ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 513.5
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-263-274

Поступила в редакцию 05.05.2020
Received 05.05.2020

Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий, Е. В. Дирвук

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ОБ ОДНОМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ФЕЙЕРА – ЭРМИТА

Аннотация. Целью данной работы является изучение нового подхода к определению интерполяционного процесса Фейера – Эрмита с узлами Чебышева – Маркова первого рода на отрезке и описание некоторых его аппроксимационных свойств. Проведен краткий анализ результатов по теме исследования – построению интерполяционных процессов, в частности Фейера – Эрмита, в полиномиальной и рациональной аппроксимации. Предложен новый способ определения интерполяционного рационального процесса Фейера – Эрмита. Один из основных результатов работы состоит в доказательстве равномерной сходимости указанного процесса для произвольной непрерывной на отрезке функции при некоторых ограничениях на полюсы аппроксимирующих функций. Этому результату предшествуют некоторые вспомогательные утверждения, описывающие свойства специальных рациональных функций. Для доказательства используются классические методы математического анализа, теории приближений и теории функций комплексного переменного. Кроме того, проводится численный анализ эффективности использования построенного интерполяционного процесса Фейера – Эрмита для приближения функции, отражающей особенности рациональной аппроксимации. При этом выбор параметров, от которых зависят узлы интерполирования, производится несколькими стандартными способами. Полученные результаты могут быть применены для дальнейшего исследования аппроксимационных свойств интерполяционных процессов.

Ключевые слова: приближение, интерполяция, рациональные функции, процесс Фейера – Эрмита, дробь Чебышева – Маркова

Для цитирования. Ровба, Е. А. Об одном интерполяционном рациональном процессе Фейера – Эрмита / Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий, Е. В. Дирвук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 263–274. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-263-274

Yauheni A. Rouba, Kanstantin A. Smatrytski, Yauheni V. Dirvuk

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

ON ONE INTERPOLATING RATIONAL PROCESS OF FEJER – HERMITE

Abstract. In this paper, a new approach to the definition of the interpolating rational process of Fejer – Hermite with first-type Chebyshev – Markov nodes on a segment is studied and some of its approximating properties are described. In the introduction a brief analysis of the results on the topic of the research is carried out. Herein, the methods of the construction of interpolating processes, in particular, Fejer – Hermite processes, in the polynomial and rational approximation are analysed. A new method to determine the interpolating rational Fejer – Hermite process is proposed. One of the main results of this paper is the proof of the uniform convergence of this process for an arbitrary function, which is continuous on the segment, under some restrictions for the poles of approximating functions. This result is preceded by some auxiliary statements describing the properties of special rational functions. The classic methods of mathematical analysis, approximation theory, and theory of functions of a complex variable are used to prove the results of the work. Moreover, we present the numerical analysis of the effectiveness of the application of the constructed interpolating Fejer – Hermite process for the approximation of a continuous function with singularities. The choice of parameters, on which the nodes of interpolation depend, is made in several standard ways. The obtained results can be applied to further study the approximating properties of interpolating processes.

Keywords: approximation, interpolation, rational functions, Fejer – Hermite process, Chebyshev – Markov fraction

For citation. Rouba Y. A., Smatrytski K. A., Dirvuk Y. V. On one interpolating rational process of Fejer – Hermite. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 263–274 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-263-274

Интерполяционные полиномиальные процессы являются важной частью теории аппроксимации. Их изучению посвящены монографии (см., напр., [1]) или отдельные главы в известных монографиях (см. [2–4]). Важное значение в современных исследованиях по теории интерполирования занимают процессы Фейера – Эрмита, сходящиеся, как правило, для более широких классов функций в сравнении с процессами Лагранжа. В этой связи обратим внимание на работу [5], в которой содержится также обширная библиография по данной тематике (около 300 источников).

В последнее время вызывает достаточный интерес интерполирование рациональными функциями по специальным системам узлов (см., напр., [6–8]).

Г. Мином [9] был построен квази-интерполяционный рациональный процесс Фейера на отрезке [–1,1] и исследована его равномерная сходимость для непрерывных функций. В работе [10] авторами был предложен другой подход к построению таких интерполяционных рациональных процессов Фейера – Эрмита с узлами Чебышева – Маркова второго рода.

Некоторые упоминания об интерполяционных рациональных процессах Фейера – Эрмита с узлами Чебышева – Маркова первого рода содержатся еще в работе В. Н. Русака [11].

В настоящей работе построен интерполяционный рациональный процесс Фейера – Эрмита в случае, когда в качестве узлов выбираются нули алгебраических дробей Чебышева – Маркова первого рода. Здесь мы следуем схеме, предложенной в статье [11].

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и a_k, $k = 0,1,...,2n-1$, – набор чисел, удовлетворяющих условиям:

1) $a_0 = 0$;

2) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$;

3) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l, что $a_l = \overline{a_k}$.

Введем косинус–дробь Чебышева – Маркова [12]

$$m_n(x) = \cos \mu_{2n}(x), \quad x \in [-1;1], \tag{1}$$

где

$$\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}. \tag{2}$$

Заметим, что

$$\mu'_{2n}(x) = -\frac{\lambda_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1 + a_k x}. \tag{3}$$

Как известно [12], функция $m_n(x)$ может быть записана в виде

$$m_n(x) = \frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{2n-1} \sqrt{1 + a_k x}}, \tag{4}$$

где $p_n(x)$ – некоторый алгебраический полином степени, равной n.

Косинус-дробь $m_n(x)$ имеет n простых нулей на интервале (–1,1):

$$-1 < x_n < x_{n-1} < ... < x_1 < 1, \quad \mu_{2n}(x_k) = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 1,2,...,n. \tag{5}$$

Отметим, что

$$m'_n(x) = -\sin \mu_{2n}(x) \cdot \mu'_{2n}(x) = \sin \mu_{2n}(x) \frac{\lambda_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

и

$$m'_n(x_k) = (-1)^{k+1}\frac{\lambda_{2n}(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}}. \tag{6}$$

Кроме того,

$$m''_n(x) = -\cos\mu_{2n}(x)\frac{\lambda_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sin\mu_{2n}(x)\frac{\lambda'_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sin\mu_{2n}(x)\frac{x\lambda_{2n}(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

и

$$m''_n(x_k) = (-1)^{k+1}\frac{\lambda'_{2n}(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}} + (-1)^{k+1}\frac{x_k\lambda_{2n}(x_k)}{\sqrt{(1-x_k^2)^3}}. \tag{7}$$

При $k = 1, 2, ..., n$ определим функции $A_k(x)$ и $B_k(x)$ следующим образом:

$$A_k(x) = \frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\left(\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right)^2\left(1-d_k(x-x_k)\right), \tag{8}$$

$$B_k(x) = \frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\frac{m_n^2(x)}{x-x_k}, \tag{9}$$

где d_k, $k = 1, 2, ..., n$, – некоторые постоянные. Подберем такое значение постоянных d_k, чтобы $A'_k(x_k) = 0$, $k = 1, 2, ..., n$. Очевидно,

$$A'_k(x) = \frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\frac{m_n(x)}{x-x_k}\left(2\frac{m'_n(x)(x-x_k) - m_n(x)}{(x-x_k)^2}\left(1-d_k(x-x_k)\right) - \frac{m_n(x)}{x-x_k}c_k\right).$$

Тогда

$$A'_k(x_k) = \lim_{x\to x_k} A'_k(x) = \frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)} m'_n(x_k)\left(m''_n(x_k) - m'_n(x_k)d_k\right).$$

Таким образом, с помощью (6) и (7) (см. также [1])

$$d_k = \frac{m''_n(x_k)}{m'_n(x_k)} = \frac{\lambda'_{2n}(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} + \frac{x_k}{1-x_k^2}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{10}$$

Обозначим через $\mathbf{P}_n$, как обычно, множество всех алгебраических полиномов степени не выше n и введем в рассмотрение множество функций

$$\mathbf{R}_{2n-1}(a) = \left\{ r_{2n-1}(x):\ r_{2n-1}(x) = \frac{p_{2n-1}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{2n-1}(1+a_k x)},\ p_{2n-1}(x) \in \mathbf{P}_{2n-1} \right\}. \tag{11}$$

Опишем некоторые свойства функций $A_k(x)$ и $B_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Л е м м а 1. $A_k(x), B_k(x) \in \mathbf{R}_{2n-1}(a)$, $k = 1, 2, ..., n$. *Для* $k, m = 1, 2, ..., n$ *имеют место равенства*

$$A_k(x_m) = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ 1, & m = k, \end{cases} \quad A'_k(x_m) = 0, \tag{12}$$

$$B_k(x_m) = 0, \quad B'_k(x_m) = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ 1, & m = k. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы легко проверяется с помощью определений (8), (9) и представления (4).

Так как $m_n(x_m)=0$, то $A_k(x_m)=0$ при $m \neq k$. Если же $m = k$, то с помощью (6)

$$A_k(x_k)=\lim_{x\to x_k} A_k(x)=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\lim_{x\to x_k}\left(\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right)^2=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\left(m_n'(x_k)\right)^2=1.$$

При $m \neq k$ вторая часть соотношений (12) очевидна. При $m = k$ требуемое равенство обеспечивает выбор параметров d_k (10).

Теперь проверим равенства (13). Из (9) следует, что

$$B_k'(x)=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\frac{m_n(x)}{x-x_k}\frac{2m_n'(x)(x-x_k)-m_n(x)}{x-x_k}.$$

Поэтому при $m \neq k$ соотношения (13) верны. Если же $m = k$, то

$$B_k(x_k)=\lim_{x\to x_k} B_k(x)=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\lim_{x\to x_k}\frac{m_n^2(x)}{x-x_k}=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}2m_n(x_k)m_n'(x_k)=0.$$

Кроме того, с помощью (6)

$$B_k'(x_k)=\lim_{x\to x_k} B_k'(x)=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\lim_{x\to x_k}\frac{m_n(x)}{x-x_k}\lim_{x\to x_k}\frac{2m_n'(x)(x-x_k)-m_n(x)}{x-x_k}=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\left(m_n(x_k)\right)^2=1.$$

Лемма 1 доказана.

Для произвольной функции $f(x)$, определенной на отрезке [–1,1], построим функцию

$$H_n(x,f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)A_k(x)+\sum_{k=1}^{n} y_k B_k(x), \tag{14}$$

где y_k, $k=1,2,...,n$, – некоторые наперед заданные действительные числа.

Лемма 2. $H_n(x,f)\in \mathbf{R}_{2n-1}(a)$. *Кроме того,*

$$H_n(x_k,f)=f(x_k),\quad H_n'(x_k,f)=y_k,\quad k=1,2,...,n. \tag{15}$$

Доказательство. Первая часть леммы непосредственно следует из определения (14) и первого утверждения леммы 1. Интерполяционные условия (15) вытекают из соответствующих свойств (12) и (13). Лемма 2 доказана.

Замечание. Определение (14) и утверждение леммы 2 позволяют назвать $H_n(x,f)$ интерполяционным рациональным процессом типа Фейера – Эрмита.

Лемма 3. *Пусть* $r_{2n-1}(x)\in \mathbf{R}_{2n-1}(a)$ *и* $y_k=r_{2n-1}'(x_k)$, $k=1,2,...,n$. *Тогда* $H_n(x,r_{2n-1})\equiv r_{2n-1}(x)$. *В частности, справедливо тождество*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x)\equiv 1. \tag{16}$$

Доказательство. Учитывая соотношения (15), запишем

$$H_n(x_k,r_{2n-1})=r_{2n-1}(x_k),\quad H_n'(x_k,r_{2n-1})=r_{2n-1}'(x_k),\quad k=1,2,...,n.$$

Таким образом, каждая их точек x_k, $k=1,2,...,n$, является нулем, по крайней мере, второго порядка рациональной функции $H_n(x,r_{2n-1})-r_{2n-1}(x)\in \mathbf{R}_{2n-1}(a)$. Поэтому первое утверждение леммы справедливо. Равенство (16) вытекает из доказанного утверждения при $r_{2n-1}(x)\equiv 1$. Лемма 3 доказана.

Для дальнейшего исследования нам понадобится специальный случай функции (14). Пусть $y_k=0$, $k=1,2,...,n$. Рассмотрим линейный оператор $H_n^{(0)}(x,f): C[-1,1]\to \mathbf{R}_{2n-1}(a)$, определяемый формулой

$$H_n^{(0)}(x,f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)A_k(x). \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$H_n^{(0)}(x,1)\equiv 1. \tag{18}$$

Наряду с числами a_k, $k=1,2,...,2n-1$, будем рассматривать числа c_k, связанные с данными числами условиями

$$c_k=a_k^{-1}-\sqrt{a_k^{-2}-1},\quad a_k^{-1}=\frac{1}{2}\left(c_k+c_k^{-1}\right),\quad k=1,2,...,2n-1. \tag{19}$$

Здесь выбираем так ветвь квадратного корня, чтобы $|c_k|<1,\quad k=1,2,...,2n-1$. Также, если $a_k=0$, то и $c_k=0$. Кроме того, в дальнейшем будем полагать, что

$$|c_k|\le\rho<1,\quad k=1,2,...,2n-1. \tag{20}$$

Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 4. *При выполнении условий* (20) *для любых* $x\in[-1,1]$ *справедливы неравенства*

$$C_1(\rho)n\le\lambda_{2n}(x)\le C_2(\rho)n, \tag{21}$$

$$|\lambda'_{2n}(x)|\le C_3(\rho)n. \tag{22}$$

Здесь и далее через $C_1(\rho),C_2(\rho),...$ *будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от* ρ (*см.* (20)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим каждое слагаемое из правой части (3):

$$\gamma_k=\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_kx},\quad k=1,2,...,2n-1,\quad x\in[-1,1].$$

Перепишем его в виде

$$\gamma_k=\frac{\sqrt{a_k^{-2}-1}}{a_k^{-1}+x}$$

и воспользуемся соотношениями (19). Тогда

$$|\gamma_k|=\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\left(c_k^2+2+\frac{1}{c_k^2}\right)-1}}{\frac{1}{2}\left(c_k+c_k^{-1}\right)+x}\right|=\frac{|1-c_k^2|}{2|c_k|\left|\frac{1}{2}\left(c_k+c_k^{-1}\right)+x\right|}.$$

Воспользуемся свойствами функции Жуковского. Точка $\frac{1}{2}\left(c_k+c_k^{-1}\right)$ лежит на эллипсе с фокусами ±1, полуосями $\frac{1}{2}\left(|c_k|+|c_k^{-1}|\right)$ и $\frac{1}{2}\left(|c_k^{-1}|-|c_k|\right)$. Так как $x\in[-1,1]$, то в случае действительного a_k будем иметь

$$\frac{(1-|c_k|)^2}{2|c_k|}\le\left|\frac{1}{2}\left(c_k+c_k^{-1}\right)+x\right|\le\frac{(1+|c_k|)^2}{2|c_k|}.$$

Следовательно,

$$\frac{1-|c_k|}{1+|c_k|}\le|\gamma_k|\le\frac{1+|c_k|}{1-|c_k|},\quad k=1,2,...,2n-1,\quad x\in[-1,1].$$

В случае комплексных значений параметров a_k, аналогичный результат получится при рассмотрении двух комплексно сопряженных слагаемых.

Суммируя найденные неравенства по k от 1 до $2n-1$ и учитывая условие (20), придем к соотношениям (21).

Оценка (22) доказывается таким же образом. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *При выполнении условий* (20) *последовательность функций*

$$Q_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x_k^2)\,|\lambda'_{2n}(x_k)|}{\lambda_{2n}^3(x_k)}\frac{m_n^2(x)}{|x-x_k|}$$

равномерно сходится к нулю на отрезке $[-1,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя результат леммы 4, несложно получить, что

$$|Q_n(x)|\le\frac{C_4(\rho)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\lambda_{2n}(x_k)}\left|\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right|,\quad x\in[-1,1]. \tag{23}$$

Сумма в правой части последнего неравенства есть не что иное, как функция Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова (см. [6]). На основании теоремы из [6] следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{\lambda_{2n}(x_k)}\left|\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right|\le C_5(\rho)\ln n,\quad x\in[-1,1].$$

Отсюда и из (23) следует заключение леммы 5.

Л е м м а 6. *При выполнении условий* (20) *последовательность функций*

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k|}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\frac{m_n^2(x)}{|x-x_k|}$$

равномерно ограничена на отрезке $[-1,1]$*, т. е. существует такая постоянная* $C_6(\rho)$*, что*

$$S_n(x)\le C_6(\rho),\quad x\in[-1,1].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем замену $x=\cos\theta,\ \ \theta\in[0,\pi]$ и обозначим $x_k=\cos\theta_k$, $0<\theta_1<$ $<\theta_2<\ldots<\theta_n<\pi$. Тогда

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|\cos\theta_k|}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)}\frac{m_n^2(\cos\theta)}{|\cos\theta-\cos\theta_k|}. \tag{24}$$

Заметим (см. (2) и (5)), что

$$\mu_{2n}(x_{k+1})-\mu_{2n}(x_k)=\mu_{2n}(\cos\theta_{k+1})-\mu_{2n}(\cos\theta_k)=-\mu'_{2n}(x_k^*)\sin\theta_k^*(\theta_{k+1}-\theta_k)=\pi,$$
$$k=0,1,\ldots,n,$$

где $\theta_k^*\in(\theta_k,\theta_{k+1}),\ \ x_k^*=\cos\theta_k^*,\ \ \theta_0=0,\ \ \theta_{n+1}=\pi$. Тогда, при применении (3),

$$\theta_{k+1}-\theta_k=\frac{\pi}{\lambda_{2n}(x_k^*)}.$$

Поэтому, используя неравенства (21), несложно получить, что

$$\frac{C_7(\rho)}{n}\le\theta_{k+1}-\theta_k\le\frac{C_8(\rho)}{n},\quad k=0,1,\ldots,n. \tag{25}$$

Рассмотрим слагаемые, входящие в сумму (24). Имеем

$$t_k(\theta)=\frac{|\cos\theta_k|}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)}\frac{m_n^2(\cos\theta)}{|\cos\theta-\cos\theta_k|}\le\frac{|m_n(\cos\theta)-m_n(\cos\theta_k)|}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)\,|\cos\theta-\cos\theta_k|},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Для числителя последней дроби получим

$$|m_n(\cos\theta) - m_n(\cos\theta_k)| = |m_n'(\cos\xi_k)\sin\xi_k(\theta - \theta_k)| = \lambda_{2n}(\cos\xi_k)\,|\theta - \theta_k|,$$

где ξ_k находится между θ и θ_k. Поэтому

$$t_k(\theta) \le \frac{\lambda_{2n}(\cos\xi_k)\,|\theta - \theta_k|}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)2\left|\sin\frac{\theta - \theta_k}{2}\right|\sin\frac{\theta + \theta_k}{2}}.$$

Осталось применить неравенства (21) и (25), чтобы получить

$$t_k(\theta) \le C_9(\rho), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Зафиксируем $x \in [-1, 1]$, и пусть $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$. Тогда для суммы (24) справедливы соотношения

$$S_n(x) \le 4C_9(\rho) + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{|\cos\theta_k|}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)} \frac{m_n^2(\cos\theta)}{\cos\theta_k - \cos\theta} + \sum_{k=m+3}^{n} \frac{|\cos\theta_k|}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)} \frac{m_n^2(\cos\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_k} =$$

$$=: 4C_9(\rho) + \sigma^{(1)}(x) + \sigma^{(2)}(x). \tag{26}$$

Конечно, в некоторых случаях расположения θ относительно чисел θ_k, $k = 1, 2, \dots, n$, одна из сумм в правой части последнего равенства может отсутствовать. В таких случаях доказательство, очевидно, упрощается.

Далее оценим, например, сумму $\sigma^{(1)}(x)$:

$$\sigma^{(1)}(x) \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-2} \frac{1}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)\sin\frac{\theta_m - \theta_k}{2}\sin\frac{\theta_m + \theta_k}{2}}. \tag{27}$$

Предположим, что $\theta_{m-2} \le \frac{\pi}{2}$. Тогда с помощью (25) находим, что

$$\sin\frac{\theta_m - \theta_k}{2} \ge \frac{2}{\pi}\frac{\theta_m - \theta_k}{2} = \frac{1}{\pi}(\theta_m - \theta_{m-1} + \theta_{m-1} - \theta_{m-2} + \ldots + \theta_{k+1} - \theta_k) \ge C_{10}(\rho)\frac{m-k}{n},$$

$$\sin\frac{\theta_m + \theta_k}{2} \ge C_{10}(\rho)\frac{m+k}{n}.$$

Следовательно, учитывая (21), имеем

$$\sigma^{(1)}(x) \le C_{11}(\rho)\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{m^2 - k^2} \le C_{12}(\rho), \quad x \in [-1, 1]. \tag{28}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\theta_{m-2} > \frac{\pi}{2}$. Определим число $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\theta_{m_0} < \frac{\pi}{2} \le \theta_{m_0+1}$. Тогда из (27) получим

$$\sigma^{(1)}(x) \le \sigma_1^{(1)}(x) + \sigma_2^{(1)}(x),$$

где

$$\sigma_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} \frac{1}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)\sin\frac{\theta_m - \theta_k}{2}\sin\frac{\theta_m + \theta_k}{2}},$$

$$\sigma_2^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=m_0+1}^{m-2} \frac{1}{\lambda_{2n}^2(\cos\theta_k)\sin\frac{\theta_m - \theta_k}{2}\sin\frac{\theta_m + \theta_k}{2}}.$$

Для суммы $\sigma_1^{(1)}(x)$ легко получить оценку, аналогичную неравенству (28). Для суммы $\sigma_2^{(1)}(x)$ воспользуемся тем, что

$$\sin\frac{\theta_m-\theta_k}{2}\ge\frac{1}{\pi}(\theta_m-\theta_k),$$

$$\sin\frac{\theta_m+\theta_k}{2}=\sin\left(\pi-\frac{\theta_m+\theta_k}{2}\right)\ge\frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{\theta_m+\theta_k}{2}\right)=\frac{1}{\pi}(2\pi-\theta_m-\theta_k).$$

Поэтому, применяя (21),

$$\sigma_2^{(1)}(x)\le\frac{C_{13}(\rho)}{n^2}\sum_{k=m_0+1}^{m-2}\frac{1}{(\theta_m-\theta_k)(2\pi-\theta_m-\theta_k)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\frac{1}{(\theta_m-t)(2\pi-\theta_m-t)},\quad t\in[\theta_{m0+1},\theta_{m-2}].$$

Так как

$$\varphi'(t)=\frac{2\pi-2t}{(\theta_m-t)^2(2\pi-\theta_m-t)^2},$$

то эта функция является возрастающей при $t\in[\theta_{m0+1},\theta_{m-2}]$. Значит,

$$\sigma_2^{(1)}(x)\le\frac{C_{14}(\rho)}{n}\int\limits_{\theta_{m0+1}}^{\theta_{m-1}}\frac{dt}{(\theta_m-t)(2\pi-\theta_m-t)}=\frac{C_{14}(\rho)}{2n(\pi-\theta_m)}\left(\int\limits_{\theta_{m0+1}}^{\theta_{m-1}}\frac{dt}{\theta_m-t}-\int\limits_{\theta_{m0+1}}^{\theta_{m-1}}\frac{dt}{2\pi-\theta_m-t}\right)=$$

$$=\frac{C_{14}(\rho)}{2n(\pi-\theta_m)}\ln\frac{2\pi-\theta_m-t}{\theta_m-t}\Bigg|_{\theta_{m0+1}}^{\theta_{m-1}}\le\frac{C_{14}(\rho)}{2n(\pi-\theta_m)}\left(\ln\frac{2\pi-\theta_m-\theta_{m-1}}{\theta_m-\theta_{m-1}}+\ln\frac{2\pi-\theta_m-\theta_{m0+1}}{\theta_m-\theta_{m0+1}}\right).$$

В силу того, что

$$\left(\ln\frac{2\pi-\theta_m-t}{\theta_m-t}\right)'=\frac{2\pi-\theta_m}{(\theta_m-t)(2\pi-\theta_m-t)}>0,\quad t\in[\theta_{m0+1},\theta_{m-1}],$$

имеем

$$\sigma_2^{(1)}(x)\le\frac{C_{14}(\rho)}{n(\pi-\theta_m)}\ln\frac{2\pi-\theta_m-\theta_{m-1}}{\theta_m-\theta_{m-1}}\le\frac{C_{15}(\rho)}{n(\pi-\theta_m)}\ln n(\pi-\theta_m).$$

Заметим также, что неравенства, аналогичные неравенствам (25), имеют место и для разности $\pi-\theta_n$. Тогда, воспользовавшись данными соотношениями, несложно получить, что

$$\sigma_2^{(1)}(x)\le C_{15}(\rho),\quad x\in[-1,1].$$

Таким образом, мы доказали ограниченность суммы $\sigma^{(1)}(x)$ из (26). Ограниченность суммы показывается $\sigma^{(2)}(x)$ аналогично. Лемма 6 доказана.

Сформулируем основной результат.

Т е о р е м а. *Пусть* $f\in C[-1,1]$. *При выполнении условий* (20) *интерполяционный рациональный процесс Фейера – Эрмита* $H_n^{(0)}(x,f)$, $n=1,2,...,$ (*см.* (17)) *равномерно сходится к функции f на отрезке* $[-1,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств (17) и (18) следует, что

$$f(x)-H_n^{(0)}(x,f)=\sum_{k=1}^{n}\big(f(x)-f(x_k)\big)A_k(x), \tag{29}$$

где

$$A_k(x)=\frac{1-x_k^2}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\left(\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right)^2\left(1-\left(\frac{\lambda'_{2n}(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)}+\frac{x_k}{1-x_k^2}\right)(x-x_k)\right),\quad k=1,2,...,n.$$

Зафиксируем $x\in[-1,1]$. В силу равномерной непрерывности функции f на отрезке [–1,1] для произвольного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при любых $x',x''\in[-1,1]$, $|x'-x''|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Разобьем множество индексов $k=1,2,...,n$ на две группы:

$$\Omega=\{k,k=1,2,...,n:|x_k-x|<\delta\},\quad C\Omega=\{1,2,...,n\}\setminus\Omega.$$

Тогда с помощью (29) легко получить, что

$$\left|f(x)-H_n^{(0)}(x,f)\right|\le\varepsilon S^{(1)}(x)+2MS^{(2)}(x), \tag{30}$$

где $M=\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|$,

$$S^{(1)}(x)=\sum_{k\in\Omega}|A_k(x)|,\quad S^{(2)}(x)=\sum_{k\in C\Omega}|A_k(x)|.$$

Из равенства (16), лемм 5, 6 и определения (8) следует, что функция $S^{(1)}(x)$ равномерно ограничена на [–1,1], т. е.

$$S^{(1)}(x)\le C_{12}(\rho),\quad x\in[-1,1]. \tag{31}$$

Кроме того,

$$|A_k(x)|=\frac{1}{\lambda_{2n}^2(x_k)}\frac{1}{(x-x_k)^2}\left(1-x_k^2+\frac{|\lambda'_{2n}(x_k)|}{\lambda_{2n}(x_k)}|x-x_k|+|x_k||x-x_k|\right).$$

Очевидно, что $|x-x_k|<2$, $|x_k|<1$, $1-x_k^2<1$. Поэтому, учитывая (21) и (22), выражение в скобках ограничено. Воспользовавшись выбором индексов $C\Omega$, получаем:

$$|A_k(x)|\le\frac{C_{14}(\rho)}{n^2\delta^2},\quad k\in C\Omega,\quad x\in[-1,1].$$

Тогда

$$|S^{(2)}(x)\le\frac{C_{14}(\rho)}{n^2\delta^2}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{C_{14}(\rho)}{n\delta^2}. \tag{32}$$

Подставляя (31) и (32) в (30), окончательно получаем

$$\left|f(x)-H_n^{(0)}(x,f)\right|\le C_{14}(\rho)\left(\varepsilon+\frac{2M}{n\delta^2}\right),\quad x\in[-1,1].$$

Таким образом, последовательность $\{H_n^{(0)}(x,f)\}$, $n=1,2,...$, равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке [–1,1]. Теорема доказана.

П р и м е р. Представляет интерес проиллюстрировать численным образом применение полученных интерполяционных процессов для аппроксимации некоторых непрерывных функций при различных способах выбора параметров, от которых зависят узлы интерполирования. Здесь заметим следующее. По всей видимости, можно доказать, что основной результат работы остается справедливым и в том случае, когда на параметры a_k, $k=0,1,...,2n-1$ (или c_k) условие (19) не накладывается.

Рассмотрим приближение функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Учитывая особенность функции, в этом случае в качестве параметров, по которым строится косинус-дробь Чебышева – Маркова, будем использовать вещественные, симметричные относительно нуля, числа.

Рассмотрим три случая. Первый случай – два геометрически различных ненулевых параметра:

$$a_0=a_1=0,\quad a_k=\frac{1}{2},\quad k=2,\dots,n,\quad a_k=-\frac{1}{2},\quad k=n+1,\dots,2n-1. \tag{33}$$

Второй случай – ненулевые параметры a_k, $k=0,1,\dots,2n-1$, имеют кратность, равную 1, и выбираются таким образом, что выполняются условия (19) (т. е. параметры a_k «не сгущаются» к концам отрезка [–1, 1]):

$$a_0=a_1=0,\quad a_k=\frac{Ck}{n},\quad a_{n+k-1}=-a_k,\quad k=2,3,\dots,n, \tag{34}$$

где C – положительная константа, $C>1$.

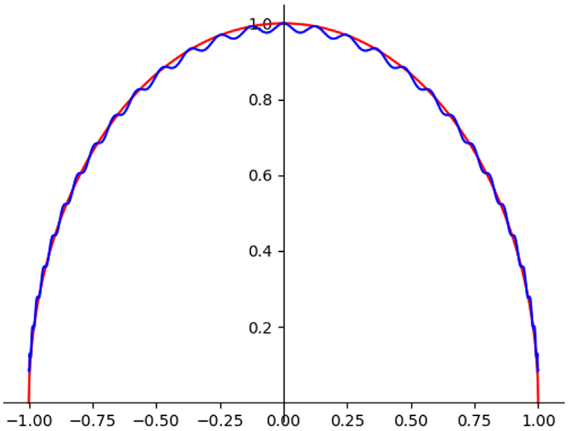
Третий случай. Параметры a_k «сгущаются» к концам отрезка [–1, 1]:

$$a_0=a_1=0,\quad a_k=1-\frac{k}{n},\quad a_{n+k-1}=-a_k,\quad k=2,3,\dots,n. \tag{35}$$

Предположив также, что порядок приближения функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, построенными интерполяционными рациональными функциями типа Фейера – Эрмита $H_n^{(0)}(x,f)$ равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$, в каждом из рассмотренных случаев найдем несколько первых членов последовательности $\left\{\sqrt{n}E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|f(x)-H_n^{(0)}(x,f)\right|$.

n	Случай (33)		Случай (34), C = 0,9		Случай (35)	
	$E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$	$\sqrt{n}E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$	$E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$	$\sqrt{n}E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$	$E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$	$\sqrt{n}E_n\left(\sqrt{1-x^2}\right)$
11	0,21020	0,69715	0,19721	0,65409	0,20753	0,68831
21	0,12682	0,58118	0,11985	0,54923	0,12083	0,55369
31	0,09276	0,51645	0,08788	0,48928	0,08655	0,48188
41	0,07385	0,47292	0,07005	0,44854	0,06795	0,43509
51	0,06172	0,44074	0,05857	0,41826	0,05619	0,40129
61	0,05321	0,41554	0,05051	0,39447	0,04805	0,37529
71	0,04688	0,39504	0,04451	0,37506	0,04206	0,35443
81	0,04198	0,37788	0,03987	0,35879	0,03746	0,33718
91	0,03807	0,36320	0,03615	0,34487	0,03381	0,32257
101	0,03487	0,35044	0,03311	0,33275	0,03084	0,30998

На рисунке показаны графики функций $f(x)=|x|$ и $H_{31}^{(0)}(x,f)$ в случае (34).



Рассмотренный пример показывает возможность применения введенных в статье интерполяционных рациональных функций типа Фейера – Эрмита для приближения непрерывных на отрезке функций. Конечно, качество приближения зависит от выбора параметров $a_k, k = 0,1,...,2n-1$.

Заключение. В работе описан новый подход к построению интерполяционного рационального процесса Фейера – Эрмита на отрезке с узлами в нулях косинус-дробей Чебышева – Маркова первого рода. Доказана сходимость этого процесса для произвольной непрерывной на отрезке функции при некоторых ограничениях на полюсы аппроксимирующих функций. Проведен численный анализ эффективности использования построенного интерполяционного процесса Фейера – Эрмита для приближения функции, отражающей особенности рациональной аппроксимации.

Также можно сделать предположение о том, что результаты работы останутся верными и в случае, когда условие (19) не накладывается, а выполняется лишь ограничение на параметры, обеспечивающее полноту соответствующей системы рациональных функций (см, напр., [10, с. 296]).

Список использованных источников

1. Szabados, J. Interpolation of functions / J. Szabados, P. Vertesi. – World Scientific, 1990. – 305 p. https://doi.org/10.1142/0861

2. DeVore, R. Constructive approximation / R. DeVore, G. Lorentz. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. – 452 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02888-9

3. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1959. – 328 с.

4. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

5. Mills, T. Some techniques in approximation theory / T. Mills // Math. Sci. – 1980. – № 5. – P. 105–120.

6. Ровба, Е. А. О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова / Е. А. Ровба, Е. В. Дирвук // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2015. – № 4. – С. 32–38.

7. Русак, В. Н. Синус-дроби Чебышева – Маркова в приближенном интегрировании / В. Н. Русак, Н. В. Гриб // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фiзiка. Матэматыка. Iнфарматыка. Бiялогiя. Геаграфiя. – 2015. – № 2. – С. 17–20.

8. Ровба, Е. А. Сходимость в среднем интерполяционных рациональных процессов в нулях дробей Бернштейна // Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 5–9.

9. Min, G. Lobbatto-type quadrature formula in rational space / G. Min // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 94, № 1. – P. 1–12. https://doi.org/10.1016/s0377-0427(98)00068-5

10. Rouba, Y. Rational quasi-Hermite-Fejer-type interpolation and Lobatto-type quadrature formula with Chebyshev-Markov nodes / Y. Rouba, K. Smatrytski, Y. Dirvuk // Jaen J. Approximation. – 2015. – Vol. 7, № 2. – P. 291–308.

11. Русак, В. Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами / В. Н. Русак // Докл. Акад. наук БССР. – 1962. – Т. 4, № 9. – С. 548–550.

12. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 176 с.

References

1. Szabados J., Vertesi P. *Interpolation of Functions*. World Scientific, 1990, 305 p. https://doi.org/10.1142/0861

2. DeVore R., Lorentz G. *Constructive Approximation*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1993. 452 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02888-9

3. Krylov V. I. *Approximate Calculation of Integrals*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 328 p. (in Russian).

4. Natanson I. P. *Constructive Theory of Functions*. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat Publ., 1949. 688 p. (in Russian).

5. Mills T. Some techniques in approximation theory. *Mathematical Scientist*, 1980, no. 5, pp. 105–120.

6. Rouba Y. A. Dirvuk Y. V. Estimation of the Lebesgue constant for the rational Lagrange interpolation processes through the Chebyshev – Markov nodes. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 4, pp. 32–38 (in Russian).

7. Rusak V. N., Grib N. V. Chebyshev – Markov sine-fractions in approximate integration. *Vestsi BDPU. Seryja 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya = Proceedings of BSPU. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography*, 2015, no. 2, pp. 17–20 (in Russian).

8. Rouba Y. A. Smatrytski K. A. Convergence in the mean of rational interpolating processes in the zeroes of Bernstein fractures. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2010, no. 3, pp. 5–9 (in Russian).

9. Min G. Lobbatto-type quadrature formula in rational space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1998, vol. 94, no. 1, pp. 1–12. https://doi.org/10.1016/s0377-0427(98)00068-5

10. Rouba Y., Smatrytski K., Dirvuk Y. Rational quasi-Hermite-Fejer-type interpolation and Lobatto-type quadrature formula with Chebyshev-Markov nodes. *Jaen Journal on Approximation*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 291–308.

11. Rusak V. N. On interpolation by rational functions with fixed poles. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1962, vol. 4, no. 9, pp. 548–550 (in Russian).

12. Rusak V. N. *Rational Functions as Approximation Apparatus*. Minsk, Belarusian State University, 1979. 176 p. (in Russian).

Информация об авторах

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: rovba.ea@gmail.com

Смотрицкий Константин Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: k_smotritski@mail.ru

Дирвук Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного программирования и компьютерной безопасности, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: dirvuk@gmail.com

Information about the authors

Yauheni A. Rouba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). Email: rovba.ea@gmail.com

Kanstantin A. Smatrytski – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). Email: k_smotritski@mail.ru

Yauheni V. Dirvuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of System Programming and Computer Security, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). Email: dirvuk@gmail.com