ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-328-334

Поступила в редакцию 13.07.2020
Received 13.07.2020

Ю. А. Курочкин[1], Д. В. Шёлковый[1], И. П. Боярина[2]

[1]*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь*

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРЕ МАСС В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Аннотация. Опираясь на определение центра масс, данное в работах [1, 2], постулируется его неподвижность в пространствах постоянной кривизны и рассматривается задача двух частиц с внутренним взаимодействием, которое описывается потенциалом, зависящим от расстояния между ними на трехмерной сфере. Такой подход, обоснованный отсутствием принципа, подобного принципу Галилея, с одной стороны, и свойством изотропности пространства – с другой, позволяет рассматривать задачу в системе покоя центра масс, что автоматически обеспечивает зависимость только от относительных переменных рассматриваемых точек. Сформулировано уравнение Гамильтона – Якоби задачи и найдены его решения и уравнения траекторий. Показано, что приведенная масса системы зависит от относительного расстояния. С учетом данного обстоятельства выписана модифицированная метрика системы.

Ключевые слова: центр масс, трехмерная сфера, уравнение Гамильтона – Якоби, приведенная масса, метрика

Для цитирования. Курочкин, Ю. А. Теорема о центре масс в трехмерных пространствах постоянной кривизны / Ю. А. Курочкин, Д. В. Шёлковый, И. П. Боярина // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 328–334. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-328-334

Yurii A. Kurochkin[1], Dzmitry V. Shoukavy[1], Irina P. Boyurina[2]

[1]*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus*

CENTER MASS THEOREM IN THREE DIMENSIONAL SPACES WITH CONSTANT CURVATURE

Abstract. In this paper, based on the definition of the center of mass given in [1, 2], its immobility is postulated in spaces with a constant curvature, and the problem of two particles with an internal interaction, described by a potential depending on the distance between points on a three-dimensional sphere, is considered. This approach, justified by the absence of a principle similar to the Galileo principle on the one hand and the property of isotropy of space on the other, allows us to consider the problem in the map system for the center of mass. It automatically ensures dependence only on the relative variables of the considered points. The Hamilton – Jacobi equation of the problem is formulated, its solutions and the equations of trajectories are found. It is shown that the reduced mass of the system depends on the relative distance. Given this circumstance, a modified system metric is written out.

Keywords: center mass, three dimensional sphere, Hamilton – Jacoby equation, reduce mass, metrices

For citation. Kurochkin Yu. A., Shoukavy Dz. V., Boyurina I. P. Center mass theorem in three dimensional spaces with constant curvature. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 328–334 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-328-334

Введение. В нерелятивистской классической механике согласно известной теореме, центр масс системы частиц в отсутствие внешних сил покоится или движется равномерно и прямолинейно. Иными словами, состояние движения центра масс не может быть изменено внутренними силами взаимодействия между частицами. Для пространства механики Ньютона – пространства Евклида, равномерно и прямолинейно движущийся центр масс системы эквивалентен покоящемуся в силу принципа Галилея, в случае же пространства постоянной кривизны движущийся центр масс системы в отсутствие внешних сил не эквивалентен покоящемуся из-за отсутствия глобального принципа относительности. Тогда, если кривизну пространства интерпретировать как внешнюю силу, движение центра масс системы, казалось бы, возможно, но это противоречило бы изотропности пространства.

В связи со сказанным, опираясь на определение центра масс, данное в работах [1, 2], постулируем его неподвижность в пространствах постоянной кривизны и рассмотрим задачу двух частиц с внутренним взаимодействием, описываемым потенциалом Ньютона на трехмерной сфере. Если введенное определение центра масс при этом не приводит к противоречию, то существует возможность решить проблему разделения переменных центра масс и относительного движения.

Переменные центра масс и относительные координаты для системы двух частиц. Существует проблема определения центра масс системы материальных частиц в пространствах постоянной кривизны [3]. В работе [1] дано следующее определение центра масс двух частиц с массами m_1 и m_2 в четырехмерной (бикватернионной) форме:

$$X_c = \frac{m_1 X^{(1)} + m_2 X^{(2)}}{\sqrt{\left(m_1 X^{(1)} + m_2 X^{(2)}\right)\left(m_1 \bar{X}^{(1)} + m_2 \bar{X}^{(2)}\right)}}, \tag{1}$$

при этом трехмерными независимыми координатами центра масс будут составляющие вектора

$$\underline{q}_c = j\frac{\underline{X}_c}{X_{0c}} = j\frac{m_1 \underline{X}^{(1)} + m_2 \underline{X}^{(2)}}{m_1 X_0^{(1)} + m_2 X_0^{(2)}}. \tag{2}$$

То есть координаты двух материальных точек в объемлющем четырехмерном пространстве будут представлять собой составляющие бикватернионов:

$$X^{(1)} = jX_0^{(1)} + \underline{X}^{(1)}, \quad X^{(2)} = jX_0^{(2)} + \underline{X}^{(2)}, \tag{3}$$

с условием, что они лежат на 3-сфере единичного радиуса

$$X^{(1)}\bar{X}^{(1)} = 1, \quad X^{(2)}\bar{X}^{(2)} = 1. \tag{4}$$

В качестве независимых координат удобно использовать бельтрамиевы координаты, которые являются составляющими векторов на сфере [4]

$$\underline{q}^{(1)} = j\frac{\underline{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}}, \quad \underline{q}^{(2)} = j\frac{\underline{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}} \tag{5}$$

с законом сложения (вычитания)

$$\underline{q} = \left\langle \underline{q} \pm \underline{q} \right\rangle = \frac{\underline{q} \pm \underline{q} \pm \left[\underline{q}\,\underline{q}\right]}{1 \mp \left(\underline{q}\,\underline{q}\right)}, \tag{6}$$

совпадающим с законом композиции Ф. И. Федорова [5]. Отметим, что определение векторов (5) автоматически ведет к отождествлению противоположных точек на сфере, и, следовательно, введенные векторы принадлежат эллиптическому пространству и использование их для описания движения на сфере требует учета данного свойства. Применение непосредственно самих бикватернионов (3), (4) позволяет избежать указанных трудностей. В переменных (5) данное выражение имеет вид

$$\underline{q}_c = \frac{m_1 \underline{q}^{(1)} / \sqrt{1+\left(\underline{q}^{(1)}\right)^2} + m_2 \underline{q}^{(2)} / \sqrt{1+\left(\underline{q}^{(2)}\right)^2}}{m_1 / \sqrt{1+\left(\underline{q}^{(1)}\right)^2} + m_2 / \sqrt{1+\left(\underline{q}^{(2)}\right)^2}}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что выражение (7) для координат центра масс по форме совпадает с аналогичным выражением для координат центра масс в трехмерном плоском пространстве, в котором постоянные массы m_1, m_2 заменяются на массы с зависимостью от координат

$$m_1 / \sqrt{1+\left(\underline{q}^{(1)}\right)^2}, \quad m_2 / \sqrt{1+\left(\underline{q}^{(2)}\right)^2}.$$

Отметим также, что данное определение совпадает с определением, данным в работе [3], и переходит в него, если учесть, что $\left(\underline{q}^2\right) = \mathrm{tg}^2 r$, где r – расстояние между точками. Как следует из формулы (7) и как показано в [2], такое определение может быть обобщено на произвольное число частиц. Оно также может служить основой барицентрического исчисления в пространствах постоянной кривизны подобно тому, как соответствующее определение с постоянными массами служит основой такого исчисления в пространстве Евклида.

Бикватернионным аналогом относительной переменной для двух данных частиц будет оператор

$$Y_{12} = X^{(2)}\ \overline{X}^{(1)}, \tag{8}$$

определенный из

$$X^{(2)} = Y_{12}\ X^{(1)}. \tag{9}$$

Независимые трехмерные координаты относительного движения определяются как составляющие вектора относительного движения

$$q_y = \frac{Y_{12} - \overline{Y}_{12}}{Y_{12} + \overline{Y}_{12}} = \left\langle j\frac{\underline{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}}, -j\frac{\underline{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}} \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(2)}, -\underline{q}^{(1)} \right\rangle = \frac{\underline{q}^{(2)} - \underline{q}^{(1)} - \left[\underline{q}^{(2)}\underline{q}^{(1)}\right]}{1+\left(\underline{q}^{(2)}\underline{q}^{(1)}\right)}. \tag{10}$$

Введем также четырехмерные Y_1, Y_2 и трехмерные $q_y^{(1)}, q_y^{(2)}$ координаты точек относительно центра масс, определяемые аналогично (8) и (9), а именно:

$$X^{(1)} = Y_1\ X_c, \quad \overline{X}^{(1)} = \overline{X}_c\,\overline{Y}_1, \tag{11}$$

при этом

$$Y_1 = X^{(1)}\,\overline{X}_c \tag{12}$$

и соответственно

$$X^{(2)} = Y_2\ X_c, \quad \overline{X}^{(2)} = \overline{X}_c\,\overline{Y}_2, \tag{13}$$

$$Y_2 = X^{(2)}\,\overline{X}_c. \tag{14}$$

Очевидно также, что

$$Y_{12} = Y_2\ \overline{Y}_1. \tag{15}$$

Тогда для первой частицы:

$$\underline{q}^{(1)} = j\frac{\underline{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}} = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1+\frac{m_1}{m_2}\sqrt{1+\underline{q}_y^2}}, j\frac{\underline{X}_c}{X_{0c}} \right\rangle = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1+\frac{m_1}{m_2}\sqrt{1+\underline{q}_y^2}}, \underline{q}_c \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(1)}, \underline{q}_c \right\rangle, \tag{16}$$

а для второй частицы имеем

$$\underline{q}^{(2)} = j\frac{\underline{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}} = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1+\frac{m_2}{m_1}\sqrt{1+\underline{q}_y^2}}, j\frac{\underline{X}_c}{X_{0c}} \right\rangle = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1+\frac{m_2}{m_1}\sqrt{1+\underline{q}_y^2}}, \underline{q}_c \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(2)}, \underline{q}_c \right\rangle, \tag{17}$$

где $\underline{q}^{(1)}$ и $\underline{q}^{(2)}$ определяются соответственно через Y_1 и Y_2 аналогично тому, как согласно формулам (13) q_y выражается через Y_{12}. В справедливости формул (16) и (17) легко убедиться непосредственным расчетом. Следует обратить внимание, что $\underline{q}^{(1)}$ и $\underline{q}^{(2)}$ и Y_1, Y_2 выражаются только через относительные переменные q_y и Y_{12} соответственно.

Из формулы (15) вытекает формула

$$\underline{q}_y = < q_2, -q_1 > = \left\langle \underline{q}_y^{(2)}, -\underline{q}_y^{(1)} \right\rangle. \tag{18}$$

Введенные переменные подчиняются условиям

$$X_c\,\overline{X}_c = 1, \quad Y_{12}\,\overline{Y}_{12} = 1, \quad Y_1\,\overline{Y}_1 = 1, \quad Y_2\,\overline{Y}_2 = 1. \tag{19}$$

Две материальные точки на S^3. Нерелятивистская классическая задача. Действие для задачи двух материальных точек на сфере S^3, взаимодействующих с силами, зависящими только от относительной переменной, запишем в виде

$$W_{12} = \int \left[\frac{1}{2}\left(m_1 \dot{X}^{(1)} \dot{\overline{X}}^{(1)} + m_2 \dot{X}^{(2)} \dot{\overline{X}}^{(2)} \right) - V(Y_{12}) \right] dt. \tag{20}$$

Здесь сразу учтено, что операции дифференцирования и сопряжения перестановочны местами. Точка над буквами обозначает дифференцирование по времени. Выражение (20) примет стандартный вид, если перейти к независимым переменным $\underline{q}^{(1)}$ и $\underline{q}^{(2)}$. В этом случае

$$W = \int \left[\frac{1}{2}\left(m_1 g_{ab}\left(\underline{q}^{(1)}\right) \dot{q}_a^{(1)} \dot{q}_b^{(1)} + m_2 g_{ab}\left(\underline{q}^{(2)}\right) \dot{q}_a^{(2)} \dot{q}_b^{(2)} \right) - \varphi(q_{12}) \right] dt, \tag{21}$$

где

$$g_{ab} = \frac{1}{\left(1+q^2\right)}\left(\delta_{ab} - \frac{q_a q_b}{1+q^2} \right) \tag{22}$$

– метрический тензор 3-сферы в переменных, являющихся составляющими векторов на сфере.

В выражении (21), согласно принятому предположению, положим $q_c = 0$ и запишем его в сферических координатах. Тогда

$$W = \int \left[\frac{1}{2}\left[m_1 \dot{r}_1^2 + m_1 \sin^2 r_1 \left(\dot{\vartheta}_1^2 + \sin^2\vartheta_1 \dot{\varphi}_1^2 \right) + m_2 \dot{r}_2^2 + m_2 \sin^2 r_2 \left(\dot{\vartheta}_2^2 + \sin^2\vartheta_2 \dot{\varphi}_2^2 \right) \right] - U(r_{12}) \right] dt. \tag{23}$$

Произведя в (23) замену координат отдельных частиц на относительные переменные r, ϑ, φ $(0 \le r \le \pi, -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi)$, в соответствии с формулами (16), (17) при $\underline{q}_c = 0$ получим следующее выражение для действия:

$$W = \int \left\{ \frac{1}{2}\left[m_1 \left(\frac{m_2^2 + m_1 m_2 \cos r}{m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos r + m_1^2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1^2 + m_1 m_2 \cos r}{m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos r + m_1^2} \right)^2 \right] \dot{r}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2 (m_2 + m_1)}{m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos r + m_1^2} \right) \sin^2 r \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r) \right\} dt \tag{24}$$

с функцией Лагранжа

$$L=\frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{m_2{}^2+m_1m_2\cos r}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)^2+m_2\left(\frac{m_1{}^2+m_1m_2\cos r}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)^2\right](\dot r)^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2(m_2+m_1)}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)\sin^2 r\left(\dot\vartheta^2+\sin^2\vartheta\dot\varphi^2\right)-U(r). \quad (25)$$

Легко проверить, что выражение для функции Лагранжа (25) в плоском пределе $r\sim 0$ переходит в функцию Лагранжа плоской задачи для частицы приведенной массы. То есть соответствующие коэффициенты переходят в выражение для приведенной массы:

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

Сказанное справедливо в отношении как коэффициентов перед радиальной составляющей обобщенных скоростей $\dot r$, так и в отношении составляющей перед $\sin^2 r$. При этом указанные коэффициенты различны.

С учетом вышеизложенного, можно сделать следующий предварительный вывод. В пространствах с кривизной массы частиц можно интерпретировать зависящими от координат, как это следует из (7). Это же справедливо и в отношении составных систем, приведенные массы также допускают интерпретацию как зависящие от координат. При этом для продольной приведенной массы

$$\mu_{||}(r)=m_1\left(\frac{m_2{}^2+m_1m_2\cos r}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)^2+m_2\left(\frac{m_1{}^2+m_1m_2\cos r}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2}\right)^2 \quad (26а)$$

и поперечной

$$\mu_{\perp}(r)=\frac{m_1m_2(m_2+m_1)}{m_2{}^2+2m_1m_2\cos r+m_1{}^2} \quad (26б)$$

эти зависимости различны, что необходимо учитывать при рассмотрении задач о движении материальных тел в искривленных пространствах.

Уравнение Гамильтона – Якоби и его решения. С учетом вида функции Лагранжа (25), приняв во внимание следующие определения обобщенных импульсов

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot r},\quad p_\vartheta=\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta},\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi},$$

запишем функцию Гамильтона H

$$H=\frac{p_r{}^2}{2\mu_{||}(r)}+\frac{1}{2\mu_\perp(r)\sin^2 r}\left(p_\vartheta{}^2+p_\varphi{}^2\right)+U(r)=\text{const}$$

и уравнение Гамильтона – Якоби

$$\frac{1}{2\mu_{||}(r)}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2\mu_\perp(r)\sin^2 r}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right]+U(r)=\frac{\partial W}{\partial t}. \quad (27)$$

Уравнение (27) допускает разделение переменных

$$W=W_r(r)+W_\vartheta(\vartheta)+W_\varphi(\varphi)+Et \quad (28)$$

и распадается на уравнения

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = M_\varphi, \tag{29а}$$

$$\left(\frac{\partial W_\vartheta}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{M_\varphi{}^2}{\sin^2 \vartheta} = M^2, \tag{29б}$$

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\mu_{||}(r)}{\mu_\perp(r)}\frac{M^2}{\sin^2 r} = 2\mu_{||}(r)\left[E - U(r)\right]. \tag{29в}$$

Уравнения (29) при этом легко интегрируются:

$$W_\varphi = M_\varphi \varphi, \tag{30а}$$

$$W_\vartheta = \int \sqrt{M^2 - \frac{M_\varphi{}^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta, \tag{30б}$$

$$W_r = \int \sqrt{2\mu_{||}(r)\left[E - U(r)\right] - \frac{\mu_{||}(r)}{\mu_\perp(r)}\frac{M^2}{\sin^2 r}} dr. \tag{30в}$$

Подставив выражения (30) и продифференцировав по константам M_φ и M, получим уравнения для траектории частиц:

$$\frac{\partial W}{\partial M_\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2 - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{M_\varphi d\vartheta}{\sin^2\vartheta \sqrt{M^2 - \frac{M_\varphi{}^2}{\sin^2\vartheta}}} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{M d\vartheta}{\sqrt{M^2 - \frac{M_\varphi{}^2}{\sin^2\vartheta}}} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_{||}(r)}{\mu_\perp(r)\sin^2 r} \frac{M dr}{\sqrt{2\mu_{||}(r)\left[E - U(r)\right] - \frac{\mu_{||}(r)}{\mu_\perp(r)}\frac{M^2}{\sin^2 r}}} = 0.$$

Зависимость времени движения по траектории дается выражением

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t_2 - t_1 - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_{||}(r) dr}{\sqrt{2\mu_{||}(r)\left[E - U(r)\right] - \frac{\mu_{||}(r)}{\mu_\perp(r)}\frac{M^2}{\sin^2 r}}} = 0.$$

Выражение для уравнения Гамильтона – Якоби диктует следующую эффективную метрику, в которой движется эффективная материальная точка с приведенной массой, которая зависит от расстояния между исходными материальными точками, а именно:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{\mu_{||}}{\mu} dr^2 - \frac{\mu_\perp}{\mu} \sin^2 r (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Заключение. Таким образом, на основе использования определения центра масс, данного в работах [1, 2], постулируется его неподвижность в пространствах постоянной кривизны при отсутствии внешних сил, кроме обусловленных кривизной пространства, и рассматривается задача двух материальных точек с взаимодействием, которая описывается потенциалом, зависящим от расстояния между точками на трехмерной сфере. Такой подход, обоснованный отсутствием принципа, подобного принципу Галилея, с одной стороны, и свойством изотропности пространства – с другой, позволяет рассматривать задачу в системе покоя центра масс, что автоматически обеспечивает зависимость только от относительных переменных. Сформулировано уравнение

Гамильтона – Якоби задачи, найдены его решения и уравнения траекторий. Показано, что приведенная масса системы зависит от относительного расстояния. С учетом данного обстоятельства выписана модифицированная метрика системы.

Благодарности. Авторы благодарят В. В. Кудряшова за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф19УЗБГ-014 «Моделирование компактных астрофизических объектов и их наблюдательных характеристик для радиотелескопа РТ-70 и орбитального телескопа Гамма-400»).

Acknowledgments. The authors thank V. V. Kudryashov for useful comments.

This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Interactions (Project no. Ф19УЗБГ-014 “Modeling compact astrophysical objects and their observational characteristics for the RT-70 radiotelescope and the Gamma-400 orbital telescope”).

Список использованных источников

1. Kurochkin, Yu. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-body system in three-dimensional spaces of constant curvature / Yu. Kurochkin, Dz. Shoukavy, I. Boyarina // Nonlinear Phenomena in the Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 4. – P. 378–386.

2. Гальперин, Г. А. О понятии центра масс системы материальных точек в пространствах постоянной кривизны / Г. А. Гальперин // Докл. Акад. наук СССР. – 1988. – Т. 302, № 5. – С. 1039–1044.

3. Щепетилов, А. В. Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах / А. В. Щепетилов. – Москва; Ижевск: R &D Dynamics, 2008. – 333 с.

4. Березин, А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – М.: УРСС, 2003. – 200 с.

5. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Наука,1979. – 384 с.

References

1. Kurochkin Yu., Shoukavy Dz., and Boyarina I. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-body system in three-dimensional spaces of constant curvature. *Nonlinear Phenomena in the Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 378–386.

2. Gal’perin G. A. On the concept of the center of mass of a system of material points in spaces of constant curvature. *Doklady Akademii nauk SSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1988, vol. 302, no. 5, pp. 1039–1044 (in Russian).

3. Shchepetilov A. V. *Calculus and Mechanics on Two-Point Homogenous Riemannian Space*. Moscow, Izhevsk, R &D Dynamics Publ., 2008. 333 p. (in Russian).

4. Berezin A. V., Kurochkin Yu. A., Tolkachev E. A. *Quaternions in the Relativistic Physics*. Moscow, URSS Publ., 2003. 200 p. (in Russian).

5. Fedorov F. I. *Lorentz Group*. Moscow, Nauka Publ.,1979. 384 p. (in Russian).

Информация об авторах

Курочкин Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Шёлковый Дмитрий Викторович – кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика», Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-1, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: shoukavy@ifanbel. bas-net.by

Боярина Ирина Петровна – ассистент, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ipboyarina@mail.ru

Information about the authors

Yurii A. Kurochkin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics», B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Dzmitry V. Shoukavy – Ph. D. (Physics and Mathematics), Deputy Head of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics», B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shoukavy@ifanbel.bas-net.by

Irina P. Boyarina – Assistant, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ipboyarina@mail.ru