不完備情報下における外部性のある協力ゲームの解達の間の関係

松 八 重　泰 輔

1　は じ め に

この論文では情報不完備下の外部性のある協力行動を分析するためのモデルとその解達の関係を提供する．外部性のある協力行動のモデルはAumann and Peleg（1964）による研究が最初であるとされている．この視点は，ある戦略から個々で離脱できる状況を記述したナッシュ均衡から提携による離脱も許容した自然の拡張である．ここでは解を安定な契約，戦略を契約と呼ぶことにする．ナッシュ均衡とは異なり，離脱後に他のプレイヤー達がどのような行動をとるかの予測もおこなうとしている．ナッシュ均衡の自然な拡張として，提携外のプレイヤー達は戦略ないし行動を変えないと予測する概念もある．さらに，提携外のプレイヤー達が離脱後，最悪な戦略をとってくると予測する場合，また最良の戦略をとってくると予測する場合が考えられる．それらの予測のもとで定義された解達の間には，最悪な戦略をとってくると予測する場合が最も広く，次が最良な戦略をとってくると予測する場合，最後にそのままの戦略をとり続けると予測する場合の関係が成り立っている．これはかなり直観的な関係である．なぜならば，離脱する際に，提携外のプレイヤー達が最悪の戦略をとってくると予測すると離脱の際のメリットがかなり制約的になってしまうが，最良の行動をとってくる場合はその制約が緩和され，そのままの場合が最も離脱しやすい状況となるからである．情報完備である場合は，このようにそれぞれの予測に応じた解概念達の間の関係はかなり直観的である．それぞれの解の間の関係を知ることは，どのモデルにどの解概念をもちいるかを判断する上で重要である．なぜならば，与えられた戦略から変更しないと予測する場合の解概念は，どんな予測に対しても頑健であるので，考察対象のプレヤー達の予測の仕方をあまり考慮する必要がないことがわかる．逆に，悲観的な予測の場合の解概念は，楽観的な場合とか戦略を変更しない場合の予測をプレイヤー達がしている場合には，説明力の低い解を提供することになる．そ

こで，本稿の一つの重要な問いは，情報が不完備である場合もこの直観的な関係が成り立つかどうかである．その問いに答えるために情報が完備下の外部性のある協力ゲームにおいて定義されている解達を外部性のある不完備情報下で定義する．

情報が不完備であるので，各プレイヤーがもっている情報に応じた期間を考える必要がある．各プレイヤーが何も情報を持っていない期間を事前期，自身の個人情報を知った期間を中間期，全てのプレイヤーがあらゆる情報を知った期間を事後期とする．その期間の分類のもとで，いつ契約を締結する期間と考えるかが重要である．本稿においては，各プレイヤーは情報を何も持たない状況で契約を締結する状況を考える．

次に情報が完備である場合と異なり，各プレイヤーは自身の個人情報は知っているが，他のプレイヤー達の情報は知らない状況を考えているので，あらゆる契約が実行可能であるとはかぎらない．なぜならば，自身の個人情報と整合的でないような契約を結べないし，他のプレイヤー達の情報を知らないので，他のプレイヤー達が真の情報を表明しない方が得するような契約を締結しないかもしれないからである．そこで，実現可能戦略に関するそれらの制約概念として**可測性**と**ベイジアン・インセンティブコンパティビリティー**という概念をもちいる．それぞれの概念を次節で定義する．

情報が不完備である状況で協力的な行動を分析した初期の研究として，Wilson（1978）の研究がある．Wilson（1978）は選好と初期賦存について情報が非対称であるベイジアン純粋交換経済の分析をおこなった．彼は中間期（個人情報のみもつ期間）におけるコアの概念（粗いコア（coarse core），細かいコア（fine core））を提示し，粗いコアの非空性を示し，細かいコアが空となる例を与えた．

その後の研究は戦略に対する制約として，二つの重要な概念に注意が払われた．

一つ目の条件はここでの文脈と異なるRadner（1968）によって導入された情報に関する可測性とよばれる概念である．情報に関する戦略の可測性とは，契約を締結するときに有効な情報構造と戦略が整合的でなければならないという概念である．Yannelis（1991）はこの概念をもちいて，不完備情報のゲームにおける協力的な行動の分析をおこなった．彼は個人の情報構造に対して整合的である実現可能な戦略を個人可測（private measurable）な戦略と定義し，実現可能な戦略のもとで協力行動の分析をおこなった．彼は，情報が不完備である場合，可測性を満たす戦略のみをもちいて分析することの重要性を主張した．

２つ目の条件は提携で離脱をおこなう際に，提携内のプレイヤー達が自身の真のタイプに基づいた戦略を実行することを要求する条件である．自身の真のタイプ以外のタイプを表明しても得をしないような戦略のみを考えたい．そのような戦略にのみ注目するために課す制約として考えられたのが，d’Aspremont（1979）によって導入されたベイジアン・インセンティブコンパティビリティーという概念である．この概念は，Ichiishi and Idzik（1996）によって一般的な不完備情報の

協力的な行動を分析するために導入された．彼らは事前ベイジアン・インセンティブル・コアという解概念を定義した．その解（事前ベイジアン・インセンティブル・コア）は各可能な提携が事前期において，個人可測性とベイジアン・インセンティブコンパティビリティーを満たす戦略上で定義された解である．

本稿は Ichiishi and Idzik (1996) による定式化にしたがう．しかしながら，本稿では情報が不完備であるゲームに，彼らが考えていなかった一般的なゲーム（提携外のプレイヤーの行動に応じて提携にプレイヤーの利得が決まる状況：本稿ではこれを外部性とよぶ）を考慮した解達の定式化をおこない，それぞれの解達の関係を考察する．そこで Ichiishi and Idzik (1996) では明示的に扱わなかった提携外のプレイヤーの行動予測を導入し，そのもとで定式化をおこなう．つまりわれわれの論文では Ichiishi and Idzik (1996) とは異なる方法でベイジアン・インセンティブコンパティビリティーの概念を定式化する必要がある．

提携外のプレイヤーの行動に応じて提携にプレイヤーの利得が決まる場合，ベイジアン・インセンティブコンパティビリティーは，従来のベイジアン・インセンティブコンパティビリティーとは異なる定義が必要である．外部性がある場合，プレイヤー達の効用は提携の中だけではなく提携外のプレイヤー達の行動にも依存するので，離脱をおこなうときに提携外のプレイヤー達の行動を提携に属するプレイヤー達がどのように考えるかが重要な問題となる．プレイヤー達が考える予測として，Aumann and Peleg (1964) で示された，悲観的予測と楽観的予測という概念をもちいる．その予測のもとで整合的な解として悲観的コアと楽観的コアを考える．これらの概念は情報が完備であるゲームで Aumann and Peleg (1964) によって定義されているので，本稿ではそれらの解達を不完備情報のゲームに拡張する．その定義のもとで本稿の問いであるそれぞれの解達の間の関係を明らかにする．

この分野における最近の研究に対するサーベイとして Forges et al. (2002), Ichiishi and Yamazaki (2006) などがある．

この論文の構成は次の章でモデルの枠組みと実現可能性戦略，解概念を定義する．3 章でこの論文の主定理を述べ，最後に結論を述べる．

2　モデルと基本的な枠組み

2.1　基本的な枠組み

われわれは外部性を含んだ情報不完備下の協力的行動に関するモデルを構築し，そのもとでの解達の関係を考察する．N を自然数の集合の部分集合である n 個の元からなる有限集合とする：$N := \{1, 2, \cdots, n\}$．この集合を意思決定主体であるプレイヤー集合とする．プレイヤー集合 N の全ての非空な部分集合を提携族 $\mathfrak{N}$（$:= 2^N \setminus \{\emptyset\}$）とする．各プレイヤー $j (\in N)$ に対して，選択集合ま

たは行動集合 C^j，タイプ集合 T^j とタイプ依存型のフォンノイマン・モルゲンシュテイン型効用函数が備わっているとする．ゲームの特定のステージ（中間期）において，プレイヤーj のみが自身のタイプ集合 T^j のどの元が実現されたかを認識することができる．つまり，そのステージにおいて自身のタイプに関しては識別することが可能である．しかしながら，そのステージにおいて，他のプレイヤー達（$i \in N \setminus \{j\}$）のタイプに関しては認識不可能である．この意味において，われわれは実現された元 $t^j (\in T^j)$ をプレイヤーj の**個人情報**とよぶ．本稿を通じて，任意のプレイヤーj の選択集合 C^j とタイプ集合 T^j は有限集合であると仮定する．

各提携 $S(\in \mathfrak{N})$ に対する選択集合とタイプ集合を次のように定義する：$C^j := \Pi_{j\in S}\ C^j$, $T^S := \Pi_{j\in S}\ T^j$. 記号の簡略化のため $C := C^N$, $T := T^N$ と記すことにする．C の元達を選択プロファイル，T の元達をタイプ・プロファイルと呼ぶ．混乱がないかぎりプロファイルを略して，選択，タイプとよぶこともある．集合 C^S, T^S, C, T の元達をそれぞれ $c^S(:=(c^j)_{j\in S})$, $t^S(:=(t^j)_{j\in S})$, $c(:=(c^j)_{j\in N})$, $t(:=(t^j)_{j\in N})$ と記述する．

任意のプレイヤー$j(\in N)$ に対する，タイプ依存型のフォンノイマン・モルゲンシュテイン型効用函数 $u^j : C \times T \to \mathbb{R}$ とはプレイヤーj の効用水準 $u^j(c, t)$ が定義域 $C \times T$ から実数 $\mathbb{R}$ への函数である．つまり，選択 c とタイプ t に依存して効用水準 $u^j(c, t)$ が決まる函数である．この効用函数の定義からもわかるように，任意のプレイヤーj の効用は他のプレイヤー達の選択にも依存して決定される．つまり，ゲーム的状況になっていることに注意が必要である

次に戦略の概念を定義する．プレイヤー達の戦略はタイプ t を条件として選択 c^j を特定化することである．任意のプレイヤーj の戦略は写像 $x^j : T \to C^j$ である．つまり定義域がタイプ $T(:=T^N)$ で，終域はプレイヤーj の選択 C^j への写像である．任意のタイプに対してある選択 $c^j \in C^j$ をおこなうことを定値写像 $t \mapsto c^j$ と見做す[1)]．プレイヤーj にとって論理的に考えられうる全ての戦略集合 X^j を次のように定義する：

$$X^j := \{\, x^j \mid T \to C^j \}.$$

任意の提携 $S \in \mathfrak{N}$ に対して，$X^S := \prod_{j\in S} X^j$ と定義する．ここで X^S は提携 S の中で調整された論理的に考えられうる全ての戦略の集合である．単純化のため $X := X^N$ とする．このような構成のもとでモデルはどの戦略バンドル $x^S := (x^j)_{j\in S}$ が提携 S のメンバー達によって同意されたかを明らかにする．

任意のプレイヤーj に対して個人情報 t^j が与えられると，プレイヤーj は他のタイププロフィール $T^{N\setminus\{j\}} (:=T^1 \times \ldots \times T^{j-1} \times T^{j+1} \times T^n)$ 上の条件付き客観確率$\pi^j(\cdot \mid t^j)$ をもつ．条件付き確率はベイズルール（$\pi^j(t^{N\setminus\{j\}} \mid t^j) = \pi^j(t^{N\setminus\{j\}}, t^j) / \pi^j(T^{N\setminus\{j\}} \times t^j)$）によって，$T$ 上の事前確率$\pi^j(T)$ から導出される

1） タイプ T のどの元にもある特定の行動 c^j を対応させる写像.

と仮定する．

情報の概念を明確にするために情報構造という概念を導入する．タイプ・プロフィール T^S は T の分割を生起させる：

$$\{\{t^S\} \times T^{N \setminus S} \mid t^S \in T^S\}.$$

この分割によって生起された T の代数（algebra）を T^S と定義する．これを提携 S の情報構造という．記号の簡略化のため $T^j := T^{\{j\}}$ とする．われわれは T^j をプレイヤーj の個人情報構造と呼ぶ．T^j とはプレイヤーj のタイプ・プロフィール T^j による T の分割，

$$\{t^{\{j\}} \times T^{N \setminus \{j\}} \mid t^j \in T^{\{j\}}\},$$

によって生成される代数である．情報構造は分割によって定義されることもある．プレイヤーのタイプに関する非対称情報は情報構造の違いによって定義される．厳密にいうと，ここで定義した個人情報構造は次で定義する中間期における個人情報構造である．

情報の問題を扱う際に重要となる概念の一つに期間の概念がある．次で定式化するような概念は Holmstrom and Myerson（1983）によって定式化されたものである．この論文でも同様の定義を用いる．自然がタイププロフィール $\bar{t}$ $(=(\bar{t}^1, \ldots, \bar{t}^j, \ldots, \bar{t}^n)) \in T)$ を選択する前を**事前期**（ex ante），プレイヤーj が自分自身の情報構造を通じて自分自身のタイプ $\bar{t}^j$ を認識するが，他のプレイヤー達のタイプは認識できないときを**中間期**（interim），またタイプ・プロフィール $\bar{t}$ が全てのプレイヤー達によって認識されるときを**事後期**（ex post）と定義する．つまり以前に定義した個人情報という概念は中間期において定義される概念である．本稿を通じて契約をおこなう（解を定義する）期間は事前期と仮定する．時間の概念が定義できたので，明確にゲームの状況を説明する．事前期から中間期の間において戦略の調整をおこなうことが可能で，中間期から事後期の間に調整された戦略を実行する．

2.2　戦略の実現可能性

われわれは次に戦略に対する実現可能性の概念を厳密に定義する．なぜならば，全体提携が戦略バンドル $\bar{x} \in X$ を申し出たとする．この状況のもとで提携 S が全体提携から離脱しようとしたときに，提携 S のメンバー達はどの戦略バンドルが彼らにとって実現可能であるかを知らなければならないし，全体提携として戦略バンドル $\bar{x}$ が実現可能の戦略バンドルであるかも知らなければならない．そこで最初に不完備情報下の実現可能性とは何であるかを考察する必要がある．Ichiishi and Idzik（1996）における戦略の実現可能性の概念を本稿でも採用する．そこでの実現可能性の鍵となる概念は二つの概念である：

1．情報構造に関する可測性．

２．ベイジアン・インセンティブコンパティビリティー（B.I.C.）.

2.2.1　情報に関する実現可能性

まず初めに，１の有効な情報構造に関する可測性から考察していく．この概念を直観的に説明すると，自身のタイプが与えられたときにとれる戦略のみを考えるということである．つまり，戦略は情報に関して整合的であるということである．提携における戦略の情報構造の可測性を考える．

この論文では情報の交換はおこなわない（I-NP）．I-NP の場合（個人情報のケース）の戦略が情報に関して実現可能であるとは，提携のプレイヤー達が戦略バンドルを実行するときにその提携に属するプレイヤーj は彼の情報構造 T^j のみ利用可能である状況として定義される．つまり，プレイヤーj は自分の真のタイプ t^j と他のプレイヤーのタイプについての条件付き確率π（$\cdot \mid t^j$）のみを知っている．この場合，戦略に関する可測性の条件を個人可測性とよぶ．戦略が個人可測であるとは各プレイヤーj の戦略が T^j 可測であることである．写像 x^j： $T\rightarrow$ C^j が T^j 可測であるならば，それが t^j のみの写像である場合にかぎる．それゆえ，われわれは戦略を x^j（t）と記述する代わりに x^j（t^j）と書き直すことができる．したがって，本稿において戦略が個人可測であることにより情報に関して戦略が実現可能であると定義する．形式的に述べると，I-NP の場合において戦略が情報的に実現可能であることを次のように定義する．

定義 2.1

I-NP の場合，提携 S のプレイヤー達は戦略 x^j：$T\rightarrow C^j$ が任意の $j\in S$ に対して T^j 可測であるような戦略のみに同意する：

$$F'S \coloneqq \{x^S \in X^S \mid for\ \forall\ j \in S, x^j \text{ は } T^j \text{ 可測}\}.$$

2.2.2　実行に関する実現可能性

以前に述べたように，情報不完備下の協力行動を分析する際に重要となる概念がベイジアン・インセンティブコンパティビリティー（B.I.C.）という概念である．直観的に説明すると，B.I.C. の概念は提携において提携の中で決めた契約以外の選択をしたとしても，得をすることはないということである．いいかえると，提携のメンバー達が契約の戦略を実行するインセンティブを持つということである．なぜこの概念が実行の実現可能性に適しているかをもちいて説明する．例えば，情報不完備下の状況で全員提携において，ある戦略 $\bar{x}\in X$ が提案されたときに，ある提携 S が離脱を考え，その後に戦略 $\tilde{x}^S\in X^S$ を実行しようとする状況を考える．そのときに提携 S に属している任意のプレイヤーj が契約 $\tilde{x}^S$ どおりの行動をとらないことによって得する可能性があるならば，その契約 $\tilde{x}^S$ に j はこの契約を実行するインセンティブはないし，プレイヤーj がこの契約を守らないことがわかるなら他の提携 S のプレイヤー達もこの契約に同意しないだろう．つまり提携 S はたとえ離脱をおこなったとしても，その後に契約 $\tilde{x}^S$ は実行されることはないということである．こ

のような実行されえない契約は除外して考えるのが自然である．実行されうる契約（ベイジアン・インセンティブコンパティビリティーを満たす戦略）を戦略の実行に関する実現可能性として定義する．それゆえ戦略の実現可能性の制約にベイジアン・インセンティブコンパティビリティーの概念を導入することは重要となってくる．なぜそのようなことが必要かというと契約をする期間が，自分のタイプが認識できない事前期で，その契約を実行するときが自分のタイプを認識した後であるからである．自分のタイプを認識したときに契約した行動をとらないほうが得する可能性がある戦略ならば，その戦略をとるインセンティブがなくなってしまう．そのような理由から戦略にベイジアン・インセンティブコンパティビリティーを制約に課すことにする．

そこで形式的にベイジアン・インセンティブコンパティビリティーの概念を定義する．ここでのベイジアン・インセンティブコンパティビリティーとは d'Aspremont（1979）の意味でのベイジアン・インセンティブコンパティビリティーである．

全体提携が戦略バンドル $\bar{x}$ を実行するが，提携 S のプレイヤー達は離脱を考え，離脱後 , 提携 S で調整された戦略バンドル $\tilde{x}^S : T \to C^S$ をとると仮定する．プレイヤー j を提携 S の任意のメンバーとする，彼の真のタイプを $\bar{t}^j$ とする．彼がその同意によって選択をおこなうならば，彼の真のタイプが与えられたときの条件付き期待効用は，

$$E[u^j(\tilde{x}^S, \bar{x}^S \mid \bar{t}^j] := \sum_{t'^{N\setminus\{j\}} \in T^{N\setminus\{j\}}} u^j(\tilde{x}^j(\bar{t}^j)\ , \tilde{x}^j, \bar{x}^{N\setminus S}(t'^{N\setminus S}),\ (\bar{t}^j,\ t'^{N\setminus\{j\}}))\pi(t'^{N\setminus\{j\}} \mid \bar{t}^j)$$

と定義される．

一方 , 彼がその同意に反して，$c^j \in x^j(T^j) := \{x^j(t^j) \mid t^j \in T^j\} \setminus \{\tilde{x}^j(\bar{t}^j)\}$ を選択したならば , 彼の真のタイプが与えられたときの条件付き期待効用は ,

$$\begin{aligned} &E[u^j(c^j, \tilde{x}^{S\setminus\{j\}}), \bar{x}^{N\setminus S} \mid \bar{t}^j] \\ &:= \sum_{t'^{N\setminus\{j\}} \in T^{N\setminus\{j\}}} u^j\ (c^j, \tilde{x}^{S\setminus\{j\}}\ (t'^{S\setminus\{j\}}), \bar{x}^{N\setminus S}(t'^{N\setminus S}),\ (\bar{t}^j,\ t'^{N\setminus\{j\}})\pi(t'^{N\setminus\{j\}} \mid \bar{t}^j) \end{aligned}$$

と定義される．

定義 2.2（d'Aspremont（1979））

全体提携は戦略バンドル $\bar{x}$ を実行しようとしているが，提携 S は離脱し , 離脱後に提携で調整された戦略バンドルをとると仮定する．個人情報の場合において , 提携 S のプレイヤー達はベイジアン・インセンティブコンパティビリティーである戦略 $x^S \in F^S\ (\bar{x})$ にのみ同意する[2)]．つまり ,

$$\begin{aligned} &\forall\ j \in S : \forall\ \bar{t}^j : \forall\ c^j \in x^j\ (T^j) : \\ &E[u^j\ (x^S, \bar{x}^{N\setminus S})\ \mid \bar{t}^j] \geq E[u^j(c^j, x^{S\setminus\{j\}}), \bar{x}^{N\setminus S})\ \mid \bar{t}^j] \end{aligned}$$

2） この記号は Ichiishi and Yamazaki（2006）を参照.

である.

しかしながら，この定義は提携間の外部性が考慮されていない．つまり，提携 S が戦略 $\bar{x}^S$ をとって離脱するときに提携外のプレイヤー達 $N\backslash S$ の戦略はもとのまま，つまり $\bar{x}^{N\backslash S}$ であると定義されている．提携外のプレイヤー達の行動は離脱に対して何の影響も受けないと仮定している．しかしながら，提携 S が全体提携の戦略 $\bar{x}$ から離脱をおこなうときに，他のプレイヤー達 $N\backslash S$ が全体提携での戦略をそのままとるとはかぎらない．したがって，本稿では他のプレイヤー達 $N\backslash S$ は戦略を変えてくるケースにこの定義の拡張を試みる．そのようなケースにおいて重要となることは提携 S が離脱をおこなったときに，他のプレイヤー達 $N\backslash S$ の戦略をどのように変更するかを予測するかである．提携外のプレイヤー達の行動を予測する方法として，一般に二つの予測の仕方が考えられる[3)]：悲観的な予測，楽観的な予測.

最初に悲観的予測をおこなう場合から考察をおこなっていく．どのようにその予測を定義に導入するかというと，提携外のプレイヤー達が任意の戦略をとるとし，そのもとで B.I.C. を満たす戦略を提携 S の戦略における実行に関する実現可能戦略と定義する．悲観的予測のもとで B.I.C. 戦略とは形式的に述べると次のように定義される.

定義 2.3（悲観的ベイジアン・インセンティブコンパティビリティー（α–B.I.C.)）

戦略 x^S がα–B.I.C. であるとは,

$$\forall\ x^{N\backslash S}\in X^{N\backslash S}:\forall\ j\in S:\ \forall\ t^j\in T^j:\forall\ c^j\in x^j(T^j):$$
$$E[u^j\ (x^S,\ x^{N\backslash S}\mid t^j)]\geq E[u^j\ (c^j,\ x^{S\backslash\{j\}}),\ x^{N\backslash S}\mid t^j)],$$

である.

α–B.I.C. が定義できたので，各提携における悲観予測のもとでの実現可能戦略を明確に定義する．戦略の実現可能性には２つの概念が重要（１．有効な情報構造に関する可測性．２．ベイジアン・インセンティブコンパティビリティー（B.I.C.)）になることを前述した．ここではその２つの概念として定義 2.1, 定義 2.3をもちいて各提携における実現可能戦略集合を定義する．次で述べる実現可能戦略の集合と区別するために，悲観的実現可能戦略集合（α–F.S.)$\hat{F}^S_\alpha$ とよぶことにする：任意の提携 $S\in\mathcal{N}$ に対して,

$$\hat{F}^S_\alpha := \{\ x^S\in X^S\mid$$
$$\forall\ j\in S:x^j \text{ は } T^j \text{ 可測}$$
$$\forall\ x^{N\backslash S}\in X^{N\backslash S}:\forall\ j\in S:\ \forall\ t^j\in T^j:\forall\ c^j\in x^j(T^j):$$
$$E[u^j\ (x^S,\ x^{N\backslash S}\mid t^j)]\ \geq E[u^j(c^j,\ x^{S\backslash\{j\}},\ x^{N\backslash S}\mid t^j)]\}.$$

３） 厳密には三つの方法が考えられる．前述の二つの予測と受動的な予測である.

次に，楽観的な予測をおこなう場合の考察をおこなう．この予測の仕方を定義に導入する方法は，提携外のプレイヤー達の戦略がある戦略をとるとし，そのもとで B.I.C. を満たす戦略を提携 S の戦略における実行に関する実現可能戦略と定義する．楽観的の予測のもとでの B.I.C. 戦略とは次のような定義である．

定義 2.4（楽観的ベイジアン・インセンティブコンパティビリティー（β-B.I.C.））

提携外の任意の戦略 $x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}$ を１つ固定する．その戦略 $\bar{x}^{N\setminus S}$ に対して戦略 x^S がβ-B.I.C. であるとは，

$$
\begin{aligned}
&\forall\ j \in S：\forall\ t^j \in T^j：\forall\ c^j \in x^j(T^j)：\\
&E[u^j\ (x^S, \bar{x}^{N\setminus S} \mid t^j)] \geq E[u^j(c^j, x^{S\setminus\{j\}}, \bar{x}^{N\setminus S} \mid t^j)],
\end{aligned}
$$

である．

この定義 2.4の意味は戦略 x^S において提携 S に属する全てのプレイヤー達は提携外のプレイヤー達 $N\setminus S$ が戦略 $\bar{x}^{N\setminus S}$ をとったときに，提携 S の中で契約された戦略以外の行動を実行したとしても得をしないということである．換言すると，契約 x^S は実行可能ということになる．

悲観的な予測の場合と同様に，楽観的な予測のもとでの実現可能戦略を明確にする．そこで，定義 2.2, 定義 2.4を用いて各提携における実現可能戦略集合を定義する．ここでの実現可能戦略の集合を楽観的実現可能戦略集合（β-F.S.）とよぶ．しかしながら，前述のα-F.S. とは異なり提携外の任意の戦略を一つ固定して B.I.C. を定義しているので，その集合が提携外の戦略に依存して決まるということを明確にするために $\hat{F}^S_\beta\ (x^{N\setminus S})$ と記すことにする[4)]：任意の提携 S に対して，

$$
\begin{aligned}
&\hat{F}^S_\beta\ (x^{N\setminus S}) \coloneqq \{x^S \in X^S \mid\\
&\forall\ j \in S：x^j \text{ は } T^j \text{ 可測},\\
&\forall\ j \in S：\forall\ t^j \in T^j：\forall\ c^j \in x^j\ (T^j)：\\
&E[u^j\ (x^S, x^{N\setminus S} \mid t^j)] \geq E[u^j\ (c^j, x^{S\setminus\{j\}}, x^{N\setminus S} \mid t^j)].
\end{aligned}
$$

注意

ここで楽観的実現可能戦略集合 $\hat{F}^S_\beta(x^{N\setminus S})$ に対して注意が必要である．提携外の戦略に依存して決まるので，一般的に提携外の戦略が異なるならば（$\check{x}^{N\setminus S} \neq \tilde{x}^{N\setminus S}$），$\beta$-*F.S.* は異なる（$\hat{F}^S_\beta(\check{x}^{N\setminus S}) \neq \hat{F}^S_\beta\ (\tilde{x}^{N\setminus S})$）．

それぞれの実現可能戦略集合であるα-F.S. とβ-F.S. の関係を考察してみる．両集合の違いは B.I.C の定義に依存する．２つの集合における B.I.C. の概念的な差異は各定義で述べたように提携

４） 全体提携に対する $\hat{F}^S_\beta(\emptyset)$ を $\hat{F}^S_\beta$ と記す．

外のプレイヤー達の行動の予測の違いである．したがって，全員提携つまり $\hat{F}^N$ の場合は両者の概念は一致する．全員提携の場合には，実現可能戦略は両者に差は無い．つまり，$\hat{F}^N_\alpha = \hat{F}^N_\beta$ よりそれを $\hat{F}^N$ と定義する．$\hat{F}^N$ は一般的に存在するとはかぎらない．そのことを明らかにするために，次のような命題を示す．

命題 2.1

ベイジアンゲームにおけるナッシュ均衡は全員提携におけるベイジアン・インセンティブコンパティビリティーを満たす．

証明をおこなう前にベイジアンゲームにおけるナッシュ均衡の定義を形式的に述べておく．

定義 2.5（ベイジアンゲームのナッシュ均衡）

ベイジアンゲームの戦略の組 $\hat{x} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^n)$ がナッシュ均衡であるとは，任意のプレイヤー $j (\in N := \{1, 2, \dots, n\})$ とプレイヤー j の任意の戦略 $x^j \in X^j$ に対して，

$$E[u^j(\hat{x})] \geq E[u^j(x^j, \hat{x}^{N \setminus \{j\}})],$$

が成り立つことである．ここで，

$$\hat{x}^{N \setminus \{j\}} := \{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{j-1}, \hat{x}^{j+1}, \dots, \hat{x}^n\},$$

である．ベイジアンナッシュ均衡戦略の集合を BNE と記すことにする．

証明

この命題を示すために，任意のベイジアンナッシュ均衡戦略が $\hat{F}^N$ の元であることを示せばよい．

まずベイジアンナッシュ均衡戦略が T^j 可測であることを確認する．任意のベイジアンナッシュ均衡戦略戦略は T^j 可測性を満たしていることは自明である．

次に，ベイジアンナッシュ均衡戦略がベイジアン・インセンティブコンパティビリティーを満たすことを示す．任意のベイジアンナッシュ均衡戦略を $\bar{x} (= \{\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n\} \in \mathrm{BNE})$ とする．ベイジアンナッシュ均衡の定義より任意のプレイヤー j と任意の戦略 $x^j \in X^j$ に対して，

$$E[u^j(\bar{x})] \geq E[u^j(x^j, \bar{x}^{N \setminus \{j\}})],$$

が成り立つ．このことにより，任意の $\bar{t}^j \in T^j$ に対して，

$$E[u^j(\bar{x}^j) \mid \bar{t}^j] \geq E[u^j(x^j, \bar{x}^{N \setminus \{j\}} \mid \bar{t}^j],$$

が成り立つ．これにより $\bar{x}$ がベイジアン・インセンティブコンパティビリティーを満たすことがわ

かる．　**証明終了**

この命題2.1よりベイジアンナッシュ均衡が存在すれば全員提携の実現可能戦略の集合が非空であることがわかる．さらに実現可能戦略集合の概念をもちいて分析するにあたって自明の関係を補題の形でいくつか述べておく．はじめにα–F.S. はβ–F.S. の形で以下のように表現可能である．

補題 2.1

任意の提携 S に対して，

$$\hat{F}_{\alpha}^{S} = \bigcap_{x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}} F_{\beta}^{S}(x^{N\setminus S})$$

となる．

証明

定義より明らかである．　**証明終了**

次の補題はα–F.S. とβ–F.S. の集合の包含関係を示している．

補題 2.2

任意の提携 S に対して，

$$\hat{F}_{\alpha}^{S} \subset \hat{F}_{\beta}^{S}(x^{N\setminus S}),$$

となる．

証明

補題 2.1から直接導かれる．　**証明終了**

次の小節でこれらの実現可能戦略集合の概念に基づいた解概念を定式化する．

2.3　解　概　念

この節で前節の実現可能戦略の概念と整合的な解概念を定義する．この論文における解とは，直観的に述べると安定である全員提携における契約（戦略）のことをさしている．安定とは全員提携における契約に対して，どの部分提携も離脱することは無いということである．そのような協力的な行動を分析する際によく使われる解概念が**コア**という概念である．この論文でもコアを解概念として採用する．しかしながら，各実現可能戦略集合に整合的なコアの概念を定義する必要がある．それぞれの実現可能戦略集合に整合的であるコアの概念として，Aumann and Peleg（1964）に

よって定義されたαコアとβコアという概念を用いる．この概念を情報不完備下のゲームに拡張する．さらに情報不完備のもとでの契約が安定であるかを議論するにあたって，どの期間によって契約を結ぶかも重要となってくる．そこで契約する期間を事前期（個人情報も何もない状態の期間）と定義する．最初に Aumann and Peleg（1964）によるαコアとβコアの概念を確認のため定義だけを述べておく．

定義 2.6（αコア戦略）

$\hat{x} \in X$ がαコア戦略であるとは，

$$\neg \exists\, S \in \mathcal{N} : \exists\, x^S \in X^S : \forall\, x^{N \setminus S} \in X^{N \setminus S} : \forall\, j \in S : u^j\ (x^S, x^{N \setminus S})\ > u^j(\hat{x})$$

ということである．

定義 2.7（βコア戦略）

$\hat{x} \in X$ がβコア戦略とは，

$$\neg \exists\ S \in \mathcal{N} : \forall\, x^{N \setminus S} \in X^{N \setminus S} : \exists\, x^S \in X^S : \forall\, j \in S : u^j\ (x^S, x^{N \setminus S}) > u^j(x),$$

ということである．

本稿において，情報が不完備になるということから効用の値は次のような期待値として表現されることに注意する：

$$E[u^j(x)] \coloneqq \sum_{t^j \in T^j} \sum_{t^{N \setminus \{j\}} \in T^{N \setminus \{j\}}} u^j(x, t)\pi(t^{N \setminus \{j\}} \mid t^j).$$

各実現可能戦略集合に対して整合的な解概念を考察してみる．提携 S が取れる戦略集合は情報不完備の場合，前節で論じたように，集合 X^S の全てが実現可能とはかぎらない．つまり前節で定義した実現可能集合で定義しなおす必要がある．その実現可能戦略のもとでαコア戦略の概念をこのモデルにおける解概念に適用させる．契約を結ぶ期間も重要であるのでそのような解を事前不完備αコア戦略とよぶことにする．このことを形式的に述べると次のようになる．

定義 2.8（事前不完備αコア戦略）

戦略 $\hat{x} \in \hat{F}^N$ が事前不完備αコア戦略であるとは，

$$\neg \exists\ S \in \mathcal{N} : \exists\, x^S \in F^S_\alpha : \forall\, x^{N \setminus S} \in X^{N \setminus S} : \forall\, j \in S : E[u^j\ (x^S, x^{N \setminus S})] > E[u^j(\hat{x})],$$

ということである．

次にαコア戦略と同様にβコア戦略の概念を情報不完備の場合に適用させる．その解を事前不完

備βコア戦略とよぶことにする．このことを形式的に述べると次のようになる．

定義 2.9（事前不完備βコア）

戦略 $\hat{x} \in \hat{F}^N$ が事前不完備βコア戦略とは，

$$\neg \exists\ S \in \mathcal{N} : \forall\ x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S} : \exists\ x^S \in F^S_\beta : \forall\ j \in S : E[u^j(x^S, x^{N\setminus S})] > E[u^j(\hat{x})],$$

ということである．

注意

両方の定義に少し注意を与える．提携 S に対しては各実現可能戦略の集合（悲観的実現可能戦略集合，楽観的実現可能戦略集合）から戦略を選択すると定義しているが，提携外 $N\setminus S$ の戦略は集合 $X^{N\setminus S}$ からとってきている．その戦略集合を悲観的または楽観的実現可能戦略集合に変更すると概念が変わってくる．ここでの定義は提携外のメンバー達は共同戦略または個々の戦略をとることが可能ではあるが，後者の場合提携外のメンバー達は共同戦略をとることが前提になっている．したがって事前不完備α，βコア戦略を定義する際に，後者のほうが前者より概念を狭めていることになる．この論文では提携 S 以外のプレイヤー達が提携を組むとはかぎらないということを考慮して，広い概念である前者のほうで定義している．

さらに悲観的実現可能戦略集合概念を用いることで強ナッシュ均衡という概念も不完備情報下で定義することが可能である．不完備情報下の強ナッシュ均衡を定義する前に，完備情報下の強ナッシュ均衡の概念を述べておく．

定義 2.10（強ナッシュ均衡戦略（S.E.））

戦略 $\hat{x} \in X$ が強ナッシュ均衡戦略であるとは，

$$\neg \exists\ S \in \mathcal{N} : \exists\ x^S \in X^S : \forall\ j \in S :$$
$$u^j\ (x^S, \hat{x}^{N\setminus S}) > u^j(\hat{x})$$

である．

この解概念を不完備情報下の強ナッシュ均衡に拡張させるために，なぜ悲観的実現可能戦略集合を用いて定義することが可能であるかを述べておく．この概念は提携外のプレイヤー達が全体提携のときと同一の戦略をとっているが，その戦略は必ず $X^{N\setminus S}$ のもとである戦略となる．つまり，提携外のプレイヤー達がこの戦略をとっている場合に提携 S のプレイヤー達が戦略を選択すると解釈することができる．このことは悲観的ベイジアン・インセンティブコンパティビリティーの特殊ケースと考えることができる．したがって，悲観的実現可能戦略集合を用いて定義することが可能であることがわかる．したがって，不完備情報下の強ナッシュ均衡は形式的には次のような定義さ

れる.

定義 2.11（事前不完備強ナッシュ均衡）

戦略 $\hat{x} \in \hat{F}^N$ が強ナッシュ均衡戦略であるとは,

$$\neg \exists\ S \in \mathcal{N} : \exists\ x^S \in \hat{F}^S_\beta\ (\hat{x}^{N \setminus S}) : \forall\ j \in S :$$
$$E[u^j(x^S, \hat{x}^{N \setminus S})] > E[u^j(\hat{x})],$$

である.

この不完備情報強ナッシュ均衡戦略を解として，情報不完備の協力的行動を分析に用いた研究として Ichiishi and Idzik（1996）などがある.

この節で定義された事前不完備αコア，事前不完備βコア，そして事前不完備強ナッシュ均衡のそれぞれの解の集合を X_E^α, X_E^β, そして X_E^{Strong} と定義する．次の章では本稿の主目的である，それぞれの解の間の関係を考察する.

3　結　　果

前章までで本稿で扱うモデルと解達についての厳密な定義を与えた．この節ではそれらの解達の間の関係についての考察をおこなう．最初に，情報が不完備でない場合のαコア戦略とβコア戦略と強ナッシュ均衡の間の関係を示す．それぞれの解の集合を X^α, X^β, そして X^{strong} と記すことにする.

定理 3.1

$$X^{strong} \subseteq X^\beta \subseteq X^\alpha.$$

次に以前に定義した不完備下の解達の間の関係を考察していく.

命題 3.1

任意の事前不完備βコア戦略は事前不完備α戦略である.

証明

この命題の主張を示すためには，任意の戦略 $x \in X_E^\beta$に対して，その戦略が事前不完備α戦略の定義を満たすことを示せばよいことになる．事前不完備βコア戦略集合の任意の戦略を 1 つ固定する．その戦略を $\hat{x}$ とする．つまり，この戦略は事前不完備βコア戦略の定義より，

$$\forall\ S \in \mathcal{N}: \forall\ x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}: \forall\ x^S \in \hat{F}^S_\beta\ (x^{N\setminus S}): \exists\ j \in S:$$
$$E[u^j\ (\ x^S, x^{N\setminus S}\}\ )] \leq E[u^j\ (\hat{x})],$$

が成り立つ．さらに戦略 $\hat{x}$ に対して次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}E[u^j\ (\hat{x})] &\geq E[u^j\ (x^S, x^{N\setminus S})]\ (\forall\ x^{N\setminus S})\ \in X^{N\setminus S}\ \forall\ x^S \in \hat{F}^S_\beta\ (x^{N\setminus S})),\\ &\geq E[u^j\ (x^S, x^{N\setminus S})]\ (\forall\ x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}: \forall\ x^S \in \cap_{x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}} \hat{F}^S_\beta\ (x^{N\setminus S})),\\ &\geq E[u^j\ (x^S, x^{N\setminus S})]\ (\forall\ x^S \in \cap_{x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}} \hat{F}^S_\beta(x^{N\setminus S}): \forall\ x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}),\\ &= E[u^j\ (x^S, x^{N\setminus S})]\ (\forall\ x^S \in \hat{F}^S_\alpha: \forall\ x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}).\end{aligned}$$

この最後の変形は補題2.1によるものである．よって任意の戦略 $\hat{x}$ が事前不完備αコア戦略になることが示せた．　**証明終了**

事前不完備強ナッシュ均衡戦略と事前不完備βコア戦略の関係には次のような関係が成り立っている．

命題 3.2

任意の事前不完備βコア戦略は事前不完備強ナッシュ均衡戦略である．

証明

ここで示すべきことは任意の事前不完備βコア戦略が事前不完備強ナッシュ均衡戦略になることである．そこで任意の事前不完備βコアである戦略を 1 つとってくる．それを $\hat{x}$ とする．事前不完備βコア戦略の条件より，

$$\forall\ S \in \mathcal{N}: \forall\ x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}: \forall\ x^S \in \hat{F}^S_\beta: \exists\ j \in S:$$
$$E[u^j\ (x^S, x^{N\setminus S})] \leq E[u^j\ (\hat{x})],$$

が成り立つ．提携外の戦略 $x^{N\setminus S}$ は任意であるので，$x^{N\setminus S}$ を $\hat{x}^{N\setminus S}$ に置き換えても上記の不等式が示す関係は保存される．したがって，

$$E[u^j(x^S, \hat{x}^{N\setminus S})] \leq E[u^j(\hat{x})],$$

である．つまり，$\hat{x}$ が事前不完備強ナッシュ均衡である．　**証明終了**

注意

このことは情報が完備である場合のβコアと強ナッシュ均衡の関係とは異なる結果である．な

ぜ，そのようなことが生じているかを考察してみる．このような関係になる大きな理由は，提携外の戦略に依存して悲観的実現可能戦略集合が決まるからである．直感的に述べると，離脱する際の提携がとれる戦略が事前不完備強ナッシュ均衡戦略の定義のほうが事前不完備βコア戦略の定義より減少するからである．つまり，事前不完備強ナッシュ均衡戦略の場合，離脱可能な実現可能戦略集合は事前不完備βコア戦略の場合の離脱可能な実現可能戦略集合に含まれるからである．

この論文で分析対象としている不完備情報下の協力的行動の解（事前不完備αコア戦略，事前不完備βコア）と一般的な（非協力ゲームである）ベイジアンゲームの解（ベイジアンナッシュ均衡）の関係を考察してみる．ベイジアンナッシュ均衡戦略の集合をBNEと記すことにする．

命題 3.3

任意の事前不完備αコアの戦略はベイジアンナッシュ均衡である．

証明

示すべきことは任意の戦略 \$$x \in X_E^{\alpha}$がベイジアンゲームのナッシュ均衡となることである．そこで任意の事前不完備αコア戦略を 1 つとってくる．それを$\hat{x}$とする．この戦略は事前不完備αコア戦略であることにより，任意の提携$S \in N$をとってくると，提携Sの任意の戦略に対して提携の外のプレイヤー達が任意の戦略をとると，提携Sのあるプレイヤーjは，

$$E[u^j(\hat{x})] \geq E[u^j(x^S, x^{N \backslash S})],$$

となる．提携Sは 1 人提携も含むので次のように変形することも可能である．

$$E[u^j(\hat{x})] \geq E[u^j(x^j, x^{N \backslash \{j\}})].$$

プレイヤーj以外のプレイヤー達は任意の戦略をとることが可能なので，プレイヤーj以外のプレイヤー達（$N \backslash \{j\}$）が$\hat{x}^{N \backslash \{j\}}$を選択したとする．つまり，

$$E[u^j(\hat{x})] \geq E[u^j(x^j, \hat{x}^{N \backslash \{j\}})],$$

が成り立っている．このことは全ての 1 人提携に対して成り立つ． **証明終了**

上記の一連の命題 3.1，3.2，3.3より，このモデルにおける様々な解達の間に次の関係が成り立つ．

定理 3.2

情報不完備のゲームにおける解である事前不完備α戦略，事前不完備β戦略，事前不完備ナッ

シュ強均衡，ベイジアンナッシュ均衡戦略の集合の間には次のような関係が成り立つ．

$$X_E^{\beta} \subseteq X_E^{strong} \subseteq X_E^{\alpha} \subseteq BNE.$$

証明

命題 3.1，3.3，3.3から導かれる． **証明終了**

4 結　　論

本稿では情報不完備下の協力的行動を分析する際のモデルの構築と，それに対するいくつかの解概念を定義し，それぞれの解概念の間の関係を明らかにした．本稿で示された関係は情報完備である場合の関係とは異なる結論になることがわかった．このような関係が成り立つのは実現可能戦略集合に依存している．つまり事前不完備強ナッシュ均衡の場合，相手の離脱可能な実現可能戦略集合は事前不完備βコア戦略の場合の離脱の可能性を減少させるからである．

それぞれの解達の存在に関してこの論文では一切の言及をしなかった．しかしながら，ベイジアンゲームのナッシュ均衡の存在は一般的にいえている．部分的な回答は，Kamishiro, Matsubae, and Utsumi（2012）によって事前不完備αコアの存在条件が示されている．それにより事前不完備αコア戦略が空となる可能性を排除できない．一方，他の解達についての一般的な存在はまだ未解決な問題である．もし事前不完備強ナッシュ均衡戦略の集合が空であるならば，事前不完備βコア戦略も必然的に空となる．しかしポジティブな結論とはいえないが，空集合も部分集合と含めるという公理的な集合論によると，この論文における関係は成りたっている．つまり，この論文でのそれぞれの解達の間の関係は一般的な事実である．

最後，にそれぞれの解概念はどのような状況を考えているかについて言及をおこなう．例えば戦略をある契約であると考えてみる．事前不完備αコア戦略を解として採用する場合，自分達が離脱したときに提携外の行動がわからない状況でも，離脱しようとする部分提携が存在しない安定な契約であると考えていることになる．事前不完備βコア戦略の場合，自分達が離脱しようとしたとき，提携外のプレイヤー達の行動がわかる状況において，離脱しようとする部分提携が存在しない安定的な契約を考えている．

今後の課題としてはそれぞれの解達についての存在問題，経済問題に対してこの概念の適応させた分析などがある．

参 考 文 献

Aumann, R. J. and B. Peleg（1964）. "Von Neumann–Morgenstern solutions to cooperative games without side payments." *Bulletion of the American Mathmatical Society*. 66, 173–179.

d'Aspremont, C. L.-A.-V. (1979). "Incentives and incomplete information." *Journal of Public Economics*. 11, 22–45.

Forges, F., E. Minelli, and R. Vohra (2002). "Incentives and the core of an exchange economy: a survey." *Journal of Mathematical Economics*. 38, 1–41.

Holmstrom, B. and R. B. Myerson (1983). "Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information." *Econometrica*. 51, 1799–1819.

Ichiishi, T. and A. Idzik (1996). "Bayesian cooperative choice of stratagies." *International Journal of Game Theory*. 25, 455–473.

Ichiishi, T. and A. Yamazaki (2006). "Cooperative extensions of the Bayesian game." *Advances in Mathematical Economics*, pp 273–296.

Kamishiro, Y., T. Matsubae, and Y. Utsumi (2012). "Ex ante -core with incentive constraints." *Chiba University of Commerce review*, 73–83.

Radner, R. (1968). "Competitive equilibrium under uncertainty." *Econometrica*. 36, 31–58.

Wilson, R. (1978). "Information efficiency, and the core of an economy." *Econometrica*. 46, 807–816.

Yannelis, N. C. (1991). "The core if an economy with differential information." *Economic Theory*. 1, 183–198.

（中央大学経済学部助教　博士（経済学））