



Estimación de variables de estado (LA y LC) en sistemas de control

Estimation of state variables (LA and LC) in control systems

Fernando Mesa ^{1a}, Rogelio Ospina-Ospina ², Germán Correa-Vélez ^{1b}

¹ Matemáticas aplicadas y educación - GIMAE, Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. Orcid: ^a 0000-0002-3418-5555, ^b 0000-0002-5244-3095.

Correos electrónicos: ^a femesa@utp.edu.co, ^b gecove@utp.edu.co

² Ciencia de Materiales Biológicos y Semiconductores, Departamento de Física, Universidad Industrial de Santander, Colombia. Orcid: 0000-0002-7392-8059. Correo electrónico: rospinao@uis.edu.co

Recibido: 5 junio, 2020. Aceptado: 18 septiembre, 2020. Versión final: 4 noviembre, 2020.

Resumen

En este artículo inicialmente se presentó la formulación para la estimación de variables de estado en lazo cerrado y lazo abierto en un sistema de control; a continuación, se mostraron y explicaron cuáles son las ventajas y desventajas que podrían presentarse al implementar alguno de los dos modelos. Finalmente, como aplicación, se estudió el caso de un sistema hidráulico con el cual se concluye sobre la importancia de realizar estimación sobre las variables de estado de un sistema que se desea controlar.

Palabras clave: control; convergencia; dinámica; error; estados; estimación; lazo; observador; observabilidad; regulador; tiempo.

Abstract

In this article, the formulation for the estimation of state variables in closed loop and open loop in a control system was initially presented; Next, the advantages and disadvantages that could arise when implementing either of the two models were shown and explained. Finally, as an application, the case of a hydraulic system was studied with which it is concluded on the importance of estimating the state variables of a system that it is desired to control.

Keywords: control; convergence; dynamics; error; states; estimation; loop; observer; observability; regulator; time.

1. Introducción

Cuando se realiza el diseño de controladores es importante saber que en la mayoría de los sistemas no se tiene acceso completo a los estados $x(t)$, por lo que en estos casos siempre se tendrá un error o incertidumbre en el conocimiento de x . Por lo general, solo se puede realimentar la información que se desarrolla a partir de las mediciones que entregan los sensores del sistema y diseñar un controlador que realimente la salida de la forma $u = Kx$, $u = \tilde{K}y$ [1].

El enfoque alternativo que se propone es desarrollar una réplica del sistema dinámico que proporcione una estimación de los estados del sistema en función de la medida de la salida del sistema. A este enfoque se le llama principio de separación, que consiste en desarrollar la estimación de los estados $x(t)$, notada como $\hat{x}(t)$.

Inicialmente se asume el modelo del sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & X(0) &\rightarrow \text{Desconocido} \\ y &= C_y x \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

A, B y C_y son conocidas y posiblemente variantes en el tiempo. $u(t)$ es conocido y $y(t)$ corresponde a las salidas medibles [2].

El objetivo es entonces desarrollar un sistema dinámico donde los estados

$$\hat{x}(t) = x(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

A continuación, se plantean y analizan dos enfoques como alternativas de solución, el estimador en lazo abierto y el estimador en lazo cerrado [3].

2. Estimador en lazo abierto

Debido a que se conocen las matrices de la planta (A, B, C_y) y las entradas ($u(t)$), para el caso del estimador en lazo abierto se puede simplemente realizar una implementación del observador en paralelo con el sistema como se muestra en la Figura 1.

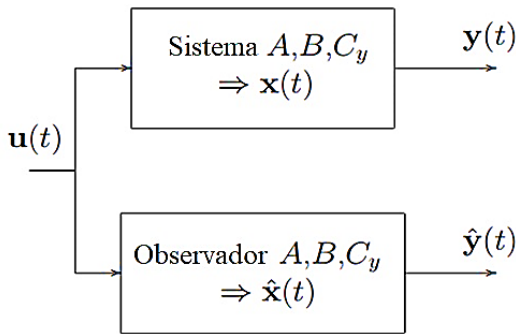


Figura 1. Estimador de lazo abierto.
Fuente: adaptado de [2].

Para analizar este caso, se define inicialmente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

Se busca que el error de estimación dado por $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ sea lo más pequeño posible (es decir, $\tilde{x}(t) = 0$) pero el mayor problema que se tiene es que se desconocen los estados iniciales del sistema ($x(0) \rightarrow$ Desconocidos)

Restando las ecuaciones previamente definidas se obtiene una expresión (ecuación diferencial) para el error de estimación $\tilde{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = A(x - \hat{x}) \rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) \quad (4)$$

Cuya solución $\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}(0)$ otorga el error de estimación en términos del error inicial.

De lo anterior se puede concluir que para garantizar que $\tilde{x}(t) = 0, \forall t \geq 0$ el estado inicial $x(0) = 0$. Además, si A es estable, entonces $\tilde{x} \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. pero los errores en la dinámica de la estimación están completamente determinados por la dinámica de bucle abierto del Sistema (valores propios de A) [4], [5]. En ese orden de ideas la implementación de un estimador en lazo abierto no sería una buena idea si no se cumplen ciertos requisitos tales como esperar a que la salida se encuentre en estado estacionario, obtener la ganancia como cociente entre los cambios y tomar las medidas según las constantes de tiempo.

3. Estimador en lazo cerrado

La solución al anterior problema es entonces usar la información adicional que proporciona el lazo cerrado [6], así se puede verificar en qué medida la salida estimada coincide con la salida real, comparando $y = C_y x$ con $\hat{y} = C_y \hat{x}$, donde el error en la salida está dado por [7]:

$$\tilde{y} = y - \hat{y} = C_y \tilde{x} \quad (5)$$

La Figura 2 muestra el diagrama de bloques para el estimador en lazo cerrado, lo que propone es poder tener una realimentación de \tilde{y} para mejorar la estimación de los estados [8].

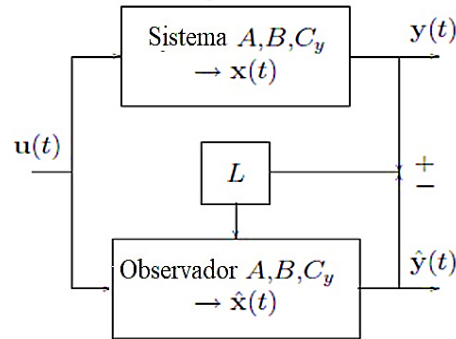


Figura 2. Estimador de lazo cerrado.
Fuente: adaptado de [2].

La forma básica del estimador es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\tilde{y}(t) \\ \hat{y}(t) &= C_y \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde L es una matriz de ganancia seleccionada y ajustada según los criterios de diseño. A continuación, se realiza el mismo análisis hecho para el estimador en lazo abierto.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{d}{dt}(x - \hat{x}) \\ &= [Ax + Bu] \\ &\quad - [A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})] \\ &= A(x - \hat{x}) - L(Cx - C_y\hat{x}) \\ &= A\tilde{x} - LC_y\tilde{x} = (A - LC_y)\tilde{x} \end{aligned} \quad (7)$$

Por lo tanto, la dinámica en el error de estimación para el estimador en bucle cerrado es $\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC_y)\tilde{x}$, y su solución es de la forma $\tilde{x}(t) = e^{(A-LC_y)t}\tilde{x}(0)$. Se puede entonces, seleccionar una ganancia L tal que mejore o acelere la convergencia del error de estimación. El problema ahora se convierte en garantizar la observabilidad del sistema [9], [10].

4. Aplicación

El sistema hidráulico que se muestra en la Figura 3 es impulsado por una bomba de presión constante [11]. En el tiempo $t = 0$ el tanque está vacío y la bomba está encendida a una presión constante de $10 \frac{Ns}{m^2}$. La inercia del fluido acumulado I y los elementos de resistencia R_1 se utilizan para tener en cuenta las caídas de presión en la tubería. El tanque se modela como una capacitancia de fluido C , y la válvula de salida se modela como una resistencia lineal. Se suponen los siguientes valores: $I = 0.2 \frac{Ns^2}{m^5}$, $R_1 = \frac{1 Ns}{3 m^5}$, $R_2 = 2 \frac{Ns}{m^5}$ y $C = \frac{1m^5}{N}$.

El sistema de espacio de estados y la ecuación de salida para el flujo de entrada son [12]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{P}_C \\ \dot{Q}_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{I} & -\frac{R_1}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_C \\ Q_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} [P_{in}(t)] \\ Q_I &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} P_C \\ Q_I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

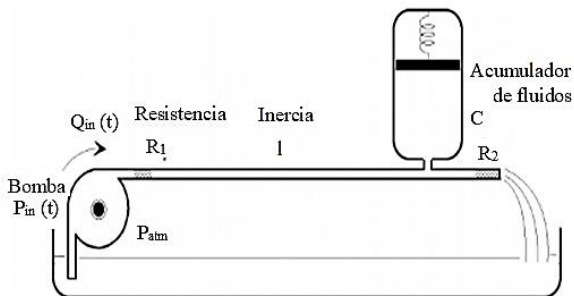


Figura 3. Sistema Hidráulico. Fuente: [2].

Evaluando los parámetros propuestos se tiene que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{P}_C \\ \dot{Q}_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -5 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_C \\ Q_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} [P_{in}(t)] \\ Q_I &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} P_C \\ Q_I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Además, se asume que las condiciones iniciales del sistema no son conocidas y que el sistema que se tiene es estable. Inicialmente se verifica que el sistema sea observable. Esto se hace obteniendo el rango de la matriz de observabilidad el cual debe ser completo [13].

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} C_y \\ C_y A \end{bmatrix}$$

Haciendo uso de los estimadores de lazo abierto y lazo cerrado, donde el estado inicial se desconoce y tomando $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, se tiene lo siguiente:

Para el estimador en lazo abierto la dinámica está dada por las ecuaciones [14].

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} &= C_y\hat{x} \end{aligned} \quad (10)$$

Y para el estimador en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L\tilde{y} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ &= (A - LC_y)\hat{x} + Bu + Ly \\ \hat{y} &= C_y\hat{x} \end{aligned} \quad (11)$$

Sistema dinámico con polos $\lambda_i(A - LC_y)$ que toma las medidas de salida de la planta como una entrada y genera una estimación de x .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= C_y x \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} &= C_y \hat{x} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} x(0) \\ \hat{x}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Para el caso en lazo abierto (Figura 4) se observa que para las variables de estado estimadas el error de estimación converge a cero, pero lo hace de una manera muy lenta, lo que explica que no sería una solución óptima [15].

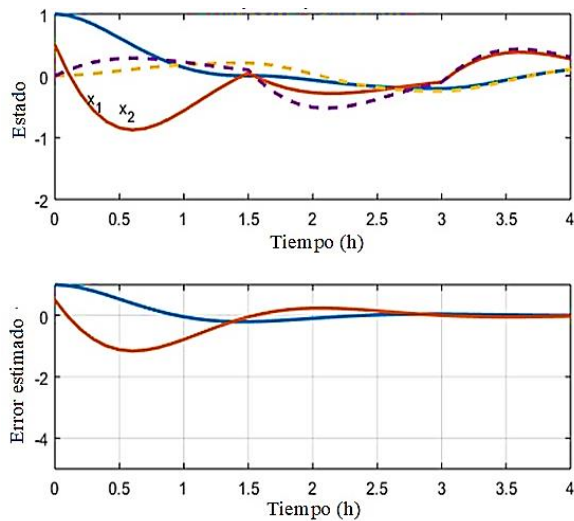


Figura 4. Estimador de lazo abierto.

Para el estimador en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} &= (A - LC_y)\hat{x} + Bu + LC_yx \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC_y & A - LC_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u$$

Con el estimador en lazo cerrado (Figura 5) se obtiene una mejor respuesta del sistema para las variables de estado obtenidas [16].

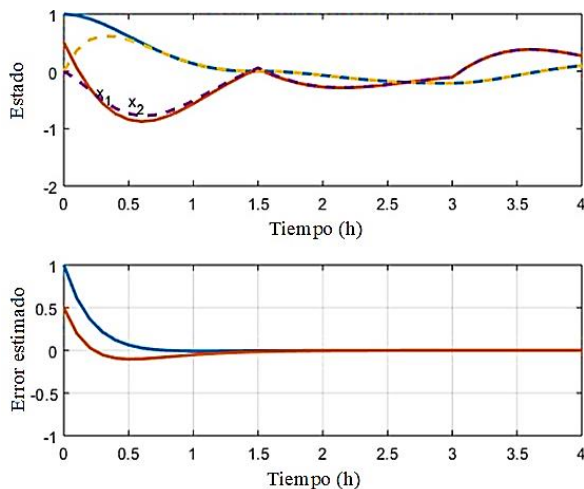


Figura 5. Estimador de lazo cerrado.

5. Conclusiones

La formulación para el estimador de estados tiene una gran relación con la que se realiza cuando se quiere realizar el control (regulador) sobre un sistema, cuando se desea que el sistema se comporte de acuerdo con la dinámica de unos polos deseados. De allí surge el nombre

de problemas duales para este tipo de casos, donde se quiere obtener un polinomio en lazo cerrado que cumpla con los criterios de controlabilidad y observabilidad.

La estimación de estados juega un papel muy importante cuando se quiere realizar el diseño de un sistema de control. Generalmente en los sistemas o procesos industriales no se conocen sus variables de estado y éstas además de no estar identificadas podrían tener ruido o presentar algún tipo de perturbaciones, se vuelve entonces una necesidad identificar dichas variables de una manera óptima para luego realizar el diseño del controlador.

La convergencia se presenta mucho más rápido en el caso del estimador de lazo cerrado, lo cual orienta a elegir este tipo de controladores ya que la realimentación mejora el proceso del control obteniendo una solución más adecuada.

Referencias

- [1] Y. Levinbook, T. F. Wong, "State Estimation With Initial State Uncertainty", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, no. 1, pp. 235-254, 2008, doi: 10.1109/TIT.2007.911171
- [2] A. R. Plummer, N. D. Vaughan, "Robust adaptive control for hydraulic servosystems", *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, vol. 118, pp 237-244, 1996, doi: 10.1115/1.2802309
- [3] D. Rowell, "Time-domain solution of LTI state equations", 2002. [En línea]. Disponible en: <http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/StateSpaceResponse.pdf>.
- [4] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control system design*. New Jersey, NJ, USA: Prentice Hall, 2001.
- [5] A. González, S. Morales, "Control de Velocidad de Aerogenerador mediante Realimentación de Variables de Estado", *Ciencia e Ingeniería*, vol. 38, no 2, pp. 123-130, 2017.
- [6] A. Rouhani, A. Abur, "Tracking the machine states using a linear phasor estimator assisted dynamic state estimator", en *IEEE PES General Meeting*, 2014, pp. 1-5, doi: 10.1109/PESGM.2014.6939364
- [7] J. Baranowski, A. Tutaj, "State and parameter estimation in a hydraulic system-moving horizon approach", en *13th International Power Electronics and*

Motion Control Conference, 2008, pp. 1432-1439, doi: 10.1109/EPEPMC.2008.4635469

[8] D. L. Albarracín, “Control de sistemas multivariables aplicado a un generador eólico conectado a un sistema de potencia”, trabajo de pregrado, Universidad Tecnológica de Pereira, 2013.

[9] S. Joshi, “Stability regions for multiloop LQ-regulated systems with state estimators”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, no. 12, pp. 1151-1153, 1986, doi: 10.1109/TAC.1986.1104198

[10] S. Markov, N. Kyurkchiev, A. Iliev, A. Rahnev, “A note on the log-logistic and transmuted log-logistic models. Some applications”, *Dynamic Systems and Applications*, vol. 27, no. 3, pp. 593-607, 2018, doi: 10.12732/dsa.v27i3.9

[11] O. L. Roa, G. A. Contreras, L. V. Medina, H. Vega, “Modelado matemático, simulación, análisis y control de un sistema hidráulico interactivo-tres tanques en serie”, *Revista de Tecnología*, vol. 16, no. 1, pp. 77-98, 2018, doi: 10.18270/rt.v16i1.2318

[12] E. Alcorta García, P. M. Frank, “Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis: A survey”, *Control Engineering Practice*, vol. 5, no. 5, pp. 663-670, 1997, doi: 10.1016/S0967-0661(97)00048-8

[13] J. J. Climenta, V. Herranz, C. Perea, “Linear system modelization of concatenated block and convolutional codes”, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 429, no. 5-6, pp. 1191-1212, 2008, doi: 10.1016/j.laa.2007.09.006.

[14] J. Davila, L. Fridman, A. Levant, “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1785-1789, 2005, doi: 10.1109/TAC.2005.858636

[15] K. Narendra, A. Annaswamy, *Stable adaptive systems*. Nueva York, NY, USA: DOVER PUBLICATION INC., 1989.

[16] A. Aguado, A. Cipriano, “Identificación en lazo cerrado y ajuste de reguladores mediante algoritmos genéticos”, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 6, no. 1, pp. 20-30, 2009, doi: 10.1016/S1697-7912(09)70073-1