УДК 378.14 ♦ ВАК 13.00.02 ♦ РИНЦ 14.35.09
DOI: http://dx.doi.org/10.21686/2500-3925-2020-4-96-104

А.А. Солодов

Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина
(Технологии. Дизайн. Искусство). Москва, Россия

Математическая формализация и алгоритмизация основных модулей организационно-технических систем*

Целью исследования *является разработка на основе общей теории управления обобщенной структурной схемы организационно-технической систем, содержащей необходимое и достаточное количество модулей и формализация на этой основе основных задач управления, выступающих в роли целей поведения объекта управления.*
Основными модулями, непосредственно реализующими процесс управления, является модуль оценки состояния организационно-технических систем (ОТС) и модуль управления. Показано, что в традиционных ОТС, включающих лицо, принимающее решение, ключевым модулем является модуль оценки состояния ОТС. В связи с этим ключевым аспектом работы является изучение оптимальных алгоритмов оценки состояния процессов, протекающих в ОТС и разработка на этой основе принципов математической формализации и алгоритмизации модуля оценки состояния.
Методом исследования *является применение принципов теории статистических оценок случайных процессов, протекающих в ОТС на фоне помех и синтез на этой основе алгоритмов функционирования модуля оценки состояния. Показано, что характерной особенностью протекающих в ОТС случайных процессов является их существенно дискретный характер и пуассоновская статистика. Сформулировано математическое описание статистических характеристик точечных случайных процессов, пригодное для решения основных задач оценки процессов и управления в ОТС.*
Основными ***результатами*** *работы являются определение понятия пространства состояний ОТС, разработка обобщенной структурной схемы ОТС в пространстве состояний, включающей модули формирования переменной состояния, модуля оценки состояния и модуля управления. Такая математическая интерпретация структуры ОТС позволила формализовать основные задачи, решаемые типовыми ОТС и рассмотреть оптимальные алгоритмы решения таких задач.*
Допущением при рассмотрении задач синтеза оптимальных алгоритмов является оптимизации модуля оценки состояния ОТС и модуля управления по отдельности, при этом основное внимание уделено рассмотрению алгоритмов оптимальных оценок.
Формализация и алгоритмизация поведения ОТС предпринята, в основном, в терминах байесовского критерия оптимальных статистических оценок. Указаны различные методы преодоления априорной неопределенности, характерной для разработки реальных ОТС. Обсуждаются методы адаптации, включающие байесовскую адаптацию процедуры принятия решения в условиях априорной неопределенности.
С применением частного случая центральной предельной теоремы устанавливается асимптотическая статистическая связь между упомянутыми точечными процессами и традиционными гауссовскими процессами.
В качестве примера рассмотрена нетривиальная задача оптимального обнаружения пуассоновского сигнала на фоне пуассоновской помехи, рассчитаны и представлены графики потенциальной помехоустойчивости этого алгоритма. На ранее полученные результаты оценок пуассоновских процессов даны соответствующие ссылки.
Для автоматических ОТС указаны общепринятые критерии качеств управления такими системами.
Итогом рассмотрения является классификация методов формализации и алгоритмизации задач, описывающих поведение ОТС.

Ключевые слова: *организационно-техническая система, модуль систкмы, критерий оптимальности, целенаправленное поведение.*

Aleksander A. Solodov

Kosygin Russian State University, Moscow, Russia

Mathematical Formalization and Algorithmization of the Main Modules of Organizational and Technical Systems

The purpose of the research is to develop a generalized structural scheme of organizational and technical systems based on the general theory of management, which contains the necessary and sufficient number of modules and formalize on this basis the main management tasks that act as goals of the behavior of the management object.
The main modules that directly implement the management process are the status assessment module of organizational and technical systems and the management module. It is shown that in traditional organizational and technical systems, including the decision-maker, the key module is the state assessment module of organizational and technical systems. In this regard, the key aspect of the work is to study the optimal algorithms for evaluating the state of processes occurring in the organizational and technical systems and develop on this basis the principles of mathematical formalization and algorithmization of the status assessment module.
The research method is the application of the principles of the theory of statistical estimates of random processes occurring in the organizational and technical systems against the background of interference and the synthesis of algorithms for the functioning of the status assessment module on this basis. It is shown that a characteristic feature of random processes occurring in organizational and technical systems is their essentially discrete nature and Poisson statistics. A mathematical description of the statistical characteristics of point random processes is formulated, which is suitable for solving the main problems of process evaluation and management in organizational and technical systems.
The main results were the definition of state space of the organizational and technical systems, the development of a generalized structural scheme of the organizational and technical systems in state space that includes the modules forming the state variable of the module assessment and module management. This mathematical interpretation of the organizational and technical systems structure allowed us to formalize the main problems solved by typical organizational and technical systems and consider optimal algorithms for solving such problems.
The assumption when considering the problems of synthesis of optimal algorithms is to optimize the status assessment module of organizational and technical systems and the control module separately, while the main attention is paid to the consideration of optimal estimation algorithms.
The formalization and algorithmization of the organizational and technical systems behavior is undertaken mainly in terms of the Bayesian criterion of optimal statistical estimates. Various methods of overcoming a priori uncertainty typical for the development of real organizational and technical systems are indicated. Methods of adaptation are discussed, including Bayesian adaptation of the decision-making procedure under conditions of a priori uncertainty.
Using a special case of the Central limit theorem, an asymptotic statistical relationship between the mentioned point processes and traditional Gaussian processes is established.
As an example, a nontrivial problem of optimal detection of Poisson signal against a background of Poisson noise is considered; graphs of the potential noise immunity of this algorithm are calculated and presented. The corresponding references are given to the previously obtained results of estimates of Poisson processes.
For automatic organizational and technical systems, the generally accepted criteria for the quality of management of such systems are specified.
The result of the review is a classification of methods for formalization and algorithmization of problems describing the behavior of organizational and technical systems.

Keywords: *organizational and technical system, system module, optimality criterion, purposeful behavior.*

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-07-00918.

Введение

Интеллектуальные организационно-технические системы (ОТС) могут состоять из множества различных модулей, предназначенных для реализации тех или иных функций системы. В связи с этим актуальной является задача разработки наиболее общей модели ОТС, в которой бы фигурировали принципиально необходимые для любой интеллектуальной ОТС модули. Интеллектуализация ОТС предполагает использование в той или иной мере человекоподобных реакций и механизмов функционирования. Таким образом, целесообразно рассмотреть формальное определение когнитивной системы и применить его к формулировке основных задач, решаемых интеллектуальной ОТС.

Такой подход применен в настоящей работе. Анализ функционирования интеллектуальной ОТС позволил выделить принципиально необходимые для ее функционирования модули, которыми являются модуль оценки состояния системы и модуль управления. Разработка количественной теории возможна с применением математического описания процессов, протекающих в интеллектуальных ОТС и в отмеченных ключевых модулях. В связи с этим актуальной является задача разработки математических моделей таких процессов.

В работе рассматривается нетривиальная модель процессов в ОТС в виде точечного пуассоновского процесса и обсуждается возможность его приближения к обычным гауссовским процессам.

Методической основой формализации и алгоритмизации ОТС является допущение об оптимизации модуля оценки состояния системы и модуля управления по отдельности, поскольку оптимизация ОТС в целом представляется в настоящее время непреодолимо сложной задачей.

Для модуля оценки состояния системы формулируется традиционный байесовский критерий оптимального различения сигналов, оценки их параметров и фильтрации. Обсуждаются возможности применения методов преодоления априорной неопределенности при отсутствии некоторых статистических сведений о процессах. В качестве примера приводится задача различения пуассоновского сигнала на фоне пуассоновской помехи.

1. Организационно-технические системы в пространстве состояний

В работе [1] сформулировано формальное определение когнитивной системы в виде совокупности некоторых множеств, объединенных протекающими между ними процессами. Применительно к технической реализации ОТС выделим два основных множества, элементами которых являются процессы оценки состояния системы и управления системой. Применим упомянутое определение для формализации и алгоритмизации основных модулей организационно-технических систем. Соответствующая структурная схема ОТС представлена на рисунке 1.

Под пространством состояний интеллектуальной ОТС будем понимать совокупность переменных, полностью описывающих поведение ОТС.

Краткая характеристики представленных на рисунке модулей и процессов, протекающих в ОТС состоит в следующем.

Множество состояний ОТС Z с элементами $z(t)$ – это такое множество процессов, которое

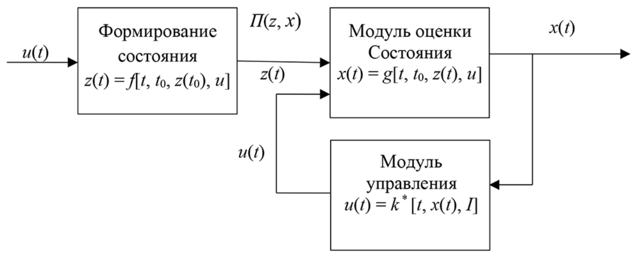

Рис. 1. Структурная схема ОТС

возникает в системе в результате отображения (восприятия, переработки) входных воздействий. Например, если входным воздействием является некий предмет, то элементами пространства состояний могут быть представления, соответствующие размерам и (или) весу предмета, о цвете, запахе, температуре и т.п. Состояние системы зависит, очевидно, от начального состояния системы $z(t_0)$, текущего управляющего воздействия $u(t)$ и от начального t_0 и текущего времени t. Состояние системы определяется переходной функцией f, которая является характеристикой, присущей данной системе. Другими словами, переходная функция не может быть изменена (скорректирована) разработчиком системы и является первоначально заданной. Вопрос определения вида этой функции является предметом изучения системы на этапе анализа будущей ОТС.

Множество оценок X с элементами $x(t)$ формируется одним из упомянутых ранее ключевых модулей ОТС-модулем оценки состояния. Математически оценка описывается переходной функцией оценок и состоит из характеристик, сформированных на основании уже имеющихся представлений в пространстве состояний. На модуль оценки состояния системы могут воздействовать помехи, искажающие реальное состояние системы $z(t)$, поэтому для формирования адекватного управляющего воздействия необходимо сформировать оценку реального состояния, оптимальную по некоторому критерию. Формальная функция потерь $\Pi(z, x)$ характеризует абстрактные затраты системы на формирование оценки, или, что то же самое, упомянутый критерий оценки с определенной точки зрения. Таким образом, функция g описывает оптимальную по выбранному критерию оценку $x(t)$ состояния системы $z(t)$.

Модуль управления синтезируется на основании понятия управления, критерия оптимальности управления и закона управления.

Управлением будем называть такое воздействие $u(t)$ на систему, входящее в множество допустимых входных воздействий U, которое переводит ее в целевое множество S_0 (т.е. множество состояний системы, в которое систему необходимо перевести в результате воздействия управления).

Вслед за классическими автоматическими системами управления [2] критерием оптимальности управления будем называть функцию

$$I\,(x,\ y,\ u,\ t) \qquad (1.1)$$

определяющую затраты (потери, цену и т.п.) на реализацию некоторого управления u. Функция I в общем случае зависит от указанных аргументов, но в практических задачах ключевой является зависимость от оценки состояния системы x.

Законом управления называется функция

$$u(t) = k[t,\ x(t)] \qquad (1.2)$$

В общем случае определение закона управления затруднено тем обстоятельством, что невозможно заранее гарантировать существование требуемого допустимого управления k.

Формулировка закона управления в пространстве состояний является методологическим обоснованием принципа обратной связи, который является основой теории автоматического управления [2]. Из определения оптимального управления следует, что синтез закона управления определяется не только видом ОТС, т.е. функциями f и Y, но и в большой степени – видом функционала качества управления.

Из определения закона управления (1.2) следует, что управление формируется на основании вектора оценок состояния системы $x(t)$. Это, в свою очередь, означает, что реализации любого управления в ОТС должен существовать модуль оценки вектора состояния. Если при этом оценка производится оптимальным по выбранному критерию способом, то g является оператором оптимальной оценки.

Функция оценок $x(t)$ используется ОТС и для общения с внешним миром через преобразование $y(t) = \gamma[t,\ x(t)]$, на схеме не указанное.

Принципиальной сложностью синтеза оптимальных алгоритмов управления является то, что для нелинейных систем оптимизация системы по частям не приводит к оптимизации в целом. Это означает, что оптимальная оценка процесса и оптимальная по управление на основе этой оценки не приводит к оптимальному управлению. Тем не менее, в сложных системах, к которым относятся ОТС, оптимизация по частям вполне может быть применена.

Существенным отличием ОТС от классических систем автоматического управления является то обстоятельство, что критерии качества управления (1.1) и закон управления (1.2) могут принимать специфические формы. Это обусловлено тем, что ОТС в практических случаях не являются автоматическими, т.е. управление формируется лицом, принимающим решения на основе оценок вектора состояния системы.

В сложных ОТС могут формулироваться цели поведения управляемого объекта, при этом управление может принимать вид решения о поведении системы. Таким образом, устанавливается связь между управлением в ОТС и теорией статистических решений, в рамках которой решение является оценкой вектора состояния ОТС.

В дальнейшем сосредоточим внимание на применении теории статистических решений и оценок применительно к указанному вектору состояния.

2. Модель наблюдаемого процесса в интеллектуальных организационно-технических системах

Наблюдаемым процессом будем называть процесс, доступный анализу, переработке, записи и т.п. В дальнейшем будем полагать, что наблюдаемый процесс является либо полезным случайным сигналом, либо смесью полезного сигнала и случайной помехи.

Вопросы описания процессов, протекающих в интеллектуальных организационно-технических системах, рассматривались в [3, 4, 5]. Ключевым является предположение о том, что на входе системы действует случайный процесс появления событий, который моделируется случайным точечным процессом. Далее могут быть рассмотрены разные гипотезы о статистических свойствах точечного процесса. Обозначим непрерывную случайную величину произвольного межточечного интервала через T и рассмотрим плотность вероятности экспоненциального распределения

$$P_T(T) = \lambda e^{-\lambda T}, \qquad (2.1)$$

где λ – положительная величина, называемая интенсивностью появления точек.

Экспоненциальное распределение (2.1) широко применяется в науке и технике и описывает, в частности, процессы переработки информации, т.е. интеллектуальную деятельность, например, длительность телефонного разговора или сеанса в сети Интернет. С другой стороны, это распределение применяется для описания случайного времени на осуществление некоторые работы – обслуживание посетителей в магазине, прием самолетов в аэропорте и т.п. Таким образом, экспоненциальное распределение времени, по-видимому, учитывает характерные особенности интеллектуальной и физической работы.

Можно сделать другое предположение о том, что за малый промежуток времени Δt вероятность того, что точка появится пропорциональна некоторой константе с точностью до бесконечно малой по отношению к Δt и что вероятность появления за это время двух и более точек стремится к нулю:

$$P(N(t,\ s) = 1) = \lambda\Delta t + O(\Delta t),$$
$$P(N(t,\ s) > 1) = O(\Delta t) \qquad (2.2)$$

Соотношение (2.2) часто называют предположением редких событий, имея в виду, что появление больше одной точки на интервале Δt стремится к нулю.

Если дополнительно потребовать, чтобы точки появлялись независимо друг от друга, то распределение произвольного числа точек на интервале Т является пуассоновским при обоих предположениях (2.1) и (2.2). Рассмотрим произвольный интервал времени $[s,\ t)$, такой, что $t - s = T$ и предположим, что число точек, появившихся к моментам времени t и s равно соответственно $N(t)$ и $N(s)$. Обозначим через $N(t,\ s) = N(t) - N(s)$ число точек, появившихся на этом интервале, а через $P(N(t,\ s) = n)$ вероятность того, что это число точек окажется равным n.

$$P\left(N\left(t,s\right)=n\right)=\frac{1}{n!}\left(\lambda T\right)^{n}e^{-\lambda T}, \qquad (2.3)$$

Таким образом, будем теперь полагать, что точечный процесс является пуассоновским случайным точечным процессом или просто пуассоновским точечным процессом, в котором времена появления точек $W_1,\ W_2,\ ...,\ Wi$ и их число $N(t)$ к моменту времени t являются случайными величинами. Если теперь в (2.3) λ является функцией времени, то она называется функцией интенсивности появления точек, а процесс становится неоднородным пуассоновским процессом с распределением

$$P\left[N(t,s)=n\right]=\frac{1}{n!}\left[\int_t^s\lambda(\tau)d\tau\right]^n\exp(-\int_t^s\lambda(\tau)d\tau), \qquad (2.4)$$

Прямыми вычислениями легко показать, что математическое ожидание $m(t,\ s)$ случайной величины $N(t,\ s)$ равно ее дисперсии $D(t,\ s)$ и выражается соотношением

$$m\left(t,s\right)=D\left(t,s\right)=\int_t^s\lambda(\tau)d\tau \qquad (2.5)$$

Обозначим теперь через $\omega = \{W_1,\ W_2,\ ...,\ W_n,\ N(t) = n\}$ совокупность всех данных, которые могут содержаться в реализации пуассоновского процесса на интервале времени $[t_0,\ t)$, т.е. времена появления первых n точек и факт того, что число точек к моменту времени равно n. Сформируем вероятностную характеристику $p(\omega)$ этой совокупности следующим образом:

$$p(\omega) = P(N(t) = n/W_1,$$
$$W_2,\ ...,\ Wn)p(W_1,\ W_2,\ ...,\ Wn), \qquad (2.6)$$

т.е. произведение вероятности того, что число точек равно n при условии, что точки появились во времена $W_1,\ W_2,\ ...,\ Wn$ на совместную плотность вероятности этих времен появления. По математическому смыслу это произведение вероятности на плотность вероятности и называется плотностью вероятности реализации точечного процесса или функцией правдоподобия.

Можно показать [6], что для функции интенсивности $\lambda(t)$ плотность вероятности реализации (2.6) принимает вид

$$p\left(\omega\right)=W\left(x\left|s_j\right.\right)=\exp\left\{-\int_t^s\lambda\left(\tau\right)d\tau+\sum_{i=1}^{N(t)}\ln\left[\lambda\left(W_i\right)\right]\right\} \qquad (2.7)$$

Таким образом, функция правдоподобия (2.7) является искомой ключевой характеристикой для применения целого ряда статистических критериев.

В технической литературе широко распространенной является модель наблюдаемого процесса в виде непрерывного гауссовского случайного процесса. Мостом, связывающим пуассоновский процесс с гауссовским процессом, является частный случай центральной предельной теоремы, в соответствии с которым частный пуассоновский процесс переходит в определенном смысле в гауссовский. Более точно это означает следующее. Сформируем центрированную и нормированную случайную величину

$$L(t,s)=\frac{D(t,s)-m(t,s)}{\sqrt{D(t,s)}} \tag{2.8}$$

Тогда если дисперсия пуассоновской переменной $D(t, s)$ стремится к бесконечности при t стремящемся к бесконечности, то случайная величина L стремится по вероятности к гауссовской случайной величине с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией [6]. Стремление дисперсии пуассоновской переменной к бесконечности и означает, что в пуассоновском процессе точки появляются не только чаще, но и сам процесс стремится к непрерывному гауссовскому.

Указанное обстоятельство имеет большое теоретическое и практическое значение для разработки моделей процессов в ОТС. В частности, открывается возможность применения обширных результатов классической теории автоматического управления и оценивания протекающих в них процессов. Обзоры основных результатов этой теории содержатся, например, в руководствах [7, 8, 9].

3. Методы формализации и алгоритмизации основных задач оптимального оценивания процессов

В соответствии с общей концепцией управления одним из ключевых модулей ОТС является модуль оценки состояния. Такая оценка, как уже указывалось, производится на основании обработки наблюдаемого процесса и применяется для выработки управляющего воздействия. Основными задачами оптимального оценивания процессов являются следующие.

Обнаружение сигнала

В классической теории статистического оценивания обнаружение полезного сигнала осуществляется на фоне случайных помех, искажающих наблюдаемый процесс. Таким образом, на входе модуля оценки может быть либо сигнал на фоне помехи, либо только сигнал.

На основании анализа наблюдаемого процесса модуль оценки принимает в соответствии с некоторым правилом (критерием) решение о наличии на ее входе либо только сигнала, либо сигнала и помехи.

Поскольку процессы на входе модуля оценки состояния являются случайными, то для разработки содержательной теории принятия решений ключевая роль принадлежит той информации об этих процессах, которая имеется в распоряжении разработчика.

В статистической теории принятия решений критерием оптимального различения, использующим максимальную априорную информацию, является байесовский критерий, оперирующий понятием среднего риска:

$$R=\sum_{j=0}^{m}p_j r_j=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}p_j C_{jk}\int_{Xk}W\left(x\middle|s_j\right)dx, \tag{3.1}$$

где C_{jk} – матрица потерь, т.е. те ресурсы любого вида, которые затрачивает система при принятии решения в пользу гипотезы j при реализации на самом деле гипотезы k, p_j – априорная вероятность появления сигнала s_j, $j = 0, ..., m$, $W(x|s_j)$ – условная плотность вероятности (функция правдоподобия) реализации наблюдаемого процесса X в предположении, что присутствует сигнал s_j, $X_к$ – область интегрирования наблюдаемого процесса, связанная с сигналом номер к.

В соответствии с байесовским критерием принимается решение в пользу того сигнала, который минимизирует величину среднего риска (3.1).

Таким образом, для применения байесовского критерия необходимо иметь большое число априорных сведений: матрицу потерь, априорные вероятности появления сигналов.

На практике часто такая ситуация является маловероятной и поэтому приходится модифицировать постановку задачи в зависимости от имеющейся априорной информации. В целом такие модификации называют методами преодоления априорной неопределенности. Краткое их содержание состоит в следующем.

Когда априорные вероятности неизвестны, то часто применяют минимаксный критерий, в соответствии с которым минимизируется байесовский риск (3.1) для наименее благоприятного (заранее неизвестного) априорного распределения вероятностей.

Когда неизвестна матрица потер, используют критерий максимума апостериорной вероятности, при котором принимается решение в пользу того сигнала, который максимизирует апостериорную вероятность сигнала, вычисленную на основании принятого наблюдаемого процесса X:

$$P\left(s_j\middle|x\right)=\frac{p_j W\left(x\mid s_j\right)}{\sum_{k=0}^{m}p_j W\left(x\mid s_{:}\right)} \tag{3.2}$$

Если неизвестны и априорные вероятности и матрица потерь, то применяют критерий максимального правдоподобия, основанный на решении в пользу сигнала s_j, отвечающего наибольшей из функций правдоподобия $W(x|s_j)$.

В задачах простого обнаружения, когда необходимо ответить на вопрос имеется ли только шум или сигнал с шумом, часто применяют небайесовский критерий Неймана-Пирсона. При этом фиксируется вероятность ложной тревоги

$$P_{\text{лт}}=\int_{X1}W\left(x\mid H_0\right)dx \tag{3.3}$$

и минимизируется вероятность пропуска цели

$$P_{\text{по}}=\int_{X1}W\left(x\mid H_0\right)dx \tag{3.4}$$

В формулах (3.3) и (3.4) для указания на отсутствие сигнала применено обычное обозначение H_0 и на наличие сигнала H_1. Отметим, что для применения всех перечисленных статистических критериев необходимо знание функции правдоподобия $W(x|s_j)$, а также решение вариационных задач поиска соответствующих экстремумов. Таким образом, ключевая роль в возможности применения статистических критериев помехоустойчивости принадлежит функции правдоподобия $W(x|s_j)$.

Другим методом преодоления априорной неопределенности является применение алгоритмов адаптации байесовского подхода с помощью уже имеющихся априорных сведений. Пример применения такого похода содержится в работах [10, 11].

Как неоднократно подчеркивалось, функция правдоподобия зависит от модели наблюдаемого процесса, который в организационно-технических системах имеет существенные особенности, делающие решение задач различения сигналов нетривиальными.

Применим полученные результаты к простейшей задаче двоичного обнаружения сигнала на фоне помехи на интервале времени $[0, T)$ для точечной модели наблюдаемого процесса.

Это означает, что в формуле (3.1) число сигналов $m = 2$. По поводу природы сигналов и помех сделаем следующие предположения. Поскольку наблюдаемым процессом являются точки на временной оси, характеризующие события, то естественно и наличие и сигнала и помехи характеризовать соответствующими функциями интенсивностей. Таким образом, помеха описывается функцией $s_0 = \lambda п(t)$, а полезный сигнал на фоне помехи функцией интенсивности $s_1 = \lambda c(t) + \lambda п(t)$. В этих условиях из (3.1) легко усмотреть, что средний риск минимизируется на основании теста отношения правдоподобия, т.е. принимается решение в пользу гипотезы о наличии только помехи, если

$$p_1 W(x \mid \lambda_1)/\ p_0 W(x \mid \lambda_0) < \\ < (C_{10} - C_{00})/(C_{01} - C_{11}) \tag{3.5}$$

и принимается решение в пользу наличия и сигнала и помехи в обратном случае.

Если все элементы матрицы потерь равны, то решение принимается для наиболее вероятной гипотезы, причем при этом минимизируется полная вероятность ошибочного решения.

Для функции правдоподобия вида (2.7) тест отношения правдоподобия (3.5) после логарифмирования принимает вид

$$-\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]dt+\sum_{i=1}^{N(T)}\ln\left[s_1(W_i)/s_0(W_i)\right]< \\ <\ln\left[p_0\left(C_{10}-C_{00}\right)/p_1\left(C_{01}-C_{11}\right)\right] \tag{3.6}$$

В связи с изложенным тест (3.6) гарантирует минимизацию среднего риска (3.1) в рассмотренной ситуации.

Дальнейшее упрощение можно получить, если предположить, что функции интенсивностей $\lambda c(t)$ и $\lambda п(t)$ являются константами, т.е. не зависят от времени. Тогда интеграл и сумма в (3.6) легко вычисляются и тест отношения правдоподобия принимает вид

$$N(T) < [\lambda c T + \ln[p_0(C_{10} - C_{00}) - \\ - \ln[p_1(C_{01} - C_{11})]] / [\ln(\lambda c + \lambda п) - \ln(\lambda п)]. \tag{3.7}$$

Если $C_{10} = C_{00}$ и $C_{01} = C_{11}$, то (3.7) принимает вид

$$N(T) < \lambda c T / \ln(1 + \alpha) = \mu, \tag{3.8}$$

где $\alpha = \lambda c / \lambda п$ – отношение сигнал/помеха, μ – порог, с которым сравнивается число событий в тесте.

Таким образом, случайное число точек $N(t)$, зафиксированное на интервале наблюдения, является достаточной статистикой для вынесения оптимального решения по критерию минимума среднего риска, если используется критерий (3.7) или минимума полной вероятности ошибки для критерия (3.8).

Из соотношений (3.7) и (3.8) следует, что порог μ в их правых частях зависит не только от отношения сигнал, помеха, но и от произведения $\lambda c T$, т.е. среднего числа точек на сигнальном интервале, что является характерной особенностью рассматриваемых наблюдаемых процессов.

Изучим качество работы обнаружителя сигналов, т.е. его помехоустойчивость. Рассмотрим для простоты тест двоичного обнаружения сигнала вида (3.4). Очевидно, что в процессе обнаружения сигнала на фоне помехи могут возникать ошибки двух родов. Ошибка первого рода возникает, если при наличии на интервале обнаружения $[0, T)$ только помехи, принимается решение в пользу наличия сигнала и помехи. С учетом распределения (2.3) для постоянных функций интенсивностей вероятность такого события, очевидно, равна

$$P_1 = P\left[N(T) \geq \mu \middle| H_0\right] = 1 - \sum_{k=0}^{[\mu]} \frac{(\lambda п T)^k}{K!} \exp(-\lambda_п T), \quad (3.9)$$

где через [μ] обозначено наибольшее целое число, меньшее μ.

Ошибка второго рода возникает, если при наличии на интервале обнаружения [0, T) сигнала и помехи, принимается решение в пользу наличия только помехи. Вероятность такой ошибки равна

$$P_2 = P\left[N(T) \leq \mu \middle| H_1\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{[\mu]} \frac{\left[(\lambda п + \lambda с)T\right]^k}{K!} \exp\left[-(\lambda_п + \lambda_с)T\right]. \quad (3.10)$$

Тест (3.4) минимизирует общую вероятность ошибок $P = P_1 + P_2$. На рис. 2 представлено поведение общей вероятности ошибки в зависимости от интенсивности сигнала при фиксированной интенсивности помехи и различных временах длительности наблюдаемого процесса.

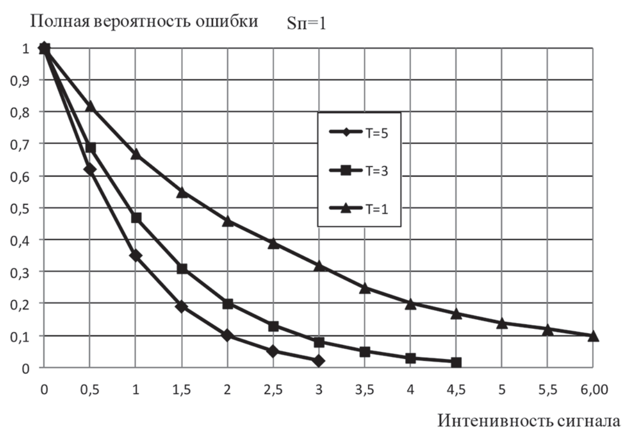

Рис. 2. Полная вероятность ошибки обнаружения точечного сигнала

Еще раз следует подчеркнуть, что представленные формулами (3.9) и (3.10) вероятности, а вслед за ними и графики полной вероятности являются минимально возможными для сформулированного критерия. Таким образом, они определяют потенциальную помехоустойчивость системы, которая не может быть улучшена.

Отметим, что в общей системе автоматического управления решение о наличии или отсутствии сигнала может быть использовано для двоичного управления, например, продолжить движение при отсутствии сигнала (препятствия) или остановиться при наличии.

Оценивание параметров сигнала

Задача состоит в разработке такого алгоритма обработки наблюдаемого процесса, который представляет комбинацию сигнала и помехи, который формирует оценку неизвестного параметра полезного сигнала [12, 13, 14].

При наличии полной априорной информации для формализации задачи может быть использован байесовский критерий типа (3.1) с очевидными модификациями. Так, поскольку теперь ставится задача отыскания оптимальной оценки s^* непрерывного параметра s, а не дискретных сигналов, то априорные вероятности p_j в (3.1) заменяются на плотность вероятностей параметра $p(s)$, матрица потерь C_{jk} заменяется на непрерывную функцию потерь $\Pi(s^*, s)$, функция правдоподобия $W(x|s)$ представляет теперь условную плотность вероятности реализации наблюдаемого процесса X в предположении, что присутствует параметр s. Суммирование заменяется интегрированием и средний риск принимает вид

$$R = \iint_{x,s} p(s)\Pi(s^*, s)W(x|s)dxds \qquad (3.11)$$

Поскольку между соотношениями (3.1) и (3.11) имеется полная аналогия, то все методы преодоления априорной неопределенности, рассмотренные для случая обнаружения сигнала применимы и в данной задаче.

Примеры отыскания оптимальных оценок максимального правдоподобия неизвестных параметров точечного наблюдаемого процесса в ОТС самообразования приведены в работе [2].

Фильтрация сигналов

Фильтрацией называет оценку непрерывного параметра, зависящего от времени [13, 14]. Формально соотношение (3.11) применимо и к этому случаю, если интегралы рассматривать в символическом смысле. Тем не менее, методы алгоритмизации задачи оценки параметров применимы и к задаче оптимальной фильтрации. Широко распространенной функцией потерь в байесовской задаче фильтрации является квадратическая функция. Легко показать, что в этом случае алгоритм оптимальной фильтрации принимает вид оценки по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Примеры алгоритмизации задачи оптимальной линейной фильтрации для случая точечных пуассоновских наблюдаемых процессов приведены в работе [2].

Формирование целей поведения в автоматических организационно-технических системах

Выше упоминалось о том, что типичные ОТС не являются автоматическими, поскольку предполагают наличие лица, принимающего решение. Тем не менее, для полноты рассмотрим гипотетическую автоматическую ОТС, в которой алгоритмизируются все процессы управления в том смысле, что в процессе ее функционирования не предполагается участие лиц, принимающих решение.

Для такой системы полностью применима структурная схема на рис. 1 и соответствующая модель. В качестве критерия I (1.1) оптимальности управления в теории автоматического управления применяются многие конкретные виды критериев [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Наиболее общий критерий, отражающий практические задачи процессов управления, формулируется как интегральный критерий Больца

$$I = V\left[x(T)\right] + \int_{t_0}^{T} G\left[x(s), u(s), s\right] ds.$$

Функционал I называется функционалом Больца, а соответствующая задача оптимизации – задачей Больца. В нем скалярная функция V аргумента $x(T)$ определяет качество процесса управления в конечной точке. Эта часть функционала называется терминальной.

Скалярная функция G векторных x, u и времени характеризует качество (потери) управления на всем этапе управления.

Если в функционале I положить $V = 0$, то получим задачу Лагранжа, если $G = 0$, то получим задачу Майера.

Отметим, что указанные критерии применяются для детерминированных систем автоматического управления, т.е. таких, в которых отсутствуют случайные процессы. Методы оптимизации систем автоматического управления при упомянутых функционалах хорошо разработаны. Основными из них являются метод вариационного отыскания экстремума функционала Эйлера-Лагранжа, метод Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана. Применение этих методов является предметом обширной теории автоматических систем управления.

Отметим, что для стохастических систем автоматического управления могут быть сформулированы аналогичные статистические критерии, однако отыскание оптимального управления в таких системах является весьма сложной математической задачей. Для точечных процессов, протекающих в системах, результаты практически отсутствуют.

Заключение

Разработанная модель организационно-технической системы в пространстве состояний стала методической основой формирования целей поведения управляемого объекта. Математическое содержание таких целей формализуется формулировкой соответствующих критериев оптимальности.

В работе рассмотрены параметрические критерии оценки процессов, протекающих в ОТС, являющиеся фундаментом принятия управленческих решений. Такие критерии предполагают знание с точностью до некоторых параметров априорных распределений сигналов и помех, протекающих в ОТС, Основное внимание уделено изучению таких наблюдаемых процессов, которые в максимальной степени адекватно описывают функционирование реальных ОТС, т.е. точечных случайных процессов.

Таблица 1

Формализация и алгоритмизация основных задач ОТС

Формальная задача модуля ОТС	Априорная информация	Критерий (алгоритм)
Различение сигналов, оценка параметров сигналов	Полная	Байесовский
	Неизвестны априорные вероятности появления сигналов	Минимаксный Адаптивный байесовский
	Неизвестна матрица потерь	Максимум апостериорной вероятности
	Неизвестна матрица потерь и априорные вероятности появления сигналов	Максимального правдоподобия
Непрерывная фильтрация сигналов	Полная	Байесовский (минимум среднеквадратической ошибки)
Общая задача управления	Детерминированная постановка	Интегральные критерии Больца, Лагранжа, Майера.

Дальнейшим развитием теории формализации поведения управляемого объекта в ОТС может стать малоизученный вопрос применения непараметрических критериев оптимальной оценки характеристик точечных процессов, а также непосредственное отыскание оптимальных управлений в автоматических организационно-технических системах управления.

Литература

1. Солодов А.А., Трембач В.М. Разработка и использование модели когнитивной системы для решения задач целенаправленного поведения // Статистика и Экономика. 2019. Т. 16. № 6. С. 77–86.
2. Калман Р., Фалб П, Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 399 с.
3. Солодов А.А Анализ случайных факторов процесса самообразования // Открытое образование. 2016. Т. 20. № 4. С. 29–38.
4. Солодов А.А., Солодова Е.А. Анализ динамических характеристик случайных воздействий в когнитивных системах // Открытое образование. 2017. № 1. С. 4–13.
5. Donald L. Snyder, Michael I. Miller. Random Point Processes in Time and Space. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1991. 488 с.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 3. М.: Советское радио, 1976. 288 с.
7. Леман Э. Проверка статистических гипотез. Пер. с англ. / под ред. Ю.В. Проохорова. М.: Наука, 1964.
8. Миддлтон Д. Очерки теории связи. Пер. с англ. / под ред. Б.Р. Левина. М.: Советское радио, 1965.
9. Тихонов В.И.,Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Советское радио, 1975. 704 с.
10. Стратонович Р.Л. Принципы адаптивного приема. М.: Советское радио, 1973. 144 с.

11. Солодов А.А. Байесовская адаптация в пуассоновских когнитивных системах // Открытое образование. 2019. Т. 23. № 4. С. 23–31.

12. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1948.

13. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966.

14. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.

15. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

16. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж.Лейтмана. М.: Наука, 1965. 540 с.

17. Дж. Лейтман. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1965. 192 с.

18. Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. Под ред. В.М. Пономарева. М.: Машиностроение, 1970.307 с.

19. Теория автоматического управления. Часть 2. Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высшая школа, 1972. 432 с.

References

1. Solodov A.A., Trembach V.M. Development and use of a cognitive system model for solving the tasks of purposeful behavior. Statistika i Ekonomika = Statistics and Economics. 2019; 16; 6: 77-86. (In Russ.)

2. Kalman R., Falb P, Arbib M. Ocherki po matematicheskoy teorii sistem. Per. s angl. = Essays on the mathematical theory of systems. Tr. from English. Moscow: Mir; 1971. 399 p. (In Russ.)

3. Solodov A. Analysis of random factors of the process of self-education. Otkrytoye obrazovaniye = Open education. 2016; 20; 4: 29-38. (In Russ.)

4. Solodov A.A., Solodova Ye.A. Analysis of the dynamic characteristics of random influences in cognitive systems. Otkrytoye obrazovaniye = Open education. 2017; 1: 4-13. (In Russ.)

5. Donald L. Snyder, Michael I. Miller. Random Point Processes in Time and Space. Second Edition. New York: Springer-Verlag; 1991. 488 p.

6. Levin B.R. Teoreticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhniki. Kn. 3 = Theoretical foundations of statistical radio engineering. Book. 3. Moscow: Soviet radio; 1976. 288 p. (In Russ.)

7. Leman E. Proverka statisticheskikh gipotez. Per. s angl. / pod red. YU.V. Prookhorova = Testing statistical hypotheses. Tr. from English. / ed. Yu.V. Prookhorov. Moscow: Nauka; 1964. (In Russ.)

8. Middlton D. Ocherki teorii svyazi. Per. s angl. / pod red. B.R. Levina = Essays on Communication Theory. Tr. from English. / ed. B.R. Levin. Moscow: Soviet radio; 1965. (In Russ.)

9. Tikhonov V.I.,Kul'man N.K. Nelineynaya fil'tratsiya i kvazikogerentnyy priyem signalov = Nonlinear filtering and quasi-coherent signal reception. Moscow: Soviet radio; 1975. 704 p. (In Russ.)

10. Stratonovich R.L. Printsipy adaptivnogo priyema = The principles of adaptive reception. Moscow: Soviet radio; 1973. 144 p. (In Russ.)

11. Colodov A.A. Bayesian adaptation in Poisson cognitive systems. Otkrytoye obrazovaniye = Open Education. 2019; 23; 4: 23-31. (In Russ.)

12. Kramer G. Matematicheskiye metody statistiki. Per. s angl = Mathematical methods of statistics. Tr. from English. Moscow: IL; 1948. (In Russ.)

13. Tikhonov V.I. Statisticheskaya radiotekhnika = Statistical radio engineering. Moscow: Soviet radio; 1966. (In Russ.)

14. Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markovskiye protsessy = Markov processes. Moscow: Soviet radio; 1977. 488 p. (In Russ.)

15. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya. Pod red. A.A. Krasovskogo = Handbook on the theory of automatic control. Ed. A.A. Krasovsky. Moscow: Nauka; 1987. 712 p. (In Russ.)

16. Metody optimizatsii s prilozheniyami k mekhanike kosmicheskogo poleta. Pod red. Dzh. Leytmana = Optimization methods with applications to the mechanics of space flight. Ed. J. Leitman. Moscow: Nauka; 1965. 540 p. (In Russ.)

17. Dzh. Leytman. Vvedeniye v teoriyu optimal'nogo upravleniya = Introduction to the theory of optimal control. Moscow: Nauka; 1965. 192 p. (In Russ.)

18. Nelineynaya optimizatsiya sistem avtomaticheskogo upravleniya. Pod red. V.M. Ponomareva = Nonlinear optimization of automatic control systems. Ed. V.M. Ponomarev. Moscow: Mechanical Engineering; 1970. 307 p. (In Russ.)

19. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Chast' 2. Pod red. A.V. Netushila = Theory of automatic control. Part 2. Ed. A.V. Has not extinguished. Moscow: Higher school; 1972. 432 p. (In Russ.)

Сведения об авторе

Александр Александрович Солодов

д.т.н., профессор, профессор кафедры Прикладной математики и программирования Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), Москва, Россия

Эл. почта: aasol@rambler.ru

Information about the author

Aleksander A. Solodovnikov

Dr. Sci. (Engineering), Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Programming Kosygin Russian State University, Moscow, Russia.

E-mail: aasol@rambler.ru