TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

Szerkesztette:
Csapó Benő és Szendrei Mária

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

Tartalmi keretek
a matematika diagnosztikus értékeléséhez

TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

Szerkesztette
Csapó Benő
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet
és
Szendrei Mária
Szegedi Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszék

Nemzeti Tankönyvkiadó
Budapest

Diagnosztikus mérések fejlesztése
Projekt azonosító: TÁMOP 3.1.9-08/1-2009-0001

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Szerzők:

Csapó Benő, Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Terezinha Nunes, Szendrei Julianna, Szendrei Mária,
Szitányi Judit, Lieven Verschaffel, Zsinkó Erzsébet

A kötet fejezeteit lektorálta:

Kosztolányi József és Vancsó Ödön

ISBN 978-963-19-7211-5

© Csapó Benő, Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Terezinha Nunes, Szendrei Julianna, Szendrei Mária, Szitányi Judit,
Lieven Verschaffel, Zsinkó Erzsébet, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest 2011

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
a Sanoma company

www.ntk.hu • Vevőszolgálat: info@ntk.hu • Telefon: 06-80-200-788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 42686 • Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Felelős szerkesztő: Szilágyi Edit • Műszaki szerkesztő: Dobó Nándor
Terjedelem: 29,67 (A/5) ív • Első kiadás, 2011

5.

Részletes tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Gábri Katalin
Oktatási Hivatal

Lajos Józsefné
Oktatási Hivatal

Makara Ágnes
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

Szendrei Julianna
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

Szitányi Judit
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

Zsinkó Erzsébet
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

A matematika részletes értékelési keretek felépítése a bevezető fejezetekben kifejtett elméleti háttéren alapszik. Ebben a fejezetben háromszintű tagozódás érvényesül a következő séma szerint. A matematikai tanulásának három dimenziója határozza meg a fejezet elsődleges tagolását. Ezen belül is a pszichológiai elveket kiemelő fejezet került az első helyre, ezzel is hangsúlyozva, hogy csak az értelmi fejlődés természetes folyamataihoz igazodó, gondolkodást fejlesztő matematikatanítás lehet eredményes. A második helyre tettük a matematikai tudás alkalmazási szempontok szerinti leírását, és a harmadik alfejezetbe került a matematika szorosabb értelemben vett diszciplináris elvei szerinti áttekintés. A matematikára különösen érvényes a három dimenzió összefonódása, és ahogy az előző fejezetek többször hangsúlyozták, az elkülönítés elsősorban a részletes diagnosztikus értékelés céljait szolgálja. Természetesen a tanításban a három dimenzió integráltan, szinte észrevétlenül jelenik meg, és párhuzamosan szerepelnek a különböző dimenziók feladatai az értékelésben is.

A második szerkezeti tagolás az évfolyamok alapján történik. A tanulók közötti nagy különbségek miatt az életkor szerinti hozzárendelés csak hozzávetőleges lehet, ugyanakkor a több szintre bontással hangsúlyozzuk az egymásra épülést és a fejlődési alapelvet. A harmadik rendező szempontot a matematikatudományi alapokon meghatározott területek jelentik. Mivel a fejlesztés több évfolyamot átfog, ezek a tartalmak másmás szinten mindegyik évfolyamon megjelennek.

Az itt leírt szerkezeti felépítésből következik, hogy ez a fejezet 36 részfejezetre tagolódik. Az egyes életkori sávokhoz 12-12 egység tartozik; a matematikatudomány egyes területeit 9-9 részfejezet képviseli, a három tudásdimenzióhoz pedig szintén 12-12 részegység sorolható. Az egyes tudásdimenziók leírása vonatkozó elméleti fejezetekben (e kötet első három fejezete) megtalálhatók az életkori sávok alkalmazásának és a tudásterületek kiválasztásának szempontjai. A fejlődés sajátosságaiból következik, hogy egyes területek fejlesztésének súlypontja korábbra, másoké későbbre esik. Ezért az itt következő 36 rész nem minden tekintetben arányos vagy azonos mértékben részletes. A részletek további pontosítása azonban csak felmérések, az empirikus adatok birtokában lesz lehetséges.

A matematikai képességek diagnosztikus értékelése

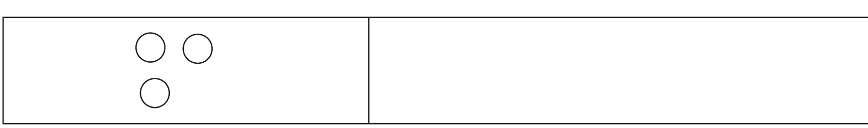
Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Az alsó tagozatos fejlesztés során a jól megtervezett konkrét cselekvő tevékenységekből, a diákok által megtapasztalt valóságból kiindulva, a valóságot bemutató vizuális, audiovizuális ábrázolásokon át jutunk el az absztraktabb rajzos, verbális, végül a jelekkel, szimbólumokkal történő megfogalmazásokig. A valóság, a fogalom és a szimbólum (jel) helyes összhangba hozása, egymásnak való kölcsönös megfeleltetése sok-sok tevékenységgel történik. Már óvodáskorban elkezdődik annak a képességrendszernek a fejlesztése, amelyet az egész számok értő használata jelez. Az egész számok – mint matematikai gondolkodáselemek – megfelelő szintű fejlettségét mutatja (többek között), ha az iskolába lépő tanuló számára világos, hogy nagyobb mennyiséget nagyobb szám reprezentál.

Egy jellemző óvodai feladat:

Rajzolj több karikát a jobb oldalra, mint amennyit a bal oldali keretben látsz!



Az első osztályban kiegészítjük a kérdéseket, utasításokat:

1. *Rajzolj 3 karikával többet a jobb oldalra, mint amennyit a bal oldalon látsz!*
2. *Írd le számtannyelven is, amit az ábrán látsz! (*Megoldás*: 3+3+3=9; 3+6=9; stb.)*

A második osztályban tovább bővül a kérdések matematikai tartalma:

1. *Rajzolj annyi kört a jobb oldalra, hogy az ábrán összesen 18 kört lássunk!*
2. *Írj összeadásokat, kivonásokat az ábráról!* (Megoldás*: 18-3=15; 3+3+12=18; 15-3=12; stb.*)
3. *Piros színnel kerítsd körül úgy a köröket, hogy minden kerítésen belül ugyanannyi kör legyen!* (Megoldás*: 1×18 kör vagy 2×9 kör vagy 3×6 kör vagy 6×3 kör vagy 9×2 kör vagy 18×1 kör*)

A közös élmények, tapasztalatok, az együtt végzett matematikai tevékenységek egyfajta közös hivatkozási alapot jelentenek egy osztály/csoport számára. Minél gazdagabb és mobilabb ez a hivatkozási alap, annál biztosabb, hogy a később elhangzó kérdések, állítások, egyéb megfogalmazások során minden tanulónál ugyanazt a képzetet, cselekvéssort, emléket, gondolatot hívjuk elő.

Számok

Az óvodából érkező gyerekeknek vannak emlékeik arról, hogy tárgyakat, képeket hasonlítottak össze, tulajdonságokat vizsgáltak, kapcsolatokat kerestek, viszonyokat próbáltak megfogalmazni a maguk szintjén. Az iskolában folytatódnak a jól előkészített és változatos tevékenységek, tudatosulnak a fogalmak tartalmi jegyei. A tanulók ezáltal megértik és jól alkalmazzák a több-kevesebb (pl.: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésekkel), ugyanannyi (pl.: párba állításokkal, mely párosítás e kapcsolat értő kialakításának módszere), kisebb-nagyobb, hosszabb-rövidebb illetve magasabb-alacsonyabb (pl.: összemérésekkel), stb. relációkat. A relációkhoz kapcsolódó jeleket (>; <; = szimbólumokat) a gyermeki környezethez, a mesevilághoz kapcsolódó elnevezéssel illetik (pl.: a róka szája arra nyílik, mert ott lát több tyúkot), de van, ahol a „relációs jel" megnevezést használják. (Óvatosan kell bánni a matematikai kifejezések korai bevezetésével, mert előfordulhat, hogy emiatt rosszul (pl.: szűkebb tartalommal) rögzülnek, s ez később hátrányt, meg nem értést okozhat a gondolkodásban.)

A megfigyelések, összehasonlítások sorozata képessé teszi a tanulókat az azonosításra, a megkülönböztetést segítő lényeges tulajdonságok felismerésére, megnevezésére, fokozatos absztrahálásra (pl. egy kiskutya két képen való ábrázolása közötti különbségek felfedeztetése), nemcsak a fizikai kontúrokra (pl. lehúzza vagy felemeli a kutyus a fülét), de akár érzelmi/hangulati állapotot kifejező különbségek észrevételére is (pl. nyugodtan ül vagy izmait megfeszítve, haragos képpel, nyitott szájjal van lerajzolva). A különbségek, változások megfigyelése, megbeszélése, tudatos kiemelése a műveletek képi megjelenítését vetíti előre, egyfajta előkészítés a műveleti szimbólumok számára.

A tevékenységek között a konkrét képeknek, ábráknak, rajzoknak jól választott mozgással (pl. sorozatok képzésekor felállás, leülés, különböző kéztartások), versikék szótagoló elmondásával (pl. egy elem kiválasztása „kiszámolókkal"), hangokkal (pl. dobbantás, koppantás, taps vagy akár valamely előénekelt hang) való leolvasása egyfajta „számlálást" jelent. Például:

Jelöljön a ♣ *egy tapsot, a* ♥ *pedig egy lábdobbantást.*
Az alábbi képet „olvassuk le" a jeleknek megfelelően!

♣♣♣♥♥♣♣♣♥♥♣♣♣♥♥♣♣♣♥♥

Találjatok ki mozgások, hangok segítségével különböző leolvasásokat!

A számlálás ugyanazon kép (szám) esetén is többféle módon történhet. Ezt sokan így fogalmazzák meg: „egy számnak többféle neve van". Ez azt jelenti, hogy a számot például bontott alakjaival, különbségalakokkal is kifejezhetjük. A felsorolt tevékenységek célja, hogy a tanuló legyen képes a tanult számkörben a biztos számlálásra, az elnevezések, jelölések emlékezetbe vésésére, felidézésre, alkalmazására.

A számfogalom kialakítását, fejlesztését általában három irányból közelítjük meg. Ehhez kapcsolódóan az alábbi oktatás-módszertani megfontolásokat tesszük:

Műveletek

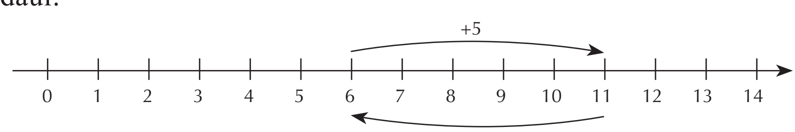
A matematikai képességrendszerben additív gondolkodásnak nevezett jelenség eklatáns megjelenési és értékelési területét jelentik az egész számokkal végzett matematikai műveletek. Maga az additív jelző szótárilag összeadásra utal, azonban tágabb értelemben ide tartoznak a mennyiségek, számosságok összehasonlítását megvalósító tudáselemek. Ezek a tudáselemek teszik lehetővé annak megértését, hogy adott mennyiségből valamennyit elvéve, majd ugyanazt hozzátéve a kiinduló mennyiséghez jutunk.

A számfogalom fokozatos kialakítását, mélyítését szolgáló tevékenységek során előkészítjük az összeadás (+) és a kivonás (−) műveletének matematikai tartalmú fogalmát: a számok különböző leolvasásával, az összegalakok (pl. 5 dió és 2 alma ugyanannyi darab, mint 3 alma és 4 dió) és különbségalakok leolvasásával: pl. egy képen jól látható, hogy 5 fiú közül 1 fiú nem evett, azaz 5 fiú közül 4 megette az ételt. Az 5−4 az 1-nek különbségalakja.

A pótlás (valamennyire kiegészíteni (pl. 3+△=7)) és a bontás (az összes két vagy több részre osztása (pl. 8=△+△)) tartalmilag elsősorban az összeadáshoz kapcsolódik, matematikai hátterét tekintve nyitott mondatok megoldását jelenti. A bontás lehetővé teszi egy szám sokféle előállítását, de egy szám előállítása pótlással és elvétellel is történhet (pl. a 4 szám 1-ből, 2-ből, 3-ból pótlással, míg 5-ből, 6-ból stb. elvétellel állítható elő). A változatos kirakások, a képes, szöveges szituációk során szerzett, még jellemzően szóban megfogalmazott tapasztalatok a műveletvégzés algoritmusát is jól előkészítik. Mire megjelenik az írásbeli lejegyzés, a műveleti jelek (szimbólumok) értése, alkalmazásuk biztos tudása a tanult számkörben jól megalapozott. Az első két évfolyamon elsősorban az összeadás, a kivonás fogalmát alapozzuk meg és mélyítjük fokozatosan (a 2. évfolyamon a 100-as számkörre kiterjesztve), valamint kialakítjuk az önellenőrzés igényét.

Kiemelt szerepet tulajdonítunk a számegyenes segítségével történő műveletértelmezésnek is.

Például:



A számegyenesen való kétirányú lépegetések összekapcsolják a műveletet és megfordítását. A nyilak jobbra mutatva a hozzáadást, balra mutatva az elvételt jelölik. Jól szemléltetik, hogy a 6-nál 5-tel nagyobb a 11, és a 11-nél 5-tel kisebb a 6.

Tevékenységek sorával készítjük elő a szorzás (egyenlő tagok összeadása), részekre osztás (pl. megjelenítéssel, jelölés, pl. 20/4 bevezetésével), bennfoglalás (megjelenítés, jelölés, pl. 20:4), maradékos osztás (kirakással, maradék megjelölésével) fogalmi jellemzőit.

A műveletek jellemzőinek, kapcsolatainak vizsgálata során az első évfolyamon elsősorban az összeadás tagjainak felcserélhetőségét, csoportosíthatóságát fedeztetjük fel a diákokkal, és kapcsolatot keresünk az összeadás és kivonás között. A második évfolyamon a tagok változtatása és az eredmény változása közötti összefüggést, a szorzás és osztás közötti kapcsolatot is megfigyeljük, és konkrét tárgyi tevékenységről leolvassuk a tényezők felcserélhetőségének értelmezését.

Algebra

A matematikatudományi szempontú tartalmi felosztásban az algebrai jelek és eljárások külön egységet képeztek a „Számok, számrendszerek" tudásterületen. A jelek kezeléséhez szükséges absztrakciót feltételezi a piaget-i értelemben vett konzerváció művelete, amely az additív és multiplikatív gondolkodás elemeként a matematikai gondolkodás alapelemét jelenti.

Relációk, függvények

A relációk és függvények témakör kiemelt szerepet játszik egyes gondolkodási képességek fejlesztésében. A multiplikatív gondolkodás elemei között említhetjük az induktív gondolkodást (azon belül a számsorozatokat, a szám- és szóanalógiákat), amelyek a „Relációk, függvények" témakörhöz tartoznak. Hasonlóan, az arányossági gondolkodás fejlesztése során megjelenik az egyenes arányosság függvényként való értelmezése.

A számlálás készségének fejlesztéséhez kapcsolódóan a tanulóknak csökkenő és növekvő számsorozatokat kell tudni folytatniuk a természetes számok körében, százas számkörben. Egyenletes változó sorozatok szabályait is föl kell ismerniük.

Folytasd a megkezdett sorozatot két taggal! Mi lehet a szabály?

1 4 7 10 13 ___ ___

A tanulóknak képesnek kell lenniük a periodikusan ismétlődő mozgások, ritmusok követésére és folytatására. Számsorozatok esetében fel kell ismerniük, hogy csökkenő, növekvő vagy periodikus sorozatról van-e szó.

Folytasd a sorozatot két taggal!

1   3   5   3   1   3   ___   ___

Hogyan folytatnád a következő sorozatot? Keress legalább kétféle szabályt!

2   4   6   ___   ___

Ugyancsak a multiplikatív gondolkodás alkalmazási területét adják az olyan feladatok, amelyekben számsorozatok vagy egyéb sorozatok (tárgyakból, egyéb elemekből), táblázatok elemei közötti összefüggéseket keresünk. A tanulók induktív és deduktív gondolkodási képességeit egyaránt fejlesztik ezek a feladatok. A képességfejlesztés szempontjából és a megoldások elbírálása szempontjából egyaránt fontos a szabályok sokféle megfogalmazási lehetőségét megbeszélni, megvitatni, értelmezni.

Figyeljétek meg az alábbi virágokból készített sorozatot, és válaszoljatok a kérdésekre!

a) Rajzold le a következő tagját a sorozatnak!
b) Milyen szabály szerint készítették ezt a sorozatot?
c) Ha folytatnánk a sorozat rajzolását, mit gondolsz, mi lenne a sorozat 12., 15., 20. tagja?

A szöveges feladatok egésze vagy egyes részei gyakran tartalmaznak olyan gondolatokat, melyek közös megvitatása nevelő hatású, ezért feltétlenül beszélgessünk róla (pl. szólhat a szöveg a környezetvédelemről, barátságról, önzetlen segítségnyújtásról, az uzsonna társakkal való megosztásáról, a kulturált együttélés feltételeiről, épülhet családi, ünnepi, földrajzi, történelmi, művészeti témákra).

A szöveges feladatokkal való rendszeres foglalkozás fejleszti a tanulók pontos, világos és értelmes kommunikációját, a szövegértés és -alkotás kompetenciájának megerősítését, a problémamegoldó gondolkodást, a kreativitást, az érvelésen alapuló viták, az ellenőrzés, az önellenőrzés igényének kialakítását.

A tanulóknak képeseknek kell lenniük 2. osztály végére olyan sorozatok szabályainak megállapítására és a sorozat folytatására is, amelyben a számsorozat tagjainak különbségéből célravezető a szabály megfogalmazása.

Folytasd a megkezdett sorozatot két taggal! Mi lehet a szabály?

1 3 6 10 15 ___ ___

A legtöbb számsorozat esetén létezik ugyan egy kézenfekvő szabály, amelyet a legkisebb kognitív erőfeszítéssel meghatározhatunk. Az induktív gondolkodás képességének egyik eleme éppen az, hogy a tanuló fölismerje az információelméleti szempontból „gazdaságos”, emiatt kézenfekvőnek vagy legintelligensebbnek nevezhető megoldást.

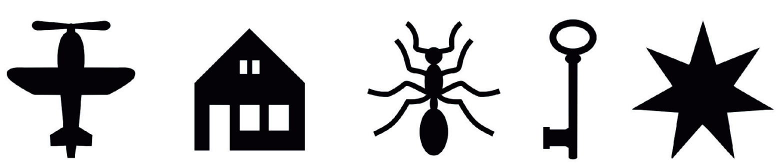
Azonban az induktív gondolkodás képességének fejlesztése mellett a divergens gondolkodás alakításának követelményéből következik, hogy minden olyan szabályt el kell fogadnunk megoldásként, amelyet a tanuló képes racionálisan levezetni. Az iménti feladat esetében például a számok közötti különbség mindig eggyel nő, vagyis a következő tag 6-tal lesz nagyobb, mint 15. A leegyszerűsítő, a sorozat információtartalmát nem kihasználó szabályalkotást is el kell ismernünk, azonban a tanórán megmutatjuk ilyen esetekben, hogy „több” van a sorozatban, mint például a két következő lehetséges leegyszerűsítő szabály: (1) egyszerű, monoton sorozat, ahol a soron következő tag nagyobb az előzőnél. Ha ezt a szabályt alkotjuk meg, akkor a folytatásban bármely két természetes számot elfogadjuk, amelyek a sorozat monotonitását biztosítják. (2) Gyakran előfordul kisiskolásoknál, hogy periodikusnak ítélnek meg egy számsorozatot, amelyet a feladat kitűzője nem annak szánt. Ebben az esetben a 15-öt az 1 és a 3 követné. A feladatok kitűzése során tehát vagy eleve adjuk meg a sorozat folytatásának szabályát (vagy legalább utaljunk a megállapítandó szabály típusára), vagy pedig a szabályalkotás elválaszthatatlan lesz a sorozat folytatásától.

Geometria

A matematikai gondolkodás rendszerében két képességet emelünk ki, amelyek szorosan kötődnek geometriai tartalmakhoz. Az intelligenciakutatás egyik élénken vizsgált képességterülete a térbeli gondolkodás, vagyis az embernek az a képessége, hogy fejben képes elforgatni síkbeli és térbeli alakzatokat, és azokkal műveleteket végezni, például geometriai transzformációként értelmezett forgatást. A geometria egyik részterületéhez, a méréshez pedig a multiplikatív gondolkodás részeként értelmezett arányossági gondolkodás kapcsolható. Mind a terület- és térfogatszámításban, mind a mértékváltásban adhatók olyan feladatok, amelyek lényegében az arányossági gondolkodás fejlettségét vagy annak hiányosságát jelzik. Az 1-2. osztályos követelmények között ez utóbbi képességet még nem említjük, az előbbiekben két, geometriai tartalmakhoz jellemzően kötődő képességterület említése volt a célunk. A térbeli gondolkodáshoz e korosztályban a következőkben leírt tartalmak kapcsolódnak.

A transzformációkkal létrejövő számtalan minta (a természetben, népművészetben, az épített környezetben, különböző emberi alkotásokban található mintákat is ideértve) megfigyelése előkészíti a szimmetriák, ismétlések, ritmusok, periodicitások matematikai értelmezését. A tevékenységek elősegítik, hogy *a tanulók képessé váljanak a szimmetriák felismerésére tapasztalati (manipulatív és képi) szinten. Legyenek képesek megkülönböztetni a tükörképet az eltolt képtől az összkép alapján.*

Másold át az alábbi ábrákat áttetsző papírra!



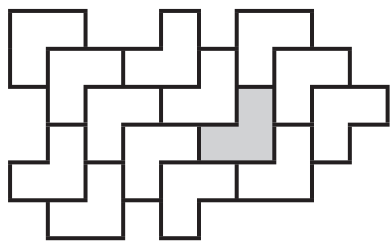
Próbáld ki, hogy mely ábrák hajthatók össze úgy, hogy a két rész pontosan fedje egymást?

Megoldás: az 1., 3., 5. alakzatok hajthatók össze a feltételnek megfelelően.

Jellegzetes feladat a térbeli képesség tesztelésére:

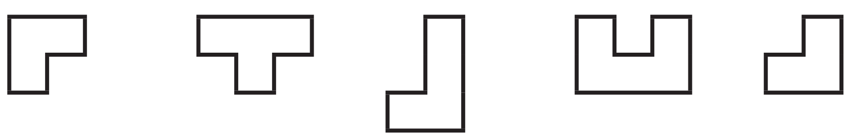
Színezd grafitceruzával azokat a lapokat, amelyek ugyanúgy állnak, mint a szürkére színezett lap!

a)



Karikázd be annak a lapnak a betűjelét, amelyikkel folytatható a fenti parkettázás! ~~**Húzd át**~~ annak a lapnak a betűjelét, amelyikkel nem!

b) *c)* *d)* *e)* *f)*

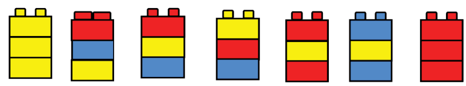


Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatív gondolkodás műveletei részben a kombinatorika matematikai tudásterületének elemeihez köthetők. A permutálás, a variálás és kombinálás matematikai jelenségeinek pszichikus megfelelőit feltárva számos olyan további képességelemhez jutunk (pl. adott halmaz összes részhalmazának megkeresése, a Descartes-féle szorzathalmaz generálása), amely az iskolai matematikaoktatásban nem tipikusan a kombinatorika része. A matematikai gondolkodás elemei között azonban ez utóbbiak is kétségkívül a mulitplikatív gondolkodás megnyilvánulásai, pszichológiai szempontból pedig a kombinatív gondolkodáshoz sorolhatók.

Általában a 2. évfolyam végére nem jutunk el önálló kombinatív képességrendszer kiépítéséhez, hiszen ez feltételezne valamely struktúrában való gondolkodást, ami viszont magas matematikai absztrakciós képességet igényel. Ezért a mérés során sem célszerű felvetni ilyen jellegű problémákat, hanem érdemes kis elemszám esetén értékelni a részképességek fejlettségét.

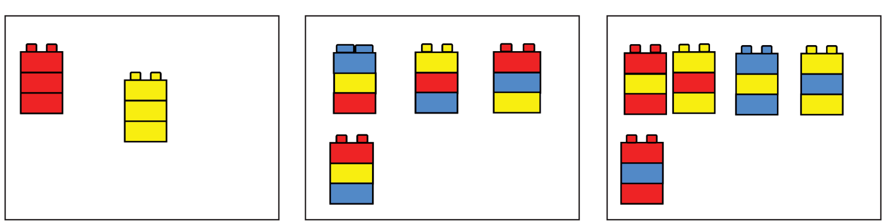
A továbbiakban néhány feladaton keresztül mutatjuk be a kombinatorika épülését az alapozó szakaszban:



Ebben a feladatban a problémát a szempont tartása jelenti. Megfelel-e a feltételnek (háromemeletes, piros, kék, sárga színek alkotják)? Nincs az új tornyok között olyan, ami már korábban szerepelt? A tanulók tudásának felmérése szempontjából fontos, hogy ki mennyi új objektummal bővítette a készletet, kinek sikerült a meglevőktől és egymástól is különbözőt alkotni.

Nehezítést jelenthet a feladat másfajta megfogalmazása:

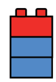
Piros, sárga és kék Lego-elemekből tornyokat építettem. Ezután három csoportba rendeztem azokat:



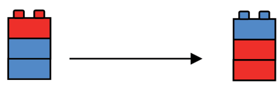
Milyet építhettem volna még? Rajzolj további tornyokat a megfelelő helyre!

A fenti feladatnál a rajz, és nem a szöveg mutatja a rendszerezés szempontját. A szempont megfejtése a feladat lényeges eleme (egy-, két-, illetve háromszínű tornyok). Ebben az elrendezésben azonban a teljes rendszer átláthatósága kérdéses. Kérdéses továbbá az is, hogy található-e más szempont is a megoldáshoz.

A második csoport elrendezése azt mutatja, hogy az egymás alatt lévő elemek a tornyok „megfordításával” jöhetnek létre. Ez a stratégia itt nagyon jól működik. Nem vihető viszont tovább a harmadik csoportra, hiszen itt a példák sorából kimaradt néhány jellemző elem, ezért nem tűnhet fel az esetleges hiány. Elképzelhető, hogy valaki a harmadik csoportban lévő elemek elrendezésében érez valamiféle szabályosságot, nevezetesen, hogy az elemek egymás inverzei. Ebben a rendszerben viszont nem garantált az összes elem megtalálása, hiszen a rajz nem mutat példát a következő típusra:



A feladatban tehát más-más stratégiát kell alkalmazni az egy-, két-, illetve háromszínű elemek megtalálásához. Elképzelhető, hogy valakinek épp a megoldási stratégia jelenti a szempontrendszer alapját, és a fenti elemet a második csoportba rajzolja, hiszen

ebből a toronyból:  ez a torony megfordítással jön létre.

A fenti feladat bemutatásával a kombinatorikai gondolkodás sokszínűségét szerettük volna illusztrálni, melynek egyenes következménye, hogy az értékelés során ebben a szakaszban meg kell elégednünk az adott feltételrendszerbe illeszkedő további néhány elem megtalálásával.

A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

A számfogalom fejlődésében az egész és a racionális számok megfelelő reprezentációja kulcsfontosságú. Az additív gondolkodás megjelenési formái között szerepelnek olyan képességek, amelyek elvezetnek a racionális számok reprezentációjához. A racionális számok a gondolkodásunkban a számláló és a nevező közötti viszony mentális leképezései. Már óvodáskortól előkészítjük a részekre osztás segítségével a törtszámok tapasztalati bázisát.

Az egész egyenlő részekre osztásával különféle mennyiségek (hosszúság, tömeg, űrtartalom, terület, szög) segítségével alakul az egységtört fogalma, majd az egységtörtekből több rész egybefogásával állítanak elő kis nevezőjű törtszámokat. Kétirányú tevékenységet végeznek ennek során a gyerekek. Vágással, tépéssel, hajtogatással, színezéssel, a részek összeillesztésével egységtörtek többszöröseit állítják elő, illetve az egészhez viszonyítva megneveznek előállított törtrészeket. Különféle mennyiségekből előállított törteket összehasonlítanak, nagyság szerint rendezik azokat, keresik az egyenlőket.

Az additív gondolkodási formák közé tartoznak olyan képességek, amelyek a számtani műveletek tulajdonságainak megfelelő elsajátítását teszik lehetővé. Az összeadás műveleti tulajdonságairól a gyerekek folyamatosan szereznek tapasztalatokat. A számolási eljárások lehetővé teszik, hogy a tanulók kellő biztonsággal válaszoljanak olyan problémafelvetésekre, amelyek konkrét számokkal végzett műveletek végzését vagy összehasonlítását igénylik.

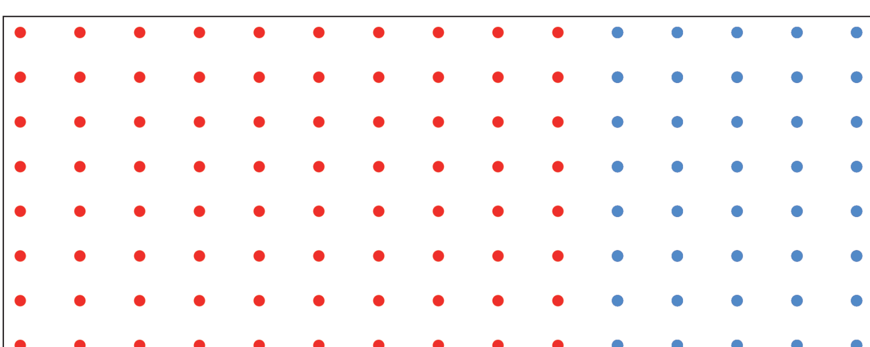
Például:

A Szabó család négynapos kiránduláson vett részt. Az első napon 380 km-t, a másodikon 270 km-t tettek meg, és ekkor elérték az útjuk célját. Visszafelé ugyanezen az úton jöttek. 400 km megtétele után értek az éjszakai szálláshelyre. Hány kilométert kellett megtenniük a negyedik napon?

Kirakások, szám- és szöveges feladatok kínálnak lehetőséget a zárójel egy számmá összekapcsoló szerepének gyakorlására, az összeg tagonkénti szorozhatóságára.

Például:

A rajz egy gyümölcsöskertet ábrázol. A piros körök almafákat, a kékek szilvafákat jelölnek. Hány gyümölcsfa van ebben a kertben?



Az írásbeli szorzás során tudatosan alkalmazzák a műveleti tulajdonságokat.

Például:

Melyik szorzás helyes?

a)

$$\begin{array}{r} \underline{263} \cdot 27 \\ 1841 \\ \underline{526} \\ 2367 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \underline{263} \cdot 27 \\ 1841 \\ \underline{526} \\ 18636 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} \underline{263} \cdot 27 \\ 1841 \\ \underline{5260\ } \\ 7101 \end{array}$$

Az írásbeli műveletek közül a legnehezebb eljárás az írásbeli osztás. Negyedik osztályban eszközhasználattal ismerkednek meg a gyerekek az egyjegyű számmal való osztással.

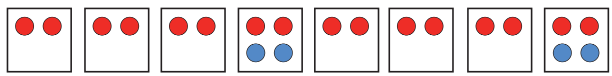
A műveletvégzések során biztonságot ad a gyerekeknek a többféle ellenőrzési módszer, amelyekkel az eljárás tanulásakor megismerkednek. Az ellenőrzés módszerei között megtalálható a becslés, a szorzás, az osztandó tagokra bontása, valamint a zsebszámológép használata.

Negyedik osztályban már általában lehetőséget teremtünk többféle megoldási mód keresésére és a megoldások összevetésére. Ily módon fejleszthető a modellek között létező kapcsolat felismerésének képessége. Tudatossá válik a gyerekek számára a különböző modellekben megjelenő adatok azonossága, az ábrázolások és a műveletek összekapcsolása. A különféle megoldási módok megismertetése, ezek értő alkalmazása biztosítéka annak, hogy új helyzetekben, megváltozott feltételek esetén is tudják a gyerekek ezeket az eljárásokat aktivizálni, szükség esetén a problémához illően módosítani. Így lesz a tanulók ismerete könnyen továbbfejleszthető. A többféle megoldási mód megismerése, összehasonlítása során a gyerekek megítélhetik azok célszerűségét, szépségét is.

Példa egy feladat többféle módon történő megoldására:

Egy magas hegy tetejére felvonóval lehet feljutni. Néhány felvonóban egyszerre ketten utaznak, néhány felvonóan pedig négyen. Egy 20 fős társaság 8 kabinban fért el. Hány két-, és hány négyszemélyes kabinban utaztak?

1. megoldás: *Tevékenységgel, eszközhasználattal*
A gyerekek maguk elé helyeznek 8 papírlapot, amelyek a kabinokat szemléltetik, előkészítenek 20 korongot, amelyek az utazókat modellezik. Elhelyezik a korongokat a papírlapon úgy, hogy minden lapra két, illetve négy korong jusson.



A kérdésre a választ a kialakult kép alapján fogalmazzák meg: 6 kétszemélyes és 2 négyszemélyes kabinban utazott a 20 fős társaság.

2. megoldás: *Próbálgatással, táblázat alkalmazásával*

A kétszemélyes kabinok száma	1	2	3	4	5	6
A négyszemélyes kabinok száma	7	6	5	4	3	2
A kétszemélyes kabinokban utazók száma	2	4	6	8	10	12
A négyszemélyes kabinokban utazók száma	28	24	20	16	12	8
Összes utazó száma	30	28	26	24	22	**20**

Ebből a megoldásból több információ is leolvasható, és olyan kérdésre is választ kapunk, amelyet az eredeti probléma nem fogalmaz meg. Például: 30 fő hogyan utazhat fel a hegyre nyolc kabinban?

3. megoldás: *Nyitott mondat segítségével*
Jelölje a felhasznált kétszemélyes kabinok számát: $\square$
Ezek szerint a felhasznált négyszemélyes kabinok száma: $8-\square$
A kétszemélyes kabinokban utazók száma: $\square \cdot 2$
A négyszemélyes kabinokban utazók száma: $(8-\square)\cdot 4$
Az összes utazó száma: $\square \cdot 2 + (8-\square)\cdot 4 = 20$
Ebből meghatározható, hogy a kétszemélyes kabinok száma 6.
(A gyerekek ennek meghatározásához a tervszerű próbálgatás módszerét alkalmazzák.)
A felhasznált négyszemélyes kabinok száma 2.

A fent bemutatott egyetlen feladat három lényegesen különböző megoldási módja példa arra, hogy nem várhatjuk a gyerekektől egyetlen séma alapján a problémák megoldását, nem ragaszkodhatunk szigorúan betartandó lépések követéséhez. Ezért jó, ha értékelésünk a helyes modellválasztásra és a modellen belüli problémamegoldásra irányul.

Ezeken az évfolyamokon megkezdjük későbbi fejlesztésre váró fogalmak, eljárások előkészítését anélkül, hogy ennek tudatosítása a gyerekek számára megtörténne. A szervezett tapasztalatszerzés csupán kezdeti lépése a hosszú folyamatnak (pl. következtetés törtrészről az egészre). A tantervvel összhangban a tanulók matematikai ismeretei a további évfolyamokon továbbfejlődnek, ezért indokolatlan elvárni tőlük a fogalmak pontos meghatározását.

Relációk, függvények

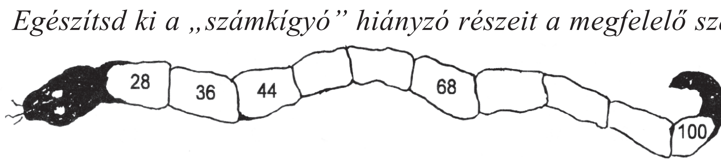
3–4. osztályban a tanulók tudnak egyszerű grafikont készíteni, róla adatokat visszaolvasni. Képesek szöveggel, képekkel adott helyzethez matematikai modellt keresni, azt az adatoknak megfeleltetni. Szükség esetén egyéb matematikai modelleket (sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok, grafikonok) használnak a szöveges feladatok megoldásához.

Az egyszerű összefüggéseket a tanulók felismerik, kifejezik példákkal, elemi általánosítással. Az összefüggések felismerése, kapcsolatok leolvasása történhet ábráról, táblázatból.

A megtanult ismeretek, a készségek, képességek értékelésére kezdetben az egyszerű utasítással megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben általában egy megtanult, begyakorlott lépés vagy lépéssor elvégzésére kérjük a tanulót. Előfordul, hogy még nem matematikai szimbólumokat használunk a feladat megszövegezésére, hanem rajzot, ábrát, és gyakran az elvégzendő lépéseket sem „matematikai” formában, hanem rajzban, valamilyen módon szemléltetve, sőt a mindennapi gyakorlatban valamilyen tevékenység formájában várjuk. A következőkben néhány példafeladattal szemléltetjük, milyen változatos tartalmú feladatok nyújtanak lehetőséget az induktív szabályfelismerés és -követés gyakorlására.

Folytasd az ábrák rajzolását a megkezdett módon:
¤ Δ Δ ♥ # ¤ Δ Δ ♥ # ¤ Δ ....

Egészítsd ki a „számkígyó” hiányzó részeit a megfelelő számokkal!



Folytasd az alábbi sorozatot 3 elemmel a megadott szabály alapján: az elemek közötti különbség mindig ugyanannyival nő.
1 3 6 ....
Keress Te is szabályt, és folytasd az alapján is a sorozatot!

Milyen jel van az (5;C) jelzéssel megadott négyzetben? ....

D		☺		⌂		⌂	
C	⌂		☼		☼		☼
B		☼		⌂		☼	
A	☼		☺		☺		⌂
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*

Színezd ki az alábbi utasítás alapján a megadott négyzetrács elemeit!

sárga: (3;f) (4;e) (4;g) (5;g)
piros: (2;f) (3;e) (3;g) (4;h) (5;e) (5;g) (6;f)
zöld: (3;c) (4;b) (4;c) (4;d) (5;c)
barna: (1;a) (2;a) (3;a) (4;a) (5;a) (6;a)

h						
g						
f						
e						
d						
c						
b						
a						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

Milyen szabályosságot találsz a barnával színezett négyzetek jelzőszámai között?

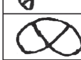
Az arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, nagyítás, stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására. A számok, műveletek és algebra fejezetekben is szerepelnek hasonló matematikai szerkezetű vagy tartalmú feladatok; az itteni megjelenést az indokolja, hogy ezeknél a feladatoknál a matematikai mélystruktúra kifejezetten adatpárok vagy függvények kezelését igényli.

Mennyibe kerül 6 kg burgonya, ha 4 kg ára 312 Ft?

Zsófi a 27 km hosszú kerékpárutat másfél óra alatt tette meg, egyenletes sebességgel. Mennyi utat tett meg 10 perc alatt?

A gyerekek lépésekkel mérik meg a tanterem hosszát. Csaba 18-at tudott lépni, amíg az egyik faltól a másikig ért, Julcsi pedig 24-et. Melyikük tudott hosszabbat lépni?

Nagyi az unokáknak péksüteményt készített, összesen 32 db-ot. Kiflit és perecet sütött. Melyikből mennyit?

	*5*	*6*	*7*	*10*					
	*27*								

Zoli hétfőn kapott egy malacperselyt, és egy 200 forintost. Ezt bedobta a perselybe, és minden este bedobott még egy 5 Ft-ost és egy 10 Ft-ost. Melyik napon lett a perselyben 320 Ft-ja?

A szöveges feladatok között nagy jelentőségűek azok, amelyek a valóság jelenségeit, valamilyen mozgást, változást írnak le. Leggyakrabban hőmérsékleti változást, növekedést, mozgást írunk le. Ezeket a változásokat kell a tanulóknak felismerniük, esetleg szemléltetniük, kapcsolatokat, összefüggéseket, szabályosságokat keresniük. A jelenségek leírásakor, szemléltetésekor lehetőség van a különféle helymeghatározás értékelésére. A következő feladatsorozat az összefüggések felismerésének és a szabálykövetésnek változatos tartalmú lehetőségeit illusztrálja.

Amikor Panni született, az édesanyja 25 éves volt. Hány éves most az édesanyja, ha Panni 9 éves? Hány éves lesz akkor Panni, amikor az anyukája 50 éves lesz? Mikor lesznek ketten együtt összesen 99 éve-

sek? Készíts táblázatot kettőjük életkoráról, és a táblázat adatai alapján fogalmazz meg más állításokat is!

Két város közötti távolság 190 km. Mindkét városból reggel 8 órakor indul el a másik város felé egy vonat. Az egyik vonat 50 km-t tesz meg egy óra alatt, a másik pedig 45 km-t. Készíts rajzot a mozgásukról, és állapítsd meg, mikor találkoznak!

Egy tározóban 4800 hl víz van. Egy szivattyú percenként 8 hl vizet emel ki belőle, egy csővezetéken keresztül pedig percenként 2 hl víz folyik bele. Mikor ürül ki a tározó?

Péter rejtvényt fejt. Egy négyzethálós papír valamely pontjából kiindulva kell a megadott utasítás szerint rajzolnia. A nyilak a mozgás irányát, a számok a lépések számát jelölik. Mit rajzolt Péter, ha pontosan követte az utasítást?

8↑ 5→ 2↓ 3← 1↓ 2→ 2↓ 2← 3↓ 2←

Geometria

A térbeli képességhez tartozó tudáselemek révén a tanulók képessé válnak síkbeli sorminták, terülő minták, parkettaminták létrehozására kirakással, színezéssel, sablonnal, és hálón való rajzolással.

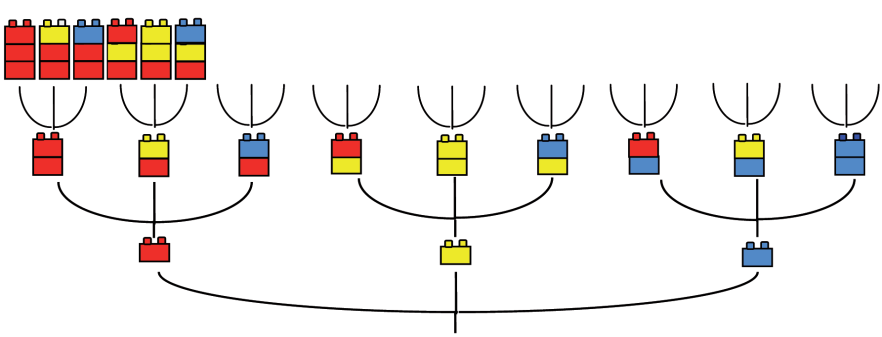
A mérés területén megjelenik a mértékváltás követelménye. A mértékegységek átváltását a tanulóknak csak olyan esetekben kell tudniuk, amelyekhez – elvileg – reális tapasztalat kapcsolódhat. Így ugyanis a mechanikus számolás technikáját (és ezzel együtt biztonságát) a valós tapasztalatokban gyökerező arányossági gondolkodás veheti át.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

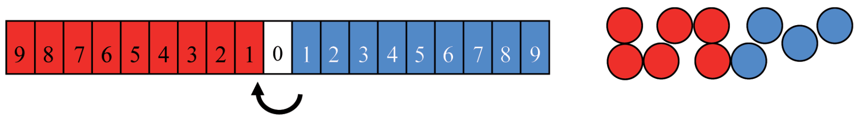
A kombinatorika és valószínűség témákban ezekben az évfolyamokban a rendszerezőképesség fejlesztése kerül a középpontba. Például a tanórán a gyerekek feladata lehet, hogy alkossanak háromszintes tornyokat, próbáljanak minél többfélét építeni. Keressék az összes lehetőséget. Az órán a tanító megkéri a gyerekeket, hogy figyeljék meg és gyűjtsék össze azokat az ötleteket, hogy melyek alapján tudják megállapítani: elkészült-e az összes lehetséges torony. A teljesség igénye nem feltétlenül alakul ki a gyerekekben önmagától, hosszabb idő után sem. Szükség lehet a tanító problémafelvetésére, segítségére: van-e még másmilyen, vagy ennyiféle van, és nincs több? Hogyan láthatja át a kisgyerek, hogy sikerült-e minden lehetőséget megtalálnia, vagy ha nem, miféle hiányzik még? Ennek egy fontos és jó lehetősége, hogy az elkészített tornyokat valahogyan „szépen” elrendezik maguk előtt.

Néhányan esetleg arra figyelnek, hogy milyen színű a torony alsó eleme, s külön rakják azokat, amelyeket pirossal kezdtek építeni, külön a kék és külön a sárga aljú tornyokat. Ez esetben ráérezhetnek arra, hogy a három csoportban ugyanannyi toronynak kellene készülnie, s ez támpont lehet a hiány megállapításához, esetleg a hiányzó építmény megkereséséhez is. Úgy szokták megfogalmazni, hogy „szimmetria-oka” van, hogy a három csoportban ugyanannyiféle torony lesz. Ennek a gondolatnak az a jelentése, hogy semmi sem magyarázná, miért lehetne többféleképpen folytatni az építést, ha alulra az egyik színt tesszük, mint ha a másikkal kezdtünk volna.

Ennek az elrendezésnek előnye, hogy továbbvihető: bármelyik színnel kezdték, középre ismét háromfélét tehetnek, s bármilyen is az alsó kettő, mindig háromféleképpen lehet befejezni a harmadik elemmel az építkezést. Ezt a rendszerépítést egy fához hasonlítható diagrammal szemléltethetjük (így is nevezik: „fa-diagram”):

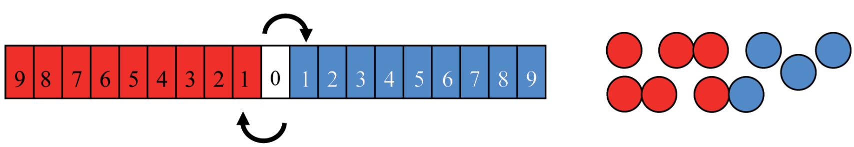


A valószínűségi szemlélet fejlesztése során rengeteg játék kerül kipróbálásra. Például korongokkal. A játékot párban játsszák. A pár tagjai a játéktáblán oldalt választanak maguknak, és egy, a 0-ból (fehér mező) induló bábut mozgatnak. Jobbra léphetnek egyet, ha a 10 korong feldobása után több a piros, mint a kék, és egyet léphetnek balra, ha több a kék, mint a piros korong. (Ha ugyanannyi, akkor nem lépnek.)



Példánkban jobbra lehet lépni egyet. A játékot az nyeri, akinek az oldalán áll a bábu mondjuk 20 dobás után. (Ha éppen 0-án áll, akkor döntetlen). A játék egyszerű, a valószínűségi érzés azt diktálja, hogy ugyanolyan jó választás a kék oldal, mint a piros. Amikor osztály szinten öszszevetik tapasztalataikat, ugyanezt állapíthatják meg.

Egy másik alkalommal két bábuval és 10 koronggal játszanak úgy, hogy „A" akkor léphet, ha a piros korongok száma páros, „B" pedig akkor, ha a kékeké páros. Mindkét játékos a saját bábuját mozgatja.



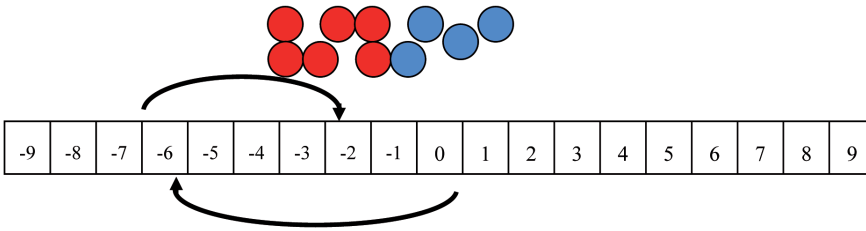
Példánkban mindkét játékos lép egyet. Néhány játékot le kell játszaniuk ahhoz, hogy megfigyeljék: a játék mindenképpen döntetlen lesz, hiszen vagy mindkét játékos léphet vagy egyik sem. Érdemes azonban megtréfálni a gyerekeket ezzel a problémával, hiszen így válik sajátjukká az a gondolat, hogy a 10 csak olyan összegre bontható, melynek mindkét tagja páros, vagy mindkét tagja páratlan.

Ha a korongok számát most 9-re változtatjuk, ismét olyan játékot játszunk, ahol a valószínűségek megegyeznek.

További megfigyeléseket tehetnek, ha a problémát általánosítják. Például más páros vagy páratlan számú koronggal játszanak. A fejlesztés során a tanulók számára sokkal inkább motiváló feladat megszerezni a páros és páratlan számok összegre bontásáról a tapasztalatot egy ilyen játék kapcsán, mint mechanikusan végzett műveletekkel.

Más didaktikai céllal ismét páronként 10 koronggal játszanak. Egy bábu 0-ról indul, de most a játéktáblát a számegyenes váltja föl. A korongok feldobása után annyit lépjenek negatív irányba, amennyi piros

korong esett az asztalra, és annyit pozitív irányba, amennyi kék korong esett az asztalra!
Például ezt dobtam:



Negatív irányba lépek hatot, majd onnan, ahová érkeztem, pozitív irányba négyet. Léphettem volna előbb a kék irányba négyet, majd a piros irányba hatot. (A végén vajon ugyanoda érek? Vagyis a kommutativitás működik akkor is, ha negatív számok is szerepelnek?)

Most tízet dobnak egymás után úgy, hogy a bábu mindig onnan lép tovább, ahol az előző dobás után megállt. A gyerekeknek a játék megkezdése előtt tippelniük kell arra, hogy 10 dobás után hová érkezik a bábu ezek közül a leggyakrabban: −6, −3, −1, 1, 3, 8. Lehetséges, hogy a 8-ba? Vagy a −3-ba? A játék megkezdése előtt minden lehetséges. A valószínűségről alkotott képünk azt diktálja, hogy a sok dobás valahogyan kiegyenlíti egymást, és valahol a 0 közelében érdemes tippelni. Igen ám, de most a 0 nem szerepel a lehetséges tippek között, ezért az 1 vagy a −1 esetleg a 3 vagy −3 is jó lehet.

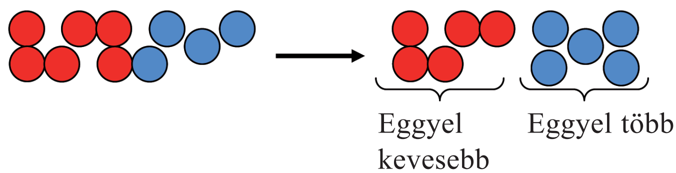
Ha lejátszottak néhány játékot, és a tanító végigkérdezi a gyerekeket, hogy melyik pár hova jutott, például a következő feljegyzéseket készíthetik: −2, −8, −2,− 4, 0, 0, 6, 6, 4, 8, 2, 2

Vajon *véletlen,* hogy mindenki páros számra jutott?

Egy újabb kör megerősítheti a sejtést, elkezdődhet a magyarázatok keresése. Összegyűjthetjük a lehetséges dobásokat, és az egy lépés hosszára vonatkozó lehetőségeket:

10 p = −10	10 k = 10
9 p +1 k =−8	9 k +1 p = 8
8 p + 2 k = −6	8 k + 2p = 6
7 p + 3 k = −4	7 k + 3 p = 4
6 p + 4 k = −2	6 k + 4p = 2
5 p + 5 k = 0	

Vagy egyszerűen csak azt figyelik meg, hogy mi történik, ha egyetlen kék korongot pirosra változtatunk:



Megint egy olyan összefüggés, amelyet ha a gyerekek maguk fedezhetnek fel, sokkal inkább magukénak érzik, mint a tanár szájából elhangzott mondatot: „Ha a kisebbítendőt eggyel csökkentem, és a kivonandót eggyel növelem, a különbség kettővel csökken."

Akárhogyan is dobunk tehát a 10 koronggal, az első dobás után mindenképpen páros helyre érünk. A további dobások során pedig minden esetben párosokat lépünk. A lépegetés során a gyerekek tapasztalathoz juthatnak a pozitív számok ellentettjének értelmezéséhez szükséges tevékenységről, pozitív és negatív számok összeadásáról, valamint arról is, hogy az összeg paritására vonatkozó összefüggés a negatív számok körében is érvényes marad. A valószínűségről alkotott fogalmak tekintetében élményszerűbb tapasztalathoz juthatnak *lehetetlen eseményről*, mint egy olyan elcsépelt és túlságosan átlátható példával, hogy két kockával dobva a dobott számok összege 13 nem lehet.

Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

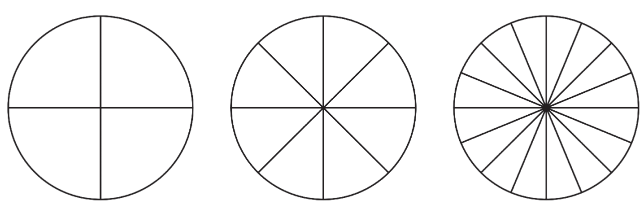
Számok, műveletek, algebra

5–6. osztályban az egész számok (pozitív és negatív egészek egyaránt) tetszőlegesen nagy abszolút értékig előkerülnek az iskolában, vagyis a számosságok korábbi évfolyamokban jellemző tapasztalati bázisát megtartva ki kell alakítani a „nagy" számok reprezentációit is. Matematikai szempontból tekintve ennek eszköze a számok normálalakja, pszichológiai szempontból nézve pedig az additív gondolkodás képességei. Az additív gondolkodás elemeként kialakul a számok nagyságára vonatkozó összehasonlításban a „kisebb, mint” és nagyobb, mint” relációk egymással felcserélhetősége.

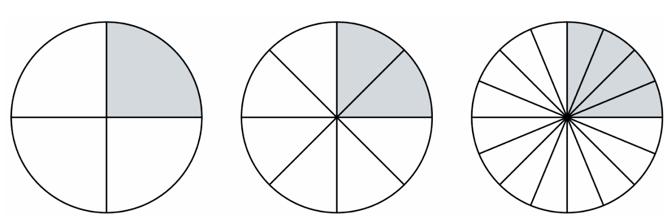
A tapasztalati bázishoz kapcsolható számok körében természetesen 5–6. osztályban is folytatódnak a változatos és céltudatos tevékenységformák: kirakások, vágások, bontások, helyiérték-táblázatok készítése, kitöltése, ezekből számok kiolvasása, szóban kimondott számok leírása, számegyenesen való ábrázolások, leolvasások, összehasonlítások stb. A sokoldalú tapasztalás segíti például a tört, tizedes tört, negatív szám fogalmának mélyítését, ugyanazon értékek sokféle megjelenítését (például bővítésekkel, egyszerűsítésekkel), és ugyanazon értékek különböző formában való megjelenítését (például tört tizedestört alakja és fordítva). Csak a sokszínűen megtapasztalt fogalmak, tartalmak lesznek maradandóak, mozgathatóak, előhívhatóak.

A törtek esetén is nagyon fontos láttatni (sok hajtogatással, kivágással, egyforma kockákból való kirakásokkal, változatos egységválasztással, rajzolással stb.) azt, hogy valamely egységet egyenlő részekre sokféleképpen oszthatunk, így egy adott törtértéket sokféleképpen jeleníthetünk meg.

Az alábbi ábrán három azonos sugarú körlapot felosztottunk 4, 8, 16 egyenlő részre.
Színezzük ki a körlapok negyedrészét!

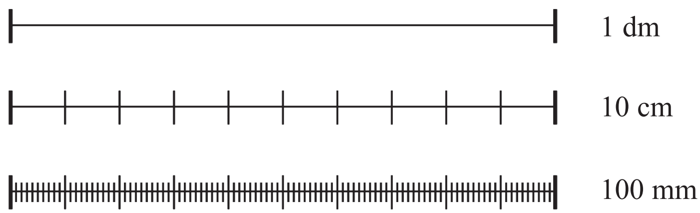


Megoldás:



Jól szemlélteti az ábra, hogy az 1/4=2/8=4/16. Ha ezek a körlapok egyforma tortákat ábrázolnának, akkor az 1/4 résznyi tortát elfogyasztó gyerek ugyanannyi tortát enne, mint a 2/8 részt vagy a 4/16 részt elfogyasztó gyerek. Csak az egyik 1, a másik 2 egyenlő, de kisebb, a harmadik gyerek 4 egyenlő, de még kisebb szeletet kapna ebből a tortából.

Jelöld be mindhárom szakasznak az ötödrészét! Írd le a kapott mennyiséget a szakasz végén látható mértékegységgel! Hasonlítsd össze a mennyiségeket!



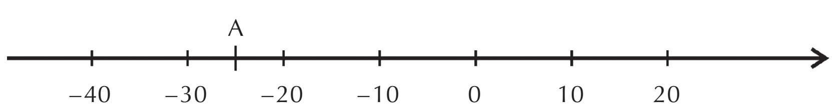
Megoldás: *Átlátszó papírra másolva, áthajtogatásokkal is megtapasztalhatjuk, hogy 1/5 deciméter éppen 2 cm (2/10 deciméter), és éppen 20 milliméter (20/100 deciméter), azaz igaz, hogy 1/5=2/10=20/100.*

Sok ilyen feladat megalapozza a törtek bővítése és egyszerűsítése fogalmának megértését, és az alkalmazás során történő átalakítások indokoltságát (közös nevező keresése).

Az egészek és törtek számegyenesen való ábrázolása jól szemlélteti a számok egymáshoz való viszonyának megértését, a számok növekvő, csökkenő sorrendiségét.

A számegyeneshez kapcsolódó kérdések megválaszolása a számfogalom és műveletfogalom megértését is mélyíti.

Válaszolj az alábbi kérdésekre!



Melyik a kisebb szám, a 20 vagy a −40?
Mely szám tartozik a számegyenes A-val jelölt pontjához?
Mekkora a távolság −10 és 10 között?
Rakd növekvő sorrendbe az 1,5; −17,8; 0; 65; −197 számokat abszolút értékük szerint!
Írd le növekvő sorrendben a −325; 3,25; 32,5; 0 és a 0,325 számokat!

A tanulóknak képessé kell válniuk a tanult számok számegyenesen való ábrázolására, illetve a számegyenes egy pontjához tartozó szám pontos vagy közelítő meghatározására, a számok nagyság szerinti összehasonlítására.

A felső tagozat első két évfolyamán is törekszünk arra, hogy szóbeli és írásbeli műveletek helyes sorrendű, jó eredményt adó elvégzése mellett a számolásokat egyszerűsítő, gyorsító módszereket, eljárásokat is megismertessünk (pl. a műveleti tulajdonságok, a zárójelek felhasználásával). Ez is erősíti a fogalmak mélyítését, a műveleti algoritmusok tudatosítását.

A 6. évfolyam végére a tanulók megismerkednek a racionális számkörben végzett alapműveletekkel.

A számológépek tanórai használatát csak az alapműveleti számolási algoritmusok megértésének, a végeredményt illetően kellően pontos becslés nyújtása képességének birtokában engedélyezzük. A papír-ceruza tesztelés gyakorlatában általában nem engedjük a számológép használatát. Ennek több oka közül az egyenlőtlen technikai feltételeket (és esetleg a számológépnek látszó, de annál jóval többet tudó technikai eszközök használatának problémáját) emeljük ki.

A különböző „tudású" zsebszámológépek akkor szolgálják tanítványaink érdekét, ha nem vállalják át a gondolkodás fejlesztéséhez szükséges lépések, műveleti elemek elvégzését idő előtt. A problémák megoldásának modellje fejben születik, a kivitelezéshez nyújtott eszköz lehet a számológép. Például, amikor az egyenletek megoldását tanítjuk, akkor fejben és írásban dolgoznak a gyerekek, mert megértetni és megtanítani szeretnénk a megoldás algoritmusát. A nehezebb szöveges feladatok esetén a matematikai modell felállítása a kihívás; ha a modell már megvan, akkor esetleg használható a számológép, a számítógép egyenletmegoldó programja. Ha például a becsült vagy kiszámított eredmény helyességét szeretnénk gyors visszahelyettesítéssel ellenőrizni, akkor szintén indokolt lehet a számológép használata. A konkrét feltételek ismeretében dönthetünk csak helyesen arról, hogy mikor és miért hagyjuk használni a számológépeket, számítógépeket. A használat vagy annak tiltása indokoltságát mindig értelmes pedagógiai érvek támasszák alá!

A fejlett informatikai környezet alkalmazása szükségessé teszi a jó becslőképesség kialakítását. Ha technikai okok miatt nem működnek a gépek, akkor a jó becslőképesség biztonságérzetet ad (pl. a kifizetendő/visszajáró összeg kiszámításában).

A szöveges feladatok megértésének új elemei

Az 5–6. évfolyamon a folyamatosan bővülő ismeretek (racionális számkörre kiterjesztett műveletek, a műveleti sorrend, az egyenes és fordított arányossággal és a százalékszámítással kapcsolatos ismeretek) lehetővé teszik összetettebb szöveges feladatok megjelenését. Elvárásként fogalmazódik meg a megoldások igényesebb kivitelezése (lejegyzési, esztétikai szempontból), tudatosul, hogy a kerekítés szabályait felülírhatja a valóság (pl. ha a méterben kapható drótkerítésből 56,3 méter kell, akkor 57 métert veszünk, ha a konkrét számított terület alapján a burkoláshoz 37,2 darab csempe kell, akkor minimum 38 darabot és még néhányat veszünk), fejlődik a becslési készség és az ellenőrzés, önellenőrzés igénye.

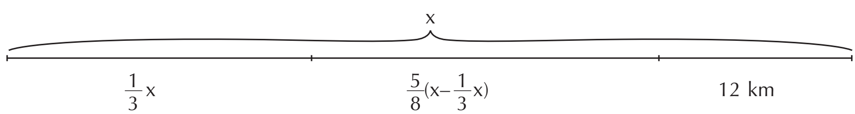
A szöveges feladatok ezen a két évfolyamon is elsősorban a következtetéses gondolkodás fejlesztését (pl. egyszerű elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása következtetéssel, lebontogatással), az arányos következtetések fejlődését (pl. szabványmértékek átváltása, egyenes és fordított arányosság, egyszerűbb százalékszámítási feladatok), a problémamegoldó képesség (problémafelismerés, problémaazonosítás és -megoldás) fejlesztését, az értő-elemző olvasás fejlesztését szolgálják.

A fejlesztés során folyamatosan tudatosulnak a tanulókban a szöveges feladatok megoldásának egymást követő lépései (a szöveg alapos megértése, értelmezése, a feltételek és a kérdés egyértelmű szétválasztása, az adatok (és felesleges adatok is) felismerése, a szövegből kiolvasható kapcsolatok, összefüggések felismerése, megállapítása, ábrázolása, lejegyzése, megoldási terv(ek) készítése, az eredményre vonatkozó becslés rögzítése, az eredmény kiszámítása (szóbeli és írásbeli műveletekkel), meghatározása, ellenőrzése, a becsült értékkel és a valósággal való összevetése, szövegesen megfogalmazott válasz elkészítése), fejlődik a többféle megoldás keresésének igénye.

A tanulóknak tudniuk kell egyszerű elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket szabadon választott módszerrel megoldani, egyszerűbb szöveges feladatokat, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel megoldani, képesnek kell lenniük a megoldások számegyenesen való ábrázolására. A megoldási módszerek közül − a következtetések mellett − ki kell emelni a rajzos, ábrás, szakaszos, számegyenest felhasználó módszereket. Sokszor ezek a rajzok, ábrák mutatják meg, hogy megértette-e a problémát, a feladatot a tanuló. A szövegek valamilyen konkrét rajzos, ábrás leképezése a lassan kialakuló absztrakt gondolkodás pillanatnyi szintjéről sok információt adhat a tanár számára.

Edit és Dani kirándulni mentek. Az első nap megtették a tervezett út harmadát, a második napon a hátralévő út 5/8 részét, így a harmadik napon csak 12 km-t kellett gyalogolniuk, hogy célba érjenek. Milyen hosszú volt ez a túraútjuk?

Megoldás szakaszokkal: *x a teljes túraút hosszát jelöli.*



12 km 3/8 része az egész út 2/3 részének,
4 km 1/8 része az egész út 2/3 részének,
8 · 4 km = 32 km az egész út 2/3 része.
Az egész út hossza: (16 + 32) = 48 km
Ellenőrzés a részek kiszámításával és összegzésével is történhet.

Keress összefüggést az alábbi mennyiségek között!
a) A karácsonyfa ára és magassága
b) Az autó menetideje és sebessége (az úthossz legyen 20 kilométer)
c) Egy születésnapi torta szeleteinek száma és a szeletek nagysága (egyenlő szeleteket vágunk)
d) A zöldborsó mennyisége és ára
e) A négyzet oldala és kerülete
f) A fagylalt ára és a gombócok száma

Megoldás: *A mennyiségek közötti helyes összefüggések felfedezése, megfogalmazása.*

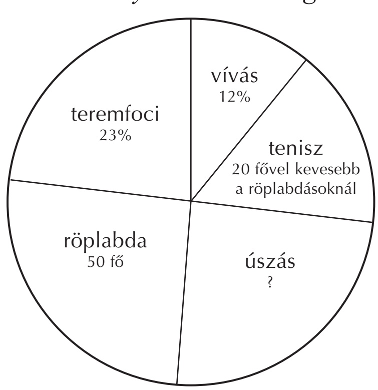
A tanulóktól várható válaszok például:
a) Ugyanazon fajtájú fenyő esetén a magasabb fáért többet fizetünk, mint az alacsonyabbért.
b) Ha egy autó kétszer gyorsabban megy, akkor fele annyi idő alatt teszi meg a 20 km-t.
c) Minél több egyenlő szeletre vágom a tortát, annál kisebbek lesznek a szeletek.

d) A borsóért fizetett ár egyenes arányban változik a borsó mennyiségével.
e) A négyzet oldala és kerülete egyenes arányban változik.
f) A gombócok száma és a fagyi ára arányosan változik.

A havi családi bevétel 48%-a a különböző tartozások, számlák kiegyenlítésére kell. Ebben a hónapban a megmaradt 104 ezer forintból a megélhetést (étkezés, ruházkodás, javítások, szórakozás, stb.) fedezi a család. Mennyi volt a családi bevétel ebben a hónapban?

Megoldás:
A megmaradt pénz (100-48)%, azaz a 104 ezer forint a havi családi bevétel 52%-a.
A családi bevétel 1%-a 2 ezer forint, a teljes bevétel tehát 100×2 ezer forint, azaz 200 ezer forint.
A feladat ellenőrzése: 200 ezer forint 48%-a 96 ezer forint, ez a 104 ezer forinttal együtt éppen 200 ezer forint.

200 sportoló megmondta a legkedvesebb sportágát. Az alábbi kördiagramon ezt ábrázoltuk. Hány százalékuk legkedvesebb sportága az úszás?



Megoldás:	*100%*	*200 sportoló*
	1%	*2 sportoló*
	23%	*46 sportoló (teremfoci)*
	12%	*24 sportoló (vívás)*
		50 (röplabdás)
		30 (teniszező)

Összesen: 46+24+50+30=150 sportoló
200–150=50 sportolónak az úszás a kedvence
50 éppen 200 negyede, azaz 25%-a.
A megkérdezett sportolók 25%-ának kedvenc sportága az úszás.
Ellenőrzés lehet például a részösszegek összeadásával.

Feladatszövegek konstruálásának követelményei

A felső tagozat kezdetén a kibővült matematikai ismeretek segítik a matematikai modellek szimbólumokkal való leírását. Ennek ellenére még ezeken az évfolyamokon is szükség van tevékenységekről, kirakásokról, képekről, ábrákról, rajzokról való szövegek, közlések, utasítások, kérdések leolvasására. Ha a számfeladatokhoz, nyitott mondatokhoz fogalmazott szövegek hibásak, akkor a problémás szöveghez érdemes megmutatni a jól illeszkedő számfeladatot, nyitott mondatot, és összevetni az eredetileg adott matematikai modellel. A különbségek, eltérések bemutatása segít a tanulónak abban, hogy megértse, hol hibázott. Ha valaki nem tudja (meri) elkezdeni a szöveg alkotását egy modellhez, akkor kezdje el a tanár, ezzel segítve, bátorítva a diákot a szöveg folytatására, befejezésére. Ha ez sem segít, mondjon a tanár több egyszerű adekvát szöveget, hogy pontosabban értse a diák, hogy mi is a feladata.

A helyes fejlesztés eredménye abban mutatkozik meg, hogy adott matematikai modellhez egyre összetettebb és egyre igényesebben fogalmazott szövegek alkotására lesznek képesek a gyerekek. A szövegek általában a matematikán belüli alkalmazásokra, a gyereket körbevevő mindennapi valóságra vonatkoznak, de irányítsuk a figyelmet a természettudományos műveltségterülethez kapcsolható szövegekre is. Jó támpontot adnak a megvalósításhoz az e területről vett speciális összefüggések (képletek) felhasználásával készült modellek (pl. út-idő-sebesség, mérési adatok közötti kapcsolatok, grafikonok alkalmazása).

Nórának 1200 Ft-ja volt. Elköltötte a 3/5 részét. Tegyetek fel kérdéseket a szöveghez!

Megoldás: *a) Mennyit költött Nóra?*
b) Mennyi pénze maradt meg?
c) 1200Ft-nak hányad része maradt meg?
d) Hány százalékát költötte el a pénzének?
Stb.

Mondj szöveget az alábbi számfeladathoz!
2(300+100) = 800
Megoldás például: *Volt 300 forint spórolt pénzem, nagypapámtól kaptam még 100 forintot. Apukám, tekintettel a születésnapomra, megduplázta a meglevő pénzemet. Hány forintom lett?*

Mondj szöveget az alábbi nyitott mondathoz!
2(1kg + 3kg) = x kg
Megoldás: *Katit kétszer küldte el a mamája a boltba, és mindkétszer 1 kilogramm cukrot és 3 kilogramm burgonyát kellett vennie. A két vásárlással hány kilogramm árut vitt haza?*

Írj szöveget az alábbi nyitott mondathoz!
2 (30 + x) = 200
Megoldás: *Egy téglalap alakú földterület egyik oldala 30 méter, a kerülete 200 méter. Mekkora a másik oldala?*

Írj szöveges feladatot az alábbi összefüggéshez!
a×b = 50, (a és b pozitív egészek)
Megoldás: *Egy téglalap területe 50 egység. Mekkorák az oldalai?*

Érdemes kiszámíttatni az oldalak hosszát, mert itt több megoldási lehetőség is adódik. 50-et felbontjuk két tényező szorzatára az összes lehetséges módon: 1×50; 2×25; 5×10. A tényezők felcserélésével nem kapunk az előzőektől különböző megoldást, új téglalapot. Így az oldalak 1 egység és 50 egység hosszúak, vagy 2 egység és 25 egység hosszúak, vagy 5 egység és 10 egység hosszúak.

Relációk, függvények

A tanulók korábbi, arányossági következtetésen alapuló feladatmegoldására építve megismerik az egyenes arányosság fogalmát, meghatározását. Képessé válnak felismerni az egyenes arányosságot gyakorlati jellegű feladatokban, valamint a természettudományos tárgyak tanulása során is. Biztonságosan oldanak meg a mindennapi életben felmerülő, egyszerű, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel.

A változó mennyiségek közötti kapcsolatok vizsgálata során a tanulók tapasztalatot szereznek a fordított arányosság felismerésében, összetartozó értékpárjainak meghatározásában.

Az arányossági következtetések fejlesztik a tanulók összefüggéslátását, következtetési képességét. A tanulók képessé válnak egyszerű példákban az összefüggések felismerésére, kapcsolatok meghatározására. Legegyszerűbb és korábban is gyakran előforduló lineáris összefüggések esetén képesek hiányzó elemek pótlására, az adatok táblázatban való ábrázolására. Találkozniuk kell nemlineáris összefüggésekkel is, sőt célszerű ugyanannak a jelenségnek több nézőpontból való megvizsgálása is.

Az induktív gondolkodás fejlődésének ebben az életkori szakaszában a tanulók képesek hiányzó elemeket meghatározni, illetve ismert elemek esetén szabályt megfogalmazni. Tudnak szabállyal megadott sorozatot folytatni, néhány eleméből szabályt megadni. Képesek a felismert szabály formulával való megadására.

Ezen az iskolaszakaszon tovább fejlődik a tanulók helymeghatározó képessége. Tudnak számegyenesen adott tulajdonságú pontokat megkeresni, számintervallumokat ábrázolni, a kisebb, nagyobb, legalább, legfeljebb kifejezéseknek megfelelő adatokat szemléltetni, illetve ábráról leolvasni. Ismerik a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, az azzal kapcsolatos fogalmakat (tengelyek, origó, jelzőszám, koordináták, síknegyed). Tudnak a koordináta-rendszerben konkrét pontokat ábrázolni, pontok koordinátáit leolvasni.

Táblázattal megadott összefüggésekhez tudnak grafikont készíteni, valamint grafikon alapján megadni a táblázat elemeit. Az elsőfokú függvényt felismerik, pontjai alapján ábrázolni tudják. Képesek a gyakorlati életből vett egyszerű példákban a kapcsolatok felismerésére, lejegyzésére, ábrázolására. Az egyenes arányosság alkalmazásával, arányos következtetéssel egyszerű százalékszámításos feladatokat oldanak meg (pl. bevásárlás, takarékosság, napirend). Ennek gyakorlása során, a számításhoz szükséges algoritmusok felfedezésével és használatával párhuzamosan megismerik a százalékszámítás alapfogalmait: alap, százalékláb, százalékérték.

A megtanult ismeretek, készségek, képességek bemutatására kezdetben a matematikai szimbólumokkal megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben minden „zavaró tényező” nélkül közvetítjük a feladat matematikai struktúráját, legtöbbször utalunk azokra a műveletekre, algoritmusokra, amelyeket a megoldás során használni kell, sőt gyakran a feladat szövegében is szerepelnek matematikai szimbólumok.

Számítsd ki 120-nak a 15%-át!

Készíts megfelelő beosztású számegyenest! Ábrázold az adott tulajdonságú számokat! $-3 \leq x < 9$ *és x egész szám.*

Ábrázold koordináta-rendszerben az A(−2;1), B(3;1), C(4;3) és D(−1;3) pontokat! Kösd össze azokat ábécésorrendben! Mi az így kapott síkidom neve?

Rajzolj olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyeknek a második jelzőszáma nagyobb, mint az első!

Milyen kapcsolat van az alábbi táblázat adatai között?

eltelt idő (óra)	1	2	3	4
megtett út (km)	4	8	12	16

Keress szabályt az alábbi táblázat adataihoz! A szabály alapján pótold a hiányzó adatokat!

x	8	4	2		0
y	4	8		1	

Az utolsó három feladat példa arra, hogy az alkalmazásnak ezen a legegyszerűbb szintjén is lehet olyan feladatok megoldása elé állítani a tanulókat, amelyekben többféle helyes válasz, megoldási lehetőség is felmerül. Az ilyen jellegű feladatokkal is előkészíthetjük az összetettebb, problémajellegű, autentikus feladatokkal való foglalkozást. Természetesen ez a szempont a tanítás során merülhet csak fel, az értékelésnél ilyen esetben utalni szükséges a több megoldás lehetőségére.

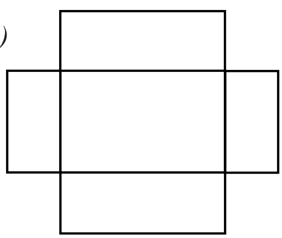
Geometria

A korábbi évfolyamokon szerepelt két képesség (térbeli és arányossági) mellett, köszönhetően az 5–6. évfolyamra gyarapodó fogalmaknak, lehetővé válik geometriai tartalmakhoz is többféle olyan feladatot alkotni, amelyek az induktív, deduktív és rendszerezési képesség fejlettségének diagnosztizálására alkalmasak.

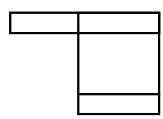
Jellegzetes feladat a térbeli képesség tesztelésére:

Egészítsd ki az ábrákat úgy, hogy mindegyik egy-egy téglatest hálója legyen!

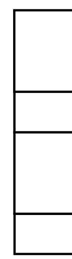
a)



b)

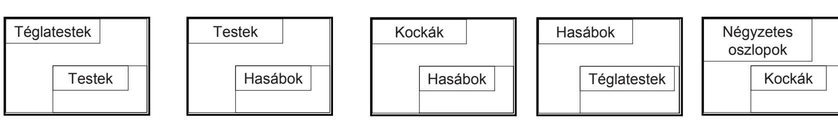


c)



Példa olyan feladatra, amely a rendszerezési képesség működését méri geometriai tartalmon:

Megfelelő helyre kerültek-e az alábbi halmazábrákba beírt elnevezések? Karikázd be annak a halmazábrának a betűjelét, amelyiknél igen, és ~~húzd át~~ azét, amelyiknél nem!



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Végül egy olyan példát mutatunk, amelyben többféle matematikai képesség felhasználása várható a megoldás során, így például deduktív és kombinatív képességelemeké is:

Három azonos méretű flakon együttes űrtartalmának kerekített értéke 2 liter. Egy flakon űrtartalmának dl-ben megadott értéke egész szám. ***Válaszolj*** *a következő kérdésekre!*

a) Legfeljebb hány dl lehetett a három flakon együttes űrtartalma? ....

b) Legalább hány dl lehetett a három flakon együttes űrtartalma? ....

c) Legfeljebb hány dl-es lehetett egy flakon? ....

d) Legalább hány dl-es lehetett egy flakon? ....

e) ***Add meg*** *dl-ben egy flakon minden lehetséges űrtartalmát!* ....

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika esetében az alapkészségek fejlesztése és a szaktantárgyi tudás elmélyítése ebben a korosztályban is egyaránt releváns célkitűzés. A kombinatív és a korrelatív gondolkodási képességek tartalomhoz kötött fejlesztésének lehetősége mellett sor kerül az adatkezelés és -ábrázolás, valamint a halmazelméleti alapokon álló valószínűségi események matematikailag adekvát megalapozására. A korrelatív gondolkodás képessége a matematikai gondolkodás rendszerében a multiplikatív gondolkodás egyik formájaként értelmezhető. Adatsorok közötti összefüggés felismerése és a kapcsolat megfogalmazása a feladat, ahol az összefüggés nemcsak hogy nem lineáris, hanem általában nem is adható meg egyszerű képlettel (sőt, sokszor nem is determinisztikus a kapcsolat). A matematikai jelenségek világában a korrelatív gondolkodás fejlesztési és értékelési területe a statisztikai jelenségek világa. (Kevéssé értékesnek tarthatjuk az olyan korrelatív összefüggések megfogalmazását, mint pl. „Minél több csúcsa van egy sokszögnek, annál több átlója van” vagy „a nagyobb számoknak a köbe is egyre nagyobb”. A korrelatív gondolkodás fejlesztésére tehát elsősorban a statisztikai jelenségek megtapasztalása során van lehetőség.

A matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése

Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Kisiskolás korban a szöveges feladatoknak kettős szerepük van. Egyrészt, megjelennek a műveletek értelmezésénél, másrészt a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében. Mindkét esetben jellemző, hogy a szöveg a hétköznapi élet tapasztalatait vagy a gyermeki fantáziavilág jelenségeit fogalmazza meg, lehetővé téve ezzel a gyerekek számára a történet elképzelését, illetve modellezését. Kezdetben, 1–2. osztályban még nem várhatjuk el a szöveges feladatok megoldási menetének tudatos alkalmazását, szükséges a tanítói segítségnyújtás javaslatokkal, egyszerű kérdések megfogalmazásával.

A szöveges feladatok kezdetben tevékenységeket, történéseket kísérő megfogalmazások, amelyek eljátszása illetve utánzása vezet el a megoldáshoz. A feladatok attól válnak realisztikussá, hogy a feladatmegoldás során aktív szerephez jutnak a hétköznapi tapasztalatok, a memóriában elraktározott vizuális és egyéb képzetek, és ezeket fölhasználva alkot a tanuló egy matematikai modellt a feladatmegoldás folyamán.

Nézd meg alaposan az alábbi képet, és mondj róla egy rövid mesét, történetet! Mondj a képről számfeladatokat is!

Az ilyen típusú feladatok megoldási útmutatójának általában része a matematikai fogalmak és szimbólumok azonosítása, de ugyanakkor a helytálló, a valóságos tapasztalatokkal összeegyeztethető matematikai modellalkotás válik meghatározóvá.

Nyilvánvaló, hogy ugyanaz a feladat szöveges rutinfeladat lehet magasabb iskolai évfolyamon, és realisztikus feladatnak minősülhet alacsonyabb évfolyamokon. A következő példafeladat az 1–2. osztályos tanulók többsége számára feltételezhetően a realisztikus kategóriába esik, míg a felsőbb évfolyamos tanulók számára egyszerű rutinfeladat.

A gyerekek három szem szilvát kapnak ebéd után. Hány szem szilva kerül arra az asztalra, ahol 6 gyerek ebédel?

Az osztály tanulói közül 6 gyerek eljátszhatja az ebédlő asztalnál ülő gyerekeket. Minden gyerek kap 3 szem szilvát. A gyerekek megállapítják, hogy összesen hány szem szilvát kaptak.

Segíti a szöveg értelmezését, ha a szöveg egy adott képről vagy kialakult helyzetről szól. A képről alkotott szöveg mintául is szolgálhat a fordított irányú tevékenységekhez, amelyekben a gyerekek feladata a szöveghez illő képalkotás. A feladatok realisztikus jellegét adhatja a tanulók – képhez kapcsolódó – élményeinek megfogalmaztatása, olyan kérdések alkotása, amelyek a kép alapján megválaszolhatók.

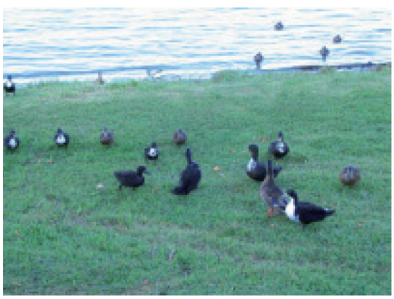
Például:

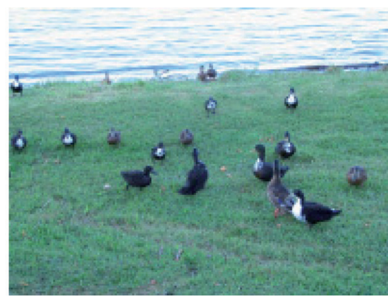
A kertben tulipánok és fehér nárciszok nyílnak. Hány tulipán nyílik a kertben, ha 2 tulipán piros és 3 tulipán sárga?
Mennyivel több nárcisz nyílik, mint amennyi tulipán?

A szöveges feladatok számfeladatokra, illetve nyitott mondatokra fordítását jó, ha megelőzi a változásokat jól szemléltető képpárral való megjelenítés. A képpárról való olvasás, a szöveg és a képpár összekapcsolása jelzi az adott és a hiányzó adat közti kapcsolat felismerését. A valóságos szituációkat idéző képpárok valóságtartalmú feladatok alkotását teszik lehetővé.

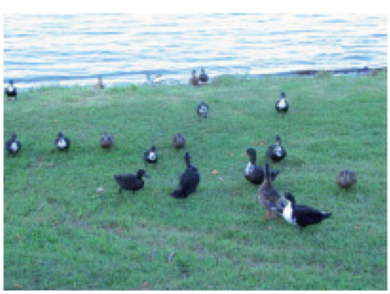
Például:

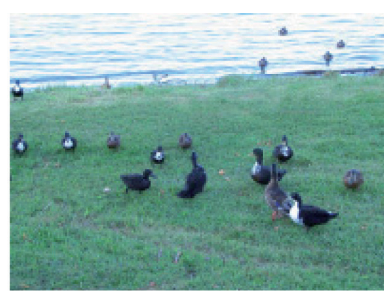
Mondd el, mi történt a két fotó készítése közben, ha ilyen sorrendben készültek a felvételek!





Mi történt, ha ebben a sorrendben készültek a felvételek?





Az elmeséléssel, illetve elmondással adott szöveges feladat realisztikussá válik a gyerekek számára, ha megjeleníthető tárgyi tevékenységgel vagy rajzzal. Az eszközök és a rajzok kezdetben tárgyhűek, azt szemléltetik, amiről a történet szól. Később elvárható egyszerűbb rajzok, absztraktabb ábrák értelmezése is. Ez a folyamat egyúttal azt is jelzi, ahogyan egy autentikus, tevékenykedtető feladat rutinszerűen megoldható szöveges feladattá válik a fejlődés során.

Édesanya 6 gombot varrt Évi kabátjára, 2-vel kevesebbet, mint Petiére. Hány gomb kellett a két kabátra összesen?

1. szint: Valódi gombok kirakása két kabát rajzára.
2. szint: Gombok helyett korongok kirakása a gyerekek neve alá.
3. szint: A gombok számának megfelelő körök vagy pöttyök rajzolása a gyerekek nevének kezdőbetűje után.

További példa a gyermeki tapasztalatokra építő, realisztikus feladatokra:

Ma mind kesztyűt fogunk a sétához felvenni. Hány pár kesztyűt kell kikészíteni, ha 5 fiú és 4 lány sétál?

A feladatban előforduló fogalmak megvitatása (mind, pár, 5, fiú, 4, lány) a feladat matematikai modelljének elkészítéséhez járulnak hozzá.

Hány éjszakát alszunk hétfő reggeltől vasárnap estig?

Számos, egymástól jelentősen különböző mentális modell alkotható ehhez a feladathoz, beleértve a mentális számegyenest, a naptár rajzolását.

A tevékenységgel értelmezett és megoldott szöveges feladatok mintájára válnak képessé a gyerekek kérdések megfogalmazására, illetve feladatok alkotására.

Tominak 15 kisautója van. A kisöccsének, Daninak 7.
Kérdezz!

A gyerekek több kérdést is megfogalmazhatnak.
– Hány autója van a két gyereknek összesen?
– Mennyivel van több autója Tominak, mint Daninak?
– Hány autót kell még gyűjtenie Daninak, hogy ugyanannyi legyen neki is, mint Tominak?
– Hány autót adjon Tomi Daninak, hogy ugyanannyi autójuk legyen a testvéreknek?

A fenti tevékenységek készítik elő a szöveges feladatok matematikai modellhez való kapcsolását. A szöveggel megfogalmazott összefüggés kifejezése számokkal, jelekkel és műveletekkel, kezdetben közös tevékenységgel történik. A közös modellalkotást követheti az önálló tevékenység, melynek során várjuk az egyszerű szöveges feladat összekapcsolását számfeladattal illetve nyitott mondattal.

Például:

Melyik nyitott mondat illik a szöveghez? Kösd a feladathoz a megfelelő nyitott mondatot!

Marci horgászni ment a tóhoz. A kifogott halak közül 8-at visszadobott. 5 hallal tért haza. Hány hal akadt Marci horgára?

$8 + 5 = \square$

$8 - 5 = \square$

$\square - 8 = 5$

$\square - 5 = 8$

$\square + 5 = 8$

Az 1., 3. és 4. nyitott mondat is indokolható modellje a szöveges feladatnak.

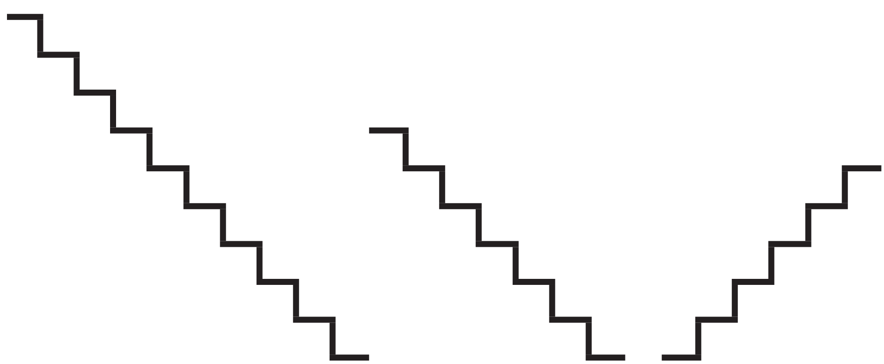
A feladatok szövege és a feladatmegoldáshoz kapcsolódó műveletkijelölés közötti kétirányú kapcsolatok felismerését és megalkotását segítik elő azok a feladatok, amelyek szöveg és számfeladat vagy nyitott mondat párosítását igénylik, és tartalmaznak olyan matematikai modellt, amelyik egyetlen szöveges feladathoz sem illik. Ekkor kérhetjük a kimaradt számfeladatról vagy nyitott mondatról szöveg alkotását. Várhatjuk és igényelhetjük, hogy a szóban megfogalmazott szöveges feladatok valóságos adatokat tartalmazzanak, kapcsolódjanak a gyerekek mindennapjaihoz vagy átélt élményeihez.

A fenti tevékenységek előkészítik a szöveges feladatok megoldási lépéseinek tudatosítását. A köznyelven megfogalmazott szöveges feladatok információiból a jól kigyűjtött és lejegyzett adatok, a köztük lévő kapcsolatok ábrázolása vagy megjelenítése tevékenységgel, a kérdésre adható válasz helyes becslése jelzi a megoldáshoz vezető matematikai modellt. A modell megalkotása a problémamegoldás legnehezebb lépése. A modellen belüli megoldást követi a megtalált megoldás vonatkoztatása az eredeti problémára. Azáltal, hogy a gyerekek a talált megoldást összevetik a szövegben talált adatokkal, az előzetes becsléssel és a valósággal, megítélik a megoldás realitását is.

Kisiskolás korban a gyerekek a számokkal valóságos problémafelvetések során ismerkednek. Megfigyeléseket, összehasonlításokat és méréseket végeznek. Felismerik tárgyak, személyek, dolgok érzékelhető tulajdonságait, válogatják azokat közös és eltérő tulajdonságaik alapján. Tevékenységeik közben tapasztalatokat szereznek a számok tulajdonságairól, kapcsolataikról.

Például, lépcsőjárás közben szerzett tapasztalataik alapján válnak képessé az alábbi probléma megoldására:

Melyik lépcsősort tudnád bejárni úgy, hogy mindig két lépcsőt lépsz egyszerre? Karikázd be a lépcsőfokok számát, ha kettesével lépkedve be lehet járni, és ~~húzd át~~ a számot, ha nem!



9 *6* *5*

Az autentikus problémafelvetések a tanulókat valódi, életszerű problémahelyzet elé állítja. Ennek során olyan témák feldolgozására kerül sor, amelyekhez a tanulóknak személyes, a valóságban átélt élményeik fűződhetnek. Előidézünk olyan újszerű helyzeteket is, amelyek mások elmesélt történései alapján válnak a gyerekek számára hitelessé. A felvetett problémáknak gyakran – mint a valóságban – több lehetséges megoldásuk van. A megoldás többnyire függ attól, hogy milyen feltételek befolyásolják a történést, és ezek közül adott szituációban melyik érvényesül. Kisiskolás korban gyakran még nem várhatjuk el a feltételek mindegyikének számbavételét és a lehetséges helyzetek teljes átlátását. Megelégszünk a konkrét probléma egy lehetséges megoldásának bemutatásával.

Marci és kistestvére Zsófi este 8 órakor lefekszenek aludni. Reggel 6 órakor kell kelniük, mert messze van tőlük az iskola. Hány órát alhatnak a gyerekek?

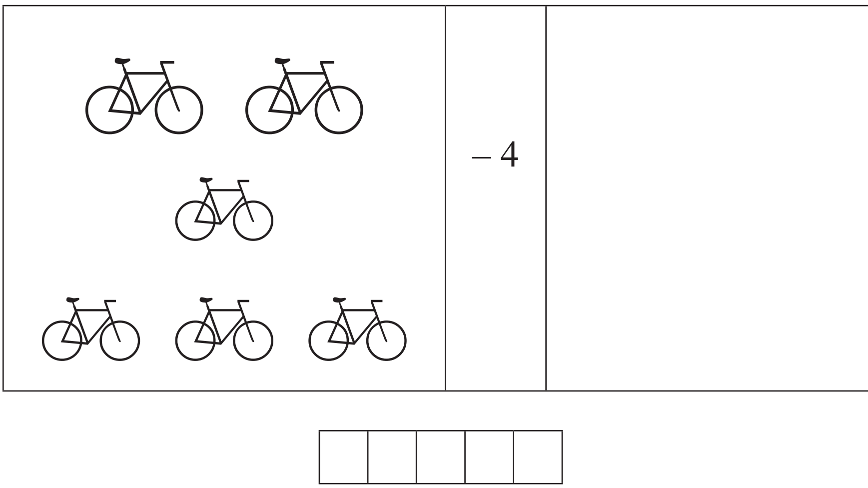
A feladat megoldását segíthetjük, ha bemutatunk egy faliórát, amelyről tudjuk, hogy minden egész órakor egyet üt. Állítsuk az órát 8 órára, a gyerekek hunyják le a szemüket. Közben telik az idő (most felgyorsítva), az óra jár. Akkor nyissák ki a szemüket, amikor az óra 6 órát jelez. A tanító egyenletes időközönként kongat egyet-egyet. Az eljátszás során a gyerekek új helyzetben, az időt felgyorsítva átélik azt, ami velük is megtörténik nap mint nap. Példát látnak arra, hogy a hosszan lezajló eseményeket mi módon lehet eljátszani, akár többször ismétlődővé tenni. Saját tapasztalataik alapján juthatnak el annak megfogalmazásához, hogy a történet szereplői legfeljebb 10 órát alhatnak.

Nagyobb képzelőerőre van szükség, amikor a probléma szemléltetéséhez nem valósághű tárgyakat, hanem azokat szimbolizáló, de még tapintható, mozgatható tárgyakat használunk. Fontos, hogy ezeket a tárgyakat kezdetben a gyerekek választhassák meg, esetleg a tanító kínáljon fel erre többféle lehetőséget. Az autentikusság egyik ismérve ugyanis, hogy *a tanuló számára valódi* problémahelyzet szimulációja történjék a feladat kitűzésével és megoldásával.

A tárgyakkal végzett szemléltetést követhetik a képekkel, rajzokkal illusztrált feladatok. Kezdetben a személyesen is átélt élményekről készített fotókhoz kapcsolhatunk szöveges feladatokat. A fényképek alapján a gyerekek felidézik a valóságos eseményeket, megfogalmazzák élményeiket, elmondják az átélt történéseket, beszélnek megfigyeléseikről. Emlékeik alapján adatokkal egészíthetik ki a tanító által megfogalmazott történetet, vagy maguk is kérdéseket vethetnek fel. Ezek a beszélgetések hozzájárulnak ahhoz, hogy később egy képről önállóan tudjanak történetet alkotni.

Például:

Készítsd el a második képet! Mondd el, mi történhetett! Írd le számtannyelven!



Ez a kép felidézheti azoknak a gyerekeknek az élményeit, akik szoktak a szüleikkel, testvéreikkel kerékpározni. Lehet, hogy szövegalkotásukban éppen vágyaik fejeződnek ki, ha nincs kerékpárjuk. Láthattak utcán kerékpározókat, vagy járhattak kerékpárokat árusító üzletben. Történeteikre várhatóan hatással lesznek a valóságban szerzett tapasztalataik.

Például ilyen történetet mondhatnak: Egy hattagú családban mindenkinek van biciklije. A hétvégén négyen elmentek kerékpártúrára. Hány bicikli maradt otthon?

Sokban segítheti a probléma megoldását, ha azt valóban a tanuló saját tapasztalatához kötjük. Ha a feladatot kiegészítjük olyan kérdéssel, amely magáról a tanulóról szól, a probléma konkréttá és valóságossá válik. Miután a kisgyerek megoldotta az önmagáról szóló feladatot, könnyebben el tud képzelni más személyhez kapcsolódó szituációt. Így válik számára valódivá, életszerűvé a felvetett probléma.

Marci a kisautókat, Évi a plüss játékfigurákat gyűjti. Még egyikük se gyűjtött össze 20-at. Kinek mennyi lehet, ha Évinek 5-tel több plüssjátéka van, mint ahány autója van Marcinak?
Neked hány autód van? És hány plüssjátékod? Miből van több, és mennyivel?

Ennek a feladatnak a megoldását kezdjük az otthonról hozott adatok összegyűjtésével. Ekkor tapasztalják a gyerekek, hogy sokféle számpár lehet válasz a kérdésre, és talán lesz olyan gyerek az osztályban, akinek 5-tel több plüssjátéka van, mint ahány autója. A táblázatba gyűjtött számpárok egyben mintát mutatnak az eredeti probléma célszerű megoldási módjára.

A következő feladatban nem a műveleti tulajdonság tapasztalásához választottuk a szöveges feladatot, hanem a probléma megoldása során láthatják a gyerekek a kétféle számolási lehetőséget.

Elfogyasztasz-e 4 liter tejet 1 hét alatt?

A probléma megoldását saját adatgyűjtéssel kezdik a gyerekek. Minden tanuló megtudhatja, hogy a saját otthoni bögréje hány deciliteres, amiből tejet, kakaót vagy egyéb tejből készült folyadékot szokott inni. Alkalom nyílik annak megbeszélésére, hogy mi minden készül tejből, és beszámolhatnak a gyerekek arról, hogy mi mást szoktak reggelire, illetve vacsorára fogyasztani. Rábízhatjuk a gyerekekre, hogy maguk döntsék el a számolás módját. A megbeszélés során világossá válhat, hogy a napi körülbelüli tejfogyasztásból lehet következtetni a heti tejfogyasztásra, vagy a reggelikre elfogyasztott tejhez adhatjuk hozzá az esténként elfogyasztott tej mennyiségét. Valóságos probléma teszi szükségessé a mértékegységek váltását is.

A gyerekek napi tevékenysége, a környezetük és a természet bőven kínál lehetőséget autentikus szöveges feladatok felvetésére a kisiskolások számára. Gyűjthetnek adatokat a napi tevékenységeikről (például: mikor kelnek?, mikor fekszenek?, járnak-e különórákra?, mennyit sportolnak?...), rendezhetik az összegyűjtött adatokat, összehasonlíthatják, kérdéseket fogalmazhatnak meg, és megválaszolhatják azokat. Mi is felvethetünk olyan kérdéseket, amelyek megválaszolása adatkiegészítést igényel. A pótolható adat beszerzését rábízhatjuk a tanulókra, de felkínálhatunk lehetőségeket, tehetünk ezekre javaslatokat.

A megfigyelések, tapasztalatok alapján vagy mérésekkel nem pótolható adatok tanulói kreativitást igényelnek. A hiányzó adat előhozhatja a becslést, illetve a feltétel szerinti feladatmegoldás lehetőségét. Kezdetben megelégedhetünk azzal, hogy a gyerekek így fogalmaznak: „Szerintem…”. Később találhatnak több, általuk elfogadható megoldást: „Lehet, hogy…”, „az is lehet, hogy…”. A csoportban vagy frontálisan összegyűjtött elképzelések akár megadhatják a feladat minden lehetséges megoldását is.

A tanulókat önálló munkában csak arra biztathatjuk, hogy keressenek több megoldást, vagy egy-egy feltétel megadásával kérhetjük a feltételtől függő adat meghatározását.

Az ebédlőben 3 nyolcszemélyes asztalnál összesen 16-an ülnek. Melyik asztalnál hányan ebédelhetnek? Keress több lehetséges megoldást!

1. asztalnál	8		2	6					
2. asztalnál	6	8			4		0		
3. asztalnál		2	6			7			

Relációk, függvények

Ahogyan a többi matematikai tartalmi területnél is, a relációk és függvények területén is a realisztikusság kritériuma egy feladat esetében, hogy a tanuló számára elképzelhető (legtöbbször a hétköznapi tapasztalatokban gyökerező) legyen a feladat tartalma. A Relációk, függvények cím (186. oldal) alatt említett követelmény- és feladattípusok esetében a matematikai és más szimbólumok felől a hétköznapi tárgyak és relációk felé mozdulva fogalmazhatunk meg realisztikus szöveges feladatokat.

Alapvető jellemzője a témakör realisztikus feladatainak, hogy a gondolkodási képességek közül elsősorban az induktív és korrelatív gondolkodás működését mozdítják elő. A hétköznapokban megfigyelt vagy a fantáziavilágban működő összefüggések véges sok eset alapján születnek meg, majd az indukált szabály vagy összefüggés elvileg a jelenségvilág végtelenül széles körére érvényes. Az autentikus feladathoz képest a különbség abban ragadható meg, hogy a feladat irányítja az összefüggés- és szabálykeresést, és nem várjuk el, hogy a tanuló kezdeményezze azt.

A sorozatokkal kapcsolatos realisztikus feladatokban a feladat formai jellemzői megmaradnak, a tartalom viszont úgy módosul, hogy a horizontális matematizálásban a valóságos tapasztalatok vagy a belső gondolatvilág jelenségeiből indul a gondolkodás, és a tanuló ezekhez keres megfelelő matematikai modellt. A sorozatok esetében például a következő tartalmú feladatok tekinthetők realisztikusnak a legtöbb tanuló számára:

Folytasd a megkezdett sorozatot két taggal! Mi lehet a szabály?

(A) hétfő szerda péntek vasárnap kedd __ __

(B) január 1-je március 3-a május 5-e július 7-e __ __

(C) Anna Ágnes Beáta Antal Ábel Barnabás Anita Ágota Bernadett Attila __ __

A témakör másik nagyobb részterületén, az adatpárok közötti összefüggésekben is megfigyelhető, hogy változatlan feladatformátum mellett, a feladat tartalmának alakításával válik lehetővé a mentális matematikai modellek építése. A következő feladatok megoldásához arra van szükség, hogy a tanuló elképzelje a bennük szereplő dolgokat, és kialakítson egy matematikai modellt, amely a konkrét feladat esetében használható. A rokonsági viszonyok esetén a családfarajz vagy bármilyen fa-gráf szolgálhat matematikai modellként. Az állatok lakóhelyének vizuális képzeteit analógiás kapcsolat szöveges megfogalmazása révén tudjuk fölhasználni a megoldásban.

Folytasd a táblázat kitöltését!

apa	öcsi	dédnagypapa	nagypapa	
anya	hugi	dédnagymama		nagynéni

madár	kutya	ember	mókus	
fészek	kutyaól	ház		istálló

Az autentikus feladatok legfontosabb általános jellemzője, hogy olyan feladathelyzet valósul meg, amely a tanulói tevékenységekhez kapcsolódik, és amelyben a tanuló kezdeményezőként léphet föl. Számos esetben egyfajta „fordított feladatkitűzés” valósulhat meg, vagyis a feladat lényege az, hogy egy adott problématérben a tanulónak magának kell megalkotnia egy feladatot, vagy elemeznie kell, hogy milyen feltételek mellett jön létre egy matematikai értelemben vett feladat.

A sorozatok esetében az alapelv az lehet, hogy valamilyen problématérben (fogalomrendszerben) a tanulók vegyenek észre mintázatokat, szabályszerűségeket, és fogalmazzák meg az összefüggést. Keressenek példákat és ellenpéldákat! Ilyen módon a relációk és függvények terület autentikus feladatai az induktív és korrelatív gondolkodás mellett a rendszerzési képesség fejlesztésének kiváló eszközét jelentik.

A sajátos nevelési igényű tanulók számára az autentikus feladathelyzetekben explicit irányítás szükséges, mert e nélkül a feladat kontextusa és gyakori intranszparenciája nehézzé teszi számukra a jelenségek matematikai jellemzőire való összpontosítást.

A sorozatok esetében az autentikus feladatban egy körülhatárolt problématérben arra biztatjuk a tanulókat, hogy ők maguk keressenek valamilyen szempont szerint fölépülő sorozatokat. Két ilyen példában először a tanulók neve, majd a százas számkör természetes számai szerepelnek kiinduló halmazként.

Írjátok föl a táblára az osztályban előforduló utóneveket! Hogyan lehetne sorba rendezni ezeket? Írjátok le a sorba rendezett neveket!

A megoldás nagyon sokféle lehet. Kézenfekvőnek tűnik az ábécésorrend, de elképzelhető a név hosszúsága mint szempont vagy akár olyan kifinomult ötlet is, mint a nevek tulajdonosainak születési dátum szerinti sorrendje. Valamennyi esetben előfordulhat, hogy nem lesz szigorú értelemben monoton a nevek sorrendje. Ilyenkor célszerű az egyébként várhatóan monoton sorrendbe rendezett neveknél az egyenlőségrelációt az egymás alá írás módszerével jelölni.

Hogyan lehetne sorba rendezni a 12 hónapot? Találjatok ki minél többféle sorrendet!

Az adatpárok közötti kapcsolatok esetében is követhető eljárás, hogy felvázolunk egy kétdimenziós adatsokaságot, és a tanulók elsődleges feladata megtalálni néhány szempontot, amely alapján egyes dolgok összetartoznak. Fontos, hogy olyan kiinduló problématerünk legyen, amely természetes és releváns a tanulók számára. Ilyen problématerek például: iskolai órarend, étkezéssel kapcsolatos fogalmak, rokoni kapcsolatok, öltözködés, ünnepek.

Milyen szabály szerint töltöttük ki a táblázatot? Folytasd a táblázat kitöltését a szabály szerint!

matematika	olvasás	ének		testnevelés
4	4	2	2	

Lehetséges, hogy a heti óraszám szerepel a táblázatban, de lehetséges, hogy valakinek az osztályzatai vagy éppen az, hogy mennyire szereti ezeket a tantárgyakat.

Geometria

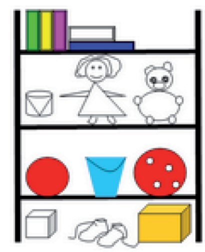
A geometria területe – a témakör jellemzőinél fogva – kiválóan alkalmas a hétköznapi életből ismert jelenségek matematikai modellezésére. A geometria elsősorban a vizuálisan is megjeleníthető alakzatok matematikai jellemzőivel foglalkozik, és ebből adódóan kiválóan alkalmas a vizuális képzetek és a matematikai fogalomrendszer koherens összekapcsolására. A négy részterület közül most elsőként a tájékozódás területével foglalkozunk, jelezve ezzel azt is, hogy mennyi kézenfekvő lehetőséget jelent ez a terület realisztikus szöveges alkalmazására.

Tájékozódás

Az első évfolyam feladata a tér- és síkbeli tájékozódóképesség alapozása érzékszervi megfigyelések segítségével, irányok, irányváltoztatások követése mozgással, a helymeghatározásra tanult kifejezések (pl. alatt, fölött, mellett, között, jobb, bal) értése, használata. Második évfolyamon elvárás a saját mozgást leíró információk megfogalmazása, útvonalak valódi és terepasztalon való bejárása, tudatosítása, bejárt útvonal elmondása, megadott helyek elérése, útvonalak fordított irányú bejárása, az irányváltoztatás hatása. Az első évfolyam elvárásaihoz képest egy jelentős nehezítés a síkban két adattal jellemzett helyek megkeresése (irány, távolság, szomszédosság).

A képen látható polc Nóri szobájában van. Elmesélte, hogy miket tart a polcán. Írd be a hiányzó szavakat!

A cipő a vödör ....van.
A kisvödör két labda ....van.
A nagyobbik doboz .... van a pöttyös labda.
A baba .... oldalán van a játékmaci.
A baba .... kezénél a dob van.
A baba ....polcon mesekönyvek vannak.

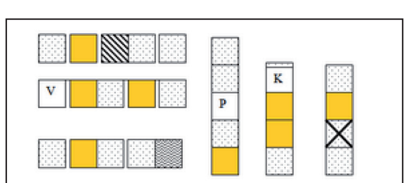


Útvonal bejárása szavakkal leírt útvonal követésével, adott pontok érintésével.

A rajz egy város térképének részlete. X jelöli az indulási helyedet. Jelöld az útvonaladat!

Keresd meg azt a házat, amelyikben nagyi lakik!

- *Kilépsz az X-szel jelölt házból.*
- *Első utad a Könyvtárba vezet.*
- *Ezután a rövidebbik úton a Pék utcájába mész.*
- *A Péknél veszel 5 kiflit.*
- *A Péktől kilépve jobbra fordulsz, és elgyalogolsz az utca végéig.*
- *Megkerülöd azt a házat, amelynek a teteje egyszínű.*
- *Abba az utcába fordulsz be, ahol a sarkon a hullámos tetejű ház áll.*
- *Elmész a Virágüzletbe, veszel egy csokor tulipánt.*
- *A Virágüzlet házát megkerülve már abban az utcában vagy, ahol nagyi lakik.*
- *Nagyi háza a csíkos tetejű ház mellett van. De a teteje nem egyszínű.*



Valós szituációt, a tanulók számára is releváns helyzetet tükröz az olyan feladat, amelyben szóbeli vagy írásos információ megértése, irányok és irányváltoztatások követése a feladat. A megoldás lehet manipulatív vagy képi szintű. Papír-ceruza és számítógépes tesztelés esetén is nyilvánvalóan a képi szintű feladatkitűzés lehetséges.

A tanteremben elrejtettünk egy kincses dobozkát. Megtalálod, csak kövesd az utasításokat!

- *A tanterem ajtajától indulj.*
- *Állj szemben az ablakkal.*
- *Lépj előre 3 lépést.*
- *Fordulj balra.*
- *Lépj 2 lépést.*
- *Fordulj jobbra.*
- *Lépj 2 lépést előre.*
- *A bal lábadnál van a kincses dobozka!*

Párban dolgozzatok! Mondd el a párodnak azt az útvonalat, ami otthonról az iskolába vezet. Készíts térképvázlatot! Rajzolj a térképre néhány nevezetes helyet! Párod jelölje a térképen az általad elmondott útvonalat! Ellenőrizd a munkáját!

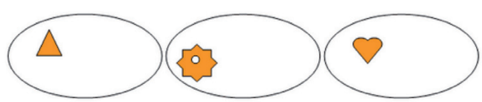
Konstruálások

1. évfolyamon megkezdődik, majd 2. évfolyamon folytatódik az alakzatok összehasonlítása (azonosítás, megkülönböztetés, formafelismerés összkép és egy-egy kiemelt geometriai tulajdonság alapján) a megfigyelési képesség fejlesztésére; a rész és egész felismerése, a megfigyelések kifejezése válogatással, megfogalmazása saját kifejezésekkel, megkezdett válogatás folytatása szavakkal kifejezett tulajdonság, kapcsolat értelmezése alapján. A tanulók képessé válnak a szavakkal kifejezett tulajdonság, kapcsolat értelmezésére a válogatás folytatásával. Követelmény a sík- és térbeli alakzatok szétválogatása tulajdonságok alapján, és azok osztályba sorolása – manipulatív és képi szinten, szöveges magyarázattal kísérve.

A tanulók képesek geometriai testeket építeni először szabadon, majd modell alapján. Képesek síkidomok előállítására tevékenységgel: mozaikkal, papírhajtogatással, szívószálak fűzésével, szabadkézi rajzolással, később a második évfolyamon ennek folytatásaként derékszög, téglalap, négyzet hajtogatása papírból, másolás átlátszó papírral, rajzolás négyzethálón, egyéb hálókon. Itt már elvárás a megadott egyszerű feltétel szerinti alkotás, illetve az alkotások összegyűjtése, azonosítása, megkülönböztetése (sokszögek néhány tulajdonságának megismerése, megnevezése: csúcsok, oldalak száma; oldalak egyenlősége; konvexség). Mindezek a tevékenységek és követelmények alkalmasak az alkotóképesség, kreativitás, a rendszerezés és a kombinativitás fejlesztésére. Az adott tulajdonságú építmények, síkbeli alkotások létrehozása, a tulajdonság ellenőrzése segíti a deduktív és az induktív következtetés fejlesztését.

Példafeladat síkbeli alakzatok tevékenységgel történő szétválogatására, osztályba sorolására a megfigyelt geometria tulajdonságok alapján:

A cukrászdában tálcákra rakják az elkészült süteményeket.
Így kezdték



el a kirakást:
Hová kerül a többi sütemény?
Rajzold a süteményeket arra a tálcára, amelyikre valók!

Testek felismerése kép alapján, alaprajz készítése:

Lali kis fehér kockákból készített házat.
Írd bele az alaprajzba, hogyan épített!
Hány kis kockát használt fel a házhoz?

Transzformációk

Már óvodáskorban megkezdődik a tapasztalatszerzés síktükörrel, a síkidomok, testek szimmetriájának felfedezése, majd folytatásként a 1-2. évfolyamon tükrös alakzatok és egyszerű tükörkép előállítása mozgással, kirakással, nyírással, másolópapír segítségével, átfordítással, illetve tengelyes tükrösség ellenőrzése összehajtással és a síktükör használatával. A témakörben ismét előtérbe kerül a megfigyelés (azonosítás, megkülönböztetés). Fontos az eljárás követése, újrafogalmazása.

A tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összkép alapján.

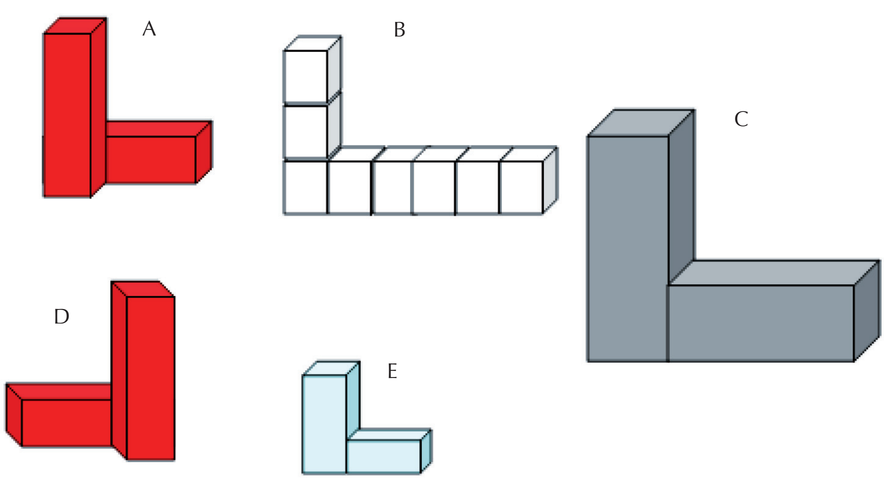
Miklós egyforma építőkockákból ilyen házakat készített. Nézd meg a képet! Válaszolj a kérdésekre! A kérdés után írd a ház betűjelét!

Melyik a legmagasabb ház?........

Melyik házhoz használta a legtöbb építőkockát? …….

Melyik háznak a tükörképe az A jelű ház?........

Melyik két ház formája egyforma?



A tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összkép alapján.

Emma kapott egy új pulóvert. Nagyon tetszett neki.
Felvette, és elment sétálni. Megnézte magát minden kirakatban és minden pocsolyában.

A második sor képei közül melyik képet láthatta Emma a kirakat üvegében?

Gyakorlati, játékos tevékenységre épülő feladatként az alábbi példát ajánljuk:

> *Építs olyan házat az építőelemekből, amelynek ajtaja van!!*
> *Minden háznak építsd meg a tükörképét is!*
> *Használhatsz segítségül tükröt.*

Mérés

Az 1–2. évfolyamon a számfogalom alakításához kapcsolva jelennek meg a mérések. Ennek kapcsán az összehasonlító, megkülönböztető képesség, a becslés, az összefüggések megfigyelése, felismerése, rendezése kap főszerepet: 1. osztálytól a különféle mennyiségek összehasonlítása, összemérése, kapcsolódó gyakorlati problémák megoldása. Ezt követően a 2. évfolyamon szabványegységek (m, dm, cm, kg, dkg; l, dl, óra, perc, nap, hét, hónap, év) gyakorlati megismerése, elnevezésük és jelük használata válik követelménnyé.

A tanulóknak meg kell figyelniük a kapcsolatokat mennyiségek, mértékegységek és mérőszámok között. A mérési tapasztalataikat felhasználják becslésekben, megfogalmazzák saját szavaikkal.

Apu és anyu új szőnyeget vásároltak a nappaliba. Apu és a kis Gabi kézen fogva végiglépkedtek a finom, puha szőnyegen. Szerinted apu vagy Gabi lépett többet?

A realisztikus feladatok részhalmazát jelentő autentikus feladatok geometriai megvalósításának egyik kiváló lehetősége az aktív, tudatos tanulói tevékenységre alapozott csoportos és egyéni projektmunka. Az autentikus mérési feladatok egyik csoportjában becslést kell adniuk a tanulóknak olyan helyzetekben, amelyek számukra relevánsak. Ugyancsak ide tartoznak az alkalmi egységgel történő mérések, a standard mértékegységek felhasználása − feltéve, hogy a feladat a tanulók számára nemcsak realisztikus, hanem releváns is.

Becsüljétek meg, hány lépés hosszú és hány lépés széles a tantermetek! Válasszátok ki az osztályból a legalacsonyabb gyereket! Ő mérje meg a terem szélességét a lépéseivel! A terem hosszúságát a tanítótok lépéseivel mérjétek meg!
Mit tapasztaltatok?
Mérjétek meg a terem szélességét és hosszúságát a méterrúd segítségével! Most mit kaptatok? Magyarázzátok meg a mérési eredményeket!

Egy projektfeladat lehetőségét mutatja a következő leírás:

Kutassátok fel a környezetetekben található szimmetrikus díszítőelemeket (ruhaneműk, bútorok, hímes tojások, játékok, épületek, fák, virágok, lepkék, templomok, ereszeket díszítő mintázatok stb.), figyeljétek meg alaposan, elemezzétek részleteiben, rögzítsétek rajzosan, fényképezéssel, írjátok meg történetüket! A kutatás eredményeit mutassátok be előadással, kiállítással (pl posztereken), megépítéssel (pl. gyurmából, építőkockákból, gipsz segítségével), videós megjelenítéssel stb. Lehet egyéni és csoportosan szervezett bemutatás.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatív gondolkodás és a valószínűségi szemlélet alapozása az iskolában legtöbbször játékok vagy játékos kísérletek keretében történik. A gyerek a játék során szerzett tapasztalatait építheti be feladatmegoldásaiba.

Például három piros-kék koronggal játszanak. Minden dobás előtt meg kell tippelniük, hogy igaz vagy hamis lesz az állítás. Nyer, akinek a legtöbb jó tippje van.

a) Lesz legalább két piros.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

b) Lesz legalább két kék.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

c) Lesz legalább két egyforma szín.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

d) Lesz mindkét szín.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

Ebben a tevékenységben a gyerek legfontosabb érdeke a játék megnyerése, ezért igyekszik a tippek során a korábbi tapasztalatait felhasználni. A tanító a tippek módosulásából következtet a valószínűségi szemlélet alakulására. Például az, hogy lesz legalább két egyforma szín, biztos esemény. Ez azonban csak néhány tényleges dobás elvégzése után válik nyilvánvalóvá.

A kísérletező tevékenységgel tulajdonképpen arra vagyunk kíváncsiak, hogy a tevékenységek során megszerzett tapasztalatok mennyire épültek be a gyerekek gondolkodásába. Ezért a fenti tevékenység egy mérés során megfogalmazott változata a következő lehet:

Három koronggal dobtunk. Írj X-et a megfelelő helyre!

	Biztos	Lehetetlen	Valószínű	Lehetséges
Lesz legalább két piros.				
Lesz legalább két kék.				
Lesz legalább két egyforma szín.				
Lesz mindkét szín.				
Több piros lesz, mint kék				
Ugyanannyi piros lesz, mint kék				

Alsóbb évfolyamokon a kombinatív gondolkodás és a valószínűségi szemlélet alakítása során egy sor olyan problémát vethetünk fel, amely nem kizárólagosan e témakörbe tartozik. Tévedés lenne azt gondolni, hogy amennyiben a tanóra kiemelt célja a valószínűségi szemlélet fejlesztése, akkor egész órán kizárólag dobókockákat dobálunk, pénzérméket csörgetünk vagy egy zsákból színes golyókat húzunk. A tanórákon megvalósulhat a valószínűségi szemlélet fejlesztése úgy is, hogy olyan problémákat vetünk fel, amelyek a matematika más területeit is érintik vagy éppen azok a hangsúlyosak.

Egy 0-99 számtáblázatra kell bekötött szemmel bökni. A játék előtt tippelni kell, hogy a szám felírható-e két 10-nél kisebb szám szorzataként. (Az 1 most nem szerepelhet.)

Ez a játék például a szorzótáblák gyakorlásakor kerülhet elő. Mivel ezt megelőzően hosszú ideig tanulták a szorzótáblákat – 100 esetet különkülön – igen nagy eséllyel gondolhatják, hogy több olyan szám van a táblázatban, amely szerepel a kisegyszeregyben, mint ami nem.

Hogy számba tudják venni, melyek azok a számok, amelyek felírhatók két 10-nél kisebb szám szorzataként, például öntapadós lapokkal leragasztják a sárgával jelölt mezőket.

0	1	2	3	2 · 2	5	2 · 3	7	2 · 4	3 · 3
2 · 5	11	6 · 2	13	7 ·2	3· 5	4 · 4	17	3 · 6	19
10 · 2	3· 7	22	23	3· 8	5· 5	26	3· 9	4 · 7	29
10 · 3	31	4 · 8	33	34	7 · 5	6 · 6	37	38	39
4 · 10	41	6 · 7	43	44	9 · 5	46	47	6 · 8	7 · 7
5 · 10	51	52	53	9 · 6	55	7 · 8	57	58	59
6 · 10	61	62	9 · 7	8 · 8	65	66	67	68	69
7 · 10	71	9 · 8	73	74	75	76	77	78	79
8 · 10	9 · 9	82	83	84	85	86	87	88	89
9 · 10	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Meglepő lehet, hogy milyen kevés eset szerepel a kisegyszeregyben, ezért nem túl nagy az esélye, hogy a kívánt számra bökünk. (100-ból csak 36 esetben bökünk olyan számra, amelyet olyan szorzatként tudunk felírni, amelyben minkét szám nagyobb 1-nél)

Ebben a játékban a szorzás kommutativitásáról szerezhetnek tapasztalatot, és emellett kereshetik azokat a számokat, amelyeket többféleképpen is felírhatnak szorzatként. A valószínűségi szemléletük módosulhat abban a megfigyelésben, hogy ami többször, többféleképpen fordul elő, az valószínűbb.

Később ugyanezt a tevékenységet ismétlik, de most olyan számokat keresnek, amelyeket szorzatként fel tudnak írni (például 33 = 11·3). Így már jóval nagyobb lehet az esélye, hogy olyan számra bökünk, amelyet fel tudunk írni szorzatként. Egy ilyen játék keretén belül nyílhat az első lehetőség arra, hogy a prímszámokról is tapasztalatot szerezzenek. Nem a tanár veti fel a témát, hanem a gyerek erős késztetést kap arra, hogy a végére járjon a problémának. Az összetett számok módszeres keresése pedig a prímek kiszűrésére vonatkozó eljárások alapja lehet (például Eratoszthenész szitája).

Az iskolában a gyerekek azt játszották, hogy a 0-99 számtáblázatra bekötött szemmel böktek. Nyert, aki olyan számra bökött, amelyik fel-

írható két 10-nél kisebb, 1-nél nagyobb szám szorzataként. Színezd a nyerő mezőket!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Mit találsz esélyesebbnek egy ilyen játék során? Húzd alá a megfelelő választ!

A nyerés esélyesebb. *Esélyesebb, hogy nem nyerek.*

Válaszodat indokold! ....
....

Az indoklás alapján következtethetünk a gyerek valószínűségi szemléletének fejlettségére. A válasz alapján kiderül, hogy érzi-e azt a tényt, hogy ami többféleképpen fordulhat elő, az valószínűbb.

A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

A matematikai gondolkodás fejlesztésének kiemelt területe a matematikai tudás gyakorlati alkalmazása. A matematikatanításnak az is feladata, hogy láttassa a tárgy más tudományágakban és a hétköznapokban betöltött nélkülözhetetlen szerepét. Más tantárgyak témáiból és a gyakorlati életből választott példák igazolják a gyerekek számára a matematika hasznosságát. Változatos problémafelvetésekkel kelthetjük fel a tanulók érdeklődését és kíváncsiságát a matematika iránt. Ezért a problémafelvetések témáinak megválasztása körültekintést igényel. A problémamegoldás nehézségét nemcsak a matematikai tartalom befolyásolja. Azonos matematikai tartalmú feladatok különböző nehézségűek lehetnek a gyerekek számára, ha más szövegkörnyezetben tárjuk azokat a gyerekek elé. Ezért a probléma megoldásának elemzésénél figyelmet kell fordítanunk arra is, hogy mi okozta a tanuló számára a nehézséget. A választott modell, a tanuló által készített rajz informálhat a megértésről, a szövegben megfogalmazott összefüggés felismeréséről vagy félreértéséről. A problémák megoldását segíthetjük vagy éppen nehezíthetjük azzal is, ha javaslatot teszünk vagy felszólítunk valamilyen modell használatára. Ekkor nemcsak a megértést, hanem a kiválasztott modellel való problémamegoldást is ellenőrizni kívánjuk. A sikeres problémamegoldást választható vagy adott modell alkalmazásával akkor várhatjuk el a tanulóktól, ha erre elegendő figyelmet fordítottunk a problémák változatos megoldásával, azok összehasonlításával, a választott megoldási mód előnyeinek vagy hátrányainak megbeszélésével.

Például:

A virágboltban egy szál nárcisz 60 Ft-ba, a tulipán szálanként 80 Ft-ba kerül. Mindkettőből ugyanannyit vettünk. 420 Ft-ot fizettünk. Hány szálat vettünk a virágokból?

A vizuális megjelenítés segíti a megértést, a kapcsolatok és az összefüggések feltárását, amelyek nélkülözhetetlenek a problémamegoldásnál. Ezért fontos feladat a tanulók modellalkotó képességének fejlesztése. Különféle modellek segíthetik az összefüggések felismerését, pl. tárgyi tevékenységgel való megjelenítés, reláció, rajzos modell, nyitott mondat, táblázat, szakaszokkal való ábrázolás, számegyenes lehet a támogató eszköz.

Az első feladat megoldása kézenfekvő játék pénzzel való kirakással. Például lerajzolnak a gyerekek egy nárciszt és egy tulipánt, és a rajzokra helyezik a megfelelő összeget. Ezt addig csinálják, amíg eljutnak a 420 Ft kirakásához.

Az absztrakcióra könnyebben képes gyerekek táblázattal is meg tudják oldani a feladatot. Például ilyen táblázatot készíthetnek:

A tulipánok és a nárciszok száma	1-1	2-2	3-3
A nárcisz ára	60 Ft	120 Ft	180 Ft
A tulipán ára	80 Ft	160 Ft	240 Ft
Fizetendő összeg	140 Ft	280 Ft	420 Ft

Az alkalmazott megoldási folyamatban két ismert adatból kiindulva, szisztematikus próbálkozással jutottunk el a feladatban adott összeghez, egyenletesen növelve a fizetendő összeget. Közben kiszámoltunk olyan adatokat is, amelyek az eredeti probléma megválaszolásához nem szükségesek. A kialakult táblázatban felismerhetők az egyenletesen növekvő sorozatok, amelyek folytatásával kiszámított adatok új információkat szolgáltatnak.

Például:

– Mire ad választ a táblázat 2. sorának 6. oszlopában található érték?

– Mit tudhatunk meg az utolsó sor 8. oszlopában található adatból?

– Mit jelent a 2. sor 3. oszlopában és a 3. sor 2. oszlopában található számok összege?

…

Az eredeti probléma megoldásához választhatnak a gyerekek nyitott mondatot is.

Így gondolkodhatnak: 1 szál nárcisz és 1 szál tulipán összesen 60 + 80 = 140 forintba kerül. Azt nem tudjuk, hogy hány szálat veszünk, ezért ezt jelöljük így: □

Annyiszor fizetünk 140 Ft-ot, ahány szál tulipánt és nárciszt kérünk, és ez 420 forintba kerül. Ezt így írhatjuk le művelettel: $140 \cdot \square = 420$

A nyitott mondat megoldását becsléssel, a becslés kipróbálásával, majd korrekciójával kereshetik, például ilyen lépésekben:

A 140 százasokra kerekített értéke 100, a 420-é 400. A 100-at 4-szer kell venni, hogy 400 legyen. A kipróbálás azt mutatja, hogy $140 \cdot 4 > 420$, ezért a 4-nél kisebb számmal kell próbálkoznunk. A 3-at kipróbálva, azt találjuk, hogy igaz az egyenlőség $140 \cdot 3 = 420$.

Ebben a megoldásban célirányosan a kérdés megválaszolására törekedtünk. Nem kaptunk más információt, nem tudunk új kérdéseket megfogalmazni, amelyekre a választ könnyedén megtalálhatnánk. Minden új kérdéshez új nyitott mondat felírására és megoldására van szükség.

Egy lakótelepen egyforma tízemeletes házak vannak. Minden házban szintenként a lépcsőháztól balra 6, jobbra 8 lakást alakítottak ki. A földszinten üzletek vannak. Ezen a lakótelepen összesen 420 lakást építettek. Hány ház van a lakótelepen?

A feladathoz jól illik a rajz és a számfeladat vagy a nyitott mondat. Természetesen egyszerűsített rajzot várunk a gyerekektől, a legszükségesebb adatok feltüntetésével. Például:

6 lakás		8 lakás

Többféleképpen gondolkodhatnak. Például: A 420 lakásból ebben a házban összesen 140 lakás van, a lépcsőház bal oldalán 60, a jobb oldalán 80. A többi lakás (420–140=280) a többi házban van. A második házban is 140 lakás van, a többi lakás a harmadik házban található: 280–140=140.

Ebben a megoldásban az ismert adatokból kiindulva haladtunk a megoldás felé. Az egyes lépésekben arra kaptunk választ, hogy hány lakás lenne a lakótelepen, ha 1-gyel illetve 2-vel kevesebb házat építettek volna.

Ugyancsak az összes lakásszámból kiindulva jutnak a megoldáshoz a következő lépéssorozatban: Ha mindegyik ház 10 emeletes, és minden szinten ugyanannyi lakás van, akkor egy szinten ennek tizedrésze, azaz: 420/10=42 lakás van. Mindegyik házban 6+8=14 lakás van egy szinten, ezért annyi ház van, ahányszor a 42-ben megvan a 14. A 42:14=3 jelenti a házak számát. Itt két számfeladattal jutottunk a megoldáshoz, és közben egyetlen plusz információt szerezhettünk, azt, hogy szintenként 42 lakás van a lakótelepen.

Ennek a feladatnak a megoldásánál is alkalmazhatják a gyerekek a nyitott mondatot: egy házban egy szinten 6+8 lakás, tíz szinten 10-szer annyi, azaz (6+8)·10=140 lakás van. Jelöljük a házak számát □-vel. □ házban □-szer 140, azaz 140·□ = 420 lakás van. A megoldás megkeresése az előző feladatban leírt módon történhet.

Egy buszvezető két város között közlekedik. X várostól Y városig 60 perc alatt teszi meg az utat, Y-ból X-be 80 perc alatt jut. Hányszor fordult a busz vezetője a két város között azon a napon, amelyiken 7 órát vezetett?

A harmadik feladat megismerését természetesen követi annak megbeszélése, hogy vajon az egyik irányban miért hosszabb az utazási idő, mint a másik irányban. A felvetett kérdésre a gyerekek tapasztalataik alapján kereshetnek választ. Például:

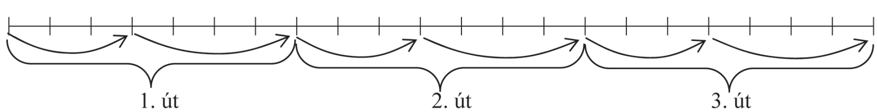
– Hosszabb úton megy a busz Y-ból X-be.

– Sok az emelkedő, amikor Y-ból X felé halad a busz.

– Egyik irányban gyorsjáratként közlekedik a busz, a másik irányban több helyen megáll.

– Egyik irányban autópályán halad, a másik irányban autóúton.

A történést egy időszalaggal lehet szemléletessé tenni, amelyen pl. 20 percenként látható a 7 óra beosztása. Ezen jelölhetik a gyerekek az eltelt időt. Például:



Ez az ábra is alkalmas új információk megadására. A gyerekek maguk is feltehetnek és megválaszolhatnak kérdéseket. Például ilyen kérdésekre számíthatunk:

– Hol volt a buszvezető 200 perc vezetés után?

– Hol volt a buszvezető, amikor ezt mondta: „Ma már 3 órát vezettem."

– Mennyi időt vezetett már, amikor az Y városból indult X városba?

– A nap folyamán mikor lehetett alkalma a buszvezetőnek pihenni?

…

A fenti ábra jól tükrözi azokat a matematikai modelleket, amelyek a valóságtartalmú probléma megoldásának segédeszközei lehetnek. A nyilakról egy váltakozó különbségű sorozat olvasható le: 60, 140, 200, 280, 340, 420…

A kapcsos zárójel két nyilat fog össze, és szemlélteti a két nyíl helyett egy nyíl típusú feladatok matematikai tartalmát. Ezek alapján egyenletesen növekvő sorozat tagjait olvashatjuk le: 140, 280, 420…

Ezeknek a számoknak az ad értelmet, hogy a feladatra vonatkoztatjuk őket, elmondjuk, hogy melyik szám miről informál bennünket.

Az időszalag jól tükrözi a folyamatosságot, segítségével adott időpontban a buszvezető tartózkodási helyéről is lehet közelítő képet alkotni.

A és B város 420 km-re van egymástól. A két városból egyszerre indul el a másik városba egy-egy autó. Az A városból induló 60 km-t, a B városból induló 80 km-t tesz meg óránként. Mikor és hol találkoznak?

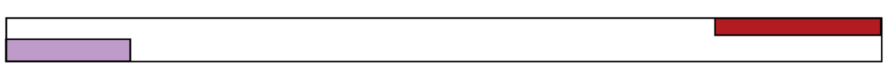
A feladathoz jól illik egy 42 cm-es papírcsík, és a színesrúd-készlet lila és bordó rúdjai.

Ezekkel az óránként megtett utakat jelölhetik a gyerekek.

Milyen információ leolvasására nyújt ez a kirakás lehetőséget?

Gondolatban követik a gyerekek az autók útját.

Elképzelik, hogy 1 óra elteltével melyik autó mekkora utat tett meg, éppen hová jutott, és jól látják, hogy még mekkora út van a két autó között. A 420–60–80 vagy a 420–(60+80) számfeladatok mindegyikére értelmes magyarázatot találhatnak.



Azt is könnyedén leolvashatják erről a képről, hogy a teljes útból melyik autónak mennyi van hátra. Akár arra a kérdésre is megtalálhatják a választ, hogy vajon hol jártak az autók félórával ezelőtt.

Ha az autókkal a teljes utat bejárják, ismét sok információhoz juthatnak.

Egyrészt láthatják, hogy találkozás után hogyan távolodnak az autók egymástól. Jól látszik, hogy A városból induló autó 7 óra alatt teszi meg a teljes utat, míg a B városból indulónak 5 óránál kicsivel kell csak több idő. Az ügyesebb gyerekek azt is kiszámolhatják, hogy pontosan mennyi idő alatt jut el az autó a B városból A-ba.

Az utolsó két feladat mennyiségi adatokat tartalmaz, ezek megoldása többnyire több nehézséget okoz a gyerekeknek. Ezért külön figyelmet fordítunk harmadik osztályban a mozgásos szöveges feladatok tárgyalására, amelyek modelljeként a színes rudak és a papírcsíkok mellett használhatunk szakaszos ábrázolást is.

A fent bemutatott megoldásokból kitűnik, hogy a kirakások, ábrázolások mindegyikéről leolvashatók a feladatok megoldása mellett további információk is, amelyeknek nagy előnye, hogy erősítik a matematika és a valóság kapcsolatának érzékelését.

A 3–4. osztályos tanulók számára gyakran tűzünk ki olyan feladatokat, amelyekkel a hétköznapi életük során valóságos szituációkban találkozhatnak. Ezek megoldásakor szükséges a már tanult matematikai ismereteik alkalmazása, sokféle képességük mozgósítása. A mindennapi történésekből merített problémafelvetéseket a gyerekek közel érezhetik magukhoz, hiszen úgy érezhetik, hogy a saját életük pillanatait, tevékenységeit keltik életre. Az ilyen történetek lehetővé teszik, hogy a gyerekek beleéljék magukat adott szituációkba, és a mindennapokban alkalmazható, könynyen aktivizálható ismereteket szerezzenek. A módszerekben változatos problémafelvetések alkalmat kínálnak az aktív tanulásra, az összefüggések felfedezésére; a tanulókat gondolkodásra késztetik.

A valóságos, a gyerekek életéből, környezetéből vett problémafelvetések lehetőséget teremtenek számukra, hogy megérezzék a matematika modellszerepét a gyakorlati élet, valamint a tudományok problémáinak megoldásában. Ehhez járulnak hozzá a mennyiségek mérését igénylő tevékenységek, valamint a vásárlásról szóló feladatok.

A gyerekeknek is lehet gyakori feladatuk a vásárlás. Ehhez a tevékenységhez sokféle probléma tartozhat. Nem maradhatnak ki a vásárolt áruk fizetésével járó problémák vagy az áruk szállítása, több áru tömegének becslése.

Például:

Egy nagyobb bevásárláskor sok mindent tettünk a bevásárlókocsiba.
A vásárolt áruk: és az áraik:

1 karton dobozos tej	1liter	93 Ft
másfél kg hús	1 kg	768 Ft
4 doboz tojás	1 db	12 Ft
40 dkg sajt	1 kg	720 Ft
2 darab 25 dkg-os gesztenyemassza	1 db	174 Ft
3 dl tejszín		105 Ft
3 kg mosópor		1300 Ft
4 kg alma	1 kg	150 Ft
2 kg mandarin	1 kg	280 Ft

a) A pénztár felé haladva azon gondolkodtunk, elég lesz-e a nálunk lévő 8000 Ft készpénz, vagy bankkártyával kell fizetnünk. Te mit gondolsz erről?
b) A tej, a mosópor az alma és a tojás kivételével mindent két szatyorba pakoltunk. Vajon hogyan tudtuk elosztani az árut két szatyorba, ha azok közel egyforma nehezek lettek? Te mit tennél az egyik, és mit a másik szatyorba?

A probléma megoldása sokféle képességet fejleszt. Egyrészt, szükség van valóság tartalmú adatok becslésére, szükség lehet mennyiségek mérésére is (pl. milyen nehéz 1 doboz tojás?). Néhány adat hiányos, illetve ismeretlen lehet a gyerekek előtt, ezeket az adatokat pótolniuk kell (például: hány liter tej van egy kartonban? hány tojás van egy dobozban? stb.). Az adatok pótlásakor tapasztalhatják a gyerekek, hogy nem egyértelmű a feladat megoldása, hiszen többféle csomagolásban kaphatunk tojást. Így a fizetendő összeg attól függ, hogy hány tojást vásárolunk. Ez viszont nem befolyásolja a szatyrok nehézségét, hiszen a tojásokat nem helyezzük szatyorba.

A mindennapokban gyakran kerülünk döntést igénylő helyzetbe. Általában többféle lehetőség adódik egy probléma megoldására, és a mi választásunkon múlik, hogyan oldjuk meg. Választásunkat sok tényező befolyásolhatja, a megoldás különféle feltételektől függhet. Ezért gyakran kell a matematikaórán is olyan helyzetbe hozni a gyerekeket, amelyeknél nekik kell meggondolni a lehetséges feltételeket, és többféle feltétel teljesülése esetén ők választhatják ki a leginkább reális megoldást.

A gyerekek mindennapjaihoz remélhetőleg hozzátartozik az olvasás. Olvasási élményeik megbeszélése mellett kínálkozik az is, hogy ötleteket találjanak technikai problémák megoldására. Ez vonatkozhat a könyvek rendezésére, adott könyvespolcon való elhelyezésükre, könyvtári kölcsönzésre vagy éppen egy könyv elolvasásának időbeli ütemezésére.

Például:

Andris nagyon szeret olvasni. Minden este elalvás előtt egy órát olvas. Egyik kedvenc könyve Fekete Istvántól a Kele. Ezt már harmadszor kölcsönözte ki a könyvtárból, de egy hét múlva vissza is kell vinnie.
a) A 270 oldalas könyvnek túl van már a felén, de még nem jutott el a kétharmadáig. Legalább hány oldalt olvasson el a könyvből naponta, hogy be tudja fejezni a könyv olvasását egy hét alatt?
b) Andris feljegyezte, hogy mely napokon, mikor van nyitva a könyvtár.

Hétfőn:	*10:00–12:00 és 15:00–16:30*
Kedden:	*14:30–18:30*
Szerdán:	*11:00–17:15*
Csütörtökön:	*9:30–11:30 és 15:15–18:00*
Pénteken:	*10:00–13:30*

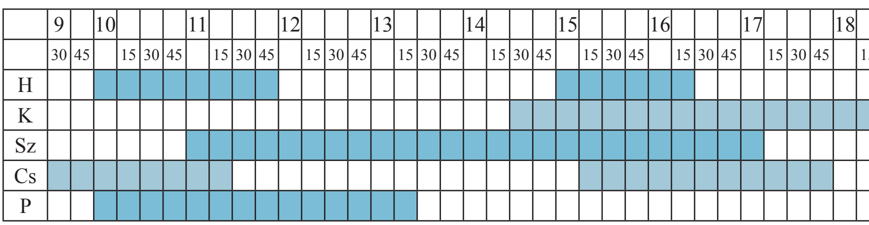
Andris általában kora délután, fél 2 és 2 óra között vagy este 5 óra után tud könyvtárba menni az iskolai elfoglaltságai és az edzései miatt. Mely napokon tudja visszavinni Andris a könyvet a könyvtárba?

A feladat első része arról informál bennünket, hogy a könyvből 135 oldalnál kevesebb, de több mint 90 oldal van hátra. Ha ezt adott idő alatt akarja valaki elolvasni, konkrétabb adatra van szükség. Így csak azt lehet meggondolni, hogy mennyit kell egy nap alatt elolvasni, ha 134, 133, …, 91 oldal van vissza a könyvből. Azt is meggondolhatjuk, hogy még sincs 44 megoldása a feladatnak, hiszen minden nap ugyanannyit olvas Andris, így ha 1 oldallal növekszik a naponta elolvasott oldalak száma, akkor 7 oldallal fog nőni az 1 hét alatt olvasott oldalak száma. Így a probléma lehetséges megoldásait érdemes táblázatba gyűjteni:

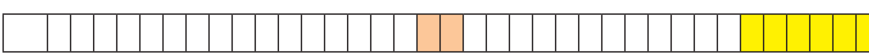
Az elolvasatlan oldalak száma	91	92–98	99–105	106–112	113–119	120–129	130–134
1 nap alatt célszerű ennyit olvasni	13	14	15	16	17	18	19

Az is meggondolható, hogy mely oldalszámok esetén kell valóban a hét minden napján ugyanannyit olvasnia Andrisnak, és mely esetekben marad az utolsó napra kevesebb oldal.

A feladatban felvetett második kérdés időintervallumok összevetését és közös részének meghatározását igényli. A gyerekek számára nagy segítséget jelent a könyvtár nyitva tartásának időszalagon való ábrázolása.



Azt is ábrázolhatjuk egy időszalagon, hogy Andris mikor tud menni könyvtárba, és ezt a csíkot kivághatjuk és végighúzhatjuk a táblázaton.



A csík mozgatásával könnyen leolvashatják a gyerekek a lehetséges megoldásokat.

A tárgyi eszközök megfelelő megválasztása, használata könnyíti a gyerekek számára a „matematizálás” tevékenységét. Annak a fejlesztése, hogy a gyerekek a köznyelven megfogalmazott problémákat le tudják fordítani a matematika nyelvére, fontos és nehéz feladat. A fordítást az eszközök és a jól választott képek támogatják. A tevékenységre javasolt eszközök szükség esetén tárgyhűek (pl. konkrét tárgyak mérése, számlálása, játékpénz használata), más esetben megjelennek képek, ábrák (pl. szakaszos ábrázolás), vagy az absztrakcióhoz vezető elvontabb modellek (pl. színes rudak, táblázatok). Nem szabad siettetni az eszközök elhagyását, fontos, hogy gyakran igényeljük az elgondolás szemléltetéssel való indoklását. Az algoritmusok alkalmazása előtt várjuk el a gyerekektől pl.

a műveletek előre becslését, így tudják ellenőrizni számolásuk megbízhatóságát, felismerhetik az elkövetett hibákat.

A természeti, földrajzi, éghajlati adatokat is tartalmazó vagy a kirándulással, utazással, sporttal, egészséges életmóddal kapcsolatos feladatok érzékeltetik, hogy a matematikai ismeretek más szakmák, az élet különböző területein felmerülő problémák megoldásának is hasznos eszközei.

A problémáknak olyan életszerű helyzeteket kell felvetniük, amelyekkel a gyerekek nap mint nap találkozhatnak, így könnyű lesz számukra a szituáció elképzelése. A témaválasztásnál nem matematikai problémákhoz keresünk valóság közeli szituációkat, hanem a hétköznapokban gyakran átélt valóságos problémákat fogalmazzuk meg, és ezek meggondoltatásával hozzájárulunk ahhoz, hogy a gyerekek könnyebben eligazodjanak a mindennapi életben.

Felvethetünk olyan problémákat, amelyekben a tanulóktól várjuk a szükséges adatok beszerzését.

Például:

Gyűjts magadról adatokat!
a) Mennyit ver a szíved 1 perc alatt?
b) Hányszor veszel levegőt 1 perc alatt? Számolj!
c) Mennyit ver a szíved 1 óra alatt?
d) Hányszor veszel levegőt 1 óra alatt?

Egyszerű, egylépéses következtetéssel megoldható feladattal találkoznak a gyerekek. A feladat megoldásai között nagy különbségek lehetnek, hiszen a gyűjtött adatok a gyerekek mérési eredményei alapján változhatnak. A megoldások összehasonlítása kiszűrheti a hibás mérési eredményeket, ily módon reális adatok használatához vezet.

A problémák megoldása önállóan, párban vagy csoportban lehetőséget ad a megszokottól eltérő feladatok és a valóságban előforduló helyzetek áttekintésére, megoldási módok megismerésére, ötletek, módszerek gyűjtésére, a problémamegoldáshoz nélkülözhetetlen kreativitás fejlődésére. A csoportos tevékenységek során a gyerekek természetes módon tanulják meg az együttélés szabályait, megtapasztalják a jó érzést, ha segítenek a rászorulóknak. Sokszor nyílik lehetőségük véleménynyilvánításra, elgondolásaik megismertetésére másokkal. Az elképzelések ütköztetése, megvitatása neveli őket mások véleményének tiszteletben tartására, a társaik iránti toleranciára. Megtanulják, hogyan lehet elfogadni a maguk és mások hibáit, esetleges korlátait. A hibajavítás, a véleményalkotás és mások meggyőzése a saját ötletek beválásáról indoklásokkal, ésszerű, elfogadható érvelésekkel történhet. Kérjük a tanulóktól a megoldás ellenőrzését és indokoltassuk is meg a választott módszert, hogy a gyerekek tényekkel alátámasztva vállalják saját munkájukért a felelősséget, és képesek legyenek tevékenységüket reálisan értékelni.

Relációk, függvények

Az 1-2. osztályban megfogalmazott követelményekre épülve hasonló típusú feladatok és követelmények támaszthatók a 3–4. osztály végére. A sorozatok esetében összetettebb szabályok felismerése a követelmény, a hétköznapi tárgyak és jelenségek matematikai jellemzőinek átkódolásában nagyobb jártasság feltételezhető. Például az idővel kapcsolatos jelenségek számokká alakítása rutinszerűvé válhat, mert például a hét napjainak neve és az, hogy a hét hányadik napjáról van szó, ebben az életkorban már általában ismeret jellegű tudáselemként van meg, és nem szükséges a hétfőtől indulva, a számlálás gyakorlatához hasonló stratégiát alkalmazni.

Rekurzív számsorozatokkal a tanulók az 1–2. évfolyamon is találkoznak (pl. olyan sorozattal, ahol a soron következő tag az előző két tag összege), azonban számos lehetőség van olyan hétköznapi problémák megfogalmazására, amelyekben rekurzív sorozatok kerülnek elő. Például: egy 2/4-es zenei ütem hányféleképpen tölthető ki negyed és nyolcad ritmusokkal? Majd ezt követően: egy 3/4-es zenei ütem hányféleképpen tölthető ki negyed és nyolcad ritmusokkal?

A következő feladat a klasszikus Fibonacci-sorozat szöveges változata, a kevéssé valószerű nyúlszaporulat helyett egy lerajzolható, a mesevilágot idéző megszövegezéssel:

Amikor Tündérország legöregebb fáját elültették, a fának egy ága volt. Egy év múlva még mindig csak egy ága volt, de utána minden évben minden ágból kihajtott egy új ág. Hány ága volt a fának (a) két év múlva, (b) három év múlva, (c) négy év múlva, (d) nyolc év múlva?

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Karikázd be annak az összefüggésnek a jelét, amelyik igaz a táblázatra, és húzd át annak a jelét, amelyik nem igaz!

△	búza	ház		kincs
☐	b	h	f	

a) ☐ = △ betűiből elhagyjuk azokat, amelyek nem kezdőbetűk
b) ☐ mássalhangzó
c) ☐ = △ kezdőbetűje
d) ☐ betű

Ebben a példában mind a négy opció igaz a táblázatra.
Az ilyen feladatok – bár kevéssé megszokottak – a gondolkodás magas szintű összetevőit mérik, amelyek kapcsolatosak a falszifikációs következtetési elvvel.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?

⊙	lent	mellett		mögött
☐	lefelé	mellé	alá	

A feladat tartalmi szempontból nyelvtani, azonban a nyelvtanban működő matematikai törvényszerűségeket illusztrálja. Ezáltal a matematikai modellalkotás és a hétköznapokban szerzett ismeretek közötti kapcsolat erősödik, és ez kifejezett célja az olyan matematikaoktatásnak, amely egyszerre kívánja szem előtt tartani a matematikai gondolkodás fejlesztését és a matematikai tudás transzferálhatóságát.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?(Forrás: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve, 1981, 2. kiadás, 278. o.)

□	ló	medve	tehén	tyúk
✷	csikó	bocs	borjú	csirke

A megoldást fogalmazzuk meg nyitott mondattal is: A □ kicsinye a ✷.

A bináris relációk tudatosításának számtalan eszköze lehetséges. Számos tantárgyban bevett feladattípus az illesztéses zárt feladat, amikor két halmaz elemei között kell megtalálni a kapcsolatot, és előfordulhat, hogy az egyik halmaz valamely eleméhez a másik halmaz több eleme is hozzáilleszthető. A napirenddel, táplálkozással, öltözködéssel kapcsolatos kérdések lehetőséget nyújtanak adatpárok képzésére, ahol az elő- és utótag közötti kapcsolatban lényeges a sorrend is és a köztük fönnálló viszony is.

Az 1–2 osztályos követelmények és feladattípusok alkalmazásával, ám bővebb számkörben mozogva tudunk autentikus problémákat definiálni. Az adatpárok mellett adathármasokban felismert összefüggések is elvárhatók.

A rendszerezési képesség fejlesztésére alkalmas feladatok között szerepelnek a két szempontú szelektálást igénylő feladatok. Dolgok adott sokaságát két szempont egymásra vetítésével rendszerezni már 3–4. osztályban is lehetséges, elsősorban manipulatív és képi szintű feladatokkal, amelyek tartalma a mindennapi életből ismerős a tanulók számára. A két szempontú osztályozás egyúttal a korrelatív gondolkodás fejlesztésének eszköze is, hiszen a két szempont egymásra vetítésével előálló kétdimenziós rendszerben a két szempont közötti esetleges összefüggés is nyilvánvalóvá válik.

Oktatás-módszertani szempontból a hasonló feladatoknál javasolható a tanulók képességszint szerint heterogén csoportokban történő együttműködése, amelynek során a tanulók megismerik egymás ötleteit. Különösen fontos ez az olyan autentikus feladatoknál, amelyeknek nincs egyetlen, jól definiált megoldása, hanem a megoldás sokszor maga a gondolkodási folyamat, amelynek során matematikai modellek alakulnak és változnak.

A fordított arányosság elve is megjelenik 3–4. osztályban, és elsősorban a tanulói tapasztalatokra, próbálgatásra épülő feladatokban.

Az osztálykiránduláson a gyerekek egy pónilóval húzott kis hintóval szerettek volna utazni. A póni gazdája azt mondta, 1200 Ft-ot kell fizetni egy negyedórás menetért, függetlenül az utasok számától.
Milyen kérdéseket tettek még föl a tanulók, mielőtt kibérelték a hintót?
Írjátok föl az alábbi táblázatba, hogy mennyibe kerül egy menet a hintó-

val tanulónként, ha egyedül, vagy ketten, vagy hárman, illetve négyen együtt utaznak!

résztvevők száma	1 tanuló	2 tanuló	3 tanuló	4 tanuló
1 tanuló részvételi díja	1200			

A fordított arányosság megjelenésének másik lehetséges terepe a területszámítással kapcsolatos. (Természetesen nem képlettel felírt területszámításra gondolunk.)

Anna 24 egyforma papírdobozt szeretne szépen elrendezni a szobájában. Ha egymás tetejére pakolja őket, akkor magas lesz az oszlop, ha pedig mindet egymás mellé rakja, akkor sok helyet foglalnak el a szőnyegen. Milyen elrendezést javasolnál? Hány doboz kerüljön egymás mellé, és milyen magasra pakolja Anna a dobozokat? Készíts rajzot, majd készíts táblázatot!

egymás melletti dobozok száma	1	24	2		
egymás fölötti dobozok száma	24	1			

A korrelatív gondolkodás fejlesztésére alkalmasak az olyan feladatok, ahol két számszerűsíthető tulajdonság nem determinisztikusan függ össze, hanem egy tendencia rajzolódik ki. A következő feladatban akár a tanulók saját adatait is fölhasználhatják.

A védőnők megmérték az osztály tanulóinak testmagasságát és testsúlyát. Néhány adatot a következő táblázatban láthatunk. Két adatot azonban valaki véletlenül kiradírozott. Milyen adatok szerepelhettek az üres helyeken?

testmagasság (cm)	135	142	127		140
testsúly (kg)	31	36	28	40	

A konkrét adatok egy viszonylag tág intervallumból kerülhetnek ki, de ennél jóval fontosabb az adatsorok közötti összefüggés explicit megfogalmazása, amely a pozitív korreláció gyermeknyelvi leírása lehet. Még ennél is lényegesebb azonban annak tudatosítása, hogy a konkrét értéket nem tudjuk az összefüggés alapján meghatározni.

Geometria

Konstruálások

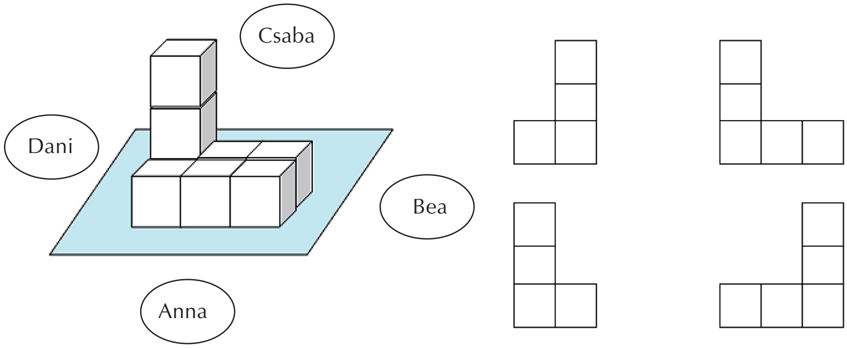
A 3. évfolyamon a képességfejlesztési feladatok közül előtérbe kerül az alkotó gondolkodás, a formalátás, a térlátás fejlesztése. Az alkotások létrehozása közben fejlődik a szövegértés a tulajdonságok kifejezésével, a megfigyelőképesség, az emlékezőképesség. A konkrét alakzatok tulajdonságainak megfigyelésével, kifejezésével fejlődik az absztrahálóképesség.

A 4. évfolyam végére az alkotások létrehozása a megadott feltételek figyelembevételével, ezek ellenőrzésével egészül ki. Fontossá válik a rész és egész viszonyának megértése, a megfigyelések elemzése, megfogalmazása, a tanult matematikai szaknyelv elemi használata. Az alkotások létrehozása fejleszti a kombinatív gondolkodást. A teljességre törekvés a cél, s a megalkotott alakzatok rendszerének felépítése.

A felső tagozat fejlesztési feltételeként a kezdő szakasz végére szükséges testek építése modellről és adott feltételek szerint, illetve síkidomok előállítása tevékenységgel megadott feltételek szerint. Geometriai tulajdonságok felismerése, alakzatok kiválasztása, szétválogatása a felismert tulajdonságok alapján. Élek, csúcsok, lapok felismerése, számbavétele egyszerű testeknél, oldalak, csúcsok felismerése, számbavétele egyszerű sokszögeknél. Téglatest, kocka, téglalap, négyzet felismerés összkép alapján a testek, síkidomok különféle helyzetében. Téglalap, négyzet, téglatest, kocka tanult tulajdonságainak felsorolása, bemutatása modell segítségével.

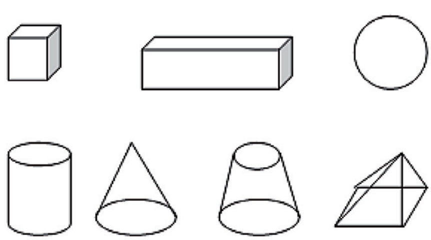
Példa a térszemlélet fejlesztésére, a rész és az egész viszonyának megfigyelésére:

Négy gyerek fehér kiskockákból épített egy testet. Körbeülték, és négy különböző oldalról nézve lerajzolták, hogy mit látnak. Szerinted melyik gyerek mit láthatott? Írd a nevüket a megfelelő helyre!



Példa formafelismerésre, alakzatok tulajdonságainak felismerésére, állítások igazságértékének meghatározására:

Párban játsszatok!
Válogassatok ki olyan testeket, amilyeneket a képen láttok! 10 kártyából felváltva húzzatok! A kártyán lévő állítást úgy egészítsétek ki, hogy felmutattok egy testet, amelyre igaz. (A játékot játszhatjátok más szabállyal is. Pl.: Úgy egészítsétek ki az állításokat, hogy ne legyenek igazak!)



Készíts kártyákat az alábbi mondatokkal! Egy-egy kártyán egy mondat legyen!

Minden lapja ugyanolyan alakú és ugyanakkora.
Minden lapja négyzet.
Minden lapja téglalap.

12 éle van.
Csúcsainak száma 5.
Oldallapjai négyszögek.
Van kör alakú lapja.
Csak görbe felülete van.
Sík és görbe felülete is van.
Van háromszög alakú lapja.

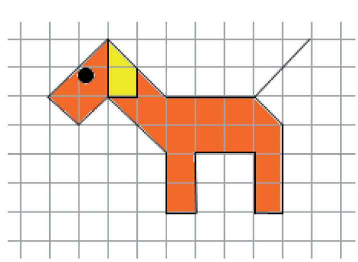
Transzformációk

A 3–4. évfolyamon az alakazonosítás mellett a változás és változatlanság felismerésével, tudatosításával alapozódik az általánosítás a transzformációk területén. A ritmus, a periodikusság felismerése, a szimmetriák megfigyelése és követése a megfigyelőképesség fejlesztését célozza. Fontos a megfigyelt alakzatokról állítások önálló megfogalmazása, illetve adott állítások igazságának megítélése.

A továbbhaladáshoz szükséges fejlesztései feltételek között fontos a „hasonló” és az „egybevágó” kapcsolat felismerése, a hasonlóság és az egybevágóság képi fogalmának alapozottsága, síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, elforgatás) végrehajtása másolópapír segítségével, a tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összetettebb alakzatok esetén is.

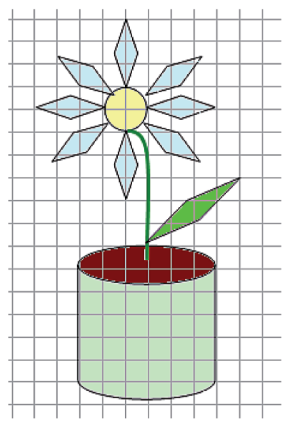
Példa a hasonlóságra, nagyított kép előállítására:

Nagymama egy kutyust hímez Danika takarójára. Talált egy mintát az „Ügyes kezek” újságban, de a mérete túl apró a takaróhoz képest. Másold át a mintát a füzetedbe! Nagyítsd fel úgy, hogy minden irányban kétszeresre változtasd a hosszméreteket!



A témakör fejlesztési feladatainak fontos eleme a „hasonló” és „egybevágó” kapcsolat felismerése mellett a síkbeli egybevágósági transzformációk közül a tengelyes tükörkép megalkotása másolópapír segítségével, illetve nagyított kép előállítása négyzetrács felhasználásával.

Anyák napjára szép ajándékot készíthetsz.
Keress egy erős papírdobozt!
A rajzot nagyítsd fel kétszeresére, és ragaszd a dobozka tetejére!
A doboz jó lesz varródoboznak.



Tájékozódás

A kezdő szakaszban képességfejlesztési feladat a térbeli tájékozódás továbbfejlesztése, információk megértése, információközlés szavakkal, jelekkel, a helymeghatározás képességének fejlesztése. Irányra, méretre, szomszédosságra való emlékezés.

A további fejlesztéshez szükséges, hogy a tanulók saját környezetükben képesek legyenek eligazodni (utca, házszám, emelet, ajtó, irány, távolság), egyszerű térképvázlatokat értelmezni, illetve készíteni az irány és méretek közelítő, valamint a szomszédosság pontos megjelölésével. Tudjanak tájékozódni vonalon, síkban, térben egy, két, illetve három adat segítségével.

Autentikus tevékenységre építő feladatként a következő példát adjuk:

Párban dolgozzatok! Készítsetek térképvázlatot iskolátok környezetéről! Jelöljétek be az iskola, a boltok, a lakásotok helyét! Ha van a környéken parkoló, vasútállomás, sportpálya, könyvtár, mozi, színház…, akkor azt is jelöljétek meg! Adj meg egy útvonalleírást, amelyet a párodnak követnie kell! Az ő dolga, hogy megmondja, hová jutott. Azután ő adjon neked egy leírást, és te kövesd azt! Hová jutottál?

Mérés

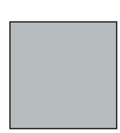
A 3–4. évfolyamon folytatódik a tapasztalatgyűjtés a mennyiségi jellemzők felismerése, megkülönböztetése, a különbségek észrevétele terén. Fejlesztési feladat a becslőképesség alakítása, a pontosság mértékének kifejezése gyakorlati mérésekben, egyszerű mennyiségi következtetések végzése. Fontos a matematika és a valóság kapcsolatának építése. A gyakorlati mérések segítik a tájékozódást a világ mennyiségi vonatkozásaiban.

A tanulóknak a további évek fejlesztésének érdekében biztonsággal kell mérniük alkalmi és szabványegységekkel. Gyakorlatban végrehajtott mérések alapján a mértékegység és mérőszám kapcsolatát képesek átlátni, a tanult szomszédos mértékegységekkel gyakorlati mérésekhez kapcsolva, illetve ilyenek felidézése nyomán át- és beváltásokat végezni, a téglalap (négyzet) kerületének és területének megállapítását méréssel és számítással meghatározni.

Példa téglalap alkotására, területének meghatározására:

János bácsi négyzet alakú kőlapokkal rakta ki a járdát. A maradék 36 darabbal a kutyaház előtti részt akarja téglalap alakban lekövezni. Papíron próbálgatja, hogy milyen legyen a kirakás.
Rajzold le, hányféle megoldást találhat!

A négyzet alakú kőlapok egy oldala a valóságban 1 dm hosszúságú:



Hány négyzetdeciméteres területet tudott lefedni a maradék lapokkal?

További ötlet olyan feladatokra, amelyek tevékenységközpontúak és közvetlenül kapcsolódnak a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz:

A szél becsapta az ablakot, és sajnos összetört egy ablaküveg. A gondnok megmérte: 1253 mm hosszú és 1245 mm magas üveget kell a keretbe bevágni.

a) Mérjetek ki és vágjatok ki papírból egy ilyen méretet!
(Több darabból is összeragaszthatjátok!)

b) Adjátok meg a méreteket centiméter-pontossággal!

c) Hány centiméter az üveglapot keretező szegélylécek hosszúsága összesen?

d) Hány darab 1 cm oldalhosszúságú négyzettel tudnátok lefedni az üveglapot?

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A 3–4. évfolyamon az adatok lejegyzésének, illetve leolvasásának egyre tudatosabb volta válik hangsúlyossá. 4. osztály végére a gyerekek tudnak adatokat elrendezni sorozatba, táblázatba, ábrázolni tudják azokat grafikonon, sorozatból, táblázatból, grafikonról adatokat visszaolvasnak, találnak az egész adategyüttest jellemző adatokat (pl. a nagyság szerinti középsőt; a legnagyobb, legkisebb adatokat, ezek távolságát; a leggyakoribb adatot). Ki tudják számítani az adatok átlagát. Ez a téma rengeteg lehetőséget nyújt realisztikus feladatok megoldására, ha figyelemmel vagyunk az adatok megválasztására.

Realisztikus problémák kitűzését és megoldását gyakran a táblázatok elemzésének képességével vizsgáljuk.

Például:

Gabi, Béla, Pista és Jutka nagyon jó barátok. Szeretnek kártyázni, ezért havonta legalább egyszer játszanak. Egy olyan játékot szoktak játszani, amelyben minden partiban van első, második, harmadik és negyedik helyezett. Minden parti után felírják az eredményeket, és év végén győztest hirdetnek. Az idei kártyacsaták eredményét ez a táblázat mutatja.

	1. hely	2. hely	3. hely	4. hely
Gabi	12	24	23	17
Jutka	18	22	21	15
Béla	24	13	13	26
Pista	22	17	19	18

A táblázat értelmezése során felvetődhetnek a következő kérdések: Hány partit játszottak az idén? Hogyan lehet megszámolni? Körülbelül hány partit játszanak alkalmanként? Ki nyerte a legtöbbször a játékot?...

További feladat lehet, hogy amennyiben más-más szempont alapján jelöljük ki a győztest, más lesz a győztes versenyző. A tanulók képesek ésszerű szempontot keresni, amely alapján eldönthető, hogy ki tekinthető győztesnek. A tanulói magyarázat, vita kezdi sejtetni, hogy egy statisztikai adathalmazt többféleképpen lehet értelmezni és magyarázni, hiszen

– Béla szerint ő a győztes, mert ő nyerte a legtöbb játékot.
– Jutka azzal érvel, hogy ő ugyan nem nyert túl sokat, de nagyon kevés utolsó helyezése van.
– Gabi szerint ugyan ő maga nagyon keveset nyert, de nagyon sokszor lett második, és azt sem könnyű elérni. Utolsó helye pedig kevesebb, mint a fiúknak.
– Pista úgy érzi, hogy legalábbis Bélánál jobb, mert ugyan kevesebb első helyezése van, de kevesebb utolsó is.

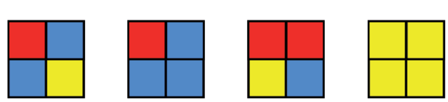
A probléma megoldása lehet az, hogy például 4 pontot adnak minden győzelemért, hármat a második helyezésért, kettőt a harmadikért, egyet a negyedikért. Elképzelhető, hogy úgy gondolkodnak, hogy a győzelemért több pont is járhat. Például 5 a győzelemért három a második helyezésért, egy a harmadikért, a negyedikért pedig nem jár semmi. Vajon mindkét számolási mód alkalmazása ugyanazt a győztest hozza? A táblázaton való eligazodás mellett a tevékenység fontos hozadéka a számolási készség fejlesztése.

A fenti probléma egy kissé leegyszerűsített felvetése lehet:
Az iskolai focibajnokság lezajlott. A győzelemért 2 pont, a döntetlenért 1 pont jár. A meccsek eredményeit beírták a következő táblázatba:

	3.a	3.b	3.c	4.a	4.b
3.a		3:0	2:1	1:3	1:1
3.b			0:0	0:2	2:1
3.c				4:3	1:3
4.a					2:2
4.b					

Állapítsd meg, hogy hány pontot gyűjtöttek a csapatok!
3.a: .... pont
3.b:....... pont
4.a:.......pont
Melyik mérkőzésen született a legtöbb gól?
Hány meccs végződött döntetlennel?

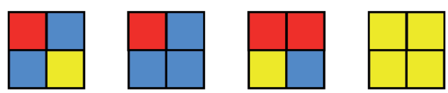
A kombinatorika és a valószínűségszámítás tanulása során rengeteg autentikus problémával találkoznak a gyerekek. A hétköznapi tapasztalataikra építve számos olyan feladat tűzhető ki, amely számukra praktikus, releváns, és a problémamegoldás folyamata szempontjából intranszparens. Jó alkalom erre például egy játékkészlet közös, csoportmunkában való megalkotása.



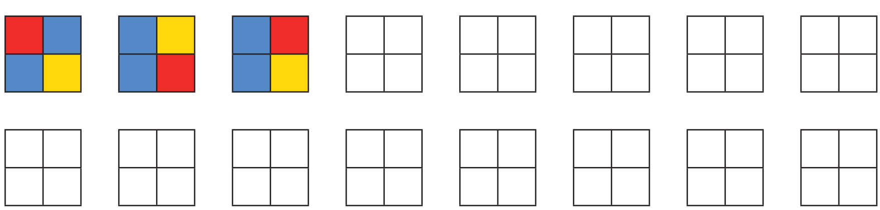
A négyzetlapok középvonalait megrajzoljuk, majd kifestjük piros, sárga és kék színeket használva. A gyerekek közös feladata az összes különböző elem megalkotása. Mivel a papírlapok forgathatók, megegyezhetünk abban, hogy azonosnak tekintjük a négyzet középpontja körüli forgatással egymásba vihető lapokat. Ebben az esetben a munka szervezése és megosztása egyaránt kombinatorikus problémát vet fel. Az elkészült készletet sajátjuknak érzik, mely autentikussá teszi a tevékenységet.

A fent leírt tevékenység értékelés során megfogalmazott változata a következő lehet:

Négyzetlapokból színezéssel ilyen kirakós játékot készítettünk. Három színt használtunk.

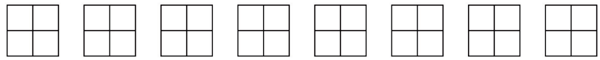


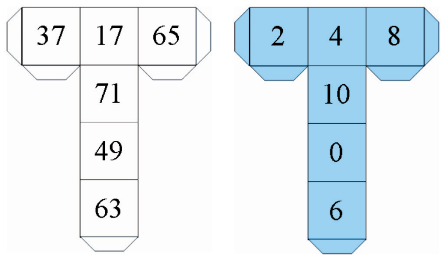
Ezután külön csoportba gyűjtöttük azokat a négyzetlapokat, amelyekben mindhárom szín szerepelt. Milyen elemek vannak még ebben a csoportban? Színezz!



A valószínűségi szemlélet fejlesztési céljai között szerepel, hogy 5-6. osztályban az adatok lejegyzése, megfigyelése és feldolgozása egyre önállóbbá váljék. Ez segíti a rendszerezőképesség fejlődését, lehetővé teszi a gyakoriságok megfigyelését is. A statisztikai megfigyelések rengeteg lehetőséget kínálnak autentikus feladatok beiktatására.

Egy másik alkalommal egyszerre dobnak az alábbi ábrán látható két kockával. A kísérlet megkezdése előtt megfogalmaznak néhány sejtést (pl. hogy páros vagy páratlan összeg jön-e ki gyakrabban), és néhány eset lejegyzése után összevetik tapasztalataikat a megfogalmazott sejtésekkel.





A biztos és lehetetlen események elkülönítésére vonatkozó kérdéseknek a mérés során továbbra is nagy jelentősége van. A fenti kockák feldobására vonatkozóan a következőket kérdezhetjük:

Ezekkel a számozott kockákkal dobtam. Ezután állításokat mondtam a dobott számok szorzatáról. Írd az állítás mellé, hogy szerinted igaz (I), hamis (H) vagy igaz lehet, de nem biztos, hogy igaz (L)!

a) 4-re végződik…
b) 6-nál kisebb…
c) Páratlan…
d) 491…
e) 711-nél kisebb…

Autentikus feladatokra jó lehetőség adódik olyan helyzetek leírásakor, amikor a gyerekeknek maguknak kell megtervezni egy játék szabályát.

Például:

Jancsi és Péter elhatározza, hogy ötször egymás után dobnak egy hagyományos dobókockával. Megegyeznek abban, hogy Jancsi akkor kap egy pontot, ha a dobás eredménye 2, 3, 4, 5 vagy 6. Ha nem ez történik, Péter kap néhány pontot. Az öt dobás után az a nyertes, aki több pontot gyűjtött. Ha azt szeretnénk, hogy a játék igazságos legyen, hány pontot kell kapnia Péternek, amikor a kocka 1-et mutat?

Várható megoldásként a tanulók 5 vagy 6 pontot fognak javasolni az 1-es érték dobásánál. A tanítónak nem szükséges állást foglalnia egy végső, helyes megoldás mellett. A feladat az úgynevezett probléma alapú tanulás eszméjét követi, vagyis a tanulók matematikai tevékenységet végeznek egy intranszparens problémán, a pedagógus pedig a matematikai igazságok birtokosa és osztója szerepéből a gondolkodás facilitátorává és moderátorává válhat.

Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

A korábbi évfolyamokhoz képest a realisztikus szöveges feladatok több téren újdonságot hozhatnak a tanulói tudás értékelésében. A kibővült számkörben a közvetlen gyakorlati tapasztalathoz nem köthető, de a médiából vagy az iskolai tananyagból ismert mennyiségek (pl. történelmi évszámok, földrajzi mennyiségek) jelenhetnek meg a feladatokban. Ezenfelül a többlépéses feladatok egyre nagyobb teret nyernek. A több lépést nem feltétlenül a több, egymás után elvégzendő számtani művelet jelenti (noha ez is jelentős nehézséget okoz), hanem a feladatmegoldás különböző fázisaiban megjelenő tudatos döntések egymásutánja. A Relációk, függvények cím (281. oldal) alatt részben elemeztük a szöveges feladatok megoldásának szokásos lépéseit 5–6. osztályban. A realisztikus feladatokban egyes lépések különösen fontossá válnak. A feladat szövegének megértése és a megfelelő matematikai modell kiválasztása általában nagyobb jelentőségű, mint a gyakorlófeladatokban. Ugyancsak kiemelt fontosságú általában a megoldás értelmezésének, ellenőrzésének lépése, amely itt korántsem azt jelenti, hogy az elvégzett matematikai műveleteket újra vagy esetleg inverzükkel kiszámoljuk, hanem a feladat szövegéhez illeszkedést, a valóságnak megfelelést vizsgáljuk.

„A matematikai tudás alkalmazásai” című bevezető fejezetünkben több példát is bemutattunk, amelyek a realisztikus aritmetikai szöveges feladatok közé tartoznak. Ezekből a feladatokból mint prototípusokból további realisztikus szöveges feladatok generálhatók.

Jancsi bácsi almáskertjében 8 sorban vannak a gyümölcsfák, és mindegyik sorban 12 almafa található. Fia javaslatára a kert szélén lévő fák törzsét vegyszerrel kezeli, hogy távol tartsa a kóborló őzeket. Hány gyümölcsfát nem fog vegyszerrel kezelni?

A feladat megoldásához egy megfelelő vázlatrajzot érdemes készíteni, vagyis a feladat szövegében szereplő dolgokat egy geometriai modellhez kapcsoljuk.

A mozijegyen azt olvassuk, hogy „BAL, 17. sor, 15. szék". Vajon hány szék lehet a moziteremben?

Ez a nyílt végű probléma az intranszparencia szempontjából akár az autentikus feladatok között is helyet kaphatna. Azért nem ott szerepeltetjük, mert a feladat maga nem egy életszerű problémahelyzetet vázol. Ha ott vagyunk a moziteremben, akkor aligha a jegyen található számok alapján fogunk becslést adni. Megoldásként többféle becslés adható, amelyet matematikai jelekkel, egyenlőtlenségként is megfogalmazhatunk.

Az iskola 280 tanulóját 44 fős buszokkal szállítják a gyermeknapi ünnepségre. Hány buszt rendeljen az igazgató?

Nemzetközi tapasztalatok halmozódtak föl az olyan típusú feladatokról, amelyekben valami „trükk" van. Várhatóan a többség helyesen el tudja végezni a maradékos osztást, amelynek eredménye 6, a maradék pedig 16. Azonban sokan válaszként 6-ot írnak vagy előfordul, hogy „6, maradt a 16" alakban fogalmazzák meg a választ. A realisztikus válasz itt 7 lesz, amihez még azt az implicit információt használjuk föl, hogy nyilván a lehető legkevesebb buszt fogják rendelni.

A feladat szövegében nem szereplő adat vagy jellemzően nem matematikainak tekintett tényezők miatt a tanulók sokszor becsapva érzik magukat, amikor olyan feladatokat oldanak meg, mint például:

Jancsi legjobb időeredménye a 100 méteres futásban 17 másodperc. Mennyi idő alatt fog ő lefutni 1 km-t?

Javaslatunk az, hogy az ilyen típusú, „trükkös" feladatok helyet kaphatnak a tanórákon, különösen a megszokott feladatmegoldó stratégiák túlautomatizálódásának elkerülése végett, azonban diagnosztikus értékelési célra kevéssé használhatók, mert csak további, finom vizsgálatok derítik ki, hogy valaki tájékozatlanság vagy pl. a bátorság hiánya miatt írja válaszként a fenti feladatra, hogy 170 másodperc.

Fontos lépés a szöveges feladatok jobb megértése felé, ha ebben a korosztályban már gyakran várjuk el a tanulóktól, hogy egy adott matematikai struktúrához ők maguk találjanak ki szöveges feladatot. Ez rendkívül nehéz feladat. Láttuk a szöveges gyakorlófeladatok között, hogy még egyetlen alapművelethez is küzdelmes vállalkozás lehet szöveget alkotni. Azonban éppen a szöveges gyakorlófeladatok és a realisztikus feladatok egymás mellé helyezésére és összehasonlítására nyújt lehetőséget, ha a tanulók alkotnak feladatszövegeket.

Ha például 20 liter vizet 8 edénybe kell egyenlően elosztani, akkor szöveges gyakorlófeladatként kitűzve ezt, a 2,5 liter egyszerűen adódik végeredményként. Megkérdezhetjük a tanulókat, milyen más dologgal helyettesíthetjük a feladatelemeket úgy, hogy a számok változatlanok maradjanak. A csokoládé törése még megoldható, de az ötletek között felbukkanhat például az, hogy a 20 fős osztály az osztálykiránduláson olyan szobákban aludt, ahol négy-négy emeletes ágy volt. Hány szobát kellett bérelni?… És az osztályfőnök hol alszik? A sokféle ötlet között várhatóan lesznek olyanok, amelyekben a változatlan számadatok és a változatlan osztás művelet mellett az osztás eredményének egészrésze, az egészrésznél eggyel nagyobb szám vagy éppen az osztási maradék lesz a feladat megoldása.

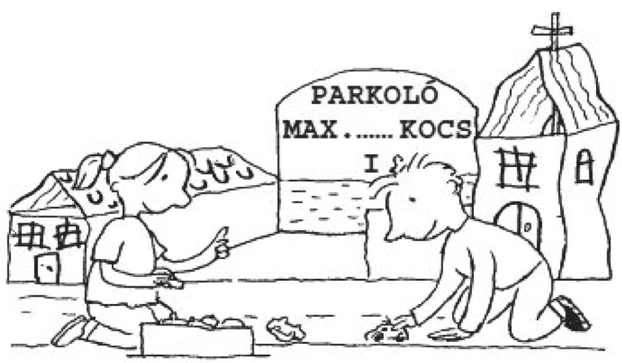
Érdekes típusát jelentik a realisztikus szöveges feladatoknak az olyan problémák, amelyek alapvetően nem számtani művelet elvégzésével oldhatók meg, hanem logikai következtetésekkel (nyilván szerepet kapnak egy-egy lépésben számtani műveletek is).

Éváék háza előtt van a buszmegálló, ahonnan 10 percenként megy reggel 6 és 9 óra között a busz az iskola felé. Az út 15 percig tart. Évának 7:45-kor az iskolában kell lennie. Mikorra érjen a buszmegállóba, hogy biztosan ne késsen az iskolából?

A nemzetközi szakirodalomból ismertek olyan feladatok, amelyek az autentikus kategóriába sorolhatók, és amelyek az 5–6. évfolyamos korosztály számára megfelelőek. 10-12 éves tanulókkal végzett kísérletekben több olyan feladat szerepelt, amelyek alkalmasak arra, hogy a tanulói tevékenységre, gyakran kooperatív matematikai munkára építve a valóságos szituációt leíró feladathoz egy megfelelő matematikai modell megtalálásra ösztönözzenek.

Az egyik ismert flamand fejlesztő programban Verschaffel és munkatársai[1] alkalmazták például a következő feladatot:

Péter és Anna egy város modelljét építik meg kartonpapírból. A templom és a városháza közötti tér tűnik a legmegfelelőbb helynek egy parkoló kialakításához. A kínálkozó hely egy 50 cm-es oldalú négyzet, az utcai oldal kivételével falak veszik körül. Péter már kivágta a megfelelő méretű papírnégyzetet. Hány autó fog maximálisan elférni a parkolóban?



1. Egészítsd ki a feliratot: pótold, hány autó fér el a parkolóban!
2. Tüntesd fel a kartonpapír négyzeten, hogyan lehet legjobban felosztani a parkolót parkolóhelyekre!
3. Magyarázd meg, hogyan jutottál el ehhez a felosztási módhoz!

1 De Corte, E. (2001): Az iskolai tanulás: A legfrissebb eredmények és a legfontosabb tennivalók. *Magyar Pedagógia.* **4**. 425.

Az elméleti bevezető fejezetünkben felsorolt jellemzők közül, amelyek általában jellemzik az autentikus feladatokat, valamennyi teljesül ebben a feladatban:

- A feladathelyzet részletes bemutatásához hozzátartozik a kép. Emellett egy narratív történet rajzolódik ki előttünk, amely a képpel együtt hozzájárul ahhoz, hogy a gyerekek a problémát sajátjuknak érezzék, vagyis összevessék azt a saját korábbi élményeikkel.
- A leírt helyzet valódi matematikai modellezésére van szükség. A rajz és a megadott (vagy megbecsült) adatok alapján várhatóan többféle geometriai modell készül.
- A tanulóknak meg kell szerezniük további hiányzó adatokat. Mekkora méretű egy átlagos játék autó? Mennyi hely szükséges egy parkoló kialakításához? A hiányzó adatokat akár helyszíni méréssel (például néhány játék autó adatainak mérésével), akár beszélgetés közben megvitatással összegyűjthetik.
- Több részfeladatra bomlik maga a teljes feladat: az egyes részfeladatok kitűzése, a részcélok elérésének ellenőrzése a tanulók feladata.

Egy másik nagyon híres fejlesztő kísérletben Kramarski és Mevarech megalkották az elhíresült „pizza-feladat”-ot. Ebben az autentikus feladatban három pizzéria árai szerepelnek: a pizza átmérője centiméterben van megadva (a kör területének figyelembevétele miatt ez inkább 7. osztálytól alkalmazható feladat), a különféle rendelhető feltétek ára pedig egészen változatos. A tanulók feladata a legjobb vételt megtalálni, amely szintén a fentebb leírt jellemzőket igazolja a feladatról: valós szituáció szóbeli emulációja, modellkészítés, el kell dönteni, mely számadatok jelentősek és melyek nem, a feladat részfeladatokra, a megoldási folyamat részcélokra bontható.

Az előző részben szerepelt feladat, amelyben az iskolába tartó busszal kapcsolatos időintervallumokat számoltunk, azáltal alakítható autentikus feladattá, hogy a gyerekek a saját, valóságos, megtapasztalt utazási szokásaikhoz keresik meg a megfelelő matematikai leírást.

A matematikai tudás értékelésében az autentikus feladatok sajátos szerepet töltenek be. Láttuk, hogy a realisztikus feladatoknál sem csak arról van szó, hogy „kijön-e a helyes végeredmény”. Olyan értelemben az autentikus feladatoknak nincs is végeredménye, mint a szöveges gyakorlófeladatoknak. Van viszont egy megoldási folyamat, amely szövegértésen, kooperatív tanuláson, matematikai modellalkotáson alapul, az adatok hiányának vagy redundanciájának eldöntése pedig döntési helyzetek elé állítja a tanulókat. Az alsó tagozatos kor végére gyakran meggyökeresedő matematikai meggyőződések (pl. hogy minden feladatnak van egy helyes megoldása) helyett a problémaérzékenység, a problémamegoldó folyamat fázisainak tudatos ismerete és kontrollja fejlődhet.

A szöveges gyakorlófeladatokhoz és az általánosságban vett realisztikus feladatokhoz hasonlóan az autentikus szöveges feladatok is lehetőséget nyújtanak egy „fordított” feladatmegoldó stratégia alkalmazására: problémahelyzet és szöveg megalkotása adott matematikai struktúrához. Fejlesztő kísérletben már 4. osztályosoknál sikerrel alkalmaztuk például azt a feladatot, amelyben a 100:8 osztáshoz kellett olyan módon feladatszöveget alkotni, hogy egyszer a maradék nélküli osztás, másszor a maradékos osztás, harmadszor a maradék, negyedszer pedig a maradékos osztásnál kapott egészrésznél eggyel nagyobb egész szám legyen a feladat megoldása. Egy ilyen feladatkitűzéssel nyilvánvalóan a kreativitást és a matematikához kevéssé szorosan köthető verbális képességeket is mérjük. Ez azonban nem kifogásolható, amennyiben világossá tesszük, hogy a matematikai tudás autentikus problémahelyzetben történő alkalmazásának diagnosztizálását végezzük.

Relációk, függvények

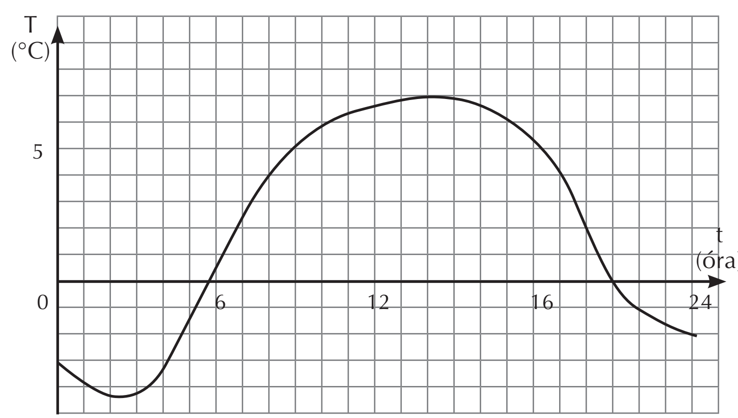
A realisztikus feladatok típusának legfőbb jellemzője, hogy a feladatmegoldás folyamatában releváns szerephez jutnak a hétköznapi életből merített tapasztalatok, esetenként konkrét ismeretek. Bizonyos feladatok esetében azonban valószínűsíthető, hogy a megfelelő megoldáshoz legalább a feladatmegoldás egy pontján (tervezés, végrehajtás vagy ellenőrzés fázisában) szükséges a hétköznapi ismeretek és tapasztalatok aktív felhasználása. Mindez nem jelenti azt, hogy a feladat a tanuló számára mindennapi helyzetet ír le, számára kissé idegen, a „felnőtt” világ körébe tartozó, de számára is ismert szituáció is lehet. Ilyenek például a háztartással, sütéssel-főzéssel, utazással, vásárlással, takarékossággal kapcsolatos esetek, helyzetek.

Mit jelent a tejesdobozon látható 1,5%-os, 2,8%-os, 3,6%-os felirat?

A túrós pogácsába szükséges margarin és túrómennyiség aránya 4:5. Mennyi túrót kell felhasználnunk, ha 20 dkg margarint teszünk a tésztába? Van-e egyenes vagy fordított arányosság az alábbi mennyiségpárok között?
– a négyzet oldalának hossza és kerülete,
– a növekedő búza hossza és a növekedés időtartama,
– a 120 cm^2 oldalú négyzet oldalai,
– adott út megtételéhez szükséges idő,
– a vásárolt gyümölcs tömege és ára.

Egy 24 cm magas gyertya egyenletesen égve 4 óra alatt ég le tövig. A gyertya meggyújtása után hány perc múlva lesz a gyertyacsonk 16 cm?

Egy téli napon mért hőmérsékleti értékeket mutatja az alábbi grafikon.



Mikor volt a leghidegebb? Mennyi volt a legmagasabb érték? Mely időszakban csökkent a hőmérséklet?

Csaba kirándult. Az első 3 órán át egyenletesen haladt 4 km/h sebességgel, majd pihent egy félórát. A pihenő után 2 órát ment 3 km/h sebességgel, akkor célba ért. Pihent másfél órát, majd 3 km/h sebességgel pihenés nélkül hazament.

Ábrázold Csaba mozgását derékszögű koordináta-rendszerben! Az ábra alapján válaszolj: Hány kilométert tett meg Csaba? Mennyi ideig volt kirándulni? Hány kilométerre volt az elindulási helyétől az elindulástól számított 9. óra végén?

A vonatkozó elméleti fejezetben ismertetettek szerint azt a matematikai (szöveges) feladatot tekintjük autentikusnak, amely a tanuló számára valódinak tekinthető, életszerű feladathelyzetet ír le. A feladathelyzet valódiságának szemléltetése gyakran azt kívánja, hogy az egyéni, papír-ceruza alapú értékelési metodológián túli feladatkontextus jöjjön létre: hétköznapi tárgyak, szövegrészletek, táblázatok, stb. a feladatszöveg mellékletének tekinthetők, és gyakran csoportmunkában történik a feladatmegoldás.

Az autentikus feladatok esetében egy praktikus jellemző lehet, hogy a feladat megoldása tanulói kezdeményezést, tanulói problémafelvetést feltételez. Mindenképpen szükséges, hogy a tanuló a problémát lefordítsa a saját nyelvére, valamilyen ponton sajátjának érezze, bele tudja magát élni, képzelni az adott szituációba. Gyakran a feladat matematikai tartalma ezáltal leegyszerűsödik, a probléma megoldásának kulcsa éppen ennek a transzformációnak az elvégzése, a megfelelő megoldási modell megtalálása.

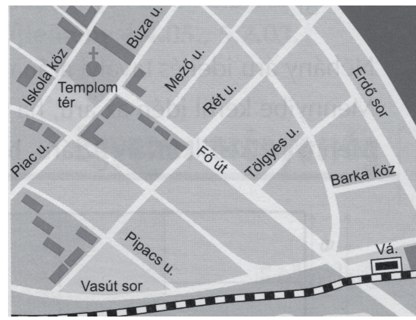
Az emberi test tömegének kb. 65%-a víz. Hány kg vizet tartalmaz egy 80 kg tömegű ember szervezete? És a te szervezeted?

Valóban igaz, hogy a kedvezmény a fagylaltra több mint 25%?

Az osztályban a fiúk és a lányok külön csoportban akadályversenyen vettek részt. A fiúk másfél óra alatt tettek meg két kilométert, a lányok *pedig 2 óra alatt hetet. Melyik csapat nyerte a gyorsasági versenyt a 18 km-es távon?*

Szülői értekezleten édesanyád éppen a te helyeden szeretne ülni. Készíts számára olyan leírást, „térképet”, hogy biztosan megtalálja a helyedet!

Az ábrán egy térkép részlete látható. Ami a térképen 1 cm, az a valóságban 20 000-szer akkora. Milyen távolságban van a templom a vasútállomástól?



Az összetettebb, szokatlanabb feladatokban a tanulók gondolkodását részkérdésekkel, részfeladatokkal irányíthatjuk. A fejlesztés során ez a mód szolgál az egyes problémák részletesebb elemzésére, az összefüggések, kapcsolatok felismerésére, a többféle megoldás megtalálására. Az értékelés során viszont a divergens megoldások gondot okozhatnak, ezért érdemes valamennyire kijelölni a gondolkodás útját.

Egy telefontársaságnál 80 Ft-ért két percig telefonálhatunk. Ha a beszélgetés tovább tart, újabb 80 Ft-ot számláznak ki, és így tovább, minden megkezdett 2 perc után. Hogyan függ a beszélgetés díja a beszélgetés időtartamától? Készíts táblázatot, majd ábrázold a percenkénti költséget diagramon!

Számítsd ki, mennyibe kerül egy 7 perces beszélgetés! És egy 12 perces? Készítsd el a beszélgetés teljes költségét bemutató táblázatot és diagramot!

Egy másik társaság másodperc alapú számlázást végez. Ekkor egy beszélgetés során minden eltelt másodperc után fizetünk 1 forintot. Ennél a társaságnál külön számítanak díjat a hívásokért is, egyenként 30 forintot.
Melyik társaság szolgáltatását érdemes igénybe venni?

Geometria

Konstruálások

A témakör tananyagtartalma: ismerkedés a térelemekkel, azok kölcsönös helyzetével, a párhuzamosság, merőlegesség fogalmával, a téglalap (négyzet), a téglatest (kocka) tulajdonságaival, hálózatával, a sokszögek szemléletes fogalmával, tulajdonságaival, háromszögek, négyszögek tulajdonságaival, osztályozásukkal.

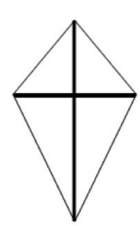
Megismerik a távolság, a szög fogalmát és mérését. Adott tulajdonságú pontok keresése hozza elő a szakaszfelező merőleges, a kör és a gömb fogalmát, szerkesztési feladatok megoldását.

Négyszögek tulajdonságai

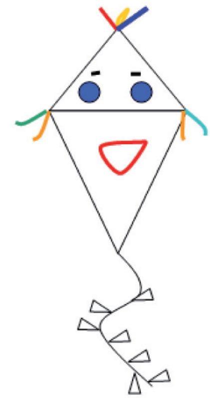
Robi bácsi a gyerekek homokozója mellett egy 3,4 méter x 3,6 méteres oldalhosszúságú, paralelogramma alakú területet falapokkal szeretne beborítani. Erre a célra egybevágó szimmetrikus trapéz alakú hulladék falapokat kapott az utcabeli asztalostól. A trapéz szárai 6 cm hosszúak, a rövidebb alapja 14 cm-es, a hosszabb alapja 6 cm-rel nagyobb. Sikerül-e neki a trapézlapokkal lefedni a paralelogramma alakú részt? Hány ilyen falapra van szüksége?

Az autentikus feladatok ebben a témakörben olyan tevékenységformákat követelnek, amelyekben hangsúlyt kap a tervezés, a folyamat nyomon követése és tudatos ellenőrzése, diszkussziója.

Készíts deltoid alakú papírsárkányt! Szimmetriaátlója 60 cm, a másik átlója 40 cm. Tervezd meg a sárkányodat! Mérd meg, mennyi lécre, mennyi papírra van szükséged! (Az elkészítéshez szükséged lesz ragasztóra, a röptetéshez madzagra is.)



Kifestheted, díszítheted is a kész sárkányt!



Mérések

A hosszúság- és területmérés alapozása az alsó tagozat feladata. Az 5. évfolyamon ismételünk és az eddig szerzett ismereteket kiegészítjük a téglalap és négyzet területképletének, illetve a téglatest és a kocka térfogatképletének megfogalmazásával.

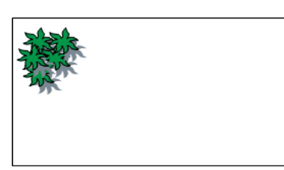
A hosszúság mérésével kapcsolatos feladatok között a realisztikus feladatok a tanulók saját tapasztalatait, esetleg alkalmi mérőeszközöket felhasználó gondolatmeneteket kérnek.

TÉGLALAP KERÜLETE, TERÜLETE

Nagymama a téglalap alakú konyhakert felébe sárgarépát, ¼ részébe retket, a maradék területre spenótot veteményez. A konyhakert egyik oldala 5 m, a másik oldala 8 m.

Számítsd ki, hány m^2 területet foglal el a spenót a konyhakertből!

Buksi kutya miatt a konyhakertet körbe kell keríteni alacsony kis kerítéssel.
Hány méter hosszú kerítés kell?



TÉGLATEST TÉRFOGATA, MÉRTÉKVÁLTÁS

A teraszunkon 6 téglatest alakú virágláda van.
Méretük: 100 cm x 30 cm x 40 cm.

Hány m^3 virágföldre van szükségünk, ha minden ládát színültig töltünk?

A virágföldet erős műanyag zsákokban árulják. Mi 50 literes zsákokban vettünk földet.
Hány zsákra van szükségünk a ládák megtöltéséhez?

TÉRFOGATSZÁMÍTÁS, MÉRTÉKEGYSÉGVÁLTÁS

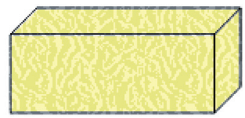
2010. április 20-án felrobbant egy brit tengeri olajfúró állomás kitermelő kútja a Mexikói-öbölben. Egy hét alatt 795 ezer liter nyersolaj ömlött a tengerbe. A szétterülő olaj kb. 5000 km^2 felületet borított be. Ez a baleset súlyosan károsítja a környezetet.

Számold ki, hogy milyen vastagságú az olajfolt, ha a beborított területet téglalap alakúnak képzeljük?

A gyermekek mindennapi élethelyzeteihez kapcsolódó feladatokban itt elsősorban téglatestekkel, téglalapokkal kapcsolatos, aktív tanulói tevékenységet feltételező feladatok jelennek meg.

Az iskolában minden gyereknek van egy cipősdoboza, abban tárolja a rajzórára, matematikaórára szükséges eszközöket (festéket, ecseteket, tálkákat, törlőrongyokat, vonalzót, körzőt). A dobozokat egymásra kell rakni, hogy elférjenek a polcon. Klári kitalálta, hogy mindenki ragasszsza be a dobozát tapétával, mert úgy sokkal szebben mutatnak a polcon. Attila vállalta, hogy megvásárolja a szükséges anyagot. A tapétát 10,05 méteres tekercsben árulják, szélessége 0,53 m.

A számítás előtt becsüld meg, hogy elég lesz-e minden dobozra ennyi tapéta, ha az osztályba 24 gyerek jár?
Egy cipősdoboz mérete: 10 cm x 20 cm x 30 cm.



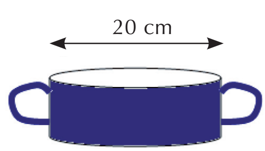
Az iskolai mosdóban elromlott egy csap. A gyerekek megmérték, hogy 1 perc alatt mennyi víz megy kárba. 60 csepp vizet gyűjtöttek egy mérőedénybe 1 perc alatt. A kicsöpögött víz űrtartalma 13 ml volt.

Számítsd ki, hány liter víz csöpög el 1 óra alatt, 1 nap alatt, 30 nap alatt! Becsüld meg, hányszor lehetne annyi vízzel zuhanyozni, amennyi 30 nap alatt kárba vész! Számítsd is ki! (Egy zuhanyozással kb. 75 l vizet fogyasztunk el.)

A feladat által diagnosztizálható tudás- és készségelemek: egyenes arányosság, mértékváltások (idő, űrtartalom egységei), számolási készség (szorzás, osztás), becslőképesség.

Keverj szét 1 milliliternyi étolajban egy kis pirospaprikát! Tölts tele vízzel egy 20 cm átmérőjű lábast! Öntsd a megfestett olajat a víz tetejére, és figyeld az olajfolt terjedését! (A 20 cm átmérőjű lábas vízfelülete kb. 314 cm^2.)

Számítsd ki, hogy milyen vastag rétegben fedi be a víz tetejét az 1 ml olaj!



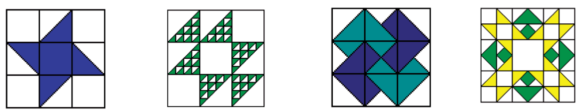
Transzformációk

Az egybevágósági transzformációk közül a tengelyes tükrözést és a tengelyesen szimmetrikus alakzatokat (háromszögek, négyszögek) és szerkesztésüket kell a tanulóknak ismerniük.

Feladatokban előkerül a nagyítás, kicsinyítés, illetve konkrét feladatokban a hasonlóság aránya.

Tengelyes szimmetria

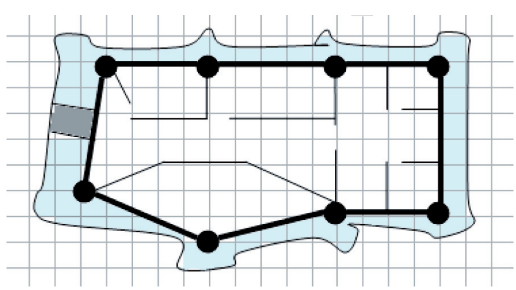
Zsóka néni kedvenc hobbija a foltvarrás. Karácsonyra mindenkinek készített egy párnát, amit foltvarrással díszített. Válaszd ki a tengelyesen szimmetrikus mintákat! Rajzold be a szimmetriatengelyeket!



Kicsinyítés, arány, terület

A rajz egy vizesárokkal körülvett középkori vár kicsinyített alaprajzát mutatja. Egy négyzetoldal a valóságban 10 méternek felel meg.

Hány négyzetméter alapterületű lehetett körülbelül a vár? Számítsd ki!



Tervezz négyzetrácsos papírra tengelyesen szimmetrikus és tengelyesen nem szimmetrikus mintákat!

Hasonlóság, nagyítás, kicsinyítés, arány
Az interneten olvastam, hogy Jakabszálláson fel akarják építeni Magyarország kicsinyített mását. Magyarkertnek fogják elnevezni, és 93 ezer négyzetmétert foglal el. Ez nagyjából 13 focipályányi földterület.

Nézz utána, hogy mennyi Magyarország területe!
Számítsd ki, hogy hányszor kisebb Magyarkert területe Magyarország területénél!

Az 1–4. évfolyamokon még külön geometriai részterületként szereplő tájékozódás területet itt sem emeljük ki. Egy olyan mintafeladatot mutatunk, amely ugyan egyrészről az alsó tagozatos, tájékozódással kapcsolatos értékelési követelmények kiterjesztéseként is fölfogható, másrészről viszont a függvények, relációk témakörben az adatpárok autentikus fölhasználásának követelményéhez is sorolható.

Számozzátok meg az osztályteremben a sorokat és az oszlopokat! Így minden székhez tartozik egy számpár, amelyben az első szám a sort, a második az oszlopot jelöli.
Te hol ülsz?
Hol ül a padszomszédod?
Ki ül a (4; 4) széken?
Írd le a fiúk jelzőszámait!
Írd le a második oszlopban ülő lányok jelzőszámait!
Írd le a barna hajú gyerekek jelzőszámait!
Írd le a kék szemű gyerekek jelzőszámait!

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

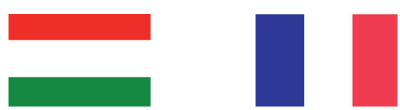
A realisztikus feladatok típusának legfőbb jellemzője, hogy a feladatmegoldás folyamatában releváns szerephez jutnak a hétköznapi életből merített tapasztalatok, esetenként konkrét ismeretek, amelyekkel az egyébként adathiányos feladat kiegészítendő. Ahogyan a bevezető elméleti fejezetben kifejtettük, egy feladat önmagában nem tekinthető sem realisztikusnak, sem pedig nem realisztikusnak; a hétköznapi tapasztalat felhasználásának jellege ugyanis egyénektől és adott történelmi-kulturális kontextustól is függ. Bizonyos feladatok esetében azonban valószínűsíthető, hogy a megfelelő megoldáshoz legalább a feladatmegoldás egy pontján (tervezés, végrehajtás vagy ellenőrzés fázisában) szükséges a hétköznapi ismeretek és tapasztalatok aktív felhasználása. Megszokott rutinfeladatokból kiindulva például úgy juthatunk realisztikus feladatokhoz, ha a szereplőkhöz, tevékenységekhez olyan jellemzőket kapcsolunk, amelyek hatással vannak a megoldás során figyelembe veendő lehetőségekre.

A tantárgyi tudás követelményei között bemutatott tipikus rutinfeladat például a következő módon alakítható át realisztikus feladattá:

Anna, Béla és Cili testvérek. Szüleik mindennap kétféle házimunkát bíznak rájuk: levinni a szemetest és meglocsolni a virágokat. Készíts egy tervet, amely a három testvér között igazságosan megosztaná a házimunkát! Hány nap múlva kerülne sorra ismét ugyanaz a két testvér, ugyanazzal a házimunkával?

Megszokott típusfeladat a kombinatorika körében a zászlók és térképek lehetséges színezéseinek összeszámlálását kérő feladatok.

Trikolórnak nevezzük az olyan zászlót, amely három, különböző színű sávból áll, mint például a magyar vagy a francia zászló.



A sávok lehetnek vízszintesek vagy függőlegesek. A piros, fehér és kék színek felhasználásával hányféle trikolórt készíthetünk? Melyek ezek közül valódi nemzeti lobogók?

A realisztikus feladatok között egy jellegzetes osztályt képeznek a skatulyaelv alkalmazásával megoldható problémák. Ebben a korosztályban a tanulóktól nem várjuk el általánosságban a skatulyaelv ismeretét, ugyanakkor ismerős, egyszerűen modellezhető dolgok esetén elvárható a sikeres feladatmegoldás. Az alapelv intuitív kialakításánál a kisebb számosságok felől haladhatunk a milliós számkörökig.

Az osztályban hét fiú van, és sorban egymás után mindegyikük dobott egyet a dobókockával. Igaz-e, hogy lesznek legalább ketten közöttük, akik ugyanazt a számot dobták?

Az egyik osztályban 20 tanuló van. Honnan tudjuk biztosan, hogy vannak köztük olyanok, akik ugyanabban a hónapban születtek?

A kislabdadobás eredményeit méterre kerekítve írja föl a testnevelő tanár. Miért lehetünk biztosak abban, hogy az iskola 200 felső tagozatos tanulója között vannak, akiknek egyforma eredményük született a kislabdadobásban?

A leíró statisztika témaköréhez kapcsolódóan is számtalan lehetőségünk van a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz köthető matematikai modell keresésére.

Az autenticitás értelmezésében a bevezető fejezetben ismertetett elvi állásfoglalást követjük: azt a matematikai (szöveges) feladatot tekintjük autentikusnak, amely a tanuló számára valódinak tekinthető, életszerű feladathelyzetet ír le. A feladathelyzet valódiságának szemléltetése gyakran azt kívánja, hogy az egyéni, papír-ceruza alapú értékelési metodológián túli feladatkontextus jöjjön létre: hétköznapi tárgyak, szövegrészletek, táblázatok stb. a feladatszöveg mellékletének tekinthetők, és gyakran csoportmunkában történik a feladatmegoldás. A papír-ceruza értékelési módszer vagy akár az egyénre szabott on-line diagnosztikus értékelési módszer alkalmazása esetén az autentikus feladatok külsődleges jellemzője a hosszabb, tipográfiailag gyakran változatos vagy újszerű feladatszöveg, belső, problémamegoldási szempontból pedig gyakori jellemző az intranszparencia, vagyis az azonnal alkalmazható és megoldáshoz vezető eljárás hiánya. A feladat autentikus jellege egy adott történelmi-társadalmi környezetben, egy adott életkori kohorszba tartozó tanulók többségét szem előtt tartva határozható meg. Elképzelhető, hogy egyes tanulók számára (vagy éppen más történelmi-kulturális helyzetben) egy autentikus feladat rutinfeladattá válik, sőt az is előfordulhat, hogy egyes tanulók vagy valamely történelmi-társadalmi kontextus szempontjából egy autentikus feladat nem minősülne matematikai feladatnak, hanem pl. a kritikai gondolkodás vagy valamilyen műveltségeszmény értékeléséhez kapcsolódna.

Az autentikus feladatok esetében egy praktikus jellemző, hogy a feladat megoldása tanulói kezdeményezést, tanulói problémafelvetést feltételez. Úgy is fogalmazhatunk, hogy gyakran a tanuló feladata az, hogy létrehozzon egy olyan matematikai feladatot az adott problématérben, amely a matematikai tudás alacsonyabb szintű alkalmazását igényli.

A kombinatorika területén az autentikus feladatok annak felismerését várják a tanulótól, hogy egy adott hétköznapi probléma a lehetséges esetek összeszámlálása révén oldható meg. Jellegzetes kérdéstípus lehet a „Hányféleképpen választhatok?" kezdetű problémasereg.

A korábban bemutatott egyik realisztikus feladat autentikus változata a következőképpen nézhet ki:

Anna, Béla és Cili testvérek. Szüleik minden nap kétféle házimunkát bíznak rájuk: levinni a szemetest és meglocsolni a virágokat. Készíts egy tervet, amely a három testvér között igazságosan megosztaná a házimunkát! Milyen további adatokat gyűjtenél össze a testvérekre és a házimunkákra vonatkozóan, amely alapján a legmegfelelőbb munkabeosztás készíthető? (Pl. életkor, a házimunka nehézsége vagy időtartama.)

A valószínűségszámítás területén az autentikus feladatok a tanulók hétköznapi élményeihez köthető tevékenységek leírását tartalmazzák: sorsolás, pénzfeldobás, sportjátékok, kártyajátékok. Jellegzetes autentikusfeladat-típus lehet a „Mikor van nagyobb esélyem?" kérdésfeltevésre épülő problémasereg. A valószínűségszámításhoz köthető autentikus feladatoknál gyakran nyelvi-logikai vagy játékelméleti megfontolások vezetnek el a megoldáshoz.

Karcsi és Peti olyan céltáblára dobálják a gumilabdát, amelynek a közepén egy 20 centiméter oldalú négyzet van. Ez a négyzet éppen a közepén van egy másik, 30 centiméter oldalú négyzetnek, aminek a belső négyzeten kívül eső része a céltábla külső részének számít. Készíts rajzot erről a különös céltábláról! Az egyik versenyzőnek a céltábla belső négyzetét, a másiknak a céltábla külső részét kell eltalálnia. Karcsi választhat, hogy a céltábla melyik része az övé.
Mit javasolsz neki?

A tanulói válasznak tartalmaznia kell az eseményekhez tartozó területszámítási adatokat (ezek szerint a külső rész a nagyobb). A feladat autenticitása megengedi ugyanakkor, hogy további kérdéseket tegyenek föl: hogyan történik a találatok összeszámlálása – jár-e pontlevonás, ha rossz területrészen landol a labda? Igaz-e, hogy ha valaki megpróbál eltalálni egy bizonyos pontot, akkor a dobásai várhatóan a ponthoz közelebb gyakrabban fordulnak majd elő, mint a ponttól távolabb?

A statisztika területén az autentikus feladatok azt várják el a tanulóktól, hogy képesek legyenek megtervezni és kivitelezni valamilyen adatgyűjtési folyamatot. Legyenek képesek kérdéseket megfogalmazni valamilyen tulajdonság adatairól, ábrázolni az adatokat megfelelő ábrázolási módszerrel: oszlop-, kör- vagy pontdiagramon.

Az amerikai NCTM standardok ötlete alapján fontoljuk meg a következő feladatot:

Hasonlítsd össze, hogy melyik papírrepülő repül messzebbre: az, amelyiket puha fénymásolópapírból készítesz, vagy az, amelyiket ugyanolyan méretű kemény kartonpapírból! Mindkét repülőt ugyanazzal a hajtogatási technikával készítsd!

Ez a feladat az adatgyűjtési folyamat megtervezését igényli. Hány dobást végezzünk, hogy megalapozott eredményhez jussunk? Hol végezzük a kísérletet? Milyen mérőeszközzel és milyen pontossággal mérjük a távolságokat? Hogyan ábrázoljuk az adatokat? Mi alapján hozzunk döntést és adjunk választ a kérdésre?

Látható, hogy az autentikus feladatok jellemzői közül (önálló feladatkitűzés, hétköznapi tevékenységben gyökerező matematikai modellalkotás, több lehetséges kimenet, kooperatív matematikai tevékenység) lényegében mindet felöleli az iménti feladat. Megjegyzendő, hogy az ilyen feladatok időigényesek, átlagos körülmények között a fél tanítási órát igénybe vehetik. Ugyanakkor sok jel mutat arra, hogy amit a vámon vesztünk, azt a réven megnyerhetjük: az időigényes autentikus feladatok elsősorban a drill ízű gyakorlófeladatoktól vehetik el az erőforrásokat.

A matematikatudás tartalmi területei a diagnosztikus értékelés szempontjából

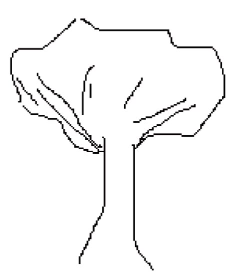
Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Számok

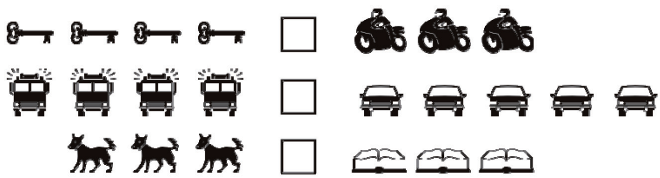
A számfogalom kialakulása szoros kapcsolatban áll az „ugyanannyi" relációval. Elsősorban a párosítással kapcsolatos változatos tevékenységek – illeszkedve tárgyakhoz, képekhez, rajzokhoz, szavakhoz − segítik a több, kevesebb, ugyanannyi fogalmak értését és a megfelelő szimbólumok (<; >; =) meg- és felismerését, helyes tartalommal való feltöltését. A sokféle tevékenység kapcsán fokozatosan meggyőződnek a diákok arról, ha két csoportban, halmazban ugyanannyi elem van, akkor azok számossága megegyezik, azaz – ugyanaz a szám jellemzi őket, ugyanaz a szám kapcsolódik hozzájuk – a bennük szereplő tárgyak, dolgok, élőlények, stb. *száma ugyanannyi darab.* Ezen kapcsolat, összetartozás biztos értése, tudása a helyes számfogalom kialakulásának feltétele.

Rajzolj a fa alá 3 almát és 2 körtét!



A következő feladatban a darabszámok összehasonlítása van a középpontban. A tárgyakat megszámlálhatja, párba rendezheti, csoportosíthatja a tanuló. Fontos a sok-sok konkrét tapasztalat biztosítása, a számjelek képekhez való kapcsolása, a számkártyák használata. A számok (számszimbólumok) írása később kezdődhet.

Feladat: A kis négyzetek melyik oldalán látsz több tárgyat? Ha döntöttél, írd a négyzetekbe a megfelelő jelet (<; >;=)!



Feladat: Melyik szám a nagyobb? Tedd ki a < vagy > jelet a számok közé!

a) 8 – 2 9 – 1

b) 8 – 1 5 + 0

A számfogalom kialakítását a mérőszámokkal való tapasztalati ismerkedés is segíti. Az első-második évfolyamon – folytatva az óvodai előkészítést − okosan megtervezett és irányított játékok sokaságának (pl. kockákkal való térkitöltés, kancsó vízzel, homokkal, babbal, búzával, borsóval való kitöltése pohár segítségével, összeöntögetések) eredménye, hogy képessé válnak a tanulók viszonyításokra (például több, kevesebb, hányszor akkora), és a darabszám mellett a mérőszám helyes használatára. Olyan tapasztalatok tudatosulnak, mint például: (1) ugyanazon kancsó megtöltéséhez kisebb pohárral többször, nagyobb pohárral kevesebbszer kell tölteni; (2) ugyanazt a hosszúságot nagyobb egységből kevesebb darabbal, kisebb egységből több darabbal tudom kirakni; (3) ugyanazon egységeket használva a mérlegen a nehezebb tárgyakat több, a könnyebb tárgyakat kevesebb egységgel tudom kiegyensúlyozni. Ezen mérésekhez az egységet szabadon választhatjuk, és a hivatalos mértékegységeket is választhatjuk anélkül, hogy ismeretüket megkövetelnénk.

A konkrét tömegek összehasonlítása során alkalmazzuk a hagyományos kétkarú mérleget, mely az egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket kitűnően szemlélteti. (Ez a tapasztalat olyan élményeket, emlékeket hagy a gyerekekben, melyre később, a mérlegelv tanítása során is építhetünk.)

A méréseknél a változatos egységválasztás (pl. a színes rudak használata) segíti a számfogalom általánosabb, biztosabb alapjának kialakítását.

A sokféle mérési tapasztalat hozzájárul az arányos változások gondolatának előkészítéséhez.

A gyerekek gyakran rendezik sorba játékaikat. A figurák sorrendje, sorszáma változhat. Ez a mozzanat magában hordozza annak a tudatosulását, hogy a sorszám nem rögzül egy adott figurához, hanem attól függ, hogy a figurákat hogyan sorakoztatjuk fel, és honnan kezdjük a megszámozásukat. Megtapasztaljuk, hogy a figurák száma attól nem változik, hogy milyen sorrendbe állítjuk vagy melyik irányból kezdjük megszámlálni azokat. Adott számú figura sokféle konkrét sorrendezése, a figurák helyének változtatása, az első, második, harmadik… kifejezések gyakori ismétlése hozzájárul a sorszám fogalmának helyes kialakulásához, valamint a szám, sorszám fogalmak különbözőségének megértéséhez, támogatja a számegyenes fogalmának előkészítését is (pl. sorszámok növekedésének, csökkenésének iránya, számszomszédok megkeresése).

A számfogalom fejlettségének értékelése külső szakemberek által megfigyelhető jellemzők, tulajdonságok tesztelésével történik. A fejlesztő értékelés alapfeltétele, hogy ismerjük a megfelelő szintű tudás kialakulásának, és ebből következően a fejlődési nehézségek diagnosztizálásának lehetőségeit, folyamatát.

Az első évfolyam végéig legalább 20-ig, a második évfolyam végéig legalább 100-ig meg kell ismerni a diákoknak a természetes számokat. Ez azt jelenti, hogy ebben a számkörben ki kell alakítani a biztos számfogalmat, meg kell ismerni, és jól kell alkalmazni az olvasás-írás folyamán a számszimbólumokat. A követelmények sora folytatódik: számszomszédok, páros vagy páratlan a szám, nagyság szerinti rendezés, egymáshoz viszonyított helyzetük (számegyenes), bontásuk többféleképpen (pl. tízesek és egyesek összegére), kerekítés tízesekre (készpénzes vásárláskor a forint alapú fizetés során 5-re vagy 10-re).

Néhány példafeladat a számfogalom fejlettségének diagnosztikus értékelésére:

Húzd át az ábrán a számjegyeket!

6 Z 9 F
4 12
M 3
7 ?

Húzd át az ábrán a számjegyeket!

6 Z 9 F

\+ p 12

= M B 3

A negatív számok (találkozás irányított mennyiségekkel, pl. melegebb-hidegebb; 8 óra előtt, után, tőlem jobbra, balra; stb.), a törtszámok (egész egyenlő részekre darabolása, hajtogatása, stb.) tapasztalati megközelítésére vonatkozó tevékenységek is szerepelnek már ezen a két évfolyamon.

A nulla nemcsak mint szimbólum jelent nehézséget a kisiskolásoknak, hanem a nullának mint számnak a kezelése is nagy feladat. A nulla számjegy és számnév kitüntetett jelentőségének illusztrálására szolgálnak a következő mintafeladatok:

a) Melyik szám a nagyobb? Karikázd be!

9 – 2 5 + 1

b) Melyik szám a nagyobb? Karikázd be!

9 – 2 6 + 0

E két évfolyamon a különböző tárgyak, és az apróbb-nagyobb rajzos figurák csoportosításával, mely leggyakrabban tízesével történik, a tízes-százas átlépések tudatosításával már elkezdjük a számrendszer és helyiértékrendszer fogalmi előkészítését is. Elvárás az elemi tájékozottság (konkrét számok esetében) a tízes számrendszerben, az egyes és tízes fogalmának ismerete.

Műveletek

A zárójel összekapcsoló szerepét, értelmezését, használatát is konkrét feladatok (egyszerű szöveges feladatok, összeg, különbség elvétele, illetve szorzása) alapján tapasztalják meg a tanulók.

Az első évfolyamon a szóbeli számolási eljárásokat, az összeadás és kivonás elvégzését készségszinten várjuk el a 20-as számkörben, az eredmények ellenőrzésével együtt. A tanult számok két szám összegére való bontása, pótlások, és három tag összeadásának ismerete elsőben a gyakorlottság szintjén elvárás, a második évfolyamon már a 100-as számkörben olyan alapelvárás, mely kiegészül a „kis egyszeregy" biztonságos ismeretével. A „kis egyszeregy" a szorzás és bennfoglalás táblázatát jelenti a százas számkörben.

Míg az első évfolyamon egyfajta gyakorlottságot szereznek a gyerekek a hiányos műveletek, nyitott mondatok kiegészítése, állítások igazságának ellenőrzése területén, addig a második évfolyamon mindezt kiegészítve, már nemcsak igazzá, hanem „nem igazzá" is tesznek akár kétváltozós nyitott mondatokat is. Állításokat fogalmaznak meg, s döntenek azok igazságáról.

Algebra

Az első két évfolyamon bevezetésre kerülő szimbólumokat, azok szóbeli kifejezését és írásbeli jelölését a különböző összefüggésekben, kapcsolatokban (pl. nyitott mondatok) az algebra előkészítését szolgáló elemi szereplőknek foghatjuk fel. Erre mutat példát a következő feladat is.

Válaszd ki a 20-nál kisebb természetes számok közül azokat, melyek igazzá teszik az alábbi nyitott mondatokat!

$13 + \square = 18$	Megoldás: $\square = 5$
$30 + \triangle + \triangle < 40$	Megoldás: $\triangle = 0, 1, 2, 3, 4$

Az ilyen feladatokban ugyanazok a szimbólumok ugyanazokat a számokat jelölik, de különböző szimbólumok nemcsak különböző számokat jelölhetnek.

Például: $\triangle + \square = 6$ *nyitott mondatnak a* $\square = 3$, $\triangle = 3$ *számpár is megoldása.*

Az algebrai szimbólumok iskolai alkalmazásának jelentős terepét jelentik az olyan szöveges feladatok, amelyek egy vagy két számtani művelet elvégzésével megoldhatók, és amelyeknél a feladat megértését elsősorban a felírt nyitott mondat igazolja.

Az első évfolyamon az egyszerűbb szöveges feladatok két adat összeadásával vagy kivonásával megoldhatók. Az ilyen típusú feladatoknál nem fontos az ismeretlenre szimbólumot bevezetni. A szimbólum bevezetésének akkor van jelentősége, ha a feladatban az összeg valamelyik tagja, illetve a kisebbítendő vagy a kivonandó valamelyike az ismeretlen. A szimbólumok jelentéstartalmát már ezen egyszerű feladatoknál is rögzíteni kell szóban vagy írásban.

Már ebben a korban is adhatunk olyan egyszerű szöveges feladatot, melynek körültekintő értelmezésével sok felesleges munkától szabadul meg a diák. Például a következő feladat is ilyen.

Melyik az a szám, amely 17-nél nagyobb, de 13-nál kisebb?

Megoldás: *Nincs ilyen szám.* (Ha a számegyenesen bejelöltetjük a részmegoldásokat, világosan látszik, hogy nincs a két feltételnek egyszerre megfelelő szám.)

Az ilyen típusú feladatok elősegítik, hogy az azonnali műveletkijelölésre vagy válaszadásra törekvés helyett először a feladat megértésére kerüljön sor.

A tanult számjelek, műveleti jelek, relációs jelek, ismeretlent jelölő jelek, majd később a zárójelek segítségével történő lejegyzés, modellalkotás komoly absztrakció a kisdiák számára. A tanulók által felfedezett összefüggéseknek – és azok közlési módszereinek – megvitatása sokrétű gondolkodási folyamatokat segít elő. Egy konkrét képet, szöveget, látványt sok irányból közelíthetünk meg, sokféle gondolatot válthat ki belőlünk, s a gondolataink lenyomata, rögzítése is sokféleképpen lehet jó.

Luci anyák napjára egy csokor mezei virágot adott a mamájának. 15 pitypang virág, és ennél 10-zel több pipacs virág volt benne. Hány virágból állt ez a csokor?

Megoldás: $15 + (15 + 10) = \triangle$, $\triangle = 40$; *A csokorban 40 virág volt.*

(A zárójel itt az összetartozást jelenti, de el is hagyható.)

Fogalmazd meg szavakkal a következő számfeladatot! Írj egy szöveges feladatot is hozzá!

$4 \times (65\ \text{Ft} + 35\ \text{Ft}) = \triangle\ \text{Ft}$

Megoldás például: *A 4 tagú családunk reggelije fejenként egy 65 Ft-os joghurt és egy 35 Ft-os sajttal szórt pogácsa. Mennyibe kerül nálunk egy családi reggeli?*

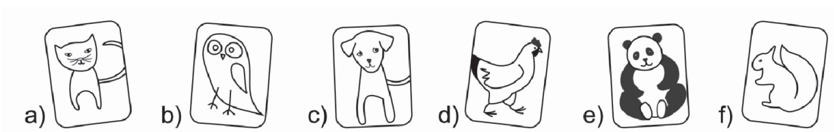
A szöveges feladatok szimbolikus lejegyzése, a különböző konkrét lejegyzésekhez kapcsolódó szövegalkotás, azaz az „oda-vissza út” sokszori és konkrét bejárása mélyíti a fogalmak tartalmának megértését, képessé teszi a tanulókat egyszerű szöveges feladatok matematikai nyelven való megfogalmazására, illetve a matematikai szimbólumokhoz való adekvát, egyszerű szöveg alkotására.

A szöveges feladatok egy jelentős része a nyitott mondatokhoz kapcsolódik. Adott szöveg alapján a nyitott mondat szóbeli megfogalmazása, írásbeli lejegyzése, a benne szereplő ismeretlen(ek) konkretizálása, azaz konkrét elemekkel történő behelyettesítése igazzá vagy hamissá tehetik az így keletkezett állítást. A nyitott mondatok többségének értelmezési tartománya a tanult számhalmaz elemeire korlátozódik, de számos más területről, mondjuk a növény- vagy állatvilágból, mesevilágból is megválaszthatók az alaphalmaz elemei.

A következő feladatban többféle állat képét tartalmazó kártyákat rakunk az asztalra. A kártyákon egy háziállat vagy egy vadállat képe van. A megoldás során a kiválasztott kártyákat tevőlegesen a keretbe kell helyezni, s ezután dönteni kell az állítás igaz voltáról. Ez előrevetíti annak szükségességét, hogy az alaphalmaz minden eleméről el kell dönteni, megoldás-e vagy sem.

Az alábbi kártyák közül válaszd ki azokat, melyek igazzá teszik az állítást!

A   -be tett kártyán háziállat látható.



A számfeladatok megoldása során a zárójel felesleges használatáról, illetve az elhelyezésének az eredményt befolyásoló szerepéről gyűjthetnek tapasztalatot a tanulók. A zárójelek alkalmazásának indokoltságát a szöveges feladatokhoz kapcsolódóan is be kell mutatnunk.

Juli néni mindennap vesz 1 liter tejet 140 Ft-ért és 1 kg kenyeret 160 Ft-ért. Egy hét alatt mennyit költ tejre és kenyérre együtt?

Megoldás: *7×(140 + 160) Ft = 2100 Ft. Juli néni 2100 Ft-ot költ egy hét alatt tejre és kenyérre.*

Kati két éven keresztül egy-egy tábla csokit vett a négy fiú unokatestvérének és a három barátnőjének a születésnapjukra. Ez alatt az idő alatt hány tábla csokit vett, ha csak ezeknek a gyerekeknek vett tábla csokit?

Karikázd be az alábbiak közül a helyes megoldást adó műveletsor betűjelét!
a) 2+4+3 b) 2×(4+3) c) 2×4+3 d) 2×4+2×3 e) (3+4)×2
Megoldás: *b), d), e).*

A válaszok helyességét a műveletsorok végeredményének kiszámításával és az eredmény „kipróbálgatásával” fogják ellenőrizni a gyerekek. Lesznek, akik következtetéssel számolják ki az eredményt, s megkeresik ezen eredményt adó műveletsor(oka)t, és lesznek – valószínűleg kevesebben − a végeredmény ismerete nélkül is a jó megoldást adó műveletsorokat kiválasztó gyerekek.

Az első két évfolyamon váljanak képessé a tanulók állítások megfogalmazására egyszerű tevékenységhez, képhez, rajzhoz kapcsolódóan, tudjanak dönteni azok igazságtartalmáról, legyenek képesek nyitott mondatokat kiegészítéssel igazzá tenni, behelyettesítéssel lezárni.

A feladatmegoldó stratégiák fejlesztéséhez fontos, hogy kétirányú kapcsolat alakuljon ki a feladatban szereplő dolgok és viszonyok, valamint a megoldáshoz vezető matematikai lépések között. Emiatt már 1–2. osztályban képesnek kell lenniük a tanulóknak arra, hogy adott matematikai struktúrához megtalálják a megfelelő szöveges (vagy rajzos) feladatot. E két évfolyam végére tudjanak számfeladatokat, nyitott mondatokat közösen is és önállóan is megfogalmazni sokféle tevékenység és egyszerű szövegek alapján. Mint fentebb láttuk, adott megoldási lehetőségek közül tudják kiválasztani a szöveghez illő(ke)t, és fordítva is, számfeladathoz, nyitott mondathoz tudják a megadott szövegekből a helyeset kiválasztani, illetve egyszerű, világosan fogalmazott szövegeket alkotni.

Válaszd ki a megadott szövegek közül az alábbi nyitott mondathoz illőket!

$$3 + 37 + 28 + \square + \square = 100$$

a) A tanyán élő Bori néni összesen 100 baromfit nevel. Van három kakasa, 37 tyúkja és 28 kacsája és ugyanannyi libája, mint pulykája. Hány libája van Bori néninek?

b) Évike a diófájuk alatt gyűjtögette a termést. Hétfőn 3 szem diót, kedden 37 szem diót, szerdán 28 szem diót, csütörtökön és pénteken ugyanannyi szem diót, szombaton egész nap 100 szem diót gyűjtött. Vasárnap nem dolgozott, csak megszámolta a szemeket. Hány szem diót gyűjtött a héten?

c) Kati néni az unokája szülinapi bulijára ötféle süteményt sütött. Zserbót, hókiflit, csokis golyókat, meggyes pitét és almás rétest. Mindenből 50 darabot vagy 50 szeletet vitt a bulira. A buli végén megszámolta a maradék süteményeket, és így szólt: Éppen 100 sütemény maradt. Úgy látom a csokis golyónak volt a legnagyobb sikere, csak 3 darab maradt belőle. Egyformán fogyott a pite és a rétes. Legkevésbé a hókiflit szerették, 37 darabot hagytak meg belőle, és 28 szeletet nem ettek meg a zserbóból sem. Hány szelet meggyes pite maradt meg?

Megoldás: *A b) szöveg nincs összhangban a nyitott mondattal.*

A 2. osztály végére a tanulók tudják, hogy a szöveges feladatok megoldásának az első és legfontosabb lépése a megértés. A megértést elősegíti a lejátszás, megjelenítés, ábrázolás, szükség esetén az értelmes átfogalmazás; a megértést követi a lejegyzés számfeladattal vagy nyitott mondattal, sorozattal, táblázattal, ezután jöhet a számolás, szabálykeresés, majd az ellenőrzés, az eredeti problémára való vonatkoztatás, majd az összevetés az adatokkal, valósággal, előzetes becsléssel, végül a válasz megfogalmazása, lejegyzése. Az értékelés során a szöveges feladatok megoldásának lépéseit önállóan értékelhető feladategységekre bontjuk, ezzel lehetővé tesszük, hogy esetleges számolási hibák ne tegyék értéktelenné a feladatmegoldás további, elvileg helyes lépéseit.

Relációk, függvények

1–2. osztályos korban a következő fejlesztési feladatok és értékelési követelmények jelentkeznek a témakör fogalmi bázisával kapcsolatban: sorozatok folytatása és szabálykeresés tárgyakból, rajzos jelekből álló sorozatok esetén. A tanulóknak képesnek kell lenniük adott szabály alapján sorozatokat generálni. A sorozatokat meghatározó szabályszerűséget tudniuk kell szóban is megfogalmazni.

Adatpárok és adathármasok közötti összefüggések területén 1–2. osztály végére a következő követelmények fogalmazhatók meg. A tanulók legyenek képesek két halmaz összetartozó tagjai között a kapcsolatot felismerni, és a felismert szabály alapján a hozzárendelést megvalósítani. A környezetükből ismert tárgyak, személyek, szavak és számok egyaránt szerepelhetnek a kapcsolatba hozandó halmazok elemei között. Legyenek képesek a számok és mennyiségek közötti kapcsolatokat nyíllal jelölni. Legyenek képesek az összetartozó számpárokat táblázatba rendezni, a táblázatba rendezett számpárok esetén pedig („gépjáték”) a szabályt felismerni és folytatni. Ebben a korosztályban a számpárok közötti összefüggéseket jelölő szabály egyszerű, lineáris összefüggést kifejező szabály lehet, vagy pedig a számjegyek összegével, a számok alaki tulajdonságaival kapcsolatos. Legyenek képesek az összetartozó adatpárral megadott konkrét pontok ábrázolására a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.

A számhármasok közötti összefüggések legtipikusabb eseteiben alapműveleti számolásban szereplő számokról és a műveletvégzés eredményéről van szó. Például egy elvégzett kivonás műveletben három számadat szerepel, amelyek helye a műveleti jelekhez képest nem felcserélhető. Az így összetartozó számhármasokat gépjátékszerű táblázatba rendezhetjük.

A relációk és függvények témakör jellemző feladattípusai között találjuk 1–2. osztályban a sorozatok folytatását, kiegészítését, amelyhez a szabály megállapítása társul.

A sorozatok elemei lehetnek

– egyszerű geometriai alakzatok, pl. □◆❍□◆❍□◆…

– számok, pl. 1 3 5 7 …

– különböző tartalmi területekről származó szimbólumok,

pl. a á b …

Második osztály végére a tanulóknak képesnek kell lenniük felismerni a hányadossorozat szabályát is a 100-as számkör szorzótábláján belül.

Az adatpárok közötti összefüggésekre épülő feladatok jellemző formája a táblázatos elrendezés, ahol a szabály felismerését követően a táblázat folytatását várjuk el. Hasonlóan a sorozatokhoz, az adatpárok is lehetnek matematikai tartalmúak vagy más szimbólumrendszerekhez kötöttek, a matematikai tartalmon belül pedig jellemzően geometriai és számtani jelenségek fordulnak elő. Megjegyezzük, hogy a szövegesfeladat-jelleg itt is elsősorban abból adódik, hogy a feladatokban megfigyelhető szabályok megfogalmazása szóbeli körülírást igényel.

Folytasd a táblázat kitöltését!

□	❍	◇	▢	
■	●	◆		◗

5	11	3	4	14
3	9	1		

g	t		c	
gy	ty	ly	cs	zs

Az adatpárok táblázatos elrendezésében 2. osztály végére meg kell jelennie olyan szimbólumoknak, amelyek egy-egy adatsort jeleznek (pl. az egyik adatsor jele △, a másiké pedig □), és a szabályt az absztrakt jelek segítségével kell megfogalmazni.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Mit kell tennünk a △ sorában lévő számokkal, hogy megkapjuk a □ sorában az alattuk lévő számot?

△	3	4	6	7
□	8	10	14	

A tanulótól elvárható megoldás a következőképpen hangozhat: „A △ sorában lévő számhoz hozzáadok egyet, majd ezt a számot kettővel megszorozva megkapom a □ sorában lévő számot.” Vagy: „A △ sorában lévő szám kétszeresét veszem, majd ehhez 2-t hozzáadva megkapom a □ sorában lévő számot.”

Geometria

Az 1–2. évfolyamon a geometria tanításának legfőbb eszköze a cselekvő tevékenység. A változatos tevékenységek során megszerzett tapasztalatok, ismeretek megalapozzák az alsó tagozat, de a későbbi évek fogalmi építkezését is. Ebben az életkorban nyilvánvaló a térbeli alakzatokkal való tevékenykedés elsőbbsége, hiszen a kézbefogás, megtapogatás, egyáltalán a kézzel történő érzékelés a környező világgal való ismerkedés első élményei közé tartozik. Ennek okán a geometriai követelmények egyik pillérét képező konstruálások a háromdimenziós (térbeli) formákkal kezdődnek. Az óvodáskorú gyermek a játékai közül már ki tudja választani azt, amelyre rákérdezünk az általa sokszor hallott és megszokott szavakkal (pl. Add ide nekem a piros kockát!). A szavak, nevek ilyenkor még a konkrét tárgyhoz szorosan kötődő asszociációként működnek; a kocka fogalma mint absztrahált fogalom csak tudatos iskolai fejlesztés eredményeként jön létre. A fejlesztés lényege – különösen az alsó tagozaton – az aktív és tudatos tevékenykedés, a konkrét cselekvésekhez kötődő felfedeztetés, a fogalmak (és szavak) következetes használata. Az óvodából érkező gyermekek jogos igénye, elvárása a játék. Az életkori sajátosságokat, a pszichológiai fejlődést, a mentális fejlődést figyelembe vevő tankönyvek mindegyike kínál olyan játékos tevékenységeket, apróbb versenyeket, humoros feladványokat, amelyek az egészséges fejlesztéshez elengedhetetlenek.

A geometriához kapcsolódó követelményeket lényegében négy nagy csoportba rendezhetjük: konstruálások, transzformációk, tájékozódás és mérés.

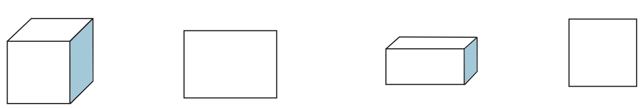
Konstruálások

A geometria e részterületének középpontjában térbeli, síkbeli alkotások, s ezek tulajdonságainak vizsgálata áll.

Elsősorban a szabadon, majd bizonyos feltételekhez kötődő alkotások, alakzatok formai tulajdonságait vizsgáljuk, megalapozzuk az erre épülő fogalmak kialakulását. A változatos, manipulatív szintű cselekvő tevékenységek sorozata – vágások, hajtogatások, ragasztások, áttetsző papírra történő másolások, színezések, kirakások, rajzolások, kockákból való építés újabb kockák hozzátevéssel, elvételével – az elkészült alakzatok tulajdonságainak meg- és felismerése. Azonosságokat és különbözőségeket vesznek észre, ezeket a gyermeki szókinccsel szavakba öntik. A tanulók képessé válnak alakzatok azonosítására, megkülönböztetésére az alakzatok képe, illetve geometriai tulajdonságai alapján; képesek az alakzatok szétválogatására – egyszerű, konkrét feltételt megadva – a geometriai tulajdonságok alapján.

Felismerik összkép alapján a kockát, téglatestet, négyzetet, téglalapot. Fokozatosan fejlődik a geometriai szimbólumrendszer tartalommal való megtöltése, az összefüggések megértése.

Nevezd meg a képeken látható alakzatokat!



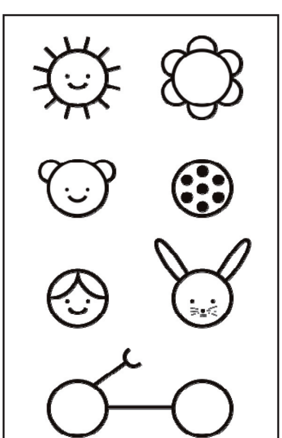
………………………………………………………………………………

Általában a második évfolyamon kerül sor a testek és síkidomok (itt kiemeltebb szerep jut a négyzeteknek, téglalapoknak) jellemzőinek alaposabb vizsgálatára, ahol a görbe vonal, egyenes vonal, bezáródó (zárt) vonal, csúcs, lap és él fogalmak értő használata, sőt adott esetben számszerű meghatározása segít az alakzatok jellemzésében. Az alakzatok alapos megfigyelését követően, egyszerűbb esetekben, megadott alaprajzokra különböző testeket építhetünk, s a jól készített árnyképekből (vetületekből) megpróbálhatunk alakzatokat rekonstruálni.

1. Tegyétek külön csoportba az előttetek lévő kártyák közül azokat, amelyeken kört láttok!
2. Rakjátok külön csoportba a betűkártyák közül azokat, melyeken a betűk csak egyenes vonalakból állnak!
3. Vegyétek elő a színes rudakat tartalmazó dobozt. Tegyétek a padon középre a piros rudat, alája a nála kisebbeket! (Mivel a doboz minden színből több rudat tartalmazhat, adhatunk még egy utasítást: „Elég egy színből csak egy darab rudat kirakni.”)
4. Építsetek a színes rudak felhasználásával díszes kerítést! Egy négytornyú várat! Stb.
5. Építsétek meg ti is az asztalon látható testet színes rudakból! (Kocka, téglatest vagy ezekből épített egyszerű alakzatokat rakjunk ki először.)

Válasszunk olyan feladatokat is, melyek vidám, játékos hangulatot teremthetnek, de sokféle fejlesztést szolgálnak.

1. A lapon látható nagy kört egészítsétek ki szabadon úgy, hogy egy nyuszifejet lássunk! Színezzétek is ki! (A szemmel történő ellenőrzést követően megdicsérjük az ötleteket.)
2. A kört csak háromszögekkel egészíthetitek ki úgy, hogy a végén egy cicafejet lássunk.
3. Az előttetek lévő lapon köröket láttok. Egészítsétek ki a körök mindegyikét szabadon!



A munka végén tűzzük a nagy táblára a rajzokat, és beszéljünk azokról:
- Mi a közös, mi a különböző a rajzokon?
- Hány képen van állatfigura?
- Ki mit rajzolt az első sor második körére? És a harmadik sor első körére?
- Tegyenek fel kérdéseket a kis kiállítással kapcsolatban.
- Mondjanak igaz és hamis állításokat, véleményt a rajzokról.
- Melyek tetszenek a legjobban? Miért?
- Próbálják kitalálni, hogy melyik rajz mit ábrázol.

A fentihez hasonló tevékenységek, konstruálások, megfigyelések képessé teszik a tanulókat arra, hogy ők is megfogalmazzanak rövid szöveges feladatokat, értelmes kérdéseket. Akár ugyanazt a geometriai tartalmat többféle „szövegruhába” is öltöztethetik.

Jól szervezett munkával egyszerre több területen is fejlődnek a gyerekek. Előfordulhat azonban, hogy nincs párhuzamban az értelmi és verbális képességük fejlődése. Azt gondolhatjuk, azért nem válaszol a gyermek, mert nem tudja a választ, pedig csak nem elég gyors a fogalmazásban, nem elég bő a szókincse, nem találja a megfelelő szavakat a válaszhoz. A matematika és ezen belül a geometria szöveges feladatai – legyenek azok akár csak néhány szóval kifejezhető gondolatok – hatékony eszközei az értő, értelmező olvasás, a szövegértés, szövegalkotás fejlesztésének.

A megfelelő önbizalom és a fejlesztő nyelvi környezet kialakításával képessé válnak a gyerekek a matematikai szókincs helyes alkalmazására, a pontos és választékos szóbeli megfogalmazásokra.

Készítsd el az alábbi két építményt a színesrúd-készlet fehér kiskockáiból vagy akár kockacukrokból! Alaprajzukat itt láthatod.

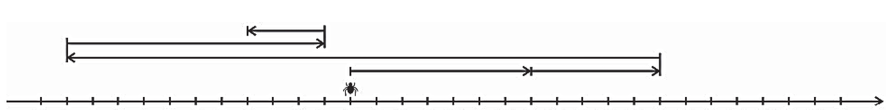
3	2	1
2	2	1
1	1	1

1	2	3
	2	3
		3

A számok azt mutatják, hogy hány kiskockát kell egymás tetejére tenni.

A következő feladathoz szükséges eszköz: egy számegyenes, melyen 0-tól 30-ig jelölve vannak az egészek.

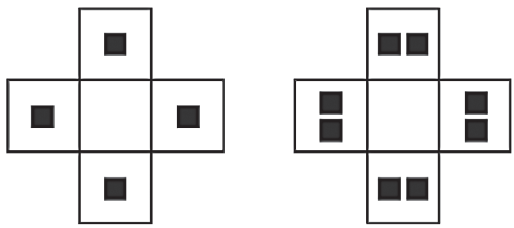
Egy bolha a számegyenes 12-vel jelölt pontján pihen. Majd hirtelen ugrálni kezd. Először jobbra ugrik 7 egységet, majd tovább jobbra 5 egységet, innen balra 23 egységet, majd ismét jobbra 10 egységet, végül balra 3 egységet. Hány egységnyire van az indulás helyétől?



Csoportos feladat lehet az alábbi:

Négy gyerek az asztal négy oldalára ül. Az asztalon kiterített csomagolópapíron egy közös építményt konstruálnak a csomagolópapíron megadott feltételek szerint. Az építés kockacukrokból, fehér rudakból történhet.

Csomagolópapírra öt nagy és egybevágó négyzetből keresztformát rajzolunk. A középső négyzet üres marad, a négy „kilógó” négyzetre egyszerű elrendezésben kisebb, egybevágó négyzetlapokat rajzolunk, például az alábbi ábrák szerint.



Megalkotható-e olyan építmény, amelyet négy különböző irányból nézve éppen a kis fekete négyzetek által mutatott ábrát láthatjuk?

Megoldás:

1. *Ahol csak egy-egy kis fekete négyzet van a négy nagyobb négyzet mindegyikére rajzolva, ott az építmény egyetlen kocka, középen jól elhelyezve.*
2. *Ahol mind a négy vetület két négyzet egymás mellett, ott már többféle alakzat megépítése is jó megoldást ad. A két kocka átlós elhelyezésétől a 3 vagy 4 kocka jó elhelyezése is megoldás.*

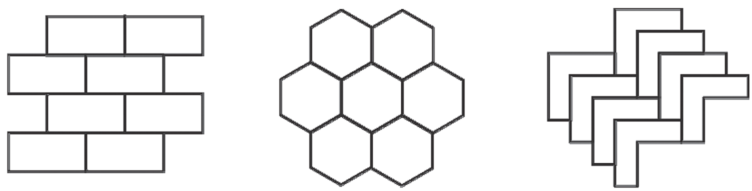
A gyerekek általában négy kockát tesznek középre, ilyenkor javasoljuk, hogy próbáljanak elvenni azokból úgy, hogy oldalnézetük ne változzon.

Már ebben a korban is adható olyan feladat, melynek több jó megoldása van, és a tanulóknak képessé kell válniuk az összes jó megoldás megkeresésére. Itt mindig az életkornak megfelelő, egyszerű feladatokra gondolunk.

A második évfolyamon a geometriai tevékenység kiterjed a különböző síkbeli alakzatok cérnával, zsinórral való körbekerítésére, síklapok különböző egységekkel való teljes (hézagmentes és egyrétű) lefedésére.

Ezek a tevékenységek a kerület, terület fogalmának tapasztalati előkészítését szolgálják.

Ilyen lefedések az alábbiak is:

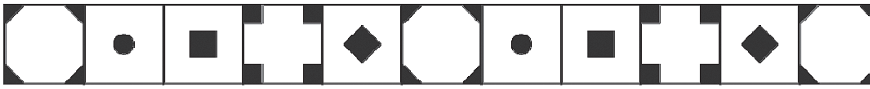


Transzformációk

A transzformációk közé a különböző alakzatok mozgatásához (tükrözés, eltolás, forgatás) és ezek irányának a tudatosításához kapcsolódó tevékenységek tartoznak.

A két- és háromdimenziós alakzatok mozgatása, különböző rácsokon történő elmozdítás során megfigyeljük, hogy megváltoznak-e egymáshoz képest az eredeti és az újonnan keletkezett alakzat tulajdonságai? Vannak-e öröklődő formai vagy méretbeli tulajdonságok? Például egy négyzetrácson két oldalszomszédos négyzetet körberajzolunk, ezt átmásoljuk egy másik papírra, precízen kivágjuk, és a kapott téglalapot mozgatjuk úgy, hogy kijelölünk egy irányt két rácspont irányított összekötésével, s ebben az irányban toljuk el a kivágott téglalapot valamennyivel. Vagy szívószálhoz ragasztjuk a téglalapot, és kijelölünk egy rácspontot, amely körül elforgatjuk a téglalapot, vagy két rácspontot összekötő egyenes mentén meghajtjuk a lapot, és bejelöljük a téglalap tükörképének a helyét.

A geometriai transzformációs feladatok fejlesztik az alkotó fantáziát, a kreativitást, az ötletességet, esztétikai érzéket. Tükrözésekkel, eltolással gyönyörű sormintákat tudunk előállítani. A tanulók ebben az életkorban már képesek a tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetésére az összkép alapján. Igen egyszerű a kisméretű fehér papírszalvéták pontos összehajtogatását követő bevagdosásokkal, kivágásokkal szép mintákat alkotni. Például kétszeri összehajtás után az egyik sarkát vágjuk le, nyissuk ki, hogy lássák a gyerekek a kapott mintát. Biztassuk őket különféle mintázatok előállítására. Ha több, együtt meghajtott szalvétát vágunk meg, akkor ezekből periodikusan változó (pl. a periódus 5 elemű) sorozatokat tűzhetünk fel a táblára, és számtalan kérdést tehetünk fel, sok kis szöveges feladatot fogalmazhatunk meg a szép látvánnyal kapcsolatban. (A fekete színű rész a hiányzó papírt jelöli.)



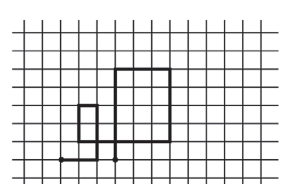
1. Melyik minta esetén hiányzik a legtöbb papír az eredeti papírszalvétából?
2. Hány lyuk van az 5. papírszalvétán?
3. Azonos vagy különböző mintázatú a 3. és a 7. szalvéta? És a 3. és a 8. szalvéta?
4. Ha ugyanúgy folytatnánk a mintákat és a kirakást, a 20., 30. és a 100. helyen milyen mintájú szalvéta állna?

Tájékozódás

A helyzetviszonyok kifejezésével, irányok megmutatásával, adatokkal jellemzett helyek megkeresésével jelentősen hozzájárulunk a tanulók térszemléletének fejlesztéséhez, a térben és a síkban való helyes eligazodási képesség fejlesztéséhez. A számegyenes, majd a később megjelenő koordináta-rendszer fogalmának elemi tapasztalati szintű előkészítését (elhelyezkedések viszonyításával, kezdve az előre, hátra, alatt, fölött, mellett, mögött, messzebb, közelebb, a kettő között, tőle kettővel jobbra, hárommal balra, aztán csak számokkal kifejezve a viszonyokat stb.) e témához kapcsolódó tevékenységek sora segíti.

Az alábbi példában mindenkinél van kockás papír, melyen a rácsvonalak irányában jelölve van a négy égtáj:

Egy négyzetrácsos lap valamelyik rácspontjából kelet felé indulok. Mindig rácsvonalon haladok, s rácspontnál fordulok. A fordulás mindig balra történik. Egy négyzetoldal a hosszegység. A megtett útszakaszok hossza sorrendben a következő: 2, 3, 1, 2, 5, 4, 3, 5.
Rajzold le az utamat!
Az út kezdő- s végpontja hány egységnyi távolságra van egymástól?



Megoldás: 3 egységnyi távolságra van egymástól az út kezdő- és végpontja.

Mérések

A mérések részterületen a mérhető geometriai tulajdonságok vizsgálatára vonatkozó tevékenységekről, követelményekről van szó.

A térbeli és síkbeli alakzatok jellemzői közé – a formai tulajdonságok mellé – bekerülnek a számszerűsíthető, mennyiségi jellemzők is. Ez a tevékenység- és követelménycsoport a matematika más területeihez is köthető, például hozzájárul a szám- és műveletfogalom kialakításához, megerősítéséhez. A hosszúság, kerület, terület, tömeg, űrtartalom, idő mérése sokféle alkalmilag választott és néhány szabvány egységgel (pl. méter, kilogramm, liter), az időtartam az óra, nap, hét helyes alkalmazásával történjen sokféle szituációba ágyazva. A jól megtervezett tevékenységek során szerzett tapasztalások lehetővé teszik az egység, mennyiség, mérőszám kapcsolatának felfedezését, az arányos változások tapasztalati előkészítését. *Az 1–2. évfolyam végére elvárható hogy a tanuló jártas legyen az alkalmi mértékegységekkel történő gyakorlati mérésekben, a tanult szabványmértékegységek ismeretében, gyakorlati használatában.*

Írd be a hiányzó számokat a pontozott helyre!

1 dm = ... cm	*6 cm + 2 dm = ... cm*
3 cm + 1 dm = ... cm	*2 dm − 15 cm = ... cm*
2 dm − 7 cm = ... cm	*.... cm + 1 dm = 12 cm*

A fenti négy téma tanítása rendkívül eszközigényes. A követelmények teljesülésének vizsgálata során is szükség van az írásos tesztelési módszereken túllépő manipulatív és mozgásos feladatok alkalmazására, gyakorlati megoldásuk, kivitelezésük értékelésére.

A geometriai fogalmak kialakítására és alkalmazására számos lehetőség kínálkozik a tanórákon kívül is. Ezek olyan apróbb feladatok, kis projektek, melyek hosszabb-rövidebb határidők mellett akár családi, baráti együttműködéssel is megvalósíthatók, és amelyek a geometriai tudás gyarapítása mellett lehetőséget biztosítanak az egymás közti munkamegosztásnak, a közös siker élményének, a szociális kompetencia egyéb komponensei fejlesztésének.

A mérések területén fontos fejlesztéseket végezhetünk azzal, hogy a gyerekek kezébe adjuk a méterrudat, a mérőszalagot, az űrmértékeket, a kétkarú mérleget a megfelelő súlyokkal, és sok mérést végeztetünk velük.

Készíthetünk például zacskókat, melybe majd homokot, kavicsot, babot, kukoricát, búzát, apró gyümölcsöket, az uzsonnát is beletehetjük, hogy összehasonlítsuk, megmérjük a tömegüket. Az egység sok minden lehet. Mérjük meg az egyes tevékenységek elvégzéséhez szükséges időt is. A körlapos, 1-től 12-ig számokkal és jól megkülönböztethető mutatókkal ellátott óra használatát javasoljuk.

Elvárás a szabványmértékegységek (m, dm, cm, kg, dkg; l, dl; óra, perc, nap, hét, hónap, év) gyakorlati ismerete, használata konkrét feladatokban. Ez nem zárja ki az alkalmi mértékegységek használatát.

Példafeladatok:

1. *A karácsonyi ajándékok csomagolásához vásárolt szalagokat Kati megmérte. Aranyszínűből 15 méter, ezüstszínűből 100 deciméter, zöld színűből 250 centiméter volt. Kati még vett piros szalagot, így éppen meglett a csomagoláshoz szükséges 35 méternyi szalag. Hány deciméter hosszú a piros szalag?*
2. *Az erdei tisztásra érve a mama egy nagy flakon gyümölcslevet vett elő. Mind az öten ittak két teli pohárral belőle, és ezzel kiürült a flakon. Csak ezután vették észre, hogy Daninak a poharába kétszer annyi gyümölcslé fért, mint a többi négy családtag kisebb, egyforma méretű poharába. Hány kisebb pohár gyümölcslé volt a flakonban?*
3. *Mérjétek meg a két fa távolságát többféle hosszegységgel! Jegyezzétek le a mérőszámot és a mértékegységet. A tapasztaltak alapján tegyétek igazzá a következő nyitott mondatot: Minél kisebb egységgel mérem meg ugyanazt a távolságot, annál nagyobb lesz a ....*
4. *Több azonos méretű műanyag dobozt rakjunk tele különböző anyagokkal. Az egyikben homok, a másikban kavics, szögek, lencse, liszt stb. lehet. Egy kétkarú mérleg segítségével hasonlítsuk össze a tömegüket, és rakjuk tömegük szerint növekvő sorrendbe a dobozokat. Lejegyezve a sorrendet, szabvány mértékegységekkel történő mérésekkel ellenőrizzük azok helyességét!*

A mérések során sokszor kérdezzük meg: Mit mértetek? Mivel mértetek? Meg tudnád mutatni a két kezeddel, hogy milyen hosszú lehet az 1 méter? A 3 deciméter? És az 5 cm? Tennél a papír-tányéromra egy fél kilónyi kavicsot? És erre 30 dekagramm homokot? Stb. És együtt ellenőrizzünk le minden becslést méréssel, beszéljük meg a tapasztaltakat. Ezzel elérhető, hogy a tanulók becslőképessége fejlődjön, képessé válja-nak a különböző nagyságú mértékek kapcsolatának felismerésére.

A mérés lényege az összehasonlítás. Hogy mikor, mit és mivel hasonlítunk össze, az eleinte szinte mindegy. Például hosszúság méréséhez használhatunk egy darab madzagot, egy lécet, a tanulók lépéshosszát, kifeszített tenyerünk két ujjhegyének távolságát, stb. Térfogatmérésnél egy bögrényi vagy papírpohárnyi vizet, homokot, babot stb. Ezeket az úgynevezett alkalmi mértékegységeket a tanulókkal együtt válasszuk meg, s az adott feladatban következetesen használjuk.

Szervezzünk 5-10 mérésből álló versenyt. A mérést megelőzően becsüljük meg a várható eredményt. Az előre elkészített lapokon a négyoszlopos táblázat első oszlopában legyen a mérési feladat, mellette a becsült eredmény, melyet rendre beírnak a gyerekek, majd a harmadik oszlopba a konkrétan mért érték, a 4. oszlopba a becsült és mért érték különbsége kerüljön. Minél többször csinálunk ilyen feladatot, annál nagyobb a valószínűsége, hogy kicsik lesznek az eltérések a becsült és mért eredmény között.

1. Válaszd ki az oda nem illőt!

a) cm m kg dm

b) perc év hónap dm óra

2. Barkochbázzunk!
Például: A gyerekek előtt ott vannak a logikai lapok vagy különböző alakzatokat ábrázoló kártyák, és egyvalaki gondol az egyikre, a többiek a tulajdonságokkal (pl. lyukas, nem háromszög, piros, nem kicsi, van csúcsa) kérdeznek; a válasz csak igen vagy nem lehet. Egy-egy válasz után mindenki maga „szűri meg" a lapjait, azaz csak azokat a lapokat tartja meg, melyek még megoldásként szóba jöhetnek. Győz, aki elsőként eltalálja a megfelelő alakzatot.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztése során általában a következő fokozatokat tartják szem előtt a tanítók:

a) Adott feltételnek megfelelő egy vagy néhány eset előállítása.
b) Minél több eset előállítása az adott feltétel szerint.
c) Az összes eset keresése, a talált esetek rendezése és a rendszerben talált hiányok pótlása.
d) Adott feltételhez tartozó esetek megkereséséhez rendszer kiépítése.

A felsorolt négy követelmény közül az *a)* és *b)* jelű az induktív gondolkodás fejlesztésének eszköze lehet. A diszciplináris értelemben vett matematikai tudás értékelése során elsősorban *c)* és *d)* típusú követelményeket fogalmazhatunk meg.

Matematikai tesztek tipikus feladata a következő:

Hány kétjegyű számot tudsz alkotni ezekből a számkártyákból? Állítsd elő az összeset!

3	4	6	2

Nyilvánvaló, hogy egyik számkártyán szereplő szám sem tölti be azt a szerepet, mint amit a hagyományos szöveges feladatoknál megszoktunk, hiszen itt a 3, 4, 6, 2 számokkal nem kell semmilyen számtani műveletet végezniük, mégis eljuthatnak a megoldáshoz.
A feladat egy ekvivalens megfogalmazása:

Hány monogramot lehet alkotni ezekből a betűkártyákból?

A	B	C	D

A szöveges feladatok megoldásához is segítséget kell adnunk tanítványainknak, hogy megtalálják a feladatot jól leíró modellt.

A kombinatorika témaköréhez kapcsolódó, ám a rendszerezési képességet mérő feladatra a következő példát adjuk:

Tréfás Ferkó összekeverte a mágneses betűket a „2. a osztály" feliratban.
Ez lett belőle: $\boxed{\textit{2. o asztály}}$
Hány betű van rossz helyen?

A következő feladat kapcsán megmutatjuk, hogy különféle megoldási stratégiák egyaránt elvezethetnek a megoldáshoz. A manipulatív, képi és fogalmi szintű megoldási lehetőségek egymással egyenértékű felhasználása erősíti a kapcsolatot a hétköznapi jelenségek és a matematikai fogalmak között.

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. Hányféleképpen érhettek célba?

Egy lehetséges megoldása a feladatnak, hogy a tanító kihív 3 gyereket az osztály elé. A helyükön ülő gyerekek irányítják a kinn állókat. Megállapítják a lehetséges sorrendeket. Mivel nehéz fejben tartani a már számba vett eseteket, természetesen adódik, hogy a problémát modellezniük kell. Például úgy, hogy felírják a neveket cédulákra (egy nevet több cédulára is), és ezek rakosgatásával oldják meg a feladatukat. Nyilvánvalóan ilyen tevékenységet nem végezhetnek írásbeli teszteken.

Az értékelés során megfogalmazott feladatoknál is ügyelni kell arra, hogy megmutassunk egy jó modellt, melynek segítségével a feladat érthetőbbé válik. Lehetséges, hogy elkezdjük az esetek felírását, majd ezt a gyerekeknek folytatni kell. Ezáltal a feladat tulajdonképpen az esetek közül minél több felírására korlátozódik, melyben a szemponttartás válik hangsúlyossá.

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. Hányféleképpen érhettek célba?
Folytasd a lehetőségek felírását!

A,B,C; A,C,B; B,A,C; _____; _____; _____;

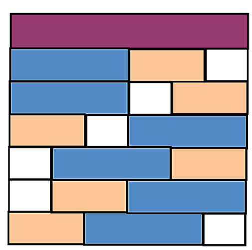
A másik lehetőség, hogy megadunk egy rendszert (például egy táblázatot), melynek segítségével a feladat áttekinthetőbb.

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. Hányféleképpen érhettek célba?
Folytasd a lehetőségek felírását!

1.	A					
2.	B					
3.	C					

Az adott feltételhez tartozó összes eset megkereséséhez vezető rendszer kiépítésére is tesznek előkészületeket már ebben a szakaszban is. Például 3 elem lehetséges sorba rendezéseit vizsgálva a tanórán már megfigyelték, hogy hányféleképpen színezhető a háromcsíkos zászló piros, fehér és zöld színeket használva. Újabb példák:

1. Hányféleképpen rakható ki a lila színes rúd, különböző rudakat használva?



2. Három hangból álló dallamokat készítettem. Mi hiányzik a sorból?

dó-mi-szó	**mi-dó-szó**	**szó-mi-dó**
dó-szó-mi	**mi-szó-dó**	

Nehezebbé akkor válik a feladat, ha növeljük az információs zajt.

3. *Mi lehet a „vers” utolsó sora?*

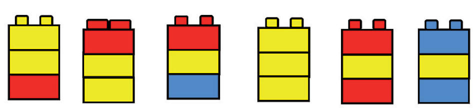
Tirim taram turum
Tirim turum taram
Taram turum tirim
Taram tirim turum
Turum tirim taram

....

A zászlószínezés és a fenti három feladat szerkezete azonos, de a tartalmuk nagyon különböző. A szerkezet azonban ebben az életkorban csak kevesek számára válik fontossá, ezért jelent új kihívást ugyanannak a problémának más megfogalmazása.

A valószínűség témakörében az alapozó években a biztos és a nem biztos elkülönítése válik fontossá. Sok-sok tapasztalat előzi meg a feladatlapon megfogalmazott feladatokat.

Piros, sárga és kék Lego-elemekből ezeket a tornyokat építettem. Egyet kiválasztottam, és állításokat mondtam a kiválasztott toronyról. Döntsd el, hogy biztosan igaz-e az állítás!

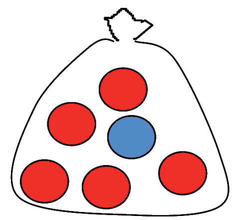


	Biztos igaz	Nem biztos, hogy igaz
Van benne piros elem		
A középső elem sárga		
Mindhárom szín szerepel benne		
Nincs benne kék		
Van két egyforma eleme		

Miután sok hétköznapi tapasztalatot szereztek lehetetlen eseményekről, kísérletet tehetünk arra is, hogy rákérdezzünk erre a nehéz fogalomra.

Egy zsákba beletettünk 5 piros és 1 kék golyót. Ezután kettőt kihúztunk, és állításokat mondtunk. Húzd alá azokat az állításokat, amelyek szerinted hamisak!

Mindegyik piros
Mindegyik kék
Van köztük kék
Nincs köztük piros
Van köztük kék



A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Számok, számhalmazok

Harmadik osztályban 1000-ig, negyedik osztályban 10 000-ig bővítjük a számfogalmat a számok valóságtartalmára építve. A három-, illetve négyjegyű számok körében a pontos számlálás mellett egyre nagyobb szerepet szánunk a darabszám és mérőszám becslésének, a közelítéssel való számlálásnak, az alkalmi és szabvány egységgel és többszöröseivel való adott pontosságú mérésnek. A gyakorlati mérések során a gyerekek képessé válnak értelmezni a különböző egységekkel való mérésekben kifejeződő viszonyokat, megértik a mértékváltás gondolatát.

Különböző taneszközök használatával megismerkednek különböző számrendszerekkel, tapasztalatot szereznek a csoportosításról, a beváltásokról és felváltásokról. A tízes számrendszer lényegének és a helyiértékrendszernek a gyakorlati ismeretével tudatossá és biztonságossá válik számukra a számok írása és olvasása, felismerik a számnévképzésben megfigyelhető rendszert. Megbízhatóan használják a számjegyek alaki-, helyi és valódi értékeit. Megvizsgálják a számokat az ismert számtulajdonságok, illetve számkapcsolatok szerint (pl. párosság, számszomszédok), és megismerkednek újabb számtulajdonságokkal (pl. oszthatóság, számok tízesekre, százasokra, ezresekre kerekített értékei).

Karikázd be a felsorolt számok közül a páratlan számokat!

1 2 4 5 6 8

Karikázd be a következő számok közül a 2 számszomszédait!

0 1 2 3 4 5

Felismerik és ki tudják fejezni a számokat különféle alakjaikban, meg tudják ítélni számok nagyságát, képessé válnak megadott számokat nagyság szerint növekvő és csökkenő sorrendbe rendezni. El tudják helyezni a számokat számtáblázatokban, illetve különböző beosztású számegyeneseken.

Kétféle értelmezésben ismerkednek a gyerekek a negatív szám fogalmával. Egyrészt irányított mennyiségek mérőszámaként (hőmérséklet, elmozdulás, elfordulás, idő), másrészt hiányként értelmezik a negatív számokat. Ehhez adósság- és vagyonkártyákat használnak. A számokat konkrét tartalommal ellátva hasonlítják össze. Előállítják a számok többféle alakját. Tevékenységgel megtapasztalják, hogy a hozzátevés nem jár mindig értéknövekedéssel, és az elvétel eredményezhet növekedést.

A számolási készség értékelésében gyakran alkalmazunk szöveges feladatokat. Ezek az egy művelettel megoldható feladatok nem igényelnek adatgyűjtést, egyszerűen számfeladattal lejegyezhetők és megoldhatók.

Például:

750 forint volt a pénztárcámban. Elköltöttem 480 forintot. Mennyi pénzem maradt?

Egy buszjegy 320 forint. Mennyibe kerül öt buszjegy?

Harmadik osztályban az 1000-es, negyedik osztályban a 10 000-es számkörben gyakran közelítő értékekkel számolnak a gyerekek, a feladatokban megfogalmazott kérdések is ezt igénylik.

Például:

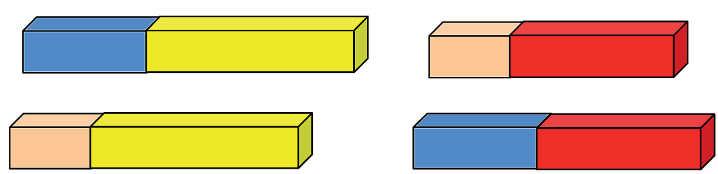
Kati egy 1000 forintossal fizetett az írószerboltban. A pénztárgép 578 Ft-ot mutatott. Mennyi a visszajáró pénz százasokra kerekítve?

Műveletek

Harmadik és negyedik osztályban a kibővített számkörben is szükségessé válik a műveletek értelmezése tárgyi megjelenítéssel, rajzzal, elvontabb ábrákkal és szöveggel. Különös figyelmet fordítunk a közelítő számokkal való műveletértelmezésekre. Kétirányú tevékenységek járulnak hozzá a matematikai modellek megértéséhez. Egyrészt kirakásokról, képekről, ábrákról műveleteket olvasnak le a gyerekek, másrészt adott matematikai modellhez példákat gyűjtenek, problémákat fogalmaznak meg. A nagyobb számok összeadásának, kivonásának értelmezéséhez segítséget jelent a szakaszokkal vagy területekkel való ábrázolás. Ezt előkészítheti a színes rudak használata.

Például:

Érjen a fehér kocka 100-at! Melyik kirakás közelíti a 246 + 467 összeget?

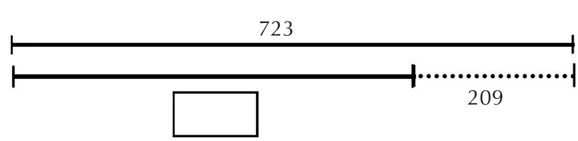


A kirakásokat, a kirakásokról a leolvasásokat követheti a szakaszok, illetve a területek használata. Ezek alkalmasak a számok közelítésekkel való ábrázolására, a számok közti viszonyok bemutatására.

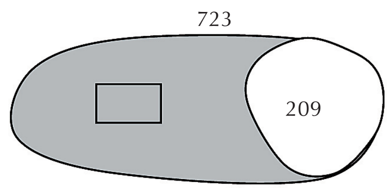
Például:

Az egyik szám a 723. Ez 209-cel nagyobb a másiknál. Melyik a másik szám?

Szakaszokkal:



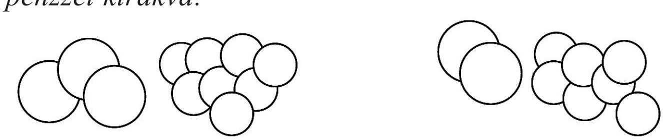
Területekkel:



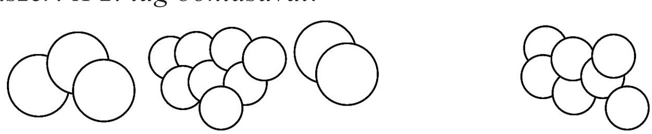
A kibővített számkörben a szóbeli számolási eljárásokat analógiák alapján végezzük. Ezek megértését jól támogatja a játék pénz használata. A tevékenységek során biztonságossá válik a gyerekek szóbeli számolási készsége a kerek számok körében. A 2. osztályban a 100-as számkörben megismert számolási eljárásokat végigjárják a gyerekek a 3. osztályban az 1000-es számkörben kerek százasokkal és kerek tízesekkel, majd a 4. osztályban a 10 000-es számkörben kerek ezresekkel és kerek százasokkal is. Számolásaikban egyszerűsítő eljárásokat alkalmaznak, melyek alapja az összeg, illetve a különbség változatlansága. Ezekről tevékenységekkel szereznek tapasztalatokat, majd alkalmazzák a számolások során.

Mennyi a 380 + 270?

Játék pénzzel kirakva:

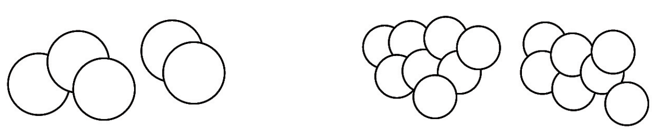


1. módszer: A 2. tag bontásával:



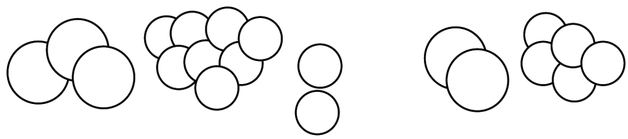
(380 + 200) + 70 = 580 + 70 = 650

2. módszer: A százasokat és a tízeseket összeadva:



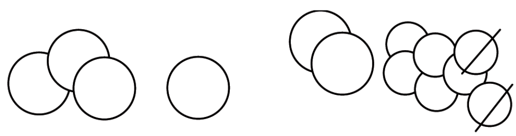
(300 + 200) + (80 + 70) = 500 + 150 = 650

3. módszer: Az egyik tagból a másikba helyezéssel:



(380 + 20) + (270 – 20) =400 + 250 = 650

4. módszer: Az egyik tag növelésével, majd az összeg csökkentésével:



(400 + 270) – 20 = 670 – 20 = 650

A kerekített értékek segítségével végzett közelítő számítások szükségesek lesznek az írásbeli műveletek eredményeinek előrebecslésénél is.

Az írásbeli műveletek algoritmusai, a számolás eredményeinek ellenőrzési módjai is építenek a műveletek tulajdonságaira, kapcsolataira. Ez is indokolja a tagok, tényezők felcserélhetőségének illetve csoportosíthatóságának ismeretét, célszerű alkalmazását.

Például 3. osztályban, amikor a gyerekek még nem tanulták a kétjegyűvel való írásbeli szorzást, képesek a 26 · 24 kiszámítására az egyjegyűvel való írásbeli szorzási eljárás alkalmazásával. Néhány számolási lehetőség: (26 · 8) · 3 = (26 · 6) · 4 = (26 · 3) · 2 · 2 · 2.

3–4. osztályban különös hangsúlyt kapnak a szöveges feladatok a problémamegoldó képesség fejlesztésében. Ezek a feladatok többnyire összetettek, nem oldhatók meg közvetlen úton. A probléma megoldásához célszerű megfelelő lépéseket betartva eljutni. A probléma megismerését az értelmezése, adatainak lejegyzése és az adatok összefüggéseinek megértése követi. Az ismert és az ismeretlen adatok közti kapcsolat kifejezésére sokféle modellt használhatnak a gyerekek. Lehet modell például a több műveletet tartalmazó számfeladat. Ezekben a lejegyzésekben célszerű zárójeleket használni akkor is, amikor ezeket csak az összetartozó adatok jelzésére használjuk.

Például:

Petiék családja háromnapos autós kirándulást tervezett. Az első nap 160 km-t tettek meg, a második napon 80 km-rel többet. A harmadik napon kétszer annyit, mint az első napon. Hány kilométert tettek meg Petiék a három nap alatt?

A feladat összefüggéseinek lejegyzése számfeladattal:
$160 + (160+80) + (160 \cdot 2) =$

Algebra

A számfeladatok mellett egyre nagyobb hangsúllyal jelennek meg a nyitott mondatok. Folytatva az 1. és 2. osztályban megkezdett tevékenységeket, a nyitott mondatokat igazzá, illetve hamissá tevő elemek keresése próbálgatással történik, de alkalmazzák a gyerekek a tervszerű próbálgatás módszerét is a megoldás keresésére véges alaphalmazokon. Képessé válnak ismert és keresett adatok között megfogalmazott kapcsolathoz adott nyitott mondatok közül kiválasztani (egyszerűbb kapcsolatok esetén önállóan megalkotni) az adott helyzetben megfelelő nyitott mondatot.

Gondoltam egy számot. Ennek 8-szorosát elvettem 800-ból, és megkaptam a gondolt szám 12-szeresét. Melyik számra gondoltam?

Nyitott mondattal: $800 - \square \cdot 8 = \square \cdot 12$

A feladatok összefüggéseit – kiemelten a fordított szövegezésű feladatokét – gyakran nyitott mondat formájában jegyezzük le. A 8–10 évesek számára egyszerűbb annak a műveletnek a felismerése és lejegyzése, amelyre a szöveg utal, mint az inverz műveletre való átfogalmazás.

Például:

Csabiék iskolája 12 évfolyamos. 160 alsó tagozatos tanulója van az iskolának. Az alsó tagozatra 2-szer annyi gyerek jár, mint a középiskolába. Az alsósok 40-nel többen vannak, mint a felsősök. Hány gyerek jár a felső tagozatra, és hányan járnak középiskolába Csabiék iskolájában?
A középiskolás gyerekek számát jelöljük így: $\square$
A felsősök számát jelöljük így: ∇

Ennek segítségével egyszerűen leírhatók a feladat kérdéseihez tartozó nyitott mondatok:

$\square \cdot 2 = 160 \qquad \nabla + 40 = 160$

A szöveggel megfogalmazott feladatok megoldását segíthetik sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok vagy grafikonok, még akkor is, ha a feladatnak csak egy megoldása van.

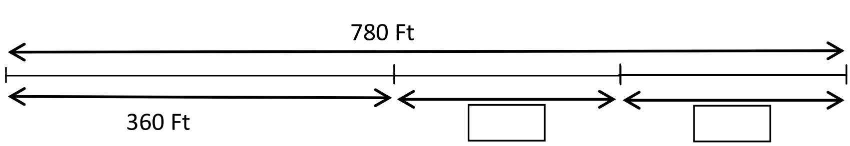
Például, ennek a feladatnak a megoldását táblázat kitöltésével is kereshetik a gyerekek:

A pénztárcámban csak 20 és 50 forintos érmék vannak, összesen 12 darab. A pénzérmék összesen 360 Ft-ot érnek. Melyik érméből hány darab van a pénztárcámban?

A feladathoz ilyen táblázat készülhet:

20 forintosok száma	2	4	5	6	7	8
50 forintosok száma	10	8	7	6	5	4
20 forintosok értéke	40	80	100	120	140	160
50 forintosok értéke	500	400	350	300	250	200
Az érmék értéke	540	480	450	420	390	**360**

Egyszerűsítő rajz járul hozzá a megoldáshoz ebben a feladatban:
Az írószerboltban két egyforma füzetet és egy tollat vásároltam, összesen 780 forintot fizettem. A toll 360 forintba került. Mennyibe került egy füzet?
Szakaszos ábra segítheti a megoldást:



A feladathoz választott matematikai modellen belül a számításokat azok ellenőrzése követi. Az ellenőrzés történhet az előzetes becsléssel való összevetéssel, inverz művelettel, és használhatunk zsebszámológépet is. Az inverz művelet választása az ellenőrzéshez erősíti a műveletek közti kapcsolatot.

Relációk, függvények

A relációk, függvények témakörben a 3–4. évfolyamon a fejlesztés fontosabb területei:

– összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés képessége, megfigyelőképesség;
– válogató-, osztályozó-, rendszerező- és lényegkiemelő képesség;
– adatok gyűjtése, rögzítése, rendezése;
– absztraháló- és konkretizálóképesség;
– összefüggések felismerése, oksági és egyéb kapcsolatok feltárása, analógiák felismerése, követése;
– tapasztalatok kifejezése különféle módokon (megmutatással, rajzzal, adatok rendezésével, példák, ellenpéldák gyűjtésével stb.), megfogalmazása saját szókinccsel, egyszerűbb esetekben matematikai szaknyelv, illetve jelrendszer alkalmazásával.

A felismert összefüggéseket képesek megfogalmazni a matematika nyelvén, kifejezni szavakkal, jelekkel, szabállyal (függvény esetében nyíljelöléssel, relációk esetében nyitott mondattal). A megkezdett párosításokat tudják folytatni adott és felismert összefüggés szerint.

Az összetartozó adatpárok kezelésében új elemként jelenik meg 3–4. osztályban a relációk grafikus ábrázolása Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. Mivel az adatpárok ábrázolása során lényeges az adatpár tagjainak sorrendje, olyan gyakorlatokat is érdemes végezni, amelyekben az elő- és utótag cseréjével előálló adatpárokat közös koordináta-rendszerben tüntetjük föl.

A tanulók képesek adatokat, számokat tartalom, illetve nagyság szerint sorozatba rendezni, a folytatásra vonatkozó sejtéseket megfogalmazni. A felismert összefüggést a sorozat folytatásával vagy szavakkal fejezik ki. A megfogalmazott szabály alapján tudják folytatni a sorozatot, képesek ellenőrizni a szabály és az adatok megfelelőségét. Néhány elemével elkezdett sorozathoz többféle szabályt keresnek.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Mit kell tennünk a △ sorában lévő számokkal, hogy megkapjuk a □ sorában alatta lévő számot?

△	3	4	6	7
□	8	10	14	

A tanulótól elvárható megoldás a következőképpen hangozhat: „A △ sorában lévő számhoz hozzáadok egyet, majd ezt a számot kettővel megszorozva megkapom a □ sorában lévő számot.” Ehhez a táblázathoz kapcsolódóan megfogalmazható egy olyan zárt feladat is, amelyben azt kérjük, hogy a tanuló válassza ki a táblázat adataihoz illő szabályt.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Karikázd be annak az összefüggésnek a jelét, amelyik igaz a táblázatra, és húzd át annak a jelét, amelyik nem igaz!

△	3	4	6	7
□	8	10	14	

a) □ = (△ + 1)· 2
b) □ = (△ − 1) · 2
c) □ = (△ + 2) + 3
d) □ = △· 2 + 2

Geometria

A geometriai területen a 3. és 4. évfolyamokon ugyanaz a négy tartalmi részterület alakítja az tartalmi kereteket, mint az 1. és 2. évfolyamon. Az ott megismert konstruálások (1), transzformációk (2), tájékozódás (3) és mérés(4) területek átfogják mindazokat a követelményeket, amelyeket geometriai fogalmak, egyszerű rutinfeladatok, realisztikus és autentikus geometriai problémák esetén ezeken az évfolyamokon definiálunk.

Konstruálás

Az 1–2. évfolyam követelményeihez hasonlóan továbbra is a téglatest, kocka, téglalap és négyzet alakzatok felismerése és konstruálása szerepel a követelmények között. A tanulók elsajátítják az él és a lap fogalmakat.

A tanulók megismerik a testháló kifejezést, konkrétan a téglatest és kocka jellemző testhálóját.

A geometriai tulajdonságok közül – gyakorlati tevékenységeik során – elsajátítják a következő fogalmakat: forma, szomszédosság, irány, párhuzamosság, merőlegesség. A tanulók képessé válnak arra, hogy az egyes geometriai tulajdonságok szerint csoportosítsanak testeket és síkidomokat. A csoportosítás során megfigyelt további jellegzetes tulajdonságok: szögletesség, lyukasság, tükrösség, méretek azonossága és különbözősége.

A tükrösség (szimmetrikusság) fogalmát egyrészt papírhajtogatásos tevékenységek, másrészt térbeli alakzatok tükörképének megépítésével fejlesztjük.

A térbeli alakzatok elsőbbsége mellett nagyobb teret kapnak a síkidomokkal végzett tevékenységek. A tanulók képessé válnak testek és síkidomok másolására, síkidom és test tükörképének megalkotására. A másolás elsődlegesen kézbe vehető testekkel, pálcikákkal történik, de 3–4. osztályban a rajzolás nyújtotta absztrakciós lehetőséget is fokozottan kihasználjuk.

A tanulók képesek a körző és vonalzó használatára. A körző alapszintű használata valósul meg például akkor, amikor a tanuló a körzőnyílásba vesz 5 cm-es távolságot.

Transzformációk

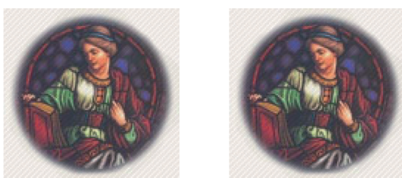
Az 1–2. osztályban megszerzett tapasztalatokra építve az egybevágóság és a hasonlóság fogalmának tapasztalati és képi szintű összetevőit alakítjuk ki. A tanulók képesek fölismerni, ha két alakzat vagy azok képe egybevágó vagy hasonló. A formai jegyek azonosságát és különbözőségét képesek megállapítani és megfogalmazni. Alakzatok különbözősége esetén képesek szavakkal megfogalmazni az adott szempontú különbséget (pl. hosszúkásabb, ferdébb).

Testek esetében az eredeti test alkotóelemeiből, síkidomok esetében a négyzetrácsos hálózat segítségével képesek alakzatokat kicsinyíteni és nagyítani. A tanulók képesek síkidomok tengelyes tükrözésére és elforgatására másolópapír segítségével.

Az eltolással és a tengelyes tükrözéssel nyert alakzatok között képesek különbséget tenni, még összetett alakzatok esetén is.

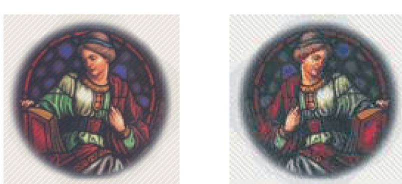
Mintafeladatunk a tengelyes tükrözés és az eltolás közötti különbségtételt ellenőrzi olyan alakzatok esetén, amelyeknél a fogalmi tudás alapvető. A feladatok tartalma lényegében tetszőleges, nem történik hivatkozás (és nincs is igény) a hétköznapi tapasztalatok felhasználására.

Ebben a feladatban két, összetartozó ábráról kell eldöntened, hogy azok egy tengelyes tükrözéssel vagy egy eltolással egymásba átvihetők-e. Az ábrák betűjelét írd a megfelelő sorba!



a)

b)



c)

d)

Tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők: ....

Eltolással egymásba vihetők: ....

Tájékozódás

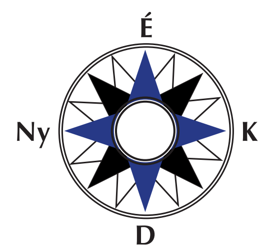
Előrebocsátjuk, hogy a geometriai értelemben vett tájékozódás jelentős része összefügg a földrajzi tudás kategóriájaként azonosított tájékozódással. A két terület kapcsolatát fölfoghatjuk úgy, hogy különböző kontextusban történik a tájékozódás képességeinek fejlesztése. A matematikai kontextusban fejlesztett tájékozódási képesség a koordináta-rendszer mint univerzális matematikai eszköz elsajátítását készíti elő, és ennek során a hétköznapokból ismert fogalmakat használunk föl. Ahogyan az 1–2. osztály követelményeinél jeleztük, a síkbeli koordináta-rendszer használata esetében jellemző két, egymástól független adat rendezett adatpárként a hétköznapi értelemben vett tájékozódás alapját jelenti.

A tájékozódás a térbeli mozgások során szerzett tapasztalatokból indul. 3–4. osztályban a tanulók képesé válnak egy, két vagy három adat alapján tájékozódni. A három adat alapján történő tájékozódást, amely a térbeli tájékozódás matematikai modelljét jelenti, a gyakorlatban sok esetben a két adat alapján történő tájékozódás helyettesíti. A tanulók tájékozódási képessége magában foglalja azt is, hogy képesek fogadni és megérteni a vonatkozó információt (pl. „ha előre lépsz ötöt, majd jobbra kettőt, akkor célba érsz”) és képesek maguk is megfogalmazni a tájékozódást szolgáló információt.

A tájékozódás képi elemeinek konstruálását, például egyszerű térképvázlatok készítését a természettudományi tartalmi keretek földrajzi fejezeteiben tárgyaljuk.

Mintafeladatunk akár a földrajz vagy a természetismeret tantárgyak tesztjében is helyet kaphatna. Meggyőződésünk szerint ez nem jelent érvényességi problémát, hiszen a feladatok kontextusa, már pusztán a teszt címében szereplő matematika vagy természetismeret szó önmagában hatással van a tanulói teljesítményre. Kívánatosnak tartjuk, hogy a tájékozódás alapját jelentő képi és verbális tudás rendszere mind matematikai, mind más kontextusban megfelelő szinten kifejlődjék.

Az ábrán egy szélrózsát látsz, amelyen a négy fő égtáj van megjelölve. A kör közepéből elindulunk észak felé. Megfordulunk, és visszamegyünk a kör közepére. Melyik égtáj esik ekkor jobb kezünk felé?



Mérés

Amint az 1. 3. részben említettük, a hazai matematikadidaktikai hagyományban a mérés a geometria tárgykörével együtt szerepel, ugyanakkor a számunkra fontos viszonyítási pontként szereplő amerikai *„Principles and Standards for School Mathematics”* kötetében a mérés külön tartalmi területként jelenik meg. Ennek okát részben kulturális hagyományokban kell keresnünk (pl. a metrikus rendszer alkalmazásában mutatkozó különbségek), másrészt érvényesül az a hazai megközelítésmód, amely a mérést az ismert geometriai idomokhoz kapcsolódó tevékenységnek tekinti. Egy jóval általánosabb megközelítésmód szerint ugyanis – amely megközelítést a tudományok világában természetesnek vesszük – a mérés számok hozzárendelését jelenti objektumokhoz, eseményekhez, tulajdonságokhoz, valamilyen szabály alapján. Bár van törekvés arra, hogy a geometriai alakzatok mérésében ez utóbbi, általános megközelítést is bevigyük az iskolába (úgynevezett „alkalmi mértékegységekkel” történő mérés – lásd 1–2. osztály követelményei), az iskolai gyakorlatot mégis a szabvány mértékegységekre történő gyors áttérés, majd a mértékváltás számolásos műveleteiben való elmélyedés jellemzi.

3–4. osztályban a tanulóknak ismerniük kell az egység, a mennyiség és a mérőszám fogalmakat. A méréses tevékenységek során a kerület mérését körülkerítéssel, a terület mérését lefedéssel, a térfogat mérését alkalmi egységekkel („kis kocka”) végezzük el. A síkidomok közül a téglalap, a testek közül a téglatest szerepeljen a kerület-, terület-, illetőleg a térfogatmérés tárgyaként.

A tanulóknak ismerniük kell a következő mértékegységeket: mm, cm, dm, m, km, hl, l, dl, cl, ml, t, kg, g. Az egymással szomszédos mértékegységeket át kell tudniuk váltani egymásba. Az átváltás elsősorban gyakorlati tevékenységekhez kapcsolódjék, tehát az egyik mértékegység használatával lezajlott mérést követően egy szomszédos mértékegységgel ismételt mérést alkalmazunk. Az idő mérésére az órát, a percet és a másodpercet kell ismerniük, és tudniuk kell a szomszédos egységeket egymásba átváltani. A mérés témaköréhez kötődő szöveges gyakorlófeladatok jelentős része a mértékváltáshoz kapcsolódik.

Hány deciliter tej fogyott ma, ha három doboz literes tejet ittunk meg?

Ha egy negyedikes gyerek lépései 60 centiméteresek, akkor hány lépéssel tesz meg 12 métert?

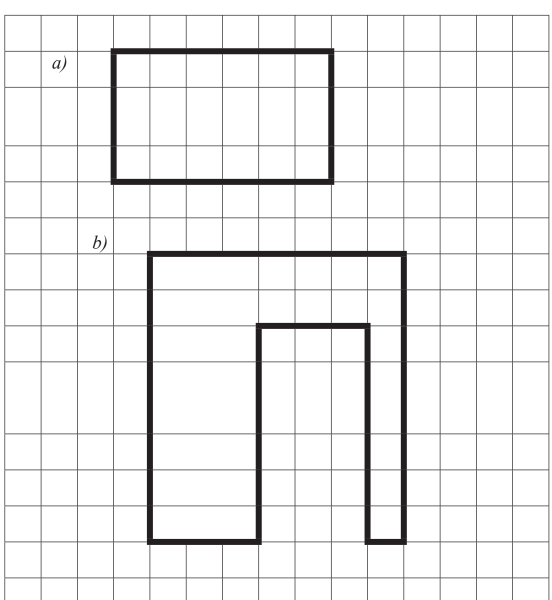
A rádióban két órahosszáig játszottak 5 perc hosszúságú zeneszámokat. Hány zeneszámot játszottak le ennyi idő alatt?

Angliában gyakran használják a mérföldet a távolság mérésére. Egy mérföld 1 km és még 609 méter. Hány méter egy mérföld?

Egy kis csomag teavaj tömege 100 gramm. Hány csomaggal vegyünk, ha 3 kg-ra van szükségünk?

A mértékváltás mellett egyszerű kerület- és területszámításos feladatokat tudunk szöveges gyakorlófeladatként megfogalmazni. A tanulók manipulatív tevékenységéből a képi szintű feladatmegoldáshoz jutunk a következő feladatokkal.

A négyzetrácsos táblán egy kis négyzet egy területegységet jelent. Számold ki a vastag vonallal keretezett két síkidom területét!



a) jelű síkidom
területe:____

b) jelű síkidom
területe:____

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika tanítása 3–4. osztályban is főleg a tapasztalatszerzést célozza.

A tanulók kombinatív gondolkodását továbbra is elsősorban a rendszerezés fontosságának megértetésén keresztül formáljuk. A gyerekeknek eleinte még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. A teljességre való törekvés kis elemszámú halmaz előállítása esetén ebben az életkorban már reális elvárás. Továbbra is segítséget kell adnunk a gyerekeknek a rendező elv megtalálásában, hiszen az összes eset megtalálásához ez fontossá válik. Csak nagyon kis elemszám esetén mondhatunk le arról, hogy támpontot adjunk legalább a feladat elkezdéséhez.

Az órai valószínűségi játékok alapvetően azt hivatottak bemutatni, hogy ami gyakrabban előfordult, az valószínűbb. Ilyenkor a pedagógus valódi résztvevője a tanulói kísérletezésnek, és bízik benne, hogy a játék kimenetele a „várt” eredményt hozza. Ezekben az években, a játékok elemzése során már az is megfigyelhető, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb (még akkor is, ha a tényleges kísérleti adatok ezt nem támasztják alá). Az értékelés során így követelményként jelenik meg a kisebb vagy nagyobb valószínűség intuitív megállapítása.

A „biztos”, „nem biztos”, „valószínű”, „lehetséges” fogalmak játékkal, tevékenységgel, az alapozó szakasz munkája eredményeként remélhetőleg beépültek a gyerekek szókincsébe. A tantervi követelmények a determinisztikus (biztos vagy lehetetlen) és nem determinisztikus események (lehetséges) elkülönítését fogalmazzák meg. Így természetesen csak közvetve kérdezhetünk rá arra, hogy egy adott eseményt mennyire tartanak valószínűnek.

A tantervi követelményekben is megjelenik az adatok megfigyelése, gyűjtése, rögzítése, rendezése. Ez a statisztikai témák mélyebb megértésén túl a valószínűségi döntések segítését is célozza.

A valószínűségi tevékenységek és feladatok általában nem önálló fejlesztési célként szerepelnek, hanem összekapcsolva más (pl. számolás, geometria, kombinatorika) területekkel. Mondjuk két dobókockával dobunk, és a szorzat paritására kell tippelni. A probléma megoldásához szükség van a gyerek számelméleti ismereteire, esetleg számolási képességére, és emellett valószínűséggel kapcsolatos gondolataira. Ezt érdemes figyelembe venni a mérőlapok készítése során.

Az összes eset keresésére, a talált esetek rendezésére és a rendszerben talált hiányok pótlására más feladatot jelent egy meglévő teljes rendszer hiányzó elemeinek megtalálása.

Ebben a feladatban jogos igény lehet az összes hiányzó elem megtalálása, hiszen előre megtervezett rendszer mutatja a megoldást. Emellett a táblázatban való eligazodás képességét is fejleszti a feladat. A fenti feladatok egyszerűsített változata lehet:

Az 5-ös, 2-es és 7-es számjegyekből alkoss 3-jegyű számokat. Írd le az összes különbözőt!

A gyerekeknek ebben a szakaszban még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. Ha felismerik a tevékenységekben már kipróbált hasonlóságot, akkor már nagy lépést tettek az általánosítás felé. A kombinatorikai feladatokban (beleértve azok javítókulcsát is) ebből adódóan nemcsak az a lényeges, hogy az összes lehetőség száma mennyi, hanem a részmegoldások, a lehetőségek felsorolásában megnyilvánuló szabályszerűség is értékelhető és értékelendő.

Természetesen adódik a lehetőség az eljátszott, korábban megélt kombinatorikus tevékenységek szöveges feladattá való átfogalmazására. Továbbra sem mondhatunk le azonban a segítségadásról, mely lehet akár táblázat vagy megkezdett fa-diagram. Még mindig fontos, hogy nem elsősorban arra a kérdésre várjuk a választ, hogy valami hányféleképpen fordulhat elő, hanem az összes lehetőség előállítását kérjük a gyerekektől.

Például a következő két feladatot tekintve a táblázatos megoldás felkínálása tűnik célravezetőnek.

Nagymama éléskamrájának a feltöltésére készülődik, ezért a piacon vásárolt magának almát, körtét és szilvát. A gyümölcsöket három polcra szeretné pakolni. Egy polcra csak egyfajta gyümölcsöt tesz. Milyen sorrendbe pakolhatja be gyümölcseit?
A kezdőbetűk segítségével írd az összes megoldást a polcot jelölő táblázatba!

	Lehetőségek					
III. polc	**Sz**					
II. polc	**K**					
I. polc	**A**					

Állíts össze a Falánk családnak az étlapról háromfogásos menüt (leves, főétel, desszert) úgy, hogy ne legyen a család tagjai között olyan, aki pontosan ugyanazt a három fogást választja!

Töltsd ki a táblázatot az ételek nevének kezdőbetűjével!

Étlap

Levesek:
- húsleves
- gyümölcsleves

Főételek:
- spagetti
- brassói aprópecsenye
- rakott krumpli

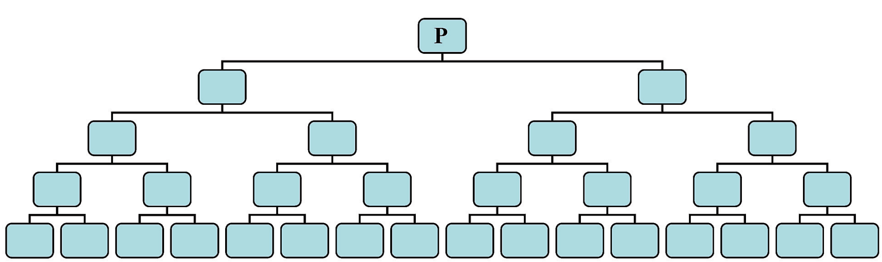
Desszert:
- somlói galuska

Leves								
Főétel								
Desszert								

Legfeljebb hánytagú a Falánk család, ha nem volt közöttük két családtag, aki pontosan ugyanazt a három fogást válaszotta?

Egy másik esetben pedig a fa-diagram segít:

Évi gyöngyöt fűz. Sárga, piros és kék gyöngyei vannak. A láncra 5 szem gyöngy fér. Először mindig a piros gyöngyöt fűzi fel. Egymás mellé nem kerülhet azonos színű gyöngy. Hányféleképpen fűzheti fel a gyöngyöket Évi? Rajzold be az ábrába a színek kezdőbetűjével, hogy milyen lehetőségei vannak a gyöngysor elkészítésére!



Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Az 5. évfolyam elején körültekintően fel kell mérni, milyen matematikai felkészültséggel rendelkeznek a diákok ebben a témakörben. A leghitelesebb képet akkor kaphatjuk a tanulók felkészültségéről, ha egyéni képességeik felmérését megelőzi a sokirányú, változatos tevékenykedéshez kapcsolódó ismétlés.

Számok, számrendszerek

A tanulók a hatodik évfolyam végére megismerik a racionális számkört. A számkör bővítése (egészek, törtek, tizedes törtek), ezen belül a negatív számok értelmezése, a törtszám kétféle értelmezése (pl. 2/3 rész jelentheti azt, hogy egy egész tortát 3 egyenlő részre osztunk, s veszünk ezekből a részekből 2 darabot, vagy két – fentivel azonos – egész tortának vesszük az 1 harmad részét), az ellentett, abszolút érték fogalmának megismerése, a számok tulajdonságainak vizsgálata (pl. párosság, számszomszédok, felbontási lehetőségek) során képessé válnak a tanult számok helyes leírására és olvasására, értik és alkalmazni képesek a tört, tizedestört, negatív szám fogalmát.

Ezeken az évfolyamokon a tanulók a már kibővült számkörben értelmezik a kerekítés fogalmát, és alkalmazzák a kerekítés szabályát. Megismerik a százalék, alap, százalékláb, százalékérték fogalmát is. Fontos a más műveltségterületeken (pl. természettudományos tárgyak) gyűjtött tapasztalatok megbeszélése, mert ezen fogalmak gazdagítását szolgálja. Hasonlóan, a matematikai szaktárgyi tudásra a természettudományos tárgyak építenek, és a tudástranszfer lehetőségén keresztül a számolási készség a biológiai, kémiai, fizikai és földrajzi számításokban is meghatározó szerephez jut.

A számrendszerek (10-es alapú és az 5–6. osztályban csak bemutatásra kerülő − nem követelményt jelentő tananyag − 2-es alapú) tanítása kapcsán világossá tehető, hogy a számjegyek (alaki érték) elhelyezkedése (helyi érték) mennyire befolyásolja a szám valódi értékét. Itt újra alkalom nyílik a 0 helyi érték pótló szerepének bemutatására. Ezeken az évfolyamokon a tízes számrendszer biztos ismerete már követelmény.

A példasor alapján töltsd ki a táblázatot!

Tízes számrendszer									Számok Írása	Számok írása szavakkal
...	10^3	10^2	10	1	1/10	1/100	1/1000	...		
	2		1			3			2010,03	kétezer-tíz egész három század
										hétezer nyolcszázhét

Az egész számok tulajdonságainak, felbontási lehetőségeinek vizsgálata során megismerkedünk az egyszerűbb oszthatósági szabályokkal. *Követelményként fogalmazódik meg a 2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 25-tel, 100-zal való oszthatóság ismerete, alkalmazása feladatokban.* Fontos kitérni itt a 0 párosságának, oszthatóságának vizsgálatára is. A számelmélet témájához kapcsolódó feladatok alkalmasak a *bizonyítási igény kialakítására, fejlesztésére.* (Pl. hogyan lehetne igazolni, hogy a páratlan számok minden osztója páratlan?)

A számok sokféle megjelenítése, felírása az évek folyamán a tanulók *kombinatorikus gondolkodását is fejleszti*. Pl. a $6 = 3 + 3$ (két egyenlő részre osztható, ezért páros egész) $= 2 \times 3$ (tényezőkre bontásában szerepel a 2, ezért páros egész) $= 4 + 2 = 7-1 = 4-(-2) =$ stb.

Az alábbi feladat is igazolja, hogy a negatív szám elvételének megértésében nagy szerepe van a számok különféle alakokban való megjelenítésének.

Műveletek

A bővülő számkörre vonatkozóan kiterjesztjük a tanult műveleteket, melyek tulajdonságai öröklődnek, mélyül a műveletfogalom, tudatosulnak a műveleti algoritmusok. A különböző előjelű egészekkel, a törtekkel, tizedes törtekkel végzett műveletek akár szóban, akár írásban történnek, a tudatosulásuk gyökere a 10-es számrendszer (helyi érték, alaki érték, valódi érték) pontos értése.

A műveletek kapcsán szólni kell a 0 és 1 számok műveletekben betöltött szerepéről is. Például a 0 szorzótényezőként való szereplésének következményeit az alábbi feladatokkal mutathatjuk be:

Számoljátok ki az alábbi műveletsor eredményét!
2 · 3 · 2 · 7 · 5 · 0 · 4 · 6 = ?
Megoldás: *A szorzat eredménye 0, mivel már egyetlen 0 szorzótényező szereplése esetén is 0-t kapunk eredményül. Papír-ceruza teszt esetén kevesebb szorzótényezőt használjunk.*

Az ábrán látható 5 x 5-ös rács mezőibe egész számokat írtunk.

5	13	9	8	7
0	7	4	11	22
3	32	0	6	18
27	2	4	0	9
8	12	19	5	3

Húzz egy vastag folytonos vonalat a rácsvonalak mentén úgy, hogy az a négyzetrács egyik határoló vonalának rácspontjából induljon, és egy másik határoló vonal rácspontjába érkezzen.

A vastag vonal egyik oldalán lévő számok szorzata azonos legyen a másik oldalon lévő számok szorzatával!

Megoldás: *A vastag vonal mindkét oldalán szerepeljen a 0 szám. Több megoldás van.*

Az évek során fokozatosan tudatosul a 0 és 1 szerepe a műveletekben, a műveleti tulajdonságok ismerete, alkalmazása. Az eredmények előzetes becslése, kiszámítása, majd ellenőrzése, a becsült és a számolással kapott eredmény összevetése, az eltérések lehetséges okainak megbeszélése fejleszti a számolási készséget, az algoritmikus gondolkodást, a becslési készséget, az önellenőrzés igényét. A műveleti sorrend helyes betartása következetességet, figyelem-összpontosítást igényel.

A tanulóknak tudni kell a pozitív törtek pozitív egészekkel történő szorzását és osztását, érteniük kell az alapműveleteket és a műveleti tulajdonságokat racionális számkörben, ismerni és alkalmazni kell a helyes műveleti sorrendet.

Tegyél ki az alábbi számok közé úgy műveleti és zárójeleket, hogy a megadott eredményt kapd!

3 7 3 3 = 4 — Megoldás: 3 · (7 − 3) : 3 = 4
12 3 9 99 = 43 — Megoldás: 12 · (3 + 9) – 99 = 44

Algebra

A kibővült számkörben a számfeladatok mellett a nyitott mondatokon belül az egyenletek, egyenlőtlenségek (olyan nyitott mondatok, melyekben állítmányként az egyenlő, kisebb, nagyobb, kisebb vagy egyenlő, nagyobb vagy egyenlő szerepel) is megjelennek. Az ismeretlent általában betűk jelölik. A betűkkel való műveletvégzéskor kikötéseket fogalmazunk meg a betűk helyébe írható számokra vonatkozóan (pl. 5/b esetben a b nem lehet 0). A számok, betűk (ismeretlenek) segítségével kapott kifejezésekkel (pl. 3a; −2b; c/4) műveleteket, műveletek közötti kapcsolatokat fogalmazunk meg, és keressük a megadott számhalmazon (alaphalmaz) a megoldásokat (megoldáshalmaz vagy igazsághalmaz). Ezek a tevékenységek előkészítik a későbbi évfolyamokon már önállóan szereplő algebra témakörét.

Oldd meg az egyenletet próbálgatással az 1; 3; −2; 0; 5; −4 számokból álló alaphalmazon!

$$2a+(-4)=6$$

Gondolj egy számra! Adj hozzá 7-et! Vedd az eredmény kétszeresét! Vonj ki belőle 14-et! A kapott eredményből vond ki az eredetileg gondolt számot!
Ha jól számoltál, eredményül a gondolt számot kaptad.
Miért?

Megoldás:

A fenti állítás valódiságát igazolhatjuk, ha a pontosan követjük a matematika nyelvén az utasításokat.
Jelölje a gondolt számot x.

Az utasítások egymásutánja alapján: $(x + 7) \cdot 2 - 14 - x = x$,
és ez az egyenlőség igaz.

Relációk, függvények

Az arányossági feladatok gyakorlatilag az iskoláztatás kezdetétől jelen vannak a matematikaoktatásban. A törtfogalom, a szorzás műveletének megértése és gyakorlása, az összehasonlítás, bizonyos számelméleti kérdések, a mérés, mértékváltás, kerület, terület meghatározása mind-mind arányossági gondolkodáson alapul. Gyakran előfordul sorozattal kapcsolatos feladat is, hiszen egy-egy művelet többszöri elvégzése valamilyen szabályosságot tartalmazó számsort eredményez. A szabályosságok felismerése, ezek alkalmazása kezdettől a szabályfelismerés, a következtetés képességének fejlesztését szolgálja. Az egyéb tantárgyakban a természeti, fizikai jelenségek, folyamatok időbeli változásainak vizsgálata, az ok-okozati összefüggések matematikai leírása, a mindennapi valóság modellezése megalapozza a függvényszemlélet kialakulását. Az ilyen tankönyvi feladatoknak nagy része a rutinfeladatok közé sorolható, hiszen gyakran szövegbe öltöztetett alapvető matematika struktúrák jelennek meg, de általában nincs valódi, releváns szerepe a hétköznapi ismereteknek és tapasztalatoknak, valamint a feladatban megjelenő konkrét személyeknek, eseményeknek, jelenségeknek.

Az egyenes arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, leárazás, kamatozás, nagyítás, térkép méretaránya, területek összehasonlítása stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására.

Példák:

Egy kocsi benzintankjába 47,5 l benzin fér. 2,5 l-es kannával töltögetjük a benzint. Hány kannányit tölthetünk bele, hogy tele legyen?

8,5 kg almát vettünk 340 Ft-ért. Mennyibe kerül 12 kg ebből a fajtából? Milyen összefüggés van az alma ára és tömege között?

A coll német mértékegység, 10 coll = 254 mm. Hány mm a számítógép-képernyő átlójának hosszúsága, ha 15 colos?

Az 1 : 30 000 000 méretarányú térképen Budapest és London távolsága 7 cm. A valóságban hány km a két város távolsága légvonalban?

Egy város lakossága 15%-kal gyarapodott egy év alatt. Hányan laktak év elején a városban, ha ez a gyarapodás 7500 főt jelentett?

A fordított arányosság fogalmának alkalmazására, vizsgálatára többnyire megfelelőek az egyenes arányosságnál használt összefüggések más megfogalmazásban. A tankönyvekben, iskolai gyakorlatban leginkább a munkavégzéssel, költségen-hasznon való osztozással, adott út megtételéhez szükséges idő-sebesség kapcsolattal, adott területű téglalap oldalhosszával kapcsolatos feladatok fordulnak elő.

Egy családban málnaszörpöt tesznek el télire. Ha félliteres üvegekbe töltik, 21 üvegre van szükség. 7 dl-es üvegekből hányra lenne szükség?

Két város közötti utat az átlagosan 80 km/h sebességgel haladó gyorsvonat másfél óra alatt teszi meg. Meddig tart az út a két város között személyvonattal, ha az átlagosan 45 km-t tesz meg óránként?

4 ember 12 nap alatt tud elkészíteni egy munkát. 6 ember ugyanakkora munkatempóval hány nap alatt lenne készen?

Mekkorák lehetnek a 24 cm^2 területű téglalap oldalai, ha az oldalak mérőszáma egész szám? Foglald táblázatba!

a (cm)										
b (cm)										

A különböző jelenségek, történések vizsgálatakor a felismert, kigyűjtött adatokat többféle módon (szöveggel, formulával, táblázattal, diagramon, grafikonon) rögzíthetik a tanulók. A különböző megadásokat át tudják alakítani egymásba. Képesek helymeghatározásra gyakorlati szituációkban, konkrét esetekben. A kapcsolatok, összefüggések diagramon, grafikonon való ábrázolására leginkább a mozgással, hőmérséklet-változással, vízállással összefüggő feladatok alkalmasak ebben az életkorban.

Jelöld a számegyenesen, ha:
– melegebb van, mint −2 ºC,
– nincs hidegebb −4 ºC-nál, de fagypont alatt van a hőmérséklet!

40 ºC-os vizet hűtünk. Percenként 6 ºC-kal csökken a hőmérséklete. Készíts táblázatot és grafikont a víz hőmérsékletének változásáról! Fogalmazd meg a matematika nyelvén, hogyan függ a víz hőmérséklete (T) az eltelt időtől (t)!

Geometria

Az 1–4. évfolyam megalapozza a geometriai fogalmakat és ismereteket. Dominálnak a cselekvéshez kötött, tapasztalatokra építő eljárások. Az alsóbb évfolyamok folytatásaként a felső tagozaton is sok, a tanár által előre megtervezett tudatos tevékenység kíséri a fogalmak bevezetését, megértését, érlelését.

Az 5–8. évfolyam összekötő szakasz az alsó évfolyamok szemléletformáló, tevékenykedtető, felfedeztető munkája és a 9–12. évfolyamok deduktív gondolkodásra nevelő fejlesztő munkája között. A felső tagozatos matematika oktatásában nagy hangsúlyt kell fektetni mind a konkrét, gyakorlati tevékenységekre, a gyerekek élményeinek a tanításba való bevonására, mind pedig az absztrakt gondolkodás fejlesztésére. Bár a hangsúlyok fokozatosan eltolódnak a konkrét tevékenységtől az absztrakció felé, ez a kétféle megközelítés a felső tagozaton végig párhuzamosan jelen van.

A geometria, mérések témakörök tanításának különösen fontos feladata a felső tagozaton, hogy tanulás közben a gyerekek az absztrakt fogalmaktól mindig vissza tudjanak térni a konkrét, gyakorlati jelentéshez és természetesen fordítva, a konkrét jelenségek világában felfedezzék az általánosat. A realisztikus matematikai mozgalom szóhasználatával élve: a geometria kiváló terepe a horizontális és vertikális matematikai tevékenységek fejlesztésének.

Az alsó tagozat geometriai témakörei a felső tagozaton ugyanúgy szerephez jutnak, és az alapozó szakaszban továbbvisszük az alsó tagozatos módszereket. Változatos tapasztalatszerzés, eszközhasználat, játékosság és játék segíti a konkréttól az általános felé haladó fogalomépítést. A gyerekek gondolkodása elsődlegesen induktív, de folyamatosan előtérbe kerül az általánosítás igénye is.

A tanítás során kiemelt figyelmet kell fordítanunk a rendszeres próbálkozás, becslés, ellenőrzés képességének a fejlesztésére, a megoldások előretervezésére és a megoldási menet érthető leírására.

Az 5–6. osztály geometriai tartalmi kereteinek leírásában követjük az alsó tagozatban megismert tartalmi részterületeket. A matematikai tantervi hagyományainknak megfelelően a tanulók egy-egy fogalommal többször is találkoznak iskolás éveik során, így több esetben is látszólag az alsó tagozatos követelmények ismétlődnek. A geometriai fogalmak verbális szintjén ez így is van, ugyanakkor a geometriai fogalmak fejlődésében meghatározó manipulatív tevékenységek és képi emlékek lehetővé teszik, hogy a már ismert fogalmak magasabb absztrakciós szinten építsék tovább a tanulók matematikai tudását. A korábbi évfolyamokon szereplő négy geometriai részterület közül a tájékozódást 5–6. osztályban már nem szerepeltetjük önálló területként. Az akár oda is sorolható tudáselemek ebben az életkori sávban vagy már nem bírnak differenciáló erővel az értékelés során, vagy pedig a mérés területéhez sorolhatók.

Konstruálások

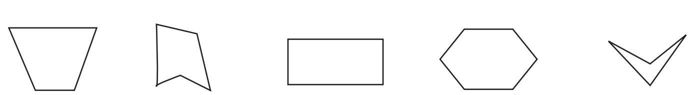
A tanulók képesek adott tulajdonságokkal rendelkező síkidomok és testek létrehozására manipulatív és képi szinten. Az ismert geometriai tulajdonságok között megjelenik a konvexitás. A tanulók képesek a síkidomokat és testeket a megismert geometriai tulajdonságok alapján csoportosítani.

A kocka és a téglatest tulajdonságait és testhálóját, valamint a háromszögek és négyszögek alapvető tulajdonságait ismerniük kell. A kör és a gömb fogalmának kialakulása, az alapvető tulajdonságok megismerése is követelmény.

A körző- és vonalzóhasználat terén követelmény, hogy a tanuló képes legyen szakaszt másolni, két vonalzóval párhuzamost és merőlegest rajzolni, szöget másolni, szakaszfelező merőlegest szerkeszteni.

A tanulók megismerik a szög fogalmát, a különböző szögfajtákat, és megtanulják a szögmérő használatát. 5–6. osztályban a pont, egyenes és szakasz fogalmakat pontosan tudják használni a tanulók.

Csoportosítsd az itt látható síkidomokat annak megfelelően, hogy konvex vagy konkáv sokszögek! Írd betűjelüket a megfelelő vonalra!



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

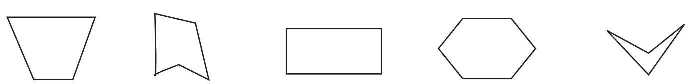
Konvex sokszögek: ....

Konkáv sokszögek: ....

Transzformációk

A tanulók képessé válnak arra, hogy megszerkesszék ismert alakzatok tengelyes tükörképét. Fel kell ismerniük a tengelyesen szimmetrikus alakzatokat. A szimmetriát fel kell ismerniük a hétköznapi életből és a művészetből ismert konkrét példákon is. Képesek a tengelyes tükrözés tulajdonságait szavakkal megfogalmazni.

A következő síkidomok közül melyiknek van tükörtengelye? Karikázd be annak a jelét, amelynek legalább egy tükörtengelye van, és húzd át annak a jelét, amelynek nincs tükörtengelye!



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Mérés

Az 5–6. évfolyamon már kibővült számkörben használhatjuk a mérőszámokat. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a mértékegységváltásnál nemcsak szomszédos, hanem távolabbi mértékegységek közötti átváltás is követelmény, viszont ezáltal már nemcsak a hétköznapi tapasztalatból ismerhető és rekonstruálható mérések szerepelnek, hanem a mértékegységváltás számos feladata tisztán számolási feladattá alakul. A kibővült számkör másrészt azzal is jár, hogy törtszámok szerepelnek a kerület-, terület- és térfogatszámításokban, valamint a négyzetre emelés mint új művelet felhasználásra talál a geometriai számításokban.

Ebben az életkori csoportban a tanulók képesek háromszögek és négyszögek kerületének, a kocka és téglatest felszínének és térfogatának kiszámítására. Nem általános képletek ismerete és alkalmazása a követelmény, hanem konkrét, ismert vagy meghatározandó számadatok esetében kell tudni elvégezni a számítást.

A tanulóknak ismerniük kell a hosszúság, a terület, a tömeg, az űrtartalom, a térfogat és az idő szabvány mértékegységeit. Képesnek kell lenniük a mértékegységek közötti átváltásokat elvégezni a milliós számkörön belül. Tudniuk kell a térfogat és az űrtartalom mértékegységeit is egymásba átváltaniuk.

Térfogat- és felszínszámítási feladatokban alkalmazzák az 5. osztályos ismereteket, meghatározzák téglatestből és kockából összeépített testek felszínét és térfogatát. 6. osztályban a téglalap területére visszavezethető területszámítási feladatokban alkalmazzák az előző évfolyamon megszerzett ismereteket, illetve megismerkednek a derékszögű háromszög és a tükrös háromszög területének, a konvex és konkáv deltoid, rombusz, négyzet területének kiszámításával.

A méréses tevékenységekhez kapcsolódóan az előzetes becslésekkel a mérések területét a hétköznapi tapasztalatokhoz kapcsoljuk.

A mérés témaköréhez kapcsolódó legegyszerűbb feladatok, amelyekben a megismert matematikai fogalmak és szimbólumok ellenőrzése történik, jellemzően a következő néhány alaptípusba tartoznak:

Mértékváltás

125 cm = ... mm
40 hl = ...cl
117 000 cm = ... km

Terület- és kerületszámítás

Számítsd ki annak a téglalapnak a kerületét, amelynek rövidebb oldala 2 cm, a hosszabbik oldala pedig 3 cm!

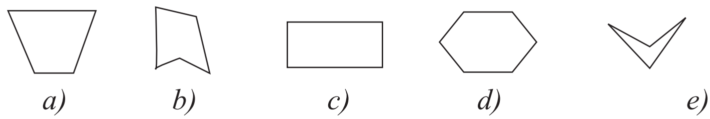
Milyen oldalhosszúságú négyzet területe 49 m^2?

Térfogatszámítás

Mekkora annak a téglatestnek a térfogata, amelynek magassága 6 cm, a másik két éle pedig 8 és 10 cm?

A mérés témakörében születő egyszerű szöveges feladatoknál a feladat megszövegezése a mérés mikéntjét vagy a méréssel nyert számokkal végzendő további műveleteket határozza meg.

Vonalzód segítségével mérd meg az alábbi síkidomok kerületét! Állítsd őket a kerületük nagysága szerinti csökkenő sorrendbe!

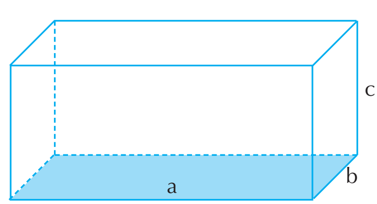


A síkidomok betűjele a kerületük szerinti csökkenő sorrendben: ....

A következő feladat esetében talán magyarázatra szorulhat, hogy miért tekintjük egyszerű, rutinszerűen megoldható szöveges feladatnak, és miért nem tartjuk realisztikus feladatnak. A kulcs abban van, hogy a feladatban szereplő számadatok és geometriai fogalmak a hétköznapi tapasztalatokkal való összevetés nélkül is elvezetnek a megoldáshoz. Nincs szükség arra, hogy matematikai szimbólumok és fogalmak segítségével modellt készítsünk a feladatban leírt szituációról, hanem elsősorban a feladat szövegében szereplő dolgokhoz keressük a megfelelő matematikai fogalmakat és műveleteket. A feladat szövegében szereplő medence méretei ugyan a hétköznapi tapasztalatokkal összevethetők, azonban belátható, hogy a megadott méretek tetszés szerint variálhatók a már ismert számkörben, és a tanulók többsége számára nem válik könnyebbé a feladat akkor, ha szabványos kerti vagy uszodai medence méretét adjuk meg.

A nemrégen átadott városi fürdő gyermekmedencéje 0,5 méter mély, 10 méter széles és 15 méter hosszú. Mennyi vízzel lehet feltölteni ezt a medencét?

További megfontolást tesz szükségessé az a kérdés, hogy vajon a feladathoz készített rajz vagy éppen a megoldás részeként elvárt rajz menynyiben módosít a feladat nehézségén. Ha az előző feladathoz vázlatrajzot is adunk, amelyen egy téglatest három éléhez adatokat rendelünk, akkor ugyanúgy a rutinszerűen megoldható szöveges feladatok kategóriájában maradunk, amikor alkalmazni kell a tanult szabályokat a matematika fogalmi keretein és szimbólumrendszerén belül.



Amennyiben a tanulóktól kérjük vázlatrajz elkészítését a feladathoz, akkor ugyanúgy nem változik a feladat besorolása a matematikai tudás alkalmazási kategóriái szerint, viszont az értékelés során az elkészült vázlatrajz minőségének megítélése, valamint a tanulói vázlatrajz és a tanulói számítások közötti esetleges disszonancia jelenthet további értékelési szempontot.

A mértékváltással kapcsolatos feladatok mint egyszerű szöveges feladatok a pusztán szimbólumok segítségével felírt feladatokhoz képest a szövegértést tehetik próbára. Elképzelhető, hogy nem ugyanazok a tanulók tudják helyesen megoldani a következő két feladatváltozatot:

1. feladatváltozat:

32 dm^3 = ... liter

2. feladatváltozat:

Adjuk meg annak az edénynek az űrmértékét, amelynek térfogata 32 dm^3!

Az iménti feladatok a mértékváltás készségének értékelési problémáit mutatják meg. A mértékváltással kapcsolatos feladatok egy része ismeret jellegű tudás alapján megoldható, más részük a számolási készség működtetését igényli. Az is lehetséges, hogy a feladatkitűzés szövegétől függ, hogy a tanuló számolási feladatként vagy inkább a mértékegységekre vonatkozó ismereteit számon kérő feladatként kezeli a mértékváltásos problémákat.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A hazai matematikaoktatásban jelentős változás volt az utóbbi évtizedben, hogy a valószínűségszámítás és statisztika témakörök bekerültek az érettségi követelmények közé, ezáltal visszahatva a középiskolai oktatásra, és jelentősen átformálva azt. Ugyanakkor érdemes azt is hangsúlyoznunk, hogy az 1960-as évektől lebonyolított nemzetközi rendszerszintű pedagógiai felmérésekben a kezdetektől jelen van már a legfiatalabb, 10 év körüli korosztály mérésében is a leíró statisztika témaköre. A hazai oktatási gyakorlatban az ide tartozó tudáselemek jórészt a matematikai neveléshez, de a természettudományi nevelés integrált tantárgyaihoz (környezetismeret, természetismeret) is kötődnek.

A tanulók – változatos feladatok és kísérletek megoldása során – olyan fogalmakat sajátítanak el, amelyek használata alapvetően megegyezik matematikai és hétköznapi kontextusban: eset, esemény, kísérlet.

Képesek a valószínűségi kísérletek különböző lehetséges kimeneteleit meghatározni és ábrázolni eseményfa és táblázat segítségével. Használják a biztos esemény és a lehetetlen esemény fogalmakat. Ismerik a tanulók az egymást kizáró és egymást nem kizáró események fogalmát. Események gyakoriságát képesek táblázatban és többféle ábratípuson – gyakorisági oszlopdiagramon, kördiagramon – megjeleníteni. Képesek meghatározni a legkisebb és legnagyobb gyakoriságú eseményt, és képesek néhány szám számtani közepét kiszámítani. Képesek rendezetlen adatsokaságot az előforduló események gyakorisága vagy más szempontok szerint rendezni lista, táblázat vagy diagram formájában.

A valószínűség fogalmát ebben az életkorban a „kedvező esemény / összes esemény" törtszám segítségével értelmezik a tanulók, és megfogalmazhatnak néhány nevezetes valószínűségi értéket is: a lehetetlen ……. valószínűsége 50-50%. Találkoznak bizonyos tévképzet kiküszöbölésére alkalmas feladattal is.

Ilyen szólhat például a következőkről: egy kétgyermekes családban (fiú-lány születésre 50-50%-os valószínűséget feltételezve) az egy-fiú – egy lány eset előfordulásának a valószínűsége nem $^1/_3$, hanem ½, vagy a kétszer feldobott pénzérme esetén egy fej és egy írás bekövetkezésének valószínűsége nem $^1/_3$, hanem ½.

A tanulók ismerik a dobókockát mint a véletlen események szemléltetőeszközét. Egyszerű kísérletekkel kipróbálják, hogy ha sokszor dobunk a dobókockával, a hat lehetséges érték nagyjából megegyező számban fordul majd elő.

Az összes lehetséges eset összeszámlálásának módszerei közül tapasztalati úton (formális képlet nélkül) ismerik a tanulók az ismétlés nélküli és ismétléses permutációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját tízeleműnél kisebb halmazok esetén; az ismétléses és ismétlés nélküli variációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját, ha a végeredmény a százas számkörben marad; az ismétlés nélküli kombinációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját legföljebb hatelemű halmazból induló részhalmazválasztás esetén.

Egy olyan példafeladatot mutatunk, amely alapvetően matematikai szimbólumokkal kitűzött feladat (tehát nem soroljuk a szöveges gyakorlófeladatok közé), és amelyben a nyelvi elemek kizárólag a feladat matematikai struktúrájának közvetítését szolgálják.

Az 1, 2 és 3 számjegyekből hány kétjegyű számot készíthetünk, ha mindegyik számjegyet csak egyszer használhatjuk föl?

Az iménti feladat szöveges rutinfeladattá minősül, ha az egyik szereplő számjegyet 0-ra cseréljük.

A leíró statisztika területén megfogalmazható követelmények egy része a függvények, relációk témakörbe is tartozik. Grafikonok, ábrák elemzése, a leggyakoribb érték leolvasása, a megfigyelhető értékek terjedelme jelenti az elvárt tudáselemeket.

A kombinatorika területe hagyományosan integrált része a magyar matematikatanításnak. Kifinomult hagyományai vannak a manipulatív, képi és szimbolikus szintű feladatkitűzésnek, amelyekben lehetőségek számát kell meghatározni. Ezeknek a tankönyvi feladatoknak a túlnyomó része a rutinfeladatok közé sorolható, hiszen gyakran szövegbe öltöztetett alapvető matematika struktúrák jelennek meg, de általában nincs valódi, releváns szerepe a hétköznapi ismereteknek és tapasztalatoknak. Tipikus feladatkitűzési stratégia ilyen esetekben az „Anna, Béla, Cili és Dani…” kezdetű feladat, ahol például négyféle, egyenrangú tevékenység társítható a gyereknevekhez. Hasonló jellegzetes megoldás, amikor a tanulók tapasztalataitól idegen témakör válik megszokottá a feladatszövegekben: vízvezetékrendszerek, telefonvonal-hálózatok, vezetői kinevezések stb.

Anna, Béla és Cili testvérek. Egyikük mindennap leviszi a szemetest, másikuk pedig meglocsolja a virágokat. Hányféleképpen lehetséges beosztaniuk a házimunkát?

A korosztályi jellemzőkből következik, hogy a kombinatorika területén várhatóan alulreprezentáltak lesznek a tanpéldák a realisztikus feladatokhoz képest. Az alapvető leszámlálási feladatok képlet nélküli megoldása általában akkor elvárható, ha a memóriából előhívható emlékképek vagy például rajzos modellek segítik a feladat megértését.