Prof. Dr.-Ing. Rudolf Nocker
Fachhochschule Hannover
Ricklinger Stadtweg 120
30459 Hannover

Eine kurze Einführung zu Bedienungssystemen

Vorwort

Die nachfolgende Einführung zu Bedienungssystemen verzichtet auf schwierige Ableitungen. Bei verbleibenden Fragen wird auf die Darstellung in [NOCK05, Kap. 1, Kap. 2, Anhang B] sowie auf die dort angegebene weiterführende Literatur verwiesen.

Rudolf Nocker, Hannover, 04.2010

Kontakt

Rudolf.Nocker@fh-hannover.de

Eine kurze Einführung zu Bedienungssystemen

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

Definition

Ein Bedienungssystem ist ein technisches System zur Bedienung von in zufälligen Zeitabständen einfallenden Forderungen auf Bedienung. Die Bediendauern sind im Allgemeinen ebenfalls zufällig. Ein Bedienungssystem besteht aus:

1) (Verkehrs-) Zubringern,
2) Bedienungs-Einrichtung,
3) (Verkehrs-) Abnehmern.

Die Zubringeranzahl kann endlich (in der Realität ist dies immer der Fall) oder für theoretische Überlegungen unendlich sein, die Abnehmeranzahl ist (außer für theoretische Grenzfall-Betrachtungen) endlich. Die Gesamtheit der für dieselbe Aufgabe vorhandenen Abnehmer wird Abnehmerbündel genannt.

Bild 1.1 zeigt das Blockschaltbild eines Bedienungssystems mit N Abnehmern und S Warteplätzen. Die (Verkehrs-)Zubringer werden auch (Verkehrs-)Quellen, die (Verkehrs-)Abnehmer auch (Verkehrs-)Senken oder Bedienelemente oder Bedieneinheiten genannt.

Zustand eines Bedienungssystems, Zustandswahrscheinlichkeit

Der Zustand eines Bedienungssystems ist definiert durch die Anzahl der im System befindlichen Forderungen, diese ergibt sich durch die Anzahl der belegten Abnehmer plus der Anzahl der belegten Warteplätze. Der Zustand eines Bedienungssystems ist also eine „zufällige, ganze Zahl größer oder gleich null“. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Zustand vorliegt, wird als Zustandswahrscheinlichkeit bezeichnet.

Stationärer Zustand eines Bedienungssystems

Nachfolgend wird immer der stationäre Endzustand eines Bedienungssystems betrachtet, welcher sich nach Abklingen des „statistischen Einschwingvorgangs“ (welcher beim Systemstart durchlaufen wird) ergibt.

Im stationären (End-)Zustand sind alle Zustandswahrscheinlichkeiten konstant und somit zeitunabhängig. Somit sind auch alle aus den Zustandswahrscheinlichkeiten abgeleiteten Größen (Ereignis-Wahrscheinlichkeiten, Momente usw.) konstant.

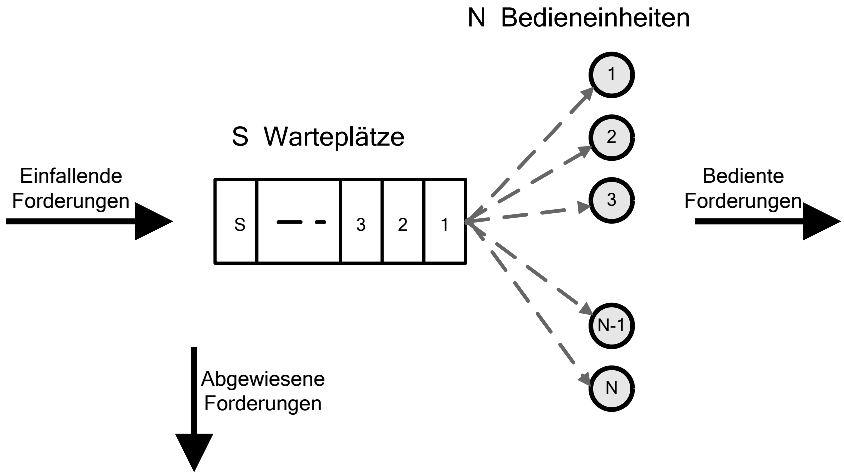


Bild 1.1 :
Blockschaltbild eines allgemeinen Bedienungssystems.
S Anzahl der Warteplätze; N Anzahl der Bedienelemente;

2 Klassifikation von Bedienungssystemen

Bedienungssysteme können eingeteilt werden in

- Verlustsysteme,
- Wartesysteme,
- Warteverlustsysteme.

Bei einem Bedienungssystem mit unendlicher Quellenanzahl ($M = \infty$), der Warteplatzanzahl $S \geq 0$ und der begrenzten (maximal zulässigen) Wartedauer $t_{w,max}$ ergibt sich die in Bild 2.1 dargestellte Klassifizierung.

Verlust-System
Bei einem Verlust-System sind keine Warteplätze ($S = 0$) vorhanden. Nicht sofort ausführbare Forderungen werden deshalb überhaupt nicht abgefertigt, sie gehen sofort „zu Verlust“. Es wird vorausgesetzt, dass die zu Verlust gegangenen Forderungen ohne Rückwirkung aus dem System verschwinden (lost calls cleared).

Warte-System
Bei einem Warte-System sind so viele Warteplätze vorhanden, dass jede einfallende Forderung mindestens einen freien Warteplatz vorfindet. Nicht sofort ausführbare Forderungen werden in die Warteschlange eingereiht. Die maximal zulässige Wartedauer ist nicht begrenzt.

Hinweis:
Obige Formulierung beinhaltet, dass für ein Wartesystem bei endlicher / unendlicher Zubringeranzahl eine endliche / unendliche Anzahl von Warteplätzen erforderlich ist. Bei einem Wartesystem können somit keine Verluste auftreten.

Warte-Verlust-System

Bei einem Warte-Verlust-System findet nicht jede, nicht sofort ausführbare Forderung einen freien Warteplatz vor oder / und die Wartedauer in der Warteschlange ist begrenzt. Bei Überschreitung der maximal zulässigen Wartedauer geht die betreffende Forderung zu Verlust (und es wird vorausgesetzt, dass sie ohne Rückwirkung aus dem System verschwindet, lost calls cleared).

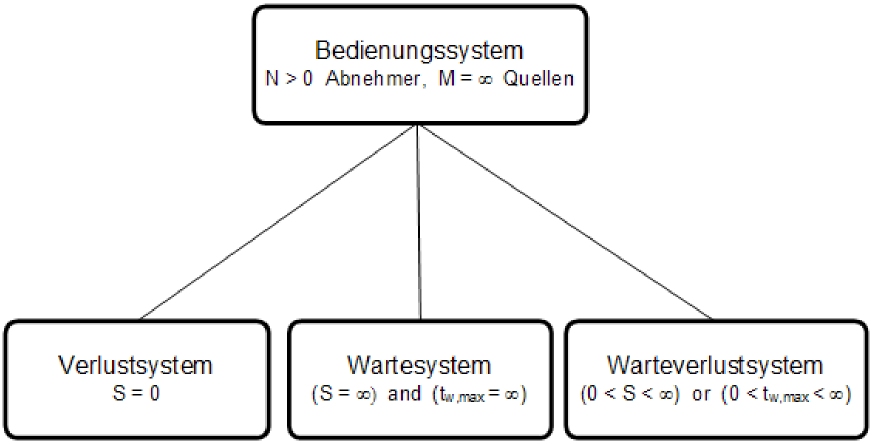


Bild 2.1 :
Klassifikation von Bedienungssystemen.
$M = \infty$ Quellenanzahl, $N > 0$ Abnehmeranzahl, $S \geq 0$ Warteplatzanzahl,
$t_{w,max} > 0$ maximal zulässige Wartedauer.

3 Zufallsprozesse in Bedienungssystemen

3.1 Grundbegriffe und Definitionen

Zufallsprozess

Ein Zufallsprozess wird auch als stochastischer Prozess bezeichnet. Zur exakten Beschreibung von Zufallsprozessen wird auf [FISZ73] verwiesen. Die exakten Definitionen werden nachfolgend teilweise durch umgangssprachliche Beschreibungen ersetzt.

Ein Zufallsprozess ist der Verlauf einer Zufallsgröße (beispielsweise der Rauschspannung u_n an einem Widerstand) in Abhängigkeit von einem Parameter (beispielsweise der Zeitvariablen t). Eine Realisation eines Zufallsprozesses wird auch als Musterfunktion bezeichnet.

Grundsätzlich muss zwischen Scharmittelwerten (Mittelung über viele Musterfunktionen zu einem Zeitpunkt) und Zeitmittelwerten (Mittelung über eine Musterfunktion längs der Zeitachse) unterschieden werden.

Nachfolgend wird immer ein stationärer und ergodischer Zufallsprozess vorausgesetzt. Dann sind die Schar-Mittelwerte für alle Zeitpunkte identisch und auch identisch mit den Zeitmittelwerten einer jeden Musterfunktion.

Kann die Zufallsgröße nur diskrete Werte annehmen, liegt ein „diskreter Zufallsprozess“ vor. Die diskreten Werte eines Zufallsprozesses werden auch als Zustände des Zufallsprozesses bezeichnet.

Markoff-Zufallsprozess

Ein Zufallsprozess von großer Bedeutung ist der Markoff-Zufallsprozess. Ein Markoff-Zufallsprozess ist dadurch gekennzeichnet, dass der nächste Zustand (der Folgezustand) nur vom aktuellen Zustand abhängig ist (und von den weiter zurückliegenden Zuständen unabhängig ist). Man bezeichnet diese Eigenschaft auch als „Gedächtnislosigkeit“.

Zustand eines Bedienungssystems

Der Zustand eines Bedienungssystems ist definiert durch die Anzahl der im Bedienungssystem befindlichen Forderungen. Diese Anzahl ist gleich der Anzahl der belegten Abnehmer plus der Anzahl der belegten Warteplätze.

Der Zustand eines Bedienungssystems ist also eine zufällige, ganze Zahl größer oder gleich null und somit ein diskreter Zufallsprozess. Da Stationarität vorausgesetzt wird, sind die Zustandswahrscheinlichkeiten konstant.

Berechnung des Bedienungssystem-Zustands

Der Zustand eines Bedienungssystems kann aus Ankunftsprozess, Bedienprozess und Bedienungssystem-Eigenschaften berechnet werden. Hierzu sind exakte Kenntnisse erforderlich über das zufällige Einfallen der Forderungen (den Ankunftsprozess), die zufällige Dauer eines Bedienvorgangs (den Bedienprozess) und die genaue Funktionsweise des Bedienungssystems (Abnehmeranzahl, Warteplatzanzahl, Bedienstrategie).

Ankunftsprozess

Ein mathematisch einfach zu beschreibender Ankunftsprozess ergibt sich, wenn die Einfallrate für Forderungen (auf Bedienung) als konstant vorausgesetzt wird. Man kann zeigen:

Bei konstanter Ereignis-Einfallrate ist der zeitliche Abstand zwischen aufeinander folgenden Ereignissen exponentiell verteilt und die Anzahl der Ereignisse in einem endlichen Zeitintervall ist poissonverteilt. Folgende Aussagen sind gleichwertig:

Ereignisrate ist	konstant,
Ereignisabstand ist	exponentiell verteilt,
Ereignisanzahl ist	poissonverteilt.

Ein Ankunftsprozess mit obigen Eigenschaften wird als Markoff-Ankunftsprozess (auch als Poisson-Ankunftsprozess, Zufallsverkehr 1.Art, reiner Zufallsverkehr) bezeichnet.

Bedienprozess

Ein mathematisch einfach zu beschreibender Bedienprozess ergibt sich, wenn die Bediendauer negativ exponentiell verteilt ist. Es ergibt sich dann eine konstante „Ende“-Rate für einen laufenden Bedienvorgang. Dieser Bedienprozess wird als Markoff-Bedienprozess bezeichnet.

3.2 Beschreibung zum Markoff-Ankunftsprozess

Ein Markoff-Ankunftsprozess (Ankunftsprozess Typ M) liegt vor, wenn die Einfallabstände (die Abstände zwischen aufeinander folgender Forderungen) negativ exponentiell verteilt sind. Die Einfallrate (Wahrscheinlichkeitsdichte) für Forderungen ist dann konstant und wird nachfolgend mit λ bezeichnet. Die Einfallraten statistisch unabhängiger Ankunftsprozesse können addiert werden.

Mittlere Forderungs-Anzahl während der Beobachtungsdauer t_{beo}

Bei konstanter Forderungs-Einfallrate λ ist die mittlere Forderungsanzahl n_{beo} während der Beobachtungs-Zeitdauer t_{beo} gleich

$n_{beo} = \lambda \cdot t_{beo};$

Mittlerer Einfallabstand

Der mittlere Einfallabstand t_a zwischen zwei aufeinander folgenden Forderungen folgt (bei großem t_{beo} können die Randeffekte vernachlässigt werden) zu:

$t_a = t_{beo} / (\lambda \cdot t_{beo}) = 1 / \lambda;$

Resultierend ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{n_{beo} = \lambda \cdot t_{beo} = t_{beo} / t_a\ ;}}$$

Ereignis-Anzahl = Ereignis-Rate · Beobachtungsdauer;

mit

n_{beo}	mittlere Forderungsanzahl,
λ	Einfallrate,
t_{beo}	Beobachtungsdauer,
t_a	mittlerer Forderungsabstand.

3.3 Beschreibung zum Markoff-Bedienprozess

Ein Markoff-Bedienprozess (Bedienprozess Typ M) liegt vor, wenn die Bediendauern negativ exponentiell verteilt sind. Die Enderate (die Einfallrate für ein Ende-Ereignis) eines laufenden Bedienvorgangs ist dann konstant und wird nachfolgend mit μ bezeichnet. Die Enderaten von (mehreren gleichzeitig „ablaufenden“) statistisch unabhängigen Bedienvorgängen können addiert werden.

Bei konstanter Einfallrate μ (für Ende-Ereignisse) folgt die mittlere Bediendauer (nachfolgend mit t_m bezeichnet) zu

$t_m = 1 / \mu$.

Bei realem Fernsprechverkehr sind die Bediendauern (auch als Belegungsdauern bezeichnet) mit guter Näherung exponentiell verteilt mit einem Mittelwert von 120 s bis 150 s.

Hinweis:
Bei Datenverkehr liegt oft konstante Bediendauer vor, also (kein Markoff-Bedienprozess, sondern) ein deterministischer Bedienprozess.

Hinweis zu den verwendeten Formelzeichen
Für Ereignis-Raten (Ankunfts-, Verlust-, Belegungs-, Abgangs-Raten) werden in der Literatur sehr unterschiedliche Formelzeichen benutzt:

Die Planungswerte für Ereignisraten bei realen Systemen werden meist mit lateinischen Formelbuchstaben (c_x) bezeichnet.

Die Parameter idealisierter Zufallsverteilungen werden meist mit griechischen Formelbuchstaben (λ_x, μ) bezeichnet.

Beispielsweise:

λ, λ_a	bzw.	c_a	für Ankunftsraten,
λ_r, λ_v	bzw.	c_r, c_v	für Verlustraten,
λ_y	bzw.	c_y	für Belegungsraten
μ	bzw.	$1 / t_m$	für Belegungsenderate pro Belegung usw..

Nachfolgend wird (abhängig vom Anwendungsfall) ebenso verfahren.

4 Kendall-Notation

Nach Kendall werden Bedienungssysteme durch folgende Kurzbeschreibung charakterisiert (Bild 4.1):

AP / BP / N(k) / S / BS ; **Kendall-Notation ;**

AP Ankunfts-Prozess:
Verteilungsfunktion der Zwischenankunfts-Abstände (Einfall-Abstände);

BP Bedien-Prozess:
Verteilungsfunktion der Abfertigungs-Zeitdauer (Belegungsdauer, Bediendauer);

N Anzahl der Abnehmer;

k Erreichbarkeit der Abnehmer,

S Anzahl der Warteplätze;

BS Bedien-Strategie;

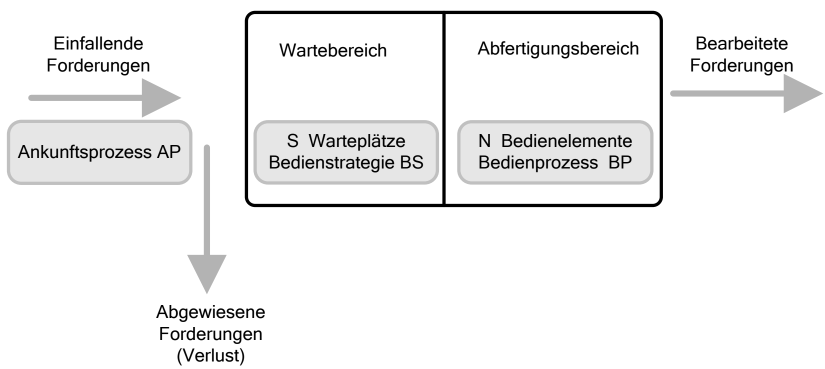


Bild 4.1:
Kendall-Notation zu Bedienungssystemen.

Ankunftsprozess AP, Bedien-Prozess BP

AP, BP $\in$ { D, G, M, … };

D = Deterministic	Einfallabstand des AP (bzw. Bediendauer des BP) ist konstant;
G = General	Einfallabstand des AP (bzw. Bediendauer des BP) ist „beliebig" verteilt;
M = Markoffsch	Einfallabstand des AP (bzw. Bediendauer des BP) ist exponentiell verteilt;

Erreichbarkeit k

Mit dem Zahlenwert k wird die „Erreichbarkeit" der Abnehmer angegeben:
Die Erreichbarkeit k ist (grob formuliert) die Anzahl der Abnehmer, die (von einer Forderung auf Bedienung) benutzt werden können.

Wenn alle Abnehmer erreichbar sind, ist $k = N$. Eine Erreichbarkeit $k = N$ bezeichnet man als volle Erreichbarkeit oder vollkommene Erreichbarkeit. Bei voller Erreichbarkeit entfällt die Angabe von k in der Kendall-Notation. Bei $k < N$ spricht man von begrenzter Erreichbarkeit der Abnehmer.

Bedien-Strategie BS

BS $\in$ {FCFS, LCFS, SIRO, … };

FCFS = First Come First Served;
LCFS = Last Come First Served;
SIRO = Service In Random Order;

Hinweis:
Statt SIRO wird auch die Bezeichnung RANDOM verwendet.

Vereinfachte Schreibweise

Bei $k = N$, BS = FCFS entfällt die Angabe der entsprechenden Parameterwerte. Bei $S = 0$ liegt ein Verlustsystem vor, dann entfällt die Angabe einer Bedienstrategie, der Parameterwert (S =) 0 kann dann ebenfalls entfallen:

Ausführliche Schreibweise:	Vereinfachte Schreibweise:
AP / BP / N(N) / ∞ / FCFS $\rightarrow$	AP / BP / N / ∞;
AP / BP / N(N) / 0 $\rightarrow$	AP / BP / N;

Beispiel 4.1

Bedienungssystem M / M / N
Bedienungssystem mit exponentiell verteilten Zwischenankunfts-Abständen (M), exponentiell verteilten Bediendauern (M) und N Abnehmern mit voller Erreichbarkeit (deshalb ist k = N nicht angegeben) ohne Warteplätze. Dies ist das sog.
Erlang-Verlustsystem mit N Abnehmern.

Bedienungssystem M / M / N / S / FCFS
Bedienungssystem mit exponentiell verteilten Zwischenankunfts-Abständen (M), exponentiell verteilten Bediendauern (M), N Abnehmern (mit voller Erreichbarkeit), S Warteplätzen (mit voller Erreichbarkeit) und der Bedienstrategie FCFS für die wartenden Forderungen. Wegen der begrenzten Warteplatzanzahl liegt ein Warte-Verlust-System vor. Da die Bedienstrategie FCFS vorliegt, kann man auch schreiben: **M / M / N / S**.

Bedienungssystem M / M / N / ∞ / FCFS
Bedienungssystem mit exponentiell verteilten Zwischenankunfts-Abständen (M), exponentiell verteilten Bediendauern (M), N Abnehmer, unendlich vielen Warteplätzen und der Bedienstrategie FCFS. Da die Bedienstrategie FCFS vorliegt, kann man auch schreiben: **M / M / N / ∞.** Dies ist das sog.
Erlang-Wartesystem mit N Abnehmern.

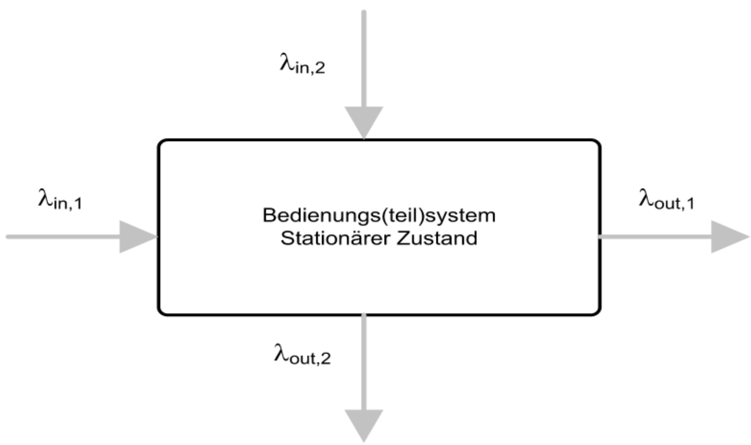
5 Fluss-Erhaltungssatz

Formulierung

Der stationäre Zustand eines Bedienungssystems ist dadurch definiert, dass alle Zustandswahrscheinlichkeiten konstant sind.

Daraus folgt, dass alle daraus abgeleiteten Größen konstant sind, beispielsweise die mittlere Anzahl der im Bedienungssystem befindlichen Forderungen. Deshalb muss im stationären Zustand für jedes Bedienungs-Teilsystem der Fluss-Erhaltungssatz gelten (Bild 5.1):

Im stationären Zustand ist für jedes Bedienungs-Teilsystem die Gesamt-Zugangsrate (Eintrittsrate, Einfallrate) gleich der Gesamt-Abgangsrate (Austrittsrate, Enderate).



$$\lambda_{in} = \sum_{(j)} \lambda_{in,j} \; ; \qquad \lambda_{out} = \sum_{(k)} \lambda_{out,k} \; ; \qquad \lambda_{in} = \lambda_{out} \; ;$$

Bild 5.1:
Stationärer Zustand ergibt Fluss-Erhaltungssatz.

Beweis

Ohne Flusserhaltung würde sich die mittlere Anzahl der im System befindlichen Forderungen verändern und somit ein Widerspruch zur Voraussetzung (stationärer Zustand) vorliegen:

$y_{BS}(t)$	Schar-Mittelwert der Forderungs-Anzahl im System zum Zeitpunkt t;
λ_{in}, λ_{out}	Zugangsrate, Abgangsrate;
t_{beo}	Beobachtungsdauer;

$y_{BS}(t+t_{beo}) = y_{BS}(t) + (\lambda_{in} \cdot t_{beo}) - (\lambda_{out} \cdot t_{beo}) = y_{BS}(t) + (\lambda_{in} - \lambda_{out}) \cdot t_{beo}$

$y_{BS}(t+t_{beo}) = y_{BS}(t)$ für alle t und beliebige $t_{beo} > 0 \rightarrow \lambda_{in} - \lambda_{out} = 0; \rightarrow \lambda_{in} = \lambda_{out};$

$\boxed{\lambda_{in} = \lambda_{out} = \lambda \,;}$ **Zugangsrate = Abgangsrate ;**

Hinweis

Bei einem Bedienungssystem ist die Zugangsrate (durch einfallende Forderungen) entweder konstant (Zufallsverkehr 1.Art, ZV1, Poisson-Forderungsstrom) oder nimmt mit steigender Anzahl belegter Abnehmer ab (Zufallsverkehr 2.Art, ZV2). Die Abgangsrate (durch abgehende, bearbeitete Forderungen) steigt proportional zur Anzahl belegter Abnehmer an.

Im stationären (End-)Zustand muss die mittlere Zugangsrate λ_{in} gleich der mittleren Abgangsrate λ_{out} sein, nur dann kann die mittlere Anzahl belegter Abnehmer im System konstant sein. Es muss sich deshalb im stationären Zustand eine mittlere Belegungsanzahl einstellen, bei der die Gleichgewichts-Bedingung $(\lambda_{in} = \lambda_{out})$ exakt erfüllt wird.

Beispiel 5.1

Gegeben:
Verlustsystem mit folgenden Kennwerten:
Forderungs-Einfallrate $c_a = 12/min$, Belegungs-Einfallrate $c_y = 600/h$,
Beobachtungsdauer 10 min;

Gesucht:

1) Verlust-Rate;

2) Mittlere Anzahl der zu Verlust gehenden Forderungen während der Beobachtungsdauer;

3) Verlustwahrscheinlichkeit B
(Verlustwahrscheinlichkeit bezogen auf die Forderungs-Einfallrate);

Ergebnis:

Mit $c_a = 12/min$, $c_y = 600/h$ folgt:

1) Anwendung Flusserhaltungssatz:
$c_a = c_y + c_v$;
$c_v = c_a - c_y = 12/min - 600/h = 720/h - 600/h = 120/h = 2/min$;
Die Verlustrate ist $c_v = 2/min$;

2) Ereignis-Anzahl = Ereignis-Rate · Beobachtungsdauer:
$n_v = c_v \cdot t_{beo} = 2/min \cdot 10\ min = 20$;
Während der Beobachtungsdauer gehen durchschnittlich 20 Rufeinfälle zu Verlust;

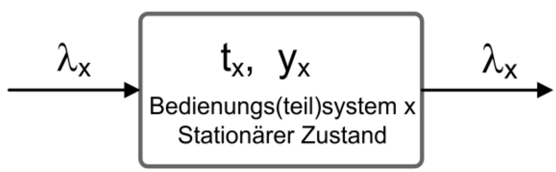
3) $B = c_v / c_a = (2/min) / (12/min) = 0.167 = 16.7\%$;
Die Verlustwahrscheinlichkeit B ist 16.7%.

6 Little-Theorem

Formulierung

Im stationären Zustand ist die mittlere Anzahl y_X der Forderungen (in einem Bedienungs-Teilsystem x) gleich dem Produkt aus Forderungs-Einfallrate λ_X (in das Bedienungs-Teilsystem x) und mittlerer Forderungs-Verweildauer t_X (im Bedienungs-Teilsystem x). Bild 6.1 veranschaulicht das Little-Theorem.

EW[Anzahl$_X$] = Einfallrate$_X$ · EW[Verweildauer$_X$] ;
$\mathbf{y_X \quad = \quad \lambda_X \quad \cdot \quad t_X}$



$$y_X = \lambda_X * t_X$$

Bild 6.1:
Little-Theorem für Bedienungssysteme.

Beweis zum Little-Theorem

Wir beobachten bei einem Bedienungs(teil)system im stationären Zustand während der Beobachtungsdauer t_{beo} den Zugang und Abgang von Forderungen.

Zugang von Forderungen:
Die mittlere Anzahl der während der Beobachtungsdauer t_{beo} in das Bedienungs(teil)system eintretenden Forderungen ist $\lambda_X \cdot t_{beo}$

Abgang von Forderungen:
Während der Beobachtungsdauer t_{beo} werden insgesamt (t_{beo}/t_X)-mal y_X Forderungen das Bedienungs(teil)system verlassen.

Im stationären Zustand müssen nach dem Flusserhaltungssatz beide Anzahlen übereinstimmen (Flusserhaltungs-Satz), somit folgt:

$\lambda_x \cdot t_{beo} = (t_{beo}/t_x) \cdot y_x$; $\Rightarrow$ $y_x = \lambda_x \cdot t_x$.

Beispiel 6.1

Gegeben:
Wartesystem mit folgenden Kennwerten: Forderungs-Einfallrate 5/s, durchschnittlich sind 100 Warteplätze belegt, mittlere Abnehmer-Belegungsdauer 0.2 min.

Gesucht:

1) Mittlere Wartedauer;

2) Durchschnittliche Anzahl belegter Abnehmer;

3) Mittlere Anzahl der Forderungen im Bedienungssystem;

4) Mittlere Durchlaufdauer (sog. Systemzeit) einer Forderung durch das Bedienungssystem;

Ergebnis:
Mit $\lambda = 5/s$, $y_W = 100$, $t_m = 0.2$ min = 12 s folgt:

1) $y_W = \lambda \cdot t_W$; $\rightarrow$ $t_W = y_W/\lambda = 100/(5/s) = 20$ s;
Die mittlere Wartedauer ist 20 s.

2) $y = \lambda \cdot t_m = (5/s) \cdot 0.2$ min $= 60$;
Durchschnittlich sind 60 Abnehmer belegt.

3) $y_{ges} = y_W + y = 100 + 60 = 160$;
Durchschnittlich befinden sich 160 Forderungen im System
(100 Forderungen warten, 60 Forderungen werden bearbeitet);

4) $t_{BS} = t_W + t_m = 20$ s + 12 s = 32 s;
Die mittlere Durchlaufdauer beträgt 32 s
(20 s mittlere Wartedauer, 12 s mittlere Bearbeitungsdauer).

7 Kenngrößen eines Bedienungssystems

7.1 Bezeichnungen

Als Kenngröße eines Systems bezeichnet man eine messbare Eigenschaft des Systems. Bei einem Bedienungssystem sind dies beispielsweise die momentanen oder mittleren Anzahlen von Forderungen in bestimmten Teilbereichen (Wartebereich, Abfertigungsbereich) des Systems oder die mittleren Verweildauern in diesen Teilbereichen. Bild 7.1 veranschaulicht die nachfolgenden Definitionen.

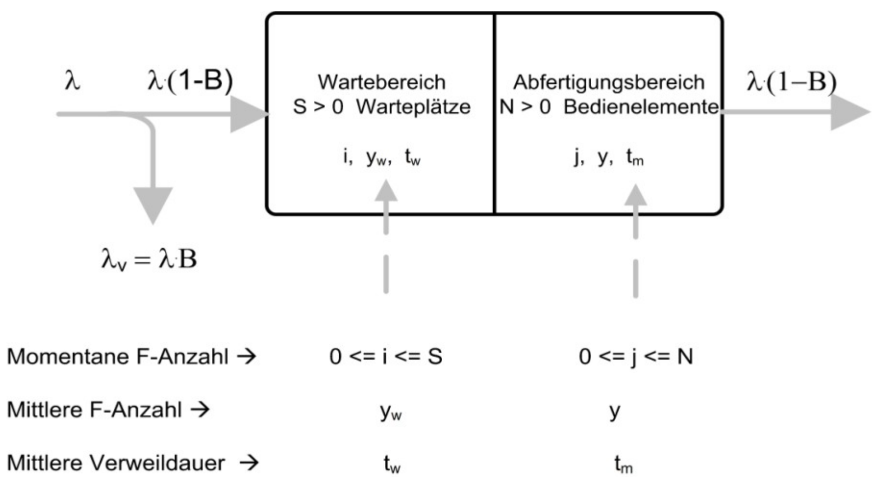


Bild 7.1:
Kenngrößen eines Bedienungssystems.
i = momentane Anzahl der Forderungen im Wartespeicher (belegte Warteplätze);
j = momentane Anzahl der Forderungen im Abfertigungsbereich (belegte Bedienelemente);

Nachfolgend wird zusätzlich verwendet:
m = i + j = momentane Anzahl aller Forderungen im Bedienungssystem.

7.2 Vorüberlegungen

Es wird ein Bedienungssystem (mit oder ohne Wartebereich) im stationären Zustand betrachtet (Bild 7.2). Folgende Größen des Bedienungssystems seien bekannt:

Ankunftsrate λ, Verlustrate λ_V, Anzahl der Bedienelemente (= Abnehmeranzahl) N, mittlere Dauer einer erfolgreichen Belegung t_m ;

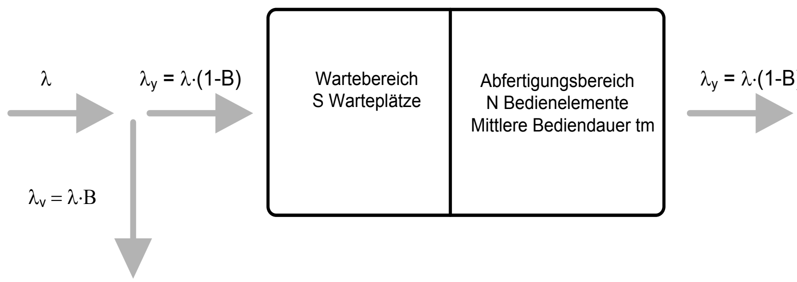


Bild 7.2:
Bedienungssystem mit Ankunftsrate λ und Verlustrate λ_V.
N Bedienelemente-Anzahl; t_m mittlere Belegungsdauer;

Verlustwahrscheinlichkeit B
Die Verlustwahrscheinlichkeit B ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine einfallende Forderung zu Verlust geht.

$B := \lambda_V / \lambda;$

Es wird angenommen, dass eine zu Verlust gehende Forderung ohne Rückwirkung aus dem System verschwindet. Die Verlustrate ist $\lambda_V = B \cdot \lambda;$

Anwendung Flusserhaltungssatz
Nach dem Flusserhaltungssatz muss im stationären Zustand sein:

Zugangsrate $\lambda_y = \lambda - \lambda_v = \lambda\cdot(1\text{-}B) =$ Abgangsrate λ_y;

Die Zugangsrate wird auch als Eintrittsrate oder Belegungseinfall-Rate, die Abgangsrate auch als Austrittsrate oder Belegungsende-Rate bezeichnet. Nach dem Flusserhaltungssatz müssen diese beiden Ereignisraten (im stationären Zustand) identisch sein.

Anwendung Little-Theorem
Nach dem Little-Theorem ist im stationären Zustand die mittlere Anzahl y der belegten Abnehmer:

[Mittlere Anzahl belegter Abnehmer] = $\lambda_y\cdot t_m = \lambda\cdot(1\text{-}B)\cdot t_m$;

(Abnehmer-)Belastung y
Die mittlere Anzahl der belegten Abnehmer wird als (Abnehmer-)Belastung y eines Bedienungssystems bezeichnet.

y := [Mittlere Anzahl belegter Abnehmer] = $\lambda\cdot(1\text{-}B)\cdot t_m$;

Eine Belastung y erfordert zwingend eine Abnehmeranzahl $N > y$. Würden keine Verluste auftreten (Verlustwahrscheinlichkeit $B = 0$), wird nach obiger Gleichung die Belastung y (die mittlere Anzahl belegter Abnehmer) maximal. Diese maximal mögliche Belastung wird als Angebot A bezeichnet:

$y_{max} = \lambda\cdot t_m := A$;

Angebot A
Der maximal mögliche Belastungswert y_{max} (bei Verlustwahrscheinlichkeit $B = 0$) wird als Angebot A an das Bedienungssystem bezeichnet:

$A := \lambda\cdot t_m$;

Andere Deutung des Angebots A
Die oben abgeleitete Gleichung für das Angebot $A = \lambda \cdot t_m$ kann auch wie folgt interpretiert werden:

Bei einer Zugangsrate λ und einer Beobachtungsdauer t_m ist das Produkt $\lambda \cdot t_m$ die mittlere Anzahl der eintreffenden Forderungen während der Beobachtungsdauer t_m. Daraus folgt die nachfolgende (in der Bedienungstheorie verwendete) Definition zum Angebot A:

Das Angebot A an ein Bedienungssystem ist die mittlere Anzahl der eintreffenden Forderungen während der mittleren Dauer einer erfolgreichen Belegung eines Abnehmers.

Ausgehend von den obigen Erklärungen und Veranschaulichungen werden nachfolgend alle relevanten Kenngrößen eines Bedienungssystems formal (als Erwartungswerte von Anzahlen) definiert.

7.3 Definition der Verkehrsgrößen

Die nachfolgend definierten Erwartungswerte bezeichnet man als Verkehrsgrößen eines Bedienungssystems:

$A :=$ EW[Anzahl der Forderungseinfälle während t_m] $= \lambda \cdot t_m$;
$y :=$ EW[Anzahl belegter Abnehmer] = EW[j];
$y_W :=$ EW[Anzahl belegter Warteplätze] = EW[i];
$y_{BS} =$ EW[Anzahl Forderungen im Bedienungssystem] $= y_W + y$;
$R := A - y$;

Angebot A
Das Angebot A ist die mittlere Anzahl der eintreffenden Forderungen während der mittleren Dauer einer erfolgreichen Belegung.

Hinweis:
Wie bereits beschrieben, kann das Angebot A auch als maximal möglicher Wert der (Abnehmer-) Belastung y_{max} gedeutet werden, welche sich einstellen würde, wenn niemals Verluste (Verlustwahrscheinlichkeit B = 0) auftreten würden.

Abnehmer-Belastung y

Die (Abnehmer-)Belastung y ($\leq A$) ist die mittlere Anzahl der belegten Abnehmer.

Warte-Belastung y_W

Die Warte-Belastung y_W ist die mittlere Anzahl der belegten Warteplätze.
Die Warte-Belastung wird auch als mittlere Warteschlangen-Länge bezeichnet.

Gesamt-Belastung y_{BS}

Die Gesamt-Belastung y_{BS} eines Bedienungssystems ist die mittlere Anzahl der im Bedienungssystem befindlichen Forderungen.

Restverkehr R

Die Differenz $R = (A-y)$ wird als Restverkehr bezeichnet: $R := A - y \geq 0$;

$R = A - y = A - A\cdot(1-B) = A\cdot B$;

Die Verlustwahrscheinlichkeit B ist somit auch:
$B = R / A$;

Dimension der Verkehrsgrößen

Alle oben definierten Größen Angebot, (Abnehmer-)Belastung, Warte-Belastung, Gesamt-Belastung, Restverkehr sind Mittelwerte von Anzahlen und somit reelle Zahlen. Sie haben somit die Dimension 1 (dimensionslose Größen) und werden als Verkehrsgrößen bezeichnet.

dim(Verkehrsgröße) = dim(Rate·Zeitdauer) = dim(1/Zeit)·dim(Zeit) = 1;

Einheit der Verkehrsgrößen

Alle Verkehrsgrößen werden mit der Pseudoeinheit Erlang (Abkürzung Erl) gekennzeichnet. Der Däne Erlang war der Begründer der Verkehrstheorie.

7.4 Warte-Wahrscheinlichkeit p_W, Verlust-Wahrscheinlichkeit B

Warte-Wahrscheinlichkeit p_W
ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine **einfallende** Forderung warten muss.

Verlust-Wahrscheinlichkeit B
ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine **einfallende** Forderung zu Verlust geht.

Mathematische Formulierung
Obige Formulierung beinhaltet, dass der Systemzustand aus der „Sicht“ einer **einfallenden** Forderung betrachtet wird, somit liegt eine **bedingte Wahrscheinlichkeit** vor, nämlich dass ein bestimmter Systemzustand unter der Bedingung „Forderungs-Einfall während des kleinen Zeitintervalls Δt“ (nachfolgend abgekürzt mit „FEΔt“) vorliegt.

Mit dem Systemzustand m (= momentane Anzahl der im Bedienungssystem befindlichen Forderungen) kann die Warte- bzw. Verlust-Wahrscheinlichkeit wie folgt formuliert werden (siehe auch Bild 7.1):

p(warten)	= p(einfall. Ford. muss warten) =	$p_W = p(N \le m < N+S \mid FE\Delta t)$;
p(Verlust)	= p(einfall. Ford. geht zu Verlust) =	$B = p(m = N+S \mid FE\Delta t)$;

Nachfolgend wird der Zusammenhang zwischen absoluten (objektiven) und bedingten (subjektiven) Zustandswahrscheinlichkeiten (unter der Bedingung Forderungs-Einfall) analysiert, dabei ergibt sich folgendes Ergebnis:

Bei konstanter Forderungs-Einfallrate können die bedingten Zustandswahrscheinlichkeiten durch die absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten ersetzt werden. Bei zustandsabhängiger (variabler) Forderungs-Einfallrate muss zwingend mit den bedingten Zustandswahrscheinlichkeiten gerechnet werden.

$p_w = p(N \le m < N+S)$; $B = p(m = N+S)$; (bei konstanter Einfallrate);

Die nachfolgende Ableitung begründet die obige Aussage. Für eine erste Orientierung können die Ausführungen auf Seite 23 übergangen werden.

Berechnung bei zustandsabhängiger Forderungs-Einfallrate
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(m \mid FE\Delta t)$ kann wie folgt berechnet werden:

$$p(m \mid FE\Delta t) = p(m \wedge FE\Delta t) / p(FE\Delta t) = p(FE\Delta t \mid m) \cdot p(m) / p(FE\Delta t);$$

Dabei ist: $p(FE\Delta t \mid m) = \lambda_m \cdot \Delta t$; $p(FE\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t$; mit

$\lambda = EW[\lambda_m] = \sum_{(m)} p(m) \cdot \lambda_m$; = mittlere Forderungs-Einfallrate.

Somit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen bedingten und absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\boxed{p(m \mid FE\Delta t) = (\lambda_m/\lambda) \cdot p(m);}$$

Vereinfachung bei konstanter Forderungs-Einfallrate
Bei konstanter Forderungs-Einfallrate ($\lambda_m = \lambda$ für alle m) ergibt sich nach obiger Ableitung unabhängig vom Zustand m immer

$p(m \mid FE\Delta t) = (\lambda/\lambda) \cdot p(m) = p(m)$; (für alle m);

Bei konstanter Forderungs-Einfallrate (Zufallsverkehr 1. Art, ZV1) können die bedingten Zustandswahrscheinlichkeiten durch die absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten ersetzt werden.

Für die Warte- bzw. Verlustwahrscheinlichkeit folgt bei konstanter Forderungs-Einfallrate somit:

p(warten) =	$p_W = p(N \leq m < N+S)$;
p(Verlust) =	$B = p(m = N+S)$;

Es sei nochmals angemerkt, dass diese Vereinfachungen nur bei konstanter Forderungs-Einfallrate (Zufallsverkehr 1.Art, ZV1) zulässig sind. Wenn die Forderungs-Einfallrate vom Systemzustand m abhängt (Zufallsverkehr 2. Art, ZV2), muss zwingend mit den bedingten Zustands-Wahrscheinlichkeiten gerechnet werden.

Hinweis
Bei einem Verlustsystem mit N Abnehmern wird die Verlustwahrscheinlichkeit $B_R = p(N \mid FE\Delta t)$ als Rufsperrung (call congestion) bezeichnet, da diese Wahrscheinlichkeit als Quotient (Verlust-Forderungen / Gesamtanzahl der Forderungen) darstellbar ist.

Die Verlustwahrscheinlichkeit $B_Z = p(N)$ wird als Zeitsperrung (time congestion) bezeichnet, da diese Wahrscheinlichkeit als Quotient (Zeitanteil mit Verlustgefahr / Gesamtzeit) darstellbar ist.

Bei konstanter Forderungs-Einfallrate (Zufallsverkehr 1. Art) ist nach obiger Ableitung $B_R = B_Z$. Bei zustandsabhängiger Forderungs-Einfallrate (Zufallsverkehr 2.Art) ist dagegen $B_R \neq B_Z$.

Wesentlich ist, dass der Anteil der zu Verlust gehenden Forderungen nur durch die Rufsperrung B_R exakt beschrieben wird. Nur bei konstanter Rufeinfallrate ist dieser Wert mit der Zeitsperrung identisch.

Beispiel 7.1
Gegeben:
Die Forderungs-Einfallrate sei konstant (ZV1).

Gesucht:

1) Formulieren Sie die Wartewahrscheinlichkeit p_W bei einem Wartesystem mit genau 1 Abnehmer durch Zustandswahrscheinlichkeiten;
2) Formulieren Sie die Verlustwahrscheinlichkeit B bei einem Verlustsystem mit genau N Abnehmern durch Zustandswahrscheinlichkeiten;

Ergebnis:

1) Wartesystem mit genau einem Abnehmer
   Für ein Wartesystem ($S = \infty$) mit genau einem Abnehmer ($N = 1$) folgt

   $p_W = p(m \geq 1) = 1\text{-}p(m = 0) = 1\text{-}p(\text{Abnehmer nicht belegt}) = p(\text{Abn. belegt})$.

2) Verlustsystem mit N Abnehmern
   Für ein Verlustsystem ($S = 0$) mit N Abnehmern folgt:

   $B = p(m = N) = p(\text{genau N Abnehmer belegt})$.

7.5 Mittlere Wartedauern t_W, t_{WW}

Die mittlere Wartedauer unter Berücksichtigung aller Forderungen (der wartenden und nicht wartenden Forderungen) wird mit t_W bezeichnet, die mittlere Wartedauer unter Berücksichtigung nur der wartenden Forderungen wird mit t_{WW} bezeichnet.

Unter Verwendung des Little-Theorems können t_W und t_{WW} wie folgt berechnet werden (siehe [NOCK05, Bild 1.10]):

a) Betrachtung des (Gesamt-)Wartebereichs:

$y_W = \lambda \cdot t_W;$ $\rightarrow$ $t_W = y_W / \lambda;$

b) Betrachtung des Teilblocks „Warteplätze“:

$y_W = (p_W \cdot \lambda) \cdot t_{WW};$ $\rightarrow$ $t_{WW} = y_W / (p_W \cdot \lambda) = t_W / p_W;$

$$\boxed{t_{WW} = t_W / p_W \,;}$$

Anschauliche Erklärung:
Eine „direkte“ Berechnung dieser Wartedauern kann folgendermaßen erfolgen: Das Bedienungssystem wird während der langen Beobachtungsdauer t_{beo} beobachtet. Die Gesamt-Anzahl der in das Bedienungssystem einfallenden Forderungen während t_{beo} sei n_f, die Wartedauer der k-ten Forderung (mit k = 1, 2, … n_f) sei $t_{W,k}$. Dann ergeben sich die mittleren Wartedauern t_W und t_{WW} wie folgt:

$$t_w = \frac{\text{Summe aller Wartedauern}}{\text{Anzahl aller Forderungen}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_f} t_{w,k}}{n_f};$$

$$t_{ww} = \frac{\text{Summe aller Wartedauern}}{\text{Anzahl aller } \textbf{wartenden} \text{ Forderungen}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_f} t_{w,k}}{p_w \cdot n_f} = \frac{t_w}{p_w};$$

7.6 Mittlere Durchlaufdauern t_{BS}, t_{BSw}

Als mittlere Durchlaufdauer (wird auch als Systemzeit bezeichnet) bezeichnet man die mittlere Verweildauer einer Forderung im Bedienungssystem. Die mittlere Verweildauer ist die Summe aus mittlerer Wartedauer und mittlerer Bediendauer.

Die mittlere Durchlaufdauer unter Berücksichtigung aller (bzw. nur der wartenden) Forderungen wird mit t_{BS} (bzw. mit t_{BSw}) bezeichnet:

$t_{BS} = t_W + t_m$;

$t_{BSw} = t_{ww} + t_m$;

7.7 Bedingte mittlere Warteschlangenlänge y_{ww}

Die Wartebelastung y_W ist definiert als mittlere Warteschlangen-Länge. Diese mittlere Warteschlangen-Länge ist (mit i als momentane Anzahl belegter Warteplätze) durch folgenden Erwartungswert definiert:

$$y_w = EW[i] = \sum_{(i)} i \cdot p(i)\,;$$

Die mittlere Warteschlangen-Länge unter der Bedingung, dass eine „Wartesituation W" vorliegt, wird nachfolgend mit y_{WW} bezeichnet und ist durch folgenden bedingten Erwartungswert definiert:

$$y_{ww} = EW[i\,|\,W] = \sum_{(i)} i \cdot p(i\,|\,W)\,;$$

Die formale Berechnung ergibt:

$p(i \mid W) = p(i \wedge W) / p(W) = p(W \mid i) \cdot p(i) / p(W) = 1 \cdot p(i) / p_W$; (für alle $i \geq 1$);
$p(W) = p_W$ = Wartewahrscheinlichkeit;

$$y_{ww} = EW[i\,|\,W] = \frac{1}{p_w} \cdot \sum_{(i)} i \cdot p(i) = y_w / p_w\,;$$

y_{WW} ist die mittlere Warteschlangenlänge unter der Bedingung „Wartesituation", also die mittlere Warteschlangenlänge aus der Sicht einer wartenden Forderung. Diese „bedingte" Warteschlangenlänge y_{WW} ist um den Faktor $(1/p_W)$ größer als die mittlere Warteschlangenlänge y_W.

$$y_{WW} = y_W / p_W = (\lambda \cdot t_W) / p_W = \lambda \cdot (t_W / p_W) = \lambda \cdot t_{WW} ;$$

$$\boxed{y_{WW} = y_W / p_W = \lambda \cdot t_{WW} ;}$$

Anschauliche Erklärung:
Dieses Ergebnis kann durch eine Betrachtung im Zeitbereich veranschaulicht werden: Bei einer Gesamt-Beobachtungsdauer t_{beo} liegt nur während der Teil-Zeitdauer $p_W \cdot t_{beo}$ eine Wartesituation vor. Wird die Anzahl belegter Warteplätze nur über diese Teil-Zeitdauer $p_W \cdot t_{beo}$ gemittelt, ist das Ergebnis um den Faktor $(1/p_W)$ größer als bei Mittelung über die Gesamt-Zeitdauer t_{beo}, da während der Rest-Zeitdauer (da sind keine Warteplätze belegt) kein Beitrag zum Mittelwert vorliegt.

Alle bedingten Erwartungswerte (Erwartungswert aus der Sicht einer wartenden Forderung, also unter der Bedingung „Wartesituation liegt vor") sind um den Faktor $1/p_W$ größer als die nicht bedingten Erwartungswerte, siehe auch die Berechnung von t_{WW}.

8 Wartesystem M / G / 1 / ∞ (KP-Formel)

Bild 8.1 veranschaulicht die Randbedingungen beim Wartesystem M / G / 1 / ∞.

Ankunftsprozess = M:
Einfallabstände exponentiell verteilt. Ankunftsrate ist λ.

Bedienprozess = G:
Die Bediendauer ist beliebig verteilt.
Die mittlere Bediendauer ist t_m, der Variationskoeffizient der Bediendauer sei c_b.

$c_b = \sigma_b / \mu_b = \sigma_b / t_m$ = Streuung der Bediendauer / Mittelwert der Bediendauer;

Abnehmeranzahl N = 1:
Es ist genau 1 Abnehmer vorhanden.

Warteplatzanzahl S = ∞:
Es gibt unendlich viele Warteplätze.

Bedienstrategie = FCFS.
Die nachfolgende Formel für die mittlere Wartedauer gilt jedoch auch für andere Bedienstrategien, falls die Reihenfolge unabhängig von der Bediendauer ist.

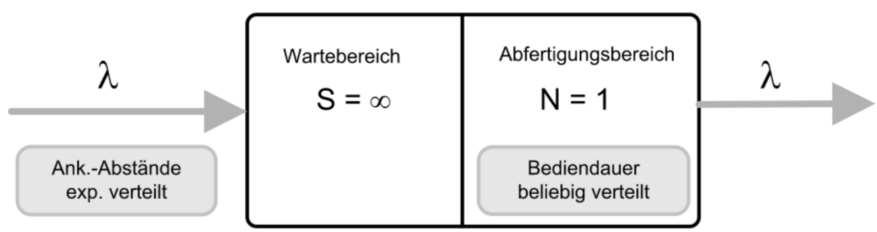


Bild 8.1:
Randbedingungen zum Verkehrsmodell M / G / 1 / ∞.

Angebot, Abnehmer-Belastung, Auslastung

Bei einem Wartesystem mit genau einem Abnehmer (N = 1) muss das Angebot $A = \lambda \cdot t_m < 1$ sein (mit λ = Forderungs-Einfallrate, t_m = mittlere Bediendauer), damit sich ein stationärer Zustand einstellen kann. Da keine Verluste auftreten, muss die Abnehmer-Belastung y = A sein. Die Auslastung (utilization) des Abnehmers ist definiert zu $\rho = y / N = y / 1 = y$. Somit gilt für ein Wartesystem mit genau einem Abnehmer immer:

$$A = y = \rho = \lambda \cdot t_m < 1.$$

Wartewahrscheinlichkeit p_W

Die Wartewahrscheinlichkeit (siehe Beispiel 7.1) ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine einfallende Forderung einen belegten Abnehmer sieht. Wenn der einzige vorhandene Abnehmer die Auslastung ρ (mit $\rho < 1$) aufweist, sieht eine einfallende Forderung diesen Abnehmer mit der Wahrscheinlichkeit ρ belegt. Damit ist die Wartewahrscheinlichkeit:

$$p_W = \rho = \lambda \cdot t_m ;$$

KP-Formel für die mittlere Wartedauer

Die mittlere Wartedauer kann mit der sogenannten Kintchine-Pollaczek-Formel (nachfolgend KP-Formel genannt, wird hier ohne Ableitung angegeben) berechnet werden:

$$\frac{t_W}{t_m} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left(\frac{1 + c_b^2}{2} \right);$$

Die KP-Formel gilt für **beliebige** Bediendauer-Verteilungen. Neben der Belastung ρ des einzigen Abnehmers geht nur der Variationskoeffizient c_b der Bediendauer in die Berechnung der normierten, mittleren Wartedauer ein.

Variationskoeffizient c_b der Bediendauer

$$c_b := \frac{\text{Streuung der Bediendauer}}{\text{Mittelwert der Bediendauer}} = \text{Variationskoeffizient der Bediendauer;}$$

Der Variationskoeffizient c_b kennzeichnet die (auf den Mittelwert) normierte Schwankungsbreite der Bediendauer.

Einfluss der Bediendauer-Verteilung auf die mittlere Wartedauer
Bei konstanter Bediendauer (Bedienprozess D)
ist $\sigma_b = 0$ und somit ist $c_b = 0$:

$$\frac{t_w}{t_m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho};$$

Bei exponentiell verteilter Bediendauer (Bedienprozess M)
ist $\sigma_b = \mu_b = t_m$ und somit ist $c_b = 1$:

$$\frac{t_w}{t_m} = \frac{\rho}{1-\rho};$$

Ergebnis:

t_w(bei exponentiell verteilter Bediendauer) / t_w(bei konst. Bediendauer) = 2;

Berechnung von y_w, y_{ww}, t_{ww}
Nun können aus den bereits berechneten Größen p_w, t_w die mittlere Warteschlangenlänge y_w, die bedingte mittlere Warteschlangenlänge y_{ww} (aus der Sicht einer wartenden Forderung) und die mittlere Wartedauer einer wartenden Forderung t_{ww} berechnet werden:

$$y_w = \lambda \cdot t_w; \qquad t_{ww} = \frac{t_w}{p_w}; \qquad y_{ww} = \frac{y_w}{p_w};$$

Berechnung der mittleren Durchlaufdauern

Aus den mittleren Wartezeiten t_w, t_{ww} ergeben sich durch Addition der mittleren Bediendauer t_m die mittleren Durchlaufdauern t_{BS}, t_{BSw} :

$t_{BS} = t_w + t_m$;	Mittlere Durchlaufdauer unter Berücksichtigung aller Forderungen;
$t_{BSw} = t_{ww} + t_m$;	Mittlere Durchlaufdauer der wartenden Forderungen;

Beispiel 8.1

Gegeben:

An einem Vermittlungs-Steuerrechner treffen durchschnittlich 2000 Forderungen pro Minute ein, die Ankunftsabstände sind exponentiell verteilt. Die Rechenzeit zur Bearbeitung einer Forderung ist exponentiell verteilt mit dem Mittelwert 9 ms. Ein ausreichend großer Wartespeicher ermöglicht die Zwischenspeicherung aller wartender Forderungen. Die Bedien-Strategie ist FCFS.

Der „reale Wartespeicher“ ist wie folgt zu dimensionieren:
$S_{real} = \mathrm{ceil}(30 \cdot y_{ww})$;

Gesucht:

1) Belastung des Steuerrechners;
2) Wartewahrscheinlichkeit für eine einfallende Forderung;
3) Prozentsatz sofort abgefertigter Forderungen;
4) Mittlere Wartedauer einer Forderung;
5) Mittlere Wartedauer einer wartenden Forderung;
6) Mittlere Durchlaufdauer einer Forderung;
7) Mittlere Durchlaufdauer einer wartenden Forderung;
8) Mittlere Warteschlangen-Länge;
9) Erforderliche Warteplatz-Anzahl;

Ergebnis:

Die Beschreibung des Bedienungssystems ergibt das Wartesystem M / M / 1 / ∞. Mit $\lambda = 2000$ / min; $t_m = 9$ ms; $S_{real} = ceil(30 \cdot y_{ww})$; folgt:

1) $\rho = \lambda \cdot t_m = (2000 / min) \cdot (9\ ms) = 0.30$;

2) $p_w = \rho = 0.30$;

3) p(nicht warten) = 1-p(warten) = $1-\rho = 0.70 = 70\%$;

4) Khintchine-Pollaczek-Formel (KP-Formel):
$t_w / t_m = \rho / (1-\rho)$; → $t_w = 9\ ms \cdot (0.3 / 0.7) = 3.86\ ms$;

5) $t_{ww} = t_w / p_w = 3.86\ ms / 0.3 = 12.86\ ms$;

6) $t_{BS} = t_w + t_m = (3.86 + 9)\ ms = 12.86\ ms$;

7) $t_{BSw} = t_{ww} + t_m = (12.86 + 9)\ ms = 21.86\ ms$;

8) Little-Theorem:
$y_w = \lambda \cdot t_w = (2000 / min) \cdot 3.86\ ms = 0.129$;

9) $y_{ww} = y_w / p_w = 0.129 / 0.30 = 0.43$;
$S_{real} = ceil(\ 30 \cdot y_{ww}\ ) = ceil(12.9) = 13$;

9 Verlustsystem M / M / N (Erlang-Formel)

Bild 9.1 veranschaulicht die Randbedingungen beim Verlustsystem M / M / N, dem sogenannten „Erlang-Verlustsystem“.

Ankunftsprozess = M:
Einfallabstände exponentiell verteilt. Ankunftsrate ist λ.

Bedienprozess = M:
Bediendauer exponentiell verteilt mit Mittelwert t_m.

Abnehmeranzahl $N \geq 1$:
Es liegen genau N Abnehmer vor.

Warteplatzanzahl $S = 0$:
Es gibt keine Warteplätze.

Bei N belegten Abnehmern gehen einfallende Forderungen zu Verlust. Man unterstellt, dass sie ohne Rückwirkung aus dem System verschwinden (lost calls cleared). Die resultierende Verlustwahrscheinlichkeit wegen Abnehmermangel wird mit B bezeichnet.

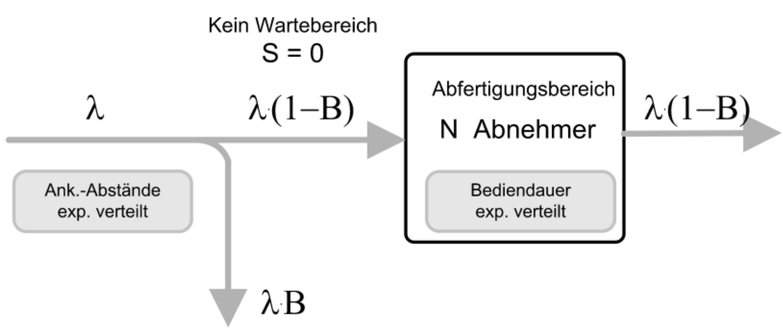


Bild 9.1:
Erlang-Verlustsystem M / M / N.

Angebot

Das Angebot ist definiert zu

$$A = \lambda \cdot t_m ;$$

Belastung

Durch Anwendung des Little-Theorems auf den Abfertigungsbereich (Bild 9.1) folgt für die mittlere Anzahl der belegten Abnehmer

$$y = \lambda \cdot (1-B) \cdot t_m = A \cdot (1-B);$$

Zustandswahrscheinlichkeiten

Eine mathematische Analyse des Bedienungssystems ergibt die Wahrscheinlichkeitsfunktion p(j), dass genau j Abnehmer belegt sind:

$$p_j = p(j) = \frac{\frac{A^j}{j!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}}; \qquad j = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ N;$$

Verlustwahrscheinlichkeit B, Erlang-B-Formel

Eine einfallende Forderung geht genau dann zu Verlust, wenn zum Einfallzeitpunkt genau N Abnehmer belegt sind. Die Verlustwahrscheinlichkeit B ist deshalb gleich der Wahrscheinlichkeit $p(j = N) = p_N$ für genau N belegte Abnehmer (weil die Rufeinfallrate konstant ist, siehe hierzu die Ausführungen in Kap. 7.4).

$$B = p(j = N) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}} := E_1(A, N);$$

Diese Formel wird als **Erlang-Formel 1. Art**, **Erlang-Verlustformel** oder **Erlang-B-Formel** bezeichnet.

Numerische Berechnung der Erlang-Formel

Die Erlang-Formel kann nicht nach A aufgelöst werden. Deshalb kann das bei N Abnehmern zu einer vorgegebenen Verlustwahrscheinlichkeit $B = E_1(A, N)$ zugehörige zulässige Angebot A nur durch Iteration von A berechnet werden. Die Ergebnisse der iterativen Berechnung wurden in Diagrammen und Tabellen zusammengestellt.

B = f(A); Parameter N;

Bild 10.1 zeigt die Verlustwahrscheinlichkeit B in Abhängigkeit vom Angebot A (in Erlang) mit der Abnehmeranzahl N als Parameter. Im Bild hat der Parameter N die Werte 1, 2, 5, 10 (von oben nach unten). Beispielsweise ist dem Diagramm zu entnehmen, dass bei N = 10 das zulässige Angebot bei einer Verlustwahrscheinlichkeit B = 0.01 = 1% etwa 4.5 Erl (der genaue Wert ist 4.46 Erl) ist.

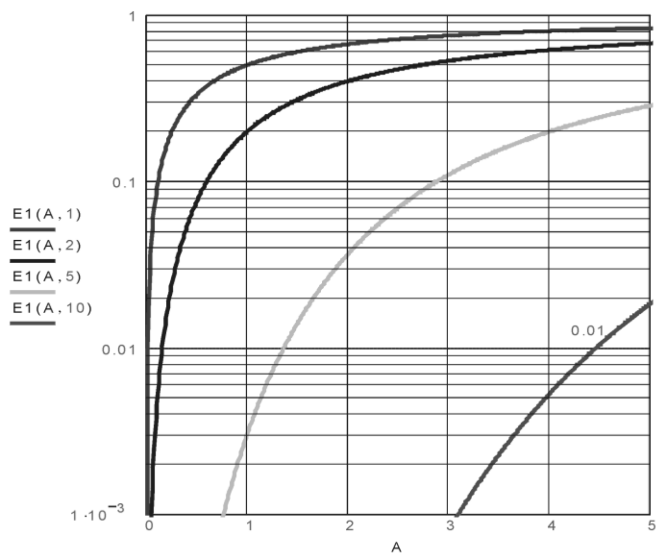


Bild 10.1:

Verlustwahrscheinlichkeit B nach der Erlang-B-Formel ($M = \infty$, $k = N$).

Parameter: Abnehmeranzahl N = 1, 2, 5, 10 (von oben nach unten);

Aufgabe 9.1
Durchschaltevermittlung mit Raummultiplex-Koppelanordnung.

Es ist eine Durchschaltevermittlung für 100 Teilnehmer mit reinem Internverkehr zu dimensionieren. Die Koppelanordnung (realisiert als gefaltete Gruppierung) besteht aus den Koppelvielfachen 100 | N und N | 100.

Das kommende Angebot pro Teilnehmer (wirksames Angebot, an freie Teilnehmer gerichtet) ist 0.05 Erl. Die mittlere Belegungsdauer ist 100 s. Die Anzahl N der Intern-Wege ist näherungsweise nach der Erlang-Formel für 1% Verlustwahrscheinlichkeit zu dimensionieren.

Gesucht:

1) Strukturbild der Koppelanordnung (mit Teilnehmer-Anschaltung) mit allen Zahlenwerten;
2) Prozentuale Koppelpunkt-Ersparnis gegenüber einstufiger Lösung;
3) Mittlere Anzahl der belegten Anschlussleitungen;
4) Durchschnittliche Verbindungs-Anzahl bei 30 min Beobachtungsdauer;

Ergebnis:

1) Strukturbild siehe [NOCK05, Bild 5.13].
   $A_k = 5$ Erl, $B = 1\%$, Erlang-Formel $\rightarrow$ $N = 11$; $y_k = 4.95$ Erl;
2) Ersparnis = (10000 - 2200) / 10000 = 78%;
3) $EW[\, M_{Al,bel} \,] = 2 \cdot y_k = 9.9$;
4) $n_y = c_y \cdot t_{beo} = y \cdot (t_{beo}/t_m) = 4.95 \cdot (30 \text{ min} / 100\text{s}) = 89.1$;

10 Verkehrstabellen für Verlustsysteme

Die nachfolgenden Verkehrstabellen ermöglichen die Dimensionierung von Verlustsystemen mit begrenzt oder voll erreichbaren Abnehmerbündeln. Die Zahlenwerte für diese Tabellen wurden dem „Tabellenbuch Fernsprechverkehrstheorie" [SIEM70] entnommen.

Das zulässige Angebot nach der Erlang-Verlustformel ist angegeben für

Abnehmeranzahlen:	$N = 1, 2, \ldots 100$;
Verlustwahrscheinlichkeit:	$B = 0.2\%, 0.5\%, 1\%, 2\%, 5\%$;

Hinweis:
Die Erlang-Formel gilt nur bei voller Erreichbarkeit $k = N$ der Abnehmer. Für begrenzte Erreichbarkeit $k < N$ der Abnehmer wurde aus einer theoretischen Lösung für ideale Mischungen (Palm-Jacobaeus-Formel, PJ-Formel) die angepasste, modifizierte Palm-Jacobaeus-Formel (aMPJ-Formel) für reale Mischungen abgeleitet. Deren Ergebnisse sind in Tabellenbüchern für ausgewählte Zahlenwerte der Erreichbarkeit k angegeben. Begrenzte Erreichbarkeit und „Existenz innerer Blockierungen" sind äquivalente Aussagen.

Das zulässige Angebot nach der aMPJ-Formel für Verlustsysteme ist angegeben für

Abnehmeranzahlen:	$N = 1, 2, \ldots 100$;
Erreichbarkeiten:	$k = 10,\ 20$;
Verlustwahrscheinlichkeit:	$B = 1\%$.

N	aMPJ-Formel		Erlang-Formel					N
	B = 1%	B = 1%	B = 1%	B = 2%	B = 5%	B = 0,2%	B = 0,5%	
	k = 10	k = 20	k = N	k = N	k = N	k = N	k = N	
1			0,0101	0,0204	0,0526	0,0020	0,0050	1
2			0,153	0,223	0,381	0,0653	0,105	2
3			0,455	0,602	0,899	0,249	0,349	3
4			0,869	1,09	1,52	0,535	0,701	4
5			1,36	1,66	2,22	0,900	1,13	5
6			1,91	2,28	2,96	1,33	1,62	6
7			2,50	2,94	3,74	1,80	2,16	7
8			3,13	3,63	4,54	2,31	2,73	8
9			3,78	4,34	5,37	2,85	3,33	9
10			4,46	5,08	6,22	3,43	3,96	10
11	5,01		5,16	5,84	7,08	4,02	4,61	11
12	5,57		5,88	6,61	7,95	4,64	5,28	12
13	6,14		6,61	7,40	8,83	5,27	5,96	13
14	6,71		7,35	8,20	9,73	5,92	6,66	14
15	7,29		8,11	9,01	10,6	6,58	7,38	15
16	7,87		8,88	9,83	11,5	7,26	8,10	16
17	8,46		9,65	10,7	12,5	7,95	8,83	17
18	9,05		10,4	11,5	13,4	8,64	9,58	18
19	9,64		11,2	12,3	14,3	9,35	10,3	19
20	10,2		12,0	13,2	15,2	10,1	11,1	20
21	10,8	12,7	12,8	14,0	16,2	10,8	11,9	21
22	11,4	13,4	13,7	14,9	17,1	11,5	12,6	22
23	12,0	14,1	14,5	15,8	18,1	12,3	13,4	23
24	12,6	14,9	15,3	16,6	19,0	13,0	14,2	24
25	13,2	15,6	16,1	17,5	20,0	13,8	15,0	25
26	13,9	16,3	17,0	18,4	20,9	14,5	15,8	26
27	14,5	17,0	17,8	19,3	21,9	15,3	16,6	27
28	15,1	17,7	18,6	20,2	22,9	16,1	17,4	28
29	15,7	18,5	19,5	21,0	23,8	16,8	18,2	29
30	16,3	19,2	20,3	21,9	24,8	17,6	19,0	30
31	16,9	19,9	21,2	22,8	25,8	18,4	19,9	31
32	17,5	20,6	22,0	23,7	26,7	19,2	20,7	32
33	18,1	21,4	22,9	24,6	27,7	20,0	21,5	33
34	18,8	22,1	23,8	25,5	28,7	20,8	22,3	34
35	19,4	22,8	24,6	26,4	29,7	21,6	23,2	35
36	20,0	23,6	25,5	27,3	30,7	22,4	24,0	36
37	20,6	24,3	26,4	28,3	31,6	23,2	24,8	37
38	21,2	25,1	27,3	29,2	32,6	24,0	25,7	38
39	21,8	25,8	28,1	30,1	33,6	24,8	26,5	39
40	22,4	26,6	29,0	31,0	34,6	25,6	27,4	40
41	23,1	27,3	29,9	31,9	35,6	26,4	28,2	41
42	23,7	28,1	30,8	32,8	36,6	27,2	29,1	42
43	24,3	28,8	31,7	33,8	37,6	28,1	29,9	43
44	24,9	29,6	32,5	34,7	38,6	28,9	30,8	44
45	25,5	30,3	33,4	35,6	39,6	29,7	31,7	45
46	26,1	31,1	34,3	36,5	40,5	30,5	32,5	46
47	26,8	31,8	35,2	37,5	41,5	31,4	33,4	47
48	27,4	32,6	36,1	38,4	42,5	32,2	34,2	48
49	28,0	33,3	37,0	39,3	43,5	33,0	35,1	49
50	28,6	34,1	37,9	40,3	44,5	33,9	36,0	50

N	aMPJ-Formel		Erlang-Formel					N
	B = 1%	B = 1%	B = 1%	B = 2%	B = 5%	B = 0,2%	B = 0,5%	
	k = 10	k = 20	k = N	k = N	k = N	k = N	k = N	
51	29,2	34,8	38,8	41,2	45,5	34,7	36,9	51
52	29,8	35,6	39,7	42,1	46,5	35,6	37,7	52
53	30,5	36,3	40,6	43,1	47,5	36,4	38,6	53
54	31,1	37,1	41,5	44,0	48,5	37,2	39,5	54
55	31,7	37,9	42,4	44,9	49,5	38,1	40,4	55
56	32,3	38,6	43,3	45,9	50,5	38,9	41,2	56
57	32,9	39,4	44,2	46,8	51,5	39,8	42,1	57
58	33,5	40,1	45,1	47,8	52,6	40,6	43,0	58
59	34,1	40,9	46,0	48,7	53,6	41,5	43,9	59
60	34,8	41,7	46,9	49,6	54,6	42,4	44,8	60
61	35,4	42,4	47,9	50,6	55,6	43,2	45,6	61
62	36,0	43,2	48,8	51,5	56,6	44,1	46,5	62
63	36,6	44,0	49,7	52,5	57,6	44,9	47,4	63
64	37,2	44,7	50,6	53,4	58,6	45,8	48,3	64
65	37,8	45,5	51,5	54,4	59,6	46,6	49,2	65
66	38,4	46,3	52,4	55,3	60,6	47,5	50,1	66
67	39,0	47,0	53,4	56,3	61,6	48,4	51,0	67
68	39,6	47,8	54,3	57,2	62,6	49,2	51,9	68
69	40,3	48,6	55,2	58,2	63,7	50,1	52,8	69
70	40,9	49,3	56,1	59,1	64,7	51,0	53,7	70
71	41,5	50,1	57,0	60,1	65,7	51,8	54,6	71
72	42,1	50,9	58,0	61,0	66,7	52,7	55,5	72
73	42,7	51,6	58,9	62,0	67,7	53,6	56,4	73
74	43,3	52,4	59,8	62,9	68,7	54,5	57,3	74
75	43,9	53,2	60,7	63,9	69,7	55,3	58,2	75
76	44,5	54,0	61,7	64,9	70,8	56,2	59,1	76
77	45,1	54,7	62,6	65,8	71,8	57,1	60,0	77
78	45,7	55,5	63,5	66,8	72,8	58,0	60,9	78
79	46,3	56,3	64,4	67,7	73,8	58,8	61,8	79
80	46,9	57,0	65,4	68,7	74,8	59,7	62,7	80
81	47,5	57,8	66,3	69,6	75,8	60,6	63,6	81
82	48,1	58,6	67,2	70,6	76,9	61,5	64,5	82
83	48,7	59,4	68,2	71,6	77,9	62,4	65,4	83
84	49,3	60,1	69,1	72,5	78,9	63,2	66,3	84
85	49,9	60,9	70,0	73,5	79,9	64,1	67,2	85
86	50,5	61,7	70,9	74,5	80,9	65,0	68,1	86
87	51,1	62,4	71,9	75,4	82,0	65,9	69,0	87
88	51,7	63,2	72,8	76,4	83,0	66,8	69,9	88
89	52,3	64,0	73,7	77,3	84,0	67,7	70,8	89
90	52,9	64,8	74,7	78,3	85,0	68,6	71,8	90
91	53,5	65,5	75,6	79,3	86,0	69,4	72,7	91
92	54,1	66,3	76,6	80,2	87,1	70,3	73,6	92
93	54,7	67,1	77,5	81,2	88,1	71,2	74,5	93
94	55,3	67,9	78,4	82,2	89,1	72,1	75,4	94
95	55,9	68,6	79,4	83,1	90,1	73,0	76,3	95
96	56,5	69,4	80,3	84,1	91,1	73,9	77,2	96
97	57,1	70,2	81,2	85,1	92,2	74,8	78,2	97
98	57,7	71,0	82,2	86,0	93,2	75,7	79,1	98
99	58,3	71,7	83,1	87,0	94,2	76,6	80,0	99
100	58,9	72,5	84,1	88,0	95,2	77,5	80,9	100

Literaturverzeichnis

NOCK05
Nocker, Rudolf
Digitale Kommunikationssysteme 2
Grundlagen der Vermittlungstechnik
Vieweg Verlag 2005

Die Literaturangaben in dieser Arbeit beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in [NOCK05]. Ergänzendes und weiterführendes Schrifttum ist dort angegeben.