

Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов

УДК 621.391.8

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2020-23-5-24-36>

## Оценка параметров сигнала с полиномиальным законом фазовой модуляции

А. А. Монаков ✉

Институт радиотехники, электроники и связи, Санкт-Петербургский  
государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
Санкт-Петербург, Россия

✉ [a\\_monakov@mail.ru](mailto:a_monakov@mail.ru)

### Аннотация

**Введение.** Сигналы с полиномиальным законом фазовой модуляции часто встречаются в системах радиосвязи, гидро- и радиолокации, акустики, технической диагностики. Оценивание полиномиальных коэффициентов фазы является актуальной задачей в теории сигналов. В настоящее время предложено большое количество алгоритмов оценивания. Оптимальным способом является метод максимального правдоподобия. Однако его реализация связана с проведением многомерного поиска, что делает метод малоприменимым для практической реализации. Существуют близкие к оптимальным способы оценивания, среди которых можно выделить HAF-алгоритм, который основан на вычислении функции неопределенности сигнала высокого порядка (High order Ambiguity Function), и CPF алгоритм, который использует вычисление кубической фазовой функции (Cubic Phase Function) и дает близкие к оптимальным оценки для сигнала с квадратическим законом частотной модуляции. Недостатком первого из названных методов является большое количество комбинаторных шумовых компонент, возникающих в процессе решения. Недостатками второго – ограниченная область применения и реализация одномерного поиска оценок без возможности применения алгоритмов быстрого вычисления преобразования Фурье.

**Цель работы.** Синтезировать алгоритм оценивания коэффициентов фазового полинома произвольного порядка, дающий малое количество шумовых комбинаторных составляющих и основанный на использовании быстрых алгоритмов преобразования Фурье.

**Материалы и методы.** В статье введено понятие решающей функции, которая рассчитывается таким образом, чтобы ее фаза содержала только монотонный член первого порядка с коэффициентом, равным старшему коэффициенту фазового полинома сигнала.

**Результаты.** Новый алгоритм оценивания, особенностью которого является возможность использования для нахождения оценок быстрых алгоритмов вычисления преобразования Фурье. Каждый полиномиальный коэффициент оценивается на основе унифицированной процедуры, которая уменьшает количество комбинаторных шумовых компонент в процессе поиска оценок.

**Заключение.** Синтезированный алгоритм дает асимптотически эффективные оценки при меньших отношениях сигнал/шум по сравнению с алгоритмом, основанным на вычислении функции неопределенности высокого порядка (HAF-алгоритмом).

**Ключевые слова:** полиномиальный закон фазовой модуляции, полиномиальные фазовые коэффициенты, функция неопределенности высокого порядка, кубическая фазовая функция, оценка параметров сигнала

**Для цитирования:** Монаков А. А. Оценка параметров сигнала с полиномиальным законом фазовой модуляции // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2020. Т. 23, № 5. С. 24–36. doi: 10.32603/1993-8985-2020-23-5-24-36

---

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 18.05.2020; принята к публикации после рецензирования 20.06.2020; опубликована онлайн 25.11.2020

---



## Parameter Estimation of Polynomial-Phase Signals

Andrey A. Monakov ✉

Institute of Radio Engineering, Electronics and Communications,  
Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,  
St Petersburg, Russia

✉a\_monakov@mail.ru

### Abstract

**Introduction.** Polynomial phase signals frequently appear in radar, sonar, communication and technical applications. Therefore, estimation of polynomial phase coefficients of such signals is an urgent problem in signal theory. Currently, a large number of estimation algorithms have been proposed. The best way is the maximum likelihood (ML) method. However, its implementation is associated with a multidimensional retrieval, which makes the method unsuitable for practical implementation. A number of alternative strategies have been developed to circumvent the ML difficulties. These strategies are very close to optimal. Among them one can single out the HAF-algorithm based on the computation of the High order Ambiguity Function and the CPF algorithm, which uses the computation of the Cubic Phase Function and produces very accurate estimates for signals with the quadratic frequency modulation. However, both algorithms have obvious drawbacks. The HAF algorithm produces a large number of combinatorial noise components. The CPF algorithm is limited in its implementation to the third order polynomial signals and does not use fast algorithms, such as the Fast Fourier Transform.

**Aim.** Synthesis of an estimation algorithm that produces a small number of noise combinatorial components and uses the Fast Fourier Transform computation algorithms to find coefficient estimates of an arbitrary order phase polynomial.

**Materials and methods.** In the paper a concept of a decisive function was introduced. It was calculated so that its phase contained only a first-order monomial with a coefficient equal to the highest coefficient of the signal phase polynomial.

**Results.** A new estimation algorithm was proposed able to use Fast Fourier Transform computation algorithms to find estimates. Each polynomial coefficient was estimated on the basis of a unified procedure, which reduced the number of combinatorial noise components in an estimate search.

**Conclusions.** The synthesized algorithm gives asymptotically efficient estimates for lower signal-to-noise ratios in comparison with the HAF-algorithm.

**Keywords:** polynomial phase modulation, polynomial phase coefficients, high-order ambiguity function, cubic phase function, signal parameter estimation

**For citation:** Monakov A. A. Parameter Estimation of Polynomial-Phase Signals. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2020, vol. 23, no. 5, pp. 24–36. doi: 10.32603/1993-8985-2020-23-5-24-36

**Conflict of interest.** The author declare no conflict of interest.

Submitted 18.05.2020; accepted 20.06.2020; published online 25.11.2020

**Введение.** Сигналом с полиномиальным законом фазовой модуляции (ПФМ-сигнал) называется дискретный сигнал вида

$$s(n) = A_0 \exp \left[ i \sum_{p=0}^P (a_p n^p) \right], n \in [0, N-1], \quad (1)$$

где  $A_0$  – амплитуда;  $a_p, p \in [0, P]$  – полиномиальные коэффициенты фазы (ПКФ);  $N$  – длительность

сигнала;  $P$  – порядок фазового полинома. Подобные сигналы часто встречаются в радиотехнике, акустике, технической диагностике [1–8]. ПФМ-сигналы используются в системах связи, гидро- и радиолокации в случаях, когда необходимо выполнить высокие требования к уровню внеполосного излучения (например, спутниковые системы связи, многопозиционные радиолокационные системы). Обработка подобных сигналов – часто встречающаяся задача в радиолока-

торах с синтезированной апертурой, радиолокационных и акустических системах наблюдения за движущимися объектами, биолокации, системах контроля состояния механических систем. В связи с этим важной практической задачей является оценка полиномиальных коэффициентов в случае, когда сигнал  $s(n)$  принимается на фоне белого шума с известными статистическими характеристиками:

$$z(n) = s(n) + w(n), n \in [0, N - 1],$$

где  $z(n)$  – наблюдаемый на интервале приема  $[0, N - 1]$  сигнал;  $w(n)$  – белый шум с известной средней мощностью  $P_w$ . К настоящему времени предложено несколько методов решения данной задачи [9–20]. В статье [17] дан развернутый анализ предложенных методов, а также наиболее исчерпывающий библиографический список работ на данную тему.

Оптимальным способом является метод максимального правдоподобия [9, 17]. Однако его реализация требует многомерного поиска, что делает метод малоприменимым для практического применения. В связи с этим существуют альтернативные стратегии поиска оценок, мало уступающие по эффективности оптимальному. Согласно [17] одним из наиболее простых и эффективных алгоритмов решения поставленной задачи является алгоритм с использованием функций неопределенности высокого порядка (ФНВП; High-order Ambiguity Function – HAF), который был впервые предложен в [18] и в дальнейшем будет называться ФНВП-алгоритмом. Этот алгоритм сводится к последовательному дифференцированию фазового полинома с помощью следующей рекуррентной процедуры:

$$\begin{aligned} PD^1(n; \tau_1) &= z^*(n - \tau_1)z(n + \tau_1), \\ PD^Q(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_Q) &= \\ &= \left[ PD^{Q-1}(n - \tau_Q; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{Q-1}) \right]^* \times \\ &\times PD^{Q-1}(n + \tau_Q; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{Q-1}), \end{aligned}$$

где  $*$  – оператор комплексного сопряжения;  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_Q$  – заранее выбранные параметры сдвига отсчетов сигнала  $z(n)$ ;  $Q = 1, 2, \dots, P - 1$  – порядок функции  $PD^Q(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_Q)$ .

При отсутствии шума

$$\begin{aligned} PD^{P-1}(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}) &= \\ &= C \exp \left[ in2^{P-1} P! a_P \prod_{p=1}^{P-1} \tau_p \right], \end{aligned}$$

где постоянная  $C$  не зависит от дискретного времени  $n$ . Следовательно, согласно ФНВП-алгоритму оценка старшего ПКФ равна:

$$\hat{a}_P = \frac{1}{2^{P-1} P! a_P \prod_{p=1}^{P-1} \tau_p} \max_{\Omega} \left| \text{HAF}(\Omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}) \right|^2,$$

где  $\Omega$  – цифровая частота;  $\hat{\cdot}$  – оценка соответствующего параметра;

$$\begin{aligned} \text{HAF}(\Omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}) &= \\ &= \sum_n PD^{P-1}(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}) \exp(-i\Omega n) \end{aligned}$$

функция неопределенности  $(P - 1)$ -го порядка. Оценка следующего по старшинству ПКФ  $a_{P-1}$  осуществляется тем же способом, но применительно к сигналу  $z_{P-1}(n) = z(n) \exp(-i\hat{a}_P n^P)$ . Для получения наилучшего качества оценивания рекомендуется брать  $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{P-1} = N/(2P)$  [17, 18]. Очевидно, что при наличии шумов в составе сигнала  $z(n), n \in [0, N - 1]$  в  $PD^P(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1}), p = 1, \dots, P - 1$ , помимо одной сигнальной присутствуют шумовые комбинаторные компоненты. Несложно подсчитать, что их количество равно  $2^{2^{P-1}} - 1$ . Такое большое количество комбинационных шумовых компонент (например, при  $P = 4$  их количество будет равно 255) должно негативно влиять на качество оценивания.

Перспективным алгоритмом оценки полиномиальных фазовых коэффициентов сигнала с квадратическим законом частотной модуляции [17, 19, 20]

$$s(n) = A_0 \exp \left[ i \left( a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 \right) \right],$$

$n \in [0, N - 1]$ , который является частным случаем ПФМ-сигнала, является алгоритм, основанный на использовании кубической фазовой функции (КФФ; Cubic Phase Function – CPF):

$$C(n, \Omega) = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} z(n-m)z(n+m) \exp[-i\Omega m^2], \quad (2)$$

который в данной статье будет называться

КФФ-алгоритмом. КФФ-алгоритм, впервые предложенный в [19, 20], позволяет последовательно найти оценки ПКФ  $a_p$  ( $p = 3, 2, 1, 0$ ) и амплитуды  $A_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(n) &= \arg \max_{\Omega} |C(n, \Omega)|^2, \\ \hat{a}_3 &= \frac{1}{6} [\hat{\Omega}(n_1) - \hat{\Omega}(0)], \hat{a}_2 = \frac{1}{2} \hat{\Omega}(0), \\ \hat{a}_1 &= \arg \max_{\omega} |Z_1(\omega)|^2, \hat{a}_0 = \arg z_0, \hat{A}_0 = |z_0|, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n_1$  – заранее выбранный момент времени (в [19] рекомендуется выбор  $n_1 = 0.11N$ );  $Z_1(\omega)$  – преобразование Фурье от сигнала

$$\begin{aligned} z_1(n) &= z(n) \exp[-i(\hat{a}_3 n^3 + \hat{a}_2 n^2)]; \\ z_0 &= \frac{1}{N} \sum_n z_1(n) \exp[-i\hat{a}_1 n]. \end{aligned}$$

КФФ-алгоритм обладает двумя очевидными недостатками: во-первых, из всех возможных отсчетов дискретного времени  $n$  в формировании оценок, как следует из (3), используются только два:  $n_0 = 0$  и  $n_1$ ; во-вторых, для ускорения расчетов при вычислении КФФ (2) нельзя использовать алгоритмы быстрого вычисления преобразования Фурье. Кроме того, не ясно, как можно обобщить КФФ-алгоритм на ПФМ-сигналы с произвольным порядком фазового полинома.

Целью представленной статьи является синтез такого алгоритма оценивания, который позволяет устранить отмеченные недостатки ФНВП и КФФ-алгоритмов. Статья структурирована следующим образом. Вначале описан синтез нового алгоритма оценивания ПКФ. Далее приведены результаты математического моделирования синтезированного алгоритма применительно к сигналу с квадратическим законом частотной модуляции (ЧМ) ( $P = 3$ ) и сигналу с кубическим законом ЧМ ( $P = 4$ ) соответственно. Дается сравнительный анализ предлагаемого алгоритма с КФФ- и ФНВП-алгоритмами. В Приложении определены соответствующие границы Крамера–Рао (ГКР) для оценок ПКФ, которые используются при сравнительном анализе рассматриваемых в статье алгоритмов.

**Синтез алгоритма оценивания ПКФ произвольного ПФМ-сигнала.** Целью синтеза является создание такого сигнала  $zz(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1})$ ,

в дальнейшем называемого решающей функцией (РФ), который, подобно сигналу  $PD^{P-1}(n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{P-1})$  в ФНВП-алгоритме, позволяет простейшим способом получить оценку старшего ПКФ  $a_p$ . Для этого в фазе синтезируемого сигнала должна остаться либо компонента, линейно зависящая от дискретного времени  $n$ , либо постоянная составляющая, которые зависят от старшего коэффициента  $a_p$ . В первом случае оценка  $a_p$  будет проводиться, как и в случае ФНВП-алгоритма, с использованием оценки спектра синтезируемой РФ  $zz(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1})$ , во втором – посредством оценки его фазы.

Выбор задержек  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}$  представляет собой самостоятельную важную и трудную задачу, поскольку связан с анализом точности оценивания ПКФ. В связи с этим в настоящей статье будем полагать:

$$\tau_q = q \frac{N}{2P}, q \in [0, Q-1].$$

Такой выбор, хотя и является самым простым и очевидным, вполне оправдал себя в ФНВП-алгоритме, поскольку, как показано в [21], он является близким к оптимальному для этого алгоритма.

Пусть сигнал  $z(n), n \in [0, N-1]$  содержит сигнальную компоненту вида (1). Рассмотрим раздельно 2 случая.

А. Допустим, что оценка старшего коэффициента фазового полинома основана на обработке РФ

$$zz_A(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}) = \prod_{q=0}^{Q-1} \rho^{N_q}(n, \tau_q),$$

где  $\rho(n, \tau_q) = z(n - \tau_q)z(n + \tau_q)$ ;  $Q > 0$ ,  $N_q \in \mathbb{Z}$  и  $\tau_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \in [0, Q-1]$  – целые числа, подлежащие определению ( $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  – множество целых и целых неотрицательных чисел соответственно). Заметим, что случай  $N_q < 0$  не исключается и при наличии сигнала (1) соответствует использованию операции комплексного сопряжения:

$$\rho^{N_q}(n, \tau_q) = \left[ \rho^{|N_q|}(n, \tau_q) \right]^* \quad (4)$$

Вычислим сигнальную компоненту:

$$\begin{aligned} & \rho^{N_q}(n, \tau_q) = \\ & = \exp \left[ i \sum_{p=0}^P a_p (n + \tau_q)^p + a_p (n - \tau_q)^p \right] = \\ & = \exp \left\{ i \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j=0}^p C_p^j n^{p-j} \tau_q^j [1 + (-1)^j] \right\}, \end{aligned}$$

где  $C_p^j$  – биномиальный коэффициент. Тогда

$$\begin{aligned} & zz_A(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}) = \\ & = \exp \left[ 2i \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j \in [0, p]}^{(E)} C_p^j S_j n^{p-j} \right], \end{aligned}$$

(E)

где сумма  $\sum$  берется только по четным значе-

ния индекса  $j$  (англ. *Even*);  $S_j = \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j$ .

Пусть  $P$  – нечетное число. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j \in [0, p]}^{(E)} C_p^j S_j n^{p-j} = \\ & = a_0 C_0^0 S_0 + a_1 C_1^0 S_0 n + \dots + a_{P-1} \times \\ & \times \left( C_{P-1}^0 S_0 n^{P-1} + C_{P-1}^2 S_2 n^{P-3} + \dots + C_{P-1}^{P-1} S_{P-1} \right) + \\ & + a_P \left( C_P^0 S_0 n^P + C_P^2 S_2 n^{P-2} + \dots + C_P^{P-1} S_{P-1} n \right). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы при заданных задержках  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}$  выполнялись следующие условия:

$$S_j = \begin{cases} \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = 0, j = 0, 2, \dots, P-3; \\ \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = X \neq 0, j = P-1, \end{cases}$$

где  $X$  – неизвестное натуральное число, выбираемое таким образом, чтобы  $N_{Q-1} = 1$ . Сформулированные условия представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных  $N_q$  ( $q = 0, \dots, Q-1$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau_0^2 & \tau_1^2 & \dots & \tau_{Q-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_0^{P-1} & \tau_1^{P-1} & \dots & \tau_{Q-1}^{P-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{Q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо выполнение условия  $Q = (P+1)/2$ .

Таким образом определено  $Q$ . Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных  $N_q, q \in [0, \dots, (P-1)/2]$  не представляет сложности. При этом

$$\begin{aligned} & zz_A[n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{(P-1)/2}] = \\ & = \exp[i2X(a_P P n + a_{P-1})], \end{aligned}$$

и компонента фазы сигнала  $zz_A(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1})$ , содержащая старший ПКФ  $a_P$ , как и требовалось, является линейной функцией дискретного времени  $n$ .

Пусть теперь  $P$  – четное число. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j \in [0, p]}^{(E)} C_p^j S_j n^{p-j} = \\ & = a_0 C_0^0 S_0 + a_1 C_1^0 S_0 n + \dots + a_{P-1} \times \\ & \times \left( C_{P-1}^0 S_0 n^{P-1} + C_{P-1}^2 S_2 n^{P-3} + \dots + C_{P-1}^{P-2} S_{P-2} n \right) + \\ & + a_P \left( C_P^0 S_0 n^P + C_P^2 S_2 n^{P-2} + \dots + C_P^P S_P \right). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$S_j = \begin{cases} \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = 0, j = 0, 2, \dots, P-2; \\ \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = X \neq 0, j = P, \end{cases}$$

где  $X$  – неизвестное натуральное число, выбираемое таким образом, чтобы  $N_{Q-1} = 1$ . Сформулированные условия представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных  $N_q$  ( $q = 0, \dots, Q-1$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau_0^2 & \tau_1^2 & \dots & \tau_{Q-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_0^P & \tau_1^P & \dots & \tau_{Q-1}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{Q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо выполнение условия  $Q = P/2 + 1$ .

Таким образом определено  $Q$ . Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных  $N_q$  ( $q = 0, \dots, Q-1$ ) также не представляет затруднений. При этом  $zz_A(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{P/2}) = \exp[i2Xa_P]$ , и фаза этой РФ является постоянной и линейно зависит от старшего ПКФ  $a_P$ .

Б. Допустим, что оценка старшего коэффициента фазового полинома основана на обработке РФ

$$zz_B(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}) = \prod_{q=0}^{Q-1} r^{N_q}(n, \tau_q),$$

где  $r(n, \tau_q) = z^*(n - \tau_q)z(n + \tau_q)$ ;  $Q > 0$ ,  $N_q \in \mathbb{Z}$  и  $\tau_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $q \in [0, Q-1]$  – целые числа, подлежащие определению. Случай  $N_q < 0$ , как и прежде, не исключается и соответствует использованию операции комплексного сопряжения (4).

Вычислим сигнальную компоненту:

$$\begin{aligned} r^{N_q}(n, \tau_q) &= \\ &= \exp \left[ i \sum_{p=0}^P a_p (n + \tau_q)^p - a_p (n - \tau_q)^p \right] = \\ &= \exp \left\{ i \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j=0}^p C_p^j n^{p-j} \tau_q^j [1 - (-1)^j] \right\}. \end{aligned}$$

Тогда 
$$zz_B(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}) = \exp \left[ 2i \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j \in [0, p]}^{(O)} C_p^j S_j n^{p-j} \right],$$

где сумма  $\sum^{(O)}$  берется только по нечетным значениям

индекса  $j$  (англ. *Odd*);  $S_j = \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j$ .

Пусть  $P$  – четное число. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P a_p \sum_{j \in [1, p]}^{(O)} C_p^j S_j n^{p-j} &= a_1 C_0^0 S_1 + 2a_2 C_2^1 S_1 n + \dots + a_{P-1} \times \\ &\times \left( C_{P-1}^1 S_1 n^{P-2} + C_{P-1}^3 S_3 n^{P-4} + \dots + C_{P-1}^{P-1} S_{P-1} n \right) + \\ &+ a_P \left( C_P^1 S_1 n^{P-1} + C_P^3 S_3 n^{P-3} + \dots + C_P^{P-1} S_{P-1} n \right). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы при заданных задержках  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1}$  выполнялись следующие условия:

$$S_j = \begin{cases} \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = 0, & j = 1, 3, \dots, P-3; \\ \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = X \neq 0, & j = P-1, \end{cases}$$

где  $X$  выбирается из условия  $N_{Q-1} = 1$ . Сформулированные условия представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных  $N_q$  ( $q = 0, \dots, Q-1$ ):

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{Q-1} \\ \tau_0^3 & \tau_1^3 & \dots & \tau_{Q-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_0^{P-1} & \tau_1^{P-1} & \dots & \tau_{Q-1}^{P-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{Q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо выполнение условия  $Q = P/2$ .

Таким образом определено  $Q$ . Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных  $N_q$ ,  $q \in [0, P/2-1]$  существует и

$$zz_B(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{P/2-1}) = \exp[i2X(a_P n + a_{P-1})].$$

Компонента фазы сигнала  $zz(n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{Q-1})$ , содержащая старший ПКФ  $a_P$ , является линейной функцией дискретного времени  $n$ .

Пусть теперь  $P$  – нечетное число. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^P a_p \sum_{j \in [1, p]}^{(O)} C_p^j S_j n^{p-j} &= \\ &= a_1 C_1^1 S_1 n + a_2 C_2^1 S_1 n + \dots + a_{P-1} \times \\ &\times \left( C_{P-1}^1 S_1 n^{P-2} + C_{P-1}^3 S_3 n^{P-4} + \dots + C_{P-1}^{P-2} S_{P-2} n \right) + \\ &+ a_P \left( C_P^1 S_1 n^P + C_P^3 S_3 n^{P-2} + \dots + C_P^P S_P \right). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$S_j = \begin{cases} \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = 0, & j = 1, 3, \dots, P-2; \\ \sum_{q=0}^{Q-1} N_q \tau_q^j = X \neq 0, & j = P, \end{cases}$$

где  $X$  выбирается из условия  $N_{Q-1} = 1$ . Сформулированные условия представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных  $N_q$  ( $q = 0, \dots, Q-1$ ):

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{Q-1} \\ \tau_0^3 & \tau_1^3 & \dots & \tau_{Q-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_0^P & \tau_1^P & \dots & \tau_{Q-1}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{Q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо выполнение условия  $Q = (P+1)/2$ .

Таким образом определено  $Q$ . Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных  $N_q$ ,  $q = 0, \dots, (P-1)/2$  также легко получить. При этом

$$zz_B[n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{(P-1)/2}] = \exp[i2Xa_P].$$

Следовательно, фаза сигнала  $zz_B[n; \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{(P-1)/2}]$  постоянна и зависит от старшего коэффициента  $a_P$ .

**Оценка ПКФ сигнала с квадратической ЧМ.** Тогда  $P = 3$ . Рассмотрим случаи А и Б.

А. Поскольку  $P$  – нечетное,  $Q = 2$  и система уравнений, неизвестными в которой являются  $N_0$  и  $N_1$ , примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau_0^2 & \tau_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}.$$

Решением системы является

$$N_1 = -N_0 = X / (\tau_1^2 - \tau_0^2),$$

поэтому  $X = (\tau_1^2 - \tau_0^2)$  и  $N_1 = -N_0 = 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} zz_A^{(3)}(n; \tau_0, \tau_1) &= \rho^*(n, \tau_0) \rho(n, \tau_1) = \\ &= z(n - \tau_1) z(n + \tau_1) z^*(n - \tau_0) z^*(n + \tau_0). \end{aligned}$$

В последнем уравнении можно положить  $\tau_0 = 0$  и  $\tau_1 = \tau$ , поэтому

$$zz_A^{(3)}(n; 0, \tau) = z(n - \tau) z(n + \tau) [z^*(n)]^2.$$

Б. В этом случае  $Q = 2$  и система уравнений с неизвестными  $N_0$  и  $N_1$  примет вид

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 \\ \tau_0^3 & \tau_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}.$$

Решением системы являются

$$N_0 = -\frac{\tau_1}{\tau_0} N_1, N_1 = \frac{X}{\tau_1(\tau_1^2 - \tau_0^2)} = 1,$$

поэтому  $X = \tau_1(\tau_1^2 - \tau_0^2)$ . Отметим, что в данном случае не возможны решения с  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 0$  или  $\tau_0 = \tau_1$ , так как система для нахождения  $N_0, N_1$  становится вырожденной. Следовательно, можно положить  $\tau_0 = \tau$  и  $\tau_1 = 2\tau$ . При этом  $N_1 = 1$  и  $N_0 = -2$ . Тогда

$$\begin{aligned} zz_B^{(3)}(n; \tau, 2\tau) &= \\ &= z^*(n - 2\tau) z(n + 2\tau) [z(n - \tau) z^*(n + \tau)]^2. \end{aligned}$$

РФ  $zz_A^{(3)}(n; 0, \tau)$  и  $zz_B^{(3)}(n; \tau, 2\tau)$  могут использоваться для нахождения оценки старшего ПКФ  $a_3$ .

Для нахождения других ПКФ применим тот же прием, что и в ФНВП-алгоритме. После получения оценки  $\hat{a}_3$  вычисляется сигнал

$$z_2(n) = z(n) \exp[-i\hat{a}_3 n^3],$$

который используется для нахождения оценки следующего ПКФ  $a_2$ . Для этого могут использоваться следующие РФ (уравнения для них выводятся тем же способом, что и для РФ оценки  $a_3$ ):

$$\begin{aligned} zz_A^{(2)}(n; 0, \tau) &= z(n - \tau) z(n + \tau) [z^*(n)]^2; \\ zz_B^{(2)}(n; \tau) &= z^*(n - \tau) z(n + \tau). \end{aligned}$$

ПКФ  $a_1, a_0$  и амплитуда  $A_0$  оцениваются аналогично КФФ-алгоритму (3).

Найденные РФ для вычисления оценок всех ПКФ следует объединить в следующие пары:  $[zz_A^{(3)}, zz_B^{(2)}]$  и  $[zz_B^{(3)}, zz_A^{(2)}]$ , так как у первой пары фаза РФ линейно зависит от дискретного времени  $n$ , а у второй пары РФ фаза постоянна. Такое разбиение унифицирует алгоритм обработки, поскольку вне зависимости от порядкового номера ПКФ для его оценки используется один и тот же способ. Алгоритм, использующий первую

пару, будем в дальнейшем называть алгоритмом 1, а вторую пару – алгоритмом 2.

С целью определения качества предлагаемых алгоритмов, а также их сравнения с КФФ-алгоритмом, который считается лучшим для рассматриваемой задачи, использовалось математическое моделирование. Для моделирования был выбран сигнал, предложенный в [19], с ПКФ равными  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0.125\pi$ ,  $a_2 = \pi$ ,  $a_3 = \pi$  и амплитудой  $A_0 = 1$ . На рис. 1 приведены зависимости среднеквадратической ошибки в децибелах для оценок ПКФ  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  от отношения сигнал/шум (ОСШ)  $q^2 = A_0^2/P_w$ . Излом на графиках соответствует пороговому значению ОСШ, которое разделяет области многозначности и однозначности оценок. Характеристики оценки ПКФ  $\hat{A}_0$  на рисунках отсутствуют. Длительность сигнала была выбрана равной  $N = 511$ , причем середина сигнала соответствовала началу отсчета дискретного времени  $n \in [-(N-1)/2, (N-1)/2]$ . Количество статистических испытаний при моделировании было выбрано равным  $K = 1000$ . На рисунках также приведены графики нижней ГКР, которые определены в Приложении.

Как следует из рисунка, алгоритм 1 значительно превосходит по качеству алгоритм 2. Причиной этого является высокий уровень шумов, возникающих при формировании РФ вследствие большого количества комбинационных шумовых компонент. Так, например, при оценке старшего ПКФ и использовании РФ  $zz_A^{(3)}(n; 0, \tau)$  количество комбинационных шумовых компонент  $K_w = (2^4 - 1) = 15$ , а при использовании РФ  $zz_B^{(3)}(n; \tau, 2\tau)$  их количество увеличивается до  $K_w = (2^6 - 1) = 63$ . Алгоритм 1 по сравнению с КФФ-алгоритмом проигрывает последнему в пороговом значении ОСШ, при котором среднеквадратическая ошибка становится сравнимой с ГКР. У КФФ-алгоритма, как следует из рисунка,  $q^2 = -3$  дБ, в то время как у алгоритма 1  $q^2 = 2$  дБ. Однако при  $q^2 \geq 2$  дБ точность оценки ПКФ для обоих алгоритмов примерно одинакова и близка к ГКР.

#### Оценка ПКФ сигнала с кубической ЧМ.

Найдем РФ для сигнала с  $P = 4$ . Поскольку старшая степень фазового полинома – четное число,

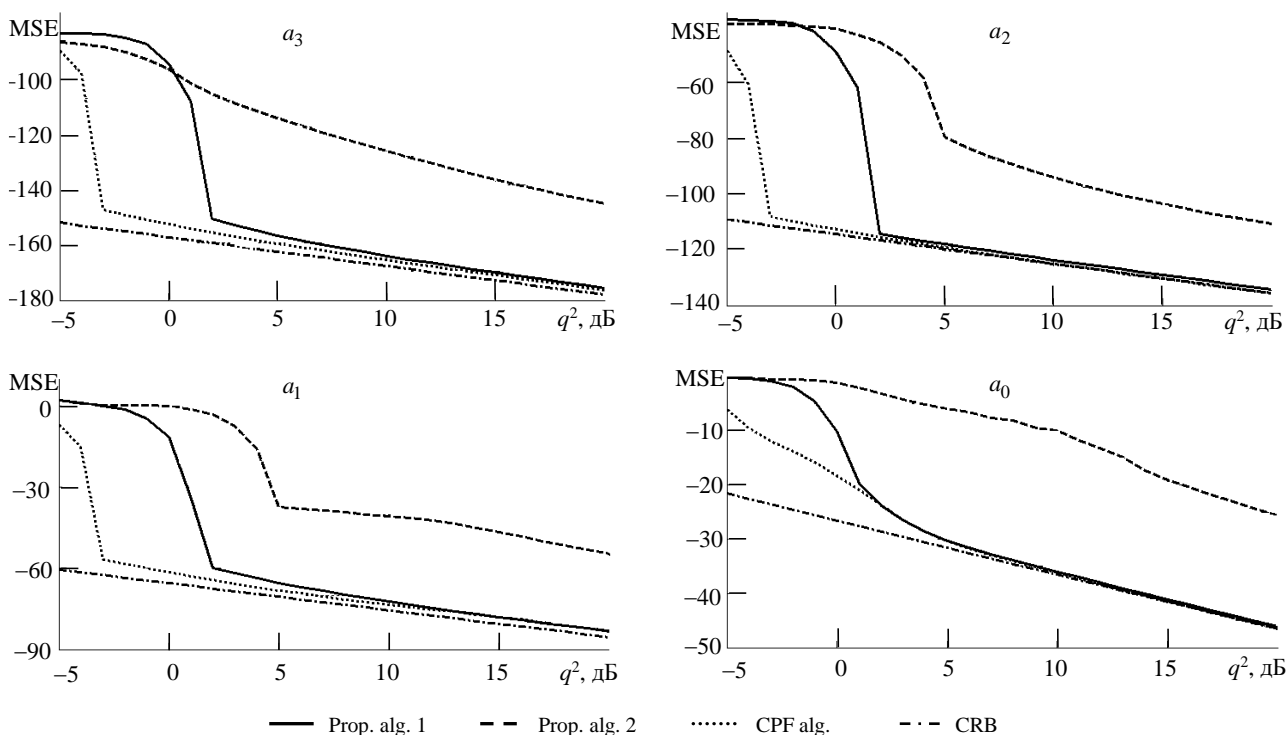


Рис. 1. Среднеквадратическая ошибка оценки ПКФ для сигнала с  $P = 3$

Fig. 1. MSE of the polynomial phase coefficient estimates for a signal with  $P = 3$



в случае А  $Q=3$ . Тогда система уравнений для вычисления неизвестных  $N_0, N_1, N_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tau_0^2 & \tau_1^2 & \tau_2^2 \\ \tau_0^4 & \tau_1^4 & \tau_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X \end{pmatrix}.$$

Решение системы при  $X = (\tau_2^2 - \tau_0^2)(\tau_2^2 - \tau_1^2)$  имеет вид

$$N_0 = \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau_0^2}, N_1 = -\frac{\tau_2^2 - \tau_0^2}{\tau_1^2 - \tau_0^2}, N_2 = 1.$$

Полагая  $\tau_0 = 0, \tau_1 = \tau, \tau_2 = 2\tau$ , получим  $N_0 = 3, N_1 = -4, N_2 = 1$ . Тогда РФ

$$zz_A^{(4)}(n; 0, \tau) = z(n-2\tau)z(n+2\tau) \times [z^*(n-\tau)z^*(n+\tau)]^4 [z(n)]^6.$$

Действуя аналогично, в случае Б получим:

$$zz_B^{(4)}(n; \tau, 2\tau) = z(n-2\tau)z(n+2\tau) [z^*(n-\tau)z^*(n+\tau)].$$

Найденные РФ следует присоединить к группам, определенным ранее:

$$\left[ zz_B^{(4)}, zz_A^{(3)}, zz_B^{(2)} \right] \text{ и } \left[ zz_A^{(4)}, zz_B^{(3)}, zz_A^{(2)} \right].$$

С целью определения качества предлагаемых алгоритмов, а также их сравнения с ФНВП-алгоритмом для моделирования был выбран сигнал со значениями ПКФ  $a_0 = 0, a_1 = 5.25 \cdot 10^{-2}, a_2 = 7.32 \cdot 10^{-4}, a_3 = 2.36 \cdot 10^{-6}, a_4 = 2 \cdot 10^{-8}$  и амплитудой  $A_0 = 1$ . На рис. 2 приведены зависимости среднеквадратической ошибки в децибелах для оценок ПКФ  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$  и амплитуды  $\hat{A}_0$  от ОСШ. Длительность сигнала была выбрана равной  $N = 513$ . Середина сигнала соответствовала началу отсчета дискретного времени  $n \in [-(N-1)/2, (N-1)/2]$ . Количество статистических испытаний при моделировании было выбрано равным  $K = 1000$ . На рисунках также приведены графики нижней ГКР. В силу того, что количество шумовых комбинационных компонент у РФ  $zz_B^{(4)}(n; \tau, 2\tau)$  равно  $K_w = (2^4 - 1) = 15$ , против

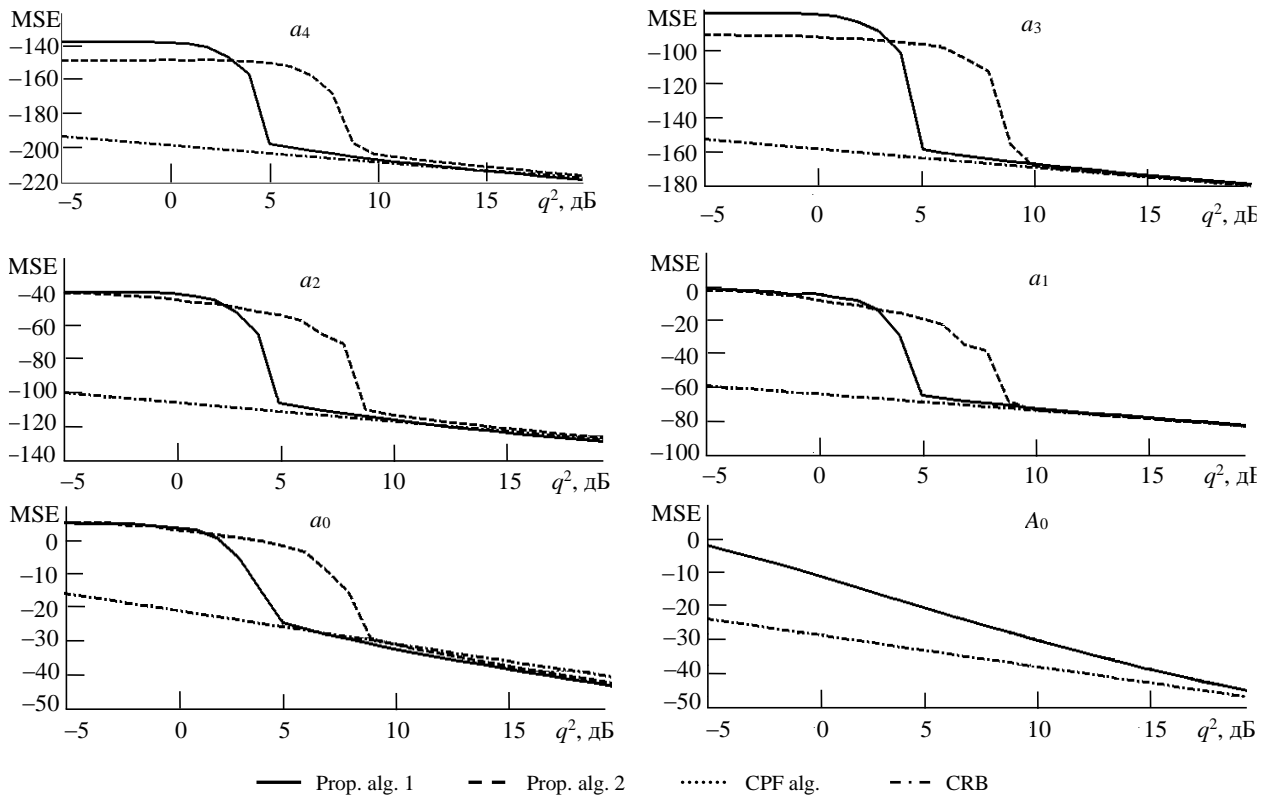


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка оценки ПКФ для сигнала с  $P = 4$   
 Fig. 2. MSE of the polynomial phase coefficient estimates for a signal with  $P = 4$

$K_w = (2^{22} - 1) = 4\,194\,303$  у РФ  $z z_A^{(4)}(n; 0, \tau)$ , алгоритм 2 не рассматривался. Алгоритм 1 показал очень хорошие результаты. Его пороговое ОСШ  $q^2 = 5$  дБ против  $q^2 = 9$  дБ у ФНВП-алгоритма. Среднеквадратическая ошибка алгоритма 1 близка к ГКР. Таким образом, предлагаемый алгоритм может быть использован для оценки ПКФ сигналов с полиномиальным законом фазовой модуляции.

**Заключение.** В статье предложен алгоритм оценки коэффициентов фазы сигнала с полиномиальным законом фазовой модуляции произвольного порядка. Введено понятие решающей функции, которая получается из исходного сигнала и рассчитывается таким образом, чтобы ее фаза содержала только моном первого порядка с коэффици-

циентом, равным старшему коэффициенту фазового полинома сигнала. Благодаря этому в предлагаемом алгоритме при поиске оценок используются алгоритмы быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье. По сравнению с известным алгоритмом, основанным на вычислении функций неопределенности высокого порядка – НАФ-алгоритмом, синтезированный алгоритм дает оценки лучшего качества.

Это объясняется тем, что количество комбинационных шумовых компонент, порождаемых в процессе вычисления решающих функций, в синтезированном алгоритме значительно меньше, чем у НАФ-алгоритма. Методом математического моделирования показано, что получаемые оценки полиномиальных коэффициентов являются асимптотически эффективными.

### Приложение. Границы Крамера–Рао для ПКФ

Вычислим ГКР для дисперсии ошибок ПКФ. Логарифм функции правдоподобия (ЛФП) выборки сигнала  $z(n), n \in [-(N-1)/2, (N-1)/2]$  в рассматриваемом случае равен:

$$L\left(A_0, a_p, p \in [0, P]; z(n), n \in \left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right]\right) = \\ = \text{const} - \frac{1}{P_w} \sum_n \left| z(n) - A_0 \exp\left[i \sum_{p=0}^P a_p n^p\right] \right|^2.$$

Дважды дифференцируя ЛФП по оцениваемым параметрам и усредняя по шумам, несложно получить информационную матрицу Фишера, которую удобно переписать в блочном виде:

$$F = 2Nq^2 \begin{pmatrix} 1/2A_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & S_E & 0 \\ 0 & 0 & S_O \end{pmatrix},$$

где

$$S_E = \begin{pmatrix} s_0 & s_2 & s_4 & \dots \\ s_2 & s_4 & s_6 & \dots \\ s_4 & s_6 & s_8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, S_O = \begin{pmatrix} s_2 & s_4 & s_6 & \dots \\ s_4 & s_6 & s_8 & \dots \\ s_6 & s_8 & s_{10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

и  $s_0 = 1, s_{2m} = 2N^{-1} \sum_{k=1}^{(N-1)/2} k^{2m}, m = 1, 2, \dots$

Матрица  $S_E$  соответствует четным ПКФ, матрица  $S_O$  – нечетным ПКФ. Для вычисления ГКР необходимо обратить матрицу  $F$ . Однако несмотря на блочный вид сделать это без упрощений затруднительно, поскольку значения элементов матриц  $S_E$  и  $S_O$  быстро растут с увеличением их индексов при большом размере выборки  $N$ , и эти матрицы становятся плохо обусловленными. В связи с этим сначала определим асимптотическое значение элементов  $s_{2m} (m = 1, 2, \dots)$  при больших  $N$ , а затем представим матрицы  $S_E$  и  $S_O$  в виде, удобном для обращения.

Асимптотическое значение элементов  $s_{2m} (m = 1, 2, \dots)$  при больших  $N$  можно вычислить, заменив сумму в уравнении для этих элементов на интеграл:

$$s_{2m} = \frac{2}{N} \int_0^{\frac{N-1}{2}} x^{2m} dx = \frac{2}{N} \frac{(N-1)^{2m+1}}{2^{2m+1}(2m+1)} \approx \\ \approx \left(\frac{N}{2}\right)^{2m} \frac{1}{2m+1}, m = 1, 2, \dots$$

Тогда матрицы  $S_E$  и  $S_O$  можно представить в виде матричных произведений:

$$S_E = D_E M_E D_E; S_O = D_O M_O D_O,$$

где  $D_E = \text{diag}\left[1, (N/2)^2, (N/2)^4, (N/2)^6, \dots\right]$  и

$D_O = \text{diag} \left[ (N/2)^1, (N/2)^3, (N/2)^5, \dots \right]$  – диагональные матрицы;

$$M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & \dots \\ 1/3 & 1/5 & 1/7 & \dots \\ 1/5 & 1/7 & 1/9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad M_O = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/7 & \dots \\ 1/5 & 1/7 & 1/9 & \dots \\ 1/7 & 1/9 & 1/11 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Полученные представления матриц  $S_E$  и  $S_O$  позволяют без труда и точно найти обратную матрицу:

$$F^{-1} = \frac{1}{2Nq^2} \begin{pmatrix} 2A_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & S_E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & S_O^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача о вычислении ГКР решена. Так в случае сигнала с квадратическим законом ЧМ, полагая  $P=3$ , получим:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= A_0^2 / (Nq^2); \\ \sigma_0^2 &\approx 1.125 / (Nq^2); \quad \sigma_1^2 \approx 37.5 / (N^3 q^2); \\ \sigma_2^2 &\approx 90 / (N^5 q^2); \quad \sigma_3^2 \approx 1400 / (N^7 q^2). \end{aligned}$$

Для ПФМ-сигнала с  $P=4$  соответствующие среднеквадратические ошибки равны:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= A_0^2 / (Nq^2), \quad \sigma_0^2 \approx 3.515625 / (Nq^2), \\ \sigma_1^2 &\approx 75 / (N^3 q^2), \quad \sigma_2^2 \approx 2205 / (N^5 q^2), \\ \sigma_3^2 &\approx 2800 / (N^7 q^2), \quad \sigma_4^2 \approx 44100 / (N^9 q^2). \end{aligned}$$

### Список литературы

1. Bricch R. F., Zoubir A. M. The use of the DPT in passive acoustic aircraft flight parameter estimation // Proc. IEEE Conf. Speech Image Technol. for Comput. Telecommun. Brisbane, Australia, 4 Dec. 1997. Vol. 2. P. 819–822. doi: 10.1109/tencon.1997.648549
2. Morelli M. Doppler-rate estimation for burst digital transmission // IEEE Trans. Commun. 2002. Vol. 50, № 5. P. 707–710. doi: 10.1109/tcomm.2002.1006551
3. Lu K., Liu X. Enhanced visibility of maneuvering targets for high-frequency over-the-horizon radar // IEEE Trans. Antennas Propag. Jan. 2005. Vol. 53, № 1. P. 404–411. doi: 10.1109/tap.2004.838780
4. High-resolution ISAR imaging of maneuvering targets by means of the range instantaneous Doppler technique: Modeling and performance analysis / F. Berizzi, E. D Mese., M. Diani, M. Martorella // IEEE Trans. Image Process. 2001. Vol. 10, № 12. P. 1880–1890. doi: 10.1109/83.974573
5. Wang Y., Jiang Y. Inverse synthetic aperture radar imaging of maneuvering target based on the product generalized cubic phase function // IEEE Geosci. Remote Sens. Lett. 2011. Vol. 8, № 5. P. 958–962. doi: 10.1109/lgrs.2011.2143387
6. ISAR imaging of targets with complex motion based on discrete chirp Fourier transform for cubic chirps / L. Wu, X. Wei, D. Yang, H. Wang, X. Li // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2012. Vol. 50, № 10. P. 4201–4212. doi: 10.1109/tgrs.2012.2189220
7. Diagnosis of induction motor faults in time-varying conditions using the polynomial-phase transform of the current / M. Pineda-Sanchez, M. Riera-Guasp, J. Roger-Folch, J. A. Antonino-Daviu, J. Perez-Cruz, R. Puche-Panadero // IEEE Trans. Ind. Electron. 2011. Vol. 58, № 4. P. 1428–1439. doi: 10.1109/tie.2010.2050755
8. Robust acoustic positioning for safety applications in underground mining / R. Pfeil, M. Pichler, S. Schuster, F. Hammer // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2015. Vol. 64, № 11. P. 2876–2888. doi: 10.1109/tim.2015.2433631
9. Abatzoglou T. J. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate // IEEE Trans. on Aerosp. and Electron. Syst. 1986. Vol. AES-22, iss. 6. P. 708–715. doi: 10.1109/taes.1986.310805
10. Djuric P. M., Kay S. M. Parameter estimation of chirp signals // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process. 1990. Vol. 38, iss. 12. P. 2118–2126. doi: 10.1109/29.61538
11. Kitchen J. A method for estimating the coefficients of a polynomial phase signal. Signal Process., 1994. Vol. 37, № 3. P. 463–470. doi: 10.1016/0165-1684(94)90012-4
12. Peleg S., Friedlander B. The discrete polynomial-phase transform // IEEE Trans. Signal Process., 1995. Vol. 43, № 8. P. 1901–1914. doi: 10.1109/78.403349
13. Djurovic I., Stankovic L. Quasi-maximum-likelihood estimator of polynomial phase signals // IET Signal Process. 2013. Vol. 8, № 4. P. 347–359. doi: 10.1049/iet-spr.2013.0104
14. Liu S., Ma Y., Shan T. Segmented discrete polynomial-phase transform with coprime sampling // The J. of Engineering. 2019. Vol. 2019, № 19. P. 5619–5621. doi: 10.1049/joe.2019.0312
15. A sparse decomposition-based algorithm for estimating the parameters of polynomial phase signals / G. Ou, P. Zhao, S. Liu, G. Liu // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 20432–20441. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2896629
16. Madsen N., Cao S. Finite-difference algorithm for polynomial phase signal parameter estimation // IEEE Trans. on Aerosp. and Electron. Syst. 2020. Syst. Vol. 56, № 1. P. 57–66. doi: 10.1109/taes.2019.2910981
17. Djurović I., Simeunović M., Wang P. Cubic phase function: a simple solution to polynomial phase signal analysis // J. Article, Signal Process. 2017. Vol. 135, № 6. P. 48–66. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.12.027
18. Peleg S., Porat B. Estimation and classification of signals with polynomial phase // IEEE Trans. Inform. Theory. Mar. 1991. Vol. 37, № 2. P. 422–430. doi: 10.1109/18.75269

19. O'Shea P. A new technique for instantaneous frequency rate estimation // IEEE Signal Process. Lett. 2002. Vol. 9, № 8. P. 251–252. doi: 10.1109/lsp.2002.803003

20. O'Shea P. A fast algorithm for estimating the parameters of a quadratic FM signal // IEEE Trans. Signal Process. 2004. Vol. 52, № 2. P. 385–393. doi:

10.1109/tsp.2003.821097

21. Porat B., Friedlander B. Asymptotic statistical analysis of the high order ambiguity function for parameter estimation of polynomial phase signals // IEEE Trans. on Information Theory. 1996. Vol. 42, № 3. P. 995–1001. doi: 10.1109/18.490563

## Информация об авторе

**Монаков Андрей Алексеевич** – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – цифровая обработка сигналов; радиолокация; исследование природных сред радиотехническими методами; управление воздушным движением.

Адрес: Институт радиотехники, электроники и связи, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, д. 67а, Санкт-Петербург, 190000, Россия

E-mail: a\_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

## References

1. Brcich R. F., Zoubir A. M. The use of the DPT in passive acoustic aircraft flight parameter estimation. In Proc. IEEE Conf. Speech Image Technol. for Comput. Telecommun. 1997, vol. 2, pp. 819–822. doi: 10.1109/tencon.1997.648549

2. Morelli M. Doppler-rate estimation for burst digital transmission. IEEE Trans. Commun. 2002, vol. 50, no. 5, pp. 707–710. doi: 10.1109/tcomm.2002.1006551

3. Lu K., Liu X. Enhanced visibility of maneuvering targets for high-frequency over-the-horizon radar. IEEE Trans. Antennas Propag. Jan. 2005, vol. 53, no. 1, pp. 404–411. doi: 10.1109/tap.2004.838780

4. Berizzi F., Mese E. D., Diani M., Martorella M. High-resolution ISAR imaging of maneuvering targets by means of the range instantaneous Doppler technique: Modeling and performance analysis. IEEE Trans. Image Process. 2001, vol. 10, no. 12, pp. 1880–1890. doi: 10.1109/83.974573

5. Wang Y., Jiang Y. Inverse synthetic aperture radar imaging of maneuvering target based on the product generalized cubic phase function. IEEE Geosci. Remote Sens. Lett. 2011, vol. 8, no. 5, pp. 958–962. doi: 10.1109/lgrs.2011.2143387

6. Wu L., Wei X., Yang D., Wang H., Li X. ISAR imaging of targets with complex motion based on discrete chirp Fourier transform for cubic chirps. IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2012, vol. 50, no. 10, pp. 4201–4212. doi: 10.1109/tgrs.2012.2189220

7. Pineda-Sanchez M., Riera-Guasp M., Roger-Folch J., Antonino-Daviu J. A., Perez-Cruz J., Puche-Panadero R. Diagnosis of induction motor faults in time-varying conditions using the polynomial-phase transform of the current. IEEE Trans. Ind. Electron. 2011, vol. 58, no. 4, pp. 1428–1439. doi: 10.1109/tie.2010.2050755

8. Pfeil R., Pichler M., Schuster S., Hammer F. Robust

acoustic positioning for safety applications in underground mining. IEEE Trans. Instrum. Meas. 2015, vol. 64, no. 11, pp. 2876–2888. doi: 10.1109/tim.2015.2433631

9. Abatzoglou T. J. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate. IEEE Trans. on Aerosp. and Electron. Syst. 1986, vol. AES-22, iss. 6, pp. 708–715. doi: 10.1109/taes.1986.310805

10. Djuric P. M., Kay S. M. Parameter estimation of chirp signals. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process. 1990, vol. 38, iss. 12, pp. 2118–2126. doi: 10.1109/29.61538

11. Kitchen J. A method for estimating the coefficients of a polynomial phase signal. Signal Process. 1994, vol. 37, no. 3, pp. 463–470. doi: 10.1016/0165-1684(94)90012-4

12. Peleg S., Friedlander B. The discrete polynomial-phase transform. IEEE Trans. Signal Process. 1995, vol. 43, no. 8, pp. 1901–1914. doi: 10.1109/78.403349

13. Djurović I., Stanković L. Quasi-maximum-likelihood estimator of polynomial phase signals. IET Signal Process. 2013, vol. 8, no. 4, pp. 347–359. doi: 10.1049/iet-spr.2013.0104

14. Liu S., Ma Y., Shan T. Segmented discrete polynomial-phase transform with coprime sampling. 2019, vol. 2019, no 19, p. 5619–5621. doi: 10.1049/joe.2019.0312

15. Ou G., Zhao P., Liu S., Liu G. A sparse decomposition-based algorithm for estimating the parameters of polynomial phase signals. IEEE Access. 2019, vol. 7, pp. 20432–20441. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2896629

16. Madsen N., Cao S. Finite-difference algorithm for polynomial phase signal parameter estimation. IEEE Trans. on Aerosp. and Electron. Syst. 2020, vol. 56, no. 1, pp. 57–66. doi: 10.1109/taes.2019.2910981

17. Djurović I., Simeunović M., Wang P. Cubic phase function: a simple solution to polynomial phase signal analysis. Signal Process. 2017, vol. 135, no. 6, pp. 48–66.

doi: 10.1016/j.sigpro.2016.12.027

18. Peleg S., Porat B. Estimation and classification of signals with polynomial phase. IEEE Trans. Inform. Theory. Mar. 1991, vol. 37, no. 2, pp. 422–430. doi: 10.1109/18.75269

19. O'Shea P. A new technique for instantaneous frequency rate estimation. IEEE Signal Process. Lett. Aug. 2002, vol. 9, no. 8, pp. 251–252. doi: 10.1109/lsp.2002.803003

20. O'Shea P. A fast algorithm for estimating the pa-

rameters of a quadratic FM signal. IEEE Trans. Signal Process. Feb. 2004, vol. 52, no. 2, pp. 385–393. doi: 10.1109/tsp.2003.821097

21. Porat B., Friedlander B. Asymptotic statistical analysis of the high order ambiguity function for parameter estimation of polynomial phase signals. IEEE Trans. on Information Theory. May 1996, vol. 42, no. 3, pp. 995–1001. doi: 10.1109/18.490563

### Information about the author

**Andrey A. Monakov** – Dr. Sci. (Eng.) (2000), Professor (2005) of the Department of radio equipment systems of the Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Honorable Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honorable Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: digital signal processing; radar theory; microwave remote sensing; air traffic control.

Address: Institute of Radio Engineering, Electronics and Communications, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67a Bolshaja Morskaja St., St Petersburg 190000, Russia

E-mail: a\_monakov@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4469-0501>

---