OPEN ACCESS
MES: *Journal of Mathematics Education and Science*
ISSN: 2579-6550 (online) 2528-4363 (print)
Vol. 6 No. 1, Oktober 2020

Situs web:
https://jurnal.uisu.ac.id/index.php/mesuisu
Email: jurnalmes@fkip.uisu.ac.id

ANALISIS DAN PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA PADA RANGKAIAN LISTRIK ORDE DUA

Fitrah Sari Wahyuni Harahap
Universitas Potensi Utama, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20241

Abstrak. *Fenomena fisik rangkaian listrik menghasilkan model matematika dan solusi untuk penyelesaiannya. Rangkaian listrik orde dua adalah rangkaian listrik yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial orde dua. Rangkaian tersebut diantaranya rangkaian LC seri dan RLC seri. Penelitian ini memaparkan analisis dan penyelesaian dari model matematika pada rangkaian listrik LC seri dan RLC seri menggunakan persamaan diferensial orde dua dengan solusi homogen maupun tak homogen.*

Kata Kunci: *model matematika, persamaan diferensial orde dua, rangkaian LC, rangkaian RLC.*

Abstract. *The physical phenomena of electrical circuits produce mathematical models and solutions for their solutions. Second order electrical circuits are electrical circuits that can be modeled with second order differential equations. These include the series LC circuit and the RLC circuit. This study describes the analysis and solution of mathematical models in series LC and series RLC electrical circuits using second-order differential equations with homogeneous or non-homogeneous solutions.*

***Keywords*:** *mathematical models, second order differential equations, LC circuits, RLC circuits.*

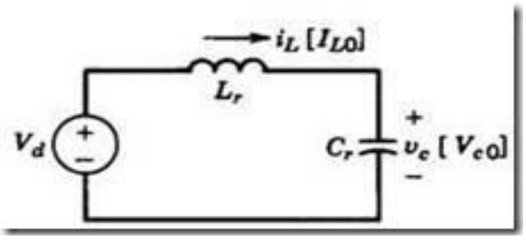
PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang dapat mengidentifikasi suatu fenomena kedalam bentuk pemodelan matematika. Pemodelan matematika sangat sering digunakan untuk memodelkan fenomena fisika sehingga dapat dijelaskan. Tidak terkecuali dengan fenomena yang terjadi pada rangkaian listrik. Pada prinsipnya rangkaian listrik dapat dimodelkan kedalam bentuk persamaan diferensial orde 2. Model persamaan diferensial orde 2 terdiri dari 4 tipe, yaitu :

1. $Tipe\ \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$
2. $Tipe\ \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x\frac{dy}{dx}\right)$
3. $Tipe\ a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c.y = 0$
4. $Tipe\ a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

Rangkaian LC

Rangkaian LC merupakan rangkaian elektronik sederhana yang terdiri dari tegangan sumber V_d, induktor L dan kapasitor C. Semua komponen tersebut disusun secara seri. Rangkaian ini disebut undamped karena memang tidak ada resistor yang berfungsi sebagai dumper. Nanti akan terlihat dalam persamaan orde dua dari rangkaian tersebut kalau rasio dumpingnya bernilai nol.

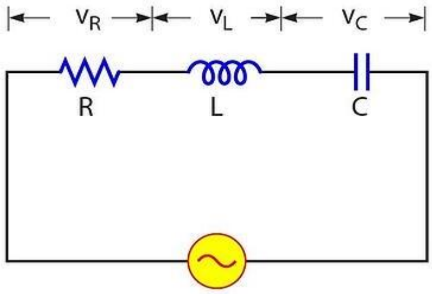


Gambar 1. Undamped Series-Resonant Circuit (Rangkaian LC) [1]

Sebuah rangkaian LC (*Undamped Series-Resonant Circuit*) ditunjukkan pada Gambar 1 dengan tegangan input V_d saat t_0. Kondisi awal atau pada saat t_0 dari state variable arus induktor i_L dan tegangan kapasitor v_c adalah I_{L0} dan V_{C0}.

Rangkaian RLC

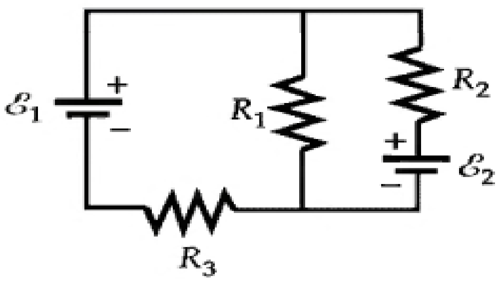
Rangkaian seri RLC pada arus bolak-balik terdiri dari resistor (R), induktor (L) dan kapasitor (C) yang dihubungkan dengan sumber tegangan AC dan disusun secara seri.Hambatan yang dihasilkan oleh resistor disebut resistansi, hambatan yang dihasilkan oleh induktor disebut reaktansi induktif (X_L), dan hambatan yang dihasilkan oleh kapasitor disebut reaktansi kapasitif (X_C). Ketiga besar hambatan tersebut ketika digabungkan dalam disebut impedansi (Z) atau hambatan total



Gambar 2. Rangkaian seri RLC

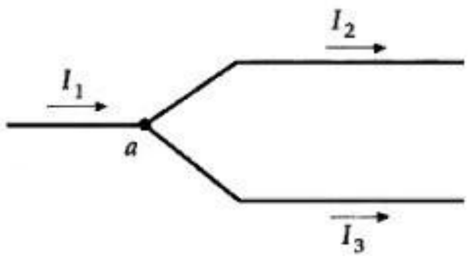
Hukum Kirchoff

Banyak dari rangkaian listrik sederhana (Gambar 1) yang tidak dapat dianalisis dengan hanya mengganti kombinasi rangkaian seri dan paralel resistor dalam menyederhanakan rangkaian yang memiliki banyak resistor.



Gambar 3. Rangkaian Listrik Sederhana

Hukum Kirchoff 1 menyatakan bahwa: "Jumlah arus listrik yang masuk melalui titik percabangan dalam suatu rangkaian listrik sama dengan jumlah arus yang keluar melalui titik percabangan tersebut"



Gambar 4. Arus masuk dan arus keluar percabangan

Secara umum rumus hukum Kirchhoff 1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum I_{masuk} = \sum I_{keluar}$$

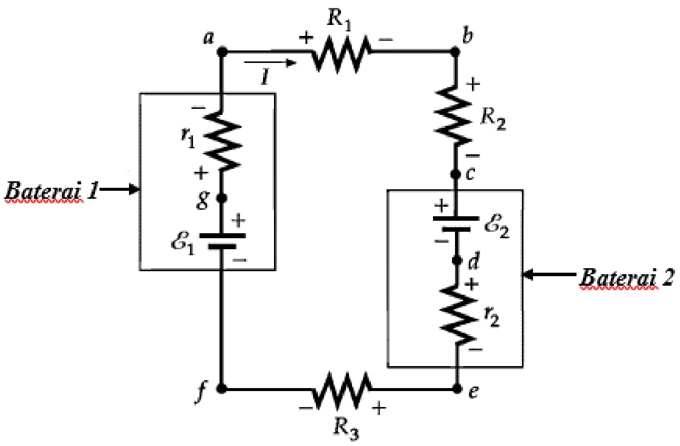
Hukum Kirchoff 2

Bunyi hukum Kirchhoff 2 adalah "Pada setiap rangkaian tertutup, jumlah beda potensialnya harus sama dengan nol". Hukum Kirchoff 2 juga sering disebut sebagai hukum simpal (loop rule), karena pada kenyataannya beda potensial diantara dua titik percabangan dalam satu rangkaian pada keadaan tunak adalah konstan. Hukum ini merupakan bukti dari adanya hukum konservasi energi. Jika kita memiliki suatu muatan Q pada sembarang titik dengan potensial V, dengan demikian energi yang dimiliki oleh muatan tersebut adalah QV. Selanjutnya, jika muatan mulai bergerak melintasi simpal tersebut, maka muatan yang kita miliki akan mendapatkan tambahan energi atau kehilangan sebagian energinya saat melalu resistor baterai atau elemen lainnya. Namun saat kebali ke titik awalnya, energinya akan kembali menjadi QV.

Rangkaian berisi dua buah baterai dan tiga resistor eksternal. Tanda plus minus pada resistor digunakan untuk mengingatkan kita sisi mana pada setiap resistor yang berada pada potensial lebih tinggi untuk arah arus yang diasumsikan

Secara umum rumus hukum Kirchoff 2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum E + \sum IR = 0$$



Gambar 5. Rangkaian yang berisi dua baterai dan tiga resistor

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian literatur yaitu buku-buku dan jurnal online matematika sebagai penunjang yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde dua dalam menentukan solusi homogen maupun tak homogen untuk rangkaian listrik LC seri dan rangkaian RLC seri. Metode dilakukan dengan beberapa langkah, sebaai berikut:

1. Menentukan model matematika yaitu persamaan diferensial orde dua,
2. Melakukan penurutan rumus untuk memperoleh solusi homogen maupun tak homogen,
3. Mengaplikasikan model yang dipilih ke penyelesaian model matematika untuk rangkaian listrik orde dua,
4. Menyajikan model matematika untuk rangkaian listrik orde dua,
5. Menganalisa penyelesaian homogen dan tak homongen model matematika untuk rangkaian listrik orde dua.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Rangkaian LC seri

Rangkaian LC seri dengan sumber baterai E volt digambarkan pada gambar Rangkaian LC seri dengan hukum tegangan Kirchoff. Model persamaan rangkaian LC seri yaitu:

$V_L + V_c = E$

Dengan : V_L adalah teganan pada indukator L yaitu $L\frac{dI}{dt}$

V_c adalah tegangan pada kapasitor C yaitu : $\frac{1}{c}\int Idt$

Diketahui bahwa I = $\frac{dQ}{dt}$ dengan Q pada muatan dalam Coulomb. Sehingga moddel persamaan dapat ditulis

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{c}\int Idt = E$$

Untuk menghilangkan tanda integral , persamaan dideferensialkan maka :

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right)+\frac{1}{c}\int\frac{d}{dt}Idt = \frac{d}{dt}(E)$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}1 = \frac{d}{dt}(E)$$

Model persamaan untuk gambar diatas dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t) yaitu :

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{c}\int Idt = E$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{C}Q = E$$

Kasus A. Jika sumber bateral E = 0 $\left(\frac{d}{dt}(E) = 0\right)$

Model persamaan rangkaian dinyatakan sebagai :

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}1 = 0$$

atau

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{CL}I = 0$$

persamaan karaktreristik dari persamaa diferensial di atas:

$$r^2+\frac{1}{CL} = 0$$

Akar – akar persamaan kerakteristik :

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{CL}}$$

Sehingga penyeselaian umum PD

$$y = C_1 e^{(\propto + i\beta)x} + C_2 e^{(\propto + i\beta)x} = Ae^{\propto x} cos\beta x + Be^{\alpha x} sin\beta x$$

Dengan C_1,C_2, A,B = kostanta; r = α ±iβ
maka :

$$y\,(t) = A\cos\sqrt{\frac{1}{CL}}t + b\,Sin\sqrt{\frac{1}{CL}}t$$

Kasus B. Jika sumber bateral E = konstanta
Menentukan kuat arus I(t)untuk kasus ini berdasarkan model persamaan diferensial Q(t), selanjutnya I(t) didapatkan dari hubungan I(t) =$\frac{dQ}{dt}$. Model persamaan rangkaian untuk Q(t) dinyatakan sebagai berikut:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E$$

atau

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = \frac{E}{L}$$

Persamaan diatas adalah persamaan diferensial tak homongen orde dua, penyelesaian disebut penyelesaian lengkap terdiri dari penyelesaian homogen dan penyelesaian tak homongen. Penyelesaian homongen:

$$Q_h(t) = A\cos\sqrt{\frac{1}{CL}t + Bsin\sqrt{\frac{1}{CL}}t}$$

Dan penyesaian yang tak homongen:

$$Q_p(t) = EC$$

Penyelesaian lengkap

$$Q(t) = Q_P(t) = A\;cos\sqrt{\frac{1}{CL}}t + Bsin\sqrt{\frac{1}{CL}}t + EC$$

Khasus C jika sumber bateri E = E_0 cos ωt
Model persamaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai :

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E_0 cos\omega t$$

atau

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{CL}Q = \frac{E_0\,cos\omega t}{L}$$

Penyelesaian model persamaan diatas adalah penyelesaian lengkap muatan fungsi waktu, terdiri atas penyelesaian homongen dan penyelesaian tak homonen,
Penyelesaian homongen:

$$Q_h(t) = c\cos(\omega_0 t - \theta)$$

dan solusi tak homongen adalah ;

$$Q_p(t) = \frac{E_0}{L(\frac{1}{CL} - \omega^2}cos\omega t$$

Jika didefenisikan $\omega_0 2 = \frac{1}{CL} sehingga$:

$$Q_p(t) = \frac{E_0}{L(\omega_0 2 - \omega^2)} cos\omega t$$

Kasus D. Jika sumber baterai E = E_0 cos ωt dengan ω = $\sqrt{\frac{1}{CL}}$

Model persamaaan rangkaian untuk Q (t) dinyatakan sebagai berikut:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E_0 cos\omega t$$

atau

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = \frac{E_0 cos\omega t}{L}$$

Penyelesaian homogen :

$Q_h(t)$ = A cos ωt + b sinωt atau $Q_h(t)$ = C cos (ωt – θ)

Jadi solusi tak homonen adalah :

Q_p (t) = t(k cos ωt + M sin ωt) = $\frac{E_0}{2\omega L} tsin\omega t$

Penyelesaian terlengkap :

Q(t) = $Q_h(t)$ + Q_p (t) = $Q_h(t)$ = C cos (ω_0t –θ) + $\frac{E_0}{2\omega L}$ $t\ sin\omega$t

Tabel 1. Rangkaian LC seri

L	**C**	**E**	**I(t) homogen**	**I(t) tak homogen**
0,2 henry	0,05 farad	0 volt	$A \cos 10\,t + B \sin 10\,t$	0
		100 volt		$A \cos 10t + B \sin 10t + 5$
	0,1 farad	0 volt	$A \cos 5\sqrt{2}\,t + B \sin 5\sqrt{2}\,t$	0
		100 volt		$A \cos 5\sqrt{2}t + B \sin 5\sqrt{2}t + 10$

Rangkaian RCL seri

Rangkaian RCL seri dengan sumber baterai E volt. Model persamaan rangkaian didapatkan dengan hukum tegangan kirchoff yaitu :

$V_R + V_L + V_c = E$

Dengan V_R adalah tegangan pada reistor R yaitu RI dan V_L adalah tegangan pada indukator L yaitu $L\frac{dl}{dt}$. V_C adalah tegangan pada kapasitor C yaitu $\frac{1}{C}\int ldt$

Diketahui bahwa $I = \frac{dQ}{dt}$ dengan Q adalah muatan dalam coulomb

$$RI + L\frac{dl}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt = E$$

Untuk menghilangkan tanda integral, persamaan diddeferensialkan maka :

$$R\ \frac{d}{dt}I + L\frac{dI}{dt}\left(\frac{dI}{dt}\right) + \frac{1}{C}\int Idt = C$$

$$L = \frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}(E)$$

Model persamaan untuk dapat juga dinyatakan dalam muatan Q(t) yaitu ;

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt = E$$
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E$$

Kasus A jika sumber baterai E =$E_0\left(\frac{d}{dt}(E) = 0\right)$
Model persamaan rangkaian dinyatakan sebagai :

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dl}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

Penyelesaian persamaan homogen orde dua di atas adalah persamaan karakteristikdari persamaan diferensial:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

Akar persamaan karakteristik

$$r_{12} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

Terdapat tiga kemungkinan akar – akar nilai :

1. Jika $\sqrt{R^2 - 4L/C}$>0, maka $r_{1.2}$ adalah dua akar Real yang berbeda denan $r_{1.2} \in$ R mka solusi umum
$$y = C_1e^{r1t} + C_2e^{r2t}$$
2. Jika $\sqrt{R^2 - 4L/C = }\,0$, maka $r_1 = r_2 = r$ dengan $m_{1,2} \in$ R, maka solisu umu
$$y = C_1e^{r1^t} + C_2xe^{rt}$$
3. Jika$\sqrt{R^2 - 4L/C} < 0$ maka $r_{1.2}$ = $\propto \pm i\beta$ dengan $\propto, \beta \epsilon R$ maka solusi umumnya:
$$y = C_1e^{(\propto + i\beta)t} + C_2e^{(\propto + i\forall\beta)t}$$

Dengan rumus Euler yaitu e^{it} = *cos t* + *i sin t* maka bentuk trigonometri rumus dapat ditentukan :

y = $C_1e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2te^{(\alpha + i\beta)t}$
= $C_1e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + C_2e^{\alpha t}(-\cos \beta t - i \sin \beta t)$; $-\cos \beta = \cos \beta t$
= $(C_1+C_2)\, e^{\alpha t}(\cos\beta t) + i(C_1 + C_2)\, e^{\alpha t}(\sin\beta t)$
= $Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t} \sin \beta t$, A B ∈ konstanta bilangan kompleks

Kasus B. Jika sumber bateri yaitu $\frac{d}{dt}(E) = e_0 \cos\omega t$ model persamaan rangkaian adalah :

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} = \cos\omega t$$

Penyesesaian model persamaan diatas terdiri dari penyelesaian homogen dan penyelesaian tak homogen. Untuk penyelesaian homogen sama seperti pada A.

Penyelesaian tak homogen:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E_0 \cos\omega t$$

Jadi penyelesaian lengkap tak homogen adalah :

$$I_P(t) = \left[\frac{-E_0S}{\omega(R^2 + S^2)}\right] cost + \left[\frac{E_0R}{\omega(R^2 + S^2)}\right] sint$$

Contoh analisis model matematika rangkaian RCL Seri :

1. Jika R = 16Ω , L = 0,02 H, C = 2 x 10^{-4} F, dan E = 12 Volt. Dianggap pada saat t = 0, arus I = 0 dan muatan kapasitor Q = 0, akan ditentukan muatan Q dan I sebagai fungsi waktu t dalam rangkaian RLC seri

Penyelesaian:
Persamaan yang mengunakan untk menyelesaian kasus ini :

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Dengan substitusi R = 16 Ω, L = 0,02 H,C =$2x10^{-4}$ F dan E = 12 volt,maka diperoleh:
Sebagai penyelesaian homongen :

$Q_h = e^{-400t}$(C1 cos 300t + C_2 sin 300t)

Menghasilkan $Q_k = 2,4 \times 10^{-3}$, penyelesaian lengkap adalah
Q(t) = $2,4 \times 10^{-3} + e^{-400t}$ (C_1 cos 300t +C_2 sin 300t)
I (t) diperoleh dengan diferensiasi Q(t) didapatkan:
I (t) = $\frac{dQ}{dt}$ = -400 $e^{-400\ t}$ (C_1 cos 300t + C_2 sin 300t) + e^{-400}(-300 C_1 sin 300 t + 300 C_2 cos 300t)
Jadi, penyelesaian lengkap muatan listrik adalah
Q(t) = 10^{-3} b$[2,4 - e^{-400t}(2,4\, cos 300t + 3,2\, sin 300t)]$

2. Suatu indukator 2 Henry, resistor 16 ohm dan kapasitor 0,02 farad dihubungkan secara seri dengan suatu baterai dengan ggl ϵ = 100 sin 3t pada t = 0 muatan dalam kapasitor dan arus dalam rangkaian adalah nol.akan ditentukanlah muatan dan arus pada t>0

Penyelesaian :
Misalkan Q dan I menyatakan muatan dan arus sesaat pada waktu t, berdasarkan hukum kirchoff, maka diperoleh persamaan:
$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0,02} = 100\, sin 3t$ karena I = dQ/dt,
$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 20$ sin 3t
Selesaikan ini terhadap syarat Q = 0 Dq/dt = 0 pada t = 0, kita memperoleh hasil akhir muatan $Q = \frac{25}{52}(2sin3t - 3\, cos3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\, cos3t + 2\, sin3t)$ dan arus $I = \frac{dQ}{dt}$ $=\frac{75}{52}(2cos3t + 3\, sin3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\, sin3t + 6\, cos3t)$
suku pertama adalah arus stabil (steady-state) dan suku ked ua, yang dapat abaikan untuk waktu yang bertambah, dinamakan arus transien.

KESIMPULAN

1. Dalam model matematika untuk rangkaian listrik LC seri dan rangkaian RLC seri menggunakan persamaan diferensial orde dua diperoleh solusi homogen dan tak homogen.
2. Untuk rangkaian listrik LC seri keadaan inductor dan kapasitor yang konstan diperoleh solusi homogen yang sama dan solusi tak homogen yang berbeda, dengan kondisi sumber baterai (E) berubah.
3. Pada rangkaian listrik RLC seri diperoleh penyelesaian untuk arus stabil arus transien.
4. Untuk penelitian selanjutnya penulis diharapkan dapat menentukan dan menganalisa model matematika untuk rangkaian listrik LC maupun RLC paralel.

DAFTAR PUSTAKA

Bambang, S. (1989). *Pengantar Model Matematika.* Yogyakarta: Universitas Gajah Mada Press.

Banks, R.B. (1994). *Growth and Diffusion Phenomena*: Mathematical Frameworks and Applications. New York: Verlag Berlin Heidelberg.

Bronson, Richard dan Gabriel B. Costa. (2007). *Persamaan Diferensial Edisi ketiga.* Jakarta: Erlangga.

Degeng, I..W. (2007). *Kalkulus Lanjut: Persamaan Diferensial dan Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Hayt, Kemmerly, Durbin. (2019). *Rangkaian Listrik.* Jakarta: Erlangga.

Kusmaryanto, Sigit. *Penyelesaian Model Rangkaian Listrik Orde 2. Retrieved from: http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/?p=1486*

Lestari, Dwi. (2013). *Diktat Persamaan Diferensial dan Aplikasinya.*Yogyakarta: Graha Ilmu.

Muljono. (2019). *Matematika Untuk Teknik.* Bandung: Penerbit Andi.

Purcell Edwin J., Varber, Dale. (1989). Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 2. Jakarta: Erlangga.

Wahono, Edi. (2008). Panduan Fisika Praktis. Yogyakarta: Pustaka Widyatama.