ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-318-327

Поступила в редакцию 25.06.2020
Received 25.06.2020

Е. Р. Бабич, И. П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Объектом исследования являются дифференциальные уравнения четвертого порядка. Цель работы – изучение аналитических свойств решений данных дифференциальных уравнений. Указан общий вид рассматриваемых уравнений, а также обоснован выбор объекта исследования. Проведено изучение дифференциальных уравнений четвертого порядка, у которых нет наборов резонансов таких, чтобы все нетривиальные резонансы были положительными. Три из этих уравнений удовлетворяют условиям отсутствия у решений подвижных многозначных особых точек, а для следующих трех решения соответствующих им упрощенных уравнений имеют подвижные особые точки многозначного характера. Также исследованы аналитические свойства еще одного дифференциального уравнения четвертого порядка другого общего вида, для которого также можно построить двухпараметрическое рациональное решение, так как в соответствующем ему наборе резонансов есть нетривиальный отрицательный резонанс. Найдены первые интегралы указанных уравнений и по отрицательным нетривиальным резонансам построены их рациональные решения. При исследовании применялся метод резонансов. Полученные результаты могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, резонансы, рациональное решение, первый интеграл, мероморфность

Для цитирования. Бабич, Е. Р. Первые интегралы и рациональные решения некоторых дифференциальных уравнений четвертого порядка / Е. Р. Бабич, И. П. Мартынов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 318–327. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-318-327

Elena R. Babich, Ivan P. Martynov

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

THE FIRST INTEGRALS AND RATIONAL SOLUTIONS OF SOME FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. The object of this research is fourth-order differential equations. The aim of the research is to study the analytical properties of the solutions of these differential equations. The general form of the considered equations is indicated, and also the choice of the research object is justified. Herein we studied fourth-order differential equations for which sets of resonances with all positive nontrivial resonances are absent. Besides, three of these equations satisfy the conditions of absence in the solutions of moving multivalued singular points. The solutions of the next three equations have movable special points of multivalued character. Moreover, we also investigated the analytical properties of one more fourth-order differential equation of another general form for which it is also possible to construct a two-parameter rational solution as there is a non-trivial negative resonance in the related set of resonances. The first integrals of the equations under study are found and their rational solutions are constructed from negative non-trivial resonances. The resonance method was used in this study. The obtained results can be used in the analytical theory of differential equations.

Key words: differential equations, resonances, rational solution, the first integral, meromorphism

For citation. Babich E. R., Martynov I. P. The first integrals and rational solutions of some fourth-order differential equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 318–327 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-318-327

Введение. Исследование нелинейных дифференциальных уравнений является важным направлением развития науки, так как именно дифференциальные уравнения и системы, как правило, выступают в роли математических моделей при описании различных процессов и явлений. Аналитическая теория дифференциальных уравнений занимается изучением решений обыкновенных дифференциальных уравнений с точки зрения теории аналитических функций. Наиболее типичная задача, которая ставится в аналитической теории дифференциальных уравнений, – нахождение специфических свойств, которыми обладают аналитические функции, являющиеся решениями исследуемого класса дифференциальных уравнений. Однако с повышением порядка дифференциальных уравнений существенно возрастают трудности исследования, а число общих заключений значительно уменьшается. Так, в настоящее время даже для нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка не выполнена полная Пенлеве-классификация. Принято считать [1], что уравнение имеет свойство Пенлеве, если его общее решение в качестве подвижных особых точек имеет только полюсы однозначного характера (при их наличии).

Для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в работе [1] приведен тест Пенлеве, среди утверждений которого предложена рекомендация игнорировать отрицательные резонансы, отличные от –1. В статье [2] утверждается, что природа отрицательных резонансов «до сих пор все еще полностью не понята, и на современном этапе представляет большой интерес». Однако в [3] описан способ построения двухпараметрических рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений по отрицательным резонансам.

В работе [4] указаны необходимые условия наличия свойства Пенлеве для дифференциальных уравнений четвертого порядка вида

$$y^{IV} = a_1 \frac{y'y'''}{y} + a_2 \frac{y''^2}{y} + a_3 \frac{y'^2 y''}{y^2} + a_4 \frac{y'^4}{y^3} + F(z, y, y', y'', y'''), \tag{1}$$

где a_i, $i = 1,...,4$, – произвольные постоянные коэффициенты, среди которых есть хотя бы один не равный нулю, а F –полином по y, y', y'', y'''. Если $F(z, y, y', y'', y''') \equiv 0$, то из (1) мы получим так называемое упрощенное уравнение в смысле Пенлеве.

Если уравнение $f\left(x^{(n)},...,x,z\right) = 0$, где f – рациональная по $x,...,x^{(n)}$ функция, имеет решение

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} h_k (z - z_0)^{k-s},$$

то этому решению будем сопоставлять набор

$$(s; h_0; r_1, r_2, ..., r_n), \tag{2}$$

где $k = r_m$ – резонансы, h_{r_m} – резонансные коэффициенты. Среди резонансов r_k есть один, равный –1 (например, $r_1 = -1$). Этот резонанс будем называть тривиальным [5]. Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений рассматриваемого уравнения необходимо требовать, чтобы остальные резонансы были целыми и различными [6–8], причем по нетривиальному отрицательному резонансу можно построить рациональное решение при помощи формулы, изложенной в [3].

В работе [4] содержится раздел, посвященный дифференциальным уравнениям с отрицательными резонансами, в котором приведено восемь дифференциальных уравнений, каждому из которых соответствует по одному набору вида (2), причем в каждом из них есть хотя бы один нетривиальный отрицательный резонанс. В статье [9] исследованы аналитические свойства этих восьми дифференциальных уравнений, а также еще четырех вида (1), у которых в каждом наборе вида (2) есть хотя бы один нетривиальный отрицательный резонанс.

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальные уравнения четвертого порядка вида (1), не содержащиеся в работах [4] и [9], у которых нет наборов вида (2) таких, чтобы все нетривиальные резонансы были положительными, причем три из этих уравнений удовлетворяют условиям отсутствия у решений подвижных многозначных особых точек, а для следующих трех решения соответствующих им упрощенных уравнений имеют подвижные особые точки многозначного характера. Кроме того, исследуем аналитические свойства еще одного уравнения четвертого порядка, общий вид которого отличается от (1), однако для него можно построить рациональное двухпараметрическое решение. Найдем также первые интегралы указанных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующие дифференциальные уравнения четвертого порядка и укажем для них наборы вида (2):

$$y^{IV}=4\frac{y'y'''}{y}+3\frac{y''^2}{y}-6\frac{y'^2y''}{y^2}-6yy'',\quad (2;1;-1,-2,3,6),\tag{3}$$

$$y^{IV}=4\frac{y'y'''}{y}+3\frac{y''^2}{y}-6\frac{y'^2y''}{y^2}-36y^3,\quad (2;\pm1;-1,-3,4,6),\tag{4}$$

$$y^{IV}=2\frac{y'y'''}{y}+4\frac{y''^2}{y}-2\frac{y'^2y''}{y^2}-5yy''-3y^3,\tag{5}$$

$$(2;2;-1,-2,6,7),\quad (2;-12;-1,-7,6,12),$$

$$y^{IV}=6\frac{y'y'''}{y}+6\frac{y''^2}{y}-24\frac{y'^2y''}{y^2}+12\frac{y'^4}{y^3}-12yy',\quad (3;1;-1,-2,-3,6),\tag{6}$$

$$y^{IV}=3\frac{y'y'''}{y}+5\frac{y''^2}{y}-7\frac{y'^2y''}{y^2}-2yy''-6y'^2,\quad (2;1;-1,-2,2,9),\tag{7}$$

$$y^{IV}=4\frac{y'y'''}{y}+8\frac{y''^2}{y}-20\frac{y'^2y''}{y^2}+8\frac{y'^4}{y^3}+72y^2,\quad (4;1;-1,-2,-3,12),\tag{8}$$

$$y^{IV}=\frac{y''y'''}{y'}+2\frac{y'y'''}{y}-12y'^2,\quad (2;1;-1,-2,4,6).\tag{9}$$

Покажем, что для уравнений (6)–(8) действительно не выполняются необходимые условия мероморфности их решений. С этой целью в упрощенные уравнения для (6)–(8) подставим

$$y'=\omega y,\tag{10}$$

получим следующие уравнения и наборы для них:

$$\omega'''=2\omega\omega''+3\omega'^2-\omega^4,\tag{11}$$

$$(1;-1;-1,1,4),\quad (1;-2;-1,-2,5),\quad (1;3;-1,r_2,r_3),$$

где $r_2+r_3=13,\quad r_2\cdot r_3=60$, т. е. $r_{2,3}=\frac{13}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{71}$;

$$\omega'''=-\omega\omega''+2\omega'^2+6\omega^2\omega',\tag{12}$$

$$(1;-1;-1,2,6),\quad (1;1;-1,r_2,r_3),$$

где $r_2+r_3=6,\quad r_2\cdot r_3=12$, т. е. $r_{2,3}=3\pm i\sqrt{3}$;

$$\omega'''=5\omega'^2+2\omega^2\omega'-\omega^4,\tag{13}$$

$$(1;-1;-1,1,6),\quad (1;-3;-1,-3,10),\quad (1;2;-1,r_2,r_3),$$

где $r_2+r_3=7,\quad r_2\cdot r_3=30$, т. е. $r_{2,3}=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{71}.$

Следовательно, для уравнений (11), (12), (13) не выполняется необходимое условие для наличия свойства Пенлеве, так как присутствуют мнимые резонансы, а значит, с учетом замены (10), получим, что и для уравнений (6)–(8) не выполняется необходимое условие отсутствия у решений подвижных многозначных особых точек.

Первые и промежуточные интегралы уравнений (3)–(9). Уравнение (3) имеет первый интеграл

$$y'''=3\frac{y'y''}{y}-6yy'+hy,\tag{14}$$

где h – произвольная постоянная интегрирования, которая отвечает резонансу $r = 3$. Действительно, если в (14) исключить дифференцированием произвольную постоянную h, то получим (3).

Также для уравнений (6)–(8) первыми интегралами являются соответственно (15)–(17):

$$y''' = 6\frac{y'y''}{y} - 6\frac{y'^3}{y^2} - 6y^2 + h, \tag{15}$$

где h отвечает резонансу $r = 6$;

$$y^2 y''' = 5yy'y'' - 4y'^3 - 2y^3 y' + h, \tag{16}$$

где h отвечает резонансу $r = 9$;

$$y'y''' = \frac{1}{2}y''^2 + 4\frac{y'^2 y''}{y} - 4\frac{y'^4}{y^2} + 24y^3 + h, \tag{17}$$

где h отвечает резонансу $r = 12$.

Уравнение (4) имеет первые интегралы (18)–(19):

$$\left(\frac{y'''}{y} - 3\frac{y'y''}{y^2}\right)^2 + 72(yy'' - 2y'^2) = h_1, \tag{18}$$

где h_1 отвечает резонансу $r = 6$;

$$y'y''' - \frac{1}{2}y''^2 - 2\frac{y'^2 y''}{y} + 18y^4 = h_2 y^2, \tag{19}$$

где h_2 отвечает резонансу $r = 4$.

Действительно, продифференцируем (18), получим

$$2\left(\frac{y'''}{y} - 3\frac{y'y''}{y^2}\right)\left(\frac{y^{IV}}{y} - 4\frac{y'y'''}{y^2} - 3\frac{y''^2}{y^2} + 6\frac{y'^2 y''}{y^3}\right) + 72(yy''' - 3y'y'') = 0. \tag{20}$$

Из уравнения (4) имеем

$$\frac{y^{IV}}{y} - 4\frac{y'y'''}{y^2} - 3\frac{y''^2}{y^2} + 6\frac{y'^2 y''}{y^3} = -36y^2. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), получим верное тождество, что служит доказательством того, что (18) является первым интегралом уравнения (4).

Исключая дифференцированием произвольную постоянную h_2 в (19), получим (4), следовательно, (19) действительно является первым интегралом уравнения (4).

Из (18), (19) найдем промежуточный интеграл уравнения (4)

$$\left(yy''^2 - 2y'^2 y'' - 36y^5 + 2h_2 y^3\right)^2 + 288y^4 y'^2 (yy'' - 2y'^2) = 4h_1 y^4 y'^2. \tag{22}$$

Первым интегралом уравнения (5) является

$$\left(\frac{y'''}{y} - \frac{y'y''}{y^2} - y'\right)^2 - 2\left(\frac{y''}{y} - y\right)^3 + 12yy'' - 12y'^2 - 4y^3 = h, \tag{23}$$

где h – произвольная постоянная интегрирования, которая отвечает резонансу $r = 6$, что легко проверить, исключая дифференцированием произвольную постоянную h в (23).

Уравнение (9) имеет промежуточный интеграл

$$y'^2 = 4h_1 y^4 + 4y^3 + 2h_2 y + h_3, \tag{24}$$

где h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные интегрирования, которые отвечают соответственно резонансам – 2, 4, 6. Таким образом, верна

Т е о р е м а 1. *Первые интегралы уравнений* (3)–(8) *имеют соответственно вид* (14), (18) – (19), (23), (15), (16), (17). *Промежуточные интегралы уравнений* (4), (9) *имеют соответственно вид* (22) *и* (24).

Аналитические свойства решений исследуемых уравнений. Очевидно, решение уравнения (24) можно выразить через эллиптическую функцию Вейерштрасса [10, с. 58]. Таким образом, верна

Т е о р е м а 2. *Общее решение уравнения* (9) *является мероморфной функцией.*

Имеет место также

Т е о р е м а 3. *Уравнения* (14)–(18) *при* $h = 0$ ($h_1 = 0$) *имеют только мероморфные решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть в (14) $h = 0$, тогда получим уравнение

$$y''' = 3\frac{y'y''}{y} - 6yy'. \tag{25}$$

Заменой

$$y = u^{-1} \tag{26}$$

уравнение (25) сводится к виду

$$u''' = 3\frac{u'u''}{u} - 6\frac{u'}{u}. \tag{27}$$

Согласно работе [11, с. 46], интегрируя (27) будем иметь

$$u'' = 2C_1u^3 + 2, \tag{28}$$

где C_1 – произвольная постоянная интегрирования, причем (27), а также, учитывая выполненную замену переменной, и (25) обладает свойством Пенлеве. Интегрируя (28), получим

$$u'^2 = C_1u^4 + 4u + C_2. \tag{29}$$

Очевидно, решение уравнения (29) можно выразить через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Значит, учитывая замену (26), решение уравнения (14) при $h = 0$ является мероморфной функцией.

Пусть в (18) $h_1 = 0$, сделаем замену

$$2y'^2 - yy'' = 2\upsilon^2, \tag{30}$$

тогда (18) запишется в виде

$$\left(\frac{y'''}{y} - 3\frac{y'y''}{y^2}\right)^2 = 144\upsilon^2. \tag{31}$$

Продифференцировав (30), учитывая (31), получим $\upsilon'^2 = 9y^4$, т. е.

$$\upsilon' = -3y^2, \tag{32}$$

$$\frac{\upsilon''}{\upsilon'} = 2\frac{y'}{y}. \tag{33}$$

Продифференцировав (33), найдем

$$\frac{\upsilon'''}{\upsilon'} - \frac{\upsilon''^2}{\upsilon'^2} = 2\left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2}\right). \tag{34}$$

Из (30), учитывая (32) и (33), находим

$$\frac{y''}{y} = 2\frac{y'^2}{y^2} - 2\frac{\upsilon^2}{y^2} = \frac{1}{2}\frac{\upsilon''^2}{\upsilon'^2} + 2\cdot 3\frac{\upsilon^2}{\upsilon'}. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34), учитывая (33), для υ получим уравнение

$$\upsilon''' = \frac{3}{2}\frac{\upsilon''^2}{\upsilon'} + 12\upsilon^2, \tag{36}$$

которому соответствует набор $(3;1;-1,-3,4)$. Уравнение (36) имеет первый интеграл

$$\upsilon^2\upsilon''^2 - 4\upsilon\upsilon'^2\upsilon'' + 12\upsilon^4\upsilon' + 4\upsilon'^4 = h\upsilon'^3,$$

где h – произвольная постоянная интегрирования, которая отвечает резонансу $r = 4$.

Пусть в (36) $\upsilon' = u\upsilon$, тогда получим уравнение (37) и соответствующие ему наборы вида (2):

$$u''' = 3\frac{u'u''}{u} - \frac{3}{2}\frac{u'^3}{u^2} + uu'' - \frac{3}{2}u'^2 + \frac{3}{2}u^2u' - \frac{1}{2}u^4, \tag{37}$$
$$(1;-3;-1,-3,4), \quad (1;1;-1,1,4), \quad (1;-1;-1,1,2).$$

В работе [12] доказана мероморфность решений уравнения (37), тогда, учитывая выполненную замену переменной, согласно лемме, доказанной в работе [13], получаем, что решения уравнения (36) также являются мероморфными, значит, и y из (18) при $h_1 = 0$ имеет такое же свойство.

Замечание 1. Уравнение (36) содержится в работе [14], однако в ней не исследованы аналитические свойства решений данного уравнения.

Замечание 2. В (32) можно считать $\upsilon' = 3y^2$, тогда вместо уравнения (36) получим уравнение

$$\upsilon''' = \frac{3}{2}\frac{\upsilon''^2}{\upsilon'} - 12\upsilon^2.$$

В уравнении (15) сделаем замену (26), тогда (15) запишется в виде

$$u''' = -hu^2 + 6. \tag{38}$$

Если в (38) $h = 0$, то общее решение дифференциального уравнения (38) будет иметь вид

$$u = (z - z_0)^3 + c_1(z - z_0) + c_2 \quad \forall z_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \tag{39}$$

а значит, учитывая замену (26), решение уравнения (15) при $h = 0$ является рациональной функцией. Если в (38) $h \neq 0$, то уравнение (38) будет иметь мнимые резонансы, а поэтому уравнение (15) не имеет свойств Пенлеве.

Пусть в (16) $h = 0$, сделав замену (26), получим уравнение

$$u''' = \frac{u'}{u}(u'' - 2),$$

откуда будем иметь

$$u'' = cu + 2. \tag{40}$$

При $c = 0$ из (40) получим

$$u = z^2 + c_1 z + c_2 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Очевидно, решение уравнения (40) является мероморфной функцией, следовательно, учитывая замену (26), функция y из (16) при $h = 0$ имеет такое же свойство.

Пусть в (17) y удовлетворяет условию (26), тогда для функции u уравнение запишется в виде

$$u'u''' = \frac{1}{2}u''^2 + 24u + hu^4. \tag{42}$$

Если в (42) $h = 0$, $y' = 4\upsilon y$, то получим уравнение

$$\upsilon''' = 12\upsilon\upsilon'' - 18\upsilon'^2 + 32(\upsilon' - \upsilon^2)^2. \tag{43}$$

Уравнение (43) согласно [11, с. 307] имеет общее рациональное решение. Значит, учитывая замену (26), решение уравнения (17) является мероморфным при $h = 0$. Теорема 3 доказана.

Рациональные решения уравнений (3)–(9). Согласно исследованиям, проведенным в работе [3], для нахождения рациональных решений будем подставлять в уравнения ряд

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} h_m t^{-m\nu - s}, \quad t = z - z_0, \quad |t| > \delta, \tag{44}$$

где $\nu = -r$, если резонанс r отрицательный.

Для нахождения рационального решения уравнения (5) рассмотрим сперва случай, когда $\nu = 2$. Подставив (44) в уравнение (5), получим

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1^2, \quad h_3 = \frac{1}{4}h_1^3, \quad h_4 = \frac{1}{8}h_1^4, \ldots,$$

где h_1 – произвольная постоянная. Таким образом, члены ряда (44) в данном случае образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен $2t^{-2}$, а знаменатель равен $\frac{1}{2}h_1 t^{-2}$. Вычисляя сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и делая замену $h_1 = -2c$, получим

$$y = \frac{2}{(z - z_0)^2 + c}, \tag{45}$$

где z_0, c – произвольные постоянные. Непосредственной подстановкой (45) в (5) легко убедиться, что (45) – двухпараметрическое рациональное решение уравнения (5).

В случае, когда $\nu = 7$, при подстановке ряда (44) в уравнение (5) получим

$$h_2 = -\frac{1}{14}h_1^2, \quad h_3 = \frac{1}{196}h_1^3, \quad h_4 = -\frac{1}{2744}h_1^4, \ldots,$$

где h_1 – произвольная постоянная. Воспользовавшись формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдем

$$y = \frac{-12(z - z_0)^7 + 2c}{(z - z_0)^2\left((z - z_0)^7 + c\right)}, \tag{46}$$

где z_0, c – произвольные постоянные. Непосредственной подстановкой (46) в (5) легко убедиться, что (46) – двухпараметрическое рациональное решение уравнения (5).

Подставив (44) при $\nu = 2$ и при $\nu = 3$ в уравнение (6), найдем

$$h_2 = h_1^2, \quad h_3 = h_1^3, \quad h_4 = h_1^4, \quad h_5 = h_1^5, \ldots, \tag{47}$$

где h_1 – произвольная постоянная. Таким образом, члены ряда (44) в данном случае образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен t^{-3}, а знаменатель равен $h_1 t^{-2}$ при $\nu = 2$ и $h_1 t^{-3}$ при $\nu = 3$. Вычисляя сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и делая замену $h_1 = -c$, при $\nu = 2$ и при $\nu = 3$ соответственно получим

$$y = \frac{1}{(z - z_0)\left((z - z_0)^2 + c\right)}, \quad y = \frac{1}{(z - z_0)^3 + c}, \tag{48}$$

где z_0, c – произвольные постоянные. Непосредственной подстановкой (48) в (6) легко убедиться, что (48) – двухпараметрические рациональные решения уравнения (6).

Аналогичным образом для уравнений (3), (7) и (9) по отрицательному резонансу $r_2 = -2$ ($\nu = 2$) найдем двухпараметрическое рациональное решение

$$y = \frac{1}{(z-z_0)^2 + c}, \tag{49}$$

где z_0, c – произвольные постоянные.

Для уравнения (8) имеем $r_2 = -2$, $r_3 = -3$. Рассмотрим случай, когда $\nu = 2$. Подставив (44) в уравнение (8), получим

$$h_2 = \frac{13}{12}h_1^2, \quad h_3 = \frac{7}{6}h_1^3, \quad h_4 = \frac{181}{144}h_1^4, \ldots, \tag{50}$$

где h_1 – произвольная постоянная. Для нахождения рационального решения воспользуемся формулой [3]

$$w = \frac{h_0 t^{p\nu} + \sum\limits_{k=1}^{p}\left(h_k - \sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j h_{k-j}\right)t^{(p-k)\nu}}{t^s\left(t^{p\nu} - \sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k t^{(p-k)\nu}\right)}. \tag{51}$$

В данном случае ранг ганкелевой матрицы [15, с. 465]

$$H = \left\|h_{i+j}\right\|_0^\infty$$

считаем равным 2. При этом можем записать

$$\alpha_1 = h_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{12}h_1^2. \tag{52}$$

Подставим коэффициенты (50), (52) в формулу (51) и, сделав замену $h_1 = 6c$, получим

$$y = \frac{1}{(z-z_0)^4 - 6c(z-z_0)^2 - 3c^2}, \tag{53}$$

где z_0, c – произвольные постоянные. Непосредственной подстановкой (53) в (8) легко убедиться, что (53) – двухпараметрическое рациональное решение уравнения (8).

Рассмотрим случай, когда $\nu = 3$. Подставив (44) в уравнение (8), получим (47). Следовательно, члены ряда (44) в данном случае образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен t^{-4}, а знаменатель равен $h_1 t^{-3}$. Вычисляя сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и делая замену $h_1 = -c$, получим

$$y = \frac{1}{(z-z_0)\left((z-z_0)^3 + c\right)}, \tag{54}$$

где z_0, c – произвольные постоянные. Непосредственной подстановкой (54) в (8) легко убедиться, что (54) – двухпараметрическое рациональное решение уравнения (8).

Аналогичным образом, как и для рассмотренных выше уравнений, найдем двухпараметрическое рациональное решение уравнения (4)

$$y = \frac{z-z_0}{c \pm (z-z_0)^3}, \tag{55}$$

где z_0, c – произвольные постоянные.

Таким образом, заключаем, что верна

Т е о р е м а 4. *Уравнения* (3), (7) *и* (9) *имеют двухпараметрическое рациональное решение* (49). *Уравнения* (4), (5), (6) *и* (8) *имеют двухпараметрические рациональные решения соответственно* (55), (45)–(46), (48), (53)–(54).

З а м е ч а н и е 3. Двухпараметрическое рациональное решение (55) уравнения (4) можно получить из промежуточного интеграла (22).

Действительно, пусть в (22) $h_1 = h_2 = 0$. Сделаем замену (26), тогда для u получим уравнение

$$(uu''^2 - 2u'^2u'' - 36u)^2 = 288uu'^2u'', \tag{56}$$

решением которого является двухпараметрическое рациональное решение

$$u = \pm(z - z_0)^2 + ct^{-1}, \tag{57}$$

в чем легко убедиться, подставив (57) в (56). Учитывая замену (26), для y получим (55).

З а м е ч а н и е 4. Двухпараметрическое рациональное решение (49) уравнения (9) можно получить из (24), если взять $h_1 = -\dfrac{c}{4}$, $h_2 = h_3 = 0$. Двухпараметрическое рациональное решение (49) уравнений (3), (7) можно получить, учитывая замену (26), соответственно из (29) и (41), если положить: $c_1 = 0$, $c_2 = -4c$; $c_1 = 0$, $c_2 = c$. Двухпараметрические рациональные решения (48) уравнения (6) можно получить из (39), учитывая замену (26).

Заключение. Таким образом, проведено исследование дифференциальных уравнений четвертого порядка (3)–(8), являющихся частным случаем уравнения (1), у которых есть отрицательные нетривиальные резонансы, а также рассмотрено дифференциальное уравнение четвертого порядка (9). Для дифференциальных уравнений (3)–(8) построены первые интегралы соответственно (14), (18), (19), (23), (15), (16), (17), а также для уравнений (4), (9) построены промежуточные интегралы (24), (22) соответственно. Доказано, что общее решение уравнения (9) является мероморфной функцией. Для уравнений (3), (7), (9) найдено двухпараметрическое рациональное решение (49), а для уравнений (4), (5), (6), (8) построены двухпараметрические рациональные решения соответственно (55), (45), (46), (48), (53), (54).

Список использованных источников

1. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equation of P-type. I / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, № 4. – P. 715–721. https://doi.org/10.1063/1.524491

2. Clarkson, P. A. Symmetry and the Chazy Equation / P. A. Clarkson, P. J. Olver // J. Differential Equations. – Vol. 124, № 1. – P. 225–246. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0008

3. Здунек, А. Г. О рациональных решениях дифференциальных уравнений / А. Г. Здунек, И. П. Мартынов, В. А. Пронько // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2000. – № 3. – С.33–39.

4. Jrad, F. Non-polynomial fourth order equations which pass the Painlevé test / F. Jrad, U. Muğan // Z. Naturforsch. A. – 2005. – Vol. 60, № 6. – P. 387–400. https://doi.org/10.1515/zna-2005-0601

5. Соболевский, С. Л. Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / С. Л. Соболевский. – Минск, 2008. – 28 с.

6. Мартынов, И. П. О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 1780–1791.

7. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P-type. II / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, № 5. – P. 1006–1015. https://doi.org/10.1063/1.524548

8. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т. Н. Ванькова [и др.] // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2008. – № 1 (64). – С. 8–16.

9. Чжан Биньбинь. О рациональных решениях одного класса неполиномиальных дифференциальных уравнений четвертого порядка / Чжан Биньбинь, И. П. Мартынов // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2018. – Т. 8, № 2. – С. 32–40.

10. Мартынов, И. П. Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем / И. П. Мартынов, Н. С. Березкина, В. А. Пронько. – Гродно: ГрГУ, 2009. – 395 с.

11. Ванькова, Т. Н. Аналитические свойства решений некоторых классов дифференциальных уравнений третьего и высших порядков: дис. … канд. физ.-мат.наук: 01.01.02 / Т. Н. Ванькова. – Гродно, 2013. – 105 л.

12. Мартынов, И. П. Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей / И. П. Мартынов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 6. – С. 937–946.

13. Колесникова, Н. С. Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка с неподвижными критическими точками / Н. С. Колесникова, Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 11. – С. 2082–2086.

14. Third order differential equations with fixed critical points / Y. Adjabi [et al.] // Appl. Math. Comput. – 2009. – Vol. 208, № 1. – P. 238–248. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.11.044

15. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

References

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equation of P-type. *Journal of Mathematical Physics*, 1980, vol. 21, no. 4, pp. 715–721. https://doi.org/10.1063/1.524491

2. Clarkson P. A., Olver P. J. Symmetry and the Chazy Equation. *Journal of Differential Equations*, vol. 124, no. 1, pp. 225–246. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0008

3. Zdunek A. G., Martynov I. P., Pronko V. A. On the rational solutions of differential equations. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2000, no. 3, pp. 33–39 (in Russian).

4. Jrad F., Muğan U. Non-polynomial fourth order equations which pass the Painlevé test. *Zeitschrift für Naturforschung A,* 2005, vol. 60, no. 6, pp. 387–400. https://doi.org/10.1515/zna-2005-0601

5. Sobolevskii S. L. *Movable Singular Points of Solutions of Ordinary Differential Equations*. Minsk, 2008. 28 p. (in Russian).

6. Martynov I. P. On differential equations with fixed critical singular points. *Differential Equations*, 1973, vol. 9, no. 10, pp. 1780–1791 (in Russian).

7. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P-type. II. *Journal of Mathematical Physics*, 1980, vol. 21, no. 5, pp. 1006–1015. https://doi.org/10.1063/1.524548

8. Vankova T. N. Martynov I. P., Parmanchuk O. N., Pronko V. A. Some analytical properties of solutions of differential-algebraic equations. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne= Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2008, no. 1, pp. 8–16 (in Russian).

9. Chzhan Bin'bin', Martynov I. P. On rational solutions of a class of fourth-order non-polynomial differential equations. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 32–40 (in Russian).

10. Martynov I. P., Berezkina N. S., Pronko V. A. *Analytical Theory of Nonlinear Equations and Systems*. Grodno, GrGU Publ., 2009. 395 p. (in Russian).

11. Vankova T. N. *Analytic Properties of Solutions of Some Classes of Differential Equations of the Third and Higher Order*. Grodno, 2013. 105 p. (in Russian).

12. Martynov I. P. The equations of the third order with no moving critical features. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 6, pp. 937–946 (in Russian).

13. Kolesnikova N. S., Lukashevich N. A. On a class of third-order differential equations with fixed critical points. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1972, vol. 8, no. 11, pp. 2082–2086 (in Russian).

14. Adjabi Y., Jrad F., Kessi A., Muğan U. Third order differential equations with fixed critical points. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, vol. 208, no. 1, pp. 238–248. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.11.044

15. Gantmacher F. R. *Matrix Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 548 p. (in Russian).

Информация об авторах

Бабич Елена Романовна – аспирант кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: elena.bibilo@mail.ru

Мартынов Иван Платонович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: i.martynov@grsu.by

Information about the authors

Elena R. Babich – Postgraduate Student of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: elena.bibilo@mail.ru

Ivan P. Martynov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: i.martynov@grsu.by