qu'elles paraissent insensibles aux comportements de chaque couche. Si l'évaluation de ce comportement est nécessaire et qu'il existe un gradient important des déplacements entre les couches, l'emploi de l'approche par couche (Layerwise approach) semble le plus adéquat de nos jours. Ces variantes sont connues par «couche discrète», «couche multiple» et celle dite «Sublamine». Elle nécessiterait l'utilisation particulière des théories de premier ou d'ordre supérieur dans chacune des couches constitutives avec une concomitante augmentation du nombre d'inconnus dans le processus de résolution et d'autant dans la complexité d'analyse.

Cependant, pour établir le modèle par- couche, il est possible d'introduire d'une manière naturelle l'effet du zigzag dans le cadre du modèle classique, avec seulement le déplacement comme variable. Cela pourrait être réalisé en appliquant les théories CLT, FSDT ou HSDT au niveau de chaque couche, quelle est considérée comme une plaque indépendante. En suite, nous imposons la compatibilité des composantes du déplacement relative à chaque interface comme une contrainte sur le modèle, [9, 141]. Cho et al. [142] ont employé dans cette thématique, la théorie d'ordre supérieur, l'équation pour l'analyse dynamique des plaques composites :

$$u_i^k(x, y, z) = u_{i0}^k - z_k u_{i1}^k + z_k^2 u_{i2}^k + \dots + z_k^{N_i} u_{i2}^k \quad i = 1, 2, 3 \quad k = 1, N_l \quad (1.23)$$

Les modèles déplacement définis par l'équation (1.23) requièrent l'adoption des critères stricts afin de satisfaire les conditions de compatibilité sur chaque interface. Une généralisation de ces types de théories a été donnée par Nosier et al. [143] et par Reddy [43], qui ont exprimé les variables de déplacement dans la direction de l'épaisseur en termes des polynômes de Lagrange,

$$u_i^k(x, y, z) = L_1(z_k)u_i^k|_{h/2} + L_2(z_k)u_i^k|_{-h/2} + L_3(z_k)u_{i2} + \dots + L_{N_i}(z_k)u_{iN_i}^k \quad (1.24)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad k = 1, N_i$$

Les valeurs sur l'interface sont utilisées comme variables inconnues (les deux premiers termes du développement, c.-à-d. $u_i^k|_{h/2}$ et $u_i^k|_{-h/2}$), ce qui permet facilement de faire une liaison entre les conditions de compatibilité sur chaque interface. En effet, L_1 et L_2 coïncident avec les polynômes linéaires de Lagrange, cependant $L_3 \dots L_{N_i}$ devraient être une base indépendante de polynômes qui commence par le facteur L_3 (parabolique).

1.5.1.1. Éléments finis basés sur la théorie par couche

Nombreuses théories de plaques multicouches basées sur le modèle en déplacement par- couche sont présentées dans la littérature spécialisée [10-14, 112, 129], [144-152]. Dans la plupart de ces théories, une continuité des déplacements à travers les interfaces de couches est imposée par la contrainte d'équations qui permettent à certaines variables dépendantes d'être éliminées au cours du développement du modèle. Cependant, dans la théorie par- couche de Reddy [81, 129, 130, 144], la variation transversale du champ du déplacement est définie en termes d'une représentation par élément fini Lagrangien 1-D. Cette représentation impose automatiquement une continuité C^0 des composantes du déplacement à travers l'épaisseur. Par conséquent, des déformations transverses continues par morceaux (Piecewise continuous) à travers l'épaisseur en résulterait. La variation transversale des déplacements peut être représentée à tout niveau souhaité de précision en augmentant le nombre des éléments finis 1-D (c'est-à-dire les couches efectives) ou augmenter l'ordre des polynômes d'interpolation transversale. Ainsi, la théorie par couche de Reddy fournit un concept général sur les champs de déplacement par couche [9].

Nous évoquons en équation (1.25) les champs de déplacements utilisés dans la formulation élément fini de Robbins et Reddy [9]. ils s'écrivent sous une forme légèrement plus compacte que celle proposée par Reddy dans [81, 129, 130, 144].

$$u_1(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n U_j(x, y, t) \varphi_j(z)$$

$$u_2(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n V_j(x, y, t) \varphi_j(z) \quad (1.25)$$

$$u_3(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n W_j(x, y, t) \varphi_j(z)$$

Où u_1 , u_2 et u_3 représentent les composantes du déplacement suivant les directions x , y et z respectivement d'un point matériel situé à (x, y, z) dans la structure multicouche non déformée. L'épaisseur de la structure multicouche est subdivisée en une série de N éléments finis unidimensionnel. Le maillage élément fini 1-D contient

au total n nœuds de coordonnées z_j suivant l'épaisseur ($j = 1, 2, \dots, n$). Les $\phi_j(z)$ sont les fonctions d'interpolation de Lagrange unidimensionnel. Ces fonctions sont non-nulles uniquement à l'intérieur du domaine local d'une ou deux subdivisions de l'épaisseur. Les déplacements $U_j(x, y, t)$, $V_j(x, y, t)$, et $W_j(x, y, t)$ représentent les composantes de déplacements de tous les points situés sur le $J^{\text{ème}}$ plan (définis par $z = z_j$) dans la plaque multicouche non déformée (relation 1.26).

$$\begin{aligned} U_j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^p U_{ji}(t) \psi_i(x, y) \\ V_j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^p V_{ji}(t) \psi_i(x, y) \\ W_j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^p W_{ji}(t) \psi_i(x, y) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Avec $U_{ji}(t)$, $V_{ji}(t)$ et $W_{ji}(t)$ sont les composantes de déplacements u_1 , u_2 et u_3 sur le $i^{\text{ème}}$ nœud de l'élément fini bi- dimensionnel représentant le $j^{\text{ème}}$ plan. Les fonctions $\psi_i(x, y)$ sont les polynômes d'interpolation bi- dimensionnels de Lagrange associées au $i^{\text{ème}}$ nœud de l'élément fini bidimensionnel. p est le nombre de nœuds par élément fini 2-D.

La plus part des théories par-couche de plaques stratifiées multicouches examinée à ce jour ([11-14], [112], [145-149]) suppose une variation linéaire par morceaux (piecewise) des composantes de déplacement plans à travers l'épaisseur et un déplacement transversal constant suivant la même direction (c.-à-d. la déformation en cisaillement transverse est constante par- morceau à travers l'épaisseur, cependant, la déformation normale transverse est négligée). Pour les composites stratifiés où l'effet de la déformation transverse normal peut être négligé sans affecter les résultats, cette théorie particulière (par-couche) représente une alternative précise et économique à la théorie de l'élasticité 3-D [9].

Les modèles éléments finis relatifs à cette théorie ont été développés dans les références [13, 14, 149]. Ils nécessitent environ deux tiers des degrés de liberté d'un modèle éléments finis 3-D comparable. Notant que pour cette théorie par –couche particulière, les contraintes en cisaillement transverse, comme calculées à partir des relations constitutives, représentent la contrainte moyenne de cisaillement transverse à l'intérieur d'une subdivision particulière de l'épaisseur. Cependant la variation linéaire de la contrainte en cisaillement transverse suivant l'épaisseur peut être calculée par les équations d'équilibre 3-D après avoir obtenu le champ de contrainte plane. Ces contraintes en cisaillement ont été calculées à l'aide des modèles par-couche dans les références [9, 14, 112, 146, 147]. Ils y ont révélé une amélioration importante par rapport aux contraintes d'équilibre en cisaillement calculées en utilisant la théorie classique des stratifiés ainsi que celle de déformation en cisaillement du premier ordre [153].

1.5.2 Théories Global /Local

Selon une littérature spécialisée [5, 112, 116, 117, 119, 154-168], il est constaté que les théories globales en déplacement, les théories globales améliorées en déplacement et celles du zigzag se heurtent aux difficultés de précision dans le calcul direct des contraintes de cisaillement transverse à partir des équations constitutives. D'où il était souhaitable de présenter un modèle conforme, inspiré d'autres théories et qui peut prédire ces contraintes par une approche simple [56].

Néanmoins, la théorie de déformation en cisaillement transverse d'ordre supérieur (§ 1.3-2) montre une bonne efficacité dans le sens global qui lui permet d'être largement utilisée dans l'analyse des composites stratifiés et d'attribuer une réelle contribution dans ce contexte. Examinant la représentation des déplacements unifiée du troisième ordre, donnée par Lo et al. [38] (Relation 1.27). Malgré qu'elle donne des contraintes planes (distributions globales) satisfaisantes avec un coût de calcul optimal, elle est incapable de représenter les effets locaux par la même précision, que se soit la continuité des déplacements à travers l'épaisseur ou la distribution en forme de zigzag [169].

$$\begin{aligned} u_a(x, y, z) &= u_{0a}(x, y) + u_{1a}(x, y)z + u_{2a}(x, y)z^2 + u_{3a}(x, y)z^3 \quad , a = 1, 2 \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)z^2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Donc, les théories par couche sont des techniques prometteuses qu'ont été développées afin d'améliorer l'exactitude des contraintes transverses dans les structures multicouches. Elles sont basées sur les hypothèses en déplacements pour chaque couche individuelle, d'où les distributions globales et locales de déplacements et de contraintes sont bien représentées. Prenant le cas de la reformulation faite par Lu and Liu [170] (la relation 1.27), les champs de déplacements s'écrivent explicitement pour la couche k :

$$\begin{aligned} u_a^k(x, y, z) &= u_{0a}^k(x, y) + u_{1a}^k(x, y)z + u_{2a}^k(x, y)z^2 + u_{3a}^k(x, y)z^3 \quad , a = 1, 2 \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)z^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Bien que cette théorie donne d'excellents déplacements et contraintes dans et hors plan, elle souffre contrairement aux théories d'ordre supérieur, du nombre total de degrés de liberté qui dépend du nombre de couches. Cet inconvénient peut ne pas être gênant dans quelques formulations analytiques appliquées dans l'analyse des plaques simples, cependant, il constitue un critère important dans la sélection d'une telle théorie dans l'analyse des structures complexes par des méthodes de discrétisation.

Comme alternative, en 1995, Li et Liu [169] ont fait un compromis dans leur formulation entre les théories par couche et d'ordre supérieur, dans laquelle un nombre limité des termes dépendants de couches est considéré. Cela s'exprime par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_0^k(x, y) + u_1^k(x, y)z + u_2(x, y)z^2 + u_3(x, y)z^3 \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)z^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Li et al. ont procédé par la suite à assurer les conditions inter laminaires et d'homogénéité (relations 1.30 et 1.31) afin de minimiser le nombre des variables dépendantes du nombre de couches. La démarche est affectée aux stratifications croisées (cross-ply) seulement en utilisant les équations constitutives contraintes/déformations dans chaque couche. Le nombre total de degrés de liberté se réduit finalement à trois.

$$u^{k-1}\Big|_{z=z_k} = u^k\Big|_{z=z_k} \quad \tau_{xz}^{k-1}\Big|_{z=z_k} = \tau_{xz}^k\Big|_{z=z_k} \quad \text{avec } k = 2,3,4,\dots,n \quad (1.30)$$

$$\tau_{xz}\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0 \quad (1.31)$$

Les déplacements sont représentés par des polynômes impliquant des termes des couches indépendants (relation 1.32), dont les coefficients sont fonctions des propriétés de couches et des coordonnées.

$$\begin{aligned} u^k &= u_0 + (R_1^k + A_1^k z)u_1 + (R_2^k + A_2^k z + z^2)u_2 + (R_3^k + A_3^k z + z^3)u_3 \\ &\quad + (R_4^k + A_4^k z)w_{0,x} + (R_5^k + A_5^k z)w_{1,x} + (R_6^k + A_6^k z)w_{2,x} \\ w^k(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)z^2 \end{aligned} \quad (1.32a)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_1^k &= \frac{Q_{55}^1}{Q_{55}^k}, \quad A_2^k = \frac{2}{Q_{55}^k} \sum_{j=2}^k a_j z_j, \quad A_3^k = \frac{3}{Q_{55}^k} \sum_{j=2}^k a_j z_j^2, \quad A_4^k = A_1^k - 1, \\ A_5^k &= \frac{1}{2} A_2^k, \quad A_6^k = \frac{1}{3} A_3^k, \quad R_i^k = \sum_{l=2}^k (A_i^{l-1} - A_i^l) z_l, \quad a_k = Q_{55}^{k-1} - Q_{55}^k \end{aligned} \quad (1.32b)$$

En plus de la formulation précédente, les auteurs ont évalué l'influence de l'ordre d'approximation des champs de déplacements dans le plan (termes indépendants) sur la prédiction de déplacements et de contraintes. Ils ont constaté qu'une approximation d'ordre trois reflète des déplacements proches à ceux exacts, celle de la contrainte du cisaillement transverse ne soit aussi semblable qu'à partir d'ordre sept.

La démarche adoptée par Li et Liu peut se résumer à l'utilisation d'un système de coordonnées généralisées pour unifier les différentes théories de multicouches stratifiés et de présenter la théorie de zigzag généralisée. Cette dernière était une théorie de couche- dépendante avec deux termes dépendants de couche, de zéro et de premier ordre. En imposant les conditions de continuité inter- laminaire des déplacements et de contraintes en cisaillement, la théorie du zigzag généralisée a été convertie en une théorie couche- indépendante. Elle avait alors l'avantage de la précision numérique due aux coefficients dépendants de couche et l'efficacité de calcul dû au nombre fixe des variables.

On procède à la division de la théorie des plaques stratifiées présentée par Li et al. [171, 172] en une composante globale du type déformation en cisaillement d'ordre supérieur et une autre locale du type par –couche. Les composantes globales et

locales peuvent s'assembler par la technique de superposition globale-locale (global-local superposition technique), donnée par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_G(x, y, z) + u_L^k(x, y, z) \\ v^k(x, y, z) &= v_G(x, y, z) + v_L^k(x, y, z) \\ w^k(x, y, z) &= w_G(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Où u_G , v_G et w_G sont les composantes globales du déplacement, u_L^k et v_L^k sont les composantes locales, k représente l'ordre de la couche parmi n couches de la plaque stratifiée.

Avec

$$\begin{aligned} u_G(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_1(x, y)z + u_2(x, y)z^2 + u_3(x, y)z^3 \\ v_G(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_1(x, y)z + v_2(x, y)z^2 + v_3(x, y)z^3 \\ w_G(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.34)$$

et

$$\begin{aligned} u_L^k(x, y, z) &= u_0^k + u_1^k \bar{\xi}_k \\ v_L^k(x, y, z) &= v_0^k + v_1^k \bar{\xi}_k \end{aligned} \quad (1.35)$$

Où x , y et z sont les coordonnées globales associées à la plaque, le plan de référence ($z=0$) est pris sur le mi-plan suivant la stratification, x , y et ζ_k sont les coordonnées locales de la couche k , avec $-1 \leq \zeta_k \leq 1$. La relation entre les coordonnées globales et locales est illustrée sur la figure 1.8.

Cependant, le fait que uniquement quatre conditions de continuité doivent être satisfaites (deux déplacements inter-laminaires et deux contraintes en cisaillement inter-laminaires sur chaque interface du composite stratifié), et si l'éventuelle indépendance des termes de couches est envisagée, uniquement quatre termes feront partie de la présente théorie (deux pour u^k et deux pour v^k). Ainsi, la présente théorie est nommée « la théorie de superposition 0-1 ».

Grâce à son succès dans l'analyse des plaques stratifiées, il avait d'importance capitale d'assigner, en tant que possible, les deux termes d'ordre élevé (c'est-à-dire les termes de second et de troisième ordre) à la théorie du zigzag généralisée comme étant des variables dépendantes de couche. Li et al. [171] ont constaté que la technique de superposition globale- locale pourrait être utilisée deux fois pour exprimer les composantes de déplacement d'une manière explicite, à savoir "expression récursive".

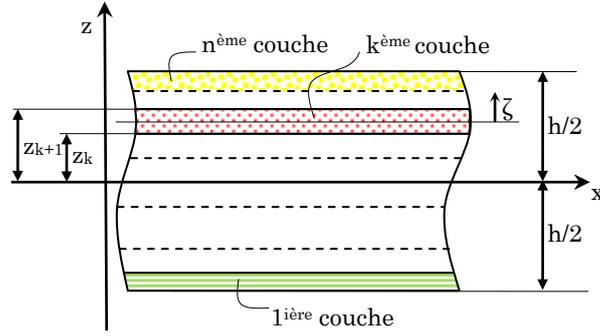


Figure 1.8. Segment schématique d'une plaque multicouche

Considérant la théorie de plaque stratifiée dont la composante globale est celle de la théorie du troisième ordre, le champ de déplacement total peut être résumé comme suit:

$$\begin{aligned} u^k &= u_G + \bar{u}_L^k + \tilde{u}_L^k \\ v^k &= v_G + \bar{v}_L^k + \tilde{v}_L^k \\ w &= w_G \end{aligned} \quad (1.36)$$

La composante locale possède deux groupes, l'un (\bar{u}_L^k ou \bar{v}_L^k) ayant deux termes locaux, l'autre (\tilde{u}_L^k ou \tilde{v}_L^k) avec un seul terme local. Prenant le cas dans lequel le premier groupe consiste en deux termes du premier et deuxième ordre, alors que le deuxième groupe comporte le terme du troisième ordre. La présente combinaison représente donc la théorie de double-superposition 1,2-3, dont les composantes locales s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{u}_L^k(x, y, \xi_k) &= u_1^k(x, y)\xi_k + u_2^k(x, y)\xi_k^2 \\ \bar{v}_L^k(x, y, \xi_k) &= v_1^k(x, y)\xi_k + v_2^k(x, y)\xi_k^2 \\ \tilde{u}_L^k(x, y, \xi_k) &= u_3^k(x, y)\xi_k^3 \\ \tilde{v}_L^k(x, y, \xi_k) &= v_3^k(x, y)\xi_k^3 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Où $\xi_k = a_k z - b_k$; $a_k = \frac{2}{z_{k+1} - z_k}$; $b_k = \frac{z_{k+1} + z_k}{z_{k+1} - z_k}$

Elle doit satisfaire les différentes conditions de continuité suivantes ainsi:

- Imposer séparément la condition de continuité sur les deux termes du premier groupe et le seul terme du deuxième groupe.
- Assurer la condition de continuité de contraintes τ_{yz}^k et τ_{xz}^k sur l'interface $z = z_k$, en se basant sur les relations déformation/déplacement et les équations constitutives tridimensionnelles.
- Satisfaire la condition d'homogénéité des contraintes sur les faces supérieure et inférieures libres, donnée par:

$$\tau_{yz}^k(z_1) = 0, \tau_{xz}^k(z_1) = 0, \tau_{yz}^k(z_{n+1}) = 0 \text{ et } \tau_{xz}^k(z_{n+1}) = 0 \quad (1.38)$$

Dans la théorie de double-superposition 1,2-3 [172], Il est constaté que le nombre total de variables est indépendant du nombre de couches. En comparant avec la théorie de déformation en cisaillement du même ordre, il y a six variables additionnelles, indépendantes de couches. Toutefois, quand elle est comparée avec les théories par-couche, les coefficients d'ordre supérieur (en termes de z) sont liées aux propriétés propres des couches et à la coordonnée z suivant l'épaisseur au lieu de variables inconnues. En plus, basant sur les résultats antérieurs [169-171], les distributions des déplacements plans à travers l'épaisseur prendraient une forme zigzag cependant les contraintes de cisaillement transverse pourraient être dépendantes de couches.

En utilisant la technique de la superposition des composantes du déplacement globales et locales, plusieurs travaux d'analyse et de développement sur la présente théorie pour les composites stratifiées ont été effectués [56, 168, 173-176].

Néanmoins, Wu et al. [174] ont noté que la théorie globale-locale du troisième ordre (à savoir la théorie 1, 2-3 en double superposition, appelée par Li et Liu [172], «les théories généralisées des structures multicouches basées sur l'hypothèse de double superposition») éprouverait des difficultés à prévoir les contraintes de cisaillement transverses avec précision si le nombre de couches est supérieur à cinq. En particulier, l'exactitude de cette théorie diminue lorsqu'elle est appliquée à l'analyse des plaques multicouches non-symétriques. Cependant, ils ont constaté que d'autres théories globales-locales d'ordre supérieur peuvent présenter des contraintes planes adéquates et permettre d'avoir des contraintes de cisaillement transverse satisfaisantes par l'emploi directe des équations constitutives. L'utilisation des champs de déplacement selon les théories «global-local» a acquis toutefois un large domaine d'application dans d'analyse des composites multicouches [56, 168, 173-176].

1.5.2.1. Éléments formulés sur la théorie Global/Local

En se basant sur la théorie de 1,2-3 double superposition proposée par Li et Liu [172], Wu et al. [177] ont dérivé une nouvelle théorie globale-locale d'ordre supérieur pour les plaques stratifiées alternées (angle-ply). Cette théorie satisfait complètement les conditions des surfaces libres et la continuité cinématique et de contraintes aux interfaces. Le nombre d'inconnus de cette théorie est indépendant du nombre de couches, ce qui leur permet de développer deux éléments de plaques avec treize variables indépendantes, un quadrilatère à quatre nœuds ainsi qu'un triangle à trois nœuds. Pour assurer la continuité C^1 du déplacement w , les auteurs ont adopté la méthode raffinée correspondante à l'élément non-conforme proposée par Chen et al. [178-180]. Les résultats numériques obtenus ont montré que les contraintes planes et de cisaillement transverse peuvent être calculés correctement par l'approche directe des équations constitutives, cependant l'approche des équations d'équilibres est utilisée pour calculer la contrainte normale transverse.

Une année après, et afin de prédire les contraintes et les déplacements inter-laminaires dans les plaques multicouches soumises à une charge thermique, Wu et Chen [52] ont présenté deux éléments finis qui satisfont les conditions de C^1

continuité. Les deux éléments se dérivent du fameux élément non conforme à neuf paramètres baptisé BCIZ [171] et qui ne vérifie que la continuité C^0 . Pour assurer une faible continuité C^1 du déplacement w , les auteurs ont adopté le concept de Kirchhoff discret pour formuler le premier élément nommé PDKT, quant à l'autre élément triangulaire raffiné PRT9, la méthode proposée par Chen et al. ([178, 179]) est utilisée.

En 2006, Chen et al. [176] ont proposé une théorie généralisée (nommée la théorie d'ordre supérieur: $m^{ème}$ ordre global- 1,2-3 ordre local) pour les plaques composites multicouches. le développement est basé sur une théorie d'ordre supérieur et autre locale d'ordre 1,2-3, proposée par Li et Liu. Afin d'estimer son applicabilité sur des structures composites avec différent nombre de couches, ils ont utilisée un champ du déplacement composé d'un polynôme d'ordre m ($3 < m < 9$) de coordonnée globale z suivant l'épaisseur et d'une série de puissance d'ordre 1, 2-3 de la coordonnée locale ζ_k au niveau de chaque couche. Ils ont montré que la présente théorie reste encore efficace quand le nombre de couches est compris entre 5 et 14. Il ont montré aussi que l'élément triangulaire amélioré de Chen et Cheung ([179, 181]) possède des performances élevées ayant comparé avec les éléments reconnus.

Pour éviter l'utilisation des fonctions du déplacement de continuité C^1 , le travail qu'a été fait récemment par Xiaohui, Wanji et Zhen [182], avait pour but le développement d'une nouvelle théorie de zigzag qui exige au niveau d'implémentation éléments finis que des fonctions de forme C^0 . La fonction zigzag proposée satisfait a priori les conditions de continuité inter-laminaire de contraintes du cisaillement ainsi que les conditions d'homogénéité. En outre, le nombre total d'inconnues impliquées dans le modèle est indépendant du nombre de couches. Une comparaison vis à vis d'autres théories de zigzag a montré que les dérivées premières du déplacement transverse ont été ressorties à partir du champ de déplacement plan du modèle proposé, de sorte que des fonctions d'interpolation de type C^0 uniquement sont nécessaires à la mise en œuvre « élément fini».

1.6 Conclusion

Toute continuité des contraintes inter laminaire nécessite forcément une discontinuité des déformations transverses. Cette condition pourrait se traduire par un champ de déplacement ou moins linéaire par couche, échelonné ou sous forme de zigzag. Trois différentes approches sont disponibles et qui sont largement employées dans la formulation des théories ainsi que les modèles numériques correspondants. Elles se résument aux travaux de Lekhnitskii, Ambartsumian et Reissner, dont l'objectif est de reproduire une cinématique et un état de contraintes assez proches de la réalité dans le comportement des structures plaques/coques composites.

Afin de montrer l'effet de la fonction C^0 de la forme zigzag de Murakami sur les théories classiques et d'ordre supérieur, plusieurs auteurs [5, 123, 124, 137], ont conclu qu'un modèle en zigzag constitue un bon outil pour augmenter les performances des deux théories. En particulier et à travers des évaluations numériques, ils ont montré

qu'il est plus commode d'améliorer une théorie des plaques en introduisant une fonction zigzag que la raffiner en ajoutant deux ou trois termes d'ordre supérieur. Cependant, pour bien représenter les effets locaux ou d'analyser les plaques épaisses, un modèle avancé (par couche ou 3D) est requis en telles conditions.

L'avantage de la formulation en zigzag en utilisant la fonction de Murakami est qu'on peut l'exploiter pour les deux composantes du déplacement autant que pour le troisième. Cependant, il est difficile d'appliquer les théories de Lekhnitskii et de Ambartsumian si l'effet du zigzag est exigé pour le déplacement transversal u_3 où l'ajout des efforts additionnels est nécessaire [124].

Du point de vue modélisation numérique, des éléments finis généralement conformes et de haute précision ont été formulés et élaborés par Di Sciuva. Ces éléments ne requièrent que cinq déplacements généralisés pour décrire la cinématique de déformation de la plaque stratifiée. Ils satisfont à priori les conditions de continuité géométrique et des contraintes sur les interfaces. Néanmoins, ils souffrent d'un défaut fâcheux, qui est l'exigence de la continuité C^1 du degré de liberté de la flèche transverse w afin que son interpolation du type Hermiten soit impliquée dans les modèles éléments finis. Généralement la présence de dix degrés de liberté par nœud rend difficile l'implémentation de ces éléments dans des codes de calcul commerciaux qui n'admettent que six degrés de liberté.

Plusieurs scientifiques ont trouvé que la théorie proposée en 1993 par Cho et Parmerter pour formuler leurs éléments finis des plaques multicouches/sandwichs est la plus attractive à adopter parmi les théories raffinées de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT). Elle satisfait la majorité des exigences de continuité réclamées dans une formulation envisagée. Afin d'améliorer les performances de leurs résultats, le concept des éléments conformes des plaques minces a été utilisé dans certains cas.

Un examen sur les théories de zigzag existantes, nous a permis de conclure que selon l'intégration des équations d'équilibre tridimensionnel, des dérivées du déplacement d'ordre élevé devraient être calculées (généralement la continuité C^1 des fonctions du déplacement transverse est nécessaire) pour prédire les contraintes de cisaillement transverses avec précision.

Afin de surmonter ces exigences, nous évoquons particulièrement ici, un modèle élément fini tridimensionnel basé sur la théorie dite de sous-couche « sublaminated theory », proposée par Cho et ses collaborateurs. Ce modèle combine à la fois les avantages de la théorie par-couche et celle de zigzag d'ordre supérieur. Le fait qu'il n'inclut que les degrés de liberté standards, le rend compatible avec les exigences recommandées dans les codes éléments finis commerciaux.

Vu les performances de quelques théories et éléments précités, qui se sont inspirées par fois d'elles mêmes, et les conditions de continuités exigées dans les structures composites, les scientifiques ont toujours le souci de préserver les approches classiques ou de premier ordre. Toutefois, il est évident que le modèle en

déformation du premier ordre seul est incapable de présenter d'une façon fiable les effets locaux dans les plaques composites. Donc, La nécessité d'un modèle qui inclut la forme zigzag autant que des termes d'ordre élevé et qui respecte les conditions de continuité, rend les théories dites « m^{th} order global-local theories » plus compétitives et délimitent toute formulation future envisagée.

Chapitre 2 Modèle Discret en Déplacements avec une fonction Zigzag pour les plaques composites. Formulation théorique

2.1 Introduction

Dans le début des années 1980, de nombreux travaux ont été consacrés à la formulation dite « Discret Kirchhoff », dont plusieurs éléments finis ont été développés avec succès par la suite, notamment ceux basés sur le concept de Batoz et BenTahar [183]. Malgré leur puissance, ces éléments étaient, malheureusement incapables de représenter un comportement adéquat de plaques épaisses. La théorie de Reissner-Mindlin qui tient en compte l'effet de cisaillement transverse s'est avéré une alternative à cet effet, dont plusieurs auteurs préservaient ses hypothèses dans leurs développements, en citant les éléments simples et robustes pour les plaques isotropes, issus de la même école, formulés par Lardeur [63], Katili [1, 2] et Ayad [57]. Bien que cette formulation conduise souvent à un champ de contrainte de cisaillement constant et fait recours aux paramètres de correction, elle reste convaincante comme support pour toute future formulation améliorée pour les plaques composites.

Ces dernières décennies, plusieurs travaux de recherche se sont focalisés sur la formulation des modèles éléments finis qui fournissent des prévisions précises sur l'état de contraintes. L'adoption de l'approche de Mindlin constitue l'un de nos axes d'intérêt, où un modèle variationnel Discret en Déplacement de Mindlin, labélisé DDM « Displacement Discrete Mindlin » est développé [3]. Celui ci prend en compte l'effet de cisaillement transverse intégrant le caractère multicouche des structures composites. Outre que les éléments développés passaient les patch-tests, ils sont à l'abri de tous problèmes numériques (verrouillage, distorsion ... etc.) [4]. Afin d'appliquer ce concept pour les structures composites, en utilisant des éléments finis simples ayant que des nœuds aux sommets, deux hypothèses de Mindlin modifiées localement ont été introduites au modèle isotrope. La première hypothèse est cinématique, elle consiste à introduire, sous forme d'une intégrale de contour, une équation cinématique de déformation du cisaillement transverse. Elle permet l'élimination de verrouillage en cisaillement, sans introduire des fonctions bulles, ni faire le recours à l'intégration réduite. Telle méthode est communément connue « ANS » (Assumed Naturel Strain), développée par Bathe et al. [62]. La seconde hypothèse est mécanique. Elle intègre l'aspect multicouche de la plaque à travers deux lois de comportement, en flexion et en cisaillement, et deux équations

d'équilibre. Son principal avantage est l'élimination locale de degrés de liberté additionnels de rotations associés à une approximation initialement quadratique.

Dans le but de surmonter les difficultés en termes de précision liées à la constance du champ de déformations en cisaillement au niveau des éléments finis quelconques ou de ceux basés sur le concept DDM particulièrement, une technique améliorée est nécessaire. Selon de nombreuses recommandations sur les approches de formulation des plaques multicouches, plusieurs scientifiques ont conclu que la vérification de la continuité de contraintes inter-laminaires exige nécessairement une discontinuité des déformations transverses. Cette condition peut être concrétisée par l'usage d'un champ de déplacement linéaire (ou non linéaire) par morceaux, entre autres celui qui décrit une forme de zigzag.

En effet, tous les modèles proposés s'inspirent de trois approches fondamentales (§ 1.4.1) qui remontent aux travaux de Lekhnitskii [100], Ambartsumian [101, 102] et Reissner. La dernière approche est devenue par la suite inhérente à Murakami, à la suite d'un développement récent fondé sur sa fameuse fonction de zigzag. [5]. Carrera a contribué également au même profit par l'exploitation et la valorisation de cette technique avec une étude exhaustive [74, 95, 96, 99, 124, 184, 185]. Une description détaillée est donnée dans la section (§ 1.4.1.3).

2.2 Formulation théorique de l'élément fini discret de plaque avec zigzag DMQPz

La présente partie consiste à décrire la formulation d'un nouvel élément fini discret de plaque, quadrilatère à 4 nœuds, labélisé DMQPz (Discrete Mindlin Quadrilateral Plate with Zigzag) [186, 187]. L'élément préliminaire est un quadrilatère à huit nœuds aux sommets et aux mi-cotés. La fonction zigzag de Murakami est incorporée par la suite dans le modèle DDM. L'élément est basé sur un champ de déplacement transverse constant suivant z et des déplacements plans linéaire par morceaux dont les rotations sont basées sur un champ quadratique incomplet. Des hypothèses cinématiques et mécaniques seront introduites afin d'éliminer les incréments de rotations issues de cette interpolation d'ordre élevée et de maintenir en conséquence que les nœuds de sommets. Les paramètres cinématiques et de déformations sont illustrés dans cette partie, en suivant le concept de Mindlin modifié et qui nous conduit finalement à la construction subséquente des matrices de rigidité et de masse nécessaires à l'étude statique et dynamique.

2.2.1 Champs des déplacements

Dans une description des champs du déplacement dans une plaque monocouche équivalente, l'effet de la variation zigzag suivant l'épaisseur sur les déplacements plans peut être traduit dans le modèle DDM avec seulement des variables du déplacement, en faisant référence à la fonction zigzag de Murakami [74] (figure 1.7). Son amplitude exprimée par u^M est incluse avec un terme linéaire.

L'adoption des hypothèses de la théorie du premier ordre dans le présent modèle, tout en ajoutant le terme zigzag, permet toutefois de définir une variation des déplacements u et v d'un point quelconque q linéaire par morceaux suivant z (suivant x et y) (figure 2.1). Le déplacement transversal w reste invariant et ne dépend que de x et y .

$\{N_i\}$	$\{P_k\}$
$4N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$	$2P_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$4N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)$	$2P_6 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$4N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)$	$2P_7 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$4N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)$	$2P_8 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)$

Tableau 2.1 Les fonctions de forme utilisées dans l'élément quadrilatère

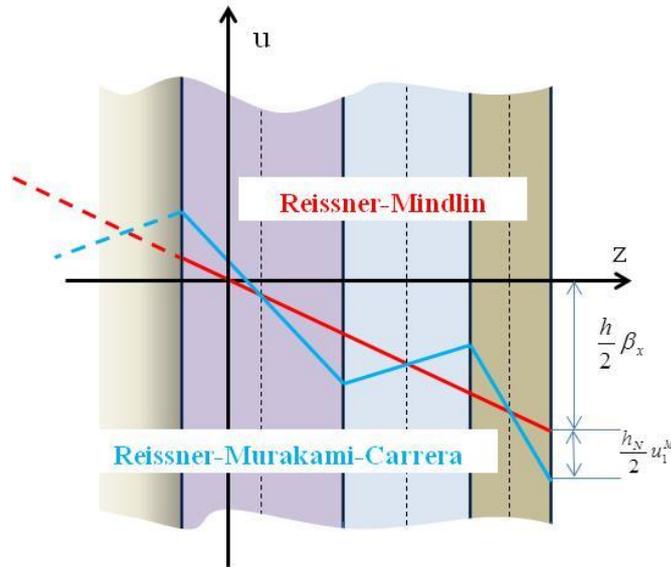


Figure 2.1 Cinématique du modèle de Reissner-Murakami-Carrera avec zigzag, déplacement u .

En conséquence, le champ du déplacement d'un problème de flexion- cisaillement, avec la prise en compte de l'effet de zigzag, supposé petit entre la configuration initiale et celle déformée est donné par :

$$\bar{u}_q(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} + M(z) \begin{Bmatrix} u_1^M(x, y) \\ u_2^M(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

u_1^M et u_2^M sont les variables généralisées associées à la fonction zigzag $M(z)$ (relation 1.18a,b).

β_x et β_y sont les rotations de la normale du plan moyen de la plaque non-déformée autour des axes y et x respectivement. Comme le déplacement transversal w est supposé linéaire dans le plan, nous proposons d'approcher les rotations β_x et β_y avec une interpolation quadratique incomplète, qui fera apparaître des accroissements de rotations, $\Delta\beta_{sk}$ sur les quatre côtés élémentaires. Les champs de déplacement transverse et des rotations sont donnés par la formule suivante:

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i, \quad u_a^M = \sum_{i=1}^4 N_i u_{ai}^M \quad ; \quad a=1, 2 \quad (2.2a,b)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 P_k \begin{Bmatrix} C_k \\ S_k \end{Bmatrix} \Delta\beta_{sk} \quad (2.2c)$$

β_{xi}, β_{yi} sont les rotations nodales aux sommets du quadrilatère, N_i et P_k sont des fonctions d'interpolations prescrites en termes des fonctions indépendantes linéaires et quadratiques respectivement (tableau 2.1). Les coefficients C_k et S_k sont les cosinus directeurs du vecteur reliant le nœud i par j du côté k , faisant un angle θ_k (figure 2.2). Les rotations tangentielles sont liées aux rotations cartésiennes par la relation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}_{i,j} \quad (2.3)$$

leurs approximations, illustrées sur la figure (2.4), s'écrivent:

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{si} + \frac{s}{L_k} \beta_{sj} + 4 \frac{s}{L_k} \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \Delta\beta_{sk} \quad (2.4)$$

$$\beta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{ni} + \frac{s}{L_k} \beta_{nj} \quad (2.5)$$

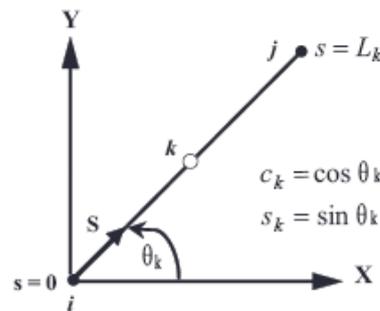


Figure 2.2 Cosinus directeur sur un bord élémentaire k

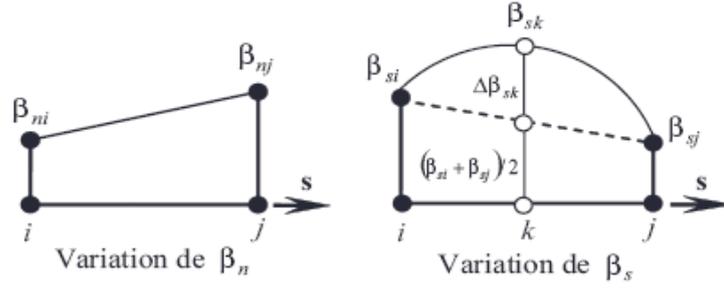


Figure 2.3 Interpolation des rotations aux mi-côtés

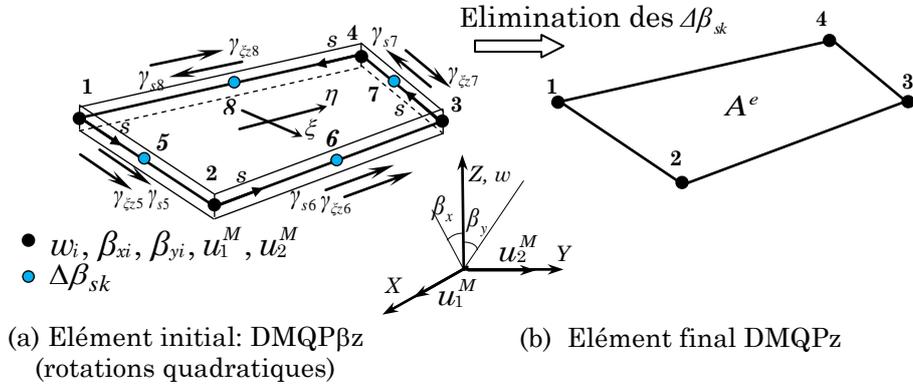


Figure 2.4 Élément DMQPz de plaques multicouches

2.2.2 Champs des déformations

En se basant sur l'hypothèse de Mindlin/Reissner, nous pouvons définir les différentes composantes du vecteur de déformations, tout en négligeant la contrainte σ_{zz} (hypothèse des contraintes planes). Selon le champ proposé (équation 2.2a), la déformation transverse normale est encore nulle. Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (2.1) dans la relation linéaire déformations-déplacements suivante:

$$\langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \rangle = \langle u_{,x} \ u_{,y} \ u_{,y} + v_{,x} \ w_{,x} + u_{,z} \ w_{,y} + v_{,z} \rangle \quad (2.6)$$

Il se résume à:

$$\langle \varepsilon_t \rangle = \langle \langle \varepsilon_s \rangle \langle \gamma_s \rangle \rangle ; \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.7)$$

$\langle \varepsilon_s \rangle$ et $\langle \gamma_s \rangle$ sont respectivement les déformations de flexion et du cisaillement transverse couplés avec des déformations dues au zigzag.

Soit:

$$\langle \varepsilon_s \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle = z \langle \chi_1 \rangle + M(z) \langle \chi_2 \rangle \quad (2.8)$$

Où, $\langle \chi_1 \rangle$ est une courbure de flexion, $\langle \chi_2 \rangle$ est une déformation due au zigzag. Elles sont définies par:

$$\langle \chi_1 \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \quad (2.9)$$

$$\langle \chi_2 \rangle = \langle u_{1,x}^M \quad u_{2,y}^M \quad u_{1,y}^M + u_{2,x}^M \rangle \quad (2.10)$$

Nous rappelons que l'ajout des termes du zig-zig reproduit la discontinuité de la première dérivée du déplacement suivant (z) sur chaque interface de couche.

En substituant l'interpolation nodale des termes de zigzag et des rotations, équations (2.2b) et (2.2c) dans les vecteurs (2.9) et (2.10), nous pouvons écrire sous forme matricielle:

$$\begin{aligned} \langle \chi_1 \rangle &= [B_{1f}] \{ \Delta \beta_n \} = [B_{1b\beta}] \{ u_n \} + [B_{b\Delta\beta}] \{ \Delta \beta_n \} \\ \langle \chi_2 \rangle &= [B_{2b\beta}] \{ u_n \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec

$$[B_{1b\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad i=1,4 \quad (2.12)$$

et

$$[B_{2b\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & \dots \end{bmatrix} \quad i=1,4 \quad (2.13)$$

d'où

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= j_{11} N_{i,\xi} + j_{12} N_{i,\eta} \\ N_{i,y} &= j_{21} N_{i,\xi} + j_{22} N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (2.14)$$

j_{11} , j_{12} , j_{21} , j_{22} sont les composantes de la matrice Jacobéenne inverse, définies par:

$$[j] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix}, \quad [J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

et

$$[B_{b\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} C_k & P_{k,x} & \dots \\ S_k & P_{k,y} & \dots \\ C_k & P_{k,y} + S_k & P_{k,x} & \dots \end{bmatrix} \quad k = 5,6,7,8 \quad (2.16)$$

avec

$$\begin{aligned} P_{k,x} &= j_{11}P_{k,\zeta} + j_{12}P_{k,\eta} \\ P_{k,y} &= j_{21}P_{k,\zeta} + j_{22}P_{k,\eta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

et

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad u_{1i}^M \quad u_{2i}^M \quad \dots \quad i=1,4 \rangle \quad (2.18)$$

$$\langle \Delta\beta_n \rangle = \langle \Delta\beta_{s5} \quad \Delta\beta_{s6} \quad \Delta\beta_{s7} \quad \Delta\beta_{s8} \rangle \quad (2.19)$$

Les déformations du cisaillement transverse peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\{y_s\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \{y_0\} + \frac{2}{h_k} (-1)^i \{u^M\} \quad (2.20)$$

avec

$$\{u^M\} = \begin{Bmatrix} u_1^M \\ u_2^M \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

et

$$\langle y_0 \rangle = \langle w_{0,x} + \beta_x \quad w_{0,y} + \beta_y \rangle \quad (2.22)$$

2.2.2.1. Verrouillage en cisaillement

D'après l'expression du cisaillement, il convient de noter que les dérivées des fonctions de forme interviennent dans le calcul de l'intégrale de l'énergie du cisaillement. Il en résulte donc, avec des fonctions d'interpolation linéaires, une surestimation de la rigidité en cisaillement, i.e. le comportement en cisaillement devient prédominant devant les autres comportements. Ce phénomène, nommé « verrouillage en cisaillement », est d'autant plus notable que la plaque est mince.

Pour éviter ce problème numérique, il existe différentes méthodes qui peut se faire numériquement ou sur le plan de la formulation, citant:

Sous intégration

Il s'agit d'atténuer l'effet de cisaillement en sous-intégrant la contribution de la partie correspondante. Dans ce cas, on parle également d'une intégration sélective lorsque l'un des comportements seul est sous-intégré ou intégré de façon modifiée. Cette technique est couramment implantée dans les codes commerciaux d'éléments et conduit généralement à des bons résultats.

Formulation mixte

L'introduction du cisaillement dans un problème de flexion peut être réalisée comme une « contrainte » à la faveur d'une formulation mixte. Nous avons constaté dans la formulation mixte hybride naturelle d'un élément fini de plaque projeté en cisaillement [70], que l'introduction d'une telle contrainte (un champ de contrainte défini à partir des équations d'équilibre) est strictement libre de ce genre de blocage. Dans la plus part des éléments finis basés sur le principe mixte de Reissner-Mindlin,

les contraintes sur le comportement en cisaillement transverse peuvent être localisées en certains points qui correspondent finalement aux points de Gauss. Dans une telle technique, il faut toutefois veiller à ce que les degrés de liberté (ddl) de contraintes soient en nombre plus faible que le nombre de ddl libres. Cette condition est nécessaire mais pas toujours suffisante. Des modes parasites peuvent également apparaître dans ces éléments sous-intégrés du point de vue efforts tranchants.

2.2.2.2. Représentation discrète du cisaillement transverse:

Vu ces problèmes de verrouillage numérique dû à la prise en compte de la déformation en cisaillement dans les éléments de Reissner-Mindlin, une alternative consiste à introduire ce comportement de façon discrète [188]. On ne part donc plus de la forme variationnelle intégrale, mais on impose sur une certaine aire de l'élément le cisaillement pris sous une forme indépendante des déformations qui peuvent être calculées à partir de la solution du problème discret suivant: $\gamma_{\alpha z} = w_{,\alpha} + \theta_{\alpha}$.

Nous définissons les déformations cartésiennes du CT $\{\gamma_s\}$ en fonction des déformations iso-paramétriques $\{\gamma_{\xi}\}$ que nous interpolons linéairement, deux à deux, sur les bords élémentaires.

soit :

$$\{\gamma_s\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [j]\{\gamma_{\xi}\} \quad (2.23)$$

où

$$\{\gamma_{\xi}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

[j] est l'inverse de la matrice Jacobéenne (rel. 2.15).

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_{\xi s 5}^l + \frac{1}{2}(1+\eta)\gamma_{\xi s 7}^l \\ \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_{\eta s 8}^l + \frac{1}{2}(1+\xi)\gamma_{\eta s 6}^l \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$\gamma_{\xi z 5}$, $\gamma_{\eta z 6}$, $\gamma_{\xi z 7}$ et $\gamma_{\eta z 8}$ sont les déformations de CT iso-paramétriques définies sur les quatre côtés (5,6,7 et 8) respectivement (figure 2.5).

Elles sont reliées aux déformations tangentielles de bord (γ_{sk} , $k=5,6,7$ et 8) par :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi s 5} &= \frac{L_5}{2} \gamma_{s5}, & \gamma_{\xi s 7} &= -\frac{L_7}{2} \gamma_{s7} \\ \gamma_{\eta s 6} &= \frac{L_6}{2} \gamma_{s6}, & \gamma_{\eta s 8} &= -\frac{L_8}{2} \gamma_{s8} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Posant

$$[N_{\gamma}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} L_5 J_{11}(1-\eta) & L_6 J_{12}(1+\xi) & -L_7 J_{11}(1+\eta) & -L_8 J_{12}(1-\xi) \\ L_5 J_{21}(1-\eta) & L_6 J_{22}(1+\xi) & -L_7 J_{21}(1+\eta) & -L_8 J_{22}(1-\xi) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

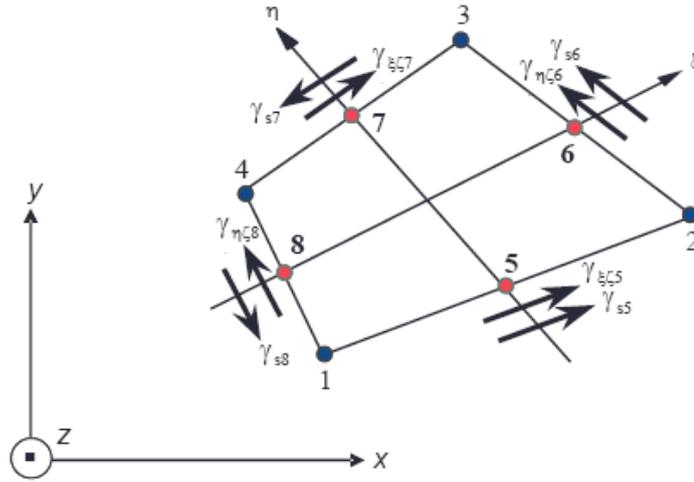


Figure 2.5 Déformations de CT de bords

Les déformations du cisaillement (équation 2.23) peuvent s'écrire ainsi :

$$\{\gamma_s\} = [N_\gamma]\{\gamma_{sk}\} \quad (2.28)$$

avec

$$\{\gamma_{sk}\}^T = (\gamma_{s5} \quad \gamma_{s6} \quad \gamma_{s7} \quad \gamma_{s8}) \quad (2.29)$$

2.2.3 Equations de l'équilibre statique et efforts résultants-déformations

Les équations d'équilibre homogène d'élasticité 3D doivent être vérifiées, l'intégration de ces équations dans l'épaisseur pour satisfaire l'équilibre des forces et des moments se traduit selon [189], par :

$$\begin{aligned} M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y &= 0 \\ H_{x,x} + H_{xy,y} - H_{xz} &= 0 \\ H_{xy,x} + H_{y,y} - H_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

les efforts résultants associés au modèle sont donc:

- Moments de flexion

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = [H_f]\{x_1\} + [H_{fz}]\{x_2\} \quad (2.31)$$

- Efforts dans le plan dus au zigzag:

$$\{H_P\} = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} M(z) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = [H_{fz}] \{\chi_1\} + [H_{zz}] \{\chi_2\} \quad (2.32)$$

- Efforts de cisaillement transverse

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = [H_c] \{\gamma_0\} + [H_{c01}] \{u^M\} \quad (2.33)$$

- Efforts dans le plan transverse dus au zigzag

$$\{H_T\} = \begin{Bmatrix} H_{xz} \\ H_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2(-1)^l}{h_l} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = 2[H_{c01}] \{\gamma_0\} + [H_{c11}] \{u^M\} \quad (2.34)$$

Où $\{u^M\}$ et $\{\gamma_0\}$ sont données par les relations (2.21) et (2.22)

les contraintes planes et du cisaillement transverse peuvent s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [H(z)](z\{\chi_1\} + M(z)\{\chi_2\}) \\ \{\tau(z)\} &= [H_\tau(z)] \left(\{\gamma_0\} + \frac{2}{h_k} (-1)^l \{u^M\} \right) \end{aligned} \quad (2.35a,b)$$

avec

$$\begin{aligned} [H_f] &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H(z)] dz = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{nc} (z_{l+1}^3 - z_l^3) [H] \\ [H_{fz}] &= [H_{zf}] = \int_{-h/2}^{h/2} z M(z) [H(z)] dz = \sum_{l=1}^{nc} \frac{2(-1)^l}{h_l} \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - \frac{1}{2} z_{0l} (z_{l+1}^2 - z_l^2) \right) [H] \quad (2.36a-c) \\ [H_{zz}] &= \int_{-h/2}^{h/2} M^2(z) [H(z)] dz = \sum_{l=1}^{nc} \frac{4}{h_l} \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - z_{0l} (z_{l+1}^2 - z_l^2) + z_{0l}^2 . h_l \right) [H] \\ [H_c] &= \int_{-h/2}^{h/2} [H_\tau(z)] dz = \sum_{l=1}^{nc} h_l [H_\tau] \\ [H_{c01}] &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(-1)^l}{h_l} [H_\tau(z)] dz = \sum_{l=1}^{nc} 2 \cdot (-1)^l [H_\tau] \quad (2.37a-c) \\ [H_{c11}] &= \int_{-h/2}^{h/2} M^2(z) [H_\tau(z)] dz = \sum_{l=1}^{nc} \frac{4}{h_l} [H_\tau] \end{aligned}$$

Les matrices $[H]$ et $[H_\tau]$ sont définies par les expressions (A.11a et A.11b)

2.2.4 Elimination des variables $\Delta\beta_{sk}$

Il existe différentes façons d'exprimer les déformations de substitutions utilisées ici: une interpolation des déformations du cisaillement calculées aux nœuds, une interpolation différente pour évaluer β_α en flexion et en cisaillement, l'utilisation des déformations constants par côté, l'évaluation de ces déformations à partir de l'énergie du cisaillement et des lois de comportement.

La combinaison de ces variantes nous permet non seulement l'élimination des rotations des mi- côtés, mais nous fournit également grâce à leur expression finale (équation 2.62), des courbures en flexion équation (2.11) qui dépendent étroitement de déplacements transverses.

2.2.4.1. Hypothèse cinématique

A ce stade, on cherche à imposer la condition de déformations du cisaillement constantes par côté. Rappelons que cette condition peut être appliquée soit par collocation par un point du contour ou à l'intérieur de l'élément, soit par une intégrale de contour ou sur l'élément. Une large famille d'éléments finis qui se distinguent par la façon d'imposer cette condition, appelée DST et DSQ (§ 1.3.3) est ainsi disponible dans les codes de calcul.

Nous procédons dans notre démarche à projeter les déformations tangentiels sur les degrés de liberté élémentaires $\{u_n\}$, y compris $\{\Delta\beta_{sk}\}$, en utilisant une intégrale de contour le long de chaque côté k :

soit

$$\int_0^{L_k} \begin{Bmatrix} \gamma_{sk} - \tilde{\gamma}_{sk} \\ \gamma_{nk} - \tilde{\gamma}_{nk} \end{Bmatrix} ds = \{0\} \text{ (Hypothèse cinématique)} \quad (2.38)$$

Avec

$$\tilde{\gamma}_{sk} = (w_{,s} + \beta_s + \frac{2(-1)^l}{h_l} u_s^M)_k \quad (2.39)$$

L'approximation de β_s est déjà définie dans l'expression (2.4), cependant, on propose une fonction linéaire suivant s pour le terme de zigzag u_s^M , cette variation est semblable à celle utilisée pour définir β_n , (l'équation 2.5).

la substitution de (2.39) dans (2.38) implique, après intégration, l'expression suivante:

$$\gamma_{sk} = \frac{w_j - w_i}{L_k} + \frac{1}{2} (\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3} \Delta\beta_{sk} + \frac{(-1)^l}{h_l} (u_{si}^M + u_{sj}^M) \quad (2.40)$$

de la même façon, on procède à définir γ_{nk} ainsi:

soit:

$$\tilde{\gamma}_{nk} = s_k \left(w_{,x} + \beta_x + \frac{2(-1)^l}{h_l} u_1^M \right) - c_k \left(w_{,y} + \beta_y + \frac{2(-1)^l}{h_l} u_2^M \right) \quad (2.41)$$

$$\tilde{\gamma}_{nk} = (s_k . w_{,x} - c_k . w_{,y}) + (s_k . \beta_x - c_k . \beta_y) + \frac{2(-1)^l}{h_l} (s_k . u_1^M - c_k . u_2^M) \quad (2.42)$$

$$\tilde{\gamma}_{nk} = (s_k . w_{,x} - c_k . w_{,y}) + \beta_{nk} + \frac{2(-1)^l}{h_l} u_n^M \quad (2.43)$$

Posant

$$\tilde{\gamma}_{n0k} = \left((s_k \cdot u_{,x} - c_k \cdot u_{,y}) + \beta_n \right)_k \quad (2.44)$$

En effet, l'évaluation de l'intégrale du terme $\tilde{\gamma}_{n0k}$ n'apporte aucun intérêt dans la suite de la formulation. Seul le terme qui dépend des couches sera explicitement détaillé. L'intégrale (2.38) nous permet de déduire:

$$\gamma_{nk} = \gamma_{n0k} + \frac{(-1)^l}{h_l} (u_{ni}^M + u_{nj}^M) \quad (2.45)$$

Dans l'expression (2.46) nous réécrivons les composantes des déformations tangentielles et normales à chaque côté, équations (2.40) et (2.45) de sorte à séparer les termes constants et ceux dépendants de la coordonnée z suivant l'épaisseur.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{sk} \\ \gamma_{nk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{s0} \\ \gamma_{n0} \end{Bmatrix}_k + \frac{(-1)^l}{h_l} \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix}_k \quad (2.46)$$

2.2.4.2. Hypothèse mécanique

Afin d'éliminer les variables nodales des mi- côtés $\Delta\beta_{sk}$, nous avons opté pour une méthode heuristique qui consiste à utiliser une deuxième hypothèse modifiée de Mindlin et permet de prendre en compte le caractère multicouche des plaques composites.

L'effort tranchant sur le côté k est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} T_{sk} \\ T_{nk} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [H_{\tau k}(z)] \begin{Bmatrix} \gamma_{sk} \\ \gamma_{nk} \end{Bmatrix} dz \quad (2.47)$$

Avec :

$$[H_{\tau k}] = [P_k] [H_{\tau}(z)] [P_k]^{-1} \quad (2.48)$$

$[H_{\tau}]$: La matrice constitutive reliant les contraintes aux déformations transverses dans une couche quelconque, (rel. A.11b).

$$[P_k] = [P_k]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ \sin\theta_k & -\cos\theta_k \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

θ_k est l'angle comprise entre l'axe $\vec{o}\vec{x}$ du repère cartésien et l'axe s reliant le nœud i et j du bord k (figure 2.2).

en substituant les déformations de cisaillement (rel. 2.46) dans (2.47), les efforts tranchants définis dans le repère tangentiel au coté k seront:

$$\begin{Bmatrix} T_{sk} \\ T_{nk} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [H_{\tau k}(z)] \left(\begin{Bmatrix} \gamma_{s0} \\ \gamma_{n0} \end{Bmatrix}_k + \frac{(-1)^l}{h_l} \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix} \right) dz \quad (2.50)$$

Après intégration, on obtient:

$$\begin{Bmatrix} T_{sk} \\ T_{nk} \end{Bmatrix} = [H_{ck}] \begin{Bmatrix} \gamma_{s0} \\ \gamma_{n0} \end{Bmatrix}_k + \sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix}_k \quad (2.51)$$

d'où:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{s0} \\ \gamma_{n0} \end{Bmatrix}_k = [H_{ck}]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix}_k - \sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix}_k \right) \quad (2.52)$$

La substitution de la déformation γ_{s0} , équation (2.52), dans l'expression (2.46) conduit à l'expression suivante:

$$\gamma_{sk} = \left\langle H_{ck11}^{inv} \quad H_{ck12}^{inv} \right\rangle \left(\begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix}_k - \sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix}_k \right) + \frac{(-1)^l}{h} (u_{si}^M + u_{sj}^M) \quad (2.53)$$

Nous procédons à écrire dans le repère tangentiel les relations d'équilibre (§ 2.2.3) sur la surface moyenne reliant les efforts tranchants $\{T\}$ en fonction des moments, (figure 2.6).

soit:

$$\langle M \rangle = \langle M_s \quad M_n \quad M_{sn} \rangle \quad (2.54)$$

d'après (2.30), les efforts tranchants s'écrivent:

$$T_s = M_{s,s} + M_{sn,n}, \quad T_n = M_{sn,s} + M_{n,n} \quad (2.55)$$

avec

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_n \\ M_{sn} \end{Bmatrix} = [H_f] \{ \chi_{1s} \} + [H_{fz}] \{ \chi_{2s} \} \quad (2.56)$$

$$\{ \chi_{1s} \} = \begin{Bmatrix} \beta_{s,s} \\ \beta_{n,n} \\ \beta_{s,n} + \beta_{n,s} \end{Bmatrix}, \quad \{ \chi_{2s} \} = \begin{Bmatrix} u_{s,s}^M \\ u_{n,n}^M \\ u_{s,n}^M + u_{n,s}^M \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Le fait que u_s^M et u_n^M sont des approximations linéaires en s , les efforts tranchants ne sont que des fonctions de la deuxième dérivée de β_s , tel que:

$$\begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} = \beta_{s,ss} \begin{Bmatrix} H_{f11} \\ H_{f13} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

avec

$$\beta_{s,ss} = -\frac{8}{L_k^2} \Delta \beta_{sk} \quad (2.59)$$

La substitution de cet effort dans l'expression (2.53), nous permet d'écrire

$$\gamma_{sk} = -\varphi_k^{ml} \Delta\beta_{sk} - \left\langle H_{ck11}^{inv} \quad H_{ck12}^{inv} \right\rangle \left(\sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix} \right) + \frac{(-1)^l}{h_l} (u_{si}^M + u_{sj}^M) \quad (2.60)$$

avec φ_k^{ml} est le facteur d'influence du CT, défini par :

$$\varphi_k^{ml} = 8(H_{f11} \frac{H_{ck11}^{inv}}{L_k^2} + H_{f13} \frac{H_{ck12}^{inv}}{L_k^2}) \quad (2.61)$$

la combinaison des équations (2.40) et (2.60) permet de définir les incréments des rotations, il en résulte :

$$\Delta\beta_{sk} = \frac{3}{2 + 3\varphi_k^{ml}} \left[\frac{w_i - w_j}{L_k} - \frac{1}{2}(\beta_{si} + \beta_{sj}) - \left\langle H_{ck11}^{inv} \quad H_{ck12}^{inv} \right\rangle \left(\sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix} \right) \right] \quad (2.62)$$

Remarques

1. Les rotations des mi- cotés $\Delta\beta_{sk}$ sont définies sur le plan moyen de la plaque. L'expression (2.62) montre leur dépendance du caractère globale de plaque.
2. Les termes de déplacement transverse w_i et w_j associés à l'écriture des variables $\Delta\beta_{sk}$, équation (2.62), sont explicitement introduits lors de l'évaluation des courbures χ_1 .

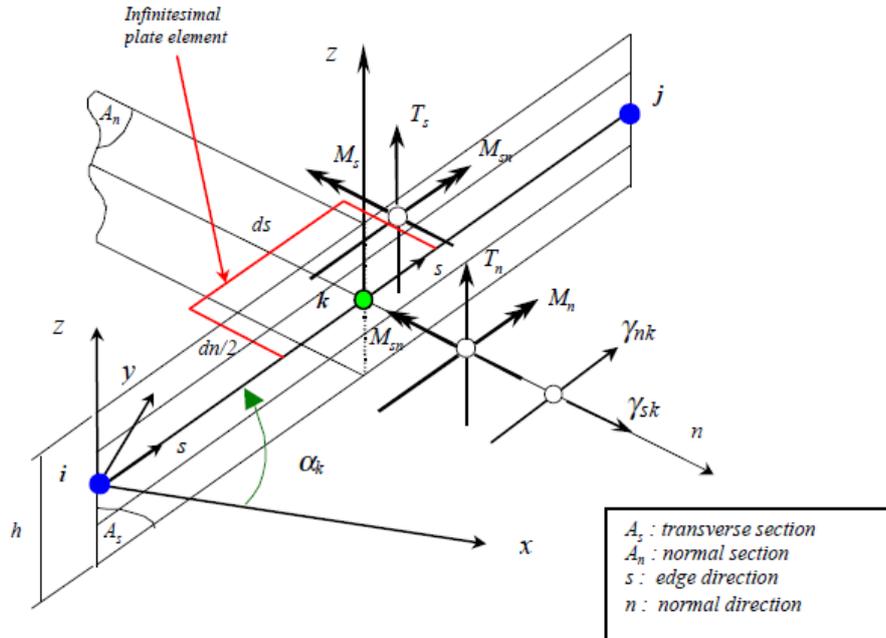


Figure 2.6 hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire i-j

L'équation (2.62) appliquée aux différents côtés élémentaires k permet d'écrire sous forme matricielle les rotations nodales sur les mi- côtés en fonction des variables nodales.

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n][[A_{G0}] + [A_{G1}]]\{u_n\} \quad (2.63)$$

avec

$$[A_n] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2 + 3\varphi_5^{ml}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2 + 3\varphi_6^{ml}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2 + 3\varphi_7^{ml}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2 + 3\varphi_8^{ml}} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

et

$$[A_{G0}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2/L_5 & -C_5 & -S_5 & 0 & 0 & -2/L_5 & -C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L_6 & -C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/L_8 & -C_8 & -S_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/L_6 & -C_6 & -C_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/L_7 & -C_7 & -S_7 & 0 & 0 & -2/L_7 & -C_7 & -S_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L_8 & -C_8 & -S_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$[A_{G1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{15} & F_{25} & 0 & 0 & 0 & F_{15} & F_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{16} & F_{26} & 0 & 0 & 0 & F_{16} & F_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{17} & F_{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{18} & F_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{18} & F_{28} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Avec

$$F_{1k} = -(H_{ckl1}^{inv}(H_{tkl1}^{\Sigma} \cdot C_k + H_{tkl2}^{\Sigma} \cdot S_k) + H_{ckl2}^{inv}(H_{tk21}^{\Sigma} \cdot C_k + H_{tk22}^{\Sigma} \cdot S_k)), \quad k = 5,6,7,8 \quad (2.67)$$

$$F_{2k} = -(H_{ckl1}^{inv}(H_{tkl1}^{\Sigma} \cdot S_k - H_{tkl2}^{\Sigma} \cdot C_k) + H_{ckl2}^{inv}(H_{tk21}^{\Sigma} \cdot S_k - H_{tk22}^{\Sigma} \cdot C_k)), \quad k = 5,6,7,8 \quad (2.68)$$

et

$$H_{tk}^{\Sigma} = \sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{tk}]_l, \quad k = 5,6,7,8 \quad (2.69)$$

La substitution de $\{\Delta\beta_n\}$ (rel. 2.63) dans la formule (2.28), en utilisant (2.60) nous permet finalement d'écrire:

$$\{\gamma_s\} = [N_\gamma] \left([A_\varphi] [A_n] ([A_{G0}] + [A_{G1}]) + [A_{G1}] + \frac{2(-1)^l}{h_l} [A_{G2}] \right) \{u_n\} \quad (2.70)$$

avec

$$[A_\varphi] = \begin{bmatrix} -\varphi_5^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi_6^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_7^{ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_8^{ml} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

et

$$[A_{G2}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_5 & S_5 & 0 & 0 & 0 & C_5 & S_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & S_6 & 0 & 0 & 0 & C_6 & S_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 & S_7 & 0 & 0 & 0 & S_7 & S_7 \\ 0 & 0 & 0 & C_8 & S_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_8 & S_8 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

L'appariation du terme en fonction de l et les variables additionnels de zigzag (équation 2.70), montre que la déformation en cisaillement est liée au couches, Telle forme est différente à celle du modèle habituel du premier ordre par une allure constante par couche et qui reflète une discontinuité entre les couches.

2.2.5 Matrice de rigidité élémentaire

L'expression du principe des travaux virtuels est définie par sa forme généralisée suivante :

$$W = \sum_{elts} (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 ; \forall \bar{u}_q^* \quad (2.73)$$

W_{int}^e est le travail virtuel interne élémentaire, W_{ext}^e est le travail élémentaire des forces extérieures.

soit:

$$W_{int}^e = \int_{V^e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle \langle \sigma_s \rangle + \langle \gamma_s^* \rangle \langle \tau_s \rangle) dV \quad (2.74)$$

En faisant apparaître les travaux virtuels élémentaires couplés de flexion/zigzag W_{fz}^e et de cisaillement transversal W_{cz}^e , l'expression de W_{int}^e s'écrit

$$W_{int}^e = W_{fz}^e + W_{cz}^e = \langle u_n^* \rangle [k^e] \{u_n\} \quad (2.75)$$

avec $[k^e]$ est la matrice de rigidité élémentaire définie par:

$$[k^e] = [k_{fz}^e] + [k_{cz}^e] \quad (2.76)$$

D'où

$$k_{fz} = \int_{A^e} \left(\begin{array}{l} [B_f]^T [H_f] [B_f] + [B_f]^T [H_{fz}] [B_z] + \\ [B_z]^T [H_{fz}] [B_f] + [B_z]^T [H_{zz}] [B_z] \end{array} \right) dA \quad (2.77)$$

Avec

$$\begin{aligned} [B_f] &= [B_{1b\beta}] + [B_{1b\Delta\beta}] ([A_n] ([A_{G0}] + [A_{G1}])) \\ [B_z] &= [B_{2b\beta}] \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$[H_f], [H_{fz}], [H_{zz}] \text{ (rel. (2.36a-c))}$$

la matrice $[k_{cz}]$ se traduit par:

$$k_{cz} = \int_{A^e} \left(\begin{array}{l} [B_{c0}]^T [H_c] [B_{c0}] + [B_{c0}]^T [H_{c01}] [B_{c1}] + \\ [B_{c1}]^T [H_{c01}] [B_{c0}] + [B_{c1}]^T [H_{c11}] [B_{c1}] \end{array} \right) dA \quad (2.79)$$

Avec

$$[B_{c0}] = [N_\gamma] ([A_\varphi] [A_n] ([A_{G0}] + [A_{G1}]) + [A_{G1}]) \quad (2.80)$$

$$[B_{c1}] = [N_\gamma] [A_{G2}] \quad (2.81)$$

$$[H_c], [H_{c01}], [H_{c11}] \text{ (rel. (2.37a-c))}$$

2.3 Calcul des contraintes planes et de cisaillement transversal

Les contraintes de cisaillement transverses peuvent être obtenues soit en appliquant les relations constitutives contrainte/déformation selon loi de Hooke, qui sont faciles à mettre en œuvre, soit par intégration des équations d'équilibre. Or, la dernière technique a été utilisée pour le calcul, en suivant la démarche donnée par Batoz et Dhatt [188], en partant sur le principe d'équivalence entre l'énergie interne de cisaillement associée à la distribution théorique exacte des contraintes de C.T. et l'énergie associée au modèle 2D. Même si cette démarche nécessite les dérivées premières de contraintes planes, les résultats de l'approche ont été jugé généralement plus proches aux celles de l'élasticité 3D.

les équations d'équilibre (2.30) ont été adopté, illustrant d'ailleurs l'effet des forces dues aux termes additionnels. Pour plus de détail, on peut se référer au travail de Varadan et al. [189]. Les termes liés aux courbures de flexion et de déplacement dus au zigzag peuvent être déduits directement à partir des relations (2.31) et (2.32):

soit

$$\begin{aligned} \{M\} &= [H_f] \{\chi_1\} + [H_{fz}] \{\chi_2\} \\ \{H_P\} &= [H_{fz}] \{\chi_1\} + [H_{zz}] \{\chi_2\} \end{aligned} \text{ (rel. 2.31 et 2.32)}$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned}
 [D_4] &= \int_{-t}^z -\frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_1^{11} - A_1^{33} & A_1^{13} - A_1^{32} & 2A_1^{12} & 2A_1^{31} \\ A_1^{13} - A_1^{23} & A_1^{33} - A_1^{22} & 2A_1^{32} & 2A_1^{21} \end{bmatrix} dz, \\
 [E_3] &= \int_{-t}^z -\frac{M(z)}{2} \begin{bmatrix} B_2^{11} - B_2^{33} & B_2^{13} - B_2^{32} & 2B_2^{12} & 2B_2^{31} \\ B_2^{13} - B_2^{23} & B_2^{33} - B_2^{22} & 2B_2^{32} & 2B_2^{21} \end{bmatrix} dz, \\
 [E_4] &= \int_{-t}^z -\frac{M(z)}{2} \begin{bmatrix} B_1^{11} - B_1^{33} & B_1^{13} - B_1^{32} & 2B_1^{12} & 2B_1^{31} \\ B_1^{13} - B_1^{23} & B_1^{33} - B_1^{22} & 2B_1^{32} & 2B_1^{21} \end{bmatrix} dz
 \end{aligned} \tag{2.88a-h}$$

et

$$\begin{aligned}
 \{T\} &= \langle T_x \quad T_y \rangle = \langle M_{x,x} + M_{xy,y} \quad M_{xy,x} + M_{y,y} \rangle \\
 \{H_T\} &= \langle H_{Tx} \quad H_{Ty} \rangle = \langle H_{x,x} + H_{xy,y} \quad H_{xy,x} + H_{y,y} \rangle \\
 \langle \lambda_M \rangle &= \langle M_{x,x} - M_{xy,y} \quad M_{xy,x} - M_{y,y} \quad M_{y,x} \quad M_{x,y} \rangle \\
 \langle \lambda_H \rangle &= \langle H_{x,x} - H_{xy,y} \quad H_{xy,x} - H_{y,y} \quad H_{y,x} \quad H_{x,y} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.89a-d}$$

2.4 Formulation de la matrice masse élémentaire du modèle plaque composite

La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement des plaques multicouches en vibrations libres ou forcées. Nous l'avons développée à partir de l'expression suivante de l'énergie cinétique V :

$$V = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \tag{2.90}$$

(\dot{u} , \dot{v} , \dot{w}) sont les composantes du vecteur vitesse du point quelconque q de la plaque. ρ désigne la masse volumique représentative du volume V^e .

Rappelons le champ du déplacement défini par l'équation (2.1):

$$\begin{aligned}
 u &= z\beta_x + M(z)u_1^M \\
 v &= z\beta_y + M(z)u_2^M \quad ; \quad M(z) \text{ est définie par la relation (1.18a)} \\
 w &= W_0
 \end{aligned}$$

on aura donc

$$= \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho \begin{pmatrix} \dot{w}\dot{w} + 2 \cdot z \cdot M(z) (\dot{\beta}_x \dot{u}_1^M + \dot{\beta}_y \dot{u}_2^M) \\ + M(z)^2 (\dot{u}_1^M \dot{u}_1^M + \dot{u}_2^M \dot{u}_2^M) \\ + z^2 (\dot{\beta}_x \dot{\beta}_x + \dot{\beta}_y \dot{\beta}_y) \end{pmatrix} dV \tag{2.91}$$

Si on substitue les approximations de \dot{w} , \dot{u}_1^M , \dot{u}_2^M , $\dot{\beta}_x$ et $\dot{\beta}_y$ (rel. B.1 jusqu'aux B.5) dans l'expression de V , nous obtiendrions :

$$V = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle \left(\int_{A^e} \begin{pmatrix} C_1 \{N_w\} \langle N_w \rangle + C_2 \left(\{N_{\beta_{1x}}\} \langle N_{u_1^M} \rangle + \{N_{\beta_{1y}}\} \langle N_{u_1^M} \rangle \right) \\ + C_3 \left(\{N_{u_1^M}\} \langle N_{u_1^M} \rangle + \{N_{u_2^M}\} \langle N_{u_2^M} \rangle \right) \\ + C_4 \left(\{N_{\beta_{1x}}\} \langle N_{\beta_{1x}} \rangle + \{N_{\beta_{1y}}\} \langle N_{\beta_{1y}} \rangle \right) \end{pmatrix} dA \right) \{u_n\} \tag{2.92}$$

avec $\langle N_w \rangle$, $\langle N_{u_1^M} \rangle$, $\langle N_{u_2^M} \rangle$, $\langle N_{\beta_{1x}} \rangle$, $\langle N_{\beta_{1y}} \rangle$ définies par (B.6) jusqu'aux (B.10)

Cependant les coefficients C_i sont données par:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sum_{l=1}^{nc} h_l \rho_l \\
 C_2 &= 4 \sum_{l=1}^{nc} \frac{(-1)^l}{h^l} \rho_l \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - \frac{1}{2} (z_{l+1}^2 - z_l^2) \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right) \right) \\
 C_3 &= \frac{4}{h_l^2} \sum_{l=1}^{nc} \rho_l \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - (z_{l+1}^2 - z_l^2) \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right) + \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right)^2 \right) \\
 C_4 &= \sum_{l=1}^{nc} \rho_l \frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3)
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

ρ_l : est la masse volumique de la couche l ;

La matrice $[M]$ se déduit de l'expression (2.92), de telle sorte que:

$$V = \frac{1}{2} \langle \dot{u}_n \rangle [M] \{ \dot{u}_n \} \tag{2.94}$$

Rappelons qu'une procédure itérative est nécessaire pour un calcul des valeurs et les modes propres, en utilisant la méthode inverse pour le calcul de la petite valeur ω_1 et l'orthogonalisation de Gram Shmidt pour les modes supérieurs ($\omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_{NVALP}$). (le code Reflex 1.0, [188, 190]).

Sachant que

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_{nvalp} \tag{2.95}$$

$nvalp$: Nombre des valeurs propres à calculer

2.5 Conclusion

En se basant sur des hypothèses modifiées de Mindlin discrète, un élément fini de plaque multicouche à quatre nœuds, travaillant en flexion/cisaillement est formulé. L'élément possède en outre de trois degrés de liberté traditionnelles, à savoir un déplacement transverse et deux rotations, deux variables additionnelles. La démarche utilisée est celle de Reissner-Murakami-Carrera, basée sur l'ajout d'une fonction de zigzag. Les termes additionnels ayant un sens de déplacement permettent d'impliquer un déplacement linéaire par morceaux dans une seconde version du modèle.

Ce choix de telle fonction du zigzag se justifie, selon Carrera [124], du point de vue implémentation par : l'incorporation de la fonction de zigzag de Murakami dans les modèles existants de plaque/coques/poutres requiert le même effort que celui nécessaire à inclure un terme additionnel d'ordre élevé. D'autre coté, du point de vue numérique, l'incorporation de cette fonction conduit à des améliorations significatives qui ne peuvent être obtenues par d'autres fonctions.

Chapitre 3 Validation numérique du modèle de plaques composites DMQPz

3.1 Introduction

La thématique du développement des éléments finis d'ordre supérieur se base principalement sur des termes secondaires attribués à la partie globale du champ de déplacement. La fiabilité du modèle standard qu'ils en dérivent est généralement garantie dans le domaine isotrope. Selon l'approche utilisée et d'autant que l'ordre de l'interpolation est élevé, la précision ne diffère que légèrement d'un élément à un autre. Cependant les termes secondaires qui sont des valeurs ajoutées servent à améliorer la réponse locale à travers l'épaisseur de la structure (contraintes et déformations dans le sens transversal). Par conséquent, afin d'analyser le modèle proposé, nous mettons en relief le modèle en zigzag avec une validation qui se focalise surtout sur les plaques stratifiées/sandwichs. On évoquera brièvement l'énoncé de quelques tests standards et patch test concernant les structures isotropes, élaborés antérieurement [4]:

Le premier test, est un patch-test mécanique, proposé par Irons [191] et considéré comme une condition suffisante de convergence. Ce test a permis de vérifier l'aptitude du modèle DMQP avec un maillage grossier à reproduire un état de contrainte constant, en imposant un nombre minimum de ddl nécessaire à l'élimination des mouvements de corps rigide.

D'autre part, afin d'étudier l'influence de la distorsion géométrique sur la précision du présent modèle, le problème de la plaque biaise (angle aigu = 30°) a été traité. La plaque est simplement supportée sur tout le contour et soumise à une charge uniforme. La convergence de la flèche et des moments maximum et minimum au centre des plaques sont confrontés avec des solutions de plaques minces calculées par Morley [192]. Une solution tridimensionnelle obtenue par Babuska et al. [193] ainsi que des résultats de l'élément fini MITC4 [62] ont été également utilisés. Dans le cas très mince ($L/h = 1000$), la convergence vers la solution de plaque mince [192] est obtenue par l'ensemble des éléments avec des vitesses différentes. Cependant, dans le cas limite ($L/h=100$) nous avons constaté une convergence vers une solution autre que celle de Morley pour les plaques minces. Leur solution 3D est très proche de celle obtenue par l'élément DMQP.

Le test de la plaque circulaire isotrope épaisse et mince ($R/h=2.5$ et 50) est un test encore bien vu car il met en évidence la distorsion géométrique des éléments. Deux conditions aux limites ont été examinées, l'évaluation de la flèche et le moment

au centre de la plaque a été faite pour le cas de la plaque simplement supportée et encadrée. Les résultats correspondant obtenus par le présent modèle ont montrés une bonne convergence vers les solutions de références avec un faible nombre d'éléments. L'élément permet également d'obtenir une bonne précision sur les efforts résultants pour les deux cas-tests.

En se basant sur les résultats présentés antérieurement et qui considère que l'élément passe tous les patch-tests de modes rigides et de déformations constantes, nous nous permettons d'entamer la deuxième partie de la validation, qui se focalise sur des tests standards du comportement élastique des plaques stratifiées et sandwich.

3.2 Résultats des cas tests standards de plaques multicouches stratifiées/sandwich

Des études antérieures ont montré que la solution exacte pour un composite stratifié particulier converge vers la solution CPT d'autant que le rapport d'aspect géométrique (élancement de la longueur par rapport à l'épaisseur) devient très grand. Cependant, la solution exacte du champ de contrainte converge généralement plus rapidement que celle de la flèche. En particulier, une bonne estimation de la contrainte normale maximale est donnée par la CPT pour les rapports longueur /épaisseur aussi inférieur que 10, tandis que pour les matériaux fortement anisotropes, l'erreur dans l'estimation de la flèche par la théorie classique peut être appréciable pour des rapports d'aspect aussi élevées que 30 [194].

3.2.1 Plaques stratifiées composites à 3 et 9 couches

Ce problème test, connu de la littérature, a été proposé et traité par Pagano et Hatfield [194]. Il consiste à examiner le comportement de plaques stratifiées, composés de plusieurs couches, à travers l'épaisseur. Notre objectif est d'évaluer l'aptitude de nos modèles à reproduire ce comportement d'une part, et de confronter nos résultats avec ceux obtenus par d'autres éléments finis. Il s'agit d'une plaque carrée multicouche, dont le matériau de base est un composite unidirectionnel fortement orthotrope, la plaque est simplement supportée soumise à une charge doublement sinusoïdale d'intensité $q = q_0 \sin \pi x/L \sin \pi y/L$. Deux types de stratifications croisées de 3 et 9 couches avec différentes élancements $S = a/h = 4, 10, 50$ et 100 ont été étudiés. Les épaisseurs totales de couches à 0° et 90° sont égales, et les couches de même orientation ont toutes la même épaisseur. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la plaque est maillé avec 6×6 éléments. La figure 3.1 schématise les données géométriques du problème, les caractéristiques mécaniques sont données selon les relations suivantes:

$$E_x/E = 25, G_{xy} = G_{xz} = .5 E_y, G_{yz} = .2 E_y, \nu = .25$$

Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$w = \beta_x = u_1^M = 0 \text{ ; sur AB; } \beta_x = u_1^M = 0 \text{ sur BC}$$

$$\beta_y = u_2^M = 0; \text{ sur CD}; w = \beta_y = u_2^M \text{ sur AD}$$

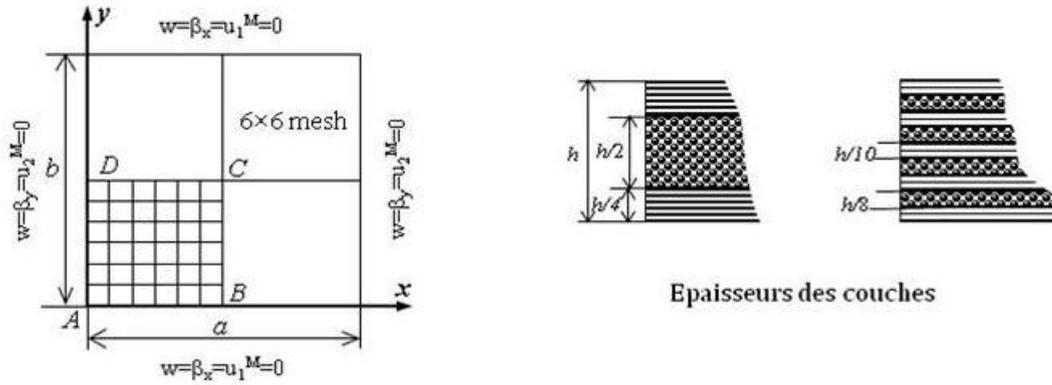


Figure 3.1 Plaque carrée multicouche, données du problème.

Dans cette application, on procède à comparer nos résultats avec le modèle mixte hybride développé dans un travail antérieur, baptisé MiSP4/ml [6],[70]. Il s'agit d'un élément quadrilatère à quatre nœuds basé sur une approximation quadratique suivant l'épaisseur pour les contraintes de cisaillement (continuité C^1), sans facteur de correction du cisaillement transverse. Les tableaux (3.1-3.4) illustrent les déplacements et les contraintes maximales obtenues par notre modèle et regroupent d'autres résultats d'éléments simples capables de fournir des réponses globales satisfaisantes, citant :

- L'élément quadrilatère à quatre nœuds avec facteurs de correction, baptisé DSQ (Discrete Shear Quadrilateral), développé par Lardeur [63].
- E. et O: Élément quadrilatère à huit nœuds et dix ddl, baptisé QHD40, basée sur la théorie d'ordre supérieur en déplacement avec une variation cubique des déplacements plans [195].

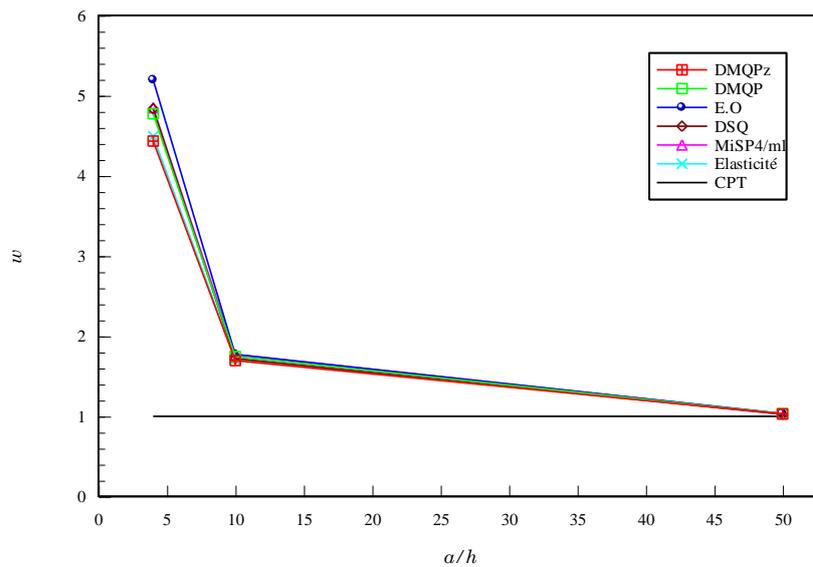
Rappelons que certains aspects des solutions exactes donnés par Pagano et al. [194] sont basés sur la formulation développée par le premier auteur dans la référence [50], ainsi que ceux analogues de la théorie classique des plaques. Tous les résultats sont normalisés avec les valeurs suivantes :

$$\bar{w} = w \frac{\pi^4 Q}{12 S^4 h q_0}, (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}) = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \frac{1}{q_0 S^2}, (\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) = (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{1}{q_0 S}$$

Avec
$$Q = 4G_{12} + \frac{E_1 + E_2(1 + 2\nu_{23})}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, S = \frac{a}{h}$$

S	Modèles	$\bar{\sigma}_{xc}(+h/2)$	Err. %	$\bar{\sigma}_{yc}(+h/4)$	Err. %	$\bar{\tau}_{xyA}(+h/2)$	Err. %
4	DMQPz	0.643	10.694	0.622	6.184	0.0440	3.930
	DMQPml	0.348	51.667	0.711	7.240	0.0347	24.236
	E. et O.	0.387	46.250	0.618	6.787	0.0326	28.821
	DSQ	0.369	48.750	0.662	0.151	-	-
	MiSP4/ml	0.327	54.583	0.734	10.709	-	-
	Elasticité [194]	0.720		0.663		0.0458	
10	DMQPz	0.551	1.431	0.395	1.496	0.0270	2.174
	DMQPml	0.479	14.311	0.412	2.743	0.0255	7.609
	E. et O.	0.488	12.701	0.388	3.242	0.0253	8.333
	DSQ	0.475	15.027	0.425	5.985	-	-
	MiSP4/ml	0.462	17.352	0.400	0.249	-	-
	Elasticité[194]	0.559		0.401		0.0276	
50	DMQPz	0.542	0.557	0.275	0.362	0.0213	1.389
	DMQPml	0.539	0.000	0.2754	0.217	0.0213	1.389
	E. et O.	0.54	0.186	0.271	1.812	0.0216	0.000
	DSQ	0.54	0.186	0.278	0.725	-	-
	MiSP4/ml	0.520	3.525	0.268	2.899	-	-
	Elasticité[194]	0.539		0.276		0.0216	
100	DMQPz	0.542	0.557	0.2702	0.295	0.0211	1.402
	DMQPml	0.5410	0.371	0.2704	0.221	0.0211	1.402
	E. et O.	0.542	0.557	0.266	1.845	0.0215	0.467
	Elasticité[194]	0.539		0.271		0.0214	
	CLT	0.539		0.269		0.2130	

Tableau 3.1 Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 3 couches (0/90/0), contraintes planes maximales


 Figure 3.2 Influence de l'élanement a/h sur la flèche au centre de la plaque carrée composite à 3 couches simplement supportée.

S	Modèles	$\bar{w}_c(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{xzD}(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{yzB}(0)$	Err. %
4	DMQPz	4.4313	1.329	0.207	5.479	0.294	0.685
	DMQPml	4.7719	6.255	0.232	5.936	0.298	2.055
	E. et O.	5.195	15.676	0.256	16.895	0.302	3.425
	DSQ	4.834	7.637	0.245	11.872	0.331	13.356
	MiSP4/ml	4.847	7.927	0.230	5.023	0.353	20.890
	Elasticité[194]	4.491		0.219		0.292	
10	DMQPz	1.6942	0.866	0.297	1.329	0.190	3.061
	DMQPml	1.7450	2.106	0.3016	0.199	0.180	8.163
	E. et O.	1.771	3.628	0.309	2.658	0.195	0.510
	DSQ	1.72	0.644	0.305	1.329	0.204	4.082
	MiSP4/ml	1.771	3.628	0.302	0.332	0.208	6.122
	Elasticité[194]	1.709		0.301		0.196	
50	DMQPz	1.0297	0.126	0.334	0.890	0.151	7.092
	DMQPml	1.0318	0.078	0.331	1.780	0.142	0.709
	E. et O.	1.034	0.291	0.336	0.297	0.140	0.709
	DSQ	1.025	0.582	0.332	1.484	0.139	1.418
	MiSP4/ml	1.031	0.000	0.336	0.297	0.141	0.000
	Elasticité[194]	1.031		0.337		0.141	
100	DMQPz	1.0070	0.099	0.334	1.475	0.1859	33.741
	DMQPml	1.0075	0.050	0.3278	3.304	0.1836	32.086
	E. et O.	1.01	0.198	0.337	0.590	0.138	0.719
	Elasticité[194]	1.008		0.339		0.139	
	CLT	1.000		0.339		0.139	

Tableau 3.2. Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 3 couches (0/90/0), déplacement et contraintes de CT maximales

a/h	Modèles	$\bar{\sigma}_{xc}(+h/2)$	Err. %	$\bar{\sigma}_{yc}(+2h/5)$	Err. %	$\bar{\tau}_{xyA}(+h/2)$	Err. %
4	DMQPz	0.518	24.269	0.585	6.847	0.0224	31.707
	DMQPml	0.475	30.556	0.511	18.631	0.0217	33.841
	DSQ	0.491	28.216	0.487	22.452	-	
	MiSP4/ml	0.455	33.480	0.536	14.650	-	
	Elasticité[194]	0.684		0.628		0.0328	0.000
10	DMQPz	0.518	5.989	0.481	0.839	0.0215	7.725
	DMQPml	0.5142	6.679	0.4646	2.600	0.0213	8.584
	DSQ	0.519	5.808	0.455	4.612	-	
	MiSP4/ml	0.505	8.348	0.476	0.210	-	
	Elasticité[194]	0.551		0.477		0.0233	
50	DMQPz	0.541	0.371	0.434	0.231	0.0211	1.402
	DMQPml	0.541	0.371	0.433	0.000	0.0211	1.402
	DSQ	0.538	0.186	0.432	0.231	-	
	MiSP4/ml	0.54	0.186	0.435	0.462	-	
	Elasticité[194]	0.539		0.433		0.0214	
100	DMQPz	0.542	0.557	0.433	0.464	0.0210	1.408
	DMQPml	0.542	0.557	0.433	0.464	0.0210	1.408
	Elasticité[194]	0.539		0.431		0.0213	
	CLT	0.539		0.431		0.0213	

Tableau 3.3 Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 9 couches, contraintes planes maximales, maillage (6x6)

a/h	Modèles	$\bar{w}_c(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{zzD}(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{yzB}(0)$	Err. %
4	DMQPz	3.6217	11.211	0.218	2.242	0.264	18.386
	DMQPml	4.1872	2.653	0.225	0.897	0.252	14.350
	DSQ	4.235	3.824	0.235	5.381	0.243	8.969
	MiSP4/ml	4.133	1.324	0.220	1.345	0.265	18.834
	Elasticité[194]	4.079		0.223		0.223	
10	DMQPz	1.4353	5.073	0.240	2.834	0.235	3.982
	DMQPml	1.5171	0.337	0.241	2.429	0.234	3.540
	DSQ	1.516	0.265	0.246	0.405	0.228	0.885
	MiSP4/ml	1.512	0.000	0.242	2.024	0.237	4.867
	Elasticité[194]	1.512		0.247		0.226	
50	DMQPz	1.0175	0.343	0.247	4.264	0.226	3.196
	DMQPml	1.021	0.000	0.249	3.488	0.230	5.023
	DSQ	1.015	0.588	0.253	1.938	0.216	1.370
	MiSP4/ml	1.019	0.196	0.256	0.775	0.218	0.457
	Elasticité[194]	1.021		0.258		0.219	
100	DMQPz	1.0042	0.080	0.237	8.494	0.242	10.502
	DMQPml	1.0049	0.010	0.244	5.792	0.250	14.155
	Elasticité[194]	1.005		0.259		0.219	
	CLT	1.000		0.259		0.219	

Tableau 3.4 Plaque carrée simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal, 9 couches, déplacement et contraintes de CT maximales.

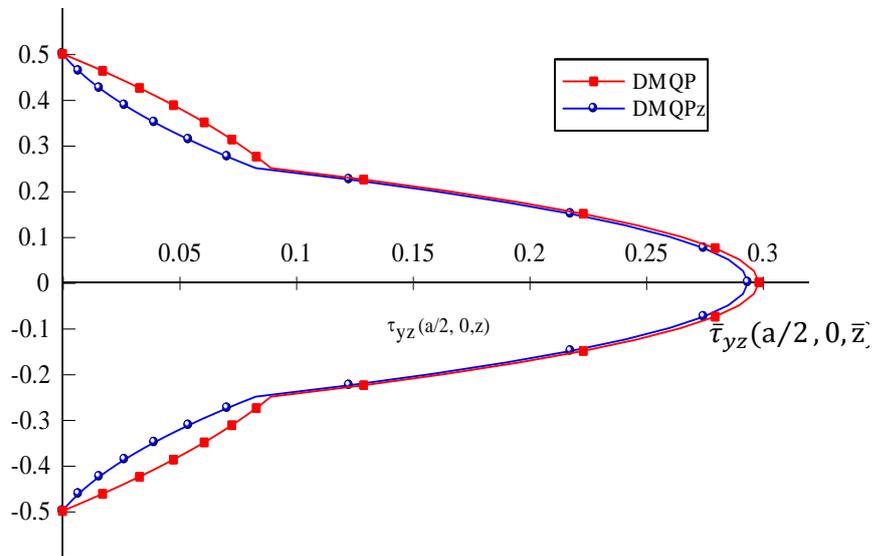


Figure 3.3 Distribution de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$ le long de l'épaisseur, plaque à 3 couches, S=4.

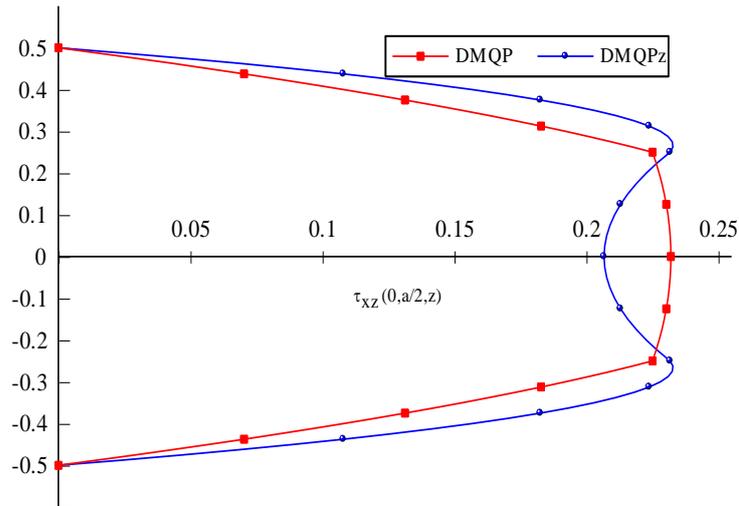


Figure 3. 4 Distribution de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ le long de l'épaisseur, plaque à 3 couches, $S=4$.

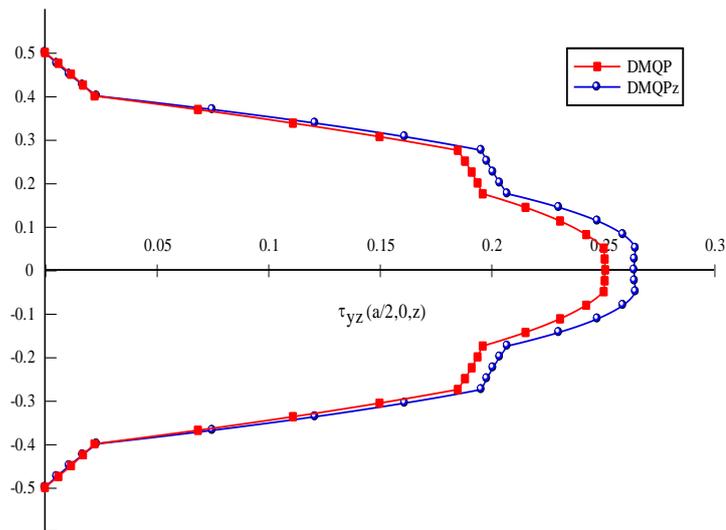


Figure 3. 5 Distribution de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$, plaque à 9 couches, ($S=4$)

L'examen des résultats de la flèche au centre de la plaque pour le premier cas de stratification (0/90/0) tableau 3.2, montre que le modèle DMQP présente un excellent accord avec les valeurs de référence. Un examen de la convergence, figure 3.2, confirme une bonne convergence avec une allure monotone vers la solution CPT, les autres éléments présentent une convergence pareille. Concernant le modèle avec zigzag, quoique les résultats sont un peu sous-estimées dans le cas le plus épais, elles convergent vers la même valeur de la théorie classiques des plaques minces.

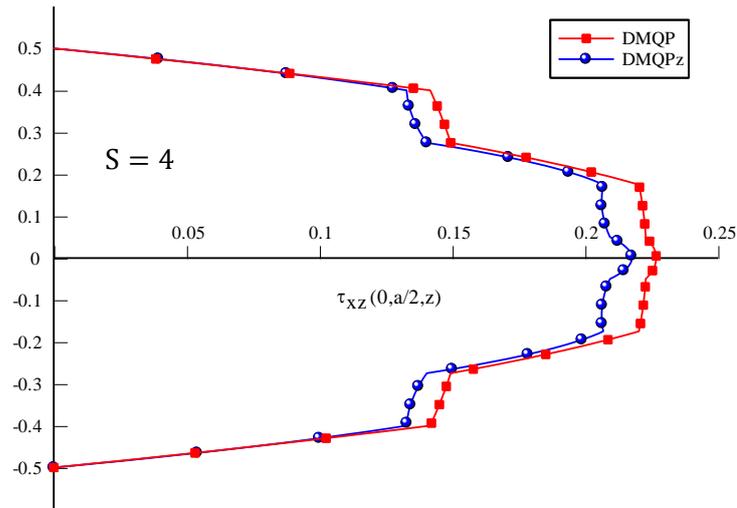


Figure 3. 6 Distribution de la contrainte de cisaillement, $\bar{\tau}_{xz}$, plaque à 9 couches, $S=4$

L'estimation des contraintes planes montre que l'élément DMQP, comme d'autres éléments du premier ordre, semble un peu affecté (tableau 3.1). Une imprécision s'atténue pour des rapports d'élancement au-delà de 10. En revanche, le présent modèle avec la fonction zigzag semble robuste, quel que soit le rapport d'élancement a/h .

Quant aux contraintes du cisaillement, calculées en intégrant les équations d'équilibre (tableau 3.2), les deux versions du modèle DMQP montrent une bonne précision. Leur performance est bien montrée dans ce test, notamment pour les petits rapports d'élancement de l'épaisseur ($a/h = 4$ et 10). Les figures (3.3 à 3.6) illustrent l'allure de variation de ces contraintes dans le cas d'élancement $S = 4$ pour les deux types de stratification. Les courbes de la contrainte $\bar{\tau}_{xz}$ dans la plaque à trois couches (Figure 3.4) montrent un notable rétrécissement constaté au niveau de la couche de milieu, lié à l'effet du zigzag dans le modèle DMQPz.

Pour le deuxième cas de stratification, tableau 3.4, la flèche obtenue au centre de la plaque est bien représentée par l'élément DMQP/ml. Une précision est similaire au modèle mixte et mieux que l'élément DSQ. Toutefois, ses valeurs obtenues par le modèle avec zigzag (DMQPz) pour des élancements $a/h = 4$ et 10 , sont légèrement inférieures à la valeur prévue. Néanmoins, les contraintes restent en bon accord avec les valeurs exactes, tableaux 3.3 et 3.4.

3.2.2 Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme

Ce problème a été traité par Srinivas (1973) [11], dans un cadre d'une étude de vibration harmonique. Nous évoquons ici la partie statique de ce test. Il s'agit d'une structure à 3 couches de matériaux orthotropes. Les données du problème sont illustrées sur la figure 3.7. Une solution analytique tridimensionnelle a été donnée également par Srinivas et al. [196]. Owen et Figueiras [197] l'ont traité avec une

combinaison d'élément fini quadrilatéral et un autre hétérosis (8 nœuds à 3ddl/noeud sur les cotés et un nœud au milieu avec 2 ddl de rotation).

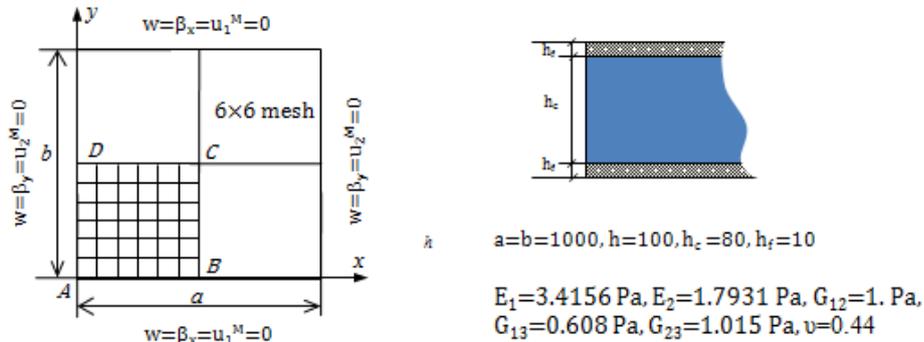


Figure 3.7. Plaque sandwich, données du problème.

Les propriétés mécaniques du matériau constitutif du cœur (l'âme) sont proportionnelles à celles des peaux. Le coefficient C détermine le rapport de proportionnalité : il prend successivement les valeurs 1, 10 et 50. Ainsi le cas $C = 1$ correspond à une plaque orthotrope, et le cas $C=50$ à une structure moyennement sandwich

C	Modèles	$\bar{w}(L/2, L/2, 0)$	Erreur. %
1	DMQPz	180.48	0.3148
	DMQPml	181.23	0.6352
	DSQ	181.42	0.2044
	Heterosis	183.99	1.6239
	MiSP4/ml	182	0.5247
	Elasticité	181.05	
10	DMQPz	41.95	0.0954
	DMQPml	42.00	0.5727
	DSQ	42.04	0.3102
	Heterosis	41.92	0.0239
	MiSP4/ml	43.845	4.6170
	Elasticité	41.91	
50	DMQPz	16.82	0.4179
	DMQPml	16.87	1.0746
	DSQ	16.89	0.8358
	Heterosis	16.85	0.5970
	MiSP4/ml	18.8	12.239
	Elasticité	16.75	

Tableau 3.5 Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme, déplacement \bar{w}_c

. L'analyse est faite pour un seul rapport $a/h = 10$, et un maillage de 6×6 a été utilisé pour le quart de la plaque. Les résultats sont donnés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{w G_{12}(C)}{hq_0}, \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_{xx}}{q_0}$$

C	Modèles	$-\bar{\sigma}_{xC}$ ($\pm 2h/5 +$)	Err. %	$-\bar{\sigma}_{xC}$ ($\pm 2h/5 -$)	Err. %	$-\bar{\sigma}_{xC}$ ($h/2$)	Err. %
1	DMQPz	28.849	1.065	2.8849	1.065	36.438	1.386
	DMQPml	28.916	1.300	28.916	1.244	36.144	0.445
	DSQ	28.73	0.648	28.73	0.648	35.91	0.083
	Heterosis	28.98	1.524	28.98	1.524	36.22	0.779
	MiSP4/ml	28.8	0.893	28.8	0.893	36	0.167
	Elasticité	28.545		28.545		35.94	
10	DMQPz	49.478	1.786	4.948	1.811	66.233	1.772
	DMQPml	51.304	5.542	5.130	5.556	64.130	1.506
	DSQ	50.88	4.670	5.09	4.733	63.60	2.274
	Heterosis	48.73	0.247	4.87	0.206	65.23	0.230
	MiSP4/ml	50.4	3.682	5.04	3.704	63.0	3.196
	Elasticité	48.61		4.86		65.08	
50	DMQPz	38.008	2.310	0.760	2.703	68.171	1.900
	DMQPml	47.246	27.176	0.945	27.432	59.049	11.958
	DSQ	46.69	25.680	0.93	25.676	58.37	12.750
	Heterosis	46.65	25.572	0.93	25.676	58.31	12.840
	MiSP4/ml	45.1	21.400	0.905	22.297	56.4	15.695
	Elasticité	37.15		0.74		66.90	

Tableau 3.6. Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme, contrainte $\bar{\sigma}_{xC}$.

D'après les résultats de la flèche au centre de plaque (tableau 3.5), les deux versions du modèle DMQP sont en bon accord avec la solution d'élasticité. Un examen minutieux des erreurs relatives, montre que le modèle avec zigzag apporte une valeur ajoutée au modèle DMQP. D'ailleurs cette remarque est également confirmée au niveau des contraintes planes, calculées au centre de la plaque. Le modèle avec zigzag dans ce test montre une excellente précision qui se voit clairement pour le cas C=50. En revanche le modèle DMQP ressemble aux autres éléments du premier ordre, qui souffrent généralement d'inexactitude au niveau des contraintes planes dans le cas des structures fortement anisotropes.

3.2.3 Plaque carrée et rectangulaire avec deux types de charges

Afin de comparer le présent modèle avec des éléments raffinés d'ordre supérieur, on propose une série de tests sur des plaques stratifiées composites à trois couches (0/90/0), traités par Pagano [50]. Les structures sont simplement supportées sur les quatre cotés et soumises aux différents cas de charge (figure 3.8). Les trois couches ont la même épaisseur $h_i=h/3$, dont h est l'épaisseur totale de la plaque, et possèdent des propriétés mécaniques identiques ($E_x/E_y = 25$, $G_{xy} = G_{xz} = 0.5$, $G_{yz} = 0.2 E_y$, $\nu = 0.25$).

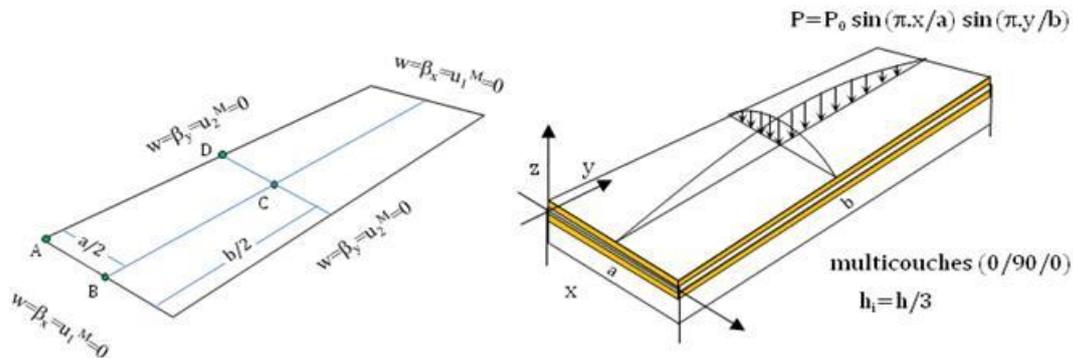


Figure 3.8 Plaque rectangulaire composite à 3 couches, simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.

Deux aspects géométriques de la plaque ont été considérés ($b/a=1$ et 3) avec différents élancements: $a/h = 4, 10, 50$ et 100. Trois cas se distinguent, selon la charge appliquée et la forme de la plaque :

- Cas 1 : plaque carrée multicouche, charge doublement sinusoïdale.
- Cas 2 : plaque rectangulaire $b/a=3$, charge doublement sinusoïdale
- Cas 3 : plaque carrée multicouche, chargement uniforme.

Nos résultats sont confrontés à ceux obtenus par une théorie raffinée du premier ordre avec cisaillement, développée par Di-sciuva, [112, 115, 125], baptisée RFSDT [116], ainsi que d'autres résultats illustrés par le même auteur [116], basées sur la théorie d'ordre supérieur HSST développée par Reddy et al. [25]. Peu de résultats sont fournis par Carrera et al. [184], pour un rapport particulier de longueur/épaisseur, dont l'élément utilisé est un quadrilatère à neuf nœuds (ED1). Le second élément est une version améliorée (EDZ1), développé dans le cadre d'une formulation exhaustive d'éléments finis, du premier ordre ou plus, pour évaluer l'effet de la fonction zigzag de Murakami sur les modèles en déformation avec cisaillement.

D'autres résultats correspondants à quelques formulations théoriques et aux éléments finis sont également utilisés et énumérées comme suit:

- Les éléments DSQ et E.O (voir l'exemple 3.2.1).
- FSDTZZ: théorie de déformation avec cisaillement, du premier ordre, non linéaire raffinée avec zigzag (Fares et al, 2008) [198].

- FSDT : théorie du premier ordre, avec cisaillement transverse, développée par Yang et al. (1966), [31] et inspirée des hypothèses de Mindlin pour les plaques isotropes [32].
- PFSDT : élément fini quadrilatère à quatre nœuds, basé sur la théorie FSDT, présenté par Topdar et al. [134].
- HSDT: la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (Reddy, 1984) [25].
- PHSDT : élément fini dénommé « Present Higher shear deformation theorie » par Topdar et al. [134] , basé sur la théorie de HSDT, Reddy 1984 [25].
- RHSDT : théorie en déformation d'ordre supérieur raffinée (Refined higher order shear deformation theory), Elle est améliorée par plusieurs chercheurs, entre autres Cho et al. [117]. Toutes les inconnues sont exprimées en termes de du plan moyen, ayant satisfait la continuité inter-laminaires des contraintes, [112, 115, 116, 125, 134].

a/h	Modèles	$\bar{\sigma}_{xC}$	$\bar{\sigma}_{yC}$	$\bar{\tau}_{xyA}$	$\bar{\tau}_{xzD}$	$\bar{\tau}_{yzB}$	\bar{w}_C
4	DMQP/ml	$\mp .392$	$\mp .613$	$\pm .0439$.305	.218	2.238
	DMQPz	$\mp .687$	$\mp .524$	$\pm .0480$.247	.206	1.972
	E. O.	$\mp .391$	$\mp .572$	$\pm .0448$.308	.251	-
	HSDT [116]	$\mp .734$	$\mp .503$	$\pm .050$.286	.209	1.922
	RFSDT [116]	$\mp .620$	$\mp .661$	$\pm .045$.262	.254	1.891
	Elasticité[50]	$-.755$	$-.556$.0505	.256	.217	-
		.801	.534	$-.0511$			
10	DMQP/ml	$\mp .5026$	$\mp .293$	$\pm .0270$.369	.1115	.7709
	DMQPz	$\mp .5745$	$\mp .280$	$\pm .0281$.354	.1154	.7414
	ED1	$-.5096$	$-.2376$.0055	.1538	.1117	.7417
		.5113	.2382	$-.0055$			
	EDZ1	$-.5625$	$-.2757$.0076	.3777	.1408	.7417
		.5106	.2762	$-.0076$			
	E.O.	$\mp .500$	$\mp .279$	$\pm .0280$.369	.130	-
	HSDT [116]	$\mp .568$	$\mp .269$.028	.369	.117	.713
RFSDT [116]	$\mp .549$	$\mp .289$.027	.364	.123	.723	
Elasticité[50]	$-.5900$	$-.288$.0289	.357	.1228	.7530	
		.5900	.285	$-.0289$			
50	DMQP/ml	$\mp .540$	$\mp .184$	$\pm .0213$.3879	.0829	.4453
	DMQPz	$\mp .543$	$\mp .183$	$\pm .0214$.390	.0878	.4443
	E.O.	$\mp .541$	$\mp .164$	$\pm .233$.392	.0843	-
	Elasticity	$\mp .541$	$\mp .185$	$\pm .0234$.393	.0842	-
100	DMQP/ml	$\mp .541$	$\mp .180$	$\pm .0211$.3837	.1039	.4346
	DMQPz	$\mp .542$	$\mp .180$	$\pm .0212$.389	.107	.4344
	E.O.	$\mp .542$	$\mp .167$	$\pm .0224$.393	.0827	-
	Elasticité[50]	$\mp .539$	$\mp .181$	$\pm .0213$.395	.0828	-

Tableau 3.7 Flèche et contraintes dans la plaque multicouche (0/90/0) sous chargement. sinusoidal, (b/a = 1)

- PRHSDT: (Present Higher shear deformation theorie), élément rectangulaire à quatre nœuds développé par Topdar et al. [134], basé sur une théorie raffinée en déformation d'ordre supérieur avec cisaillement (RHSDT), le concept utilisé est celui des plaques minces de Bogner et al.[86] et Cho et al. [117].

D'autres résultats liés au troisième cas, sont obtenus par un calcul élément fini avec le logiciel commercial ABAQUS [199], considérés comme des solutions numériques de référence pour l'élanement $a/h = 10$. L'élément fini utilisé est un hexaèdre à 20 nœuds. 4800 éléments ont été utilisés pour modéliser le quart de la plaque: 20×20 éléments dans le plan oxy et 12 éléments suivant l'épaisseur. Ces résultats sont utilisés par l'auteur afin de valider ces éléments MQ-MLPG et TPS-MLPG développés sur la base de la théorie HOSNDPT (Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory), et la méthode MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin) avec l'utilisation de deux fonctions radiales; MQ (Multiquadrics) et TPS (Thin Plate Splines).

La flèche au centre de la plaque, les contraintes planes et transverses sont calculés aux quatre points de la plaque (A, B, C, D), indiqués sur la figure 3.8. Les valeurs sont normalisées selon les relations ci-dessous [50]. Les résultats sont reportés dans les tableaux 3.7 à 3.9 et les figures 3.9 à 3.12.

$$\begin{aligned}\bar{w}_C &= 100 w_c E_y h^3 / q_0 a^4, \bar{\sigma}_{xC} = \sigma_x(a/2, b/2, h/2) h^2 / q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{yC} &= \sigma_y(a/2, b/2, h/6) h^2 / q_0 a^2 \quad \bar{\sigma}_{xyA} = \sigma_{xy}(0, 0, h/2) h^2 / q_0 a^2 \\ \bar{\tau}_{xD} &= \tau_{xz}(0, b/2, 0) h / q_0 a, \bar{\tau}_{yB} = \tau_{yz}(a/2, 0, 0) h / q_0 a\end{aligned}$$

Les valeurs du déplacement transversal, les contraintes planes et de cisaillement transverse, pour les deux formes de la plaque sont présentées dans les tableaux 3.7 à 3.9. Pour une plaque modérément épaisse $a/h = 4$, la précision de la contrainte plane σ_{xC} obtenue par différents éléments du premier ordre (DMQP/ml, DSQ) apparaît affectée pour ce rapport d'élanement. Les valeurs obtenues par l'élément DMQPz sont plus proches aux celles de référence. En revanche, les deux modèles DDM montrent une bonne performance concernant la flèche au centre et les autres contraintes planes (σ_{yC} et τ_{xyA}), particulièrement pour les rapports $a/h = 50$ et 100 (tableau 3.8). Généralement, pour les petits rapports, l'élément DMQPz se comporte mieux que le modèle DMQP, dont la performance reste comparable à celle donnée par le modèle raffiné d'ordre supérieur. En comparaison avec l'approche par morceaux, les résultats obtenus par le présent modèle en zigzag, pour la structure rectangulaire ($b/a=3$) (tableau 3.8), sont encore similaires à ceux de la théorie de zigzag raffinée; basée sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDTZZ), développé par (Fares et al. 2008). Les valeurs de contraintes de cisaillement transverses demeurent, dans l'ensemble satisfaisantes, même mieux que celles obtenues par DSQ, EO et HSDT.

Pour la plaque carrée multicouche modérément épaisse ($a/h = 4$), l'allure du déplacement u au point B est tracée sur la figure 3.9. Les courbes illustrent les valeurs rapportées aux deux versions du modèle DMQP confrontées avec les valeurs

exactes [50] et celles de la référence [20]. Un déplacement linéaire par morceaux sous forme de zigzag est représenté avec un changement du signe de la pente entre les couches.

a/h	Modèles	$\bar{\sigma}_{xc}$	$\bar{\sigma}_{yc}$	$\bar{\tau}_{xyA}$	$\bar{\tau}_{xzD}$	$\bar{\tau}_{yzB}$	\bar{w}_c
4	DMQP/ml	.611	.129	.0266	.431	.0433	3.223
	DMQPz	.989	.108	.0260	.337	.0306	2.751
	DSQ	.587	.124	-	.429	.048	3.146
	E. et O.	.612	.126	.0284	.431	.0309	3.58
	PRHSDT [134]	1.153	.1113	.0283	.3928	.0296	2.748
	FSDTZZ [198]	.984	.110	.0266	-	-	2.843
	Elasticité[50]	1.10	.119	.0281	.387	.0334	2.820
10	DMQP/ml	.6241	.0438	.0115	.436	.0177	.943
	DMQPz	.7044	.0411	.0117	.416	.0147	.903
	DSQ	.620	.044	-	.433	.0160	.928
	E. et O.	.625	.0421	.0121	.436	.0160	1.0
	Reddy(FEM)	.603	.0364	.0102	-	-	.802
	PRHSDT [134]	.7327	.0432	.0123	.4553	.0149	.9196
	FSDTZZ [198]	.703	.0417	.0120	-	-	.918
Elasticité[50]	.725	.0435	.0123	.420	.0152	.919	
50	DMQP/ml	.6268	.0260	.0083	.436	.014	.521
	DMQPz	.6302	.0258	.0083	.436	.012	.520
	DSQ	.623	.026	-	.434	.008	.518
	E. et O.	.629	.0237	.0084	.437	.011	.524
	Reddy(FEM)	.604	.0251	.0081	-	-	.515
	PRHSDT [134]	-	-	-	-	-	.520
	FSDTZZ [198]	.627	.0258	.0084	-	-	.520
Elasticité[50]	.628	.0259	.0084	.439	.011	.520	
100	DMQP/ml	.62683	.0254	.0082	.436	.0164	.508
	DMQPz	.6277	.0254	.00823	.436	.0148	.507
	DSQ	-	-	-	-	-	-
	E. et O.	.628	.0231	.0084	.437	.0108	.509
	Reddy(FEM)	.603	.0253	.0080	-	-	.506
	PRHSDT [134]	.6383	.0259	.0083	.4696	.1110	.5078
	FSDTZZ [198]	.624	.0253	.0083	-	-	.508
Elasticité[50]	.624	.0253	.0083	.439	.0108	.508	

Tableau 3.8 Flèche et les contraintes dans la plaque rectangulaire ($b/a = 3$) multicouche (0/90/0) sous chargement sinusoïdal.

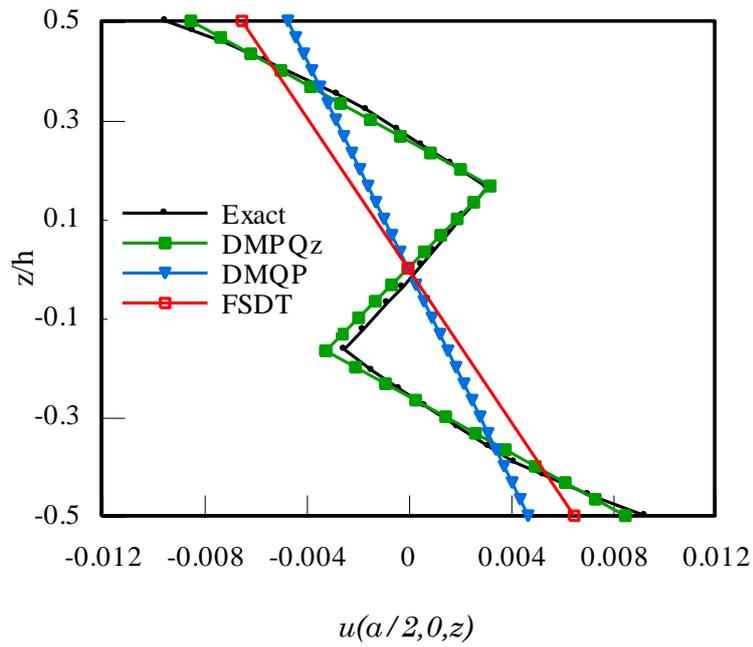


Figure 3.9. Déplacement plan suivant l'épaisseur de la plaque multicouche, $a/h = 4$

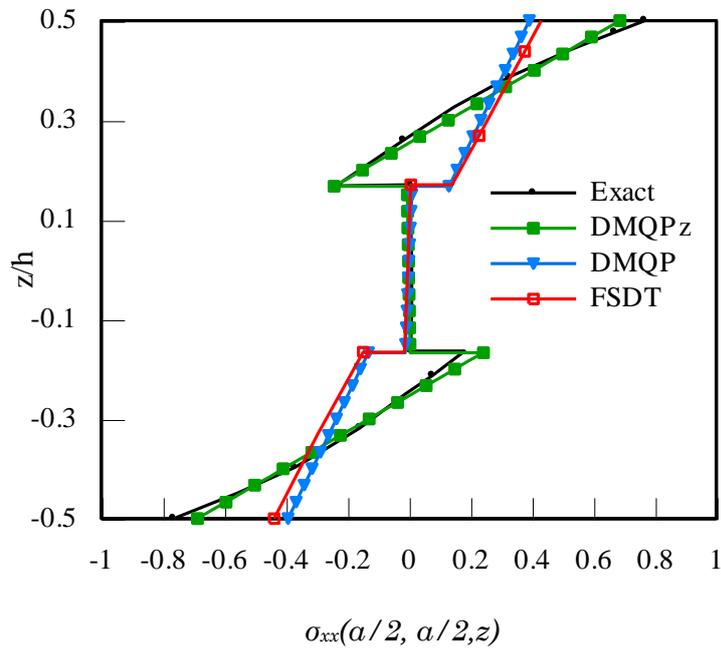


Figure 3.10. Distribution de la contrainte plane suivant l'épaisseur de la plaque multicouche, $a/h = 4$

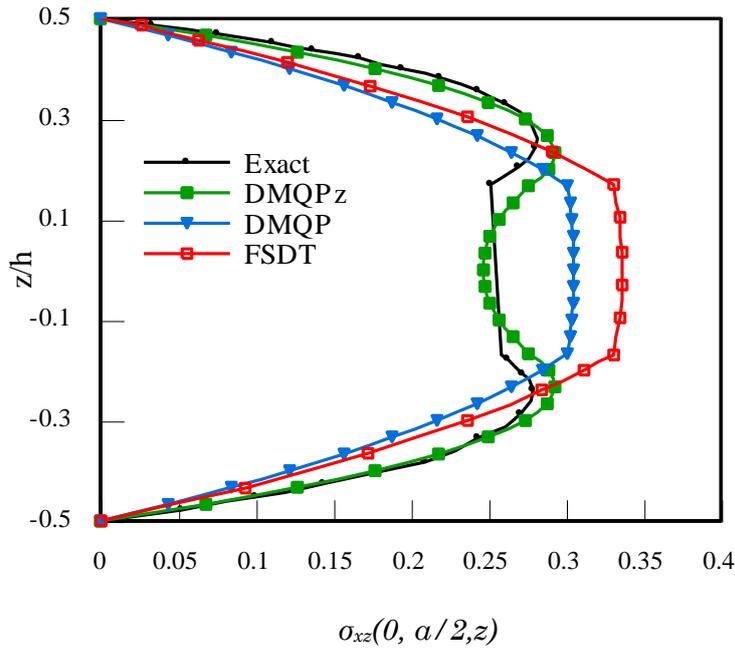


Figure 3.11 Distribution de la contrainte de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque, $a/h = 4$

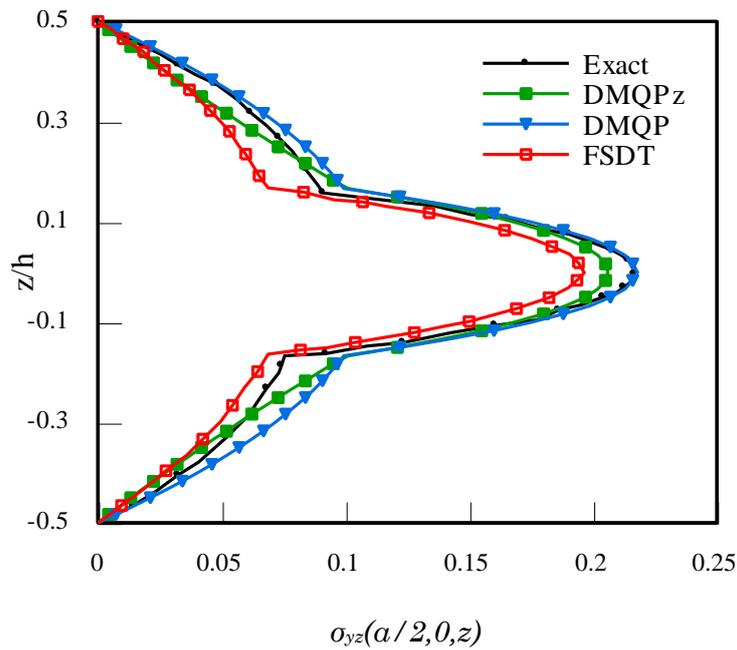


Figure 3.12 Distribution de la contrainte de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque, $a/h = 4$

Les valeurs relatives au modèle DMQPz ne sont obtenues que par simple addition du terme linéaire standard dû à la rotation β_y et le terme de zigzag qui

correspond au produit du coefficient $(-1)^l$ et le degré de liberté additionnel, ce dernier n'est pas nul à endroit en question.

La même allure a été trouvée pour la contrainte σ_{xx} (figure 3.10), En comparant avec les résultats exacts de Pagano [50] et ceux de la théorie FSDT de Whitney [110], les courbes obtenues sont quasi-identiques à celles données à titre de référence [50], cela est dû à la légère diminution de la pente des déformations planes et qu'il en résulte un ajustement opposé des valeurs de la contrainte sur les interfaces des couches. Dans cet exemple, l'effet de zigzag s'est bien montré au niveau du déplacement et de la contrainte plane.

D'autre part, concernant les courbes de la contrainte du cisaillement τ_{xz} , le signe alterné du coefficient de la fonction de Murakami, utilisé par la suite dans l'intégrale des équations d'équilibre conduit également à une distribution de contrainte dont la concavité est tournée légèrement vers l'intérieur au milieu de la plaque (figure 3.11). Habituellement, cela n'aurait pu se produire dans les modèles de déformation en cisaillement du premier ordre. Les deux courbes de contrainte du cisaillement sont assez proche aux solutions 3D. Ainsi, la contribution de la fonction zigzag introduite dans le modèle DMQP est bien confirmée ici.

Concernant le cas de la plaque soumise à une charge uniformément répartie, les résultats sont en bon accord avec les solutions de référence (tableau 3.9). Les deux types de maillage montrent une précision quasi-identique. De point de vue qualitatif, les déplacements relatifs au rapport ($a/h = 10$) obtenus par les deux versions du modèle DMQP sont comparables au modèle PRHSDT, qui s'avère le plus précis parmi les autres modèles d'ordre supérieur. En diminuant le rapport d'élanement ($a/h = 4$), le modèle DMQPz montre une valeur au rang des résultats des modèles d'ordre supérieur PRHSDT et PHSdT. Quant aux contraintes planes, le modèle DMQP sans zigzag ressemble aux modèles du premier ordre, cependant la deuxième version, représente une précision meilleure, comparable au modèle PHSdT. Concernant la contrainte de cisaillement transverse, le modèle DMQP montre une précision supérieure à celle des modèles PHSdT et PFSdT. En revanche, cette qualité se confirme mieux par la version avec zigzag (DMQPz).

Paramètres	Références	a/h=10		a/h=4	
		8×8	12×12	8×8	12×12
w_c	DMQPz	1.1369	1.1357	2.9866	2.9836
	DMQPml	1.1802	1.18	3.3618	3.35
	PRHSDT	1.1584	1.1584	3.0233	3.0238
	PHSDT	1.0902	1.0902	2.9099	2.9103
	PFSDT	1.0220	1.022	2.5683	2.6587
	HSDT	-	1.0900	-	2.9091
	FSDT	-	1.0219	-	2.6596
	MQ-MLPG1[199]	-	0.9415	-	-
	TPS-MLPG1[199]	-	0.9415	-	-
	FEM-3D [199]		1.1541		
σ_{xC}	DMQPz	0.8520	0.8499	1.0078	1.0059
	DMQPml	0.7590	0.7570	0.5900	0.5887
	PRHSDT	0.8780	0.8765	1.1801	1.1896
	PHSDT	0.8425	0.8406	0.9994	1.0086
	PFSDT	0.7755	0.7735	0.6367	0.6461
	HSDT	-	-	-	-
	FSDT	-	0.7719	-	-
	MQ-MLPG1[199]	-	0.7660	-	-
	TPS-MLPG1[199]	-	0.7630	-	-
	FEM-3D [199]		0.8709		
σ_{xD}	DMQPz	0.6050	0.6120	0.418	0.423
	DMQPml	0.6780	0.6930	0.580	0.595
	PRHSDT	0.6649	0.6556	0.4681	0.4628
	PHSDT	0.4549	0.4492	0.3633	0.3582
	PFSDT	0.3106	0.3093	0.2817	0.2801
	HSDT	-	-	-	-
	FSDT	-	0.755	-	-
	MQ-MLPG1 [199]	-	0.660	-	-
	TPS-MLPG1[199]	-	0.637	-	-
	FEM-3D [199]		0.630		

Tableau 3.9 Plaque carrée composite à 3 couches (0/90/0), de même épaisseur simplement supportée sous chargement uniforme. Déplacement transversal et des contraintes maximums.

3.2.4 Plaque carrée sandwich (f/c/f), charge uniforme

La structure de la plaque carrée sandwich ($b/a=1$; $a=0.254$ m) a été traité par Plantema [200], Azar [201], Pagano [50], Reddy et al. [202]. Un calcul similaire est réalisé par Topdar et al. [134]. La plaque est simplement supportée sur les quatre cotés (figure 3.13) et soumise à une charge uniformément répartie ($q=6.895$ kPa).

L'épaisseur de la plaque est de 20.4724 mm , dont 0.7112 mm est celle de la peau supérieure ou inférieure. L'analyse est faite par notre modèle avec un maillage de 8×8 éléments pour le quart de la plaque en tenant compte de deux cas de matériaux ayant les propriétés mécaniques suivantes :

Cas 1

Peaux (isotropes): $E = 68.95\text{ GPa}$; $\nu = 0.3$

Cœur :

$$E_x = E_y = 6.895 \times 10^{-10}\text{ MPa}; \nu_{xy} = 0.3; G_{xz} = G_{yz} = 206.85\text{ MPa}; \quad G_{xy} = 2.652 \times 10^{-10}\text{ MPa}$$

Cas 2

Peaux :

$$E_x = 68.95\text{ GPa}; E_y = 27.58\text{ GPa}; G_{xy} = 12.928125\text{ GPa}; G_{xz} = G_{yz} = 10000 G_{xy}; \nu_{xy} = 0.3$$

Cœur : $E_x = E_y = 6.895 \times 10^{-10}\text{ MPa}$; $\nu_{xy} = 0.3$; $G_{xz} = 206.85\text{ MPa}$; $G_{yz} = 82.74\text{ MPa}$,

$$G_{xy} = 2.652 \times 10^{-10}\text{ MPa}$$



Figure 3.13 Plaque sandwich à un seul cœur f/c/f

La flèche au centre de la plaque ($a/2, a/2$) avec la solution analytique ([200], [50], [201], [202]) et les résultats de l'élément fini de Khatua et al. [203] sont présentés sur le tableau (3.10). Les valeurs obtenues sont également comparées avec les modèles du premier et d'ordre supérieur développés par Topdar et al. [134]: PFSDT, PHSDT et PRHSDT (§ 1.4.2.1). Les résultats afférents aux modèles DMQP et DMQPz sont presque identiques et possèdent un excellent agreement avec la solution analytique, voire meilleur, comparés à ceux obtenus par Khatua et Topdar dans le deuxième cas. Par contre, les valeurs obtenues par les deux modèles PFSDT et PHSDT sont inférieures aux celles de référence et présente une erreur flagrante.

Matériau	Modèles	$\bar{w} \times 10^{-4}$	Err. %
Cas 1	DMQPz	18.78473	0,025
	DMQPml	18.78486	0,026
	PRHSDT	18.791	0,059
	Khatua	18.329	2,401
	PHSDT	17.323	7,758
	PFSDT	12.019	36,001
	Sol. analytique	18.78	
Cas 2	DMQPz	31.0596	0,258
	DMQPml	31.0562	0,269
	PRHSDT	31.013	0,408
	Khatua	30.226	2,935
	PHSDT	19.863	36,214
	PFSDT	19.837	36,297
	Sol. analytique	31.140	

Tableau 3.10 plaque carrée sandwich (f/c/f). Résultats de la flèche au centre de la plaque.

Matériau	Modèles	$\tau_{xzD} \times 10^{-3}$ N/m^2	$\tau_{yzB} \times 10^{-3}$ N/m^2
Cas 1	DMQPz	27.1936	27.1936
	DMQPml*	27.2224	27.2202
	PRHSDT	23.2905	23.2905
	PHSDT	469.285	3.66112
		3.66112	469.285
	PFSDT	364.153	2.84064
Cas 2		2.84064	364.153
	DMQPz	33.2669	21.0995
	DMQPml**	33.22837	21.1517
	PRHSDT	36.0182	23.5111
	PHSDT	7459.23	5173.41
		0.0138	0.00331
	PFSDT	592.77	410.603
		0.000945	0.000262

* $k_{11} = k_{22} = 0.1013$

** $k_{11} = 2.31 \times 10^{-5}$, $k_{22} = 9.23 \times 10^{-6}$

Tableau 3.11 Plaque carrée sandwich (f/c/f). Résultats des contraintes de CT maximales

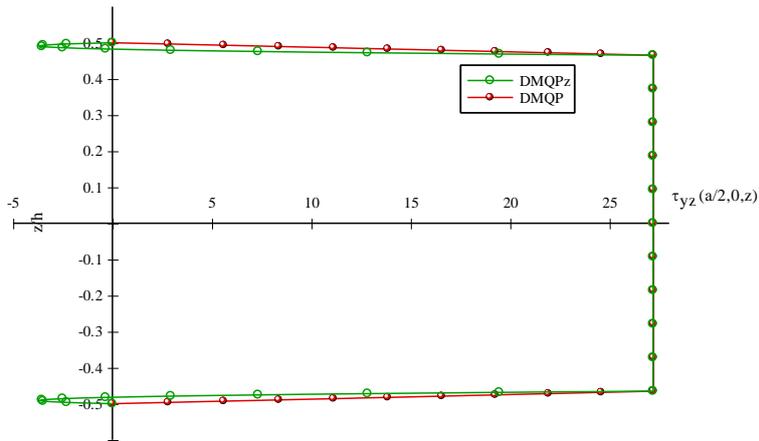


Figure 3.14 Contrainte du cisaillement transverse τ_{yz} au point B, cas 1.

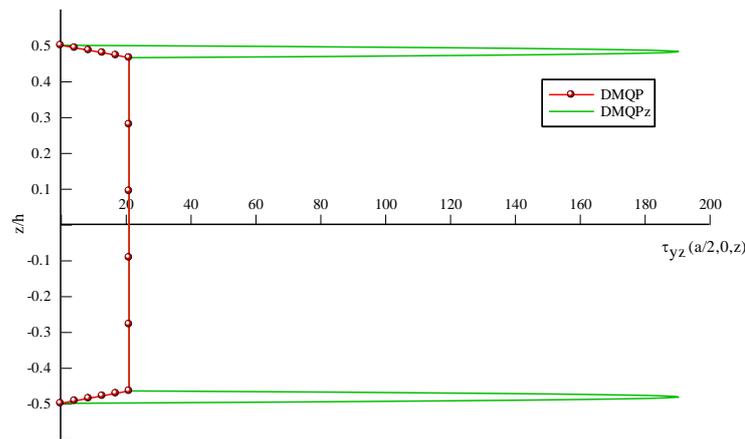


Figure 3.15 Contrainte du cisaillement transverse τ_{yz} au point B, cas 2.

D'autre part, le tableau (3.11) illustre les contraintes de cisaillement calculées aux milieux des côtés, à l'interface de couches (face/cœur). Les valeurs obtenues par les éléments DMQP et DMQPz et le modèle PRHSDT représentent un grand écart avec celles des modèle PHSdT et PFSdT. Cela est attribué à la différence significative des rigidités en cisaillement des peaux et le cœur utilisées dans le présent exemple, d'où l'allure s'avère constant à travers le cœur du sandwich et subit un fort gradient sur les peaux, figure (3.14). La figure (3.15) montre des contraintes du cisaillement constantes et identiques sur le cœur du sandwich (deuxième cas). Or cette fois ci, la courbe se rapportant au modèle DMQz montre des maxima de contraintes aux niveaux des peaux, cela est dû probablement à la rigidité excessive à ce niveau ($10^4 G_{xy}$).

3.2.5 Plaque carrée sandwich (f/c/f) sous chargement sinusoïdal

Dans le cadre d'évaluer l'effet des propriétés anisotropes hétérogènes le long de l'épaisseur sur la performance de prévision du présent modèle, une plaque sandwich carrée (f/c/f) simplement supportée, soumise à une charge doublement sinusoïdale est analysée.

Deux rapports d'épaisseur $a/h = 4$ et 10 sont pris en compte, h est l'épaisseur totale de la plaque dont $0.8h$ est l'épaisseur du cœur et $0.1h$ est celle de chacune de deux peaux. Seul le quart de la plaque est maillé (DMQP/ml 8×8 et 19×19 , DMQPz: 6×6 éléments). Les propriétés mécaniques sont données comme suit:

$$\text{peaux:} \quad E_x/E_y = 25, G_{xy} = G_{xz} = 0.5E_y, G_{yz} = 0.2E_y, \nu = 0.25.$$

$$\text{cœur:} \quad E_x = E_y = .04, G_{xz} = G_{yz} = 0.06, G_{xy} = 0.016, \nu = 0.25$$

Outre la solution de référence de l'élasticité 3D donnée pour la première fois par Pagano, 1970, [50], la comparaison est effectuée avec les résultats obtenus par Topdar et al. [134] et ceux des éléments finis: PFSDT (Perfect first order model), PRHSDT (Perfect Refined Higher Order Shear Model) et l'élément baptisé HOZZT qui possède le même ordre que l'élément précédent et a l'avantage de satisfaire la forme zigzag (basé sur un champ de déplacement, avec 9 nœuds et 11 ddl/nœud) [136].

Le déplacement transversal et des contraintes du cisaillement aux différents points sont présentés dans le tableau (3.12), avec des valeurs normalisées selon les formules mentionnés ci-dessous. L'élément proposé avec zigzag fournit des résultats en très bon accord avec l'élasticité 3D. Il montre une performance compétitive par rapport à celle obtenue par le modèle PFSDT ou les modèles d'ordre supérieur cités comme références. Les contraintes dans le plan sont également données par ces modèles, tableau (3.13). Les valeurs obtenues par l'élément DMQPz sont généralement, les plus proches à celles de Pagano [50].

$$w = w_c(100E_y h^3 / q_0 a^4)$$

$$\sigma_x^1 = \sigma_x(a/2, b/2, h/2)h^2 / q_0 a^2; \quad \sigma_x^2 = \sigma_x(a/2, b/2, 0.4h^\pm)h^2 / q_0 a^2,$$

$$\sigma_y^1 = \sigma_y(a/2, b/2, h/2)h^2 / q_0 a^2; \quad \sigma_y^2 = \sigma_y(a/2, b/2, 0.4h^\pm)h^2 / q_0 a^2$$

$$\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}(0, 0, h/2)h^2 / q_0 a^2; \quad \tau_{xz}^1 = \tau_{xz}(0, b/2, 0)h / q_0 a$$

$$\tau_{yz}^1 = \tau_{yz}(a/2, 0, 0)h / q_0 a; \quad \tau_{xz}^2 = \tau_{xz}(0, b/2, 0.4h)h / q_0 a$$

	DMQP/ml (8×8)	DMQP/ml (19×19)	DMQPz (6×6)	HOZZT (8×8)	PRHSDT (8×8)	PFSDT (8×8)	Pagano
$a/h = 4$							
w	7.890	7.8656	7.6672	7.655	7.6042	4.7602	7.5962
τ_{xz}^1	.2525	.255	.2346	.250	.2592	.1259	.239
τ_{xz}^2	2497	.2525	.2412	-	.2136	1.0494	-
	.2497	.2525	-	-	.2136	.1259	-
τ_{yz}^1	.1172	.1177	.1057	.1151	-	-	.1072
τ_{xy}^1	.1269	.1275	.1459	.1462	-	-	.1484
$a/h = 10$							
w	2.22	2.217	2.2083	2.2003	2.199	1.5601	2.5
τ_{xz}^1	.309	.311	.2972	.3146	.3256	.1409	.300
τ_{xz}^2	.307	.310	.2976	-	.2683	1.1745	-
	.307	.310	-	-	.2683	.1409	-
τ_{yz}^1	.0565	.056	.0521	.056	-	-	.0527
τ_{xy}^1	.0675	.067	.0708	.070	-	-	.0717

Tableau 3.12. Déplacement transverse, contraintes du cisaillement dans la plaque carrée sandwich (f/c/f) soumise à une charge sinusoïdale

	DMQP/ml (8×8)	DMQP/ml (19×19)	DMQPz (6×6)	HOZZT (8×8)	PRHSDT (8×8)	PFSDT (8×8)	Pagano
$a/h = 4$							
σ_x^1	.7375	.73125	1.5206	1.5158	1.4539	.8385	1.556
σ_x^2	.588	.586	.2210	-	.3181	.6708	.233
	.0028	.00286	.0004	-	.0012	.0024	
σ_y^1	.2343	.235	.2494	.2495	.2522	.1565	.2595
σ_y^2	.1875	.188	.1621	-	.1631	.1252	-
	.008	.008	.0066	-	.0069	.0053	-
$a/h = 10$							
σ_x^1	1.	1.02	1.1568	1.1438	1.1453	1.0475	1.152
σ_x^2	.796	.793	.6315	-	.6193	.8380	.629
	.00215	.00215	.00101	-	.0018	.0020	-
σ_y^1	.107	.107	.1088	.1082	.1101	.0806	.1099
σ_y^2	.0855	.0855	.0823	-	.0832	.0645	-
	.00364	.00364	.00305	-	.0035	.0027	-

Tableau 3.13. Contraintes planes dans la plaque carré sandwich (f/c/f), simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale.

3.2.6 Plaque carrée sandwich (f(0,90),c, f(90,0)) sous charge uniforme

Dans une suite des tests des éléments finis basés sur une théorie d'ordre supérieur raffinée, cités précédemment, développée par Topdar et son groupe [204], une plaque sandwich f(0,90)/c/f(90,0) de longueur a , simplement supportée sous chargement d'intensité q_0 uniformément répartie est analysée par différents maillages. La plaque sandwich est considérée comme une structure multicouche intelligente (Smart Plate). L'analyse est faite pour différents élancements d'épaisseur $a/h = 50, 20$ et 10 . h est l'épaisseur totale de la plaque, dont l'âme est de $0.8h$, celle des chaque peau est de $0.05h$. Les propriétés des matériaux sont données comme suit :

	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{13}	$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31}$
Peau (GPa)	25×10^6	1×10^6	1×10^6	$.5 \times 10^6$	$.2 \times 10^6$	$.5 \times 10^6$.25
Cœur (GPa)	$.04 \times 10^6$	$.04 \times 10^6$	$.5 \times 10^6$	$.016 \times 10^6$	$.06 \times 10^6$	$.06 \times 10^6$.25

Les valeurs obtenues à certains points sont calculés sous forme adimensionnelle suivante:

$$\bar{w} = 100 w_c E_y h^3 / q_0 a^4, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x(a/2, a/2, h/2) h^2 / q_0 a^2$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}(0, b/2, 0.4h) h / q_0 a, \quad \bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz}(a/2, 0, 0.4h) h / q_0 a$$

Le déplacement transversal et les contraintes obtenus par l'élément proposé sont reportés dans le tableau (3.14). Outre les valeurs données par les éléments finis développés par Topdar et al. [204], des valeurs de la solution d'élasticité tridimensionnelle [50] sont notamment y illustrées. Les résultats de l'élément DMQP se montrent en bon accord avec les valeurs de référence. Nous constatons une excellente représentation concernant les contraintes de cisaillement pour les deux versions du modèle DMQP. Cependant, le déplacement n'est guère bien estimé par le modèle DMQPz d'autant que le rapport d'aspect diminue. Cela pourra être attribué à la représentation non fiable du cisaillement transverse due à la finesse géométrique des peaux (épaisseur égale à $0.05h$) d'une part, et de leur faibles propriétés mécaniques d'autre part.

a/h	Modèles	Maillage	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
50	DMQPz	6×6	1.4318	1.6759	0.356	0.3494
		16×16	1.4304	1.6722	0.3606	0.3522
	DMQPml	8×8	1.4544	1.68	0.362	0.386
		19×19	1.4512	1.664	0.368	0.358
	PRHSDT[204]	8×8	1.4505	1.6723	0.3625	0.3460
		12×12	1.4504	1.6704	0.373	0.3575
	Exacte[50]		1.4507	1.6702	0.3735	0.3578
20	DMQPz	7×7	1.5804	1.6539	0.3541	0.3444
		16×16	1.5789	1.6503	0.3581	0.3484
	DMQPml	8×8	1.7162	1.655	0.359	0.3505
		19×19	1.71	1.6425	0.3635	0.3545
	PRHSDT[204]	8×8	1.7063	1.6693	0.3613	0.3456
		12×12	1.7063	1.6678	0.3718	0.3571
	Exacte[50]		1.6998	1.6682	0.3701	0.3551
10	DMQPz	7×7	2.1106	1.6056	0.3432	0.3462
		16×16	2.1085	1.6038	0.3473	0.3507
	DMQPml	8×8	2.652	1.61	0.35	0.346
		19×19	2.636	1.6	0.355	0.353
	PRHSDT[204]	8×8	2.6228	1.6855	0.3609	0.3469
		12×12	2.6228	1.6854	0.3713	0.3582
	Exacte[50]		2.5964	1.6914	0.3629	0.3490

Tableau 3.14 Plaque carrée sandwich (f(0,90), c, f(90,0)) sous chargement uniforme. déplacement transversal au point C, contrainte plane et contraintes de CT maximales.

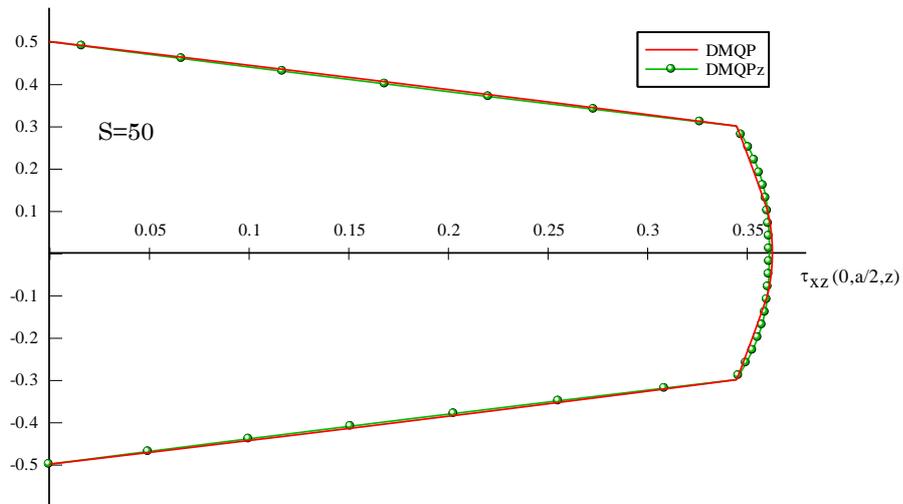


Figure 3.16 Contrainte du cisaillement transverse τ_{xz} au point D(0, a/2, z), maillage 6 × 6.

3.3 Tests de vibrations libres des structures composites

Afin de tester la performance de la formulation du nouveau modèle dans le calcul en vibration libre des plaques isotropes et composites (plaques multicouches/sandwichs), nous traitons dans la présente partie, quelques exemples, qui sont largement analysés dans la littérature spécialisée, entre autres celui du carton ondulé. Nous nous contentons généralement à la confrontation des six modes propres avec des références tantôt analytiques, tantôt expérimentales.

3.3.1 Plaque carrée isotrope simplement supportée

Ce test a été initialement proposé par Reddy [205] et Levinson [206]. Il s'agit d'une plaque carrée isotrope, de masse volumique $\rho = 2832 \text{ Kg/m}^3$, simplement supportée sur les quatre cotés. Nous imposons $w = \beta_s$ sur tout le contour du domaine. Un maillage de 6×6 a été utilisé. Les résultats sont donnés sous la forme normalisée suivante:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$$

avec a et h sont respectivement la longueur et l'épaisseur de la plaque.

Le but de ce test est d'étudier en premier lieu l'influence du cisaillement transverse sur la première fréquence propre ω_1 , en faisant varier le rapport a/h . Les résultats sont reportés dans le tableau (3.15) et illustrés sur la figure (3.17). Nous avons constaté que l'élément DMQP donne de bons résultats similaires au modèle DSQ. Les fréquences calculées par le modèle avec zigzag, sans correction, sont données également à ce titre. Les valeurs qui se rapportent aux petits rapports a/h sont un peu supérieures aux valeurs de l'élasticité données par Reddy, Cela est évidemment dû au manque du caractère multicouche et systématiquement la forme zigzag dans la présente structure. On notera que pour $a/h = 1$, nous obtenons une fréquence propre avec moindre d'erreur par rapport aux mêmes solutions. Tous les éléments convergent cependant vers la solution de Kirchoff à partir de $a/h = 20$.

a/h	Elasticité[206]	Reddy [205]	DMQP	DMQPz	DSQ	CPT
20	5.88	5.94	5.96	5.96	5.96	
10	5.76	5.77	5.81	5.82	5.80	
5	5.30	5.27	5.31	5.34	5.30	5.97
1	2.32	2.25	2.27	2.34	2.27	

Tableau 3.15. Plaque carrée isotrope simplement supportée, $\nu=0.3$, Influence de a/h sur la fréquence fondamentale (maillage 6×6)

Nous avons pris en suite le cas $a/h = 10$ pour analyser les quatre premières fréquences propres. Les résultats sont reportés dans le tableau (3.16) (m et n représentent le nombre des bosses et les creux d'ondes suivant x et y respectivement). D'après les valeurs obtenues, le modèle DMQP montre un bon accord avec les solutions de références. Cette performance est constatée pour tous les cas. Quant au modèle avec zigzag, quoiqu'il s'avère un peu rigide, il converge lentement mais mieux que le modèle mixte hybride MiSP4/ml. Cela est remarqué notamment pour le troisième et le quatrième mode.

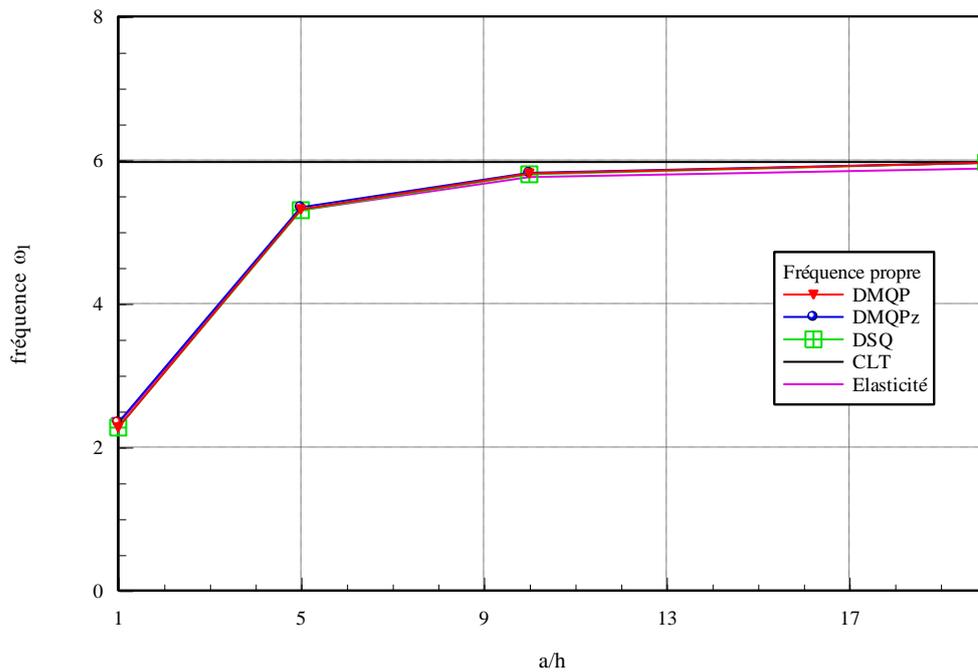


Figure 3.17 Plaque carrée isotrope simplement supportée, influence de a/h sur la fréquence propre $\bar{\omega}_1$

m	n	DMQP		DMQPz		DSQ[63]		MiSP4/ml[6]	Elasticité[206]
		6 × 6	10 × 10	6 × 6	10 × 10	6 × 6	10 × 10	6 × 6	
	1	5.80	5.78	5.82	5.79	5.8	5.78	5.79	5.78
1	3	26.83	26.13	26.99	26.28	26.85	26.13	26.9	25.87
3	3	44.48	43.14	44.89	43.53	44.40	43.10	44.1	42.72
1	5	62.92	59.05	63.67	59.73	63.48	59.25	64.00	57.48

Tableau 3.16. Plaque carrée isotrope simplement supportée : $\nu=0.3$, $a/h = 10$, les quatre premières fréquences propres

3.3.2 Plaque carrée sandwich simplement supportée

Ce test a été réalisé par Srinivas [11] dans le cadre d'analyse statique et dynamique des plaques composites sandwichs. C'est un exemple de vibration libre d'une plaque sandwich simplement supportée avec différentes géométries. Les couches sont composées de matériaux isotropes ou orthotropes avec un rapport de proportionnalité C égale 1, 5 et 10.

Matériau isotrope :

$$E = 68.95 \times 10^9, \nu = 0.3, \rho = 2832 \text{ Kg/m}^2$$

Orthotrope : sur les peaux:

$$E_1 = 3.4156, E_2 = 1.7931, G_{12} = 1, \quad G_{13} = 0.608, \quad G_{23} = 1.015, \quad \nu = 0.44$$

Nous limiterons notre étude au cas de la plaque carrée, avec un rapport d'élancement $a/h = 10$.

La fréquence propre fondamentale est donnée par la formule suivante :

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho(2)h^2}{G_{12}(2)}}$$

Les résultats numériques de la première fréquence propre fondamentale de la flexion de la plaque sandwich isotrope et orthotrope sont illustrés sur le tableau (3.17). Ils sont comparés à ceux obtenus par les éléments finis MiSP4/ml et DSQ développés dans les travaux [6] et [63] respectivement. Nous considérons le modèle 2D fondé sur une approximation raffinée, développé par Srinivas [11] et qui réduit le problème 3D à un problème bidimensionnelle. Du fait qu'il présente des résultats quasi-identiques à ceux calculés par la théorie 3D développée par lui-même dans un travail antérieur [196], Nous considérons donc les solutions bidimensionnelles correspondantes comme des valeurs de référence. Nous rappelons que ce modèle est basé sur une variation des déplacements u et v linéaire par couche et un déplacement transverse constant suivant l'épaisseur.

C	DMQP	DMQPz	DSQ	MiSP4/ml	Exacte[11]
Matériau isotrope					
1	0.0937	0.0938	0.0936	0.09354	0.0931
10	0.1998	0.1999	0.200	0.1962	0.1984
50	0.3285	0.3291	0.3283	0.3123	0.3270
Matériau orthotrope					
1	0.0930	0.0932	0.093	0.09294	0.0925
10	0.1923	0.1925	0.1922	0.1881	0.1913
50	0.3001	0.3009	0.3	0.284	0.2995

Tableau 3.17 Fréquence de la vibration libre de la plaque sandwich à 3 couches.

Nous avons constaté, d'après les résultats numériques que le modèle DDM donne dans les deux cas de matériaux des valeurs de fréquence de bonne précision. Même pour des valeurs faibles du module élastique de noyau, la version avec zigzag maintient un bon accord avec la théorie exacte et demeure meilleure que le modèle mixte (MiSP4/ml).

3.3.3 Carton ondulé

Un test de vibrations libres d'une plaque rectangulaire en carton ondulé a été réalisé en 2002 en partenariat avec le CERME (Centre d'Etude et de Recherche en Matériaux et Emballages, ESIEC). Des échantillons de plaques ont été découpés sur des caisses en carton ondulé fournies par le Groupe Smurfit-Socar. La structure possède une seule couche (cannelure moyenne) d'épaisseur $h = 4.02 \text{ mm}$. Elle est encastree à une extrémité, l'autre étant libre (figure 3.18). Un analyseur numérique doté d'un accéléromètre fixé sur la structure au point P , permet d'enregistrer l'accélération en ce point en fonction du temps, après avoir effectué un essai de lâché (conditions initiales non nulles, figure 3.13). Le test est réalisé pour différentes valeurs de la longueur (tableau 3.18).

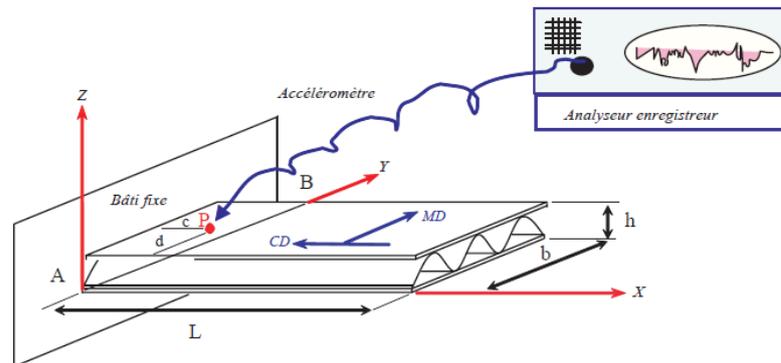


Figure 3.18 Montage expérimentale de vibration libre d'une plaque rectangulaire en carton ondulé

Géométrie (mm) :	$L = 100, 130, 170, 200, 230; b = 70; h = 4.02; c = 10; d = 35$
Conditions aux limites :	AB : encastree ($U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = u_1^M = u_2^M$)
Matériau	Une cannelure moyenne de carton ondulé type C (Test-Liner/Mi-chimique à 100% FCR)
Propriétés homogénéisées :	$E_1 = E_{MD} = 863.05 \text{ MPa}, E_2 = E_{CD} = 545 \text{ MPa},$ $\nu_{12} = 0.27, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 244.26 \text{ MPa},$ $\rho = 745.43 \times 10^{-6}$

Tableau 3.18 Caractéristiques géométriques et mécaniques du carton ondulé utilisé pour l'essai vibration libre

La technique d'homogénéisation proposée par Aboura [207] et adaptée au carton ondulé [7, 208], a permis d'obtenir les propriétés mécaniques homogénéisées de la structure globale à partir de celles mesurées sur les peaux et l'ondulation (tableau 3.18).

3.3.3.1. Détermination des fréquences propres expérimentales

Le signal enregistré par l'analyseur numérique correspond à l'accélération du point P (figure 3.18). La fréquence propre est calculée à partir de la transformée de Fourier rapide (FFT: Fast Fourier Transform) appliquée à ce signal. Sur les figures 3.19 et 3.20 sont présentés respectivement le signal "accélération du point P" et sa transformée de Fourier, pour une plaque de longueur $L = 200$ mm. La distribution temporelle de l'accélération montre qu'au delà de 0.5 secondes, la structure est quasiment au repos. L'effet de l'amortissement du carton ondulé est très important, une caractéristique recherchée pour un matériau d'emballage.

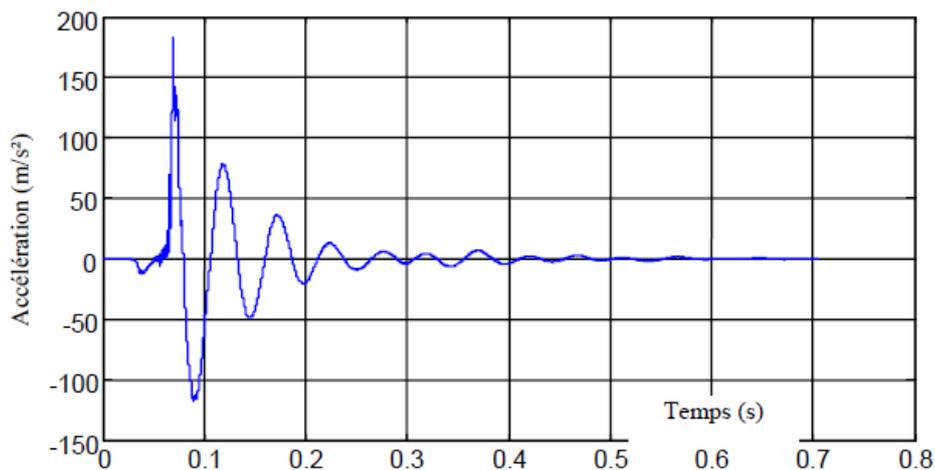


Figure 3.19. Accélération du point P. Plaque de longueur $L = 200$ mm

Le spectre de Fourier nous fournit la fréquence de l'accélération du point P, qui correspond à la première fréquence propre de la structure (figure 3.20). Le graphe affiche une valeur de 19.46 Hz.

Le tableau 3.19 présente les résultats numériques des fréquences propres obtenus avec nos modèles, ainsi que ceux donnés par les éléments DMTS [3] et MiSP4/ml [6] avec un maillage de 12×2 . Ils sont comparés également aux résultats expérimentaux. Nous obtenons globalement une bonne corrélation entre les fréquences calculées et les fréquences expérimentales. La différence entre ces résultats peut être justifiée d'une part, par une remarque faite par Verchery et rapportée dans [209] et [4] à propos de la loi de comportement et des phénomènes de vibrations qui peuvent notablement modifier les modules de Young: l'utilisation des modules déterminés statiquement pour un calcul dynamique peut produire une

mauvaise évaluation des fréquences propres, et d'autre part, nous rappelons que le comportement du carton ondulé est sensiblement lié aux variations de la température et de l'humidité ambiantes.

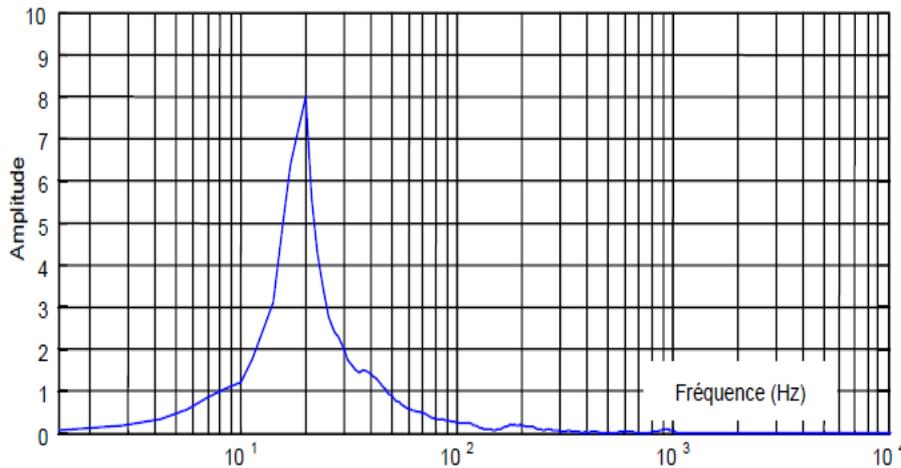


Figure 3.20. FFT de l'accélération du point P. Plaque de longueur $L = 200$ mm

Les résultats de deux modèles DMQP sont quasi-identiques. Comme tenu de l'aspect théorique de la structure, dans lequel la plaque est considérée comme une seule couche orthotrope, l'effet de zigzag est dans ce cas négligeable. Un examen des coefficients de correction du cisaillement transverse calculés sur une équivalence énergétique, nous montre que les valeurs sont égales à $5/6$. Pratiquement ces valeurs reflètent l'applicabilité des éléments 2D pour l'analyse de ce type de structures. Les valeurs illustrés sur le tableau (3.19) indiquent que les éléments quadrilatères fournissent des résultats identiques à ceux obtenus par l'élément triangulaire DMST, basé sur la même approche. Concernant les six premières pulsations propres, qui nécessitent généralement un raffinement du maillage, la précision de nos résultats a été examinée en utilisant un maillage de 12×12 . Elle montre encore une fois des grandeurs du même ordre qu'un élément quadratique à 8 nœuds (QSR8-ABAQUS), tableau (3.20). Pour une meilleure visualisation, les six modes propres calculés par le modèle DMQPz sont illustrés sur la figure (3.21).

La figure (3.22) présente l'allure de la première pulsation propre pour les différents élancements de la plaque du carton ondulé. La courbe descendante montre que l'effet de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion. Cet effet tend à diminuer les fréquences calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité de la structure. Ce qui est conforme à la théorie des plaques en dynamique proposée par Uflyand en 1948 [210] et confirmé par Mindlin trois ans plus tard [32].

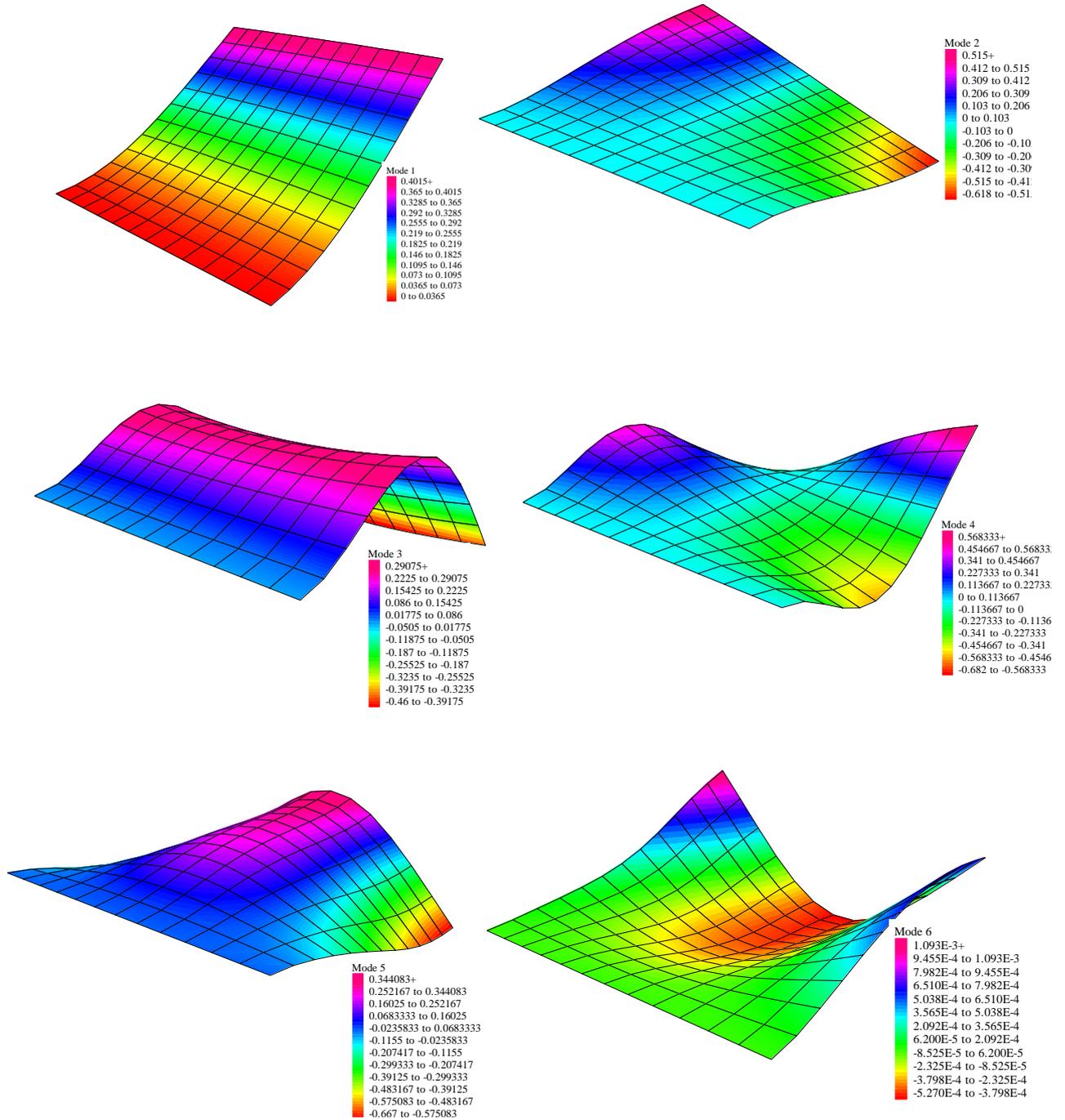


Figure 3.21 Vibrations libres du carton ondulé ($L = 100$ mm), les six premiers modes propres.

L	L/h	DMQP	DMQPz	MiSP4/ml	DMTS	Expérience
100	24.9	444.40	444.43	452.78	443.04	354.13
130	32.3	262.70	262.71	268.13	261.96	236.06
150	37.3	197.18	197.18	201.45	196.63	182.74
170	42.3	153.40	153.41	156.87	152.98	155.99
200	49.8	110.73	110.73	113.36	110.77	122.27
230	57.2	83.66	83.66	85.73	83.43	96.91
250	62.2	70.77	70.77	72.56	70.58	62.2

Tableau 3.19 Résultats numériques et expérimentaux des pulsations propres.

Fréquences Propres (rad/s)	DMQPz	QSR8-ABAQUS
$\bar{\omega}_1$	444.83	444.83
$\bar{\omega}_2$	1280.82	1265.8
$\bar{\omega}_3$	2772.16	2746.10
$\bar{\omega}_4$	4452.42	4370.70
$\bar{\omega}_5$	5145.97	5083.40
$\bar{\omega}_6$	5564.80009	5552.2

Tableau 3.20 Vibrations libres du carton ondulé (L = 100 mm), les six premières fréquences propres.

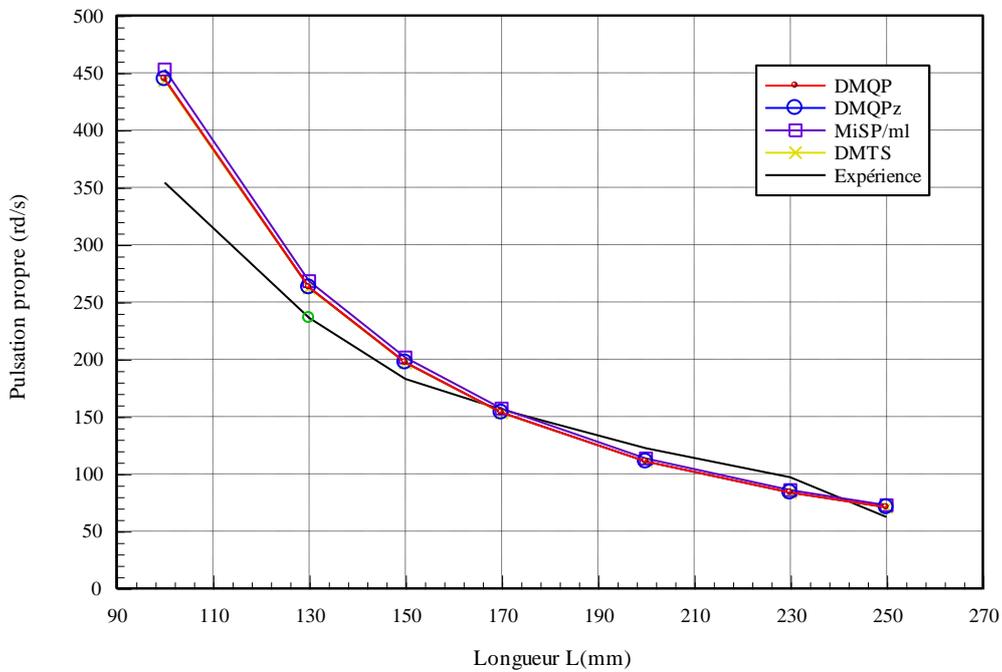


Figure 3.22 Variation de la première pulsation propre pour différents longueurs de la plaque.

3.3.4 Plaque carrée multicouche croisée (0/90/90/0)

Il s'agit d'un problème de vibration libre d'une plaque carrée multicouche (0/90/90/0), encadrée sur tous les côtés. L'analyse est faite pour différents élargissement de l'épaisseur ($a/h = 5, 10$ et 20), avec h est l'épaisseur totale de la plaque et toutes les couches possèdent la même épaisseur. La plaque est modélisée par $N \times N$ éléments de même taille ($N = 8, 16, 20$ et 24). Le matériau utilisé est isotrope transverse avec les propriétés suivantes :

$$E_1 = 181 \text{ GPa}, E_2 = 10.3 \text{ GPa}, G_{12} = 7.17 \text{ GPa}, \nu = 0.28, \\ G_{13} = 7.17 \text{ GPa}, G_{23} = 2.87 \text{ GPa}, \rho = 1.578 \text{ Kg/m}^3$$

avec

$$\bar{\omega}_n = \omega_n a S \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

Rappelons que ce problème est contesté et étudié récemment par Kapuria et Kulkarani [211] afin d'exploiter le potentiel des concepts DKQ¹² développé par Batoz et al. [183] et celui de IDKQ¹³ reformulé par Jeychandrabose et al. [212] dans les théories du troisième ordre et de zigzag. Les deux auteurs ont élaboré et évalué l'effet des fonctions d'interpolation des modèles DKQ et IDKQ sur la performance des éléments quadrilatères basés sur les théories TOT¹⁴ [25] et ZIGT¹⁵ [213-216] dans l'analyse statique des plaques multicouches. Ensuite, ils ont étendu ces éléments pour l'analyse dynamique. La performance de leurs éléments a été évaluée à travers des tests de vibration libre des plaques composites et sandwich pour différentes formes et conditions aux limites. La matrice de masse cohérente, la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur de charge sont calculés selon le principe de Hamilton.

De notre part, Nous évoquons cette application dans le but de confronter nos résultats avec ceux obtenus par les deux auteurs. Nous limiterons la comparaison dans ce contexte à celui du modèle baptisé ZIGT FE [211], (théorie ZIGT avec les fonctions d'interpolation utilisé dans l'élément IDKQ) ainsi que à ceux obtenus par un élément fini 3D d'ABAQUS [217], ayant utilisé un élément solide à vingt nœuds (un maillage de 20.000 éléments : 50×50 dans le plan, et 8 suivant l'épaisseur).

Les six premières fréquences naturelles sont illustrées sur le tableau (3.21) pour les deux versions du modèle DMQP. Avant d'analyser nos résultats, nous avons effectué un calcul parallèle sur Abaqus 6.9 pour la même structure, en utilisant tous les éléments finis 2D de son bibliothèque, avec un maillage raffiné (40×40). Ce calcul a montré que les valeurs relatives au code ABAQUS sont un peu sous estimées par rapport à celles illustrés dans le même tableau, y compris celles de modèles utilisés comme référence, entre autres notre modèle DMQP qui reflète relativement des

¹² Discret Kirchoff Quadrilateral

¹³ Improved Discret Kirchoff Quadrilateral

¹⁴ Reddy's refined third order theory

¹⁵ Théorie de zigzag du troisième ordre

valeurs plus proches au modèle 3D. Le deuxième modèle avec zigzag DMQPz ressemble à celui de ZIGT FE dans le cas où la structure est modérément épaisse, or une sur-rigidité se révélait pour un rapport d'élançement au delà de 20.

L'examen graphique de convergence des fréquences naturelles ($\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_6$) pour deux rapports d'aspect, $a/h = 5$ et 10 montre que les valeurs de références sont un peu distinctes. Généralement les résultats de la théorie du troisième ordre dite TOT de Reddy constitue un compromis entre les différentes valeurs de référence. Cette remarque est bien illustrée sur les figures 3.23. à 3.26. Pour le mode dominant, tous les résultats montrent une convergence rapide est stable autour de la valeur obtenue par le premier maillage (8×8). Quelque soit le rapport a/h , un maillage raffiné est nécessaire pour le calcul des modes supérieur. Comme nous l'avons déjà mentionné, les résultats du modèle DMQP sont comparables à ceux obtenus par l'élément 3D FE du code ABAQUS, tandis que les graphes du modèle avec zigzag se rapprochent de ceux du modèle ZIGT FE. D'autre part, le modèle avec DMQP avec zigzag s'avère plus précis pour les structures épaisses. En revanche, si on admet les valeurs d'éléments finis 3D comme référence, le modèle DMQP reflète généralement la même allure et maintient un bon accord de précision.

a/h	DMQP					DMQPz					ZIGT FE					TOT FE	3D FE	
	8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20	24 × 24	8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20	24 × 24	8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20	24 × 24	24 × 24	ABAQUS	
5	$\bar{\omega}_1$	11.1933	11.1138	11.0860	11.0731	11.0662	13.0298	12.9428	12.9123	12.8981	12.8905	12.4229	12.2336	12.1585	12.1197	12.0965	11.9516	11.4860
	$\bar{\omega}_2$	18.0946	17.8383	17.7486	17.7073	17.6848	20.6718	20.2412	20.0921	20.0234	19.9860	20.4106	19.8051	19.5636	19.4335	19.3528	19.0208	18.2956
	$\bar{\omega}_3$	19.0108	18.6000	18.4574	18.3915	18.3559	22.4415	22.1036	21.9854	21.9313	21.9016	22.0082	21.4534	21.2649	21.1762	21.1266	20.3969	19.3319
	$\bar{\omega}_4$	23.9499	23.4652	23.2965	23.2182	23.1761	27.8006	27.2482	27.0556	26.9670	26.9187	28.0214	26.8915	26.5140	26.3278	26.2179	25.4967	24.2519
	$\bar{\omega}_5$	27.0131	26.2057	25.9228	25.7924	25.7218	31.8491	30.5296	30.0726	29.8617	29.7480	31.6794	30.0722	29.5378	29.2653	29.0997	28.5190	27.3411
	$\bar{\omega}_6$	29.9232	28.6748	28.2414	28.0421	27.9340	34.5520	33.4675	33.0877	32.9124	32.8169	35.5384	33.9248	33.4451	33.2334	33.1200	30.9182	28.9117
10	$\bar{\omega}_1$	17.5909	17.4449	17.3939	17.3703	17.3574	20.0191	19.8606	19.8050	19.7793	19.7652	18.4292	18.2471	18.1725	18.1342	18.1118	18.2744	17.7502
	$\bar{\omega}_2$	29.9004	28.9889	28.6764	28.5329	28.4555	31.9473	31.0161	30.6973	30.5513	30.4719	29.8103	29.4010	29.1333	29.1333	29.0729	28.9047	28.2032
	$\bar{\omega}_3$	31.7090	31.1787	30.9914	30.9052	30.8586	38.6041	37.9149	37.6717	37.5585	37.4973	34.7486	34.0295	33.6352	33.6352	33.5629	33.8184	32.4505
	$\bar{\omega}_4$	40.3478	39.3123	38.9537	38.7890	38.6988	46.4249	45.2748	44.8744	44.6897	44.5894	42.4472	41.5875	41.1102	41.1102	41.0151	41.0769	39.6697
	$\bar{\omega}_5$	49.7556	46.7393	45.7327	45.2721	45.0237	52.1211	49.0289	47.9751	47.4937	47.2343	47.7942	46.5290	45.8210	45.8210	45.6649	44.9767	43.7521
	$\bar{\omega}_6$	49.9554	48.3473	47.7562	47.4827	47.3341	62.4141	59.4705	58.4651	58.0052	57.7569	55.6810	53.7990	52.9209	52.9209	52.7698	52.7390	50.4550
20	$\bar{\omega}_1$	23.8427	23.6385	23.5662	23.5325	23.5142	25.5770	25.3554	25.2766	25.2399	25.2199	24.0778	23.9687	23.9165	23.8871	23.8689	24.1130	23.7212
	$\bar{\omega}_2$	38.7178	37.3545	36.8909	36.6790	36.5639	40.1636	38.7978	38.3326	38.1209	38.0063	36.9491	36.8143	36.7516	36.7140	36.6889	36.7473	36.3153
	$\bar{\omega}_3$	50.2437	49.2302	48.8684	48.6995	48.6078	57.4447	56.1813	55.7275	55.5160	55.4001	51.6234	50.8759	50.5601	50.3919	50.2908	51.6151	49.6061
	$\bar{\omega}_4$	59.7250	58.0365	57.4481	57.1761	57.0284	66.3100	64.3267	62.5038	61.6795	61.2376	59.3967	58.8536	58.6198	58.4891	58.4074	59.1384	57.6707
	$\bar{\omega}_5$	68.1189	62.7402	60.9519	60.1430	59.7086	69.8169	64.4417	63.7848	63.4805	63.3150	60.3323	59.7326	59.5236	59.4102	59.3371	59.0253	58.2579
	$\bar{\omega}_6$	82.7835	77.7755	76.1016	75.3421	74.9343	88.5631	83.4531	81.7408	80.9628	80.5445	76.9830	76.1557	75.8823	75.7354	75.6414	75.9905	74.4577

Tableau 3.21 Fréquences naturelles $\bar{\omega}_n$, de la plaque carrée multicouche (0/90/90/0) encastree.

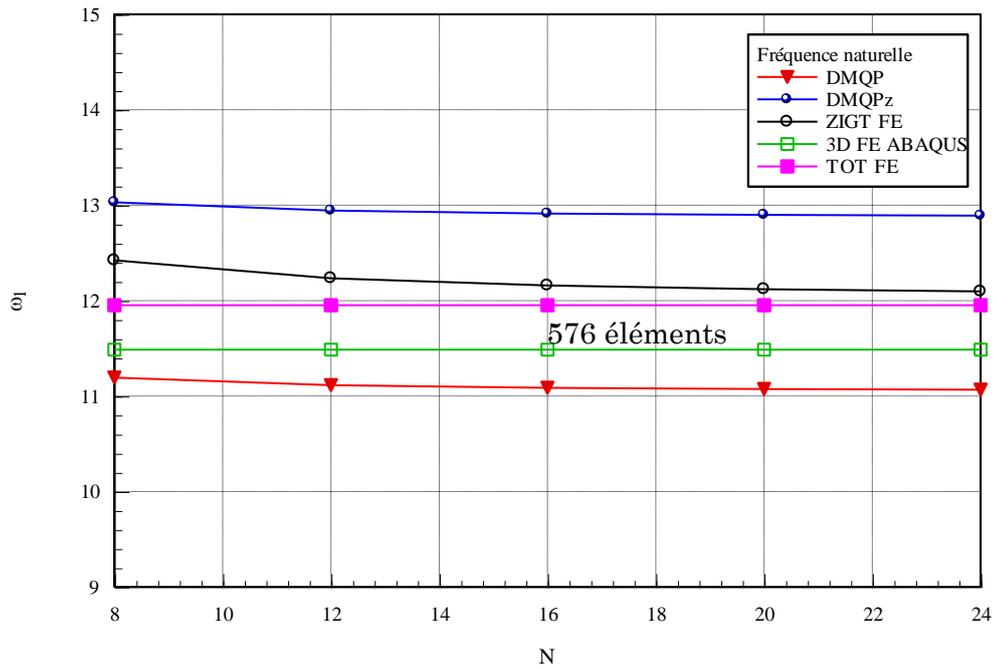


Figure 3.23 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encadrée, fréquence $\bar{\omega}_1$, $S=5$

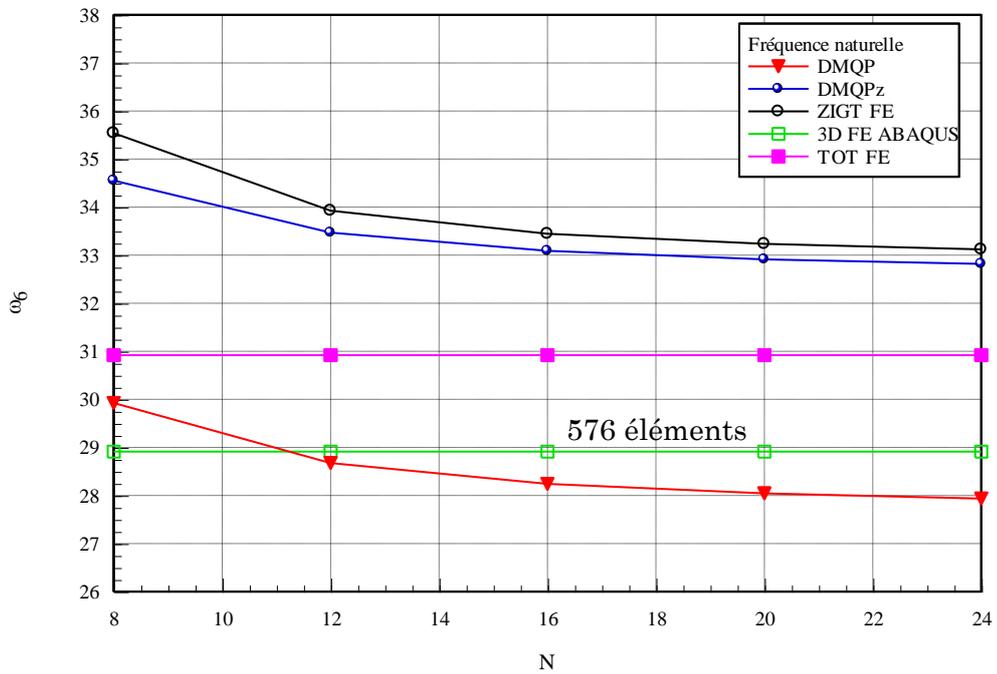


Figure 3.24 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encadrée, fréquence $\bar{\omega}_6$, $S=5$

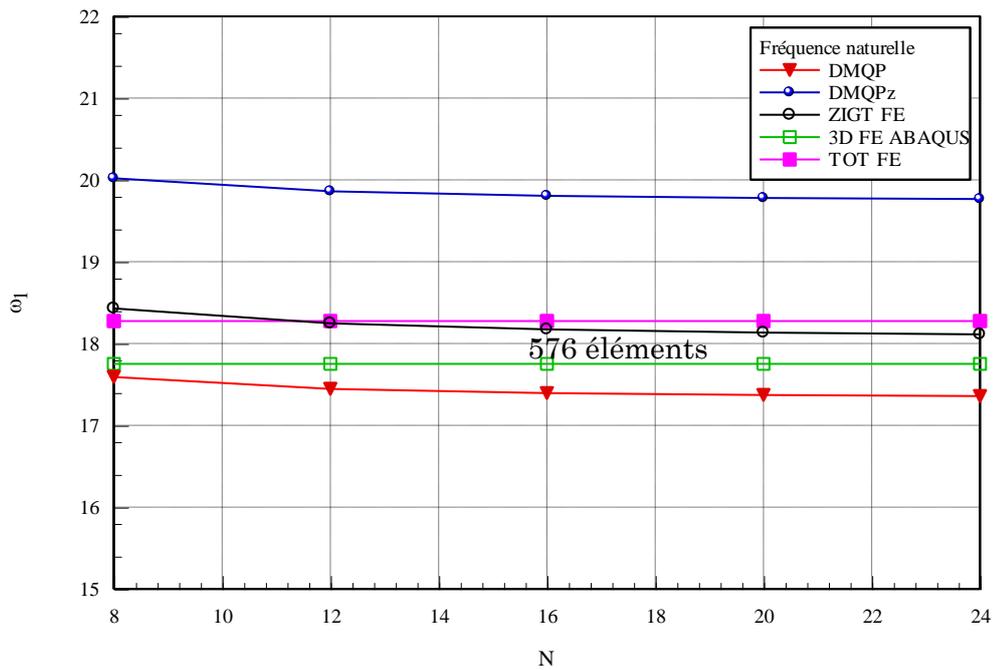


Figure 3.25 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encastée, Fréquence $\bar{\omega}_1$, $S=10$

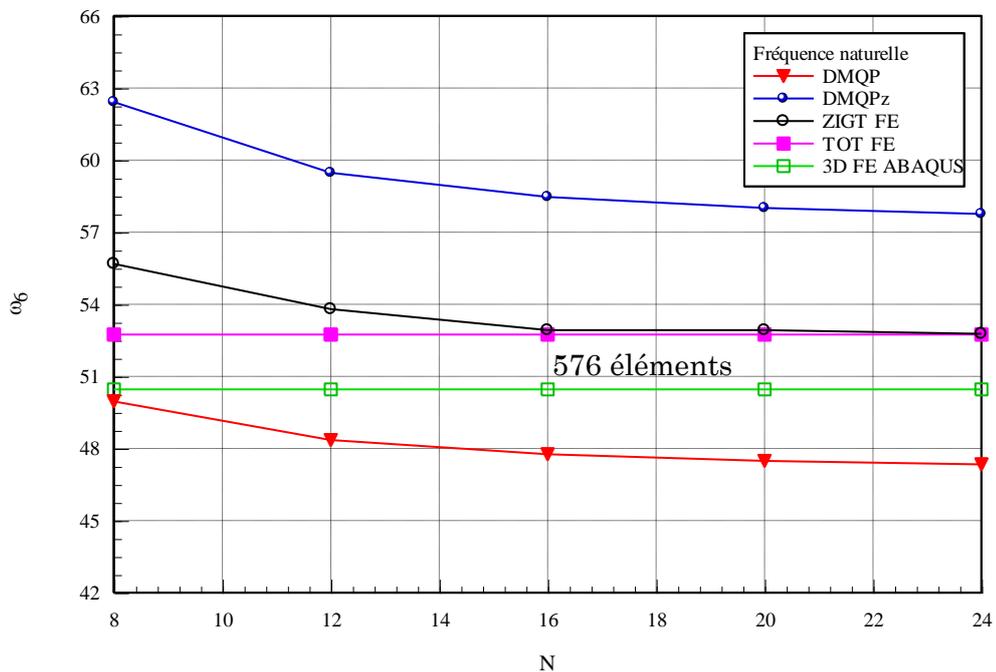


Figure 3.26 Convergence du modèle DDM pour la plaque multicouche encastée, Fréquence $\bar{\omega}_6$, $S=10$

Chapitre 4 Formulation théorique du modèle de coques composites à effet zigzag

4.1 Introduction

Comme c'est déjà discuté dans le premier chapitre, et compte tenu le caractère global ou local utilisé dans la description du champ de déplacement (ou de contrainte), on peut distinguer différentes approches qui se basent généralement sur la théorie de Kirchoff pour les structures minces ou sur la théorie de Reissner-Mindlin pour les structures épaisses. Nous pouvons les classer soit en tant que approches globales, dont la structure est considérée homogène équivalente, soit comme étant locales (ou combinée: globale-locale) dites «par couche», dans lesquelles le champ de déplacement ou de contrainte est dépendant de couche et varie linéairement ou plus suivant l'épaisseur. Compte tenu de la performance numérique liée proportionnellement au cout du calcul élevé, ces dernières approches sont généralement réservées aux applications spécifiques dont la réponse locale est réclamée et/ou le comportement local est dominant dans certains endroits.

Néanmoins, le modèle classique reste plus répandu dans la modélisation des structures composites géométriquement complexes, d'où l'introduction d'une correction sur les composantes de la rigidité en cisaillement est parfois nécessaire pour améliorer le comportement à l'effort tranchant. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix des coefficients de correction, l'estimation des contraintes dans quelques structures épaisses est incertaine et nécessite un modèle minutieux.

Afin de surmonter cet anomalie tout en gardant le caractère opératoire de ce modèle homogène équivalent, on se propose comme but, d'étendre la notion de zigzag, qui reflète un champ de déplacement par couche (déjà discutée en deuxième chapitre), sur le modèle élément fini DDM pour les structures coques multicouches. Donc, la formulation élément fini de deux versions pour la modélisation des coques composites sera présentée dans la suite de travail. Les éléments sont des quadrilatères courbes à quatre nœuds: basés sur le concept de Mindlin discret, ils tiennent compte de l'aspect multicouche de la structure d'une part et l'effet de zigzag selon la démarche de Murakami d'autre part.

4.2 Description géométrique d'une coque

Une coque est un solide délimité par deux surfaces proches et approximativement parallèles. Elle est soit fermée sur elle-même, soit délimitée en outre par une surface périphérique (le bord) qui joint les deux surfaces principales. La surface moyenne A , considérée comme surface de référence, est décrite par exemple par deux coordonnées paramétriques ou curvilignes (ξ, η) .

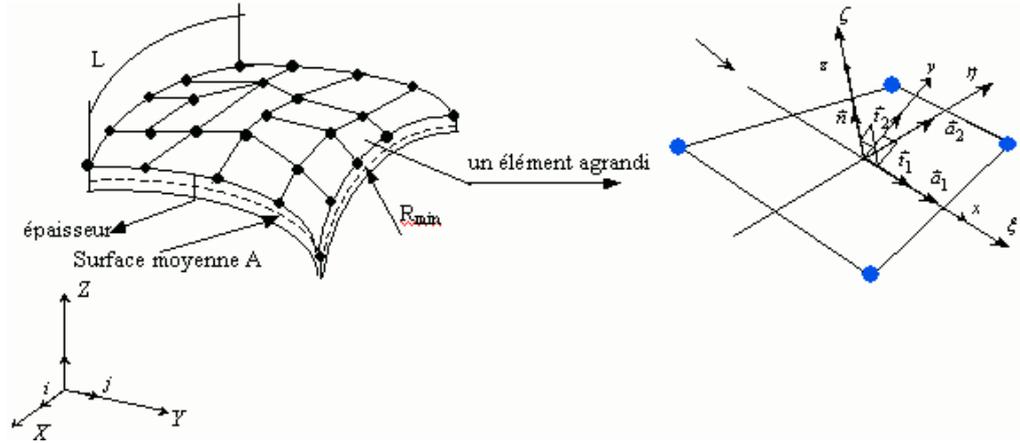


Figure 4.1 Discretisation géométrique d'une coque avec un élément quadrilatère courbe [6]

4.2.1 Description d'un point sur la surface moyenne

Un point p sur la surface moyenne est défini, dans la configuration non déformée $C(t)$ par le vecteur position \vec{x}_p .

avec

$$\vec{x}_p = X_p(\xi, \eta) \vec{i} + Y_p(\xi, \eta) \vec{j} + Z_p(\xi, \eta) \vec{k} \quad (4.1)$$

soit $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n})$ une base covariante (naturelle) au point p définie par deux vecteurs tangents aux directions ξ (η constant) et η (ξ constant) et un troisième vecteur perpendiculaire à leur plan, équation (4.2).

$$\vec{a}_1 = \vec{x}_{p,\xi}, \vec{a}_2 = \vec{x}_{p,\eta}, \vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|} \quad (4.2)$$

soit

$$[F_0] = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{n}] \quad (4.3)$$

un élément différentiel au point p s'écrit:

$$d\vec{x}_p(\xi, \eta) = \vec{a}_1 d\xi + \vec{a}_2 d\eta \quad (4.4)$$

sa longueur est donnée par le terme ds_p , avec:

$$l = (ds_p)^2 = d\vec{x}_p \cdot d\vec{x}_p = \langle d\xi \quad d\eta \rangle [a] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

l est la première forme fondamentale de A , $[a]$ est le tenseur métrique de la surface.

$$[a] = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 \end{bmatrix}; a = \det[a] \quad (4.6)$$

d'après (4.3), on aura

$$\det[F_0] = (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \cdot \vec{n} = \sqrt{a} \quad (4.7)$$

On définit également une autre base contravariante (duale) en même point p , notée $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{n})$, figure (4.2), ou sous forme matricielle $[F_0]^{-T}$.

avec

$$[F_0]^{-1}[F_0] = [I] \quad (4.8)$$

$$\vec{a}^1 \vec{a}_1 = \vec{a}^2 \vec{a}_2 = 1 \quad ; \quad \vec{a}^1 \vec{a}_2 = \vec{a}^2 \vec{a}_1 = 0 \quad (4.9)$$

$$d\xi = \vec{a}^1 \cdot d\vec{x}_p; \quad d\eta = \vec{a}^2 \cdot d\vec{x}_p$$

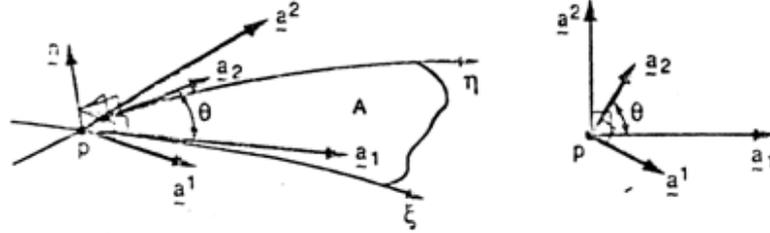


Figure 4.2 vecteurs de bases [218]

Les vecteurs \vec{n} et $d\vec{x}_p$ varient d'un point à l'autre de la surface A . la courbure est associée au taux de variation de \vec{n} ou de $d\vec{x}_p$. La propriété $\vec{n} \cdot d\vec{x}_p = 0$ conduit à:

$$ll = \vec{n} \cdot d^2\vec{x}_p = -d\vec{n} \cdot d\vec{x}_p = \langle d\xi \quad d\eta \rangle [b] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

où ll est la seconde forme fondamentale, nous écrivons:

$$[b] = - \begin{bmatrix} \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{a}_1 & \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{a}_1 & \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Les vecteurs $\vec{n}_{,\xi}$ et $\vec{n}_{,\eta}$ sont orthogonaux à \vec{n} ($\vec{n} \cdot \vec{n}_{,\xi} = \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\eta} = 0$), ils s'écrivent ainsi:

$$\begin{bmatrix} \langle \vec{n}_{,\xi} | \rangle \\ \langle \vec{n}_{,\eta} | \rangle \end{bmatrix} = -[b] \begin{bmatrix} \langle \vec{a}^1 | \rangle \\ \langle \vec{a}^2 | \rangle \end{bmatrix} = -[\bar{b}] \begin{bmatrix} \langle \vec{a}_1 | \rangle \\ \langle \vec{a}_2 | \rangle \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec

$$[\bar{b}] = \begin{bmatrix} \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{a}^1 & \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{a}^2 \\ \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{a}^1 & \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{bmatrix} = [b][a]^{-1} \quad (4.13)$$

4.2.1.1. Repère tangent orthonormé

Dans la formulation des coques, il est souvent nécessaire de définir un repère orthonormé unique $[Q]$ au point p . Pour l'ensemble de nos formulations, nous avons opté pour la méthode proposé par Batoz et Dhett [218], qui est à labri de toute

dépendance vis à vis de la numérotation des nœuds, connaissant le vecteur unitaire $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$ normal à la surface A.

soit

$$[Q] = [\vec{t}_1 \quad \vec{t}_2 \quad \vec{n}] = \begin{bmatrix} C + An_Y^2 & -An_X n_Y & n_X \\ -An_X n_Y & C + An_X^2 & n_Y \\ -n_X & -n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

avec: $A = \frac{1}{1+C}$; $C = \vec{n} \cdot \vec{k} = n_Z$; $1 + C \neq 0$ ($\vec{k} \neq \vec{n}$)

cette matrice est obtenue par une rotation rigide du repère (\vec{i}, \vec{j}, k) autour de l'axe $\vec{k} \wedge \vec{n}$ de telle sorte que le vecteur \vec{k} coïncide avec la normale après la rotation. \vec{n} étant supposé non parallèle à \vec{k} . Si le dénominateur de A est nul, c-à-dire $\vec{k} = -\vec{n}$, alors la matrice [Q] prendra la forme suivante:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

avec $\vec{t}_1 \equiv \vec{i}$; $\vec{t}_2 \equiv -\vec{j}$; $\vec{n} \equiv -\vec{k}$.

4.2.2 Description d'un point quelconque de la coque

Le vecteur position d'un point matériel q situé à distance z de la surface moyenne A est défini par :

$$\vec{x}_q = \vec{x}_p(\xi, \eta) + z\vec{n}(\xi, \eta), \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (4.16)$$

une approximation du vecteur \vec{x}_q est basée sur des fonctions bilinéaires en ξ et η , reportée au plan moyen est donnée par:

$$\vec{x}_q = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)(\vec{x}_{pi} + z\vec{n}_i); \quad (N_i: \text{tableau 2.1}) \quad (4.17)$$

un élément différentiel au point q est défini par l'expression suivante:

$$\{dx_q\} = [F_z]\{d\xi\} \quad ; \quad [F_z] = [F_0] + z[F_n] \quad (4.18a,b)$$

avec

$$\{dx_q\} = \langle dX_q \quad dY_q \quad dZ_q \rangle \quad ; \quad \{d\xi\} = \langle d\xi \quad d\eta \quad dz \rangle \quad (4.19a,b)$$

$$[F_z] = [\vec{a}_{1z} \quad \vec{a}_{2z} \quad \vec{n}]; [F_0] = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{n}]; [F_n] = [\vec{n}_{,\xi} \quad \vec{n}_{,\eta} \quad \vec{0}] \quad (4.20a)$$

$$\vec{a}_{1z} = \vec{a}_1 + z\vec{n}_{,\xi}; \vec{a}_{2z} = \vec{a}_2 + z\vec{n}_{,\eta} \quad (4.20b)$$

La matrice $[F_z]$ est une base covariante au point q de la coque, elle est linéaire en z et ses vecteurs sont tangents à la surface A_z située à une distance z de la surface moyenne.

Un élément d'aire dA_z est défini par:

$$dA_z = |\vec{a}_{1z} \wedge \vec{a}_{2z}| d\xi d\eta = \det[F_z] d\xi d\eta \quad (4.21)$$

En utilisant l'élément de l'aire de la surface A_z , un élément de volume dV est défini également par:

$$dV = dA_z dz = \det[F_z] d\xi d\eta dz \quad (4.22)$$

La relation (4.18b) s'écrit:

$$[F_z] = [F_0] + z[F_n] = [F_0]([I] + z[b_n]) \quad (4.23)$$

où $[F_0]$ et $[F_n]$ ne dépendent pas de z , nous avons:

$$[b_n] = [F_0]^{-1}[F_n] = \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\eta} & 0 \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n11} & b_{n12} & 0 \\ b_{n21} & b_{n22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Les composantes de $[b_n]$ sont celles de $[\bar{b}]$ (équation 4.13), au signe près. D'après l'équation (4.23), on peut déduire que:

$$\det[F_z] = \det[F_0] \cdot \det([I] + z[b_n]) = \mu(z) \det[F_0] \quad (4.25)$$

avec

$$\mu(z) = \frac{\det[F_z]}{\det[F_0]} = 1 - 2zH + z^2K \quad (4.26)$$

$$2H = -(b_{n11} + b_{n22}), K = b_{n11} b_{n22} - b_{n12} b_{n21} \quad (4.27)$$

H et K sont respectivement les courbures moyenne et totale (Gaussienne). La substitution des relations (4.7) et (4.25) dans l'équation (4.22), permet ainsi d'écrire l'élément de volume dV :

$$dV = \mu(z) \sqrt{a} d\xi d\eta dz \quad (4.28)$$

En utilisant la relation (4.23), l'inverse de $[F_z]$ s'écrit:

$$[F_z]^{-1} = ([I] + z[b_n])^{-1} [F_0]^{-1} = \frac{1}{\mu} ([\hat{I}] + z[\hat{b}_z]) [F_0]^{-1} \quad (4.29)$$

avec

$$[\hat{b}_z] = \begin{bmatrix} [\hat{b}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{n22} & -b_{n12} & 0 \\ -b_{n21} & b_{n11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [\hat{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.2.2.1. Repère de base orthonormé au point q

Du fait que l'épaisseur est constante, on peut définir une base orthonormée au point q , notée $[Q_z]$, en considérant $[Q_z] = [Q]$.

alors:

$$\{dx_q\} = [Q] \{dx_q\}_t; \quad \{dx_q\} : rel. (4.19a) \quad (4.31)$$

avec

$$\langle dx_q \rangle_t = \langle dx \quad dy \quad dz \rangle \quad (4.32)$$

La matrice orthogonale $[Q]$ transforme un vecteur $\{dx\}_t$ du repère local au repère global. D'après l'équation (4.18a), la relation inverse s'écrit:

$$\{d\xi\} = [F_z]^{-1}\{dx_q\} \quad (4.33)$$

En utilisant (4.31), on obtient une matrice de passage, baptisée $[C_z]$, entre le repère local covariant et le repère local curviligne, on peut écrire ainsi:

$$\{d\xi\} = [F_z]^{-1}[Q]\{dx_q\}_t = [C_z]\{dx_q\}_t \quad (4.34)$$

Les termes de la matrice $[C_z]$ sont équivalents à ceux de la matrice jacobéenne inverse pour le cas d'une coque à facettes planes. Dans le présent cas, son expression fait intervenir les termes relatifs au gauchissement de la coque.

En utilisant (4.29) nous pouvons réécrire $[C_z]$ sous la forme suivante :

$$[C_z] = \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

avec

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu}([I] + z[\hat{b}]][C^0] = \frac{1}{\mu}[C^0][\mu] \quad (4.36)$$

et

$$[\mu] = [I] + z[C^0]^{-1}[b_c]; [b_c] = [\hat{b}][C^0] = \begin{bmatrix} b_{c11} & b_{c12} \\ b_{c21} & b_{c22} \end{bmatrix} \quad (4.37a,b)$$

$$[C^0] = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{t}_1 & \vec{a}^1 \cdot \vec{t}_2 \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{t}_1 & \vec{a}^2 \cdot \vec{t}_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Pour un coefficient $\mu(z) = 1$, on obtiendra ainsi une expression simplifiée de $[C_z]$, dont la matrice $[C]$ est donnée par:

$$[C] = [C^0] + z[b_c] \quad (4.39)$$

4.3 Champs de déplacements virtuels

L'introduction de la fonction de Murakami dans un modèle basé sur l'hypothèse de sections droites de Hencky/Mindlin/Reissner nous permet de définir un champ de déplacement linéaire par couche. On se limitera à l'ajout des termes de zigzag aux composantes de déplacements planes. La nouvelle forme est donnée par:

$$\vec{u}_q^*(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_p^*(\xi, \eta) + z\vec{\beta}^*(\xi, \eta) + M(z)\vec{u}^{M*}(\xi, \eta) \quad (\vec{\beta}^* \cdot \vec{n} = 0) \quad (4.40)$$

$\vec{u}_p^*(\xi, \eta)$ vecteur déplacement virtuel du point p ($\zeta = 0$)

$\vec{\beta}^*(\xi, \eta)$ vecteur rotation orthogonal à \vec{n}

$\vec{u}^{M*}(\xi, \eta)$ terme associé à la fonction de zigzag orthogonal à \vec{n}

soit

$$\vec{\beta}^* = \vec{\theta}^* \wedge \vec{n} = \theta_y^* \vec{t}_1 - \theta_x^* \vec{t}_2 \quad (4.41)$$

$$\vec{u}^{M*} = u_1^{M*} \vec{t}_1 + u_2^{M*} \vec{t}_2 \quad (4.42)$$

$\vec{\beta}^*$ est définie par une interpolation quadratique incomplète, faisant apparaître aux milieux de chaque côté un accroissement de rotation $\Delta\beta_{sk}$. L'approximation nodale est basée sur les fonctions de forme (tableau 2.1), de telle sorte que:

$$\{\beta\} = \sum_{i=1}^4 N_i(-\theta_{xi}\{t_{2i}\} + \theta_{yi}\{t_{1i}\}) + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta\beta_{sk}\{t_{sk}\} \quad (4.43)$$

\vec{t}_{sk} : vecteur unitaire tangent sur le côté k, défini par:

$$\vec{t}_{sk} = (\vec{x}_j - \vec{x}_i)/L_k \quad (4.44)$$

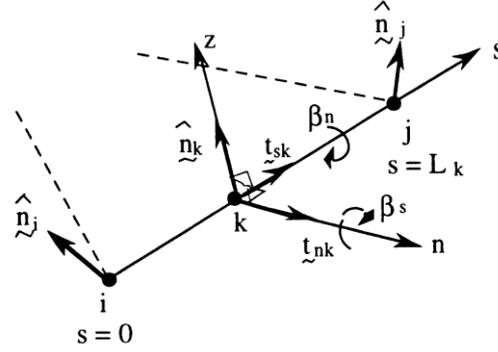


Figure 4.3 Présentation des rotations sur les côtés [188]

4.4 Expressions de déformations virtuelles

La configuration virtuelle C^* est définie par le vecteur position \vec{x}_q^* qui résulte de la superposition du vecteur position \vec{x}_q (équation 4.16) et du vecteur déplacement virtuel \vec{u}_q^* (équation 4.40).

L'élément différentiel $d\vec{x}_q^*$ s'écrit en fonction de $d\xi$, $d\eta$ et dz :

$$d\vec{x}_q^* = d\vec{x}_q + d\vec{u}_q^* \quad (4.45)$$

D'après la forme du vecteur de déplacement virtuel (équation 4.40), nous définissons sa différentielle comme suit:

$$\{du_q^*\} = [L_z^*]\{d\xi\} \quad (4.46a)$$

$[L_z^*]$ est le tenseur gradient de déplacements virtuels, il est ainsi défini:

$$[L_z^*] = \left[\vec{u}_{q,\xi}^* \quad \vec{u}_{q,\eta}^* \quad \vec{\beta} + \frac{2(-1)^l}{h_l} \vec{u}^{M*} \right] \quad (4.46b)$$

En d'autres termes

$$[L_z^*] = [L_0^*] + z[L_\beta^*] + M(z)[L_M^*] \quad (4.47)$$

avec

$$[L_0^*] = \left[\vec{u}_{p,\xi}^* \quad \vec{u}_{p,\eta}^* \quad \vec{\beta}^* + \frac{2(-1)^l}{h_l} \vec{u}^{M*} \right] \quad (4.48)$$

$$[L_\beta^*] = \left[\vec{\beta}_{,\xi}^* \quad \vec{\beta}_{,\eta}^* \quad 0 \right] \quad (4.49)$$

$$[L_M^*] = \left[\vec{u}_{\xi}^{M*} \quad \vec{u}_{\eta}^{M*} \quad 0 \right] \quad (4.50)$$

Afin de décrire les expressions de déformations dans le repère tangent, on procède à écrire une première relation de passage de la forme suivante:

$$\{du^*_q\} = [Q]\{du^*_q\}_t; \quad [Q] \text{ est définie par (rel. 4.14)} \quad (4.51)$$

d'autre part, en substituant la valeur de $\{d\xi\}$ (définie par l'expression (4.34)) dans la relation (4.46a), on obtient:

$$\{du^*_q\} = [L^*_z][C_z]\{dx_q\}_t \quad (4.52)$$

La confrontation des deux équations (4.51) et (4.52), nous permet d'aboutir finalement à

$$\{du^*_q\}_t = [L^*_t]\{dx_q\}_t \quad (4.53)$$

avec
$$[L^*_t] = [Q]^T[L^*_z][C_z] \quad (4.54)$$

ainsi les composantes de déformations virtuelles sont définies dans la base curviligne:

$$[\varepsilon^*_t] = \frac{1}{2}([L^*_t] + [L^*_t]^T) = \begin{bmatrix} \varepsilon^*_x & \frac{1}{2}\gamma^*_{xy} & \frac{1}{2}\gamma^*_{xz} \\ & \varepsilon^*_y & \frac{1}{2}\gamma^*_{yz} \\ \text{sym} & & \varepsilon^*_z \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

avec

$$[L^*_t] = \begin{bmatrix} L^*_{t11} & L^*_{t12} & L^*_{t13} \\ L^*_{t21} & L^*_{t22} & L^*_{t23} \\ L^*_{t31} & L^*_{t32} & L^*_{t33} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

On notera respectivement par $\langle \varepsilon^*_s \rangle$ et $\langle \gamma^*_s \rangle$ les vecteurs de déformations virtuelles de membrane-zigzag-flexion et cisaillement transverse dans le repère tangent. ($\varepsilon^*_z = 0$).

avec

$$\langle \varepsilon^*_s \rangle = \langle \varepsilon^*_x \quad \varepsilon^*_y \quad \gamma^*_{xy} \rangle \quad ; \quad \langle \gamma^*_s \rangle = \langle \gamma^*_{xz} \quad \gamma^*_{yz} \rangle \quad (4.57)$$

les déformations $\{\varepsilon^*_s\}$ sont définies par:

$$[\varepsilon^*_s] = \begin{bmatrix} \varepsilon^*_x & \frac{1}{2}\gamma^*_{xy} \\ \text{sym} & \varepsilon^*_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}([L^*_s] + [L^*_s]^T) \quad (4.58)$$

avec

$$[L^*_s] = \begin{bmatrix} L^*_{t11} & L^*_{t12} \\ L^*_{t21} & L^*_{t22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \left(\begin{bmatrix} L^*_{s0} & z[L^*_{s1}] + z^2[L^*_{s2}] \\ +M(z)[L^*_{s0z}] + zM(z)[L^*_{s1z}] \end{bmatrix} \right) \quad (4.59)$$

Où

$$[L^*_{s0}] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} [\vec{u}^*_{p,\xi} \quad \vec{u}^*_{p,\eta}] [C^0] \quad (4.60)$$

$$[L^*_{s1}] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} ([\vec{u}^*_{p,\xi} \quad \vec{u}^*_{p,\eta}] [b_c] + [\vec{\beta}^*_{,\xi} \quad \vec{\beta}^*_{,\eta}] [C^0]) \quad (4.61)$$

$$[L^*_{s2}] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} [\vec{\beta}^*_{,\xi} \quad \vec{\beta}^*_{,\eta}] [b_c] \quad (4.62)$$

$$[L_{s0z}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} [\bar{u}_{,\xi}^{M*} \quad \bar{u}_{,\eta}^{M*}] [C^0] \quad (4.63)$$

$$[L_{s1z}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} [\bar{u}_{,\xi}^{M*} \quad \bar{u}_{,\eta}^{M*}] [b_c] \quad (4.64)$$

$$\langle \varepsilon_s^* \rangle = \langle L_{t11}^* \quad L_{t22}^* \quad L_{t12}^* + L_{t21}^* \rangle \quad (4.65)$$

En regroupant les termes ayant les mêmes coefficients, on obtient:

$$\{\varepsilon_s^*\} = \frac{1}{\mu} \{ \{\varepsilon_0^*\} + z\{\varepsilon_1^*\} + z^2\{\varepsilon_2^*\} + M(z)\{\varepsilon_{0z}^*\} + zM(z)\{\varepsilon_{1z}^*\} \} \quad (4.66)$$

avec

$$\{\varepsilon_0^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,y}^* \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\{\varepsilon_1^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,y}^* \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,y}^* \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\{\varepsilon_2^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,y}^* \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\{\varepsilon_{0z}^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \bar{u}_{,x}^{M*} \\ \vec{t}_2 \cdot \bar{u}_{,y}^{M*} \\ \vec{t}_1 \cdot \bar{u}_{,y}^{M*} + \vec{t}_2 \cdot \bar{u}_{,x}^{M*} \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\{\varepsilon_{1z}^*\} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \bar{u}_{,x}^{M*} \\ \vec{t}_2 \cdot \bar{u}_{,y}^{M*} \\ \vec{t}_1 \cdot \bar{u}_{,y}^{M*} + \vec{t}_2 \cdot \bar{u}_{,x}^{M*} \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x}^* \\ \bar{u}_{p,y}^* \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,\xi}^* \\ \bar{u}_{p,\eta}^* \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,x}^* \\ \bar{u}_{p,y}^* \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,\xi}^* \\ \bar{u}_{p,\eta}^* \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,\xi}^* \\ \vec{\beta}_{,\eta}^* \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,\xi}^* \\ \vec{\beta}_{,\eta}^* \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x}^{M*} \\ \bar{u}_{,y}^{M*} \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,\xi}^{M*} \\ \bar{u}_{,\eta}^{M*} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x}^{M*} \\ \bar{u}_{,y}^{M*} \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,\xi}^{M*} \\ \bar{u}_{,\eta}^{M*} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

le vecteur des déformations du cisaillement transverse s'écrit ainsi:

$$\{\gamma_s^*\} = \begin{Bmatrix} L_{t13}^* + L_{t31}^* \\ L_{t23}^* + L_{t32}^* \end{Bmatrix} \quad (4.75a)$$

$$\{\gamma_s^*\} = \frac{1}{\mu} \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,x}^* + \mu \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \mu \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}^* \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,x}^* + \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,y}^* \end{array} \right\} \\ + z^2 \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,y}^* \end{array} \right\} + M(z) \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{,x}^{M*} \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{,y}^{M*} \end{array} \right\} + zM(z) \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{,x}^{M*} \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{,y}^{M*} \end{array} \right\} + \frac{z(-1)^l}{h^l} \left\{ \begin{array}{c} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}^{M*} \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{u}^{M*} \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad (4.75b)$$

La condition $\vec{n} \cdot \vec{n}_{,\xi} \approx 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{n}_{,\eta} \approx 0$ est alors vérifiée approximativement, elle est retenue pour définir $[b_n]$. Par conséquent, le vecteur $\{\gamma_s^*\}$ s'écrit:

$$\{\gamma_s^*\} = \frac{1}{\mu} \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,x}^* + \mu \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \mu \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}^* \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,x}^* + \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,y}^* \end{array} \right\} \\ + M(z) \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \cdot \vec{u}_{,x}^{M*} \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{,y}^{M*} \end{array} \right\} + \frac{z(-1)^l}{h^l} \left\{ \begin{array}{c} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}^{M*} \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{u}^{M*} \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad (4.76)$$

Pour franchir le problème numérique du verrouillage en cisaillement (§2.2.2.1), nous allons adopter la technique de substitution des déformations de CT (méthode ANS: Assumed Natural Strain), (voir §2.2.2.2). Pour cela nous procédons, de la même manière, pour définir $\langle \gamma_s^* \rangle$ en fonction des composantes naturelles ou covariantes de $\langle \gamma_\zeta^* \rangle$. La relation entre le tenseur du gradient de déplacements virtuels $[L_{ij}^*]$ dans le repère covariant et celui dans le repère tangent $[L_t^*]$ est donnée par:

$$[L_t^*] = [C_z]^T [L_{ij}^*] [C_z] \quad (4.77)$$

avec

$$[L_{ij}^*] = [F_z]^T [L_z^*] \quad (4.78)$$

$[C_z]$, $[F_z]$ et $[L_z^*]$ sont définies, respectivement, par les relations (4.35), (4.23) et (4.46b). D'après la relation (4.75a), la substitution des termes L_{t13}^* , L_{t31}^* , L_{t23}^* et L_{t32}^* déduits de la relation (4.77) nous permet d' écrire:

$$\{\gamma_s\} = [C]^T \{\gamma_\zeta\} = \frac{1}{\mu} [\mu]^T [C_0]^T \{\gamma_\zeta\} \quad (4.79)$$

On peut écrire également:

$$\{\gamma_s\} = \frac{1}{\mu} [[C_0]^T + z[b_c]^T] \{\gamma_\zeta\} \quad (4.80)$$

selon $[L_{ij}^*]$, relation (4.78), $\{\gamma_\zeta\}$ est défini par:

$$\{\gamma_\zeta\} = \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{13}^* + L_{31}^* \\ L_{23}^* + L_{32}^* \end{Bmatrix} \quad (4.81)$$

avec

$$\{\gamma_\zeta\} = \begin{Bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\xi} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\eta} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,\xi} \\ \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,\eta} \end{Bmatrix} + M(z) \begin{Bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{u}_{,\xi}^{M*} \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{,\eta}^{M*} \end{Bmatrix} + \frac{z(-1)^l}{h^l} \begin{Bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{u}^M \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{u}^M \end{Bmatrix} + \frac{z(-1)^l}{h^l} z \begin{Bmatrix} \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{u}^M \\ \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{u}^M \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

Si $\vec{n} \cdot \vec{\beta} = 0$ alors $(\vec{n} \cdot \vec{\beta})_{,\xi} = (\vec{n} \cdot \vec{\beta})_{,\eta} = 0$. Nous remarquons que γ_ξ et γ_η ne dépendent de z que par des termes liés aux variables additionnels de zigzag.

on aura finalement:

$$\{\gamma_\zeta\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\xi} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\eta} \end{array} \right\} + M(z) \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{u}_{,\xi}^M \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{,\eta}^M \end{array} \right\} + \frac{2(-1)^l}{h^l} \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 \cdot \vec{u}^M \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{u}^M \end{array} \right\} + \frac{2(-1)^l}{h^l} z \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{,\xi} \cdot \vec{u}^M \\ \vec{n}_{,\eta} \cdot \vec{u}^M \end{array} \right\} \quad (4.83)$$

4.4.1 Représentations des déformations

En outre des termes de zigzag attribués au présent modèle, les expressions complètes des déformations sont assez complexes à mettre en œuvre dans une formulation variationnelle du modèle DMQSz (Discrete Mindlin Quadrilateral Shell with Zigzag). Dans le but de préserver l'aspect cinématique lié à ce nouveau concept de zigzag, il convient de retenir une forme plus simple de la formulation. Elle consiste en un champ de déformation linéaire par couche en z pour les déformations de membrane-zigzag-flexion d'une part et un champ de déformation en cisaillement constant par couche d'autre part.

4.4.1.1 Déformations $\{\varepsilon_s^*\}$

La partie linéaire du vecteur de déformation $\{\varepsilon_s^*\}$ est ainsi:

$$\{\varepsilon_s^*\} = \frac{1}{\mu} (\{\varepsilon_0^*\} + z\{\varepsilon_1^*\} + M(z)\{\varepsilon_{0z}^*\}) \quad (4.84)$$

En utilisant une approximation nodale, chaque terme se traduit par:

$$\{\varepsilon_0^*\} = [B_0]\{u_n\} \quad (4.85)$$

$$\langle u_n \rangle = \langle U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad u_{1i}^M \quad u_{2i}^M \dots i = 1 \text{ à } 4 \rangle$$

$$[B_0] = \left[\begin{array}{cccccc} \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots i = 1,4 \\ \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.86)$$

$$N_{i,x} = C_{11}^0 N_{i,\xi} + C_{21}^0 N_{i,\eta} \text{ et } N_{i,y} = C_{12}^0 N_{i,\xi} + C_{22}^0 N_{i,\eta} ; (C_{ij}^0 \text{ rel. 4.38}) \quad (4.87)$$

ainsi, les vecteurs de déformations couplés de flexion-membrane peuvent être définis également en fonction des déplacement nodaux $\{u_n\}$ et les accroissements des rotations tangentielles $\{\Delta\beta_{sk}\}$:

$$\{\varepsilon_1^*\} = [B_1]\{u_n\} + [B_{1\Delta\beta}]\{\Delta\beta_{sk}\} \quad (4.88)$$

avec

$$[B_1] = \left[\begin{array}{cccc} \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,x} & \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,x} & 0 & 0 \\ \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,y} & \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,y} & 0 & 0 \dots i = 1,4 \\ \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,x} & \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x} & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.89)$$

et

$$\bar{N}_{i,x} = b_{c11} N_{i,\xi} + b_{c21} N_{i,\eta} \text{ et } \bar{N}_{i,y} = b_{c12} N_{i,\xi} + b_{c22} N_{i,\eta} ; ([b_c] \text{ rel. 3.37b})$$

$$\langle \bar{t}_{1i} \rangle = \langle -\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_{2i} \quad \bar{t}_1 \cdot \bar{t}_{1i} \rangle ; \quad \langle \bar{t}_{2i} \rangle = \langle -\bar{t}_2 \cdot \bar{t}_{2i} \quad \bar{t}_2 \cdot \bar{t}_{1i} \rangle \quad (4.90)$$

On observe que $[B_1]$, représentant la partie linéaire en z , fait intervenir les composantes de rotation θ_{xi} , θ_{yi} mais également celles de déplacement U_i , V_i , W_i .

D'ailleurs:

$$[B_{1\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,x} \\ (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,y} & \dots k = 5 \text{ à } 8 \\ (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,y} + (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,x} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

avec

$$\begin{Bmatrix} P_{k,x} \\ P_{k,y} \end{Bmatrix} = [C^0]^T \begin{Bmatrix} P_{k,\xi} \\ P_{k,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

le vecteur $\{\Delta\beta_{sk}\}$ sera éliminé au niveau du calcul élémentaire, sa forme explicite sera définie dans la prochaine section.

le vecteur de déformation $\{\varepsilon_{0z}^*\}$ qui est lié à la fonction zigzag est donné par:

$$\{\varepsilon_{0z}^*\} = [B_{0z}]\{u_n\} \quad (4.93)$$

avec

$$[B_{0z}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x} & \dots i = 1 \text{ à } 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

soit

$$\langle \bar{t}_{1i} \rangle = \langle \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{1i} \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{2i} \rangle; \langle \bar{t}_{2i} \rangle = \langle \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{1i} \quad \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{2i} \rangle \quad (4.95)$$

4.4.1.2. Déformations $\langle \gamma_s \rangle$

Afin de limiter la complexité de l'expression de la déformation du cisaillement due aux termes d'ordre deux, figurant dans le produit (4.83), nous adoptons dans la suite du développement une forme simplifiée de $\{\gamma_s\}$, c'est ainsi que seuls les termes constants et constants par couche seront retenus.

soit $\{\gamma\} = \{\gamma_s\}$

on aura donc:

$$\{\gamma\} = [C_0]^T \{\gamma_\zeta\} \quad (4.96)$$

avec

$$\{\gamma_\zeta\} = \begin{Bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\xi} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{\beta} + \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,\eta} \end{Bmatrix} + \frac{2(-1)^l}{h_l} \begin{Bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{u}^M \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{u}^M \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

soit

$$\{\gamma_\zeta\} = [A]\{\gamma_{\zeta k}\}; [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (4.98a,b)$$

avec

$$\langle \gamma_{\zeta k} \rangle = \langle \gamma_{\xi\zeta 5} \quad \gamma_{\eta\zeta 6} \quad \gamma_{\xi\zeta 7} \quad \gamma_{\eta\zeta 8} \rangle = \langle \frac{L_5}{2} \gamma_{s5} \quad \frac{L_6}{2} \gamma_{s6} \quad \frac{-L_7}{2} \gamma_{s7} \quad \frac{-L_8}{2} \gamma_{s8} \rangle \quad (4.99)$$

on aura

$$\{\gamma\} = [N_\gamma]\{\gamma_{sk}\} \quad (4.100)$$

avec

$$[N_\gamma] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} L_5 c_{11}^0 (1 - \eta) & L_6 c_{12}^0 (1 + \xi) & -L_7 c_{11}^0 (1 + \eta) & -L_8 c_{12}^0 (1 - \xi) \\ L_5 c_{21}^0 (1 - \eta) & L_6 c_{22}^0 (1 + \xi) & -L_7 c_{21}^0 (1 + \eta) & -L_8 c_{22}^0 (1 - \xi) \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

la condition du cisaillement constant par côté (dans le plan) se traduit par une intégrale de contour, en utilisant la composante tangentielle du vecteur de déformation, c'est ainsi:

$$\int_0^{L_k} \left(\gamma_{sk} - \vec{n}_k \cdot \vec{u}_{p,s} - \vec{t}_{sk} \cdot \vec{\beta} - \frac{2(-1)^l}{h_l} \vec{t}_{sk} \cdot \vec{u}^M \right) ds = 0 \quad (4.102)$$

on obtient

$$\gamma_{sk} = \frac{1}{L_k} \vec{n}_k \cdot (\vec{u}_{pj} - \vec{u}_{pi}) + \frac{1}{2} (\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3} \Delta \beta_{sk} + \frac{(-1)^l}{h_l} (u_{si}^M + u_{sj}^M) \quad (4.103)$$

L'hypothèse mécanique appliquée dans le cas du comportement d'une plaque en flexion/cisaillement développée dans le chapitre 2, (§2.2.4.2), reste toutefois valable pour la coque. elle s'est traduite par:

$$\gamma_{sk} = \phi_k^{ml} \Delta \beta_{sk} - \langle H_{ck11}^{inv} \quad H_{ck12}^{inv} \rangle \left(\sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix} \right) + \frac{(-1)^l}{h_l} (u_{si}^M + u_{sj}^M) \quad (rel. 2.60)$$

La combinaison des relations (4.103) et (2.60) nous permet de déduire les rotations aux milieux des cotés.

d'où

$$\Delta \beta_{sk} = \frac{3}{2+3\phi_k^{ml}} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{L_k} \vec{n}_k \cdot (\vec{u}_{pj} - \vec{u}_{pi}) - \frac{1}{2} (\vec{\beta}_{si} + \vec{\beta}_{sj}) - \\ \langle H_{c11}^{inv} \quad H_{c12}^{inv} \rangle \left\{ \sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}] \begin{Bmatrix} u_{si}^M + u_{sj}^M \\ u_{ni}^M + u_{nj}^M \end{Bmatrix} \right\} \end{array} \right] \quad (4.104)$$

avec

$$\beta_{sm} = \vec{\beta}_m \cdot \vec{t}_{sk} \quad ; \quad u_{sm}^M = \vec{u}_{sm}^M \cdot \vec{t}_{sk}, \quad m = i \text{ ou } j \quad (4.105)$$

$$\vec{\beta}_m = \langle -\vec{t}_2^{(m)} \quad \vec{t}_1^{(m)} \rangle \begin{Bmatrix} \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \end{Bmatrix}, \quad \vec{u}_{sm}^M = \langle \vec{t}_{1m} \quad \vec{t}_{2m} \rangle \begin{Bmatrix} u_{xm}^M \\ u_{ym}^M \end{Bmatrix} \quad (4.106)$$

$$\vec{t}_{s5} = \frac{2}{L_5} \vec{a}_1^5; \quad \vec{t}_{s6} = \frac{2}{L_6} \vec{a}_2^6; \quad \vec{t}_{s7} = -\frac{2}{L_7} \vec{a}_1^7; \quad \vec{t}_{s8} = -\frac{2}{L_8} \vec{a}_2^8 \quad (4.107)$$

$$\vec{t}_1^{(m)} = \vec{t}_{1m}; \quad \vec{t}_2^{(m)} = \vec{t}_{2m} \quad (4.108)$$

$$\{\Delta \beta_n\} = [A_n][[A_{G0}] + [A_{G1}]]\{u_n\} \quad (4.109)$$

$[A_n]$ est définie par la forme (2.64)

avec

$$[A_{G0}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_5} \langle \vec{n}_5 \rangle & \frac{-1}{L_5} \langle -\vec{t}_2^{(1)} \cdot \vec{a}_1^5 & \vec{t}_1^{(1)} \cdot \vec{a}_1^5 \rangle & 0 & 0 & \frac{-1}{L_5} \langle \vec{n}_5 \rangle & \frac{-1}{L_5} \langle -\vec{t}_2^{(2)} \cdot \vec{a}_1^5 & \vec{t}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_1^5 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_6} \langle \vec{n}_6 \rangle & \frac{-1}{L_6} \langle -\vec{t}_2^{(2)} \cdot \vec{a}_2^6 & \vec{t}_1^{(2)} \cdot \vec{a}_2^6 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{L_5} \langle \vec{n}_8 \rangle & \frac{-1}{L_8} \langle \vec{t}_2^{(1)} \cdot \vec{a}_2^8 & -\vec{t}_1^{(1)} \cdot \vec{a}_2^8 \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{L_6} \langle \vec{n}_6 \rangle & \frac{-1}{L_6} \langle -\vec{t}_2^{(3)} \cdot \vec{a}_2^6 & \vec{t}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_2^6 \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_7} \langle \vec{n}_7 \rangle & \frac{-1}{L_7} \langle \vec{t}_2^{(3)} \cdot \vec{a}_1^7 & -\vec{t}_1^{(3)} \cdot \vec{a}_1^7 \rangle & 0 & 0 & \frac{-1}{L_7} \langle \vec{n}_7 \rangle & \frac{-1}{L_7} \langle \vec{t}_2^{(4)} \cdot \vec{a}_1^7 & -\vec{t}_1^{(4)} \cdot \vec{a}_1^7 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_5} \langle \vec{n}_8 \rangle & \frac{-1}{L_8} \langle \vec{t}_2^{(4)} \cdot \vec{a}_2^8 & \vec{t}_1^{(4)} \cdot \vec{a}_2^8 \rangle & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

$$[A_{G1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{15}^1 & F_{25}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{15}^2 & F_{25}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{16}^2 & F_{26}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{18}^1 & F_{28}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{16}^3 & F_{26}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{17}^3 & F_{27}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{17}^4 & F_{27}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{18}^4 & F_{28}^4 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} F_{1k}^m &= A_1 \vec{t}_1^{(m)} \cdot \vec{t}_{sk} + A_2 \vec{t}_1^{(m)} \cdot \vec{t}_{nk} \\ F_{2k}^m &= A_1 \vec{t}_2^{(m)} \cdot \vec{t}_{sk} + A_2 \vec{t}_2^{(m)} \cdot \vec{t}_{nk} \end{aligned} ; m = i \text{ ou } j ; k = 5 \text{ à } 8 \quad (4.112)$$

$$\langle A_1 \quad A_2 \rangle = -\langle H_{c11}^{inv} \quad H_{c12}^{inv} \rangle (\sum_{l=1}^{nc} (-1)^l [H_{\tau k}]) \quad (4.113)$$

$\{\gamma_{sk}\}$ s'écrit sous forme matricielle:

$$\{\gamma_{sk}\} = \left[[A_\phi] + [A_n]([A_{G0}] + [A_{G1}]) + [A_{G1}] + \frac{(-1)^l}{h_l} [A_{G2}] \right] \{u_n\} \quad (4.114)$$

$[A_\phi]$ est donnée par la relation (2.71).

la matrice $[A_{G2}]$ est définie par:

$$[A_{G2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(1)} \cdot \vec{t}_{s5} & \vec{t}_2^{(1)} \cdot \vec{t}_{s5} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(2)} \cdot \vec{t}_{s5} & \vec{t}_2^{(2)} \cdot \vec{t}_{s5} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(2)} \cdot \vec{t}_{s6} & \vec{t}_2^{(2)} \cdot \vec{t}_{s6} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(1)} \cdot \vec{t}_{s8} & \vec{t}_2^{(1)} \cdot \vec{t}_{s8} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(3)} \cdot \vec{t}_{s6} & \vec{t}_2^{(3)} \cdot \vec{t}_{s6} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(3)} \cdot \vec{t}_{s7} & \vec{t}_2^{(3)} \cdot \vec{t}_{s7} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(4)} \cdot \vec{t}_{s7} & \vec{t}_2^{(4)} \cdot \vec{t}_{s7} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \vec{t}_1^{(4)} \cdot \vec{t}_{s8} & \vec{t}_2^{(4)} \cdot \vec{t}_{s8} \rangle \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

le vecteur de déformation de cisaillement transverse s'écrit finalement ainsi:

$$\{\gamma\} = \{\gamma_0\} + \frac{(-1)^l}{h_l} \{\gamma_{0z}\} = [B_c] \{u_n\} \quad (4.116)$$

avec

$$[B_c] = [B_{c0}] + \frac{(-1)^l}{h_l} [B_{cz}] \quad (4.117)$$

et

$$[B_{c0}] = [N_\gamma]([A_\phi] + [A_n]([A_{G0}] + [A_{G1}]) + [A_{G1}]) \quad (4.118)$$

$$[B_{cz}] = [N_\gamma][A_{G2}] \quad (4.119)$$

4.5 Matrice de rigidité élémentaire

Le principe de travaux virtuels du modèle déplacement est défini par l'expression:

$$W = \sum_{\text{éléments}} (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 ; \forall \vec{u}_q^* \quad (4.120)$$

avec $\vec{u}_q = \vec{u}_q$ $\vec{u}_q^* = \vec{0}$ sur S_u

le travail virtuel interne W_{int}^e est donné par:

$$W_{int}^e = \int_{V^e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle [H] \{\varepsilon_s\} + \langle \gamma_s^* \rangle [H] \{\gamma_s\}) dV = \langle U_n^* \rangle [k^e] \{U_n\} \quad (4.121)$$

$[k^e]$ est la matrice de rigidité locale, de dimension (28×28), elle s'écrit:

$$[k^e] = [k_{mfz}^e] + [k_{cz}^e] \quad (4.122)$$

nous pouvons écrire:

$$[k_{mfz}^e] = [k_{mm}] + [k_{ff}] + [k_{mf}] + [k_{mz}] + [k_{fz}] + [k_{zz}] \quad (4.123)$$

$$[k_{cz}^e] = [k_{c0}] + [k_{c0z}] + [k_{czz}] \quad (4.124)$$

avec

$$[k_{mm}] = \int_{A^e} [B_0]^T [H_{mm}] [B_0] \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.125)$$

$$[k_{ff}] = \int_{A^e} [B_f]^T [H_f] [B_f] \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.126)$$

$$[k_{mf}] = \int_{A^e} ([B_0]^T [H_{mf}] [B_f] + [B_f]^T [H_{mf}] [B_0]) \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.127)$$

$$[k_{mz}] = \int_{A^e} ([B_0]^T [H_{mz}] [B_z] + [B_z]^T [H_{mz}] [B_0]) \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.128)$$

$$[k_{fz}] = \int_{A^e} ([B_f]^T [H_{fz}] [B_z] + [B_z]^T [H_{fz}] [B_f]) \det[F_0] d\xi d\eta \quad (4.129)$$

$$[k_{zz}] = \int_{A^e} [B_z]^T [H_{zz}] [B_z] \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.130)$$

et

$$[H_{mm}] = \int_{-h/2}^{h/2} [H] dz = \sum_{l=1}^{nc} h_l [H] \quad (4.131)$$

$$[H_{mf}] = \int_{-h/2}^{h/2} z [H] dz = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{nc} (z_{l+1}^2 - z_l^2) [H] \quad (4.132)$$

$$[H_f] = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H] dz = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{nc} (z_{l+1}^3 - z_l^3) [H] \quad (\text{rel. 2.36a})$$

$$[H_{mz}] = \int_{-h/2}^{h/2} M(z) [H] dz = \sum_{l=1}^{nc} \frac{2(-1)^l}{h_l} \left(\frac{1}{2} (z_{l+1}^2 - z_l^2) - \left(z_l + \frac{h_l}{2} \right) h_l \right) [H] \quad (4.133)$$

$$\begin{aligned} [H_{fz}] &= \int_{-h/2}^{h/2} z M(z) [H] dz \\ &= \sum_{l=1}^{nc} \frac{2(-1)^l}{h_l} \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - \frac{1}{2} \left(z_l + \frac{h_l}{2} \right) (z_{l+1}^2 - z_l^2) \right) [H] \end{aligned} \quad (\text{rel. 2.36b})$$

$$\begin{aligned} [H_{zz}] &= \int_{-h/2}^{h/2} M^2(z) [H] dz \\ &= \frac{4}{h_l^2} \sum_{l=1}^{nc} \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) + \left(z_l + \frac{h_l}{2} \right)^2 h_l - \left(z_l + \frac{h_l}{2} \right) (z_{l+1}^2 - z_l^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{rel. 2.36c})$$

et

$$[B_f] = [B_1] + [A_n] ([A_{G0}] + [A_{G1}]) \quad (4.134)$$

la matrice de rigidité du cisaillement-zigzag, se calcule ainsi:

$$[k_{c0}] = \int_{A^e} [B_{c0}]^T [H_c] [B_{c0}] \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.135)$$

$$[k_{c0z}] = \int_{A^e} ([B_{c0}]^T [H_{c0z}] [B_{cz}] + [B_{cz}]^T [H_{c0z}] [B_{c0}]) \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.136)$$

$$[k_{czz}] = \int_{A^e} [B_{cz}]^T [H_{czz}] [B_{cz}] \det[F_0] d\xi d\eta ; \quad (4.137)$$

avec

$$[H_c] = \int_{-h/2}^{h/2} [H_\tau] dz = \sum_{l=1}^{nc} h_l [H_\tau] \quad (\text{rel. 2.37a})$$

$$[H_{c0z}] = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dM(z)}{dz} [H_\tau] dz = \sum_{l=1}^{nc} 2(-1)^l [H_\tau] \quad (\text{rel. 2.37b})$$

$$[H_{czz}] = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{dM}{dz} \right)^2 [H_\tau] dz = \sum_{l=1}^{nc} \frac{4}{h_l} [H_\tau] \quad (\text{rel. 2.37c})$$

Rappelons que la nullité des matrices constitutives liées aux termes de zigzag conduit directement à une formulation simplifiée de l'élément DQMQS à 6 ddl/nœud. Les conditions aux limites imposées devraient tenir en compte la suppression des lignes et des colonnes liées aux variables nodales de zigzag. Une version du modèle DMQS sans zigzag a été également élaborée afin d'optimiser le temps de calcul dans le cas échéant.

4.5.1 Matrice de rigidité fictive

Généralement on procède à l'introduction des termes liés aux quatre rotations nodales fictives autour de l'axe z afin d'éviter la singularité de la matrice de rigidité globale des éléments de coques standards. Ce problème apparaît si tous les éléments connectés à un nœud sont coplanaires. Donc le passage au repère globale de chaque matrice élémentaire donne lieu à un système des équations linéairement dépendant, voire vecteurs et lignes nulles. Batoz et Datt [218] ont proposé une technique basée sur la discrétisation d'une forme intégrale d'une énergie élémentaire fictive $W_{\theta_z}^e$ associée à l'opérateur Laplacien de θ_z^* .

$$W_{\theta_z}^e = \int_{A^e} \alpha H_{f1} (\theta_{z,x}^* \theta_{z,x} + \theta_{z,y}^* \theta_{z,y}) dA \quad (4.138)$$

avec

$$\theta_z = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{zi}; \quad \begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [N_{\theta_z}] \{\theta_{zn}\}; \quad [N_{\theta_z}] = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{Bmatrix} \quad (4.139)$$

Le même développement est retenu pour les termes virtuels, nous obtenons

$$W_{\theta_z}^e = \langle \theta_{zn}^* \rangle [k_{\theta_z}^e] \{\theta_{zn}\} \quad (4.140)$$

$$[k_{\theta_z}^e] = \alpha H_{f1} \int_{A^e} [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_z}] dA \quad (4.141)$$

- H_{f1} est une valeur caractéristique associée à une rigidité de flexion (par exemple $H_{f1} = Eh^3/12(1 - \nu^2)$). Pour le cas d'un multicouche, E et ν peuvent être remplacées par E_1 et ν_{12} .
- α est un coefficient petit (10^{-4} à 10^{-7}) dépendant de la précision de l'ordinateur comme il peut être défini en fonction de la géométrie de l'élément [3].

L'ajout de la matrice $[k_{\theta_z}^e]$ à la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ nous permet d'éviter la singularité de sa forme globale $[k_G^e]$. Concernant le modèle avec zigzag, la même démarche a été adoptée lors de la projection des déplacements u_1^M et u_2^M dans le repère cartésien global. Ceci conduit à l'apparition d'un degré de liberté additionnel, également fictif suivant l'axe perpendiculaire au plan moyen. Contrairement au sixième variable θ_z des modèles classiques, le degré de liberté du modèle en zigzag - comme d'autres modèle d'ordre supérieur - ayant un sens physique un peu ambigu, en revanche, son importance demeure indispensable sur le plan numérique.

Cependant, en procédant de la même façon que le cas de la formulation des contraintes transverses pour les structures plaques, nous définissons les contraintes du cisaillement transverse à partir des équations d'équilibre tridimensionnel, (voir 2.84a,b):

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz \quad (4.148)$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-h/2}^z (\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz \quad (4.149)$$

Or, les dérivées des contraintes planes (équation 4.146) seront définies à partir des efforts généralisés $\{N\}$, $\{M\}$ et $\{H^P\}$.

soit

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} [H] (\{\varepsilon_0\} + z\{\varepsilon_1\} + M(z)\{\varepsilon_{0z}\}) dz$$

donc

$$\{N\} = [H_{mm}]\{\varepsilon_0\} + [H_{mf}]\{\varepsilon_1\} + [H_{mz}]\{\varepsilon_{0z}\} \quad (4.150)$$

$\{M\}$ est défini par:

$$\begin{aligned} \{M\} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \{\sigma\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z [H] (\{\varepsilon_0\} + z\{\varepsilon_1\} + M(z)\{\varepsilon_{0z}\}) dz \\ \{M\} &= [H_{mf}]\{\varepsilon_0\} + [H_{ff}]\{\varepsilon_1\} + [H_{fz}]\{\varepsilon_{0z}\} \end{aligned} \quad (4.151)$$

Voyant les équations d'équilibre (2.30) données par Varadan et al. [189], qui révèle l'entité $\{H^P\}$ définie par:

$$\{H^P\} = \begin{Bmatrix} H_x^P \\ H_y^P \\ H_{xy}^P \end{Bmatrix} \quad (4.152a)$$

avec

$$\begin{aligned} \{H^P\} &= \int_{-h/2}^{h/2} M(z) \{\sigma\} dz = \int_{-h/2}^{h/2} M(z) [H] (\{\varepsilon_0\} + z\{\varepsilon_1\} + M(z)\{\varepsilon_{0z}\}) dz \\ \{H^P\} &= [H_{mz}]\{\varepsilon_0\} + [H_{fz}]\{\varepsilon_1\} + [H_{zz}]\{\varepsilon_{0z}\} \end{aligned} \quad (4.152b)$$

et vice-versa, les allongements et les courbures peuvent être définis en fonction des efforts généralisés, ils s'expriment ainsi:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\} &= [C_1]\{H^P\} + [C_2]\{M\} + [C_3]\{N\} \\ \{\varepsilon_1\} &= [A_1]\{H^P\} + [A_2]\{M\} + [A_3]\{N\} \\ \{\varepsilon_{0z}\} &= [B_1]\{H^P\} + [B_2]\{M\} + [B_3]\{N\} \end{aligned} \quad (4.153a-b-c)$$

Par conséquent, ces trois expressions (4.153a-b-c) servent à définir σ_s en fonction des efforts résultants. La substitution de leurs dérivées dans (4.148) conduit alors à:

$$[F_6(z)] = \int_{-h/2}^z -\frac{M(z)}{2} \begin{bmatrix} B_3^{11} - B_3^{33} & B_3^{13} - B_3^{32} & 2B_3^{12} & 2B_3^{31} \\ B_3^{13} - B_3^{23} & B_3^{33} - B_3^{22} & 2B_3^{32} & 2B_3^{21} \end{bmatrix} dz \quad (4.155r)$$

avec

$$\langle H^T \rangle = \langle H_{xz}^T \quad H_{yz}^T \rangle = \langle H_{x,x}^P + H_{xy,y}^P \quad H_{xy,x}^P + H_{y,y}^P \rangle \quad (4.156a)$$

$$\langle T \rangle = \langle T_{xz} \quad T_{yz} \rangle = \langle M_{x,x} + M_{xy,y} \quad M_{xy,x} + M_{y,y} \rangle \quad (4.156b)$$

$$\langle f \rangle = \langle f_x \quad f_y \rangle = \langle N_{x,x} + N_{xy,y} \quad N_{xy,x} + N_{y,y} \rangle = \langle 0 \quad 0 \rangle \text{ (hypothèse)} \quad (4.156c)$$

et

$$\langle \lambda_H \rangle = \langle H_{x,x}^P - H_{xy,y}^P \quad H_{xy,x}^P - H_{y,y}^P \quad H_{y,x}^P \quad H_{x,y}^P \rangle \quad (4.157a)$$

$$\langle \lambda_M \rangle = \langle M_{x,x} - M_{xy,y} \quad M_{xy,x} - M_{y,y} \quad M_{y,x} \quad M_{x,y} \rangle \quad (4.157b)$$

$$\langle \lambda_N \rangle = \langle N_{x,x} - N_{xy,y} \quad N_{xy,x} - N_{y,y} \quad N_{y,x} \quad N_{x,y} \rangle \quad (4.157c)$$

4.6.1 Calcul des dérivées d'efforts résultants

En se basant sur les expressions des efforts N , M et H^P , la dérivée par rapport à x ou y sera réduite finalement aux dérivées secondes des fonctions de formes. Nous citons par exemple la première dérivée par rapport à x pour le cas de l'effort normal N (équation 3.150) et on procède de la même façon par rapport à y par la suite.

soit

$$\{N_{,x}\} = [H_{mm}]\{\varepsilon_{0,x}\} + [H_{mf}]\{\varepsilon_{1,x}\} + [H_{mz}]\{\varepsilon_{0z,x}\} \quad (4.158)$$

avec

$$\{\varepsilon_{0,x}\} = [B_{0,x}]\{u_n\}, \quad (4.159a)$$

$$\{\varepsilon_{1,x}\} = ([B_{1,x}] + [B_{1\Delta\beta,x}][A_n]([A_{G0}] + [A_{G1}]))\{u_n\}, \quad (4.159b)$$

$$\{\varepsilon_{0z,x}\} = M(z)[B_{0z,x}]\{u_n\} \quad (4.159c)$$

où

$$[B_{0,x}] = \begin{bmatrix} \langle t_{1,x} \rangle N_{i,x} + \langle t_1 \rangle N_{i,xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle t_{2,x} \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,yx} & 0 & 0 & 0 & 0 \quad \dots i = 1,4 \\ \langle t_{1,x} \rangle N_{i,y} + \langle t_1 \rangle N_{i,yx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + \langle t_{2,x} \rangle N_{i,x} + \langle t_2 \rangle N_{i,xx} & & & & \end{bmatrix} \quad (4.160a)$$

$$[B_{1,x}] = \begin{bmatrix} \langle t_{1,x} \rangle \bar{N}_{i,x} + \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,xx} & \langle \bar{t}_{1i,x} \rangle N_{i,x} + \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,xx} & 0 & 0 \\ \langle t_{2,x} \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,yx} & \langle \bar{t}_{2i,x} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,yx} & 0 & 0 \quad \dots i = 1,4 \\ \langle t_{1,x} \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,yx} & \langle \bar{t}_{1i,x} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,yx} & 0 & 0 \\ + \langle t_{2,x} \rangle \bar{N}_{i,x} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,xx} & \langle \bar{t}_{2i,x} \rangle N_{i,x} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,xx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.160b)$$

$$[B_{1\Delta\beta,x}] = \begin{bmatrix} (\vec{t}_{1,x} \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,x} + (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,xx} \\ (\vec{t}_{2,x} \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,y} + (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,yx} \quad \dots k = 5 \text{ à } 8 \\ \left(\begin{array}{l} (\vec{t}_{1,x} \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,y} + (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,yx} \\ + (\vec{t}_{2,x} \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,x} + (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk}) P_{k,xx} \end{array} \right) \end{bmatrix} \quad (4.160c)$$

$$[B_{0z,x}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{1i,x} \rangle N_{i,x} + \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,xx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{2i,x} \rangle N_{i,x} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,xx} \quad \dots i = 1 \text{ à } 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{1i,x} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,yx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \bar{t}_{2i,x} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,yx} \end{bmatrix} \quad (4.160d)$$

avec

$$\langle \bar{t}_{1i,x} \rangle = \langle -\vec{t}_{1,x} \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_{1,x} \cdot \vec{t}_{1i} \rangle ; \langle \bar{t}_{2i} \rangle = \langle -\vec{t}_{2,x} \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_{2,x} \cdot \vec{t}_{1i} \rangle \quad (4.161a,b)$$

$$\langle \bar{t}_{1i,x} \rangle = \langle \vec{t}_{1,x} \cdot \vec{t}_{1i} \quad \vec{t}_{1,x} \cdot \vec{t}_{2i} \rangle ; \langle \bar{t}_{2i,x} \rangle = \langle \vec{t}_{2,x} \cdot \vec{t}_{1i} \quad \vec{t}_{2,x} \cdot \vec{t}_{2i} \rangle \quad (4.162a,b)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{t}_{1,x} &= \begin{Bmatrix} n_{z,x} + A_x n_y^2 + 2n_y n_{y,x} A \\ -A_x n_y n_x - A n_y n_{x,x} - A n_x n_{y,x} \\ -n_{x,x} \end{Bmatrix} ; \\ \vec{t}_{2,x} &= \begin{Bmatrix} -A_x n_y n_x - A n_y n_{x,x} - A n_x n_{y,x} \\ n_{z,x} + A_x n_y^2 + 2n_y n_{y,x} A \\ -n_{y,x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.163a,b)$$

avec

$$A = \frac{1}{1+n_z} ; \quad A_x = \frac{-n_{z,x}}{(1+n_z)^2} \quad (4.164a,b)$$

Les dérivées secondes d'une fonction de forme $f(x, y)$ sont généralement données par:

$$\begin{Bmatrix} f_{i,xx} \\ f_{i,yy} \\ f_{i,xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{21}^2 & 2C_{21}C_{11} \\ C_{12}^2 & C_{22}^2 & 2C_{12}C_{22} \\ C_{12}C_{11} & C_{21}C_{22} & C_{11}C_{22} + C_{21}C_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{i,\xi\xi} - f_{i,x} x_{,\xi\xi} - f_{i,y} y_{,\xi\xi} \\ f_{i,\eta\eta} - f_{i,x} x_{,\eta\eta} - f_{i,y} y_{,\eta\eta} \\ f_{i,\xi\eta} - f_{i,x} x_{,\xi\eta} - f_{i,y} y_{,\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.165a)$$

Du fait que l'interpolation géométrique est bilinéaire, ces dérivées se résument à la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} f_{i,xx} \\ f_{i,yy} \\ f_{i,xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{21}^2 & 2C_{21}C_{11} \\ C_{12}^2 & C_{22}^2 & 2C_{12}C_{22} \\ C_{12}C_{11} & C_{21}C_{22} & C_{11}C_{22} + C_{21}C_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{i,\xi\xi} \\ f_{i,\eta\eta} \\ f_{i,\xi\eta} - f_{i,x} x_{,\xi\eta} - f_{i,y} y_{,\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.165b)$$

rappelons que cette forme est valable pour les fonctions P_k utilisées dans l'interpolation des rotations (Tableau 2.1). Cependant ces dérivées se réduisent à une forme plus simple (4. 167c) quand il s'agit des fonctions de forme bilinéaire $N_i((\xi, \eta))$.

$$\begin{Bmatrix} N_{i,xx} \\ N_{i,yy} \\ N_{i,xy} \end{Bmatrix} = (N_{i,\xi\eta} - N_{i,x} x_{,\xi\eta} - N_{i,y} y_{,\xi\eta}) \begin{Bmatrix} 2C_{21}C_{11} \\ 2C_{12}C_{22} \\ C_{11}C_{22} + C_{21}C_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.165c)$$

4.7 Formulation de la matrice masse élémentaire du modèle DDM des coques composites

La matrice masse est obtenue par discrétisation de l'énergie cinétique élémentaire qui s'écrit:

$$V = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho (\dot{u}_q^2 + \dot{v}_q^2 + \dot{w}_q^2) dV \quad (4.166)$$

où ρ est la masse volumique du matériau, \dot{u}_q , \dot{v}_q et \dot{w}_q sont les composantes suivant x , y et z de la vitesse d'un point quelconque de la coque. Elles sont définies par un champ de déplacement linéaire de sa part projeté sur le plan moyen, et des rotations quadratiques incomplètes de la normale à ce plan. Tous les termes de l'énergie cinétique, sont pris en considération (y compris les inerties dues au zigzag et celles du couplage membrane-flexion-zigzag).

Soit le champ de déplacement:

$$\{u_q\} = \sum_{l=1}^4 N_l \{u_{P_l}\} + z\{\beta\} + M(z)\{u^M\} \quad (4.167)$$

avec

$$\{u_{P_l}\} = \begin{Bmatrix} U_l \\ V_l \\ W_l \end{Bmatrix};$$

$$\{\beta\} = \sum_{l=1}^4 N_l (-\theta_{x_l}\{t_{2_l}\} + \theta_{y_l}\{t_{1_l}\}) + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta\beta_{s_k}\{t_{s_k}\} \quad (4.168a-b)$$

$$\{u^M\} = \sum_{l=1}^4 N_l (u_{1_l}^M\{t_{1_l}\} + u_{2_l}^M\{t_{2_l}\}) \quad (4.168c)$$

on aura

$$\begin{aligned} u_q &= U + z \left(\sum_{l=1}^4 -N_l \theta_{x_l} t_{2_l}(1) + \sum_{l=1}^4 N_l \theta_{y_l} t_{1_l}(1) + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta\beta_{s_k} t_{s_k}(1) \right) \\ &\quad + M(z) \left(\sum_{l=1}^4 N_l \beta_{x_l} t_{1_l}(1) + \sum_{l=1}^4 N_l \beta_{y_l} t_{2_l}(1) \right) \\ &= U + z\beta_{r1}(1) + M(z)\beta_{r2}(1) \end{aligned} \quad (4.169a)$$

$$\begin{aligned} v_q &= V + z \left(\sum_{l=1}^4 -N_l \theta_{x_l} t_{2_l}(2) + \sum_{l=1}^4 N_l \theta_{y_l} t_{1_l}(2) + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta\beta_{s_k} t_{s_k}(2) \right) \\ &\quad + M(z) \left(\sum_{l=1}^4 N_l \beta_{x_l} t_{1_l}(2) + \sum_{l=1}^4 N_l \beta_{y_l} t_{2_l}(2) \right) \\ &= V + z\beta_{r1}(2) + M(z)\beta_{r2}(2) \end{aligned} \quad (4.169b)$$

$$\begin{aligned} w_q &= W + z \left(\sum_{l=1}^4 -N_l \theta_{x_l} t_{2_l}(3) + \sum_{l=1}^4 N_l \theta_{y_l} t_{1_l}(3) + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta\beta_{s_k} t_{s_k}(3) \right) \\ &\quad + M(z) \left(\sum_{l=1}^4 N_l \beta_{x_l} t_{1_l}(3) + \sum_{l=1}^4 N_l \beta_{y_l} t_{2_l}(3) \right) \\ &= W + z\beta_{r1}(3) + M(z)\beta_{r2}(3) \end{aligned} \quad (4.169c)$$

En introduisant le champ cinématique (4.169a-b-c) dans (4.166), nous avons:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\begin{array}{l} (\dot{U}_q^2 + \dot{V}_q^2 + \dot{W}_q^2) + 2z (\dot{U}\dot{\beta}_{r1}(1) + \dot{V}\dot{\beta}_{r1}(2) + \dot{W}\dot{\beta}_{r1}(3)) \\ + 2z (\dot{U}\dot{\beta}_{r1}(1) + \dot{V}\dot{\beta}_{r1}(2) + \dot{W}\dot{\beta}_{r1}(3)) \\ + 2z M(z) (\dot{\beta}_{r1}(1)\dot{\beta}_{r2}(1) + \dot{\beta}_{r1}(2)\dot{\beta}_{r2}(2) + \dot{\beta}_{r1}(3)\dot{\beta}_{r2}(3)) \\ + M^2(z) (\dot{\beta}_{r2}^2(1) + \dot{\beta}_{r2}^2(2) + \dot{\beta}_{r2}^2(3)) \\ + z^2 (\dot{\beta}_{r1}^2(1) + \dot{\beta}_{r1}^2(2) + \dot{\beta}_{r1}^2(3)) \end{array} \right) dV \quad (4.170)$$

pour discrétiser cette énergie, nous pouvons réécrire les variables cinématiques sous cette forme:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [N]\{u_n\}; [N] = \begin{bmatrix} N_1 0 0 0 0 0 0 \dots N_i 0 0 0 0 0 0 \dots \\ 0 N_1 0 0 0 0 0 \dots 0 N_i 0 0 0 0 0 \dots \\ 0 0 N_1 0 0 0 0 \dots 0 0 N_i 0 0 0 0 \dots \end{bmatrix} \quad (4.171a-b)$$

$$\{\beta_{r1}\} = [N_{\beta_{r1}}]\{u_n\}; [N_{\beta_{r1}}] = [N_\theta] + [N_{\Delta\beta}] \quad (4.172a-b)$$

avec

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} 0 0 0 - N_1 t_{21}(1) N_1 t_{11}(1) 0 0 \dots 0 0 0 - N_1 t_{2i}(1) N_1 t_{1i}(1) 0 0 \dots \\ 0 0 0 - N_1 t_{21}(2) N_1 t_{11}(2) 0 0 \dots 0 0 0 - N_1 t_{2i}(2) N_1 t_{1i}(2) 0 0 \dots \\ 0 0 0 - N_1 t_{21}(3) N_1 t_{11}(3) 0 0 \dots 0 0 0 - N_1 t_{2i}(3) N_1 t_{1i}(3) 0 0 \dots \end{bmatrix} \quad (4.172c)$$

$$[N_{\Delta\beta}] = [P_t][A_n]([AG_0] + [AG_1]) \quad (4.172d)$$

et

$$[P_t] = \begin{bmatrix} P_1 t_{s1}(1) P_2 t_{s2}(1) P_3 t_{s3}(1) P_4 t_{s4}(1) \\ P_1 t_{s1}(2) P_2 t_{s2}(2) P_3 t_{s3}(2) P_4 t_{s4}(2) \\ P_1 t_{s1}(3) P_2 t_{s2}(3) P_3 t_{s3}(3) P_4 t_{s4}(3) \end{bmatrix} \quad (4.172c)$$

De la même manière pour $\{\beta_{r2}\}$.

$$\{\beta_{r2}\} = [N_{\beta_{r2}}]\{u_n\} \quad (4.172c)$$

$$[N_{\beta_{r2}}] = \begin{bmatrix} 0 0 0 0 0 N_1 t_{11}(1) N_1 t_{21}(1) \dots 0 0 0 0 0 N_1 t_{1i}(1) N_1 t_{2i}(1) \dots \\ 0 0 0 0 0 N_1 t_{11}(2) N_1 t_{21}(2) \dots 0 0 0 0 0 N_1 t_{1i}(2) N_1 t_{2i}(2) \dots \\ 0 0 0 0 0 N_1 t_{11}(3) N_1 t_{21}(3) \dots 0 0 0 0 0 N_1 t_{1i}(3) N_1 t_{2i}(3) \dots \end{bmatrix} \quad (4.172c)$$

La substitution de tous les termes développés précédemment dans l'expression de l'énergie cinétique (4.166) nous permet finalement d'aboutir à l'écriture suivante:

$$V = \frac{1}{2} \langle \dot{u}_n \rangle [M] \{ \dot{u}_n \} \quad (4.173)$$

où $[M]$ est la matrice masse définie par:

$$[M] = \int_{Ae} \left(C_1 [N]^T [N] + C_2 [N]^T [N_{\beta_{r1}}] + C_3 [N]^T [N_{\beta_{r2}}] + C_4 [N_{\beta_{r1}}]^T [N_{\beta_{r2}}] \right. \\ \left. + C_5 [N_{\beta_{r2}}]^T [N_{\beta_{r2}}] + C_6 [N_{\beta_{r1}}]^T [N_{\beta_{r1}}] \right) dA \quad (4.174)$$

avec

$$C_1 = \sum_{l=1}^c (z_{l+1} - z_l) \rho_l ; C_2 = \sum_{l=1}^{nc} \rho_l (z_{l+1}^2 - z_l^2) \quad (4.175a)$$

$$C_3 = 4 \sum_{l=1}^{nc} \frac{(-1)^l}{h^l} \rho_l \left(\frac{1}{2} (z_{l+1}^2 - z_l^2) - (z_{l+1} - z_l) \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right) \right) \quad (4.175b)$$

$$C_4 = 4 \sum_{l=1}^{nc} \frac{(-1)^l}{h^l} \rho_l \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - \frac{1}{2} (z_{l+1}^2 - z_l^2) \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right) \right); \quad (4.175c)$$

$$C_5 = \frac{4}{h_l^2} \sum_{l=1}^{nc} \rho_l \left(\frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) - (z_{l+1}^2 - z_l^2) \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right) + \left(z_{l+1} + \frac{h_l}{2} \right)^2 \right) \quad (4.175d)$$

$$C_6 = \sum_{l=1}^{nc} \rho_l \frac{1}{3} (z_{l+1}^3 - z_l^3) \quad (4.175e)$$

Chapitre 5 Validation numérique des modèles de coques composites avec et sans effet Zigzag

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons évaluer les performances des éléments de coques DMQS (sans effet zigzag) et DMQSZ (avec effet zigzag) à travers des tests standards des coques isotropes, stratifiées et sandwichs. Selon les formulations détaillées dans le chapitre précédent, l'étude comporte deux aspects: la partie statique dans laquelle on traite la réponse des éléments formulés au comportement des structures composites plate non-symétriques, coques cylindriques, vrillées, hémisphériques...etc. d'une part, et la réponse aux vibrations libres de quelques panneaux de structures cylindriques. Ces tests sont considérés indispensables à la validation des éléments finis de coque selon NAFEMS (National Agency for Finite Element Methods and Standards) [219]. Ils ont pour but de tester la convergence en augmentant le nombre d'éléments et de vérifier la capacité de ces éléments à simuler des comportements jugés complexes par l'ingénieur.

5.2 Applications aux structures coques isotropes

5.2.1 Cylindre pincé avec diaphragme

Un test de référence bien connu pour les coques cylindriques isotropes est celui du cylindre pincé avec diaphragmes, représenté sur la figure (5.1). Il a été utilisé par de nombreux chercheurs et identifié comme l'un des tests les plus sévères pour les deux états: un état de membrane complexe et un autre avec une surface moyenne inextensible en flexion. La coque pincée est supportée à ses extrémités par des diaphragmes rigides et chargés par deux forces diamétralement opposées qui agissent aux points médians de la coque. En raison de la symétrie de la structure, un huitième du cylindre est considéré comme domaine de calcul, en utilisant des maillages réguliers (N=2 à 15 éléments par côté).

La déformée du huitième de la coque est présentée sur la figure (5.2) en considérant un maillage de 12×12 d'éléments DMQS. Les courbes de la figure 5.3 illustrent bien le déplacement normal w le long des côtés DC et CB successivement. Nous constatons un fort gradient de déformation au voisinage du point C. Une déformée globale du cylindre est illustré également sur la figure 5.4, ayant utilisé un maillage de 32×100 sur le code ABAQUS 6.9 avec une interface graphique compatible.

Dans les tableaux 5.1 et 5.2 nous présentons respectivement les résultats pour le déplacement normal W_C et déplacement tangentiel V_D en fonction de nombre d'éléments par côté (N). Les solutions analytiques de Flügge [220] et Lindberg et al [221]. sont données par:

- Déplacement W_C : $W_{ref} = -W_C E h / P = 164.24$
- Déplacement V_D : $v_{ref} = -V_D E h / P = 4.11$

Toutefois, Flügge néglige la déformation du cisaillement (théorie des coques classique) qui est en contraste avec la formulation de Mindlin, nous adoptons comme deuxième solution de référence (W_{ref}) la valeur déclarée par Cho et Roh [222] qui est égale à 166.87

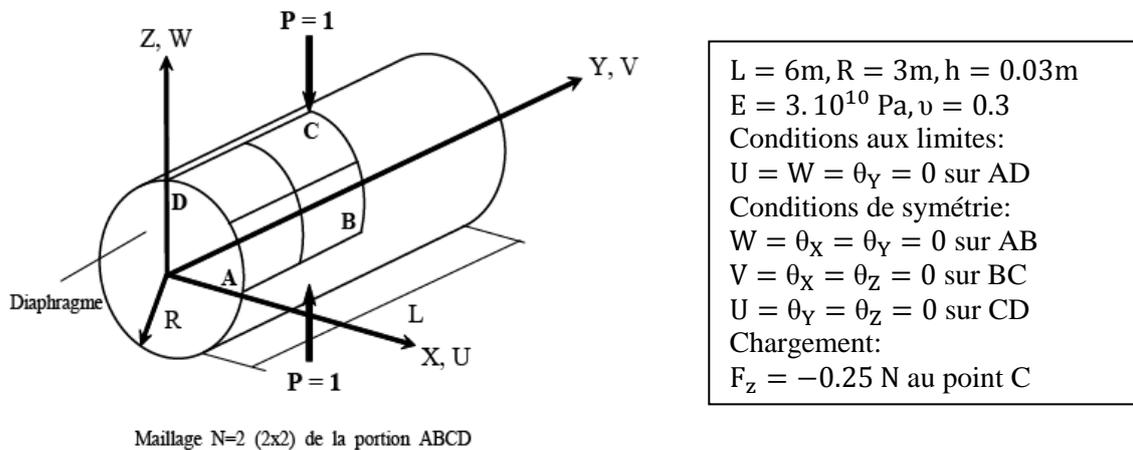


Figure 5.1 Cylindre pincé avec diaphragmes, données géométriques et mécaniques

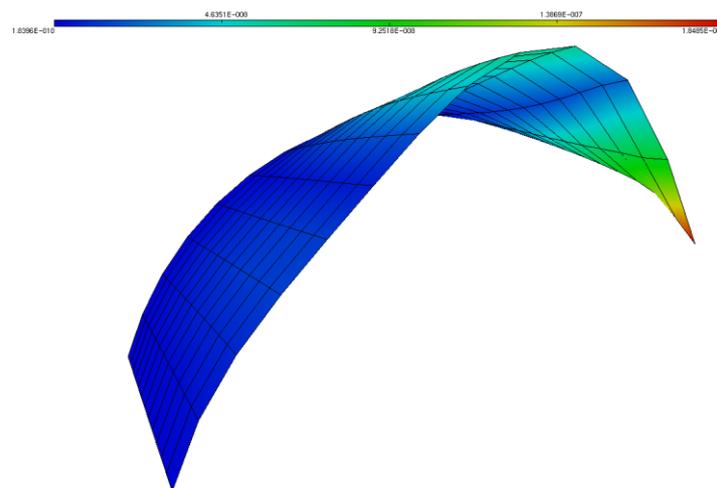


Figure 5.2 Cylindre pincé avec diaphragmes: déformée globale d'un huitième du cylindre (12×12).

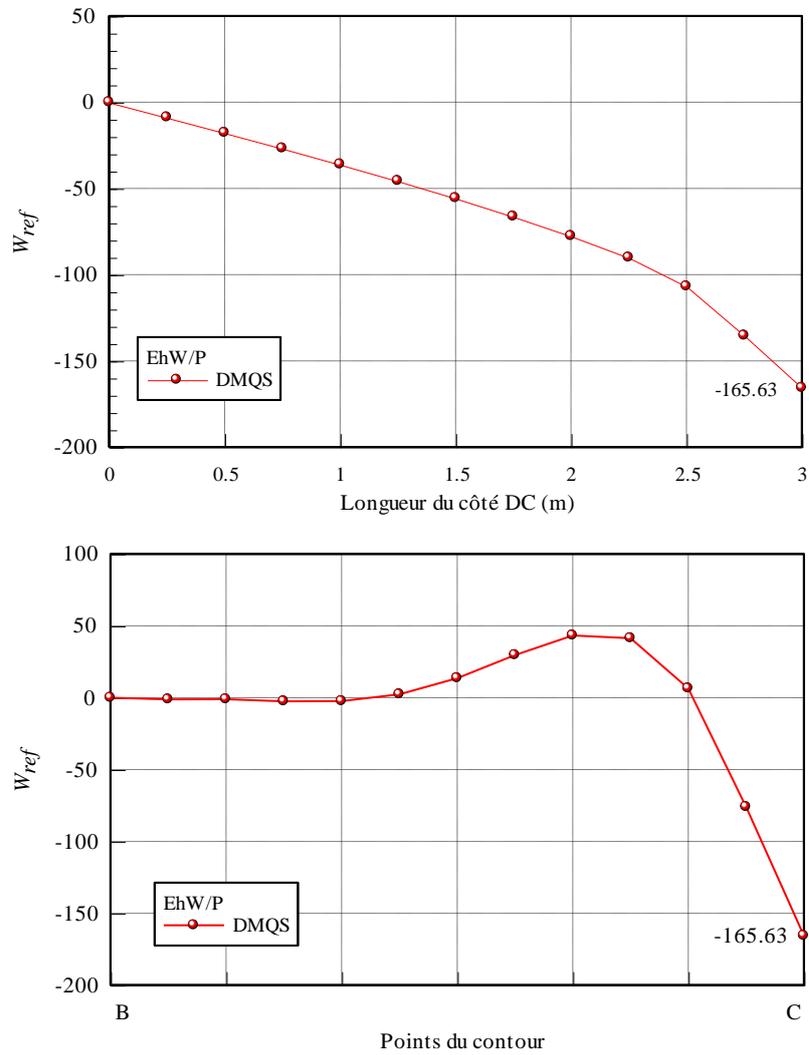


Figure 5.3 Cylindre pincé. l'allure du déplacement normal W le long des côtés DC et BC.

Eléments	N=2	N=4	N=6	N=8	N=10	N=12	N=15
DMQS	14.07	101.31	138.22	155.19	162,57	165.63	167,21
NHMiSP/ml	15.97	92.30	129.86	149.00	-	162.47	-
Q4γ24	6.10	60.93	99.63	121.95	135.18	143.37	150.75
DKQ24	14.07	101.24	138.02	154.84	-	164.95	166.37
Analytique [220]				$W_C = 164.24$			
Analytique [222]				$W_C = 166.87$			

Tableau 5.1 Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence de la flèche normale W_C .

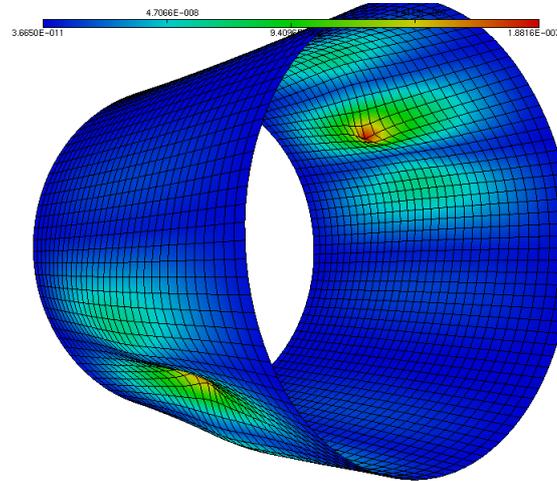


Figure 5.4 Cylindre pincé avec diaphragmes, déformée globale, maillage avec l'élément DMQS (32×100) sur Abaqus.

Eléments	N=2	N=4	N=6	N=8	N=10	N=12	N=15
DMQS	1.95	5.96	4.80	4.45	4.32	4.26	4.21
NHMiSP/ml	2.31	5.37	4.58	4.38	-	4.24	-
Q4γ24	0.67	3.92	4.19	4.19	4.17	4.16	4.15
DKQ24	1.95	5.96	4.80	4.44	-	4.26	4.20
Analytique [220]	$V_D = 4.114$						

Tableau 5.2 Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence du déplacement tangentiel V_D

On a observé qu'un très bon taux de convergence, presque identique, est obtenu pour les deux éléments DMQS et DKQ24. Cette similitude se justifie par un comportement semblable des deux éléments dans les structures cylindriques isotropes et minces, dans lesquelles la nouvelle formulation du modèle DDM se coïncide en termes fictifs (termes de rigidité non nuls) avec le modèle du Kirchoff discret [218]. La performance de l'élément DMQS s'explique d'autre part par une représentation riche en flexion due au champ quadratique des rotations. L'examen des résultats donnés par le deuxième élément NHMiSP/ml, dont la formulation est complète, montre une bonne allure de convergence, presque pareille aux éléments précédents. Cependant, la convergence du déplacement W_C obtenue par l'élément Q4γ24 est relativement lente par rapport aux autres éléments, tableau (5.1).

Concernant le déplacement V_D tableau (5.2), un petit dépassement est constaté pour tous les éléments au niveau du maillage grossier (4×4 éléments), excepté l'élément Q4γ24. Néanmoins les valeurs convergent à nouveau au delà de 6×6

éléments. Il est à noter que la convergence du déplacement tangentiel V_D est plus rapide que W_C et que tous les éléments convergent vers la valeur exacte. .

5.2.2 Poutre vrillée sous chargement concentré

Ce cas test a été proposé par MacNeal et al. [223]. Il s'agit d'une poutre vrillée encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité : une charge P_Z dans le plan et une autre charge hors plan P_Y , comme il est indiqué sur la figure (5.5). Ce test constitue un bon examen de validation d'éléments finis de coque tenant compte du gauchissement de la surface moyenne, en particulier les éléments quadrilatéraux à 4 nœuds. Les tableaux (5.3) et (5.4) regroupent les déplacements W et V calculés au point A pour deux valeurs différentes d'épaisseur $h=0.32$ et $h=0.0032$ en considérant les maillages (2×12) , (4×24) et (6×36) .

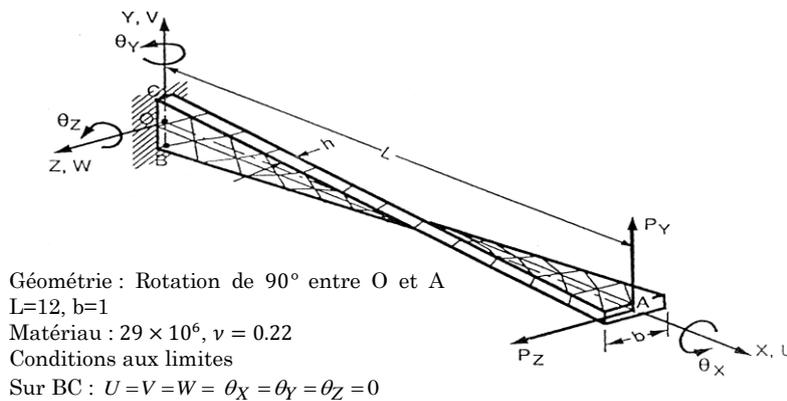


Figure 5.5 Poutre vrillée. Données

Outre les solutions exactes citées dans [223], celles de Batoz et al.[224] fondées sur la théorie des poutres sont proposées comme valeurs de référence. Elles sont obtenues par un élément fini de poutre vrillée, en considérant un modèle variationnel mixte où les équations d'équilibre interne sont satisfaites. Les résultats de deux modèles DMQS et DMQSZ sont également confrontés à ceux données par les éléments DKT-CST [218], $Q4\gamma - Q4$ [69] et à l'élément mixte hybride naturel NHMiSP4/ml (la partie membrane est basée sur une formulation hybride au sens de Pian) [6].

A part l'incapacité de l'élément DKQ24 à reproduire la réponse appropriée dans le premier rapport d'élanement ($h = 0,32$) tableau 5.3, et en dépit du petit dépassement constaté au niveau de l'élément $Q4\gamma 24$ quand il s'agit du chargement hors plan (plan XY), l'ensemble des éléments converge de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge.

Dans le cas du chargement hors plan, d'où l'effet de membrane au voisinage de l'encastrement est dominant. L'élément DMQS (riche en flexion) donne des résultats

très satisfaisants. Cela dû, peut être au comportement implicitement couplé de la structure (membrane-flexion) en s'éloignant de l'encastrement d'une part et à la considération des courbures gaussiennes dans sa formulation d'autre part. Cependant, la convergence des éléments Q4Y-Q4 et DKT-CST s'avère plus lente car la partie membrane, représentée par des éléments standards bilinéaire Q4 (pour les quadrilatères) et linéaire CST (pour le triangle DKT), n'est pas assez riche pour simuler un comportement pareil.

a. Chargement dans le plan XZ: $P_Z = 10^3$, $P_Y = 0$						
Maillage	DMQS	NHMiSP4/ml	Q4Y24	DKQ24	Q4Y - Q4	DKT-CST
2×12	5.377	5.386	5.33	2.07	5.37	5.327
4×24	5.401	5.407	5.38	6.32	5.39	5.367
6×36	5.408	5.412	-	-	5.406	5.343
Solution exacte [223], [224] $W_A = 5.424$						
b. Chargement dans le plan XY: $P_Y = 10^3$, $P_Z = 0$						
Maillage	DMQS	NHMiSP/ml	Q4Y24	DKQ24	Q4Y - Q4	DKT-CST
2×12	1.6196	1.731	1.66	2.0	1.607	1.465
4×24	1.7108	1.746	1.77	3.9	1.708	1.621
6×36	1.7325	1.749	-	-	1.731	1.682
Solution exacte [223], [224] $V_A = 1.754$						

Tableau 5.3 Poutre vrillée, résultats des déplacements en A pour $h = 0.32$

a. Chargement dans le plan XZ: $P_Z = 1$, $P_Y = 0$					
Maillage	DMQS	NHMiSP/ml	Q4Y24	Q4Y - Q4	DKT-CST
2×12	5279	5183	5105	5127	5268
4×24	5289	5232	5185	5204	5203
6×36	5289	5244	-	5227	5258
Solution exacte [223], [224] $W_A = 5316$					
b. Chargement dans le plan XY: $P_Y = 1$, $P_Z = 0$					
Maillage	DMQS	NHMiSP/ml	Q4Y24	Q4Y - Q4	DKT-CST
2×12	1287	1272	1311	1256	1285
4×24	1297	1288	1340	1283	1282
6×36	1299	1291	-	1288	1287
Solution exacte [223], [224] $V_A = 1296$					

Tableau 5.4 Poutre vrillée, résultats des déplacements en A pour $h = 0.0032$

5.2.3 Hémisphère pincé sous chargement diamétralement opposées

Nous examinons le comportement d'une coque hémisphérique pincée avec un trou à 18° . Ceci est un test sévère pour vérifier l'absence du blocage en membrane et la représentation des mouvements du corps rigide. Le présent problème a été choisi parmi les tests standards proposés pour les éléments de coque par MacNeal et Harder [223]. Considérant une coque isotrope hémisphérique fermée avec deux forces entrantes et deux autres sortantes perpendiculaires entre elles. Les trous de base et de dessus sont supposés des bords libres de sorte que le problème représente un hémisphère avec quatre charges ponctuelles (figure 5.6). En raison de la symétrie du problème, seulement un quart de la coque a été discrétisé par un maillage régulier en $N \times N$ éléments ($N = 2$ à 16 par côté). Toutefois, afin d'éviter le mouvement du corps rigide, le déplacement est bloqué suivant z (point E par exemple). Les propriétés du matériau et les conditions aux limites imposées sont données sur la figure 5.6.

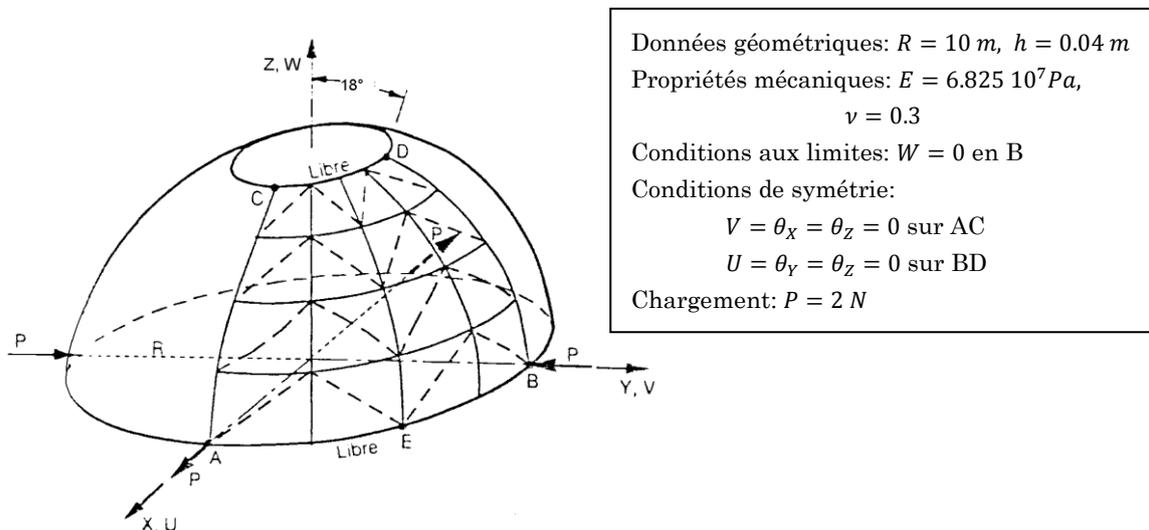


Figure 5.6 Hémisphère pincé. Données [218]

Les déplacements au point A ($U_A = -V_B$) obtenus pour les maillages réguliers de 2 jusqu'au 12 par côté sont reportés sur le tableau 5.5. La solution de référence donnée par MacNeal et Harder [223] est $0,094 \text{ m}$. Simo et al. [225] rapportent également une valeur de $0,093$ pour le déplacement au point A.

Les résultats obtenus par nos modèles sont en bon accord avec les deux solutions de référence, d'où un excellent taux de convergence est constaté même pour les deux autres éléments. Il est également à noter que le modèle DMQS et NHMiSP/ml ne présentent aucun verrouillage en membrane ou en cisaillement. Les résultats obtenus par le modèle NHMiSP sont identiques à ceux de la version simplifiée [6]. Ils convergent d'une façon monotone décroissante vers la valeur de référence. Cette qualité se confirme par un maillage raffiné de 20×20 éléments, dont le résultat est $U_A = 0.955$.

Eléments	Maillage					
	N=2	N=4	N=6	N=8	N=10	N=12
DMQS	0.0960	0.0979	0.0960	0.0947	0.0940	0.0937
NHMiSP/ml	-	0.1075	0.1027	0.9997	-	0.09733
Q4γ24	0.084	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093
DKQ24	0.096	0.098	0.096	0.095	0.094	0.094
Analytique [223]	0.094					
Simo et al. [225]	0.093					

Tableau 5.5 Hémisphère pincé. Convergence de U_A

5.2.4 Paraboloïde hyperbolique

Ce test est proposé par Brebbia et al. [226, 227]. Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique encastré à ces extrémités et soumis à une pression uniforme (figure 5.7). La structure est mince à double courbure et reflète le gauchissement de la coque. Elle décrit une forme carrée de base $2a \times 2a$ sur le plan (XY) . Les données géométriques et mécaniques sont illustrées sur la figure 5.7

Les courbes de convergence du déplacement normal W_0 au centre sont tracées sur la figure 5.8. les résultats relatifs à l'élément de coque mince DKQ24 sont également y représentés. Cet élément est formulé sur une approche à facettes planes et ne tient pas en compte du gauchissement de la structure. Le présent exemple reflète évidemment cet handicap qui se traduit par une faible erreur et qui ne s'atténue pas même pour un maillage plus fin. Même remarque est constatée pour l'élément $Q4\gamma24$, qui décrit une courbe convergente, qui manque cette fois-ci de certaine précision au niveau des maillages grossiers. La courbe du modèle DMQS montre des valeurs très satisfaisantes, une convergence monotone et rapide vers la solution de référence.

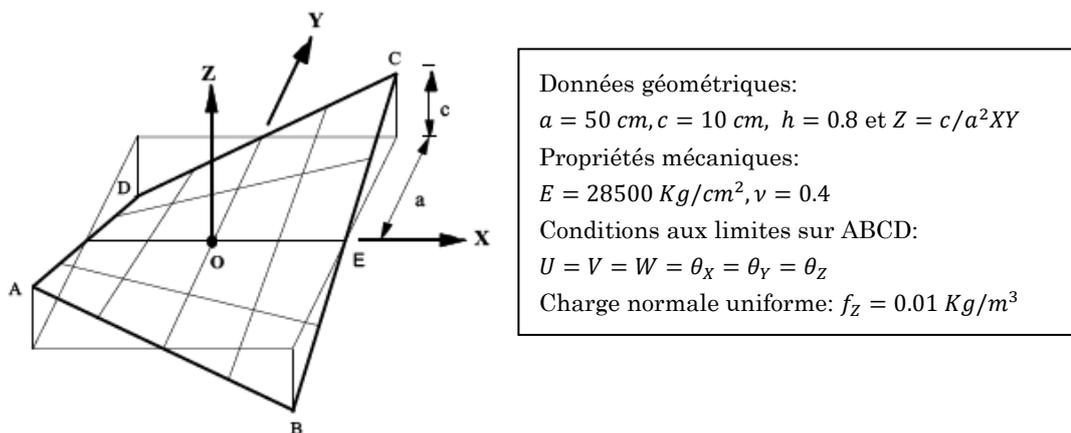


Figure 5.7 Paraboloïde hyperbolique, données du problème

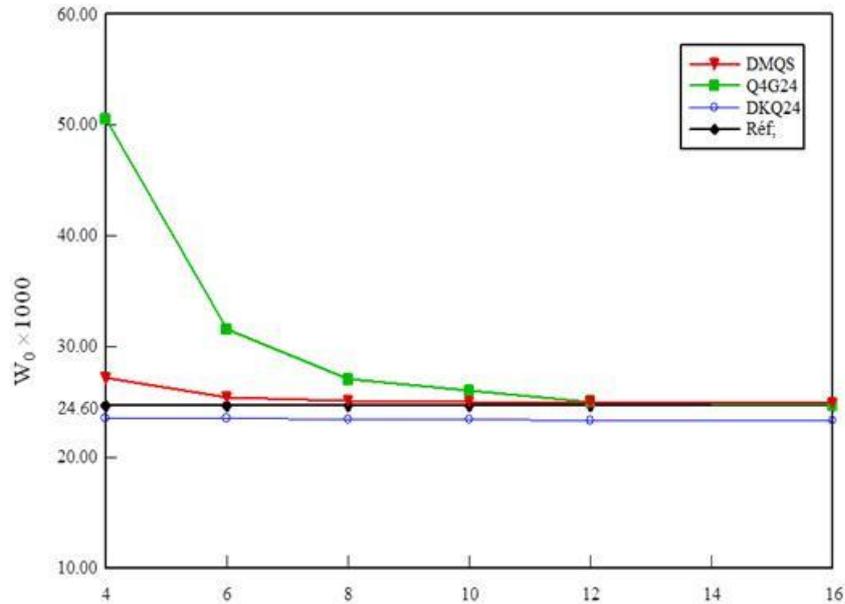


Figure 5.8 Parabolôïde hyperbolique, convergence du déplacement normal W_0

5.3 Applications aux structures coques composites (stratifiés multicouches, sandwichs)

5.3.1 Cylindre orthotrope sous pression

Le présent problème traité déjà par Kraus [228] et Chatelain [229] consiste à évaluer les déplacements maximums dans un cylindre orthotrope à une couche encastré à ses deux extrémités et soumis à une pression interne (figure 5.9). La symétrie du problème permet d'étudier un huitième du cylindre (portion ABCD) en considérant un maillage 10x5 (10 éléments selon la circonférence et 5 selon la longueur). Les caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que les conditions aux limites sont montrées sur la figure 5.9. Les résultats obtenus par les éléments DMQS et DMQSZ concernant les déplacements aux points D et C sont donnés dans le tableau 5.6. Ils sont comparés à ceux de l'élément de coque plane DMTS [3], à l'élément mixte MiSP4-Q4 [69] et à l'élément DSQ24 (maillage de 20x10 éléments) [63].

Le fait que le problème est axisymétrique, les flèches maximales devraient être d'égale valeur aux points C et D, cela est vérifié numériquement avec nos modèles DMQS et DMQSZ ainsi que les éléments quadrilatéraux MiSP4_Q4 et DSQ24, mais c'est pas le cas avec les deux autres éléments triangulaire DST18 et DMTS où l'orientation du maillage ne traduit pas le comportement authentique de la coque.

Nous constatons que les déplacements obtenus par les éléments DMQS et DMQSZ restent les plus proches à la solution de référence par rapport aux autres éléments, avec une erreur relative de l'ordre de 1,35%. L'effort normal au centre du cylindre est également obtenu avec une bonne précision pour les deux versions du modèle DDM. Les moments restent en bon accord avec les valeurs de référence, avec une légère sensibilité due au cisaillement transverse. Pour approuver l'absence de la fonction zigzag (une droite qui rejoint les deux interfaces de la section plane) dans ce type de structures (une seule couche orthotrope), nous avons simulé la section comme ayant trois couches fictives. Les résultats obtenus par le modèle avec zigzag, développé sans correction et ceux du modèle primitif «DMQS» sont quasi-identiques, d'où cette similitude réfère à la rationalité de cet hypothèse.

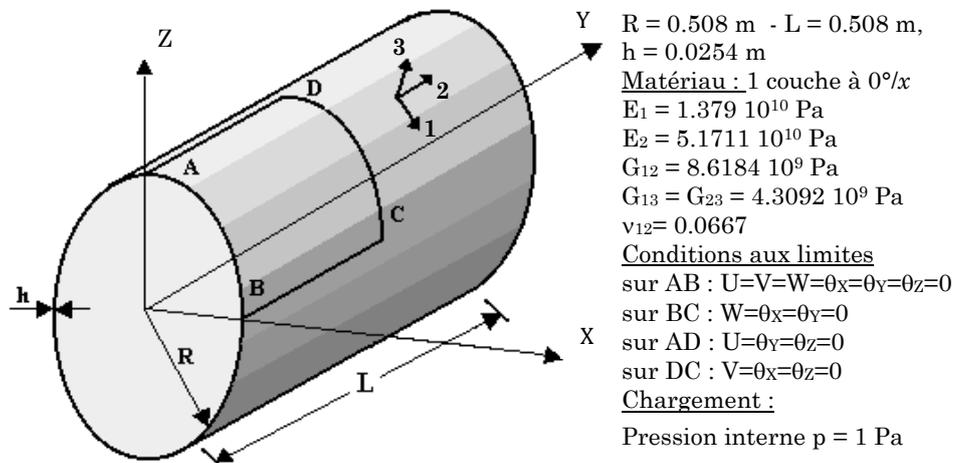


Figure 5.9 Cylindre orthotrope. Géométrie et données.

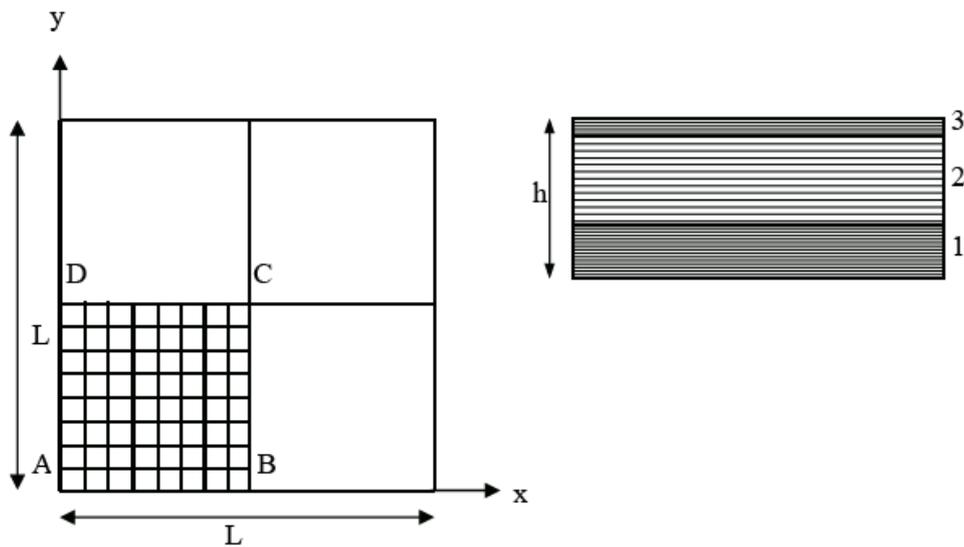
	DMQS	DMQSZ	DSQ24	DST18	DMTS	MiSP4-Q4	Théo. des Coques minces
- Flèches max. aux points D et C ($10^{-9} m$)	0.6720	0.6719	0.677	D: 0.681 C: 0.684	D : 0.616 C : 0.685	0.684	0.663
- Moment au point D $M_{yy} \times 10^{-3}$ (Nm/m)	2.323	2.318	2.14	2.01	-	-	2.517
- Moment au point A $M_{yy} \times 10^{-3}$ (Nm/m)	8.229	8.050	6.72	4.24	-	-	7.287
- Effort circconférentiel au point D, $M_{yy}(Nm/m)$	0.468	0.468	0.471	0.447	-	-	0.461

Tableau 5.6 Cylindre orthotrope sous pression interne. Déplacement maximal et moments.

5.3.2 Plaque sandwich non-symétrique

Un cas particulier du problème est déjà traité dans la section plaque, il consiste en une structure carrée Sandwich, simplement supporté et soumise à un chargement uniforme, (figure 5.10). Dans le présent cas, la plaque stratifiée n'est pas symétrique avec une géométrie ($h_1 = 0.3$; $h_2 = 0.6$; $h_3 = 0.1$) qui entraîne un effet de couplage membrane-flexion-zigzag. Un calcul est effectué sur toute la plaque avec un maillage de 12×12 et les résultats sont donnés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w}_C = w_C \frac{G_{12}(\text{Coeur})}{hq_0}, \quad \bar{\sigma}_{xxC} = \frac{\sigma_{xxC}}{q_0}$$



Géométrie: $L = 1000, h = 100, e_1 = 30, e_2 = 60, e_3 = 10$
Matériau: (orthotrope), 3 couches ($0^\circ/0^\circ/0^\circ$)
peau: $E_1 = 3.4156, E_2 = 1.7931, G_{12} = 1, G_{13} = 0.608, G_{23} = 1.015, \nu = 0.44$
Cœur: $E_1 = 0.34156, E_2 = 0.17931, G_{12} = 0.1, G_{13} = 0.0608, G_{23} = 0.1015, \nu = 0.44$
Conditions aux limites: $W = \theta_y = 0$ sur AB, $U = \theta_y = 0$ sur BC, $V = \theta_x = 0$ sur CD, $W = \theta_x = 0$ sur DA
Chargement uniforme unitaire.

Figure 5.10 Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniformément répartie, données du problème.

Les résultats du déplacement w au centre de la plaque sandwich et de contraintes dans le même point et sur les interfaces de trois couches sont reportés dans le tableau 5.7. La figure 5.11 montre la distribution de la contrainte de cisaillement transversal τ_{xz} à travers l'épaisseur pour différents modèles DSQ [63], Heterosis[197], HMiSP4/Q4/ml [6]. Concernant la flèche w , nous observons une très bonne corrélation du modèle primitif DMQS avec la solution tridimensionnelle de

Srinivas [11] et celle de l'élément hétérosis conçu par Owen et al. [197]. Cependant, tous les éléments à l'exception de l'élément mixte hybride NHMiSP/Q4/ml et celui DMQS avec zigzag, révèlent des valeurs assez proches à la valeur de référence. Cette performance se justifie par la correction exclusive de leur partie du cisaillement transverse faite par des coefficients spécifiques ($k_{11} = k_{11} = 0.2449$) et qui ne pourrait pas être concrétisée par la forme zigzag ou le modèle mixte. Néanmoins, la précision du modèle DMQSZ concernant les contraintes planes se montre au niveau de la section inférieure au plan moyen de la plaque, dont les résultats sont assez proches aux valeurs de référence que les autres éléments.

D'autre part, il est bien montré sur la figure (5.11) la dissymétrie de l'allure de la contrainte de cisaillement par rapport à l'axe moyen. Les courbes définies par les deux modèles basés sur le concept «DDM» montrent des valeurs légèrement distinguées par rapport à ceux des autres éléments finis.

Modèles	\bar{w}_C	$\bar{\sigma}_{xxC}$ ($z = +\frac{h}{2}$)	$\bar{\sigma}_{xxC}$ ($z = +\frac{4h+}{10}$)	$\bar{\sigma}_{xxC}$ ($z = +\frac{4h-}{10}$)	$\bar{\sigma}_{xxC}$ ($z = -\frac{2h+}{10}$)	$\bar{\sigma}_{xxC}$ ($z = -\frac{2h-}{10}$)	$\bar{\sigma}_{xxC}$ ($z = -\frac{h}{2}$)
Heterosis	34.92	63.5	53.22	5.32	-0.85	-8.50	-39.35
HMiSP4/Q4/ml	36.14	62.3	52.2	5.22	-0.813	-8.13	-38.30
DMQSm1	34.76	63.64	53.30	5.33	-0.874	-8.74	-39.76
DMQSZ	30.72	66.62	53.09	5.31	-0.75	-7.46	-42.15
Solution [11]	3D 34.55	63.76	50.24	5.04	-0.34	-3.40	-43.77

$$k_{11} = k_{22} = 0.2449 \text{ [11, 230]}$$

Tableau 5.7 Plaque carré sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme- Comparaison des déplacements.

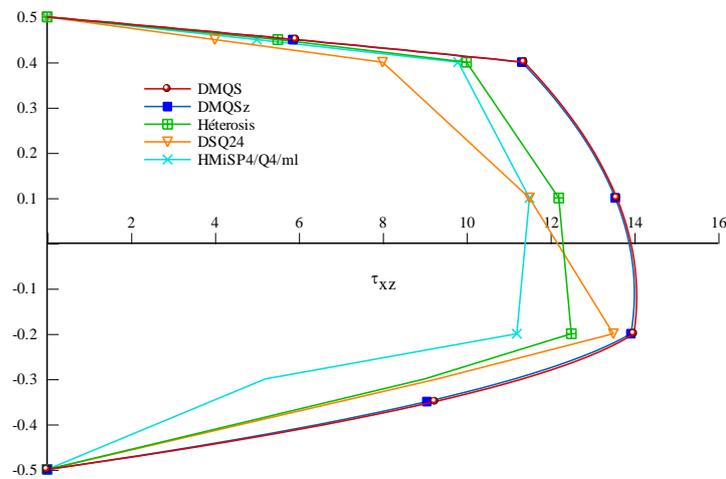


Figure 5.11 Distribution de la contrainte τ_{xz} suivant l'épaisseur de la plaque sandwich non symétrique ($L/h = 10$).

5.3.3 Cylindre multicouche croisé

Pour étudier le comportement en flexion des coques cylindriques multicouches, nous considérons un cylindre stratifié symétrique simplement supporté sous pression doublement sinusoïdale à quatre ondes circonférentielles, (Figure. 5.12). Le problème a été résolu analytiquement par Varadan et Bhaskar [231] en utilisant la théorie de l'élasticité 3D. En raison de conditions de symétrie, un panneau de longueur $L/2$, et de rayon R est analysé ($L/R = 4$). Les propriétés du matériau sans dimension sont les suivantes:

$$E_1/E_2 = 25, G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

L'étude est effectuée pour différents élancement S de l'épaisseur, avec $R/h = S$. La plaque est constituée de dix couches croisées $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ avec un chargement $q = q_0 \sin(\pi Y/a) \cos(4\theta)$. Les conditions aux limites imposées sont : $U = W = \theta_Y = 0$ sur AD. Les conditions de symétrie:

$$W = \theta_X = \theta_Y = 0 \text{ sur } AB, V = \theta_X = \theta_Z = 0 \text{ sur } BC, U = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ sur } CD.$$

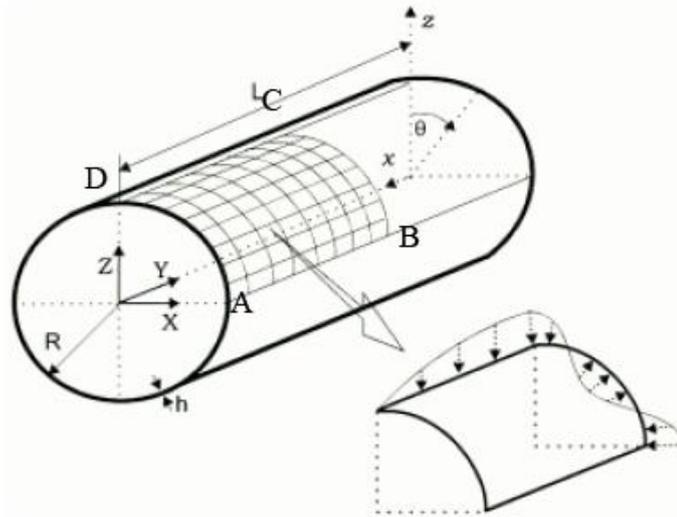


Figure 5.12 Cylindre simplement supporté sous chargement doublement sinusoïdal, données géométriques.

R/h	DMQSz		DMQS		NHMiSP4/ml	EHOST [232]	Sol. analytique [233]	Elasticité 3D [231]
	16X20	20X16	16X20	20X16	20X20	20X6		
10	1.1516	1.1917	1.3472	1.3888	1.4805	1.373	1.369	1.38
50	0.7396	0.7482	0.7466	0.7553	0.8045	0.7613	0.762	0.7622
100	0.6137	0.6188	0.6150	0.6201	0.7460	0.6256	0.6255	0.6261

Tableau 5.8 Cylindre simplement supporté, flèche au point C.

Le tableau (5.8) montre les résultats du modèle ainsi développé et qui est défini par ses deux variantes DMQS et DMQSZ. Des résultats sont également fournis dans la référence [232], issus d'un élément quadrilatère à double courbure à 9 nœuds et 5 ddl/nœud, proposé pour les coques composites stratifiées symétriques. Sa formulation est basée sur une théorie d'ordre supérieur qui tient compte de l'effet de zigzag (EHOST: Efficient Higher Order Shell Theory). Tous les résultats sont comparés aux solutions analytiques de Ren et al. [233] et celles de l'élasticité 3D [231].

Les résultats sont présentés pour la flèche au centre du cylindre, en considérant les rapports de $S = 10, 50$ et 100 selon la valeur adimensionnelle suivante:

$$\bar{w}_c(0, a/2, R) = w_c \frac{10 E_L}{q_0 S^4 h}$$

Nous observons que le modèle DMQS donne de bons résultats par rapport aux valeurs de référence. En particulier, l'élément primitif DMQS semble plus précis que celui avec zigzag. Cette qualité est également confirmée vis à vis de l'élément NHMiSP4/ml dans ce type de problème. Comme on s'y attendait, les résultats convergent mieux vers la solution analytique pour les différents maillages quand le rapport S devient grand. Du fait que la structure subit un fort gradient de la charge et qui nécessite un maillage plus raffiné, une meilleure précision est remarquée lorsque l'accroissement de la charge est bien représenté sur la circonférence. Cela est exprimé par un maillage de 20×16 éléments, tableau (5.8).

5.4 Etude de vibrations libres de structures composites

5.4.1 Vibrations libres d'une aube de compresseur isotrope

Dans le contexte d'évaluation des performances dynamiques du présent modèle DDM, nous nous présentons dans cet exemple la réponse harmonique d'une aube de compresseur, (figure 5.13) [4, 6, 64]. Il s'agit de calculer les six premières fréquences propres d'un modèle simplifié -panneau cylindrique- encasté à une extrémité et libre sur les autres côtés. La coque est relativement courte ($L/R = 0.5$) et mince ($L/h = 100$). Les fréquences de références ont été obtenues expérimentalement par Olson et Linberg [221]. L'élément HQS20 [64] (§ 1.3.3.1) a été utilisé pour déterminer les fréquences et les modes propres de cette structure.

Tous les résultats sont regroupés dans le tableau (5.9), où on a exploité le modèle avec zigzag en considérant la coque comme étant une structure multicouche (par exemple 3 couches fictives isotropes de même épaisseur). Les deux éléments DMQS et DMQSZ fournissent évidemment la même première fréquence, cependant nous constatons une légère différence en allant aux fréquences secondaires. Ces résultats montrent que l'effet de cisaillement est négligé dans le modèle avec zigzag, qui se comporte -sans correction- comme le modèle primitif (DMQS). On note également que pour les différentes fréquences, en raffinant le maillage, les résultats convergent vers les valeurs expérimentales.

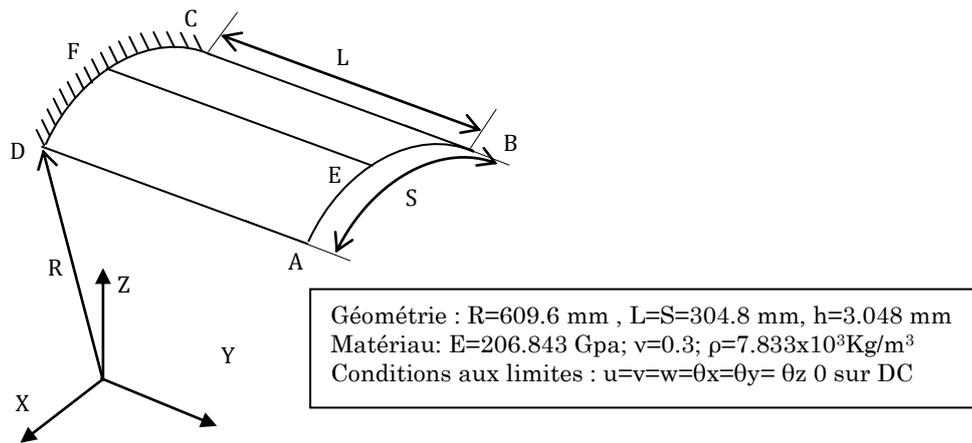


Figure 5.13 Modèle simplifié d' aube de compresseur, données géométriques et mécaniques

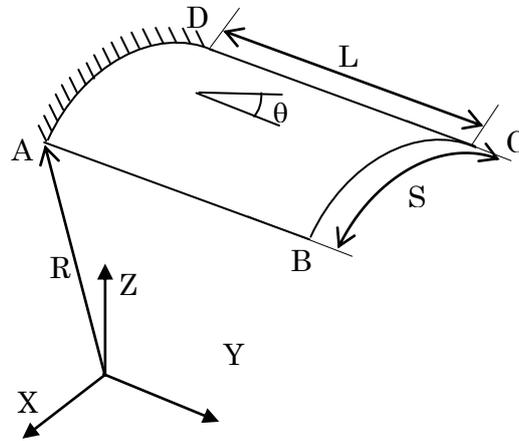
Maillage	Elément/Mode	1	2	3	4	5	6
2 × 2	DMQS	68.8	104.1	270.8	271.0	406.2	903.2
	DMQSz	68.8	104.0	267.1	274.7	405.9	1544.7
	HQS20	83.4	147.2	241.8	396.5	407.3	606.4
4 × 4	DMQS	88.0	139.4	273.8	357.3	385.3	619.9
	DMQSz	88.0	139.2	273.3	354.9	388.4	617.7
	HQS20	85.52	141.5	245.7	370.6	410.9	554.8
8 × 8	DMQS	87.4	140.2	253.6	354.8	393.2	559.1
	DMQSz	87.4	140.0	253.1	354.2	394.6	556.8
	HQS20	85.7	139.3	246.58	349.5	392.14	535.26
	Expérimentale[221]	85.6	134.5	259.0	351.0	395.0	531.0

Tableau 5.9 Fréquences propres ($f = \omega/2\pi$) de vibration libre d'une aube de compresseur. influence de maillage

5.4.2 Vibrations libres de panneaux composites

Cet exemple a été traité par Crawley [234]. L'analyse est faite pour trois panneaux cylindriques de même dimension avec différentes séquences d'empilement, (figure 5.14). Les panneaux sont encastés sur un côté courbe AD et libre sur le reste du contour. Nous avons déterminé les cinq premières fréquences propres par notre modèle et nous les avons confrontés à celles obtenues expérimentalement et numériquement à l'aide d'un élément fini de coque à 8 nœuds et 5 ddl/nœud tenant compte l'effet de cisaillement [234], et de l'élément baptisé HSQ20 de forme

quadrilatérale à 4 nœuds et 5 ddl/nœud basé sur une formulation de coque cylindrique [64]. Pour une meilleure précision, le panneau est discrétisé entièrement en 8×16 (16 segments sur le côté rectiligne).



Géométrie : $R=127$ mm , $L=152$ mm, $S=76$ mm, $h=0.13 \times 8=1.04$ mm
 Matériau : Carbone-Epoxy (orthotrope)
 $E_1=128$ Gpa ; $\nu_{12}=0.25$; $G_{12}=4.486$ Gpa ; $E_2=11$ Gpa ; $G_{13}=1.53$ Gpa ;
 $\rho=1.5 \times 10^3$ Kg/m³
 8 couches non symétriques : $[0_2/\pm 30]_S$; $[0/\pm 45/90]_S$; $[\pm 45]_{2s}$
 Conditions aux limites : $u=v=w=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$ sur AD

Figure 5.14 Panneau composite, données géométriques et matérielles.

Le tableau 5.10 regroupe les cinq premières valeurs de fréquences propres, des représentations graphiques fréquences-modes sont également illustrées sur la figure 5.15. Nous pouvons constater une bonne cohérence entre nos résultats et ceux obtenus numériquement par Bouabdallah [64] et Crawley [234]. Ces résultats se montrent plus fiables pour le calcul de la première fréquence dont le premier mode est dominant. D'autre part, nous pouvons conclure, que les modèles numériques sont en bon accord avec les valeurs empiriques en dépit de la légère différence qui se montre pour les autres fréquences.

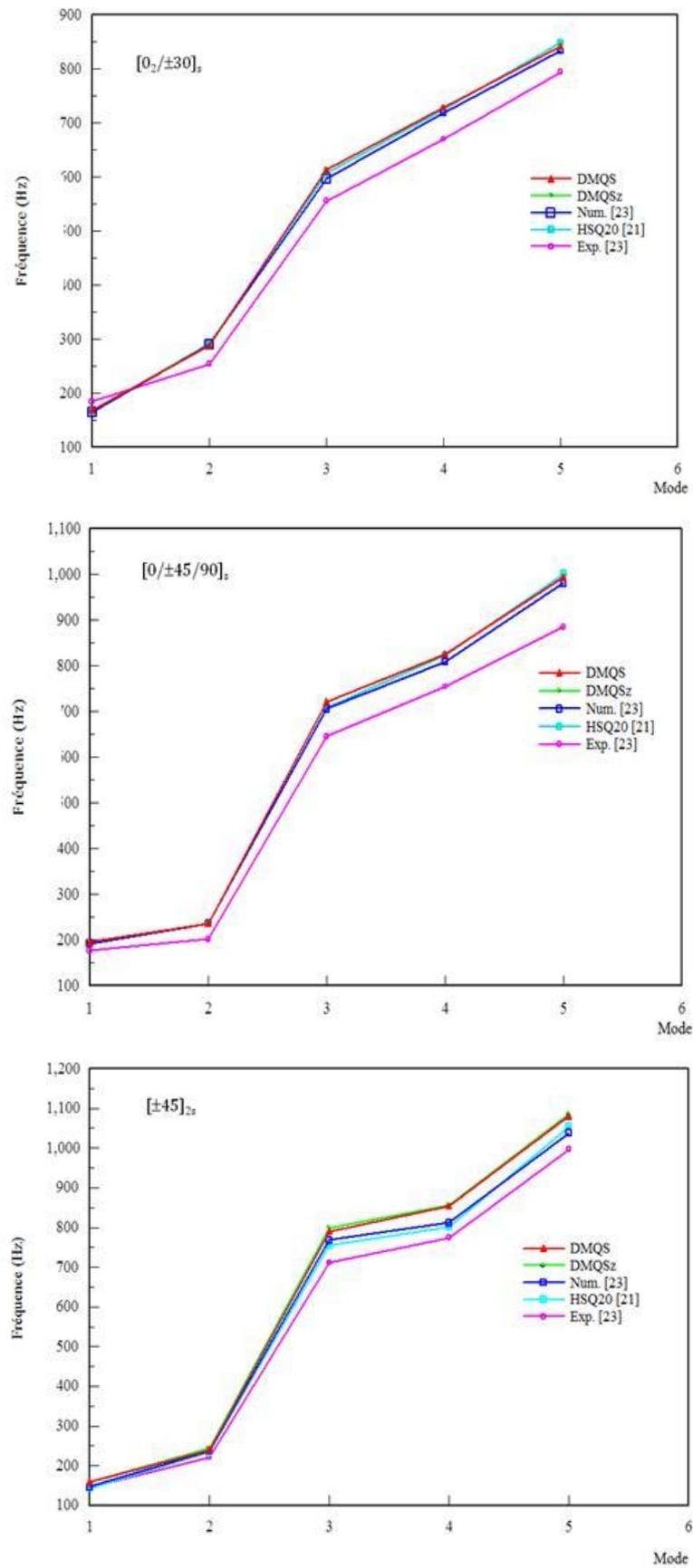


Figure 5.15 Fréquences propres de panneaux cylindriques composites.

Stratifications	Mode	Exp. [234]	Calcul [234]	HSQ20 [64]	DMQS	DMQSz
[0 ₂ /±30] _s	1	185.0	165.7	167.2	168.7	168.7
	2	254.1	289.6	292.4	288.4	288.4
	3	555.6	597.1	606.2	613.1	613.2
	4	670.0	718.5	724.6	728.5	728.7
	5	794.0	833.3	848.6	841.6	841.9
[0/±45/90] _s	1	177.0	192.4	193.1	195.6	195.7
	2	201.8	236.1	236.3	236.4	236.4
	3	645.0	705.8	709.3	721.3	721.7
	4	754.0	808.2	823.4	825.3	825.7
	5	884.8	980.6	1001.	993.5	994.2
[±45] _{2s}	1	145.3	147.0	143.7	159.8	159.9
	2	222.0	238.0	234.1	240.3	243.2
	3	712.0	768.1	754.4	790.6	798.8
	4	774.2	812.1	801.4	853.6	855.8
	5	997.0	1038.0	1054.	1080.4	1085.0

Tableau 5.10 Fréquences propres ($f = \omega/2\pi$) de vibrations libres de panneaux composites.

Chapitre 6 Modèle discret de coque non-linéaire géométrique. Formulation et évaluation

6.1 Introduction

Dans tout les problèmes discutés précédemment, on a implicitement supposé que tous deux, déplacements et déformations développés dans les structures sont petits, en termes pratiques cela veut dire que la géométrie des éléments demeure fondamentalement inchangée durant le processus de chargement et, au premier ordre infinitésimal. Une approximation linéaire des déformations peut être utilisée.

En pratique de telles suppositions manquent fréquemment de régularité, les structures coques soumises à des charges externes, présentent des comportements très différents lorsque la non-linéarité géométrique devient importante. L'analyse non-linéaire et la localisation de la limite et les points de bifurcation sont des étapes importantes d'une étude complète et rigoureuse. Une étude bibliographique très détaillée sur la non-linéarité est présentée par Frey [235]. Il a présenté les progrès, qui ont permis aux chercheurs de résoudre les problèmes non-linéaires. Argyris et al [236] ont été parmi les premiers qui se sont penchés sur la non-linéarité géométrique pour laquelle ils ont proposé et adopté le principe. Dans la littérature, on peut trouver de nombreux articles consacrés aux éléments de coque à facettes planes et qui sont fondés généralement sur le concept du Kirchhoff. Vu le caractère épais de quelques structures coques et qui exige la prise en compte de l'effet du cisaillement transverse, les hypothèses de Mindlin demeurent une nécessité dans les développements futurs. Selon cette thématique, un modèle coque basé sur un concept discret de Mindlin modifié a été développé récemment [4]. La bonne performance de ce modèle à travers les cas-tests linéaires de coque et les résultats satisfaisants, obtenus, dans le domaine non-linéaire, sur la version "triangle à trois nœuds" du modèle DDM [208], nous ont motivé pour étendre notre approche aux applications non-linéaires. Nous proposons dans les sections suivantes de développer le modèle non-linéaire géométrique de coque courbe à 4 nœuds DMQS pour un matériau homogène isotrope, avec l'hypothèse des petites déformations élastiques, en formulation lagrangienne actualisée à chaque itération.

6.2 Formulation variationnelle lagrangienne actualisée à chaque itération (FLAI)

Dans la formulation Lagrangienne actualisée à chaque itération, nous faisons intervenir une configuration de référence non déformé (rigide) C^R définie à partir de la configuration C^i à l'itération i . Ainsi les grands déplacements (et les rotations) entre

C° et C^R ne représentent qu'un mouvement de corps rigide, seuls les petits déplacements (et les rotations) entre C^R et C^i contribuent aux déformations et permettent des simplifications importantes dans les expressions des déformations et du principe de travaux virtuels. Ce dernier peut être s'écrire:

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = \int_{V^R} (\text{Tr}[E^*][S]) dV^R - \int_{V^R} \langle u_q^* \rangle \{f\} dV^R = 0, \quad \forall u_q^* \text{ C.A} \quad (6.1)$$

Avec $[E^*]$ est le tenseur des déformations virtuelles de Green -Lagrange (avec C^R comme configuration de référence). Le tenseur $[S]$ est celui des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce.

W_{int} s'écrit en fonction des tenseurs gradients de déformation réelle et virtuelle $[F]$ et $[F^*]$ respectivement ainsi:

$$W_{\text{int}} = \int_{V^R} (\text{Tr}[F^*][S][F]^T) dV^R \quad (6.2)$$

Avec les hypothèses des petites déformations, d'où on peut écrire $[S] \approx [\sigma_i]$ et $[E^*] \approx [\varepsilon_i^*] \approx \frac{1}{2}([L_i^*] + [L_i])$.

Afin de résoudre le problème non linéaire par la méthode de Newton-Raphson, nous obtenons d'après les expressions (Equations 6.1 et 6.2) l'accroissement de W_{int} qui nous permettra de définir la matrice tangente due aux forces internes, et qui est donné par:

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{int}} &= \int_{V^R} (\text{Tr}[E^*][\Delta S] + [\Delta E^*][S]) dV^R \\ &= \int_{V^R} (\text{Tr}[\varepsilon_i^*][\Delta \sigma_i] + \text{Tr}([F^*][S][\Delta F]^T)) dV^R \end{aligned} \quad (6.3)$$

ΔW_{int} est représenté comme la somme de deux termes: une partie linéaire et une deuxième partie dite géométrique.

$$\Delta W_{\text{int}} = \Delta W^l + \Delta W^g \quad (6.4)$$

On aura donc sous forme discrétisée:

$$\Delta W_{\text{int}} = \sum_{V^e} \Delta W^e = \sum_{V^e} \langle u_n^* \rangle [k_i^e] \{\Delta u_n\} \quad (6.5)$$

Avec

$$[k_i^e] = [k_l^e] + [k_o^e] \quad (6.6)$$

$[k_l^e]$: étant la matrice de rigidité linéaire

$[k_o^e]$: étant la matrice de rigidité géométrique (des contraintes initiales).

6.2.1 La matrice de rigidité linéaire

La matrice k_l correspond à la matrice de rigidité déjà développée pour l'élément DMQS en domaine linéaire (chapitre 4). Une version primitive de cet élément sera déduite à partir de l'expression (4.122) afin de l'implanter dans l'étude non linéaire. Cela se traduit par l'omission de la partie zigzag.

6.2.2 La matrice de rigidité géométrique de l'élément DMQS

Pour le calcul de k_l on se limitera à l'évaluation de k_o . Cette matrice de rigidité géométrique provient de la variation du second membre $Tr\left([F^{*i}] [S^i] [\Delta F^i]^T\right)$ (équation 6.3), que l'on peut écrire sous la forme $Tr\left([L^{*i}] [\sigma_i] [\Delta L^i]^T\right)$ où $[L_i]$ est le tenseur gradient des déplacements dans la configuration actuelle, d'où on peut écrire:

$$\Delta W^g = \int_{V^i} Tr\left([L^i] [\sigma_i] [\Delta L^i]^T\right) dV^i = \langle u_n^* \rangle [k_o^i] \langle \Delta u_n \rangle \quad (6.7)$$

En utilisant les propriétés des traces [218], la définition de la matrice géométrique est donnée, selon [237], par:

$$k_o^i = \sum_{k=1}^3 \int_{A_k^i} \left([\overline{M}_0^i]^T [EF_1^i] [\overline{M}_0^i]_k \right) dA^i, \quad k = 1, 3 \quad (6.8)$$

L'expression des matrices $[EF_1^i]_k$ $[\overline{M}_0^i]_k$ sont données par:

$$\begin{aligned} [\overline{M}_0^i]_1 &= \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle N_{j,x} & 0 & 0 \\ \dots \langle t_1 \rangle N_{j,y} & 0 & 0 \dots j = 1, 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\overline{M}_0^i]_2 = \begin{bmatrix} \langle t_2 \rangle N_{j,x} & 0 & 0 \\ \dots \langle t_2 \rangle N_{j,y} & 0 & 0 \dots j = 1, 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\overline{M}_0^i]_3 &= \begin{bmatrix} \langle n \rangle N_{j,x} & 0 & 0 \\ \dots \langle n \rangle N_{j,y} & 0 & 0 \dots j = 1, 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.9)$$

avec

$$\begin{aligned} N_{j,x} &= N_{j,\xi} C_{11}^0 + N_{j,\eta} C_{21}^0 \\ N_{j,y} &= N_{j,\xi} C_{12}^0 + N_{j,\eta} C_{22}^0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$[EF_1^i] = \int_{-h/2}^{h/2} [o_t^i] dz = \begin{bmatrix} N_x^i & N_{xy}^i & T_x^i \\ N_{xy}^i & N_{yy}^i & T_y^i \\ T_x^i & T_y^i & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Rappelons que les efforts normaux uniquement sont pris en considération dans le calcul de la matrice géométrique (équation 6.8).

6.2.3 Vecteur de forces résiduelles

La discrétisation par éléments finis donne une représentation algébrique de l'équation (6.1) sous forme de vecteur résidu $\{R\}$ de telle sorte que:

$$W^i = \sum_{V^e} \langle u_n^* \rangle \{r^i\} = \langle U_n^* \rangle \{R^i\} \quad (6.12)$$

Avec $\{r\}$ le vecteur résidu élémentaire défini par:

$$\{r^i\} = \{f_{\text{int}}^i\} - \{f_{\text{ext}}^i\} \quad (6.13)$$

$\{f_{\text{ext}}^i\}$ est le vecteur forces nodales équivalentes externes.

$\{f_{\text{int}}^i\}$ est le vecteur forces nodales équivalentes internes, il est défini ainsi:

$$\{f_{\text{int}}^i\} = \int_{A_i^i} \left([B_m^i]^T \{N^i\} + [B_f^i]^T \{M^i\} + [B_c^i]^T \{T^i\} \right) dA^i \quad (6.14)$$

6.3 Présentation et discussion des résultats

Nous présentons dans la présente section quelques tests de validation de l'élément DMQS en comportement non linéaire géométrique. Les exemples étudiés sont choisis de manière à confronter nos résultats avec ceux déjà trouvés par des modèles qui se différencient par la prise en compte de l'effet de cisaillement dans leurs formulations. Les résultats sont comparés avec d'autres éléments finis établis par différentes formulations Lagrangiennes, en faisant chaque fois référence à quelques résultats théoriques. Les exemples traitent des structures avec différentes géométries et qui présentent des comportements divers. Il s'agit d'une plaque en porte à faux, un panneau cylindrique articulé sur les côtés droits avec deux rapports d'élancement L/h , un autre panneau encastré sur les contours circonférentiels, et finalement la structure de l'hémisphère pincé soumise à des charges opposées. Les techniques de pilotage utilisées dépendent étroitement des points limites éventuellement rencontrés dans chaque cas. Rappelons que la résolution du système non linéaire est faite par la méthode de Newton-Raphson standard.

6.3.1 Poutre console sous chargement de flexion

Ce test a été effectué sur une poutre cantilever soumise à un effort de cisaillement à son extrémité libre (voir figure 6.1). Les paramètres $E = 1,2 \text{ MPa}$ et $\nu=0$ sont attribués à ce modèle élastique isotrope avec les dimensions suivantes: longueur $L=10 \text{ m}$, largeur $b = 1 \text{ m}$, épaisseur $h=0,1 \text{ m}$. Ce problème présente de grande importance du fait qu'il concerne les grands déplacements et les grandes rotations ainsi que la mise en évidence du phénomène de blocage en membrane. Nous étudions dans le présent cas, l'effet du maillage et celui du nombre de pas de chargement sur la qualité des résultats numériques envisagés.

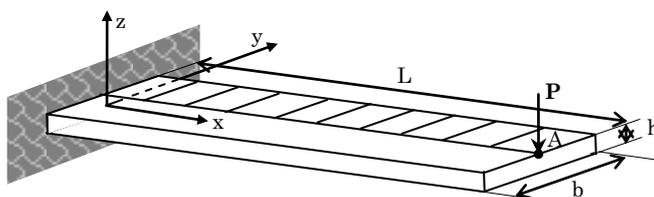


Figure 6.1 Poutre console sous chargement de flexion, géométrie et chargement.

L'influence du nombre d'éléments sur la convergence des déplacements U et W au point A est étudiée par trois types de maillage régulier. Suite à la symétrie de la plaque, seule la moitié est considérée avec 10×1 , 20×1 et 40×1 éléments rectangulaires. Les chargements appliqués sur la structure sont utilisés comme variables prescrites (la technique de pilotage en charge) en adoptant un nombre d'incrément égal à 10 et un critère d'arrêt correspond à $\varepsilon = 10^{-4}$. Nous évoquons les résultats calculés par les éléments DKT15 et T3 γ 15 développés dans le travail [237]. Les résultats théoriques obtenus par Timoshenko et Gere [238] sont également données à titre de référence.

Tous les résultats des déplacements pour les 10 niveaux de charge sont présentés sur les tableaux (6.1) et (6.2). L'examen des valeurs du premier niveau de charge $p=1$ pour tous les type de maillage montre la ressemblance de tous les éléments. Une légère distinction en faveur des éléments DMQS et DKT15 est constatée dans le cas du maillage le plus fin (40 éléments). Néanmoins, avec le maillage de 10 éléments, la convergence de l'élément T3 γ 15 vers les valeurs (U et W) du dernier niveau de charge s'emble plus rapide que les autres éléments. Cela s'explique, peut être par la performance des deux premiers éléments liée d'autant plus au domaine linéaire qu'on s'en éloigne. Toutefois, en raffinant le maillage, tous les éléments convergent vers la même valeur qui correspond au dernier niveau de charge. Une petite supériorité de l'élément DMQS est constatée au niveau du déplacement axial U (tableau 6.2). D'après ces remarques, nous pouvons conclure que le modèle développé reproduit

Chapitre 6. Modèle discret de coque non-linéaire géométrique.
Formulation et évaluation.

numériquement un excellent comportement de la structure avec un minimum d'élément.

p	10 éléments			20 éléments			40 éléments			Timoshenko et Gere [238]
	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	
1	.328	.328	.329	.328	.330	.329	.329	.331	.329	.300
2	.519	.517	.518	.518	.519	.518	.518	.519	.518	.489
3	.622	.618	.620	.620	.620	.619	.619	.620	.619	.599
4	.683	.678	.681	.681	.680	.680	.680	.680	.680	.664
5	.724	.718	.721	.721	.720	.720	.720	.720	.720	.707
6	.753	.745	.749	.750	.748	.749	.749	.748	.748	.737
7	.774	.766	.771	.771	.769	.770	.770	.769	.770	.759
8	.791	.782	.787	.787	.786	.786	.787	.786	.786	.776
9	.804	.795	.801	.801	.799	.800	.799	.799	.799	.789
10	.816	.806	.812	.812	.810	.811	.811	.810	.810	.800

Tableau 6.1 Influence du maillage sur la convergence du déplacement transversal w

p	10 éléments			20 éléments			40 éléments			Timoshenko et Gere [238]
	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	
1	.068	.069	.069	.068	.070	.069	.069	.070	.069	.056
2	.182	.182	.183	.183	.184	.183	.183	.185	.184	.159
3	.277	.275	.277	.277	.278	.277	.277	.278	.278	.253
4	.350	.347	.349	.350	.350	.349	.350	.350	.350	.326
5	.407	.402	.405	.406	.407	.406	.406	.407	.406	.383
6	.453	.447	.450	.451	.451	.450	.451	.451	.451	.430
7	.489	.482	.487	.488	.488	.487	.487	.488	.487	.467
8	.520	.512	.517	.518	.518	.517	.518	.518	.518	.500
9	.546	.537	.543	.544	.544	.543	.544	.544	.543	.525
10	.568	.559	.565	.566	.566	.565	.566	.566	.565	.548

Tableau 6.2 Influence du maillage sur la convergence du déplacement axial U

	5 pas			10 pas			40 pas			100 pas		
p	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS
2	41.10	56.60	42,69	15.02	14.84	15,08	1.82	2.64	1,78	0.69	0.11	1,00
4	19.99	23.37	19,85	7.61	6.44	7,10	1.76	0.70	1,21	1.44	0.42	0,87
6	12.81	13.48	12,37	5.35	3.41	4,71	1.92	0.69	1,25	1.72	0.46	1,05
8	9.31	8.80	8,77	4.11	2.54	3,45	1.79	0.42	1,10	1.66	0.34	0,96
10	7.73	6.78	7,15	3.79	2.08	3,13	2.06	0.74	1,38	1.97	0.52	1,28

Tableau 6.3 Erreurs relatives sur le déplacement axial U pour les différents pas (10 éléments)

	5 pas			10 pas			40 pas			100 pas		
p	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS	DKT15	T3γ5	DMQS
2	14.94	17.79	14,96	6.20	5.78	5,93	1.57	0.96	1,28	1.22	0.71	0,99
4	6.11	5.42	5,61	2.98	2.16	2,48	1.60	0.92	1,08	1.52	0.85	1,00
6	3.65	2.07	2,97	2.19	1.19	1,66	1.73	0.92	1,18	1.69	0.90	1,15
8	2.59	0.77	2,01	1.98	0.85	1,43	1.86	0.92	1,30	1.85	0.94	1,30
10	2.25	0.33	1,66	2.00	0.76	1,45	2.00	0.98	1,48	2.04	1.00	1,48

Tableau 6.4 Erreurs relatives sur le déplacement transversal W pour les différents pas (10 éléments)

D'autre part, pour étudier l'influence du nombre de pas sur la précision de l'élément DMQS, Les mêmes paramètres du problème précédent ont été adoptés en utilisant un maillage de 10 éléments. Quatre incréments de charge identiques de 5, 10, 40 et 100 ont été utilisés à cet effet. Les résultats numériques des déplacements U et W au point A et ceux relatifs aux éléments déjà mentionnés, et qui sont figurés par leurs erreurs relatives par rapport aux valeurs de Timoshenko et Gere [238] sont reportés dans les tableaux (6.3) et (6.4). Les résultats obtenus par le modèle DMQS présentent des valeurs de même ordre que les autres éléments triangulaires présentés par Hammadi [237], rappelons que ces éléments ont montré une bonne précision par rapport aux deux meilleurs éléments de l'étude de Fafard, reportée dans [239]. Considérons les remarques précitées, L'élément DMQS montre une excellente aptitude à représenter les grands déplacements et les grandes rotations avec une formulation lagrangienne actualisée à chaque itération.

6.3.2 Panneau cylindrique articulé

Ce test a été traité par nombreux auteurs et en particulier par Sze et al. [240]. Il s'agit d'un panneau cylindrique simplement supporté sur les deux cotés droits. La coque peu profonde est soumise à une charge centrale concentrée. Les caractéristiques géométriques et matérielles du problème sont représentées dans la figure 6.2. L'analyse a été faite pour deux rapports d'aspect ($h=12,7$ mm et $h=6.35$ mm). Vu la double symétrie du problème, nous considérons que le quart de la coque en utilisant un maillage de (10×12 éléments). Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par d'autres types d'éléments.

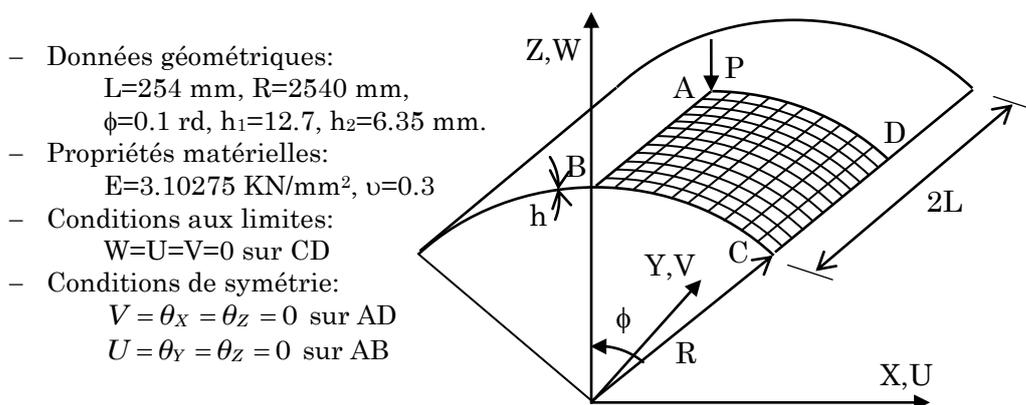


Figure 6.2 Panneau cylindrique articulé, géométrie et données.

DMQS			DKT15 [237]		T3γ15 [237]		Surana [242]	
W_A	P	W_B	P	W_B	P	W_B	P	W_B
-2,5	-0.8566	-0.5290	-0.8613	-0.5580	-0.9168	-0.6204	-0.8859	-0.5409
-5,0	-1.5066	-1.2514	-1.5094	-1.2958	-1.5883	-1.4419	-1.5186	-1.2672
-7,5	-1.9559	-2.2848	-1.9547	-2.3300	-2.0072	-2.5899	-1.9619	-2.3239
-10,0	-2.1880	-3.8363	-2.1845	-3.8610	-2.2220	-4.2839	-2.1848	-3.9201
-12,5	-2.1363	-6.3603	-2.1379	-6.3117	-2.1083	-6.9911	-2.1207	-6.5234
-15,0	-1.5957	-11.0421	-1.6212	-10.8228	-1.5056	-11.8186	-1.5584	-11.3711
-17,5	-0.7359	-17.4203	-0.7498	-17.2580	-0.7239	-17.6831	-0.7071	-17.7841
-20,0	-0.5466	-20.9167	-0.5541	-20.7638	-0.5741	-20.9566	-0.5500	-21.1842
-22,0	-0.8263	-22.8231	-0.8313	-22.6869	-0.8796	-22.8588	-0.8613	-23.0456
-25,0	-1.4336	-24.0596	-1.4443	-23.9620	-1.5393	-24.1463	-1.5118	-24.2556
-27,5	-2.3353	-24.9529	-2.3669	-24.9137	-2.5374	-25.1129	-2.4757	-25.1322
-30,0	-3.5303	-25.6525	-3.6068	-25.6905	-3.8863	-25.9004	-3.7578	-25.8237

Tableau 6.5 Panneau cylindrique articulé ($h_1 = 12.7\text{mm}$), maillage 4×6

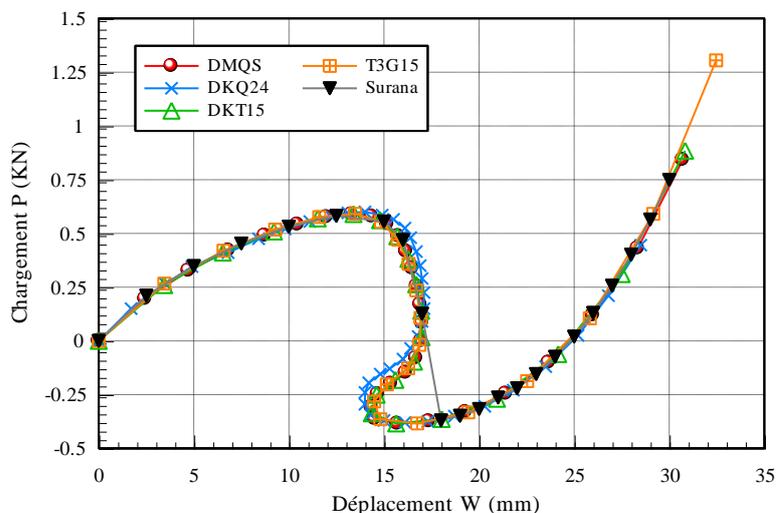


Figure 6.4 Convergence du déplacement au point A ($h=6.35$ mm)

DMQS		DKT15 [237]			T3 γ 15 [237]		Surana [242]	
W_A	P	W_B	P	W_B	P	W_B	P	W_B
-2,5	0.8545	-0.4725	-0.8781	-0.5557	-0.8816	-0.5564	-0.8859	0.5409
-5,0	1.5013	-1.1315	-1.5371	-1.3106	-1.5419	-1.3134	-1.5186	1.2672
-7,5	1.9517	-2.0941	-1.9862	-2.3853	-1.9906	-2.3924	-1.9619	2.3239
-10,0	2.1935	-3.5659	-2.2106	-3.9915	-2.2129	-4.0072	-2.1848	3.9201
-12,5	2.1652	-5.9844	-2.1422	-6.5794	-2.1406	-6.6134	-2.1207	6.5234
-15,0	1.6590	-10.5406	-1.5782	-11.2961	-1.5691	-11.3736	-1.5584	11.3711
-17,5	0.7234	-17.4527	-0.7113	-17.5860	-0.7053	-17.6625	-0.7071	17.7841
-20,0	0.5184	-21.1058	-0.5239	-21.0261	-0.5238	-21.0788	-0.5500	21.1842
-22,0	0.8042	-22.9860	-0.8141	-22.9248	-0.8174	-22.9674	-0.8613	23.0456
-25,0	1.4207	-24.1764	-1.4464	-24.1684	-1.4537	-24.2050	-1.5118	24.2556
-27,5	2.3360	-25.0249	-2.3918	-25.0759	-2.4050	-25.1084	-2.4757	25.1322
-30,0	3.5510	-25.6825	-3.6538	-25.7953	-3.6757	-25.8243	-3.7578	25.8237

Tableau 6.6 Panneau cylindrique articulé ($h_1 = 12.7$ mm), maillage 10×12

Chapitre 6. Modèle discret de coque non-linéaire géométrique.
Formulation et évaluation.

DMQS		DKQ24[241]		DKT15 [237]		T3 γ 15 [237]		SURANA [242]	
W_A	P (KN)	W_A	P (KN)	W_A	P (KN)	W_A	P (KN)	W_A	P (KN)
0.0000	.0000	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0	0.0000
-2.4397	.1953	-1.7	-0.150	-3.4395	-0.2590	-3.4502	-0.2663	-2.5	-0.2101
-4.7239	.3268	-3.5	-0.265	-6.5276	-0.4103	-6.5631	-0.4198	-5.0	-0.3479
-6.8243	.4202	-4.9	-0.345	-9.2189	-0.5086	-9.2800	-0.5178	-7.5	-0.4528
-8.7334	.4899	-6.8	-0.410	-11.5160	-0.5694	-11.5940	-0.5761	-10.0	-0.5319
-10.4514	.5414	-8.4	-0.475	-13.3970	-0.5897	-13.4743	-0.5910	-12.5	-0.5817
-11.9754	.5752	-9.8	-0.520	-14.7935	-0.5611	-14.8463	-0.5541	-15.0	-0.5555
-13.2892	.5888	-11.1	-0.555	-15.6995	-0.4858	-15.7238	-0.4701	-16.0	-0.4694
-14.3627	.5789	-12.2	-0.580	-16.2825	-0.3809	-16.2948	-0.3582	-17.0	-0.1264
-15.1722	.5438	-13.1	-0.595	-16.6943	-0.2627	-16.6971	-0.2344	-18.0	0.3701
-15.7456	.4875	-14.0	-0.600	-16.9561	-0.1395	-16.9264	-0.1067	-19.0	0.3486
-16.1586	.4168	-14.9	-0.585	-16.9831	-0.0166	-16.8616	0.0186	-20.0	0.3168
-16.4762	.3380	-15.5	-0.565	-16.5853	0.0969	-16.2688	0.1275	-21.0	0.2636
-16.7277	.2548	-16.1	-0.525	-15.6016	0.1817	-15.1549	0.2025	-22.0	0.2205
-16.9116	.1696	-16.4	-0.480	-14.6166	0.2506	-14.4795	0.2817	-23.0	0.1542
-17.0029	.0838	-16.7	-0.415	-14.3570	0.3371	-14.8100	0.3648	-24.0	0.0744
-16.9544	-.0006	-16.9	-0.350	-15.6401	0.3847	-16.7449	0.3839	-25.0	-0.0198
-16.6933	-.0800	-17.0	-0.290	-18.0355	0.3637	-19.4317	0.3327	-26.0	-0.1298
-16.1456	-.1479	-17.1	-0.225	-20.9427	0.2698	-22.5282	0.1871	-27.0	-0.2565
-15.3684	-.1992	-17.1	-0.150	-24.1609	0.0620	-25.8250	-0.1048	-28.0	-0.4011
-14.6811	-.2477	-17.0	-0.090	-27.5001	-0.3102	-29.1605	-0.5909	-29.0	-0.5647
-14.3442	-.3073	-16.8	-0.020	-30.8339	0.8845	-32.4612	-1.3050	-30.0	-0.7485
-14.5221	-.3628	-16.4	0.035						
-15.7111	-.3850	-16.0	0.085						
-17.3654	-.3741	-15.3	0.130						
-19.2891	-.3311	-14.8	0.155						
-21.4100	-.2457	-14.2	0.195						
-23.6644	-.1013	-14.0	0.240						
-25.9920	.1194	-14.0	0.295						
-28.3467	.4302	-14.3	0.345						
-30.7021	.8418	-15.0	0.370						
		-16.1	0.380						
		-17.3	0.375						
		-18.7	0.350						
		-20.3	0.305						
		-21.8	0.230						
		-23.5	0.120						
		-25.2	-0.025						
		-26.8	-0.210						
		-28.5	-0.445						

Tableau 6.7 Panneau cylindrique articulé ($h_1 = 6.35$ mm), maillage 10×12

6.3.3 Hémisphère pincé

Le problème de l'hémisphère troué est un test bien connu et largement cité dans la littérature. Il s'agit d'une coque avec une ouverture de 18° soumise à l'action de quatre forces ponctuelles diamétralement opposées, comme le montre la figure 6.5. Etant donnée la symétrie du problème, un quart de la structure est discrétisé avec un maillage régulier de 16×16 éléments. Une méthode de contrôle en charge et schéma itératif de Newton-Raphson ont été utilisées avec un critère d'arrêt de convergence de 10^{-3} .

Ce problème est déjà étudié par Ammar et al. [243] dont l'élément développé est le Q4y24 à facette plane avec cisaillement transverse et à quatre nœuds et 6 ddl/nœud. Pol [244] qui a utilisé un élément triangulaire à facette plane noté DKT18 et également Hammadi [237] avec les deux éléments DKT15 et T3y15, ont traité amplement ce problème.

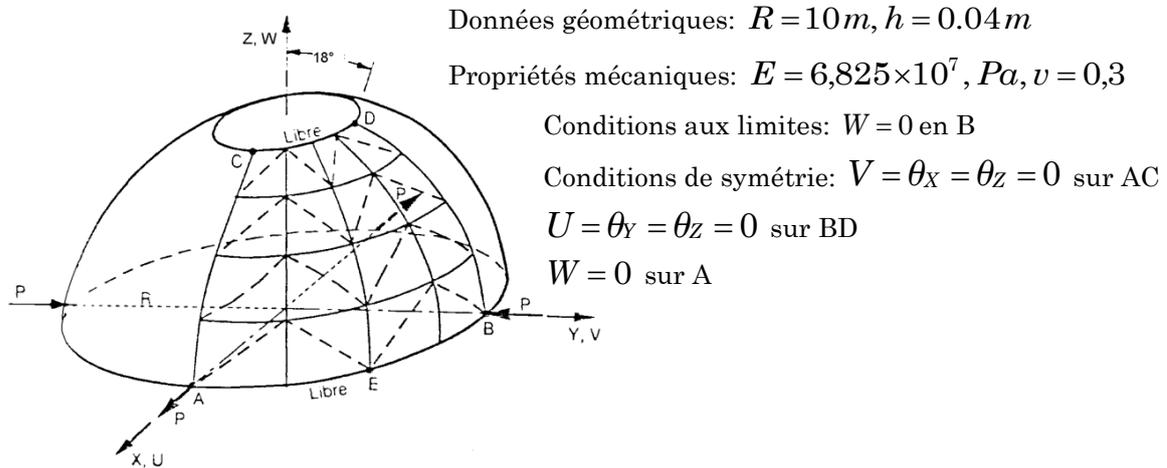


Figure 6.5 Hémisphère pincé. Géométrie et données [218]

Les courbes 6.6 et 6.7 montrent l'évolution respectivement U du point A et du déplacement V du point B, en fonction de la charge ($P=0$ à 400 N). Dans les deux positions, nous constatons une très bonne cohérence entre les résultats obtenus par l'élément DMQS modifié et ceux donnés par les éléments triangulaires. Or, l'élément Q4y24 montre des valeurs légèrement distinctes de celles obtenues par d'autres éléments. La déformée de la structure complète pour deux niveaux de charge est illustrée sur la figure 6.8. Pour $F=400$ un chevauchement des surfaces est bien représenté et qui confirme les résultats obtenus dans [237].

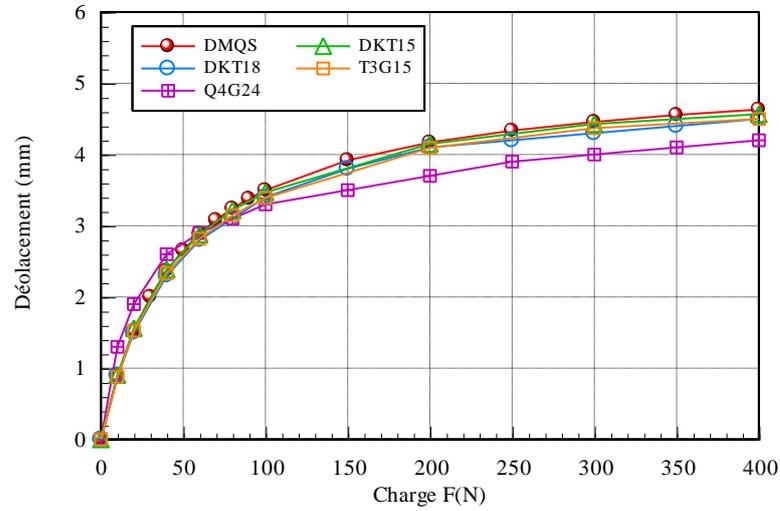


Figure 6.6 Déplacement U_A , maillage 16×16

Charge F	DMQS	DKT18[244]	Q4 γ 24 [243]	DKT15 [237]	T3 γ 15[237]
10	0.8679	0.9	1.3	0.903	0.879
20	1.5202	1.5	1.9	1.562	1.526
30	2.0008	-	-	-	-
40	2.3668	2.3	2.6	2.384	2.332
50	2.6548	-	-	-	-
60	2.8875	2.8	2.9	2.879	2.817
70	3.0798	-	-	-	-
80	3.2412	3.1	3.1	3.218	3.147
90	3.3788	-	-	-	-
100	3.4977	3.4	3.3	3.467	3.389
150	3.9185	3.8	3.5	-	-
200	4.1688	4.1	3.7	4.148	4.093
250	4.3353	4.2	3.9	-	-
300	4.4565	4.3	4.0	4.429	4.369
350	4.5542	4.4	4.1	-	-
400	4.6307	4.5	4.2	4.566	4.500

Tableau 6.8 Hémisphère pincé, déplacement (U_A), maillage 16×16

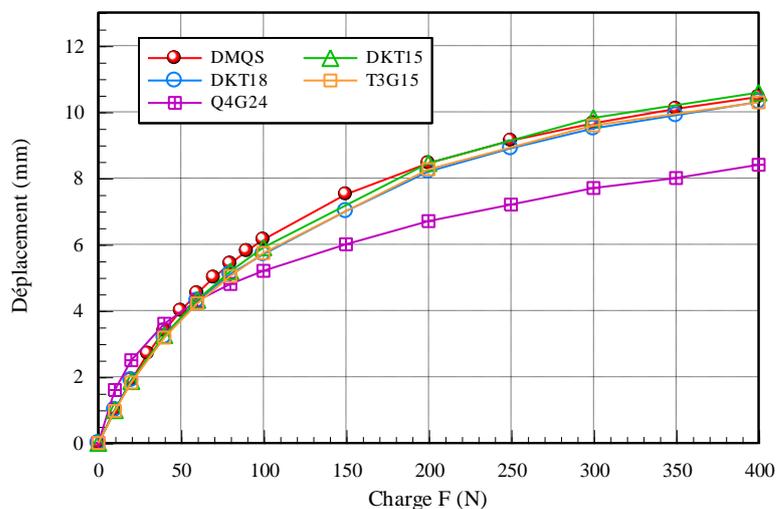
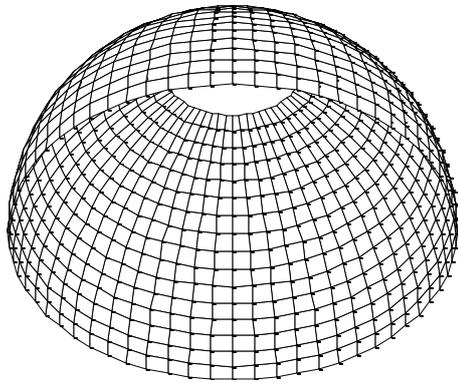


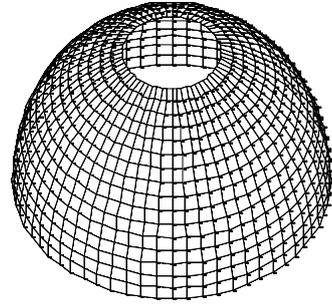
Figure 6.7 Déplacement ($-U_B$), maillage 16×16

Charge F	DMQS	DKT18 [244]	Q4G24 [243]	DKT15 [237]	T3G15 [237]
10	0.9828	1.0	1.6	0.989	0.966
20	1.9012	1.9	2.5	1.868	1.827
30	2.7002	-	-	-	-
40	3.3918	3.2	3.6	3.256	3.181
50	3.9949	-	-	-	-
60	4.5256	4.3	4.3	4.320	4.213
70	4.9968	-	-	-	-
80	5.4184	5.1	4.8	5.183	5.044
90	5.7980	-	-	-	-
100	6.1420	5.7	5.2	5.906	5.735
150	7.5083	7.0	6.0	-	-
200	8.4494	8.2	6.7	8.451	8.264
250	9.1327	8.9	7.2	-	-
300	9.6539	9.5	7.7	9.817	9.588
350	10.0923	9.9	8.0	-	-
400	10.4486	10.3	8.4	10.582	10.287

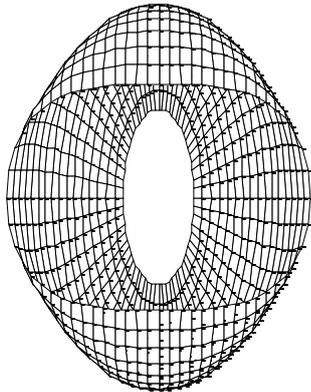
Tableau 6.9 Hémisphère pincé, déplacement ($-V_B$), maillage 16×16



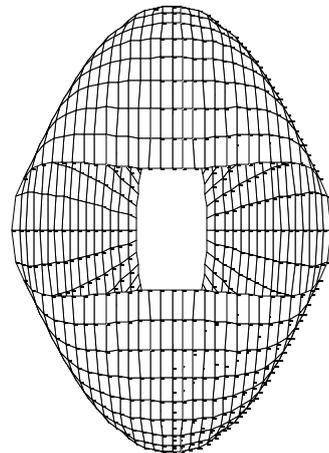
Configuration initiale
(azimut=0°, élévation=-60°)



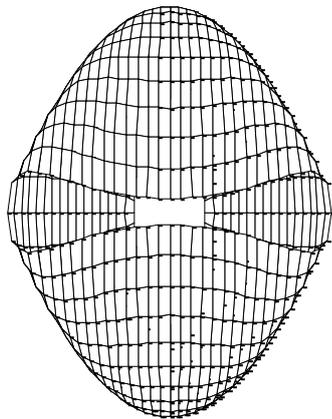
Configuration initiale
(azimut=0°, élévation=60°)



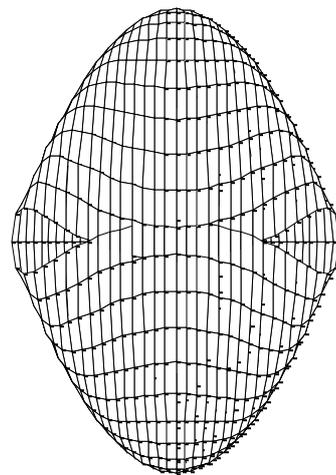
Déformée pour F=100



Déformée pour F=200



Déformée pour F=300



Déformée pour F=400

Figure 6.8 Déformées de l'hémisphère pincé

6.3.4 Panneau encastré

Dans cet exemple, nous analysons le comportement non linéaire géométrique d'un panneau cylindrique encastré sur les deux bords curvilignes et soumis à une charge centrale concentrée. La géométrie et les caractéristiques mécaniques sont présentées sur la figure (6.9). La double symétrie de la structure permet de ne considérer que le quart du panneau cylindrique. Deux maillages réguliers sont utilisés: 4×6 et 10×12 éléments (6 et 12 éléments respectivement sur les cotés droits) afin d'évaluer l'influence du raffinement de maillage sur les résultats.

Ce problème a été étudié par Brendel et Ramm [245] avec un élément quadrilatère à 16 nœuds. Batoz et Dhatt [246] ont traité le même test avec un élément à trois nœuds basé sur une formulation Lagrangienne actualisé (FLA) ou actualisée approchée (FLAA) [247]. D'autre part, plusieurs chercheurs ont présenté ce test dans un contexte d'évaluation de leurs éléments finis, citant par exemple les travaux consécutifs de Jaamei [248], Fafard [249], Ammar [243] ainsi que Hammadi [237].

L'analyse est faite en imposant un déplacement au point A égale à 0,11 m suivant l'axe z avec 11 incréments égaux. Une méthode de résolution de Newton-Raphson standard a été utilisée pour un critère d'arrêt de valeur $\varepsilon=10^{-3}$.

- Données géométriques:
 $L=3$ m, $R=2.5$ m,
 $\phi=\pi/8$ rd, $h=0.01$ m.
- Propriétés matérielles:
 $E=1.0 \times 10^7$ KN/m², $\nu=0.3$
- Conditions aux limites:
 $W=U=V=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$ sur BC
- Conditions de symétrie:
 $V=\theta_x=\theta_z=0$ sur AD
 $U=\theta_y=\theta_z=0$ sur AB

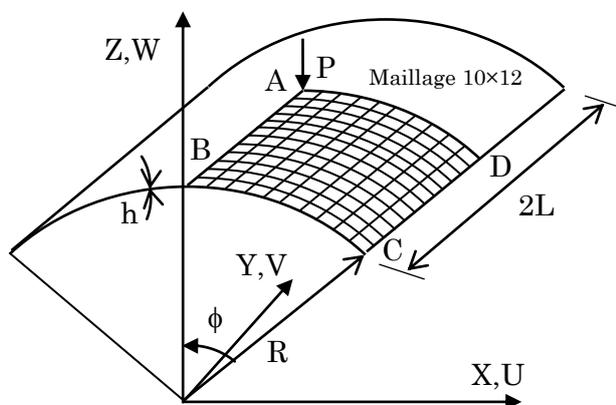


Figure 6.9 Panneau cylindrique articulé, géométrie et données.

Les charges correspondantes à chaque pas obtenus par le modèle DMQS sont confrontées à celles calculées par les éléments triangulaires DKT15 et T3 γ 15 [237] et l'élément quadrilatère [245] (avec 13 incréments de valeur égale à 0,8575 m). Les courbes reportées sur la figure (6.10) montrent une excellente convergence du modèle DMQS qui se déduit facilement de la concordance des résultats exprimés pour les deux types de maillage. En revanche, la convergence de l'élément T3 γ 15, dans ce cas,

s'avère un peu lente que celle des autres éléments. Toutefois, tous les éléments convergent vers les résultats de référence [245] pour un maillage raffiné.

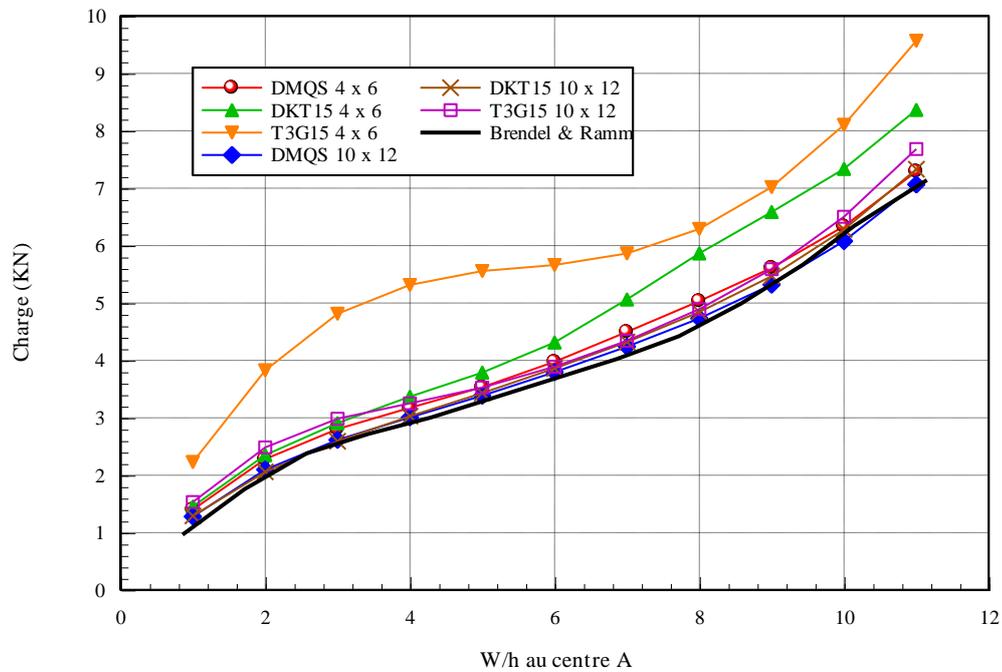


Figure 6.10 Panneau encasturé, influence du nombre d'éléments.

Conclusion générale et perspectives

Le présent travail est une contribution au développement des éléments finis spéciaux dans la modélisation des structures plaques/ coques composites. Un modèle variationnel discret est enrichi par des termes additionnels de type zigzag afin de reproduire une cinématique adéquate au développement de deux éléments finis simple et robustes. Ces termes sont considérés comme valeurs ajoutées aux modèles standards du fait qu'ils contribuent à pallier l'insuffisance liée à la limite en précision des contraintes et la dépendance vis à vis de la correction du cisaillement transverse. Il s'agit d'introduire dans un nouveau contexte, des termes de zigzag dans un modèle en déplacement, en préservant l'hypothèse de Mindlin modifiée. Ce choix est justifié d'une part, par la robustesse et les bonnes performances globales du modèle élément fini déjà élaboré par notre groupe et qui conçoit le support de présents développements. Et d'autre part, la puissance du concept de zigzag qui constitue une technique prometteuse dans le domaine du développement des éléments finis pour ce type des structures.

L'étude doctorale consiste aux développements de deux versions améliorées des éléments finis des plaques/coques multicouches. Les éléments sont des quadrilatères à quatre nœuds basés sur le modèle de Mindlin en déplacement en utilisant deux hypothèses discrètes modifiées. Concernant la première hypothèse, on considère l'équation cinématique de déformation en cisaillement comme une intégrale de contour, projeté ensuite sur chaque côté. Cette technique permet de franchir le problème de blocage en cisaillement sans utiliser de fonctions bulles ou un schéma d'intégration réduite. La seconde est une nouvelle hypothèse mécanique discrète modifiée de Mindlin qui nécessite deux lois de comportements de flexion-cisaillement et deux équations d'équilibre de plaques liées aux mêmes comportements pour définir l'effort tranchant. Elle a le principal avantage d'éliminer les degrés de liberté de rotation locaux, initialement introduits sur les milieux des côtés, afin de leur donner une allure quadratique. Ainsi, les deux éléments baptisés DMQP/ml et DMQS/ml ont seulement trois et six degrés de liberté respectivement, et ont été validés avec une gamme assez large de structures. Ces éléments présentent un bon comportement global et permettent d'obtenir des avantages par rapport à ceux trouvés dans la littérature. Toutefois, afin de répondre à certaines exigences concernant leurs réponses locales, qui sont partiellement vérifiées comme d'autres éléments du premier ordre, une forme en zigzag inspirée de l'approche Murakami-Reisser-Carrera a été incorporée dans le modèle DDM. Par conséquent, un nouveau modèle qui implique un

déplacement linéaire par morceaux est formulé. Les deux éléments finis correspondants baptisés DMQPz et DMQSZ comportent outre les variables cinématiques du modèle standard, des termes additionnels de type déplacement. Cette dernière formulation est élaborée sans faire recours à la technique de correction. Les tests de validation ont montrés une bonne cohérence de la deuxième version du modèle DDM avec les modèles d'ordre supérieur et ceux du premier ordre améliorés.

En dépit du caractère global (monocouche équivalente) de la majorité des modèles du premier ordre, le modèle DMQP s'avère avantageux dans la représentation des contraintes planes et une performance légèrement meilleure est montrée sur la version en zigzag. Contrairement au modèle des plaques, la contribution de l'effet de zigzag sur le comportement des coques composites est plus complexe à analyser. En effet, le modèle DMQS seul possède une bonne capacité à reproduire le comportement global de ce type des structures. Cependant lorsque la fonction de zigzag est ajoutée, le comportement des coques multicouches ne permet pas de distinguer explicitement l'effet des termes secondaires sur le modèle primitif. Or, comme les autres modèles d'ordre supérieur, dont la performance est spécifique, le modèle DMQSZ dépend des conditions géométriques et mécaniques de la structure à étudier (rapport d'élanement longueur/épaisseur, nombre de couches, rapport d'hétérogénéité, type de charges extérieures, condition aux limites...).

Finalement, et comme c'est prévu au début de la thèse, les routines développées dans le code Reflex sont implémentées dans le code de calcul industriel ABAQUS. On s'est contenté essentiellement de l'aspect linéaire du modèle DMQS multicouches/sandwichs. Une interface graphique a été élaborée également avec le post- traitement du logiciel ABAQUS, ce travail ainsi que l'adaptation du modèle à la géométrie non-linéaire est le couronnement de cette thèse.

En guise de perspectives à ce travail doctoral de recherche, nous proposons d'étendre l'analyse non-linéaire aux cas des structures composites multicouches, en intégrant non seulement la fonction "Zigzag" mais aussi les aspects liés au comportement endommageable des matériaux sous sollicitations statiques et dynamiques (fatigue et choc).

Références bibliographiques

- [1] Katili I. Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque [Ph.D Thesis]: University of Technology of Compiègne, France; 1993.
- [2] Katili I. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields—part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:1885-908.
- [3] Ayad R. Contribution à la Modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. Application à des matériaux d'emballage [H.D.R]: University of Reims Champagne Ardenne; 2002.
- [4] Sakami S. Modélisation numérique des structures composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin) [Doctorat Thesis]: University of Reims Champagne Ardenne; 2008.
- [5] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Journal of Applied Mechanics*. 1986;53:661-6.
- [6] Tafla A. Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches [Ph.D Thesis]. France: University of Reims Champagne Ardenne; 2007.
- [7] Aboura Z, Talbi N, Ayad R. Une méthode d'homogénéisation adaptée au carton ondulé. research report University of Technologie of Compiègne; 2002.
- [8] Ayad R, Erre D, Hendou H, Odof S, Prudhomme JC. Adaptation du modèle DDM aux structures orthotropes. Application aux vibrations libres d'une plaque en carton ondulé. 16ème Congrès Français de Mécanique. Nice, France.
- [9] Robbins DH, Reddy JN. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:655-77.
- [10] Robbins DH, Reddy JN. Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. *Computers & Structures*. 1991;41:265-79.
- [11] Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*. 1973;30:495-507.
- [12] Seide P. An improved approximate theory for the bending of laminated plates. *Mechanics today*. 1980;5:451-66.
- [13] Barbero EJ. On a generalized laminate theory with application to bending, vibration, and delamination buckling in composite laminates. Virginia Polytechnic Inst. and State Univ., Blacksburg, VA (USA); 1989.
- [14] Barbero E, Reddy J, Teply J. An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990;29:1-14.
- [15] Bert CW. A critical evaluation of new plate theories applied to laminated composites. *Composite Structures*. 1984;2:329-47.
- [16] Noor AK, Burton WS. Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates. *Applied Mechanics Reviews*. 1989;42:1-13.
- [17] Noor AK, Burton WS. Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates. *Composite Structures*. 1990;14:233-65.
- [18] Di Sciuva M. A general quadrilateral multilayered plate element with continuous interlaminar stresses. *Computers & Structures*. 1993;47:91-105.

- [19] Jones RM. *Mechanics of Composite Materials*. New York: Mc Graw-Hill; 1975.
- [20] Whitney J, Pagano N. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1970;37:1031.
- [21] Giavotto V. Sulla meccanica di pannelli anisotropi ed eterogenei. *Istituto Lombardo (Memorie Sc. Mat.) XXV*; 1969. p. 437-80.
- [22] Whitney JM, Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *Journal of Sound and Vibration*. 1973;30:85-97.
- [23] Levinson M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*. 1980;7:343-50.
- [24] Murthy M. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. 1981;TP-1903.
- [25] Reddy JN. Simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1984;51:745-52.
- [26] Krishna Murty AV, Vellaichamy S. On higher order shear deformation theory of laminated composite panels. *Composite Structures*. 1987;8:247-70.
- [27] Librescu L, Khdeir A. Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part I--Stress and displacement. *Composite Structures*. 1988;9:189-213.
- [28] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A High-Order Theory of Plate Deformation---Part 2: Laminated Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1977;44:669-76.
- [29] Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2002;9:87-140.
- [30] Medwadowski SJ. A refined theory of elastic orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1958;25:437-43.
- [31] Yang PC, Norris CH, Stavsky Y. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1966;2:665-84.
- [32] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1951;18:31-8.
- [33] Koiter WT. *The Theory of Thin Elastic Shells*. Proceedings of First IUTAM Symposium, North-Holland 1960.
- [34] Vlasov BF. On the equations of Bending of plates. *Dokla Ak Nauk Azerbeijanskoi-SSR*. 1957;3:955-79.
- [35] Hildebrand F, Reissner E, Thomas G. *Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells*. D.C Washington: NACA; 1949.
- [36] Nelson RB, Lorch DR. A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1974;41:177-83.
- [37] Librescu L. *Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogeneous shell-type structures*: Springer; 1975.
- [38] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A High-Order Theory of Plate Deformation---Part 1: Homogeneous Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1977;44:663-8.
- [39] Bickford WB. A consistent higher order beam theory. *Development in Theoretical and Applied Mechanics*. 1982;11:137-50.
- [40] Reddy JN. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*. 1984;20:881-96.
- [41] Shi G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2007;44:4399-417.
- [42] Reddy JN. *Energy and variational methods in applied mechanics: With an introduction to the finite element method*: Wiley (New York); 1984.
- [43] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates- Theory and analysis*. Boca Raton, FL: CRC Press. 1997.

- [44] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;47:663-84.
- [45] Kant T. Numerical analysis of thick plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1982;31:1-18.
- [46] Rohwer K. Application of higher order theories to the bending analysis of layered composite plates. *International Journal of Solids and Structures*. 1992;29:105-19.
- [47] Ferreira AJM, Roque CMC, Jorge RMN. Static and free vibration analysis of composite shells by radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2006;30:719-33.
- [48] Kant T, Swaminathan K. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structures*. 2002;56:329-44.
- [49] Matsunaga H. Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures*. 2002;56:279-91.
- [50] Pagano NJ. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. *Journal of Composite Materials*. 1970;4:20-34.
- [51] Matsunaga H. A comparison between 2-D single-layer and 3-D layerwise theories for computing interlaminar stresses of laminated composite and sandwich plates subjected to thermal loadings. *Composite Structures*. 2004;64:161-77.
- [52] Zhen W, Wanji C. An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading. *Composite Structures*. 2006;73:99-109.
- [53] Zenkour AM. Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Composite Structures*. 2004;65:367-79.
- [54] Swaminathan K, Patil SS. Higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the stress analysis of antisymmetric angle-ply plates – analytical solutions. *Composite Structures*. 2007;80:595-608.
- [55] Cho M, Kim JS. Improved Mindlin plate stress analysis for laminated composites in finite element method. *AIAA journal*. 1997;35:587-90.
- [56] Wanji C, Zhen W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories. *Recent Patents on Mechanical Engineering*. 2008;1:29-44.
- [57] Ayad R, Dhatt G, Batoz JL. A new hybrid-mixed variational approach for Reissner–Mindlin plates. The MiSP model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998;42:1149-79.
- [58] Ayad R, Rigolot A, Talbi N. An improved three-node hybrid-mixed element for Mindlin/Reissner plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2001;51:919-42.
- [59] Ayad R, Rigolot A. An improved four-node hybrid-mixed element based upon Mindlin's plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;55:705-31.
- [60] Ayad R, Rigolot A. Un nouvel élément mixte-hybride naturel pour les coques courbes. Le modèle NHMiSP4. 16ème Congrès Français de Mécanique. Nice- France.
- [61] Briossilis D. The four node Co Mindlin plate bending elements reformulated. Part I: formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1993;107:23-43.
- [62] Bathe K-J, Dvorkin EN. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1985;21:367-83.
- [63] Lardeur P. Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal [Ph.D Thesis]: University of Technology of Compiègne, France; 1990.
- [64] Bouabdallah M. Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites [Ph.D Thesis]: University of Technology of Compiègne, France; 1992.

- [65] Auricchio F, Sacco E. A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999;44:1481-504.
- [66] Cen S, Long Y, Yao Z. A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates. *Computers & Structures*. 2002;80:819-33.
- [67] Belinha J, Dinis L. Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method. *Computers & Structures*. 2006;84:1547-59.
- [68] Moleiro F, Soares M, Mota Soares C, Reddy J. Mixed least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite plates. *Computers & Structures*. 2008;86:826-38.
- [69] Ayad R. Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement [Ph.D Thesis]: University of Technology of Compiègne, France; 1993.
- [70] Tafla A, Ayad R, Sedira L. A Mindlin multilayered hybrid-mixed approach for laminated and sandwich structures without shear correction factors. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*. 2010;19:725-42.
- [71] Ayad R, Talbi N, Ghomari T. Modified discrete Mindlin hypotheses for laminated composite structures. *Composites Science and Technology*. 2009;69:125-8.
- [72] Daghia F, de Miranda S, Ubertini F, Viola E. A hybrid stress approach for laminated composite plates within the First-order Shear Deformation Theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2008;45:1766-87.
- [73] de Miranda S, Ubertini F. A simple hybrid stress element for shear deformable plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006;65:808-33.
- [74] Carrera E. C^0 Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996;39:1797-820.
- [75] Crisfield M. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*: John Wiley & Sons Inc; 1991.
- [76] Palazotto AN, Dennis ST. *Nonlinear analysis of shell structures: AIAA Series*; 1992.
- [77] Bathe KJ. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall (Englewood Cliffs, NJ); 1982.
- [78] Zienkiewicz O, Taylor RL. *Finite Element Method*. McGraw-Hill New York; 2000.
- [79] MacNeal RH. A simple quadrilateral shell element. *Computers & Structures*. 1978;8:175-83.
- [80] Kant T, Owen DRJ, Zienkiewicz OC. A refined higher-order C^0 plate bending element. *Computers & Structures*. 1982;15:177-83.
- [81] Reddy JN. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990;25:677-86.
- [82] Pandya BN, Kant T. Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—Finite element evaluations. *International Journal of Solids and Structures*. 1988;24:1267-86.
- [83] Pandya BN, Kant T. Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order C^0 plate bending elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1988;66:173-98.
- [84] Pandya BN, Kant T. A refined higher-order generally orthotropic C^0 plate bending element. *Computers & Structures*. 1988;28:119-33.
- [85] Phan ND, Reddy JN. Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1985;21:2201-19.
- [86] Bogner FK, Fox RL, Schmidt LA. The generation of inter-element compatibility stiffness and mass matrices by the use of interpolation formula. *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Air force Institute of Technology, Wright Patterson A.F. Base, Ohio 1968.

- [87] Sheikh AH, Chakrabarti A. A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2003;39:883-903.
- [88] Nayak AK, Moy SSJ, Shenoi RA. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory. *Composites Part B: Engineering*. 2002;33:505-19.
- [89] Dvorkin EN, Bathe KJ. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations*. 1984;1:77-88.
- [90] Huang H, Hinton E. A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation. *Engineering Computations*. 1984;1:369-79.
- [91] Nayak AK, Moy SSJ, Shenoi RA. A higher order finite element theory for buckling and vibration analysis of initially stressed composite sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;286:763-80.
- [92] Khare RK, Kant T, Garg AK. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*. 2004;65:405-18.
- [93] Pervez T, Seibi AC, Al-Jahwari FKS. Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2005;71:414-22.
- [94] Goswami S. A C^0 plate bending element with refined shear deformation theory for composite structures. *Composite Structures*. 2006;72:375-82.
- [95] Carrera E, Antona E. A Class of Two-dimensional Theories for Anisotropic Multilayered Plates Analysis [Memorie Scienze Fisiche]: Accademia delle Scienze di Torino; 1995.
- [96] Carrera E. C_z^0 requirements—models for the two dimensional analysis of multilayered structures. *Composite Structures*. 1997;37:373-83.
- [97] LIBRESCU L. Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly of Applied Mathematics* 1987;55:1-22.
- [98] Reply by the author to C.T. Sun. *AIAA journal*. 1994;32:2135-6.
- [99] Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2001;54:301-28.
- [100] Lekhnitskii S. Strength calculation of composite beams 1935.
- [101] Ambartsumian SA. On a theory of bending of anisotropic plates. *Investiia Akad Nauk SSSR, Ot Tekh Nauk* 1958.
- [102] Ambartsumian SA. *Theory of anisotropic plates*: Tech. Pub. Co; 1969.
- [103] Reissner E. On a certain mixed variational theory and a proposed application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984;20:1366-8.
- [104] Reissner E. On a certain mixed variational theorem and on laminated elastic shell theory. *Proceedings of the Euromech-Colloquium 1986*. p. 17–27.
- [105] Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 2003;56:287-308.
- [106] Lekhnitskii SG. *Anisotropic Plates* 1968.
- [107] Ren JG. A new theory of laminated plate. *Composites Science and Technology*. 1986;26:225-39.
- [108] Ren JG. Bending theory of laminated plate. *Composites Science and Technology*. 1986;27:225-48.
- [109] Stürzenbecher R, Hofstetter K. Bending of cross-ply laminated composites: An accurate and efficient plate theory based upon models of Lekhnitskii and Ren. *Composite Structures*. 2011;93:1078-88.
- [110] Whitney JM. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates. *Journal of Composite Materials*. 1969;3:534-47.
- [111] Rath BK, Das YC. Vibration of layered shells. *Journal of Sound and Vibration*. 1973;28:737-57.

- [112] Di Sciuva M. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: An evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*. 1986;105:425-42.
- [113] Di Sciuva M. A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered orthotropic plates. *l'Aerotecnica Missili Spazio*. 1984;63:84-92.
- [114] Di Sciuva M. A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti del Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale del Politecnico di Torino* 1983;5.
- [115] Di Sciuva M. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti Accademia delle Scienze di Torino*. 1984;118:279-95.
- [116] Di Sciuva M. Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses. *Composite Structures*. 1992;22:149-67.
- [117] Cho M, Parmerter RR. Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *AIAA journal*. 1993;31:1299-306.
- [118] Di Sciuva M. Further refinement in the transverse shear deformation theory for multilayered composite plates. *Atti Accademia delle Scienze di Torino*. 1990;124:248-68.
- [119] Oh J, Cho M, Kim JS. Enhanced lower-order shear deformation theory for fully coupled electro-thermo-mechanical smart laminated plates. *Smart Materials and Structures*. 2007;16:2229-41.
- [120] Cho M, Oh J. Higher order zig-zag plate theory under thermo-electric-mechanical loads combined. *Composites Part B: Engineering*. 2003;34:67-82.
- [121] Cho M, Oh J. Higher order zig-zag theory for fully coupled thermo-electric-mechanical smart composite plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2004;41:1331-56.
- [122] Oh J, Cho M. A finite element based on cubic zig-zag plate theory for the prediction of thermo-electric-mechanical behaviors. *International Journal of Solids and Structures*. 2004;41:1357-75.
- [123] Demasi L. Refined multilayered plate elements based on Murakami zig-zag functions. *Composite Structures*. 2005;70:308-16.
- [124] Carrera E. On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*. 2004;82:541-54.
- [125] Di Sciuva M. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*. 1987;54:589-96.
- [126] Di Sciuva M. Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. *Computers & Structures*. 1985;21:789-96.
- [127] Di Sciuva M. Evaluation of some multilayered, shear-deformable plate elements. *Computers & Structures*. 1986;24:845-54.
- [128] Di Sciuva M. A third-order triangular multilayered plate finite element with continuous interlaminar stresses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1995;38:1-26.
- [129] Reddy JN. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in Applied Numerical Methods*. 1987;3:173-80.
- [130] Reddy JN. On refined computational models of composite laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989;27:361-82.
- [131] Cho M, Parmerter R. Finite element for composite plate bending based on efficient higher order theory. *AIAA journal*. 1994;32:2241-8.
- [132] Cho M, Parmerter RR. An efficient higher-order plate theory for laminated composites. *Composite Structures*. 1992;20:113-23.
- [133] Cho YB, Averill RC. First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels. *Composite Structures*. 2000;50:1-15.

- [134] Topdar P, Sheikh AH, Dhang N. Finite Element Analysis of Composite and Sandwich Plates Using a Continuous Inter-laminar Shear Stress Model. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2003;5:207-31.
- [135] Pandit MK, Singh BN, Sheikh AH. Buckling of laminated sandwich plates with soft core based on an improved higher order zigzag theory. *Thin-Walled Structures*. 2008;46:1183-91.
- [136] Pandit MK, Sheikh AH, Singh BN. An improved higher order zigzag theory for the static analysis of laminated sandwich plate with soft core. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008;44:602-10.
- [137] Toledano A, Murakami H. A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses. *International Journal of Solids and Structures*. 1987;23:111-31.
- [138] Rao KM, Meyer-Piening HR. Analysis of thick laminated anisotropic composite plates by the finite element method. *Composite Structures*. 1990;15:185-213.
- [139] Carrera E. Sullo sviluppo di un elemento finito computazionalmente efficiente e capace di effetti HSDT. *Aerotecnica Missili Spazio*. 1994;73:14-23.
- [140] Savithri S, Varadan T. Accurate bending analysis of laminated orthotropic plates. *AIAA journal*. 1990;28:1842-4.
- [141] Hsu T, Wang JT. A theory of laminated cylindrical shells consisting of layers of orthotropic laminate. *AIAA journal*. 1970; 8:2141-6.
- [142] Cho KN, Bert CW, Striz AG. Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory. *Journal of Sound and Vibration*. 1991;145:429-42.
- [143] NOSIER A, KAPANIA R, REDDY J. Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory. *AIAA journal*. 1993;31:2335-46.
- [144] Reddy JN. On the Generalization of Displacement-Based Laminate Theories. *Applied Mechanics Reviews*. 1989;42:S213-S22.
- [145] Sun CT, Whitney J. Theories for the dynamic response of laminated plates. *AIAA journal*. 1973;11:178-83.
- [146] Chaudhuri RA. An equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate. *Computers & Structures*. 1986;23:139-46.
- [147] Chaudhuri RA, Seide P. An approximate semi-analytical method for prediction of interlaminar shear stresses in an arbitrarily laminated thick plate. *Computers & Structures*. 1987;25:627-36.
- [148] Owen D, Li Z. A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods--I. Fundamentals and static analysis. *Computers & Structures*. 1987;26:907-14.
- [149] Reddy J, Barbero E, Teply J. A plate bending element based on a generalized laminate plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989;28:2275-92.
- [150] Hinrichsen R, Palazotto A. Nonlinear finite element analysis of thick composite plates using cubic spline functions. *AIAA journal*. 1986;24:1836-42.
- [151] Epstein M, Glockner PG. Nonlinear analysis of multilayered shells. *International Journal of Solids and Structures*. 1977;13:1081-9.
- [152] Epstein M, Huttelmaier H. A finite element formulation for multilayered and thick plates. *Computers & Structures*. 1983;16:645-50.
- [153] Barker R, Pryor Jr C. A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates. *AIAA journal*. 1971;9:912-7.
- [154] Di Sciuva M, Gherlone M. A global/local third-order Hermitian displacement field with damaged interfaces and transverse extensibility: analytical formulation. *Composite Structures*. 2003;59:419-31.
- [155] Cho M, Kim JS. Four-noded finite element post-process method using a displacement field of higher-order laminated composite plate theory. *Computers & Structures*. 1996;61:283-90.

- [156] Chakrabarti A, Sheikh AH. A new triangular element to model inter-laminar shear stress continuous plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;60:1237-57.
- [157] Chakrabarti A, Sheikh AH. Analysis of laminated sandwich plates based on interlaminar shear stress continuous plate theory. *Journal of Engineering Mechanics*. 2005;131:377-84.
- [158] Kapuria S. An efficient coupled theory for multilayered beams with embedded piezoelectric sensory and active layers. *International Journal of Solids and Structures*. 2001;38:9179-99.
- [159] Kapuria S, Dumir P, Ahmed A. An efficient coupled layerwise theory for static analysis of piezoelectric sandwich beams. *Archive of Applied Mechanics*. 2003;73:147-59.
- [160] Kapuria S, Bhattacharyya M, Kumar A. Assessment of coupled 1D models for hybrid piezoelectric layered functionally graded beams. *Composite Structures*. 2006;72:455-68.
- [161] Kapuria S, Achary GGS. A coupled zigzag theory for the dynamics of piezoelectric hybrid cross-ply plates. *Archive of Applied Mechanics*. 2005;75:42-57.
- [162] Kapuria S, Achary GGS. Nonlinear coupled zigzag theory for buckling of hybrid piezoelectric plates. *Composite Structures*. 2006;74:253-64.
- [163] Kapuria S, Achary G. Nonlinear zigzag theory for electrothermomechanical buckling of piezoelectric composite and sandwich plates. *Acta Mechanica*. 2006;184:61-76.
- [164] Kapuria S, Dumir PC, Jain NK. Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams. *Composite Structures*. 2004;64:317-27.
- [165] Kapuria S, Dumir PC, Ahmed A. An efficient higher order zigzag theory for composite and sandwich beams subjected to thermal loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2003;40:6613-31.
- [166] Kapuria S, Achary GGS. An efficient higher order zigzag theory for laminated plates subjected to thermal loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2004;41:4661-84.
- [167] Icardi U. Eight-noded zig-zag element for deflection and stress analysis of plates with general lay-up. *Composites Part B: Engineering*. 1998;29:425-41.
- [168] Icardi U. C° plate element for global/local analysis of multilayered composites, based on a 3D zig-zag model and strain energy updating. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005;47:1561-94.
- [169] Li X, Liu D. Zigzag theory for composite laminates. *AIAA journal*. 1995;33:1163-4.
- [170] Lu X, Liu D. An interlaminar shear stress continuity theory for both thin and thick composite laminates. *Journal of Applied Mechanics*. 1992;59:502-9.
- [171] Li X, Liu D. A laminate theory based on global–local superposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1995;11:633-41.
- [172] Li X, Liu D. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:1197-212.
- [173] Zhen W, Wanji C. Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global–local higher-order theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2006;298:333-49.
- [174] Zhen W, Wanji C. A study of global–local higher-order theories for laminated composite plates. *Composite Structures*. 2007;79:44-54.
- [175] Zhen W, Wanji C. A higher-order displacement model for stress concentration problems in general lamination configurations. *Materials & Design*. 2009;30:1458-67.
- [176] Chen W, Cheung YK, Wu Z. Augmented higher order global–local theory and refined triangular element for laminated composite plates. *Composite Structures*. 2007;81:341-52.
- [177] Wu Z, Chen R, Chen W. Refined laminated composite plate element based on global–local higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2005;70:135-52.
- [178] Chen W. Nine-parameter triangular thin plate bending element by using refined directed stiffness method. *Journal of Dalian University of Technology*. 1993;33:289-95.

- [179] Cheung YK, Wanji C. Refined nine-parameter triangular thin plate bending element by using refined direct stiffness method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1995;38:283-98.
- [180] Wanji C, Cheung YK. Refined non-conforming quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:3919-35.
- [181] Chen W, Cheung YK. The non-conforming nine-parameter triangular element for thin plate bending and vibration analysis. *Proceedings of the International Conference on CMSGE*. Hong Kong 1994. p. 1580–3.
- [182] Xiaohui R, Wanji C, Zhen W. A new zig-zag theory and C^0 plate bending element for composite and sandwich plates. *Archive of Applied Mechanics*. 2011;81:185-97.
- [183] Batoz J-L, Tahar MB. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1982;18:1655-77.
- [184] Carrera E, Demasi L. Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1: Derivation of finite element matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;55:191-231.
- [185] Carrera E, Demasi L. Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 2: Numerical implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;55:253-91.
- [186] Sedira L, Ayad R, Hecini M. Amélioration du modèle linéaire DDM par introduction d'une fonction Zig-Zag. Application aux plaques stratifiées. *Séminaire Internationale sur les Technologies Mécaniques, Tlemcen (Algérie)05-06 Décembre 2009*.
- [187] Sedira L, Ayad R, Sabhi H, Hecini M, Sakami S. An enhanced discrete Mindlin finite element model using a zigzag function. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*. 2012;21:122-40.
- [188] Dhatt G, Batoz JL. *Modélisation des structures par éléments finis: poutres et plaques*1990.
- [189] Ali JSM, Bhaskar K, Varadan TK. A new theory for accurate thermal/mechanical flexural analysis of symmetric laminated plates. *Composite Structures*. 1999;45:227-32.
- [190] Batoz JL, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis: solides élastiques: Presses Université Laval; 1990*.
- [191] Irons B, Loikkanen M. An engineers' defence of the patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1983;19:1391-401.
- [192] Morley LSD. *Skew plates and structures: Pergamon Press;[distributed in the Western Hemisphere by Macmillan, New York]; 1963*.
- [193] Babuška I, Scapolla T. Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989;28:155-79.
- [194] Pagano N, Hatfield HJ. Elastic behavior of multilayered bidirectional composites. *AIAA journal*. 1972;10:931-3.
- [195] Engblom JJ, Ochoa OO. Through-the-thickness stress predictions for laminated plates of advanced composite materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1985;21:1759-76.
- [196] Srinivas S, Joga Rao CV, Rao AK. An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1970;12:187-99.
- [197] Owen DRJ, Figueiras JA. Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1983;19:541-66.
- [198] Fares ME, Elmarghany MK. A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. *Composite Structures*. 2008;82:71-83.

- [199] Xiao JR, Gilhooley DF, Batra RC, Gillespie Jr JW, McCarthy MA. Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method. *Composites Part B: Engineering*. 2008;39:414-27.
- [200] Plantema FJ. *Sandwich construction*: Wiley New York., USA; 1966.
- [201] J. AJ. Bending theory for multilayered orthotropic sandwich plates. *AIAA journal*. 1968;6:2166-9.
- [202] Reddy JN, Chao WC. A comparison of closed-form and finite-element solutions of thick laminated anisotropic rectangular plates. *Nuclear Engineering and Design*. 1981;64:153-67.
- [203] Khatua TP, Cheung YK. Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1973;6:11-24.
- [204] Topdar P, Chakraborti A, Sheikh AH. An efficient hybrid plate model for analysis and control of smart sandwich laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004;193:4591-610.
- [205] Reddy JN. Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*. 1979;66:565-76.
- [206] Levinson M. Free vibrations of a simply supported, rectangular plate: An exact elasticity solution. *Journal of Sound and Vibration*. 1985;98:289-98.
- [207] Aboura Z. Etude du processus de délaminage mode I, mode II et mode mixte (I+II) de matériaux composites à renforts tissé à différentes vitesses de sollicitation [Doctorat Thesis]: University of Technology of Compiègne; 1993.
- [208] Talbi N, Ayad R. An efficient shell finite element based upon discrete Mindlin hypotheses for non linear structural analysis. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienne- Autriche.
- [209] Hendou H. Analyse statique et dynamique des coques composites à l'aide du modèle MiSP. Application au carton ondulé. UTC Compiègne; 2002.
- [210] Uflyand YS. The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. *Prikl Mat Mekh*. 1948;12:287-300.
- [211] Kulkarni S, Kapuria S. Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory. *Computational Mechanics*. 2008;42:803-24.
- [212] Jeyachandrabose C, Kirkhope J, Meekisho L. An improved discrete Kirchhoff quadrilateral thin-plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987;24:635-54.
- [213] Kapuria S, Kulkarni S. An improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory for static analysis of composite and sandwich plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007;69:1948-81.
- [214] Kärger L, Wetzal A, Rolfes R, Rohwer K. A three-layered sandwich element with improved transverse shear stiffness and stresses based on FSDT. *Computers & Structures*. 2006;84:843-54.
- [215] Kim J-S, Cho M. Buckling analysis for delaminated composites using plate bending elements based on higher-order zig-zag theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;55:1323-43.
- [216] Kulkarni S, Kapuria S. A new discrete Kirchhoff quadrilateral element based on the third-order theory for composite plates. *Computational Mechanics*. 2007;39:237-46.
- [217] ABAQUS/STANDARD User's Manual 2002.
- [218] BATOZ JL, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis: Coques*. Paris: Hermès; 1992.
- [219] *Methods NAFfe, Standards. The standard NAFEMS benchmarks: NAFEMS*; 1990.
- [220] Flügge W. *Stresses in shells*: Springer Verla; 1960

- [221] Lindberg G, Olson M, Cowper G. New developments in the finite element analysis of shells. *Q Bull Div Mech Eng and Nat Aeronautical Establishment, National Research council of Canada*. 1969;4.
- [222] CHO M, ROH HEEY. Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;56:81-115.
- [223] Macneal RH, Harder RL. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*. 1985;1:3-20.
- [224] Batoz JL, Triki S. Développement d'un élément fini de poutre vrillée, rapport interne. Octobre 1991. p. UTC/LG2MS/MNM.
- [225] Simo J, Fox D, Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: the linear theory; computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1989;73:53-92.
- [226] Brebbia C, Connor J. *Fundamentals of finite element techniques for structural engineers*. Wiley (New York); 1974.
- [227] Brebbia C, Connor J. Stiffness matrix for shallow rectangular shell element (Stiffness matrix for shallow rectangular shell element and application of finite element displacement method). *AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS, ENGINEERING MECHANICS DIVISION, JOURNAL*. 1967;93:43-65.
- [228] Kraus H. *Thin elastic shells*: John Wiley & Sons; 1967.
- [229] Chatelain J. *Analyse non linéaire des coques minces isotropes et composites par éléments finis quadrilatéraux*. Université de Technologie de Compiègne; 1987.
- [230] Paccola RR. Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC eo MEF (2004). *Physical non-linear analysis of anisotropic laminated plates and shells coupled or not with three-dimensional viscoelastic medium by BEM/FEM coupling*.
- [231] Varadan T, Bhaskar K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells—an elasticity approach. *Composite Structures*. 1991;17:141-56.
- [232] Cho M, Kim JS. A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. *Composites Part B: Engineering*. 2000;31:65-74.
- [233] Ren J. Analysis of simply-supported laminated circular cylindrical shell roofs. *Composite Structures*. 1989;11:277-92.
- [234] Crawley EF. The natural modes of graphite/epoxy cantilever plates and shells. *Journal of Composite Materials*. 1979;13:195-205.
- [235] Frey F. *L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique*: Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, Laboratoire de mécanique des matériaux et statique des constructions; 1978.
- [236] Argyris JH, Dunne PC, Malejannakis G, Schelkle E. A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1977;10:371-403.
- [237] HAMMADI F. *Formulation et évaluation d'éléments finis à continuité C^0 de la géométrie pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques* [Thèse de Doctorat]: Université de Compiègne; 1998.
- [238] Timoshenko S, Gere JM. *Mechanics of materials*. New York: Van Nostrand Reinhold Co.; 1972.
- [239] Fafard M. *Éléments finis en mécanique des solides*. Cours GCI-63244. Université de Laval, Québec, Canada 1993.
- [240] Sze K, Liu X, Lo S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2004;40:1551-69.
- [241] Batoz JL, Cantin G, CA. NPSM. *Geometrically Nonlinear Analysis of Shell Structures Using Flat DKT Shell Elements*: Defense Technical Information Center; 1985.

- [242] Surana KS. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1983;19:581-615.
- [243] Ammar S, Dhatt G, Fafard M. Exact stability model of space frames. *Computers & Structures*. 1996;60:59-71.
- [244] Pol P. Modélisation du comportement élastoplastique de coques minces par éléments finis. Université de Technologie de Compiègne; 1992.
- [245] Brendel B, Ramm E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. *Computers & Structures*. 1980;12:549-58.
- [246] Batoz J-L, Dhatt G. Plaques et coques par éléments finis: analyse linéaire et non linéaire:[conférences] 2-4 juin 1986: Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur; 1986.
- [247] BATOZ J, JAAMEI S. Etude de différentes formulations lagrangiennes pour l'analyse des poutres et des coques minces élastiques en grandes rotations.
- [248] JAAMEI S. Etude de différentes formulations lagrangiennes pour l'analyse non linéaire des plaques et des coques minces élasto-plastiques en grandes rotations [PhD]: Université de Technologie de Compiègne; 1986.
- [249] Fafard M. Calcul automatique des configurations pré et post-flambement en calcul non linéaire des structures [Thèse de doctorat]. Ottawa: Université Laval, Québec, Canada; 1987.
- [250] Quesnel T. Facteurs de correction de cisaillement transverse dans les plaques composites [Mémoire d'Etudes approfondies]: Université de P. et M. Curie, Université de Technologie de Compiègne; 1990.

A.1 Relations contraintes-déformations selon la théorie de Mindlin-Reissner [190], [69]

A.1.1 Plaque homogène isotrope

Si l'on s'intéresse à un petit élément de matière subissant de petites déformations, alors sa loi de déformation (loi de Hooke généralisée) est linéaire et réversible quelle que soit la sollicitation. dans le cas d'un matériau homogène isotrope, cette loi définit, sous forme matricielle, les relations contraintes-déformations suivantes:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= z[H]\{\chi\} \\ \{\tau\} &= [G]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

avec

$\{\sigma\}$ et $\{\tau\}$ sont les contraintes planes et de cisaillement, définies par

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle \text{ et } \langle \tau \rangle = \langle \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle \quad (\text{A.2})$$

$\{\chi\}$ et $\{\gamma\}$ sont respectivement la courbure de flexion et la déformation de cisaillement transverse.

avec

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

E: est le module de Young, ν : le coefficient de Poisson .

A.1.2 Plaque composite (stratifiée)

Dans le cas où le matériau est constitué d'une stratification de couches orthotropes dans le plan LT et isotropes dans le plan TZ (figure A.1)[190], nous pouvons écrire pour une couche:

$$\{\sigma_L\} = [H_L]\{\varepsilon_L\}; \{\tau_L\} = [H_{\tau L}]\{\gamma_L\} \quad (\text{A.4a,b})$$

$$\langle \sigma_L \rangle = \langle \sigma_L \quad \sigma_T \quad \tau_{LT} \rangle; \langle \tau_L \rangle = \langle \tau_{LZ} \quad \tau_{TZ} \rangle \quad (\text{A.5a,b})$$

$$\langle \varepsilon_L \rangle = \langle \varepsilon_L \quad \varepsilon_T \quad \gamma_{LT} \rangle; \langle \gamma_L \rangle = \langle \gamma_{LZ} \quad \gamma_{TZ} \rangle \quad (\text{A.6 a,b})$$

dans le repère d'orthotrope (L,T,z), les matrices de comportement élastiques s'écrivent:

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ & H_{TT} & 0 \\ Sym & & G_{LT} \end{bmatrix}, [H_{\tau L}] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

avec

$$H_{LL} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}, H_{TT} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}, H_{LT} = \frac{E_L\nu_{LT}}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}, G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TZ})}, G_{LZ} = G_{LT} \quad (\text{A.8a-e})$$

$H_{LL}, H_{LT}, H_{TT}, G_{LZ}, G_{TZ}$ sont des cinq coefficients indépendantes.

Le passage du repère d'orthotropie au repère cartésien se fait par l'intermédiaire des matrices de transformation $[T_1]$ et $[T_2]$, ainsi:

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\}; \quad \{\tau\} = [H_\tau]\{\gamma\} \quad (\text{A.9a,b})$$

$$[H] = [T_1]^T [H_L] [T_1], [H_\tau] = [T_2]^T [G_L] [T_2], c = \cos \theta, s = \sin \theta \quad (\text{A.10a-d})$$

avec

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, [T_2] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (\text{A.11a,b})$$

avec c et s sont le cosinus et le sinus de l'angle $\theta = (\widehat{x, L})$ (figure A.1).

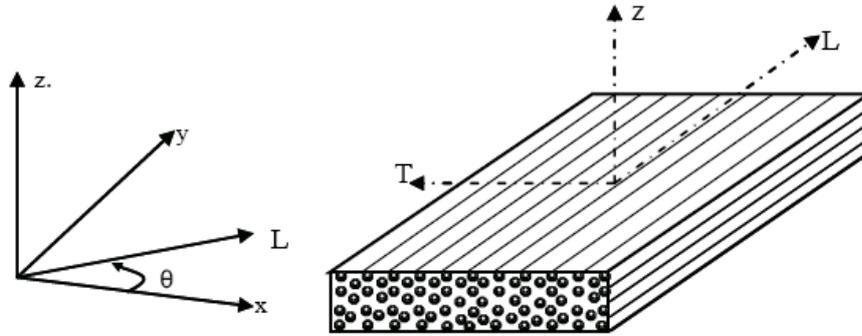


Figure A.1 Couche orthotrope

A.2 Calcul des facteurs de correction du cisaillement transverse pour les plaques stratifiées/sandwich

Afin de se rapprocher d'une répartition adéquate des contraintes de cisaillement transverses à travers l'épaisseur, considérée constante dans la théorie du premier ordre, ce que n'est pas correcte en réalité, des facteurs de correction sont introduits [188]. La mise en œuvre de la technique issue de fameuses méthodes de calcul de ces coefficients de correction est illustrée sur les organigrammes (figures A-2 et A-3). En se basant sur le travail effectué par Quesnel[250], l'implémentation du programme consiste en deux parties : la méthode totale et la méthode de flexion.

Des calculs primitifs ont montré qu'il n'y a pas une méthode prédominante sur le résultat obtenu. En effet, la méthode totale gagne beaucoup du terrain du fait qu'elle s'adapte d'autant plus pour différents types des stratifiés ou des sandwichs, que ce soit, symétriques ou non symétriques. Ces coefficients corrigent

considérablement l'effet du cisaillement transverse dans les plaques/coques composites.