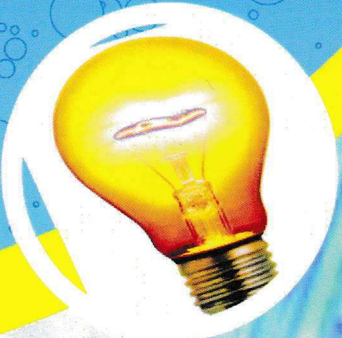
ISBN: 978-602-98559-2-0

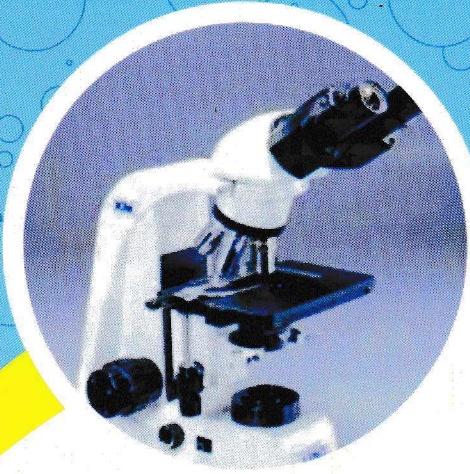
PROSIDING SEMINAR

Bidang Matematika dan Informatika

SEMINAR DAN RAPAT TAHUNAN
BIDANG ILMU MIPA 2013
BKS PTN BARAT

Universitas Lampung, 10-12 Mei 2013





FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG

Universitas Lampung, 10-12 Mei 2013

Didukung oleh:

FEI

ambivalue
it ambition & value goes together

PHENOMWORLD

PANalytical

P.T. UNITAMA ANALITIKA PERKASA

PT. Vanadia Utama

PROSIDING

SEMINAR DAN RAPAT TAHUNAN

Bidang MIPA BKS PTN Wilayah Barat Tahun 2013
Bandar Lampung, 10 – 12 Mei 2013

ISBN 978-602-98559-2-0

Diterbitkan oleh FMIPA Universitas lampung
Bandar Lampung
Penyunting: Warsito dkk.
ISBN 978-602-98559-2-0
Cetakan Pertama, Tahun 2013

DAFTAR ISI

MODEL SPASIAL BAYES DALAM PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN PEUBAH RESPON BINER

Etis Sunandi[1)], Khairil A Notodiputro[2)], Anik Djuraidah[2)]

[1)] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu*
[2)]*Jurusan Statistika, FMIPA, IPB*
[1)]*etiss18@gmail.com*

Abstrak. Model-model dalam pendugaan area kecil mengasumsikan bahwa pengaruh acak galat area saling bebas. Namun dalam beberapa kasus, asumsi ini sering dilanggar. Penyebabnya adalah keragaman suatu area dipengaruhi area sekitarnya, sehingga efek spasial dapat dimasukkan ke dalam pengaruh acak area. Rao (2003) menyatakan bahwa salah satu model dalam pendugaan area kecil yang dapat dipengaruhi oleh efek spasial adalah model Logit-Normal. Model tersebut digunakan untuk menduga proporsi melalui metode Bayes berhirarki (*Hierarchical Bayes/BB*). Tujuan pertama dari penelitian ini adalah mengembangkan metode Bayes untuk data peubah respon biner dengan menambahkan efek spasial. Tujuan selanjutnya adalah membandingkan sifat-sifat statistik penduga proporsi Logit-Normal Bayes berhirarki dengan pembobot spasial tetangga terdekat (BB1) dan model Logit-Normal Bayes berhirarki tanpa pembobot spasial (BB2). Studi kasus dilakukan pada data simulasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pengaruh spasial dapat memperbaiki pendugaan parameter pada area kecil yang diindikasikan dengan nilai menurunnya nilai *Root mean Square Error*/RMSE (29%). Bila dilihat dari rata-rata persentase bias relatif (Rbias), BB1 memiliki nilai Rbias lebih kecil yaitu sebesar 33.36%. sedangkan Rbias BB2 sebesar 44.54%. Sehingga dapat disimpulkan penduga proporsi Logit-Normal Bayes berhirarki dengan pembobot spasial tetangga terdekat lebih baik daripada penduga proporsi Logit-Normal Bayes berhirarki tanpa pembobot spasial.

Kata Kunci : Proporsi Bayes berhirarki, pendugaan area kecil, pembobot spasial

PENDAHULUAN

Pendugaan area kecil merupakan suatu metode statistika untuk menduga parameter pada suatu subpopulasi dengan jumlah contohnya berukuran kecil atau bahkan tidak ada. Metode ini memanfaatkan data dari domain besar untuk menduga peubah yang menjadi perhatian pada domain yang lebih kecil. Statistik area kecil (*small area statistic*) telah menjadi perhatian para statistisi dunia secara sangat serius sejak sepuluh tahun terakhir ini [1].

Menurut Russo *et al.* tahun 2005 [2] pendekatan klasik untuk menduga parameter area kecil didasarkan pada aplikasi model desain penarikan contoh dan dikenal sebagai metode pendugaan langsung. Kelemahan metode ini pada subpopulasi adalah tidak memiliki presisi yang memadai yang disebabkan oleh kecilnya jumlah contoh yang digunakan untuk memperoleh dugaan tersebut. Oleh karena itu, dikembangkan metode pendugaan secara tidak langsung. Tujuan dari metode pendugaan ini adalah untuk meningkatkan keefektifan ukuran contoh dan menurunkan keragaman sehingga lebih akurat.Menurut Lahiri (2008) dalam Sadik (2009) [3], metode pendugaan tidak langsung pada area kecil pada dasarnya memanfaatkan kekuatan area sekitar dan sumber data di luar area yang statistikanya ingin diperoleh.

Model-model dalam pendugaan area kecil mengasumsikan bahwa pengaruh acak galat area saling bebas. Namun dalam beberapa kasus, asumsi ini sering dilanggar.

Penyebabnya adalah keragaman suatu area dipengaruhi area sekitarnya, sehingga efek spasial dapat dimasukkan ke dalam pengaruh acak. Efek spasial merupakan hal yang lazim terjadi antara satu area dengan area yang lain, ini berarti bahwa area yang satu mempengaruhi area lainnya. Dalam statistika, model yang dapat menjelaskan hubungan antara suatu area dengan area sekitarnya adalah model spasial

Penelitian ini membentuk model spasial Bayes pada pendugaan daerah kecil dengan model Logit-Normal. Penelitian ini akan menggunakan peubah respon yang menyebar menurut Binomial (Logit) dan pengaruh area yang menyebar menurut distribusi Normal. Hal ini yang mendasari pemakaian Model Logit-Normal.

Penelitian ini bertujuan mengembangkan metode Bayes berhirarki khusus untuk data peubah respon biner dengan menambahkan pengaruh spasial. Tujuan selanjutnya adalah membandingkan sifat-sifat statistik penduga proporsi Logit-Normal Bayes berhirarki dengan pembobot spasial tetangga terdekat (BB1) dan model Logit-Normal Bayes berhirarki tanpa pembobot spasial (BB2)

METODOLOGI PENELITIAN

Studi kasus dilakukan pada data simulasi. Simulasi digunakan untuk mengetahui berbagai karakteristik pendugaan pada beberapa pembobot spasial yang berbeda pada Model Logit-Normal Bayes berhirarki berdasarkan pendugaan area kecil. Penelitian ini menggunakan bahasa pemograman R 2.11.2.

Model Spasial Otoregresif Bersyarat (Conditional Autoregressive/ Car)

Menurut Banerjee *et al.* (2004) [4], CAR didefinisikan sebagai model spasial yang menyebar Normal. Model CAR pengaruh acak v_i bergant[illegible] pengaruh area lain. Untuk [illegible] bersama $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_m)$ [illegible] $\boldsymbol{v} \sim N_m(\mathbf{0}, (I - \rho Q)^{-1} M)$dengan $\boldsymbol{v}$merupakan vector pengaruh acak [illegible] adalah matriks pembobot spasi[illegible] menunjukkan hubungan area-*i* [illegible] area-*l*, dan M yaitu Matriks [illegible] ragam pengaruh acak [illegible] $\mathrm{diag}(\sigma_{v,1}^2, \dots, \sigma_{v,}^2)$. Matriks $(I - [illegible]$ bersifat simetriks dan defini[illegible] Sementara itu korelasi spasi[illegible] diperoleh dari $\rho = \frac{1}{\lambda_1}$; $-1 \leq [illegible] \leq 1$. Menurut Rao 2003 [5], λ_1 merupakan [illegible] ciri terbesar matriks pembobot spasial [illegible] Jika $\rho = 0$, maka model [illegible] diasumsikan pengaruh acak area [illegible] bebas.

Beberapa tipe pola pe[illegible] matriks pembobot spasial [illegible] Pembobot yang digunakan [illegible] penelitian ini adalah tetangga [illegible] Matriks ini mempunyai aturan [illegible] berikut :

$$Q_{il} = \begin{cases} 1, |r_{il}| \geq 0.5 \\ 0, lainnya \end{cases}$$

dengan r_{il} adalah korelasi antara area-*i* dan area-*l*.

Model Logit-Normal

Rao (2003) [5] mendefinisikan [illegible] Logit-Normal melalui Bayes berhirarki sebagai berikut:

$$y_i | p_i \sim ind\ Binomial(n_i, p_i)$$
$$\boldsymbol{\theta} = logit(\boldsymbol{p}) = X'\beta + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \sim N_m(\mathbf{0}, I\sigma_v^2)$$
$$\beta dan \sigma_v^2 saling bebas f(\beta) \propto 1$$
$$\frac{1}{\sigma_v^2} \sim gamma(a, b)\ ; a \geq 0, b > 0$$

Pendugaan parameter menggunakan BAyes berhirarki tidak dapat diselesaikan secara analitik. Guna memper[illegible] dibutuhkan pendekatan numerik [illegible] MCMC adalah solusinya. [illegible] MCMC yang terkenal adalah [illegible] bersyarat. Menurut Rao (2003) [5] [illegible] bersyarat untuk model ini adalah

1. $[\beta | p, \sigma_v^2, y] \sim N_p[\beta^*, \sigma_v^2 (\sum_{i=1}^m x_i x'_i)^{-1}]$
2. $[\sigma_v^2 | \beta, p, y] \sim Gamma\left[\frac{m}{2} + a, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (\theta_i - x'_i\beta)^2 + b\right]$ (1)
3. $f(p_i | \beta, \sigma_v^2, y) \propto h(p_i | \beta, \sigma_v^2) k(p_i)$

Pendugaan parameter β dan σ_v^2 dibangkitkan secara langsung dari (i) dan (ii). Parameter β^* pada bagian (i) persamaan (1) dinyatakan oleh$\beta^* = (\sum_{i=1}^{m} x'_i x_i)^{-1}(\sum_{i=1}^{m} x'_i\, \theta_i)$. Sementara itu, bagian (iii) persamaan (1) dinyatakan sebagai:

a) $f(p_i|\beta,\sigma_v^2,y) \propto h(p_i|\beta,\sigma_v^2)k(p_i)$

b) $h(p_i|\beta,\sigma_v^2) = \frac{\partial\theta_i}{\partial p_i} exp\left\{-\frac{(\theta_i - x_i'\beta)^2}{2\sigma_v^2}\right\}$

c) $k(p_i) = p_i^{y_i}(1-p_i)^{n-y_i}$

Nilai proporsi Bayes berhirarki akan diduga melalui simulasi *Gibbs Sampling* Metropolis-Hasting (M-H). Sampel gibbs MCMC dapat dibangkitkan langsung dari (c) pada persamaan (2). Adapun algoritma M-H adalah sebagai berikut:

1. Diambil sebarang nilai p_i^* dari sebaran uniform (0,1).
2. Dibangkitkan$\boldsymbol{\theta} \sim indN(X'\beta,((I-\rho Q)^{-1}M))$, lalu dicari nilai$p_i^{(0)} = g^{-1}(\theta_i)$.
3. Dihitung dengan $r(p_i^{(k)},p_i^*) = min\left\{ {k(p_i^*)}/{k(p_i^{(k)})}, 1\right\}$; $k = 0,1,\dots,D$
4. Dibangkitkan u dari distribusi uniform (0,1).
5. Dipilih $p_i^{(k+1)} = p_i^*$ jika $u \le r(p_i^{(k)},p_i^*)$.
6. Diulangi langkah 3 sampai diperoleh D sampel.

Setelah dilakukan simulasi M-H, diperoleh barisan penduga proporsi sebagai berikut $\left\{p_1^{(k)},\dots,p_m^{(k)}; k = 1,\dots,D\right\}$. Kemudian besaran posterior yang sedang diamati dapat dihitung. Penduga proporsi Bayes berhirarki (p_i^{BB}) adalah $p_i^{BB} \approx \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{D} p_i^{(k)} = p_i^{(.)}$. Sedangkan ragam penduga proporsi Bayes berhirarki ($\tilde{p}_i^{BB}$) adalah

$$V(p_i^{BB}|\hat{p}) = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{D}\left(p_i^{(k)} - p_i^{(.)}\right)^2$$

Di sisi lain, sifat-sifat statistik proporsi Bayes berhirarki yang diduga adalah MSE dan bias. MSE merupakan suatu besaran untuk mengukur keragaman penduga area kecil. Sedangkan, bias merupakan selisih antara penduga dengan parameternya. Semakin kecil nilai MSE dan bias, maka penduga parameter akan semakin baik. Secara matematika dituliskan sebagai berikut:

$$Bias(p_i^{BB}) = \frac{1}{D}\sum_{q=1}^{D}[p_i^{(q)} - p_i^{(BB)}]$$

$$MSE(p_i^{BB}) = \frac{1}{D}\sum_{q=1}^{D}[p_i^{(q)} - p_i^{(BB)}]^2$$

Sebagai ukuranakurasi dan validasipendugaan proporsi Bayes berhirarki digunakan persentase biasrelatif dan akar kuadrat tengah galat (*Root Mean Square Error*/RMSE). RMSE diartikansebagai akar perbedaanrata-ratajumlah kuadrat proporsi sebenarnyadan pendugnya. Jadi, pendugaan yangpalingakuratakan mengarahkenilai RMSE terkecil menuju nol. Sedangkan persentase bias relatif untuk setiap area diperoleh dari

$$RBias(p_i^{BB}) = \frac{Bias(p_i^{BB})}{p_i} \times 100\%$$

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

$y_i|p_i \sim ind\ Binomial(n_i,p_i)$

$\boldsymbol{\theta} = logit(\boldsymbol{p}) = X'\beta + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \sim N_m(\boldsymbol{0},(I - \rho Q)^{-1}M)$

$\beta dan \sigma_v^2 saling bebas f(\beta)$

$\propto 1\ \frac{1}{\sigma_v^2} \sim gamma(a,b)$; $a \ge 0, b > 0$

Model Logit-Normal Dengan Pengaruh Spasial

Perbedaan yang mendasar antara model Logit-Normal dengan pengaruh spasial dan model Logit-Normal tanpa pengaruh spasial terletak pada matriks varian covarian pengamatan *ke-i*.

Model Logit-Normal dengan pengaruh spasial yang digunakan dalam pendugaan proporsi area-*i* melalui metode Bayes berhirarki adalah sebagai berikut:

Seperti Model Logit-Normal, Model Logit-Normal dengan spasial diduga melalui pembangkitan sampling MCMC. Prosedur MCMC yang terkenal adalah Gibbs bersyarat. Menurut Sunandi, dkk (2011) [6] untuk model ini adalah

i. $[\beta|p,\sigma_v^2,y] \sim N_p[\beta^*,\sigma_v^2(\sum_{i=1}^m x_i x'_i)^{-1}]$

ii. $[\sigma_v^2|\beta,p,y] \sim Gamma\left[\frac{m}{2}+a, \frac{1}{2}[(\boldsymbol{\theta}-X'\beta)'(\boldsymbol{\theta}-X'\beta)]+b\right]$ (3)

iii. $f(p_i|\beta,\sigma_v^2,y) \propto h(p_i|\beta,\sigma_v^2)k(p_i)$

Pendugaan parameter β dan σ_v^2 dibangkitkan secara langsung dari (i) dan (ii). Parameter β^* pada bagian (i) persamaan (1) dinyatakan oleh $\beta^* = (\sum_{i=1}^m x'_i x_i)^{-1}(\sum_{i=1}^m x'_i\,\theta_i)$. Sementara itu, bagian (iii) persamaan (3) dinyatakan sebagai

a. $f(p_i|\beta,\sigma_v^2,y) \propto h(p_i|\beta,\sigma_v^2)k(p_i)$

b. $h(p_i|\beta,\sigma_v^2) = \frac{\partial\theta_i}{\partial p_i} exp\left\{-\frac{1}{2d_{ii}}[\theta_i - x_i'\beta]^2\right\}$ (4)

c. $k(p_i) = p_i^{y_i}(1-p_i)^{n-y_i}$

dengan d_{ii} *adalah diagonal matriks* $((I-\rho Q)^{-1}M)$ pada baris dan kolom ke-*i*. Nilai proporsi Bayes berhirarki akan diduga melalui simulasi *Gibbs Sampling* Metropolis-Hasting (M-H). Sampel gibbs MCMC dapat dibangkitkan langsung dari *(c) pada persamaan (4). Adapun* algoritma M-H adalah sebagai berikut:

1. Diambil *sebarang nilai* p_i^* *dari sebaran* uniform (0,1).
2. Dibangkitkan $\boldsymbol{\theta} \sim indN(X'\beta,((I-\rho Q)^{-1}M))$, lalu dicari nilai $p_i^{(0)} = g^{-1}(\theta_i)$.
3. Dihitung $r(p_i^{(k)},p_i^*) = min\left\{{k(p_i^*)}/{k(p_i^{(k)})},1\right\}$; $k = 0,1,\ldots,D$
4. Dibangkitkan u dari distribusi uniform (0,1).
5. Dipilih $p_i^{(k+1)} = p_i^*$ jika $u \le r(p_i^{(k)},p_i^*)$.
6. Diulangi langkah 3 sampai diperoleh D sampel.

Setelah dilakukan simulasi M-H, diperoleh barisan penduga proporsi sebagai berikut $\{p_1^{(k)},\ldots,p_m^{(k)}; k = 1,\ldots,D\}$. Kemudian besaran posterior yang sedang diamati dapat dihitung. Penduga proporsi Bayes berhirarki (p_i^{BB}) adalah $p_i^{BB} \approx \frac{1}{D}\sum_{k=1}^D p_i^{(k)} = p_i^{(.)}$. Sedangkan ragam penduga proporsi Bayes berhirarki ($\tilde{p}_i^{BB}$) adalah

$$V(p_i^{BB}|\hat{p}) = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^D\left(p_i^{(k)} - p_i^{(.)}\right)^2 \quad (5)$$

Sifat-Sifat Statistik Model Logit-Normal Bayes Berhirarki Pada Data Simulasi

Simulasi dirancang untuk mengetahui dan mengevaluasi sifat-sifat statistik *penduga parameter dengan beberapa* pembobot spasial yang berbeda pada model Logit-Normal Bayes berhirarki. Simulasi diulang sampai 100 kali dengan pembangkitan sampel Metropolis-Hasting sebanyak 500 sampel. Hasil simulasi disajikan pada Tabel 1. Meliputi model BB1 dan BB2. Nilai rata-rata RMSE BB1 cenderung mengecil dibandingkan dengan rata-rata RMSE BB2. Artinya, pengaruh *spasial dapat memperbaiki pendugaan* parameter pada area kecil yang diindikasikan dengan menurunnya nilai RMSE tersebut.

Tabel 1 Rata-rata statistik penduga proporsi simulasi model Logit-Normal Bayes berhirarki

Model	Rata-rata			
	Bias	*Ragam*	*RMSE*	*Rbias(%)*
BB1	0.06	0.07	0.29	33.36
BB2	0.09	0.07	0.30	44.54

Bila dilihat dari rata-rata persentase bias relatif (Rbias), BB1 memiliki nilai Rbias terkecil yaitu sebesar 33.36%. Artinya, jika menggunakan model BB1 rata-rata penduga 33.36% lebih besar dari parameternya. Sedangkan jika menggunakan model BB2 rata-rata penduga 44.54% lebih besar dari parameternya.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa pengaruh spasial dapat memperbaiki pendugaan parameter pada area kecil yang diindikasikan dengan nilai menurunnya nilai *Root mean Square Error*/RMSE (29%). Bila dilihat dari rata-rata persentase bias relatif (Rbias), BB1 memiliki nilai Rbias lebih kecil yaitu sebesar 33.36%. sedangkan Rbias BB2 sebesar 44.54%. Sehingga dapat disimpulkan penduga proporsi Logit-Normal Bayes berhirarki dengan pembobot spasial tetangga terdekat lebih baik daripada penduga proporsi Logit-Normal Bayes berhirarki tanpa pembobot spasial.

KESIMPULAN

Hasil penelitian menyimpulkan bahwa model Logit-Normal Bayes berhirarki dengan pembobot spasial tetangga terdekat, secara umum memiliki dugaan ragam dan relative bias yang terkecil jika dibandingkan dengan model Logit-Normal Bayes berhirarki tanpa pembobot spasial. Sehingga dapat diartikan bahwa model Logit-Normal Bayes berhirarki dengan pembobot spasial adalah model terbaik.

DAFTAR PUSTAKA

L.O.A. Rahman. (2008). Aproksimasi Bootstrap Parametrik pada Pendugaan Selang Prediksi Statistik Area Kecil [tesis]. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor. S.

C. Russo C, M. Sabbatini, R. Salvatore. (2005). General Linear Models in Small Area Estimation: *an assessment in agricultural surveys.*

K. Sadik.(2009). Metode Prediksi Tak-Bias Linear Terbaik dan Bayes Berhirarki untuk Pendugaan Area Kecil Berdasarkan Model State Space [disertasi]. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.

Banerjee, B.P. Carlin, A.E. Gelfan.(2004). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press Company.

J.N.K Rao.(2003). *Small Area Estimation.* New York: John Wiley and Sons.

E. Sunandi, K.A. Notodiputro, A. Djuraidah. (2011). Model Spasial Bayes dalam Pendugaan Area Kecil dengan Peubah Respon Biner (kasus : pendugaan proporsi keluarga miskin Di kabupaten jember jawa timur) [tesis]. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.

ISBN 978-602-98559-2-0

9 786029 855920

Sertifikat

BADAN KERJASAMA
PERGURUAN TINGGI NEGERI WILAYAH BARAT (BKS-B)
BIDANG ILMU MIPA

BKS PTN Barat
Bidang Ilmu MIPA

diberikan kepada:

Etis Sunandi, S.Si, M.Si

sebagai: **Pemakalah**

Pada kegiatan:
SEMINAR NASIONAL DAN RAPAT TAHUNAN BIDANG ILMU MIPA
Tema: **"Peran Ilmu MIPA dalam Pemanfaatan Sumber Daya Alam untuk Menunjang Percepatan Pembangunan Ekonomi Indonesia".**

Di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, 10-12 Mei 2013

BKS PTN Barat
Koordinator Bidang MIPA,

Dr. Sutarman, M.Sc
NIP.196310261991031001

Ketua Panitia

PANITIA
SEMIRATA MIPA 2013
Fakultas MIPA
Universitas Lampung

Prof. Sutopo Hadi,M.Sc.,Ph.D
NIP. 197104151995121001

FEI PANalytical PHENOMWORLD ambivalue
if ambition & value goes together
PT. UNITAMA ANALITIKA PERKASA
PT. Vanadia Utama