

# LAS FRACCIONES, HABILIDADES DE ALUMNOS DE 15 A 16 AÑOS

## FRACTIONS, STUDENT'S SKILLS FROM 15 TO 16 YEARS OLD

**Maria T. Sanz<sup>1</sup>**  
**Olimpia Figueras<sup>2</sup>**  
**Bernardo Gómez<sup>3</sup>**

1. Departamento Didáctica de la Matemática, Universitat de València-Estudi General, Valencia, España
2. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
3. Departamento Didáctica de la Matemática, Universitat de València-Estudi General, Valencia, España

### Proceso editorial

Recibido: 07/11/2018

(06/08/2018)

Aceptado: 13/11/2018

Publicado: 28/11/2018

### Contacto

Maria T. Sanz

[m.teresa.sanz@uv.es](mailto:m.teresa.sanz@uv.es)

### Agradecimientos

Esta investigación ha contado con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport a través del proyecto GVPROMETE02016-143, del Ministerio de Educación a través del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y la Universitat de València y el Cinvestav en el marco del Programa de Becas de Investigación Iberoamérica-Santander.

---

### CÓMO CITAR ESTE TRABAJO | HOW TO CITE THIS PAPER

Sanz, M. T., Figueras, O., y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 25: 257-279.

# LAS FRACCIONES, HABILIDADES DE ALUMNOS DE 15 A 16 AÑOS

## FRACTIONS, STUDENT'S SKILLS FROM 15 TO 16 YEARS OLD

### Resumen

La indagación descrita es parte de un proyecto de investigación cuyo propósito es identificar relaciones existentes entre habilidades que los alumnos, de entre 15 y 18 años de edad, manifiestan al usar fracciones y su desempeño al resolver problemas descriptivos que involucran procesos iterativos de cálculo de parte del complemento de parte. Los resultados expuestos provienen del análisis de las respuestas de 198 alumnos a un cuestionario sobre conocimientos previos de fracciones. El test consta de siete tareas para evaluar tres tipos de habilidades: Representación gráfica, Cálculo con fracciones y Resolución de problemas. El cuestionario se diseñó considerando: a) componentes de estudios precedentes; b) el currículum del curso de primero de Preparatoria (4º de ESO en España), y c) elementos matemáticos necesarios para resolver dichos problemas. Para tratar los datos se consideraron metodologías propias de análisis cuantitativo y cualitativo. Los resultados cuantitativos muestran bajos porcentajes de éxito al usar fracciones en relación con las tres habilidades. En cuanto a lo cualitativo, destaca la dificultad de representar gráficamente situaciones en un contexto discreto, con la representación de "de lo que queda" –es decir, de parte de parte de una parte del todo–, y con el cálculo numérico.

**Palabras clave:** Fracciones; partes de partes; habilidades de estudiantes; resolución de problemas descriptivos; educación secundaria.

### Abstract

The study described in this paper is part of a research project whose aim is to identify the relationship between skills that 15-18-year-olds show when using fractions and their performance to solve descriptive problems involving iterative computing processes of a part of a part of a whole. Results presented come from the analysis of 198 students' answers to a test about previous knowledge of fractions. The test consists of seven tasks to evaluate three types of skills: Graphic representation, Computation with fractions, and Solving problems. The test was designed considering: a) components of previous studies; b) the curriculum of the first grade of high school (ESO 4th grade in Spain), and c) Mathematics issues necessary to solve such problems. To process data, methodologies for quantitative and qualitative analyses were considered. Quantitative results show low rates of success when using fractions related to the three skills. Concerning the qualitative aspect, it highlights the difficulties with graphic representation in a discrete context; the representation "of what is left" –i.e., part of parts of a whole– and with numerical computation.

**Keywords:** Fractions; parts of a part of a whole; student's skills; solving descriptive problems; secondary education.

## INTRODUCCIÓN

El estudio de las fracciones se inicia en la escuela primaria y termina en la secundaria, por ello los alumnos que terminan sus estudios de educación media superior deberían haber constituido un mejor objeto mental sobre las fracciones, en el sentido de Freudenthal (1983), que les permita ser competentes con el uso de esas representaciones de los números racionales. Sin embargo, como afirman Siegler, Thompson y Schneider (2001) después de hacer una revisión amplia de investigaciones relacionadas con esta temática y en busca de una teoría explicativa sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes de 11 a 13 años de edad, " ... el conocimiento previo de las fracciones es pobre ..." (pág. 280). Esta condición generalmente perdura al pasar el tiempo y es una de las razones por las que al terminar la secundaria los alumnos con mucha frecuencia son poco competentes con el uso de las fracciones, lo cual se pondrá de manifiesto en este informe.

En un estudio reciente con estudiantes de entre 11 y 12 años de edad, Nicolou y Pitta-Pantazi (2015) llegaron a la conclusión de que la comprensión de las fracciones se sustenta en el conocimiento de seis habilidades sobre esos números: a) reconocimiento, b) definiciones y explicación matemática, c) argumentaciones y justificaciones, d) magnitud relativa, e) representaciones de fracciones, porcentajes y división, y f) reflexión durante la resolución de problemas.

El estudio descrito en este artículo es, como se mencionó antes, parte de un proyecto de investigación en el cual se pretende identificar las relaciones existentes entre habilidades que los alumnos, de entre 15 y 18 años de edad, manifiestan al usar fracciones y el desempeño al resolver problemas descriptivos que involucran procesos iterativos de cálculo de parte del complemento de parte, por ejemplo, con la resolución de los problemas siguientes:

Me encontré con una piedra pero no la pesé; después de quitarle  $\frac{1}{7}$  y luego  $\frac{1}{13}$  [de lo que quedaba], encontré que pesaba 1 manna. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (Mesopotamia en Katz 2003, pág. 27).

Un enfermo hace su testamento, y manda que su hacienda sea partida entre sus hijos, igualmente, que tanto haya el uno como el otro. Muerto el padre, dan al hijo mayor un ducado y  $\frac{1}{10}$  de lo que queda, al segundo, 2 ducados y  $\frac{1}{10}$  de la resta, al tercero 3 ducados y  $\frac{1}{10}$  de lo que quedó, así a cada hijo un ducado más que al otro y  $\frac{1}{10}$  de lo que resta. De esta manera es satisfecha la voluntad del padre, porque vino a cada uno tanto como al otro. Demando, ¿cuántos ducados dejó y cuántos hijos tenía? (Aurel, 1552, fo. 92).

Por medio de esta indagación se intenta, en esta fase de la investigación global, responder a la pregunta: ¿cuáles son las dificultades que enfrentan alumnos de 15 a 16 años de edad en relación con habilidades asociadas con el uso de las fracciones? Para encontrar posibles respuestas a la pregunta se diseña un cuestionario con el propósito de evaluar aquellas habilidades relacionadas directamente con la resolución de problemas, a saber, representación de fracciones y reflexión durante la resolución. Una tercera habilidad que también interfiere, y no fue considerada por esos investigadores, es el cálculo con fracciones. En su estudio, Nicolou y Pitta-Pantazi (2015) no deben haberla incluido debido a las características de su población, pero en el caso de la indagación descrita en este artículo se espera que los estudiantes ya sean competentes calculando con estos números.

Sobre estas tres habilidades existen numerosos estudios que dan cuenta de su problemática en la enseñanza y en el aprendizaje. La *representación gráfica* depende del modelo de enseñanza. Figueras (1988) identificó cinco maneras de enseñar fracciones: los modelos egipcio primitivo y avanzado, y los modelos discreto, de la medición y griego. Tres de esos cinco se sustentan en el modelo del pastel, es decir, en la idea de fraccionamiento que trae consigo una connotación explícita de que cuando algo es dividido, es necesariamente partido en porciones menores que el todo inicial, esas porciones deben ser del mismo tamaño y cada una de ellas es una fracción de lo que fue ese “todo” en su forma original. Cuando al “todo” no lo perciben los estudiantes con claridad, la idea de unidad es oscura y el fraccionamiento difícil (Butto, 2013). Esta concepción conduce a una didáctica de las fracciones que se limita a estudiarlas desde el punto de vista de parte-todo (Castro, 2001) y en consecuencia a su representación en un contexto continuo. Por otro lado, Streefland (1991) afirma que ambos contextos, discreto y continuo, son relevantes para conseguir una completa comprensión en las diferentes situaciones de partición y reparto, con lo cual la enseñanza de fracciones debería apoyarse en ambas situaciones.

Con respecto a la habilidad Cálculo con fracciones, investigadores de diferentes partes del mundo, por ejemplo miembros de los proyectos: Proyecto sobre el número racional (*Rational Number Project*), Evaluación nacional del desempeño y el progreso educativo (*National Assessment of Educational Progress*) y Estrategias y errores en la matemática de la secundaria (*Strategies and Errors in Secondary Mathematics*) han mostrado que errores comunes cometidos por estudiantes al operar con fracciones se deben a una aplicación incorrecta de reglas memorizadas pero evocadas sin precisión. Hart (1981) en su estudio, concluye que la habilidad para efectuar adiciones y sustracciones desciende conforme aumenta la edad debido a que los algoritmos son memorizados sin comprensión y por tanto se van olvidando progresivamente. Según Briht (1978, citado por Dickson, Brown y Gibson, 1991), el algoritmo de la multiplicación resulta fácil, pero desde el punto de vista conceptual resulta más com-

plejo que la adición. Estos resultados los apoyan Green (1970), Hart (1981), A.P.U. (1980) y Sewell (1981) (citados por Dickson, Brown y Gibson, 1991). Para el caso de la división, el significado como operación inversa de la multiplicación, el más utilizado en la tradición escolar, no es tan intuitivo para las fracciones como lo es para los números naturales (Hart, 1981 y Ward (1979, citado por Dickson, Brown y Gibson, 1991)).

En relación con la habilidad *Resolución de problemas*, Stanic y Kilpatrick (1988, citados en Schoenfeld, 1992) aseguran que “los problemas han ocupado un lugar central en el currículo matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas no”. Generalmente, la tradición escolar utiliza los problemas como contexto, para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos, y no para la reflexión sobre el propio proceso de resolución. Pocas indagaciones se han centrado en el papel que juegan los problemas con fracciones en la enseñanza y el aprendizaje de ese concepto, lo que sí se sabe es que resolver problemas es un reto para los alumnos con dificultades en matemáticas (Jitendra, Hoff, y Beck, 1999; Montague, Enders y Dietz, 1996, citados por Krowka y Fuchs, 2017). Además, en estudios precedentes se pone énfasis en la importancia de la enseñanza de las fracciones a través de la resolución de problemas (Llinares, 1997; Bruner (1984, citado en Castro, 2001)) y los resultados de los estudios de Hart (1981) sustentan esa relevancia al mostrar el éxito de los niños al resolver problemas en comparación con su desempeño al calcular con fracciones.

Con el objetivo de caracterizar el desempeño de los alumnos en relación con las habilidades mencionadas se lleva a cabo el siguiente plan: a) construcción de un cuestionario a partir de estudios previos, b) validación del cuestionario con un grupo piloto, c) reformulación en los casos necesarios, d) aplicación del cuestionario y e) análisis de datos.

## METODOLOGÍA

### Muestra

Tal y como se ha mencionado anteriormente, para el proyecto global, se consideraron alumnos de una edad comprendida entre 15 y 18 años, pero dada la evolución temporal, se hace la investigación por edades correspondientes a los cursos educativos que involucran. Por ello, en esta fase se describen los resultados para alumnos mexicanos con edades entre 15 y 16 años y se toma una muestra (198 individuos) perteneciente a la población objeto de estudio, estudiantes de escuelas públicas de la Ciudad de México.

## Instrumento

Para la toma de datos se diseñó un cuestionario de papel y lápiz sobre las tres habilidades citadas: Representación gráfica, Cálculo con Fracciones y Resolución de problemas. Como se describe más adelante se tomaron en cuenta los estudios precedentes de Hart (1981) y Nicolau y Pitta-Pantazi (2015); los conocimientos sobre fracciones que deben haber construido los estudiantes de acuerdo con el currículum de la educación primaria y secundaria mexicana (SEP, 2011a; SEP, 2011b) y elementos matemáticos necesarios para la resolución de problemas descriptivos con fracciones (Gómez, Sanz y Huerta, 2016).

Con un grupo de 111 estudiantes españoles, de entre 15 a 16 años de edad, de escuelas públicas de la Ciudad de Valencia se hizo una validación externa. Con los resultados de este estudio piloto se hicieron las modificaciones correspondientes.

A la población objeto de estudio se le aplicó el cuestionario. Las respuestas a las preguntas se categorizaron siguiendo las pautas de Taylor y Bogdan (1987): a) crear categorías, b) codificar los datos, c) separar los datos pertenecientes a las diferentes categorías, d) observar las respuestas que no se acoplen a las categorías y tratar de crear nuevas si fuese necesario.

## Procedimiento de aplicación

Los estudiantes contestaron las preguntas del cuestionario de forma individual en una sesión de 50 minutos. Se permitió el uso de bolígrafo, pero no de calculadoras, o de correctores que pudiesen impedir un correcto análisis de tipo cualitativo de las respuestas, así como de procedimientos y estrategias empleadas.

## Análisis de datos

El análisis de los datos tiene carácter cuantitativo y cualitativo. Para el primero se hace un análisis descriptivo de las respuestas usando el software estadístico IBM SPSS Statistics 22, que permitió generar perfiles, sin embargo, la clasificación y codificación de las respuestas se hizo con una primera mirada de tipo cualitativo para determinar características comunes de las actuaciones de los estudiantes. De estos perfiles, se elige un representante de las respuestas con la intención de ilustrar su tipificación.

## CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

En los siguientes apartados se describe el diseño de los diferentes componentes del cuestionario.

### Representación Gráfica (en adelante, RG)

Esta habilidad se eligió ya que en la resolución de los problemas descriptivos con fracciones una representación adecuada puede ayudar a interpretar el enunciado, a identificar relaciones entre los datos o incluso a resolver correctamente el cuestionamiento.

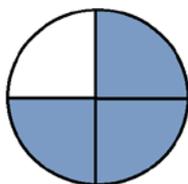
Cuatro tareas se diseñaron para este componente del cuestionario, las dos primeras se construyen a partir de la pregunta 5 del test de Nicolou y Pitta-Pantazi (2015). Se usan los datos y el enunciado que ellos utilizaron, varía el contexto discreto o continuo, porque los problemas descriptivos pueden incluir ambos contextos en sus enunciados.

1.1. Sandra tiene una cesta con 8 manzanas y vende la mitad de las manzanas, Luis de las manzanas de la misma cesta. Representa gráficamente qué cantidad han vendido Sandra y Luis por separado.

1.2. Sandra tiene una tarta y se come la mitad y Luis se come los  $\frac{1}{3}$ . Representa gráficamente qué cantidad han comido Sandra y Luis por separado, y qué cantidad han comido en total.

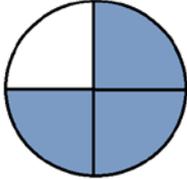
Las otras dos tareas se eligen por la característica común que tienen los problemas descriptivos con fracciones, el sintagma “de lo que queda”, que se traduce matemáticamente como parte del complemento de una parte. Para evaluar la RG del concepto parte de una parte de un todo se escogió la pregunta 22 del test empleado por Hart (1981).

1.3. Pinta  $\frac{1}{6}$  de la parte sombreada del disco. ¿Qué fracción del total has pintado?



A partir de esta tarea, se diseña una que evaluaría la RG del mismo concepto, pero se pone énfasis en la expresión “de lo que queda”.

1.4. Juan se ha comido  $\frac{3}{4}$  de un pastel. Pedro se come  $\frac{1}{6}$  de lo que queda. ¿Qué fracción del total se ha comido Pedro?



En la Tabla 1, se presenta la categorización de las tareas descritas antes.

**Tabla 1.** Categorización de las respuestas a las tareas sobre la RG

RG						
1.1 Contexto Discreto						
C.1 Sí representa con un conjunto	C.2 No representa usando un conjunto					C.3 De lo que queda
	C. 2.1	C.2.2.	C.2.3	C.2.4	C.2.5.	
	Modelo del Pastel	Área de Rectángulo	Recta numérica	Gráfico Barras	No dibuja	
1.2 Contexto Continuo						
C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	C.6	
Modelo del Pastel	Área de rectángulo	Recta numérica	No dibujó	De lo que queda	Cálculo del total	
1.3 Reconoce parte de partes						
C.1	C.2					
Dibujo	Cálculo					

1.4 Reconoce "lo que queda"						
C.1	C.2					
Dibujo	Cálculo					

Para las dos primeras tareas interesa saber si los alumnos son capaces de distinguir entre el contexto continuo y el discreto. Y en el caso del contexto continuo observar si ellos representan usando el modelo de área (círculo o rectángulo), o bien un modelo lineal (recta). En la Tabla 1 se incluye el gráfico de barras para el caso del contexto discreto, esto se debe a que en la validación externa del cuestionario un porcentaje elevado de estudiantes representaron con ese modelo.

Además, en las dos primeras tareas interesa identificar la interpretación de los alumnos, es decir, si resuelven a partir "de lo que queda" o del todo inicial. Esta diferenciación se introduce porque este cuestionario forma parte de un proyecto global en el que se pretende estudiar la resolución de problemas que tienen el sintagma "de lo que queda", como ya se ha comentado.

Respecto a las tareas 1.3 y 1.4 se evalúa, por un lado, si son capaces de representar directamente lo que se les pide, y por otro lado, si efectúan el cálculo.

## Resolución de Problemas (en adelante, RP)

Para evaluar la habilidad de RP se elige una única tarea, la cual corresponde a la pregunta 7 del test de Nicolau y Pitta-Pantazi (2015); se trata de un problema descriptivo en el que los datos son fracciones.

2.1. Sandra tiene una cesta con manzanas y vende la mitad de las manzanas, Luis de las manzanas de la misma cesta. ¿Quién vende más manzanas? ¿Qué cantidad han vendido en total? ¿Qué cantidad de manzanas queda en la cesta? Si en la cesta quedan 6 manzanas, ¿cuántas manzanas había al inicio?

Con esta tarea se evaluaron nociones de comparación de fracciones, adición, sustracción y el procedimiento utilizado para la resolución: algebraico o aritmético. La Tabla 2 contiene la categorización de las respuestas.

**Tabla 2.** Categorización de la tarea sobre RP

RP									
C.1 Comparación de Fracciones						C.2 Adición	C.3 Sustracción	C.4 Resolución	
C.1.1 m.c.m	C.1.2 número decimal	C.1.3 gráfica	C.1.4 fracción intermedia	C.1.5 Complemento de la unidad	C.1.6 Sin cálculo	C.2.1 Operación	C.3.1 Operación	C.4.1 Ecuación	C.4.2 Cuarto Proporcional

### Cálculo con fracciones (en adelante, CF)

La habilidad CF se escoge porque, pese a que en la literatura se apuesta por la enseñanza informal y sin reglas memorísticas, basándose únicamente en resolución de problemas (Leinhardt, 1988), en la educación secundaria mexicana se enseñan los algoritmos de las cuatro operaciones básicas entre fracciones sin referirse aparentemente a problemas realistas de acuerdo con las directrices de los programas de estudio (SEP, 2011b).

En el test de Nicolou y Pitta-Pantazi (2015) no se incluyen preguntas sobre el cálculo con fracciones (ver pregunta 3.1) ya que en primaria ese aspecto no se estudia en toda su extensión. Dado que el cuestionario diseñado para este estudio se aplicó a alumnos de 15 a 16 años, se considera que ellos deben ser competentes calculando con fracciones.

3.1. Calcula:

a)  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ ;      b)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$ ;      c)  $\frac{1}{4} \div \frac{3}{4}$ ;      d)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right)$ ;      e)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{7} \right)$ ;      f)  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{3}{4}$

**Tabla 3.** Categorización de las tareas sobre el CF

CF				
C.1 Adición/Sustracción	C.2 Multiplicación	C.3 División	C.4 Parte de partes	C.5 Jerarquía de operaciones
C.1.1 Con mismo denominador	C.1.2 Con distinto denominador	C.2.1 Si efectúa la operación	C.3.1 Si efectúa la operación	C.4.1 Si efectúa la operación
				C.5.1 Si efectúa la operación

Con la pregunta 3.1 se evalúan las cuatro operaciones aritméticas, así como la jerarquía de operaciones. Además, tras el estudio piloto, se decide incluir el cálculo de parte de partes, inciso f, debido a que una vez analizadas las respuestas a la Tarea 1.4, los alumnos eran capaces de representar, pero no de traducir a símbolo la expresión que allí se requería. En la Tabla 3 se incluye la categorización de esta tarea.

Para finalizar se debe remarcar que cada categoría será puntuada con 1 si se realiza y 0 en el caso contrario.

## RESULTADOS

Este apartado se divide en dos partes, una de ellas se relaciona con el cuestionario mismo y la otra versa sobre su aplicación.

### Validación del Cuestionario

La validación del cuestionario se midió siguiendo a Lacave, Molina, Fernández y Redondo (2015) a través de su fiabilidad y validez.

**Tabla 4.** Índice de homogeneidad de cada ítem para estudiar su reformulación en el test

	<b>Correlación total de elementos corregida</b>	<b>Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido</b>
Éxito Discreto – RG	<i>0,046</i>	0,742
Éxito Continuo – RG	<i>0,188</i>	0,726
Éxito Parte de partes – RG	<i>0,124</i>	0,725
Éxito Lo que queda – RG	<i>0,199</i>	0,721
Éxito Comparación – RP	0,366	0,705
Éxito Adición –RP	0,551	0,680
Éxito Substracción –RP	0,602	0,675
Éxito Ecuación –RP	<i>0,048</i>	0,727
Éxito Proporcionalidad –RP	0,522	0,686

Éxito Adición –CF	0,263	0,716
Éxito Substracción – CF	0,309	0,712
Éxito Multiplicación – CF	0,370	0,705
Éxito División – CF	0,396	0,701
Éxito Parte de Partes – CF	0,259	0,716
Éxito Jerarquía – CF	0,417	0,701
Éxito Global Cálculo – CF	0,328	0,715
Nota. En cursiva valores no significativos		

La fiabilidad hace referencia a la confianza que se puede tener sobre los datos obtenidos y se estudió haciendo primero un análisis de consistencia interna medida a través del coeficiente Alpha de Cronbach (0,724), que por el criterio de que el coeficiente es superior a 0,7 (George y Mallery, 2003, pág. 231), se puede afirmar que se ha construido un cuestionario aceptable.

Tras esto, se calculó el índice de homogeneidad para valorar el grado en que cada tarea contribuye a la consistencia interna del test. Se suelen eliminar o reformular aquellas cuyo índice sea menor a 0,2 (Barbero, Vila y Suárez, 2006). Según ese criterio, deberían ser revisadas todas aquellas tareas asociadas con la habilidad RG, así como con la resolución usando un método algebraico (0,048) (ver Tabla 4), pero debido a que son aspectos que se quieren evaluar, y que hay datos de sus respuestas en estudios precedentes y que, al quitarlos, la consistencia interna (0,724) no se modificaba de forma relevante, se decidió conservarlos.

**Tabla 5.** Correlación entre ítems y componentes definidas por el análisis factorial

	1	2	3	4	5	6
Éxito Sustracción –RP	0,870					
Éxito Proporcionalidad –RP	0,869					
Éxito Adición –RP	0,865					

Éxito Comparación-RP	0,549				0,525	
Éxito División – CF		0,785				
Éxito Multiplicación – CF		0,753				
Éxito Sustracción – CF		0,596				
Éxito Adición – CF		0,453				
Éxito Global Cálculo – CF			0,876			
Éxito Parte de Partes – CF			0,720			
Jerarquía – CF		0,534	0,541			
Éxito Parte de Partes –RG				0,783		
Éxito Lo que Queda–RG				0,683		
Éxito Discreto–RG					0,848	
Éxito Continuo–RG						0,754
Éxito Ecuación –RP				0,407		0,634

**Tabla 6.** Coeficientes de puntuación de cada componente para cada ítem tras el análisis factorial

	1	2	3	4	5	6
Éxito Discreto–RG	-0,078	-0,038	0,000	0,026	0,699	0,018
Éxito Continuo–RG	-0,016	-0,035	0,077	-0,190	0,176	0,678
Éxito Parte de Partes–RG	-0,063	0,030	-0,022	0,611	0,040	-0,173
Éxito Lo que Queda–RG	0,009	-0,130	0,101	0,493	0,038	0,091
Éxito Comparación –RP	0,193	-0,051	-0,158	0,097	0,382	0,114
Éxito Adición –RP	0,351	0,006	-0,047	-0,051	-0,101	-0,038
Éxito Sustracción –RP	0,334	-0,021	-0,007	-0,008	-0,060	0,013

Éxito Ecuación –RP	-0,083	0,081	-0,138	0,231	-0,219	0,553
Éxito Proporcionalidad –RP	0,368	-0,062	0,003	-0,049	-0,039	-0,133
Éxito Adición – CF	0,032	0,222	-0,137	0,180	0,001	-0,134
Éxito Sustracción – CF	-0,028	0,309	-0,002	-0,077	-0,119	0,086
Éxito Multiplicación – CF	-0,045	0,386	-0,042	-0,011	0,037	-0,135
Éxito División – CF	-0,053	0,428	-0,097	-0,074	-0,086	0,165
Éxito Parte de Partes – CF	0,021	-0,113	0,440	-0,017	-0,071	0,028
Jerarquía – CF	-0,092	0,182	0,272	-0,019	0,237	-0,035
Éxito Global Cálculo – CF	-0,080	-0,030	0,539	0,056	-0,020	-0,055

La validez del cuestionario permite determinar si se puede utilizar con el fin previsto, en nuestro caso, analizar el desempeño con el manejo de fracciones en tres habilidades. Para su estudio se hacen dos análisis, el del contenido y el del constructo. El primero se refiere a si el test posee todo el contenido referido al tema que se evalúa, y se sustenta a través de los juicios emitidos por especialistas de diferentes niveles educativos. El segundo trata de explorar el cuestionario y averiguar si las relaciones entre las tareas definen una estructura dimensional que se mantenga invariante y pueda servir de base para la interpretación de los resultados con distintas poblaciones (Lacave, Molina, Fernández y Redondo, 2015). Esto se evalúa a través de un análisis factorial, lo cual se hizo debido a que la medida de adecuación muestral KMO es superior a 0,5 (0,698), además de que el test de Barlett (0,000) para la relación entre tareas es menor al nivel de significación 5%.

La Tabla 5 muestra que las tareas quedaron agrupadas en 6 bloques y en la Tabla 6 se encuentran los coeficientes de puntuación de cada tarea en cada bloque, así si se quisiera dar una puntuación a cada estudiante sobre el desempeño con fracciones en las tres habilidades aquí medidas las puntuaciones deberían ser corregidas.

## Aplicación del Cuestionario

En primer lugar, se destacan los resultados generales en relación con las tres habilidades consideradas en el cuestionario. Se puede ver en la Tabla 7, que existen carencias en todos y cada uno de ellas. Pero se debe remarcar el 71,1% de respuestas correctas para el caso de la RG en el contexto continuo y el 3,9% en el CF.

**Tabla 7.** Porcentaje de éxito global en las tres habilidades estudiadas

Tarea	Categorización	Éxito (%)
RG	Discreto	30,6
	Continuo	71,1
	Parte de partes	6,1
	Lo que queda	5,6
RP		22,8
CF		3,9

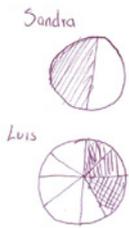
Con respecto a RG se observa en la Tabla 8, el éxito en la tarea planteada en un contexto continuo (92,2%) y además que el modelo del pastel es predominante (88,3%). Nótese que es el modelo del pastel también sobresale en la tarea formulada en un contexto discreto (25,4%). La Figura 1 contiene una respuesta de este tipo, se puede apreciar que el alumno no hace el segundo reparto de “lo que le queda” tras el primer reparto, sino, respecto del total (76,1% de las respuestas).

**Tabla 8.** Porcentaje de éxito para cada categoría de RG, respecto del total

RG	Categorización		Éxito (%)
Discreto	Si representa con un conjunto		30,6
	No representa usando un conjunto	Pastel	25,4
		Rectángulo	11,1
		Recta	0,6
		Gráfica de Barras	9,4
		No dibujó	11,7
	Aplica de lo que queda		23,9
Continuo	Pastel		88,3
	Área		3,9
	Recta		0
	No dibujó		7,8
	Aplica de lo que queda		10,6
Parte de partes	Dibujo		78,3
	Cálculo		6,7
Lo que queda	Dibujo		58,3
	Cálculo		5,6

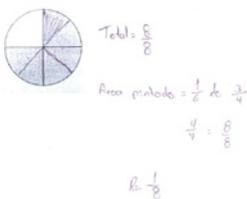
Observando lo que ocurre en las tareas de parte de partes y “de lo que queda”, el éxito con la representación (78,3% y 58,3% respectivamente) es elevado, pero contrasta con el hecho de que los estudiantes no tradujeron esa representación a una expresión numérica (6,7% y 5,6% respectivamente). Las respuestas 2a y 3a de las Figuras 2 y 3 contienen respuestas correctas, en las cuales hay evidencias tanto de

la habilidad de representar, como de la de expresar dicha representación usando símbolos.



**Figura 1.** Respuesta a tarea de RG con contexto discreto

Las respuestas 2b y 3b de las Figuras 2 y 3 son de alumnos que tienen dificultades para expresar numéricamente aquello que han sabido representar.



a)

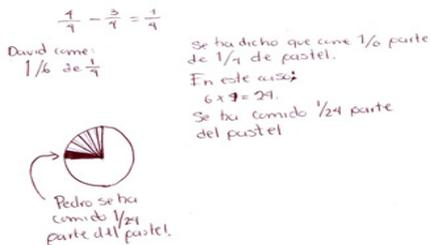


he ~~pintado~~ pintado  $\frac{1}{8}$  del total.

b)

**Figura 2.** Respuestas de RG en tarea parte de partes:

a) Dibuja y calcula y b) Dibuja, pero no calcula



a)

b)



**Figura 3.** Respuestas de RG en tarea "de lo que queda":

a) Dibuja y calcula (E17); b) Dibuja, pero no calcula (F8)

Si comparamos los resultados de RG de parte de partes (5,6%) (ver Tabla 8) con el CF (15,6 %) (ver Tabla 9), es interesante observar que el cálculo del algoritmo tiene más éxito que cuando se le da un contexto (enunciado y apoyo gráfico), aunque

sigue siendo bajo. De entre el 84,4 % (100-15,6, ver Tabla 9) de los alumnos que no tienen éxito en parte de partes, un 30% no respondieron, y un 54,4%, no realizaron la operación asociada a esta expresión (según Kieren, 1976, subconstructo operador) (ver Figura 4).

**Tabla 9.** Porcentaje de éxito para cada categoría de CF

CF	Éxito (%)
Adición	88,3
Substracción	62,2
Multiplicación	64,4
División	58,9
Parte de partes	15,6
Jerarquía	16,1

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{18-4}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$$

a)

b)

**Figura 4.** Respuestas acerca del CF a f): a) substracción y b) división

Dentro de CF, también se quiere destacar el resultado relacionado con Jerarquía de operaciones (16,1%), resulta sorprendente, debido a que es un conocimiento que debería haberse constituido con el estudio de la aritmética con números naturales. En este caso, cuando los alumnos no han tenido éxito, sus actuaciones son consistentes, no le dan prioridad al paréntesis en el resto de las operaciones, ver ejemplo en la Figura 5.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1+5}{15} = \frac{9}{15} \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{7} \right) = \frac{6-35}{14} = \frac{-29}{14}$$

$$\frac{9}{15} \cdot \frac{29}{14} =$$

**Figura 5.** Respuesta alumno (F8) acerca de cálculo con operaciones en apartado d)

Con respecto a RP, cabe notar que los resultados obtenidos en cuanto a las operaciones adición y sustracción (46,1% y 31,7%, ver Tabla 10) son muy bajos, lo mismo sucede con la comparación de fracciones. También es relevante comparar el uso del método aritmético para la resolución (29,4%) con el empleo del algebraico (1,7%).

**Tabla 10.** Porcentaje de éxito para cada categoría de la RP

RP	Categorización	Éxito (%)
Comparación	Mínimo Común Múltiplo	5
	Decimal	2,2
	Gráfico	17,8
	Intervalo	0
	Complemento a la unidad	0
	No calculó	42,2
Operaciones	Adición	46,1
	Substracción	31,7
Método	Algebraico (ecuación)	1,7
	Aritmético (proporcionalidad)	29,4

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como se mencionó al inicio de este artículo, el estudio descrito se enmarca en un proyecto de investigación por medio del cual se pretende identificar las relaciones entre habilidades que los alumnos, de entre 15 y 18 años de edad, manifiestan al usar fracciones y el desempeño al resolver problemas descriptivos con fracciones con una característica común: el sintagma “de lo que queda” que aparece en el enunciado.

El primer paso en este marco global es estudiar el desempeño de la población objeto de estudio al usar fracciones en distintas situaciones, medido ese a través de tres

habilidades: Representación gráfica, Cálculo con fracciones y Resolución de problemas. Para ello se diseñó y validó un cuestionario que consta de 6 tareas.

La validación del cuestionario ha sido exitosa por diferentes razones: a) la consistencia del instrumento medida por medio del coeficiente Alpha de Cronbach con un valor de 0,724, indica que el test es una herramienta fiable para medir y evaluar las tres habilidades sobre fracciones (de acuerdo con George y Mallery, 2003); b) la concordancia entre los ítems es buena y c) la validez del constructo que se hizo por medio de un análisis factorial que confirmó que el cuestionario se puede replicar en otras poblaciones, lo que permitirá seguir el proyecto en las siguientes edades en las que se engloba este estudio.

Una vez validado el cuestionario, se aplicó a una muestra de 198 alumnos mexicanos de escuelas públicas de entre 15 y 16 años de edad. Los resultados obtenidos en esta indagación ponen de manifiesto importantes carencias al uso fracciones en situaciones relacionadas con las tres habilidades evaluadas. Estos hallazgos son consistentes con lo obtenido en la prueba de PLANEA (2015) y el investigador mexicano García (2013).

En términos generales la habilidad con menor porcentaje de aciertos es Cálculo con fracciones (3,9%), lo que confirma los resultados encontrados por investigadores alrededor del mundo. Observando por separado los resultados vinculados con la adición y la substracción se puede apreciar que los porcentajes de éxito cuando los alumnos mexicanos hacen esas operaciones al efectuar un cálculo indicado numéricamente (88,3 y 62,2% respectivamente) son superiores a cuando los hacen en tareas con un contexto (46,1% y 31,7% respectivamente). Este hallazgo pareciera contraponerse con lo que Hart (1981) obtiene en su estudio. Ella afirmó que el éxito al hacer cómputos con fracciones disminuye con la edad debido a que los algoritmos convencionales se olvidan; además remarcaba que los alumnos podían resolver problemas verbales usando estrategias diferentes a esas reglas, en consecuencia, lo que encontró fue lo opuesto a lo que se obtuvo con la aplicación del cuestionario a los estudiantes mexicanos.

Con respecto a la multiplicación, los resultados confirman lo que Briht (1978, citado por Dickson, Brown y Gibson, 1991) obtiene en su investigación, el afirmó que la multiplicación resultaba más difícil que la adición (88,3% éxito en adición y 64,4% en multiplicación).

La división resultó ser la operación más difícil para los alumnos mexicanos de entre 15 y 16 años de edad (58,9% de acierto), resultados que son acordes con los obtenidos por Hart (1981) y Ward (1979, citado por Dickson, Brown y Gibson, 1991).

En cuanto a la Representación gráfica, los resultados obtenidos en el estudio descrito en este artículo concuerdan con lo que otros investigadores afirman. Llinares y Sánchez (2001) afirman que las secuencias de enseñanza para introducir las fracciones usan la representación en contextos continuos, esta situación se ve reflejada en el 71,1% de alumnos que representan gráficamente las situaciones con un contexto continuo de forma adecuada, frente al 30,6% de éxito con respecto a la representación de un contexto discreto. Además, se debe señalar que, de entre los alumnos que tienen éxito en el contexto continuo, el 88,3 % utilizan el modelo del pastel para hacer su representación, acorde con lo que Freudenthal (1983) afirma, que ese es el modelo que se usa con más frecuencia en la enseñanza.

Cabe destacar los bajos resultados obtenidos en relación con las situaciones vinculadas con el sintagma “de lo que queda” tanto en la representación gráfica, como en su cálculo directo (58,3% y 15,6% respectivamente). Se pudo poner de manifiesto que las tareas que incluyen este sintagma conllevan dificultades de interpretación, aunque los escollos son mayores con el cálculo, y, por tanto, se puede conjeturar que será uno de los principales obstáculos que enfrentarán los estudiantes para resolver problemas descriptivos con fracciones del tipo “de lo que queda”.

En líneas generales los resultados obtenidos ponen de manifiesto las carencias de los alumnos mexicanos de entre 15 y 16 años de edad al usar fracciones. Teniendo en cuenta que en el currículo de los primeros cursos de secundaria en México (SEP, 2011a; SEP, 2011b) se incluye el estudio de los contenidos vinculados a las habilidades con el uso de las fracciones que se evaluaron, se podrían hacer las siguientes preguntas: ¿qué ha ocurrido con la enseñanza de las fracciones en la educación básica? ¿Cuáles son las dificultades en el aprendizaje que lleva a las carencias en años posteriores?

Estas preguntas abren un camino en la investigación para estudiar el modelo de enseñanza vigente para la educación primaria y los primeros años de secundaria en México, con la intención de determinar los momentos en los cuales surgen las dificultades y de qué forma aparecen. Con esa información podría modificarse y enriquecerse el modelo de enseñanza de las fracciones.

## BIBLIOGRAFÍA

- Aurel, M. (1552). *Libro primero, de arithmetica algebraica*. Valencia: En casa de loan de Mey Flandro.
- Barbero, M.I., Vila E. y Suárez, J.C. (2006). *Psicometría*. Madrid: UNED.

- Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos*, 15(1), pp. 33-45.
- Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
- Dickson, L, Brown, M y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. España: Editorial Labor S.A, pp. 294-390.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales (Tesis de Doctorado)*. Cinvestav, México.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- García, P. (2013). *Cantidades relativas en los niveles medio superior y superior: reporte de una investigación decampo (tesis de maestría)*. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México, D.F.
- George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference*. 11.0 Update (4.ª ed.). Boston: Allyn & Bacon.
- Gómez, B., Sanz, M.T. y Huerta, I. (2016). Problemas Descriptivos de Fracciones. *Boletín*, 30(55), pp.586-604.
- Hart, K. (1981). 'Fractions': Children's Understanding of Mathematics. Inglaterra: Hart, K., John Murray, pp. 66-81.
- Katz, V. (2003), *A history of mathematics*, Addison-Wesley, Nueva York.— (ed.) (2007), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A sourcebook*, Princeton: Princeton University Press.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.). *Number and Measurement: Papers from a research workshop*. Columbus: OH: ERIC/SMEAC, pp. 101-144.
- Krowka, S.K. y Fuchs, L.S. (2017). Cognitive Profiles Associated With Responsiveness to Fraction Intervention. *Learning Disabilities Research & Practice*, 32(4), 216–230.
- Lacave, C., Molina, A.I., Fernández, M. y Redondo, M.A. (2015). Análisis de la fiabilidad y validez de un cuestionario docente. A: JENUJ 2015. *Actas de las XXI Jornadas de la Enseñanza Universitaria de la Informática*. Universitat Oberta La Salle ed. Andorra la Vella: Universitat Oberta La Salle, p. 136-143.
- Leinhardt, G. (1988). Getting to know: Tracing students' mathematical knowledge from institution to competence. *Educational Psychologist*, 23(2), pp. 119-144.

- Llinares, S. y Sánchez, M.V. (2001). Fracciones. Madrid: Síntesis.
- Llinares, S. (1997). Aprendizaje del profesor de matemáticas y reforma. Actas Prof-Mat97. (pp. 37-43). Figueira da Foz. Lisboa: APM.
- Nicolaou, A. y Pitta-Pantazi, D. (2015). The Impact of a teaching intervention on sixth grade student's fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding. Memorias de CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 309-315).
- Planea (2015). Documento online. Disponible desde [http://planea.sep.gob.mx/ba/prueba\\_en\\_linea/](http://planea.sep.gob.mx/ba/prueba_en_linea/) (último acceso 21/06/2018).
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- SEP (2011a). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Preparatoria. México: SEP.
- SEP (2011b). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. México: SEP.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A. y Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296.  
doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001.
- Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research. Netherlands: Springer.
- Taylor S. y Bogdan R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Barcelona: Ediciones Paidós. Ibérica. S. A.