Математика и математическое моделирование. 2020. № 3. С. 1–14.
DOI: 10.24108/mathm.0320.000220

Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

УДК 004.6+57.087.1

Алгебраические критерии интегральной разделенности решений некоторых классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Ахрем А. А.[1], Носов А. П.[1,*]

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
[*]nosov@isa.ru

В статье исследуются линейные дифференциальные системы, удовлетворяющие условию интегральной разделенности решений. Приведены основные свойства таких систем. Для стационарных, приводимых и периодических систем доказаны алгебраические критерии их принадлежности множеству систем со свойством интегральной разделенности.

Ключевые слова: алгебраические критерии, обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные системы, типичные свойства, интегральная разделенность, приводимые системы

Представлена в редакцию: 15.06.2020, исправлена: 20.08.2020.

Введение

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$; $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — непрерывное ограниченное отображение; $\mathbb{R}^+ \triangleq [0, +\infty)$ — неотрицательная полуось числовой оси; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное нормированное пространство со стандартной евклидовой нормой $|\cdot|$; $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — нормированное пространство линейных преобразований (гомоморфизмов) линейного пространства $\mathbb{R}^n$ в себя с операторной нормой

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

В дальнейшем будем отождествлять систему вида (1) с ее оператор-функцией (или матрицей-функцией) $A(t)$ в некотором ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^n$. Превратим множество систем типа (1) в метрическое пространство LS, введя расстояние

$$d(A_1(t), A_2(t)) \triangleq \sup_{t \geq 0} \|A_1(t) - A_2(t)\|.$$

Определение 1. Система (1), принадлежащая пространству LS, называется системой с *интегральной разделенностью*, если она имеет n таких решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, что

$$\frac{|x_i(t)|}{|x_i(\tau)|} : \frac{|x_{i+1}(t)|}{|x_{i+1}(\tau)|} \geq ae^{c(t-\tau)} \tag{2}$$

для некоторых положительных констант $a > 0$, $c > 0$ и всех чисел $t \geq \tau \geq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Любая пара $x_1(t)$, $x_2(t)$ решений системы (1), удовлетворяющих условию (2), называется *интегрально разделенной*. Множество систем с интегральной разделенностью будем обозначать через T ($T \subset LS$).

Впервые системы с интегральной разделенностью рассматривались в работе О. Перрона [1]. В работах Былова Б.Ф. [2] и J.C. Lillo [3] определение интегральной разделенности получило форму, приведенную выше. Отметим, что с точки зрения асимптотического поведения решений, системы с интегральной разделенностью занимают особое место, так как обладают рядом важных (исключительных) свойств, грубых по отношению к малым возмущениям системы. Так, например, в работах Б.Ф. Былова, Н.А. Изобова [4, 5], В.М. Миллионщикова [6], И.Н. Сергеева [7, 8], K.J. Palmer [9] установлено, что наличие свойства интегральной разделенности является главной причиной устойчивости характеристических показателей Ляпунова и различных асимптотических свойств линейных дифференциальных систем.

В той или иной форме интегральная разделенность проявляется во всех исследованиях, связанных с изучением асимптотического характера решений системы при действии возмущений. Содержательность этого понятия особенно усиливается фактом всюду плотности линейных систем с интегральной разделенностью в метрическом пространстве LS, установленным В.М. Миллионщиковым [10]:

$$\overline{T} = LS, \tag{3}$$

где $\overline{T}$ — замыкание множества T в метрическом пространстве LS.

Таким образом, условие (3) показывает, что линейные системы со свойством интегральной разделенности являются типичными представителями линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве LS.

В настоящей работе будет приведен ряд основных понятий и фундаментальных свойств множеств LS и T. На основе данных свойств будут доказаны алгебраические критерии интегральной разделенности систем из подмножеств пространства LS с постоянными, приводимыми и периодическими коэффициентами.

1. Основные понятия и свойства множеств LS и T

I. В начале данного раздела приведем ряд необходимых для дальнейшего изложения свойств метрического пространства LS.

Определение 2 ([11, 12]). Характеристическим показателем Ляпунова решения $x(t) \neq 0$ системы (1) называется число

$$\lambda = \lambda(x) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t}. \tag{4}$$

Характеристический показатель λ оценивает экспоненциальный рост (убывание) решения $x(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что, как установлено А.М. Ляпуновым [13], [14], линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка не может иметь более n ненулевых решений с попарно различными характеристическими показателями.

Определение 3 ([11, 12]). Характеристические показатели Ляпунова $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ дифференциальной системы (1) называются устойчивыми, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\|R(t)\| < \delta$ вытекает

$$|\lambda_i - \mu_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где λ_i, μ_i — показатели Ляпунова соответственно систем (1) и

$$\dot{y} = (A(t) + R(t)y \quad (y \in \mathbb{R}^n, \;\; t \geq 0),$$

занумерованные в порядке убывания. В противном случае будем говорить, что ляпуновские показатели системы (1) неустойчивы.

Определение 4 ([11, 12]). Линейное преобразование

$$\mathcal{L} = L(t), \quad L(t) \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

называется ляпуновским (преобразованием Ляпунова), если существуют непрерывные при $t \geq 0$ оператор-функции $L^{-1}(t)$, $\dot{L}(t) = dL(t)/dt$, и при всех $t \geq 0$ ограничены нормы операторов $\|L(t)\|$, $\|L^{-1}(t)\|$, $\|\dot{L}(t)\|$:

$$\max_{t\geq 0} \left(\|L(t)\|, \; \|L^{-1}(t)\|, \; \|\dot{L}(t)\|\right) \leq l,$$

где $l = \mathrm{const} > 0$.

Ляпуновское преобразование обладает следующими свойствами [11, 12]:

1) обратное к преобразованию Ляпунова $L(t)$ преобразование $L^{-1}(t)$ также является ляпуновским;

2) при преобразовании Ляпунова, произведенным над линейной дифференциальной системой, характеристические показатели ее решений сохраняются;

3) преобразование Ляпунова не меняет свойств устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости (иными словами, если система устойчива, асимптотически устойчива, неустойчива, то при любом ляпуновском морфизме $L(t)$ таким же свойством обладает и преобразованная с помощью $L(t)$ система);

4) преобразование Ляпунова сохраняет свойство интегральной разделенности решений.

II. Приведем ряд фундаментальных свойств множества T линейных дифференциальных систем с интегральной разделенностью.

Определение 5. Пусть система

$$\dot{u} = C(t)u \quad (u \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0) \tag{6}$$

пространства LS обладает некоторым свойством $\mathcal{P}$. Это свойство называется *грубым*, если существует окрестность системы (6) в LS, все элементы которой обладают свойством $\mathcal{P}$.

Напомним также, что открытым ядром непустого множества S элементов метрического пространства называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в S.

Теорема 1 ([4, 5, 6]). Множество T совпадает с открытым ядром множества элементов пространства LS с устойчивым спектром $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристических показателей Ляпунова.

Следствие 1. Линейные системы вида (1) со свойством интегральной разделенности обладают грубо устойчивыми ляпуновскими показателями.

Теорема 2 ([4, 5, 6]). Множество T совпадает с открытым ядром множества линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приводящихся ляпуновскими преобразованиями к диагональному виду.

Следствие 2. Элементы множества T являются грубо диагонализируемыми.

Таким образом, элементы множества T обладают грубо устойчивыми показателями Ляпунова и являются грубо диагонализируемыми с помощью преобразований Ляпунова.

Еще одно полезное свойство линейных дифференциальных систем из множества T, связывающее понятие интегральной разделенности с показателями Ляпунова, вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1 (о неразделенности решений). *Если решения $x(t)$ и $x'(t)$ системы (1) таковы, что*

$$\lambda(x) = \lambda(x'),$$

то они не являются интегрально разделенными.

Доказательство. Допустим противное: пусть решения $x(t)$ и $x'(t)$ интегрально разделены, т.е. существуют такие константы $a' > 0$ и $c' > 0$, что при всех $t \geq 0$

$$\frac{|x(t)|}{|x(\tau)|} : \frac{|x'(t)|}{|x'(\tau)|} \geq a' e^{c'(t-\tau)}.$$

Полагая $\tau = 0$, из предыдущего неравенства будем иметь

$$|x(t)| \geq a' \cdot |x'(t)| \, |x(0)| \, |x'(0)|^{-1} \, e^{c'(t)}.$$

Полагаем $b' = a' \cdot |x(0)| \, |x'(0)|^{-1}$. Учитывая данное соотношение получаем, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln |x(t)|}{t} \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln(b'|x'(t)|e^{c't})}{t} = c' + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln |x'(t)|}{t},$$

следовательно

$$\lambda(x) \geq c' + \lambda(x') > \lambda(x'),$$

что противоречит условию теоремы. Утверждение 1 доказано.

Следствие 3. Все характеристические показатели Ляпунова элементов из множества T различны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) не может иметь более n ненулевых решений с попарно различными характеристическими показателями (замечание 1). Как следует из определения интегральной разделенности (определение 1), линейная система типа (1) из множества T уже имеет n решений, показатели которых, в силу утверждения о неразделенности решений, различны, и решений с другими значениями характеристических показателей у такой системы быть не может.

З а м е ч а н и е 2. Из результата [11] о том, что решения линейной системы вида (1) с различными характеристическими показателями линейно независимы, следует, что всякий элемент множества T имеет нормальный базис из интегрально разделенных решений.

В следующих разделах на основе свойств множества T, указанных в теоремах 1, 2 и следствиях к ним, будут получены и доказаны алгебраические критерии интегральной разделенности дифференциальных систем из множества T с постоянными, приводимыми и периодическими коэффициентами их правых частей.

2. Алгебраический критерий интегральной разделенности линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами

В настоящем разделе доказан алгебраический критерий интегральной разделенности для стационарных систем из пространства LS:

$$\dot{u} = Au \quad (u \in \mathbb{R}^n, \;\; A \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \;\; t \geq 0). \tag{7}$$

Для таких систем справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Стационарная система (7) является интегрально разделенной тогда и только тогда, когда оператор A правой части стационарной системы имеет n различных вещественных собственных значений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость* условия теоремы 3 непосредственно вытекает из соотношений (2), определяющих наличие у системы свойства интегральной разделенности решения, так как по следствию 3 об интегральной неразделенности решений с одинаковыми показателями, указанные соотношения выполняются лишь в случае, когда система (7) имеет только различные характеристические показатели Ляпунова. Но в случае стационарности системы (7) этими показателями являются вещественные части собственных значений оператора правой части рассматриваемой системы, причем для их различия необходимо, чтобы все они были вещественными.

Для доказательства *достаточности* условия теоремы 3 отметим, что в случае наличия у оператора A различных вещественных собственных значений $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ у стационарной системы вида (7) имеется фундаментальная система решений $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, такая, что

$$u_i(t) = h_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad t \geq 0, \tag{8}$$

где h_i — вещественный собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ_i.

Положим

$$c = \min_{i \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}} (\lambda_i - \lambda_{i+1}). \tag{9}$$

Принимая во внимание (8), (9), находим

$$\frac{|u_i(t)|}{|u_i(\tau)|} : \frac{|u_{i+1}(t))|}{|u_{i+1}(\tau)|} = e^{(\lambda_i - \lambda_{i+1})(t-\tau)} \geq e^{c(t-\tau)} \tag{10}$$

при любом $i \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ и всех $t \geq 0$, т.е. система (7) принадлежит множеству T, что и требовалось доказать. Теорема 3 полностью доказана.

3. Алгебраический критерий интегральной разделенности для линейных приводимых дифференциальных систем из метрического пространства *LS*

Напомним, что линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A_r(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0), \tag{11}$$

где $A_r(t)$: $[0,\ +\infty) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — непрерывное, ограниченное при $t \geq 0$ отображение, называется приводимой, если существует ляпуновское преобразование

$$w = L_r(t)z$$

переводящее ее в систему

$$\dot{w} = M_r w$$

с постоянной вещественной оператор-функцией M_r.

Для приводимых систем из пространства LS справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Приводимая система вида (11) принадлежит множеству T тогда и только тогда, когда она имеет n различных характеристических показателей Ляпунова.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть система вида (11) является одновременно приводимой и интегрально разделенной. В этой ситуации в силу свойства 4) ляпуновских преобразований система (11) приводится к стационарной системе

$$\dot{w} = M_r w \quad (w \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0), \tag{12}$$

которая также обладает свойством интегральной разделенности решений. Согласно критерию интегральной разделенности стационарных систем (теорема 3) оператор M_r имеет n различных по величине вещественных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, которые являются одновременно ляпуновскими показателями решений системы (11). Осуществляя обратное ляпуновское преобразование с помощью оператор-функции $L_r^{-1}(t)$ от системы (12) к системе (11) получем, согласно свойству 2) сохранения характеристических показателей при преобразованиях Ляпунова, что все характеристические показатели Ляпунова $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ приводимой системы вида (11), удовлетворяющей условию интегральной разделенности, являются различными, что и требовалось доказать..

Достаточность. Для доказательства достаточности условия теоремы воспользуемся свойством 2) сохранения характеристических показателей при преобразованиях Ляпунова и критерием интегральной разделенности стационарных систем (теорема 3). Пусть система вида (11) имеет n различных характеристических показателей Ляпунова $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$. В этом случае она ляпуновским преобразованием $v = K_r(t)z$ приводится к стационарной системе с диагональным оператором P_r

$$\dot{v} = P_r v \quad (v \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0), \tag{13}$$

имеющей согласно свойству 2) преобразований Ляпунова n различных характеристических показателей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, которые являются только вещественными собственными значениями оператора P_r правой части системы (13). Воспользовавшись теоремой 3, получим, что система (13) обладает свойством интегральной разделенности решений. Применяя обратное преобразование Ляпунова $z = K_r^{-1}(t)v$, переходим от системы (13) к системе (11). Согласно свойству 4) ляпуновских преобразований о сохранении свойства интегральной разделенности решений система (11) принадлежит множеству T. Достаточность условия теоремы доказана. Теорема 4 полностью доказана.

Отметим, что теорема 4 дает алгебраический критерий принадлежности приводимой системы типа (11) множеству T дифференциальных систем со свойством интегральной разделенности решений.

4. Алгебраический критерий интегральной разделенности периодических систем из пространства LS

Как известно, линейные периодические системы приводимы, поэтому для них справедлив алгебраический критерий интегральной разделенности для линейных приводимых систем через показатели Ляпунова. Как правило, для периодических систем используются другие характеристические показатели или мультипликаторы. Основываясь на теории Флоке — Ляпунова можно привести конструктивный критерий интегральной разделенности линейных периодических систем, связывающий это свойство с их мультипликаторами.

Основным объектом исследования в настоящем разделе является линейная дифференциальная система из множества LS вида

$$\dot{v} = B(t)v \quad (v \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0), \tag{14}$$

где $B(t)$ — ω-периодическая оператор-функция ($\omega > 0$):

$$B(t + \omega) = B(t). \tag{15}$$

Из теории Флоке известно [11], что для периодической линейной дифференциальной системы вида (14) с условием (15) на матрицу $B(t)$, нормированная фундаментальная матрица решений $V(t)$ имеет следующий вид:

$$V(t) = K(t)\, e^{St}, \tag{16}$$

где $K(t)$ — ω-периодичная неособая матрица-функция класса C^1, причем $K(0) = E_n$, (E_n — единичная квадратная матрица); S — постоянная матрица размерности $n \times n$; матрица $V(t)$ удовлетворяет при любом $t \geq 0$ соотношению

$$V(t + \omega) = V(t)\, V(\omega), \tag{17}$$

где $V(\omega)$ — неособая $(n \times n)$-матрица монодромии периодической системы (14) с условием (15) на матрицу $B(t)$, и корни уравнения

$$\det(V(\omega) - \mu E_n) = 0$$

называются ее мультипликаторами.

Согласно теореме Ляпунова, система вида (14) при условии (15) на матрицу $B(t)$ приводится ω-периодическим ляпуновским преобразованием, сохраняющим мультипликаторы, к системе с постоянной матрицей:

$$\dot{w} = Sw,$$

где матрица S является, вообще говоря, комплекснозначной даже если матрица $B(t)$ вещественная.

В [15, 16, 17] показано, что если линейная система (14) является вещественной, то при условии (15) на матрицу $B(t)$, она приводима 2ω-периодическим ляпуновским преобразованием к системе

$$\dot{z} = S'z, \tag{18}$$

где S' — постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица с собственными значениями

$$\nu_i = \frac{1}{2\omega} \ln \mu_i^2 = \frac{1}{\omega} \ln |\mu_i|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Для периодической линейной дифференциальной системы вида (14) при условии (15) на матрицу $B(t)$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Линейная периодическая система вида (14) с вещественными коэффициентами при условии (15) на матрицу $B(t)$ обладает свойством интегральной разделенности тогда и только тогда, когда она имеет n различных по абсолютной величине вещественных мультипликаторов.

Доказательство. Необходимость и достаточность непосредственно вытекают из приводимости (2ω)-периодическим ляпуновским преобразованием линейной ω-периодической системы с вещественными коэффициентами к системе с постоянной вещественной матрицей.

Действительно, пусть ω-периодическая система типа (14) при условии (15) на матрицу $B(t)$ принадлежит множеству T метрического пространства LS систем с интегральной разделенностью. Поскольку свойство интегральной разделенности при ляпуновском преобразовании сохраняется, система (18) также принадлежит множеству T, и по критерию интегральной разделенности для стационарных систем (теорема 3) все собственные значения матрицы S' различны. Из формулы (19) следует, что в этом случае различны все n модулей мультипликаторов, откуда имеем n вещественных различных по абсолютной величине мультипликаторов.

Наоборот, мультипликаторы сохраняются при ляпуновском преобразовании, и, если все n мультипликаторов различны по абсолютной величине, то из формулы (19) получаем n различных вещественных собственных значений у матрицы S'. По теореме 3 система (18) принадлежит множеству T. Так как ляпуновское преобразование сохраняет свойство интегральной разделенности, то исходная ω-периодическая система типа (14) при условии (15) на матрицу $B(t)$, приведенная к системе (18), также принадлежит множеству T.

Теорема 5 полностью доказана.

Заключение

В статье исследованы алгебраические свойства линейных систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условию интегральной разделенности решений. Для множества таких систем с постоянными, приводимыми и периодическими операторами правых частей доказаны алгебраические критерии наличия у них данного свойства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 19-07-00686а.

Список литературы

1. Knopp K., Perron O. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist (Zweite Mitteilung) // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1913. Vol. 1913, no. 143. S. 25–50. DOI: 10.1515/crll.1913.143.25
2. Былов Б.Ф. О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Матем. сборник. Новая сер. 1965. Т. 67(109), № 3. С. 338–344.
3. Lillo J.C. Perturbations of Nonlinear Systems // Acta mathematica. 1960. Vol. 103, no. 1-2. Pp. 123–138. DOI: 10.1007/BF02546527
4. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1785–1793.
5. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794–1803.
6. Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775–1784.
7. Сергеев И.Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 3. С. 438–448.
8. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1983. № 9. С. 111–166.
9. Palmer K.J. An ordering for linear differential systems and a characterization of exponential separation in terms of reducibility // J. of Differential Equations. 1984. Vol. 53, no. 1. Pp. 67–97. DOI: 10.1016/0022-0396(84)90026-3
10. Миллионщиков В.М.Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1167–1170.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
12. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1991. 303 с.
13. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 448 с.

14. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

15. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. литературы, 1958. 476 с.

16. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

17. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие. М: МГИУ, 2007. 254 с.

Mathematics and Mathematical Modeling, 2020, no. 3, pp. 1–14.
DOI: **10.24108/mathm.0320.0000220**

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Algebraic criteria of the integral division for solutions of certain classes of ordinary differential equations systems

Akhrem A. A.[1], Nosov A. P.[1,*]

[1]Federal Research Center “Informatics and Control” of RAS, Moscow, Russia
[*]nosov@isa.ru

Keywords: algebraic criteria, ordinary differential equations, linear systems, typical properties, integral division, reducible systems

Received: 15.06.2020, Revised: 20.08.2020.

One of the important directions of the qualitative theory of ordinary differential equations is to study the properties of linear systems that satisfy the condition of integral separation. Anyway, integral separation becomes apparent in all studies concerning the asymptotic behavior of the solutions for the linear systems under the action of small perturbations.

The papers of V.M. Millionschikov, B.F. Bylov, N.A. Izobov, I.N. Sergeev et al. proved that the available integral separation is the main reason for the rough stability of the characteristic Lyapunov exponents, the rough stability of the highest Lyapunov exponent, and the rough diagonalizability of systems by Lyapunov transformations, and other fundamental properties of linear differential systems.

The paper presents the basic properties of the set of linear systems with constant, periodic, reducible coefficients and proves the algebraic criteria for their property of integral separation of solutions to be available.

The results can be used in modeling dynamic processes.

References

1. Knopp K., Perron O. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist (Zweite Mitteilung). *J. für die reine und angewandte Mathematik*, 1913, vol. 1913, no. 143, s. 25–50. DOI: 10.1515/crll.1913.143.25

2. Bylov B.F. On reduction of a system of linear equations to a diagonal form. *Matematicheskij sbornik. N.S.* [Mathematical Digest. New Series], 1965, vol. 67(109), no. 3, pp. 338–344 (in Russian).
3. Lillo J.C. Perturbations of Nonlinear Systems. *Acta mathematica*, 1960, vol. 103, no. 1-2, pp. 123–138. DOI: 10.1007/BF02546527
4. Bylov B.F., Izobov N.A. Necessary and sufficient conditions for the stability of the characteristic exponents of a diagonal system. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1785–1793 (in Russian).
5. Bylov B.F., Izobov N.A. Necessary and sufficient conditions for the stability of the characteristic exponents of a linear system. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1794–1803 (in Russian).
6. Millionshchikov V.M. Structurally stable properties of linear systems of differential equations. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1775–1784 (in Russian).
7. Sergeev I.N. Sharp upper bounds of mobility of the Lyapunov exponents of a system of differential equations and the behavior of the exponents under perturbations approaching. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1980, vol. 16, no. 3, pp. 438–448 (in Russian).
8. Sergeev I.N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations. *J. of Mathematical Sciences*, 1986, vol. 33, no. 6, pp. 1245–1292. DOI: 10.1007/BF01084752
9. Palmer K.J. An ordering for linear differential systems and a characterization of exponential separation in terms of reducibility. *J. of Differential Equations*, 1984, vol. 53, no. 1, pp. 67–97. DOI: 10.1016/0022-0396(84)90026-3
10. Millionshchikov V.M. Systems with integral division which are everywhere dense in the set of all linear systems of differential equations. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1167–1170 (in Russian).
11. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoj teorii ustojchivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 472 p. (in Russian).
12. Bibikov Yu.N. *Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij* [Course of ordinary differential equations]: a textbook. Moscow: Vysshaia Shkola Publ., 1991. 303 p. (in Russian).
13. Nemytskij V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaia teoriia differentsial'nykh uravnenij* [Qualitative theory of differential equations]. Moscow – Leningrad: Gostekhizdat Publ., 1947. 448 p. (in Russian).
14. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskij V.V. *Teoriia pokazatelej Lyapunova i ee prilozheniia k voprosam ustojchivosti* [Lyapunov exponential theory and its applications to sustainability issues]. Moscow: Nauka Publ., 1966. 576 p. (in Russian).

15. Koddington E.A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1955. 429 p. (Russian edition: Koddington E.A., Levinson N. *teoriia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij* [Theory of ordinary differential equations]. Moscow: Inostrannaya Literatura Publ., 1958. 476 p.)

16. Iakubovich V.A., Starzhinskij V.M. *Linejnye differentsial'nye uravneniia s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniia* [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications]. Moscow: Nauka Publ., 1972. 720 p. (in Russian).

17. Pushkar' E.A. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations]: a textbook. Moscow: MGIU Publ., 2007. 254 p. (in Russian).