ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.956.3
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297

Поступила в редакцию 22.06.2020
Received 22.06.2020

В. И. Корзюк[1,2], С. Н. Наумовец[3], В. П. Сериков[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[3]Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ И ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. В полуполосе на плоскости в случае двух независимых переменных рассмотрена смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями Коши на основании полуполосы и граничными условиями на боковых частях границы области, в которые входят производные второго порядка. Кроме того, на характеристиках, на которых не выполняются однородные условия согласования, задаются условия сопряжения для искомой функции и ее производных. Методом характеристик найдено классическое решение указанной задачи в аналитическом виде. Доказана его единственность при выполнении соответствующих условий.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия согласования, классическое решение

Для цитирования. Корзюк, В. И. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. П. Сериков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 287–297. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297

Viktor I. Korzyuk[1,2], Sviatlana N. Naumavets[3], Vladimir P. Serikov[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[3]Brest State Technical University, Brest, Belarus

MIXED PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH COJUGATION CONDITIONS AND SECOND-ORDER DERIVATIVES IN BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. In this paper, we consider the boundary problem for the half-strip on the plane for the case of two independent variables. This mixed problem is solved for a one-dimensional wave equation with Cauchy conditions on the basis of the half-strip and boundary conditions for lateral parts of the area border containing second-order derivatives. Moreover, the conjugation conditions are specified for the required function and its derivatives for the case when the homogeneous matching conditions are not satisfied. A classical solution to this problem is found in an analytical form by the characteristics method. This solution is approved to be unique if the relevant conditions are fulfilled.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy conditions, matching conditions, classical solution

For citation. Korzyuk V. I., Naumavets S. N., Serikov V. P. Mixed problem for a one-dimensional wave equation with conjugation conditions and second-order derivatives in boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 287–297 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-287-297

Введение. Данное исследование фактически является продолжением статьи [1]. В [1] получено классическое решение задачи, которая изучается в настоящей работе, из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций в случае однородных условий согласования, которым удовлетворяют заданные функции задачи в точках перехода условий Коши в граничные условия другого вида.

Заметим, что требование решения из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций до второго порядка включительно автоматически налагает требования выполнения однородных условий согласования для заданных функций задачи. Последние могут быть только теоретическими. На практике при использовании численных методов решения условия согласования всегда имеют определенную погрешность, т. е. являются неоднородными. С другой стороны, при моделировании возникают такого рода задачи с неоднородными условиями, которые необходимо исследовать и решать.

Близкими к данной статье можно назвать опубликованные работы [1–4], в которых рассмотрены задачи с граничными условиями, содержащие производные второго и более высокого порядков.

Кроме сказанного, методом характеристического параллелограмма [5, 6] решение представлено в виде конечного ряда через заданные функции для любой из рассматриваемой области точки.

Постановка задачи. На замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\Re^2$ задается волновое уравнение

$$Lu(\boldsymbol{x})=\left(\partial_{x_0}^2 u-a^2\partial_{x_1}^2 u\right)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\Re^2, \tag{1}$$

где $a^2,l\in\Re,\ a^2,l>0,\ \partial_{x_0}^2=\partial^2/\partial x_0^2,\ \partial_{x_1}^2=\partial^2/\partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши

$$M^{(0)}u(\boldsymbol{x})=u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad M^{(1)}u(\boldsymbol{x})=\left(\partial_{x_0}^2 u+b^{(1)}(x_1)\partial_{x_0}u+b^{(0)}(x_1)u\right)(0,x_1)=\psi(x_1),$$
$$b^{(1)}(x_1)\neq 0,\quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

граничные условия

$$\partial_{x_1}^2 u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad \partial_{x_1}^2 u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $f:\boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\overline{Q}$ – заданная на $\overline{Q}$ функция; $\varphi:x_1\to\varphi(x_1)\in\Re,\ x_1\in[0,l]$, $\psi:x_1\to\psi(x_1)\in\Re$, $b^{(j)}:x_1\to b^{(j)}(x_1)\in\Re,\ x_1\in[0,l],\ j=1,2,$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(k)}:x_0\to\mu^{(k)}(x_0)\in\Re,\ x_1\in[0,\infty)$ – заданные функции на $[0,\infty)$, k = 1,2. Гладкость всех указанных функций будет уточнена ниже. Вычисляя значения заданных функций, получим соотношения

$$d^2\varphi(0)-\mu^{(1)}(0)=\delta^{(0)}, \tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0)-d^2\varphi(l)=\sigma^{(0)}, \tag{5}$$

где d – оператор дифференцирования, $d^2=d\cdot d$ – композиция операторов d и d, $\delta^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$ – числа из $\Re$. Если $\delta^{(0)}=\sigma^{(0)}=0$, то будем говорить, что для функций φ, $\mu^{(j)}$, j = 1,2, выполняются однородные условия согласования. В противном случае $\left(\left(\delta^{(0)}\right)^2+\left(\sigma^{(0)}\right)^2\neq 0\right)$ означает, что условия согласования являются неоднородными.

От вида условий согласования (4), (5) зависит гладкость вторых производных решения задачи (1)–(3) в области Q на характеристиках $x_1-ax_0=-(k-1)l$ и $x_1+ax_0=kl,\ k=1,2,3,\ldots$. Если условия (4) и (5) являются неоднородными, то на указанных характеристиках вторые производные терпят разрывы. Но для них имеется связь через заданные числа $\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$, которые можно записать в виде условий сопряжения.

Аналогично на этих же характеристиках можно задать условия для решения u, его производных первого порядка, условия сопряжения через заданные числа.

Таким образом, к уравнению (1) и условиям (2), (3) присоединяем условия сопряжения вида

$$\left[\left(\partial_{x_1}^p u\right)^+-\left(\partial_{x_1}^p u\right)^-\right]\left(x_0,x_1=ax_0-(k-1)l\right)=\delta^{(p,k)},\quad p=0,1,2;\quad k=1,2,\ldots, \tag{6}$$

$$\left[\left(\partial_{x_1}^p u\right)^+-\left(\partial_{x_1}^p u\right)^-\right](x_0,x_1=kl-ax_0)=\sigma^{(p,k)},\quad p=0,1,2;\quad k=1,2,\ldots, \tag{7}$$

где $\delta^{(p,k)}$, $\sigma^{(p,k)}$ – заданные числа, p = 0,1,

$$\delta^{(2,k)} = \begin{cases} \delta^{(0)}, & k = 1,3,5,..., \\ -\sigma^{(0)}, & k = 2,4,6,..., \end{cases} \quad \sigma^{(2,k)} = \begin{cases} \sigma^{(0)}, & k = 1,3,5,..., \\ -\delta^{(0)}, & k = 2,4,6,..., \end{cases}$$

$\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ – числа из соотношений (4) и (5), $(\ )^{\pm}$ – предельные значения функции u и ее производных $\partial_{x_1}u$, $\partial_{x_1}^2 u$ с разных сторон на характеристиках $x_1 - ax_0 = -(k-1)l$ и $x_1 + ax_0 = kl$, т. е.

$$\left(\partial_{x_1}^p u\right)^{\pm}\left(x_0, x_1 = ax_0 - (k-1)l\right) = \lim_{\Delta x_1 > 0,\, \Delta x_1 \to 0}\left(\partial_{x_1}^p u\right)\left(x_0, x_1 \pm \Delta x_1 = ax_0 - (k-1)l\right),$$

$$\left(\partial_{x_1}^p u\right)^{\pm}\left(x_0, x_1 = kl - ax_0\right) = \lim_{\Delta x_1 > 0,\, \Delta x_1 \to 0}\left(\partial_{x_1}^p u\right)\left(x_0, x_1 \pm \Delta x_1 = kl - ax_0\right), \quad p = 0,1,2; \quad k = 1,2,... .$$

Будем говорить, что условия сопряжения (6), (7) являются однородными, если все числа $\delta^{(p,k)} = \sigma^{(p,k)} = \delta^{(0)} = \sigma^{(0)} = 0$ для всех $p = 0,1;$ $k = 1,2,...$. В противном случае условия (6), (7) – условия сопряжения – являются неоднородными.

Если условия сопряжения (6), (7) являются неоднородными, то, очевидно, нельзя достичь решения из $C^2(Q)$, какими бы заданные функции задачи (1)–(3) не были. В этом случае уравнение (1) можно рассматривать на подмножестве $\tilde{Q}$ области Q. Обозначим через $\tilde{Q}$ совокупность точек области Q, не принадлежащих характеристикам $x_1 - ax_0 = -(k-1)l$ и $x_1 + ax_0 = kl$, где $k = 1, 2,...$, т. е. объединение подмножеств множества Q, границами которых являются указанные характеристики и граница области Q.

Эти подобласти, которые обозначим через $Q^{(k,m)}$, можно описать более подробно следующим образом:

$$Q^{(0,k-1)} = \varnothing, \varnothing \text{ – пустое множество},$$

$$Q^{(0,0)} = \left\{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 \in \left(0, \frac{l}{2}\right], 0 < x_0 < \frac{x_1}{a}\right\} \cup \left\{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 \in \left[\frac{l}{2}, l\right), 0 < x_0 < \frac{l - x_1}{a}\right\},$$

$$Q^{(k,k-1)} = \left\{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 \in \left(0, \frac{l}{2}\right], \frac{x_1 + (k-1)l}{a} < x_0 < \frac{kl - x_1}{a}\right\}, \quad k = 1,2,3,...,$$

$$Q^{(k-1,k)} = \left\{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 \in \left[\frac{l}{2}, l\right), \frac{kl - x_1}{a} < x_0 < \frac{x_1 + (k-1)l}{a}\right\}, \quad k = 1,2,3,...,$$

$$Q^{(k,k)} = \left\{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 \in \left(0, \frac{l}{2}\right], \frac{kl - x_1}{a} < x_0 < \frac{x_1 + kl}{a}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\boldsymbol{x} \in Q | x_1 \in \left[\frac{l}{2}, l\right), \frac{x_1 + (k-1)l}{a} < x_0 < \frac{(k+1)l - x_1}{a}\right\}, \quad k = 1,2,3,... .$$

Теперь $\tilde{Q} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{m=k-1}^{k+1} Q^{(k,m)} \subset Q$. Обозначим, через $\overline{Q^{(k,m)}}$ замыкание множества $Q^{(k,m)}$. Пусть $\bar{\tilde{Q}} = \bigcup_{k,m} \overline{Q^{(k,m)}}$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что функция u принадлежит классу $C^2\left(\bar{\tilde{Q}}\right)$, если она определяется соотношением

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{(k,m)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(k,m)}}, \tag{8}$$

для каждого $k = 0,1,2,...$ и $m = k-1, k, k+1,$ функция $u^{(k,m)}$ определена на $\overline{Q^{(k,m)}}$ и $u^{(k,m)}(\boldsymbol{x}) \in C^2\left(\overline{Q^{(k,m)}}\right)$.

Определение 2. Функция u из класса $C^2\left(\overline{\tilde{Q}}\right)$ является решением уравнения (1), если она удовлетворяет определению 1, на каждом подмножестве $\overline{Q^{(k,m)}}$, составляющая ее $u^{(k,m)}$ удовлетворяет уравнению (1).

Определение 3. Функция u является решением задачи (1)–(3), (6), (7), если она из класса $C^2\left(\overline{\tilde{Q}}\right)$, согласно определению 1, удовлетворяет уравнению (1), согласно определению 2, и условиям (2), (3), (6), (7).

Решение задачи (1)–(3), (6), (7). На $\overline{Q^{(k,m)}}$ рассмотрим общее решение уравнения (1), предполагая, что $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$. Как известно [6], это решение есть сумма общего решения $u^{(0)} \in C^2\left(\overline{Q^{(k,m)}}\right)$ соответствующего однородного уравнения уравнению (1) ($f \equiv 0$) и частного решения $v_p \in C^2\left(\overline{Q}\right)$ неоднородного уравнения (1).

Построение частного решения на $\overline{Q}$ можно осуществить пошагово, как это сделано, например, в [4]. Для этого область Q разбиваем на прямоугольники

$$Q^{(n)} = \left(\frac{(n-1)l}{a}, \frac{nl}{a}\right) \times (0,l), \quad n = 1,2,3,\dots .$$

В качестве частного решения v_p уравнения (1) полагаем

$$v_p(\boldsymbol{x}) = v_p^{(n)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q^{(n)}, \quad n = 1,2,3,\dots, \tag{9}$$

где

$$v_p^{(n)}(\boldsymbol{x}) = f^{(1,n)}(x_1 - ax_0) + f^{(2,n)}(x_1 + ax_0) - \frac{1}{4a^2} \int\limits_{l-nl}^{x_1 - ax_0} dy \int\limits_{nl}^{x_1 + ax_0} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(n)}}, \tag{10}$$

$\overline{Q^{(n)}}$ – замыкание множества $Q^{(n)}$, функции $f^{(j,n)}$ из класса C^2, $j = 1,2;\ n = 1,2,3,\dots$.

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения* (1) $f \in C^1\left(\overline{Q}\right)$. *Тогда функция* v_p, *определенная формулами* (9) *и* (10) *при соответствующем выборе* $f^{(j,n)}$, $j = 1,2;\ n \in \aleph$, *принадлежит классу* $C^2\left(\overline{Q}\right)$, *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет условиям*

$$v_p(0,x_1) = \partial_{x_0} v_p(0,x_1) = 0, \quad \partial_{x_0}^2 v_p(0,x_1) = f(0,x_1), \quad x_1 \in [0,l]. \tag{11}$$

Доказательство см. в [4].

Согласно определению 1 решение задачи (1)–(3), (6), (7) сводится к отысканию решения $u^{(k,m)}$ на каждом подмножестве $\overline{Q^{(k,m)}}$. Находить $u^{(k,m)}$ будем из общего решения уравнения (1). Как известно [6], общее решение уравнения (1) из $C^2\left(\overline{Q^{(k,m)}}\right)$ представимо в виде

$$u^{(k,m)}(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}^{(k,m)}(\boldsymbol{x}) + v_p(\boldsymbol{x}) = g^{(1,k)}(x_1 - ax_0) + g^{(2,m)}(x_1 + ax_0) + v_p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(k,m)}}, \tag{12}$$

где $g^{(1,k)}$ и $g^{(2,m)}$ – произвольные функции из класса C^2, $\tilde{u}^{(k,m)}$ – общее решение из класса $C^2\left(\overline{Q^{(k,m)}}\right)$ соответствующего однородного уравнения уравнению (1).

Установим область определения функций $g^{(1,k)}$ и $g^{(2,m)}$. Если $\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(k,m)}}$, то $x_1 - ax_0 \in \left[-kl, -(k-1)l\right]$, $x_1 + ax_0 \in \left[ml, (m+1)l\right]$. Таким образом, чтобы определить функции $u^{(k,m)}$, а следовательно, решение u задачи (1)–(3), (6), (7), нам надо определить функции $g^{(1,k)}$ и $g^{(2,m)}$ с областями определения

$$D\left(g^{(1,k)}\right) = \left[-kl, -(k-1)l\right], \quad k = 0,1,2,\dots, \quad D\left(g^{(2,m)}\right) = \left[ml, (m+1)l\right], \quad m = 0,1,2,\dots,$$

так, чтобы выполнялись заданные условия (2), (3), (6), (7). В связи с этим решение задачи (1)–(3), (6), (7) свелось к соответствующему нахождению функций $g^{(j,k)}$, $j = 1,2;\ k = 0,1,2,\dots$.

Для функций $u^{(0,0)}$, согласно представлению (12) и условиям (2) и (11), получим систему двух уравнений

$$\begin{gathered} M^{(0)}u^{(0,0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1,0)}(x_1) + g^{(2,0)}(x_1) = \varphi(x_1), \quad x_1 \in [0,l], \\ M^{(1)}u(\boldsymbol{x}) = a^2d^2g^{(1,0)}(x_1) + a^2d^2g^{(2,0)}(x_1) - ab^{(1)}(x_1)dg^{(1,0)}(x_1) + ab^{(1)}(x_1)dg^{(2,0)}(x_1) + \\ +b^{(0)}(x_1)g^{(1,0)}(x_1) + b^{(0)}(x_1)g^{(2,0)}(x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,l]. \end{gathered} \tag{13}$$

Из системы (13) находим значения функций $g^{(j,0)}(z)$, $j = 1,2$. Так как по условию $b^{(1)}(x_1) \neq 0$ для $x_1 \in [0,l]$, то

$$\begin{gathered} g^{(1,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a}\int_0^z \frac{1}{b^{(1)}(\xi)}\left[\psi - a^2d^2\varphi - b^{(0)}\varphi\right](\xi)d\xi - C, \\ g^{(2,0)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a}\int_0^z \frac{1}{b^{(1)}(\xi)}\left[\psi - a^2d^2\varphi - b^{(0)}\varphi\right](\xi)d\xi + C, \end{gathered} \tag{14}$$

где $z \in [0,l]$, C – произвольная постоянная из множества действительных чисел $\mathfrak{R}$, d – оператор обыкновенной производной, $d^2 = d \cdot d$ и так далее.

Значения $g^{(j,k)}(z)$ других функций определяются через (14) и условия (3). Пусть $\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1,0)}}$. Тогда из условия (3) имеем

$$\partial_{x_1}^2 u^{(1,0)}(x_0,0) = d^2g^{(1,1)}(-ax_0) + d^2g^{(2,0)}(ax_0) + \partial_{x_1}^2 v_p(x_0,0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in \left[0,\frac{l}{a}\right].$$

Отсюда

$$d^2g^{(1,1)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - d^2g^{(2,0)}(-z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{z}{a},0\right), \quad z \in [-l,0].$$

Аналогично, рассматривая функцию $u^{(0,1)}$ в $\overline{Q^{(0,1)}}$ и используя второе граничное условие из (3), получим дифференциальное уравнение

$$d^2g^{(2,1)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - d^2g^{(1,0)}(2l-z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{z-l}{a},l\right), \quad z \in [l,2l].$$

Продолжая использовать условие (3) для функций $u^{(k+1,k)}$ и $u^{(k,k+1)}$, из представления (12) получим дифференциальные уравнения для $k = 2,3,...$:

$$\begin{gathered} d^2g^{(1,k)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - d^2g^{(2,k-1)}(-z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{z}{a},0\right), \quad z \in \left[-kl,-(k-1)l\right], \\ d^2g^{(2,k)}(z) = \mu^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - d^2g^{(1,k-1)}(2l-z) - \partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{z-l}{a},l\right), \quad z \in \left[kl,(k+1)l\right], \end{gathered} \tag{15}$$

$k = 1,2,3,...$. В пределах отрезков, указанных в (15), интегрируем эти уравнения. В результате получим соотношения

$$\begin{gathered} g^{(1,k)}(z) = \int_0^z (z-\xi)\mu^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi - \int_0^z (z-\xi)\partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{\xi}{a},0\right)d\xi - \\ -g^{(2,k-1)}(-z) + C^{(1,k)}z + \tilde{C}^{(1,k)}, \; z \in \left[-kl,-(k-1)l\right], \\ g^{(2,k)}(z) = \int_l^z (z-\xi)\mu^{(2)}\left(\frac{\xi-l}{a}\right)d\xi - \int_l^z (z-\xi)\partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{\xi-l}{a},l\right)d\xi - \\ -g^{(1,k-1)}(2l-z) + C^{(2,k)}(z-l) + \tilde{C}^{(2,k)}, \; z \in \left[kl,(k+1)l\right], \end{gathered} \tag{16}$$

где $C^{(j,k)}$, $\tilde{C}^{(j,k)}$ – произвольные постоянные из $\mathfrak{R}$.

Лемма 1. *Если функции* $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^3([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $\mu^{(j)} \in C([0,\infty))$, $b^{(k)} \in C^1([0,l])$, $k=0,1$, *то функции* $g^{(j,k)}$, $j = 1,2$, *определенные формулами* (14) *и* (16) *будут из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций, а именно:* $g^{(1,k)} \in C^2([-kl,-(k-1)l])$, $g^{(2,k)} \in C^2([kl,(k+1)l])$, $k=0,1,2,\ldots$.

Доказательство непосредственно следует из формул (14), (16) и теоремы 1.

В формулы (16) входят произвольные постоянные $C^{(j,k)}$ и $\tilde{C}^{(j,k)}$. Эти постоянные выберем так, чтобы выполнялись условия сопряжения (6) и (7), а также постоянные $\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ определялись соотношениями (4) и (5). Для этого сначала вычислим производные первого порядка функций (14) и (16). Итак,

$$dg^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2}d\varphi(z) + (-1)^j \frac{1}{2ab^{(1)}(z)}\left[\psi(z) - a^2 d^2\varphi(z) - b^{(0)}(z)\varphi(z)\right],\ j=1,2, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} dg^{(1,k)}(z) = \int_0^z \mu^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi + dg^{(2,k-1)}(-z) - \int_0^z \partial_{x_1}^2 v_p\left(-\frac{\xi}{a},0\right)d\xi + C^{(1,k)}, \\ dg^{(2,k)}(z) = \int_l^z \mu^{(2)}\left(\frac{\xi-l}{a}\right)d\xi - dg^{(1,k-1)}(2l-z) - \int_l^z \partial_{x_1}^2 v_p\left(\frac{\xi-l}{a},l\right)d\xi + C^{(2,k)},\quad k=1,2,3,\ldots . \end{gathered} \tag{18}$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия гладкости на заданные функции уравнений* (1)–(3), *условия, указанные в лемме* 1. *Условия сопряжения* (6), (7) *для искомого решения (определение* 3*) задачи* (1)–(3), (6), (7) *выполняются тогда и только тогда, когда функции* (14), (16) *и их производные* (17), (18) *удовлетворяют условиям*

$$d^p g^{(1,k)}(-kl) - d^p g^{(1,k+1)}(-kl) = \delta^{(p,k+1)},\quad p=0,1,2,\quad k=0,1,2,3,\ldots, \tag{19}$$

$$d^p g^{(2,k)}(kl) - d^p g^{(2,k-1)}(kl) = \sigma^{(p,k)},\quad p=0,1,2,\quad k=0,1,2,3,\ldots . \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала условие (6) для $p = 0$ и $k = 1$. В этом случае в наших обозначениях

$$\left(u^{(0,0)}\right)^+ - \left(u^{(1,0)}\right)^- = \delta^{(0,1)}.$$

Из представления (12) следует, что последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$g^{(1,0)}(0) - g^{(1,1)}(0) = \delta^{(0,1)},$$

или

$$\frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi(0) - \tilde{C}^{(1,1)} = \delta^{(0,1)}.$$

Отсюда

$$\tilde{C}^{(1,1)} = \varphi(0) - \delta^{(0,1)}. \tag{21}$$

Аналогично доказывается, что условие сопряжения (7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$g^{(2,1)}(l) - g^{(2,0)}(l) = \sigma^{(0,1)}$$

или когда

$$\tilde{C}^{(2,1)} = \varphi(l) + \sigma^{(0,1)}. \tag{22}$$

Условия (19) и (20) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы для $p = 0$ и $k = 1$ выполнялись условия сопряжения (6) и (7) для всех функций $u^{(0,0)}$, $u^{(1,0)}$ и $u^{(0,1)}$ на характеристиках $x_1 - ax_0 = 0$ и $x_1 + ax_0 = l$.

Далее в рассуждениях применяем метод математической индукции. Рассмотрим условия сопряжения (6) и (7) для $p = 0$ и некоторого k. Тогда для функций $u^{(k,k)}$ и $u^{(k,k+1)}$ условия сопряжения запишутся в виде

$$\left(u^{(k,k)}\right)^{+}-\left(u^{(k+1,k)}\right)^{-}(x_0, x_1=ax_0-kl)=\delta^{(0,k+1)}. \tag{23}$$

Из представления (12) и условия сопряжения (23) следует равенство (19) для $p = 0$.

Аналогично, согласно условию (7) для $p = 0$

$$\left(u^{(k,k+1)}\right)^{+}-\left(u^{(k,k)}\right)^{-}(x_0, x_1=kl-ax_0)=\sigma^{(0,k+1)}. \tag{24}$$

По данной схеме, подставляя в условия сопряжения функции $u^{(k+1,k+1)}$, $u^{(k+1,k)}$, $u^{(k,k+1)}$, получим эти же условия (20) и (22) для $p = 0$.

Для доказательства утверждения леммы в случае $p = 1$ вычислим производную первого порядка по x_1 от представления (12). В результате получим

$$\partial_{x_1}u^{(k,m)}(\boldsymbol{x})=dg^{(1,m)}(x_1-ax_0)+dg^{(2,k)}(x_1+ax_0)+\partial_{x_1}v_p(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(k,m)}}. \tag{25}$$

Рассматривая производные (25) вместо (12) и условия сопряжения (6) и (7) для $p = 1$, получим необходимые и достаточные условия для выполнения равенств (23) и (24) для $p = 1$ и соответствующего $k=0,1,2,...$, или $k=1,2,3,...$.

Для доказательства утверждения в случае $p = 2$ вычисляем вторую производную представления (12). В результате получим

$$\partial^2_{x_1}u^{(k,m)}(\boldsymbol{x})=d^2g^{(1,m)}(x_1-ax_0)+d^2g^{(2,k)}(x_1+ax_0)+\partial^2_{x_1}v_p(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(k,m)}}. \tag{26}$$

Далее доказательство проводится по предыдущей схеме и для $p = 2$.

Заметим, что в каждую функцию $g^{(j,k)}$ входят по две произвольные константы. Одна из этих констант остается в производных первого порядка. Это хорошо видно из формул (16) и (18). Поэтому при соответствующем выборе этих констант числа в условиях сопряжения $\delta^{(p,k)}$ и $\sigma^{(p,k)}$ для $p = 0,1$ и $k=1,2,3,...$ можем выбирать произвольным образом, чего нельзя сказать о $\delta^{(p,k)}$ и $\sigma^{(p,k)}$ для $p = 2$. Последние константы определяются величинами $\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ из соотношений (4) и (5).

Рассмотрим последние утверждения более подробно. Пусть в (19) $p = 1$ и $k = 0$. Тогда из представлений (17), (18)

$$dg^{(1,0)}(0)-dg^{(1,1)}(0)=\frac{1}{2}d\varphi(0)-\frac{1}{2a}A(\varphi,\psi)(0)-dg^{(2,0)}(0)-C^{(1,1)}=$$
$$=-\frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(0)-C^{(1,1)}=\delta^{(1,1)},$$

где $A(\varphi,\psi)(z)=\dfrac{1}{b^{(1)}(z)}\left[\psi(z)-a^2d^2\varphi(z)-b^{(0)}(z)\varphi(z)\right]$. Отсюда $C^{(1,1)}=-\delta^{(1,1)}-\dfrac{1}{a}A(\varphi,\psi)(0)$.

Далее, при $p = 1$ и $k = 1$

$$dg^{(2,1)}(l)-dg^{(2,0)}(l)=dg^{(1,0)}(l)-dg^{(2,0)}(l)+C^{(2,1)}=$$
$$=-\frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(l)+C^{(2,1)}=\sigma^{(1,1)}.$$

Следовательно, $C^{(2,1)}=\sigma^{(1,1)}+\dfrac{1}{a}A(\varphi,\psi)(l)$.

Пусть в (19) $p = 1$ и $k = 1$. Тогда

$$dg^{(1,1)}(-l)-dg^{(1,2)}(-l)=dg^{(2,0)}(l)+C^{(1,1)}-dg^{(2,1)}(l)-C^{(1,2)}=\delta^{(1,2)}.$$

Отсюда

$$C^{(1,2)} = C^{(1,1)} + dg^{(2,0)}(l) - dg^{(1,0)}(l) - C^{(2,1)} - \delta^{(1,2)} =$$
$$= -\delta^{(1,1)} - \frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(0) + \frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(l) - \sigma^{(1,1)} - \frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(l) - \delta^{(1,2)} =$$
$$= -\delta^{(1,1)} - \delta^{(1,2)} - \sigma^{(1,1)} - \frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(0).$$

Продолжая данный процесс дальше, мы вычислим через заданные величины константы $C^{(j,k)}$, $k = 1,2,...,$ $j = 1,2$, для которых выполняются условия сопряжения (6) и (7) при $p = 1$. Из доказательства видно, что эти константы определяются единственным образом.

Точно так же, используя представления (16) и равенства (20) для $p = 0$, определяются единственным образом постоянные $\tilde{C}^{(j,k)}$ через заданные величины, в том числе и через $\sigma^{(0,k)}$ и $\sigma^{(1,k)}$, $k = 1,2,...$.

Рассмотрим теперь условия сопряжения (6) и (7) при $p = 2$. Согласно лемме 2 они эквивалентны равенствам (19) и (20).

Из формул (14) и (15), условий (11) для $k = 0$ имеем равенства

$$d^2g^{(1,0)}(0) - d^2g^{(1,1)}(0) = -\mu^{(1)}(0) + d^2g^{(2,0)}(0) - \partial_{x_1}^2 v_p(0,0) - d^2g^{(1,0)}(0) =$$
$$= -\mu^{(1)}(0) + d^2\varphi(0) = \delta^{(0)} = \delta^{(2,1)},$$
$$d^2g^{(2,1)}(l) - d^2g^{(2,0)}(l) = \mu^{(2)}(0) - d^2\varphi(l) = \sigma^{(0)} = \sigma^{(2,1)}.$$

Далее,

$$k = 1: \quad d^2g^{(1,1)}(-l) - d^2g^{(1,2)}(-l) = -dg^{(2,0)}(l) + dg^{(2,1)}(l) = \sigma^{(0)} = \delta^{(2,2)},$$
$$k = 2: \quad d^2g^{(2,2)}(2l) - d^2g^{(2,1)}(2l) = -d^2g^{(1,1)}(0) + d^2g^{(1,0)}(0) = \delta^{(0)} = \sigma^{(2,2)}.$$

Методом математической индукции доказывается, что

$$\delta^{(2,1)} = \delta^{(0)}, \quad \delta^{(2,k+1)} = \sigma^{(2,k)} = \begin{cases} \sigma^{(0)}, & k = 1,3,5,..., \\ \delta^{(0)}, & k = 2,4,6,..., \end{cases} \tag{27}$$

где числа $\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ определяются соотношениями (4) и (5).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть для заданных функций задачи* (1)–(3), (6)–(7) *выполняются следующие условия гладкости:*

$$f \in C^1\left(\overline{Q}\right), \quad \varphi \in C^3([0,l]), \quad \psi \in C^1([0,l]), \quad \mu^{(j)} \in C([0,\infty)), \quad j = 1,2, \quad b^{(k)} \in C^1([0,l]), \quad k = 0,1.$$

Для любых определенных действительных чисел $\delta^{(p,k)}$ и $\sigma^{(p,k)}$, $p = 0,1$; $k = 1,2…$, *существует единственное классическое решение, согласно определению* 3, *тогда и только тогда, когда* $\delta^{(2,k)}$ и $\sigma^{(2,k)}$, $k = 1,2,3,...,$ *определены из соотношения* (4), (5) *по формулам* (27). *Решение определяется на* $\overline{\tilde{Q}}$ *формулами* (8)–(10), (12), (14), (16).

Д о к а з а т е л ь с т в о существования решения следует из предыдущих рассуждений. Поскольку задача (1)–(3), (6), (7) является линейной, то единственность решения доказывается методом предположения существования двух решений. Тогда для их разности получаем задачу со всеми однородными условиями. В этом случае, используя формулы (8)–(10), (12), (14) и (16), получим решение, равное нулю.

Представляет интерес случай достаточно гладкого решения задачи (1)–(3), (6), (7) на замыкании $\overline{Q}$, а именно случай $u \in C^2\left(\overline{\tilde{Q}}\right) \cap C^1\left(\overline{Q}\right)$. Если выполняются условия теоремы 2, то решение задачи (1)–(3), (6), (7) *u* принадлежит множеству $C^2\left(\overline{\tilde{Q}}\right)$. Очевидно, оно принадлежит и $C^1\left(\overline{Q}\right)$

тогда и только тогда, когда условия (6) и (7) для $p = 0{,}1$ являются однородными. Это равносильно требованию выполнения однородных условий (19) и (20) для $p = 0{,}1$, т. е. должны быть все $\delta^{(p,k)} = \sigma^{(p,k)} = 0$ для всех $p = 0{,}1$; $k = 1,2,3,\ldots$.

Формулы (18) определяют значения первых производных функций $dg^{(j,k)}$, $j = 1{,}2$; $k = 1,2,3,\ldots$. В каждую из этих формул входит произвольная постоянная $C^{(j,k)}$. Выбирая эти постоянные

$$\begin{aligned} C^{(1,k)} &= -\frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(0), \quad k = 1,2,\ldots, \\ C^{(2,k)} &= \frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(l), \quad k = 1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{28}$$

получим однородные условия (19) и (20). Действительно, при $k = 1$ из доказательства теоремы 2 следует

$$\begin{aligned} dg^{(1,0)}(0) - dg^{(1,1)}(0) &= -\frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(0) - C^{(1,1)} = 0, \\ dg^{(2,1)}(l) - dg^{(2,0)}(l) &= -\frac{1}{a}A(\varphi,\psi)(l) + C^{(2,1)} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Из соотношений (29) следуют (28) для $k = 1$. Далее, в силу представления (18) имеем равенства

$$\begin{aligned} &dg^{(1,k)}(-kl) - dg^{(1,k+1)}(-kl) = dg^{(2,k-1)}(kl) - dg^{(2,k)}(kl) + C^{(1,k)} - C^{(1,k+1)}, \quad k = 1,2,3,\ldots, \\ &dg^{(2,k+1)}\big((k+1)l\big) - dg^{(2,k)}\big((k+1)l\big) = dg^{(1,k)}\big(-(k-1)l\big) - dg^{(1,k-1)}\big(-(k-1)l\big) + \\ &\qquad + C^{(2,k+1)} - C^{(2,k)} = 0, \quad k = 1,2,3,\ldots . \end{aligned} \tag{30}$$

Из равенств (30) следуют значения коэффициентов (28).

А теперь определим коэффициенты $\tilde{C}^{(j,k)}$, $j = 1,2$; $k = 1,2,\ldots$. Для этого рассмотрим выражения (14) и (16). Пусть $p = 0$, $k = 0{,}1$, тогда

$$\begin{aligned} g^{(1,k)}(0) - g^{(1,1)}(0) &= \frac{1}{2}\varphi(0) - C + g^{(2,0)}(0) - \tilde{C}^{(1,1)} = 0, \\ g^{(2,1)}(l) - g^{(2,0)}(l) &= -g^{(1,0)}(l) + \tilde{C}^{(2,1)} - g^{(2,0)}(l) + \tilde{C}^{(2,1)} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Из формул (16) путем вычитания друг из друга для любого $k = 1,2,\ldots$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} g^{(1,k)}(-kl) - g^{(1,k+1)}(-kl) &= g^{(2,k)}(kl) - dg^{(2,k-1)}(kl) + \left[C^{(1,k)} - C^{(1,k+1)}\right](-kl) = 0, \\ g^{(2,k+1)}(kl+l) - g^{(2,k)}(kl+l) &= g^{(1,k-1)}(kl-l) - g^{(1,k)}(kl-l) + \tilde{C}^{(2,k+1)} - \tilde{C}^{(2,k)} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Для того, чтобы условия (19) и (20), а следовательно, и (6), (7) для $p = 0$ были однородными, из соотношений (31), (32) и (28) следует, что для этого необходимо и достаточно выбрать константы $\tilde{C}^{(j,k)}$ следующим образом:

$$\tilde{C}^{(1,k)} = \varphi(0), \quad \tilde{C}^{(2,k)} = \varphi(l), \quad k = 1,2,\ldots . \tag{33}$$

Полученные результаты с учетом теоремы 2 можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия гладкости относительно заданных функций задачи* (1)–(3), (6), (7), *указанные в теореме* 2. *Существует единственное решение и из класса* $C^2\left(\bar{\tilde{Q}}\right) \cap C^1\left(\bar{Q}\right)$ *задачи* (1)–(3), (6), (7) *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (28), (32), (33) *для констант* $C^{(p,k)}$ *и* $\tilde{C}^{(p,k)}$, *для* $p = 1{,}2$; $k = 1,2,3\ldots$, *в формулах* (17) *и* (18), $\delta^{(2,k)}$, $\sigma^{(2,k)}$ *заданы через соотношения* (4), (5) *по формулам* (27). *Решение задачи на* $\bar{Q}$ *определяется формулами* (8), (9), (10), (12), (14), (16).

Выводы. В данной работе в аналитическом виде построено классическое решение из класса $C^2\left(\bar{\tilde{Q}}\right)$ (определение 3) задачи (1)–(3), (6), (7). Доказано, при каких условиях оно является единственным (теорема 2). На практике при численном решении задачи естественно больший интерес представляет случай, когда условия сопряжения (6) и (7) являются однородными для $p = 1,2$. Этот случай рассмотрен, и результат сформулирован в виде теоремы 3. Здесь условия сопряжения для вторых производных ($p = 0$), вообще говоря, являются неоднородными и определяются величинами $\delta^{(0)}$ и $\sigma^{(0)}$ или соотношениями (4) и (5).

Заметим, что на практике, особенно при численной реализации, достижение однородности условий (4) и (5) является большой проблемой. Но с этим необходимо мириться и находить решение в случае, когда производные второго порядка (условия (6) и (7)) терпят разрыв на характеристиках $x_1 - ax_0 = -kl,\ \ k = 0,1,2,...,$ и $x_1 + ax_0 = kl,\ \ k = 1,2,...$. Однако в теореме 2 показано, что с увеличением номера k или x_0 погрешность разрывов вторых производных не увеличивается в отличие, например, от задач с интегральными условиями ([7] и др.).

Решение рассматриваемой задачи можно представить в каждой точке $\bar{Q}$ в виде формулы (конечной суммы) через значения заданных функций методом параллелограмма (см. [5, 8]).

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными второго порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. А. Севастюк // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 406–412. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-406-412

2. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–20.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 11–17.

4. Корзюк, В. И. О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. А. Севастюк // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 35–42.

5. Корзюк, В. И. Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец, В. П. Сериков // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 43–53.

6. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: Изд. центр БГУ, 2011. – 460 с.

7. Моисеев, Е. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения / Е. И. Моисеев, В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.

8. Корзюк, В. И. Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В. И. Корзюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 7–13.

References

1. Korzyuk V. I., Naumavets S. N., Sevastyuk V. A. Classical solution of the mixed problem for a one-dimensional wave equation with second-order derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 406–412 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-406-412

2. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. Classical solution to the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with the cauchy-type conditions. *Vestsi Natcyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 7–20 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Naumavets S. N. Classical solution of a mixed problem for a one-dimensional wave equation with higher-order derivatives in the boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 11–17 (in Russian).

4. Korzyuk V. I, Naumavets S. N., Sevastyuk V. A. On the classical solution of the second mixed problem for a one-dimensional wave equation. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 35–42 (in Russian).

5. Korzyuk V. I, Naumavets S. N., Serikov V. P. The method of the characteristic parallelogram of the solution of the second mixed problem for the one-dimensional wave equation. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 43–53 (in Russian).

6. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. Minsk, BSU Publishing Center, 2011. 460 p. (in Russian).

7. Moiseev E. I., Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional wave equation. *Differential Equations,* vol. 50, no. 10, pp. 1364– 1377. https://doi.org/10.1134/s0012266114100103

8. Korzyuk V. I. Solution of the mixed problem for the one-dimensional wave equation with the use of the characteristic parallelogram method. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 3, pp. 7–13 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Наумовец Светлана Николаевна – старший преподаватель, Брестский государственный технический университет (ул. Московская, 267, 224017, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: e-cveta@tut.by

Сериков Владимир Петрович – ведущий инженер-программист, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Sviatlana N. Naumavets – Senior Lecturer, Brest State Technical University (267, Moskovskaya Str., 224017, Brest, Republic of Belarus). E-mail: e-cveta@tut.by

Vladimir P. Serikov – Lead Software Engineer, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus).