

Las matemáticas en la investigación desarrollada desde la Escuela Politécnica de Cuenca.

Miguel Ángel López* y Raquel Martínez*

Resumen Con este capítulo se pretende hacer un recorrido por las líneas investigadoras que han llevado a cabo los profesores que actualmente desempeñan su labor docente e investigadora en el Departamento de Matemáticas de la Escuela Politécnica de Cuenca. La investigación ha ido cambiando en función de los profesores implicados en el departamento, por lo que entendemos que esta no sigue una única línea de trabajo pero creemos que es de calidad. Así pues, se expone brevemente la investigación realizada por los profesores Dr. Miguel Ángel López Guerrero y Dra. Raquel Martínez Lucas donde se comentan las líneas de investigación desarrolladas en sus respectivas tesis doctorales, la colaboración en diferentes proyectos de investigación y las colaboraciones con otros profesores de la escuela. También se presentan algunos de los artículos más relevantes publicados por estos profesores.

*Departamento de Matemáticas. Escuela Politécnica de Cuenca, Campus Universitario s/n, 16071 Cuenca, Spain, Mangel.lopez@uclm.es y Raquel.martinez@uclm.es

Introducción

La investigación desarrollada en el Departamento de Matemáticas de la Escuela Politécnica de Cuenca no sigue una única línea de trabajo. Esto se debe principalmente a que desde el inicio de la escuela han pasado por el departamento ocho profesores. Algunos de ellos han aportado buenos resultados a la investigación desarrollada en la escuela con una cantidad de artículos bastante considerable, como la desarrollada por el profesor Dr. Juan Luis García Guirao, que actualmente desempeña su actividad docente e investigadora en la Universidad Politécnica de Cartagena. Otros profesores, dos de ellos doctores, han participado en el departamento como profesores asociados, por lo que esa situación provisional ha hecho que hayan realizado una muy buena labor docente pero, en cambio, no se hayan involucrado a fondo en la investigación. Como ellos ya no están en la escuela, se ha preferido en este artículo presentar solo lo que se ha investigado y lo que se ha aportado por el Departamento de Matemáticas a través de los profesores pertenecientes a este departamento y que actualmente imparten docencia e investigan en esta escuela; la del Dr. Miguel Ángel López Guerrero, profesor de la escuela desde 1995, y la de la Dra. Raquel Martínez Lucas, profesora de la escuela desde 2007.

La estructura de este capítulo es la siguiente: en primer lugar se exponen brevemente las líneas de investigación desarrolladas en las respectivas tesis doctorales realizadas por estos profesores. En segundo lugar, se presentan los trabajos de investigación en los que se ha colaborado con profesores de esta escuela pertenecientes a otros departamentos y de los que se han realizado dos tesis doctorales (una está en la fase previa a la lectura y defensa). En tercer lugar, se comenta brevemente la colaboración en diferentes proyectos de investigación nacionales y autonómicos y, finalmente y antes de la bibliografía, se presentan las referencias bibliográficas de algunos de los principales trabajos publicados resultado de la investigación desarrollada.

Queremos destacar que se ha publicado en 14 revistas distintas impactadas en JCR (Journal Citation Report). Muchas de ellas son de reconocido prestigio y están relacionadas con la ingeniería y la matemática aplicada como: Chaos, Solitons and Fractals; Nonlinear Dynamics (An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems) (JCR 2013: 2.42. Esta revista es la nº 15 de 126 en la categoría

Engineering, Mechanical); Journal of Computational and Applied Mathematics; MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry; Journal of Vibration and Chaos (JCR 2013: 4.355. Esta revista es la n° 3 de 126 en la categoría Engineering, Mechanical) o Journal of Mathematical Chemistry. Nótese que MATCH Commun. Math. Comput. Chem. ocupó el primer puesto del ranking en matemática interdisciplinar con un índice de impacto JCR 2010 de 3.291.

Umbral orden-caos y bifurcaciones en sistemas no autónomos bajo perturbaciones periódicas generalizadas

Desde el año 1995, prácticamente el inicio de la actual Escuela Politécnica de Cuenca, se ha trabajado e investigado en diversos proyectos de relevante importancia. Este es el inicio de ellos y fue plasmado en la tesis doctoral (López, 1998) realizada por el Dr. Miguel Ángel López Guerrero, cuyo título es el mismo que el de este epígrafe.

Con esta tesis se alcanzaron varios objetivos. En primer lugar se mostró una breve panorámica de los sistemas dinámicos continuos y discretos que constituyen en la actualidad un campo de investigación muy fecundo debido a sus profundas implicaciones heurísticas y filosóficas en numerosas parcelas del saber humano.

En segundo lugar, se mostró cómo la aplicación de débiles perturbaciones periódicas, mediante excitación paramétrica o forzamiento adicional, constituye un mecanismo eficaz para disminuir y suprimir el escape caótico en un sistema dado. En particular, tal procedimiento es aplicable a osciladores no lineales, amortiguados y excitados periódicamente, cuya separatriz no perturbada está formada por órbitas homoclinas y/o heteroclinas. Como ejemplos concretos para ilustrar el problema se eligieron el oscilador de Helmholtz y la ecuación de escape de Thompson. Suponiendo que el sistema se encuentra inicialmente en una situación de escape caótico, se estudia el efecto inhibitorio sobre el mismo que tiene la aplicación de una débil excitación paramétrica armónica en los términos cuadrático y lineal del oscilador, así como la aplicación de un forzamiento adicional de pequeña amplitud. Las predicciones analíticas obtenidas mediante el método de Melnikov establecen las condiciones para la inhibición del caos. El objetivo es determinar bajo qué ligaduras (regiones en el espacio de valores de los parámetros) se produce la disminución o eliminación del caos. Se comprobó, para casos como la

ecuación de escape de Thompson, que hay un intervalo prohibido de frecuencias para cada resonancia donde es imposible la supresión de escape caótico.

Recientemente se ha estudiado la estabilidad estructural de la dinámica de osciladores no lineales, amortiguados y excitados periódicamente, bajo cambios en la forma de onda de la modulación periódica. Ello implica considerar modelos más realistas para las perturbaciones periódicas que actúan sobre los mismos. Las funciones periódicas más simples que cumplen este requisito son las funciones elípticas de Jacobi. Así pues, en tercer lugar, otra línea de interés en esta investigación se centró en la estabilidad de la dinámica caótica bajo cambios en la forma de onda de la perturbación; es decir, se estudió la estabilidad estructural del sistema cuando sólo se modifique la forma de onda de la excitación tanto con la función elíptica sn como con la cosam .

Las funciones sn ó cosam , más la identidad, vistas como funciones reales de variable real, presentan además una notable particularidad y es que consideradas como familias uniparamétricas de transformaciones (considerando que el parámetro que varía es el módulo elíptico) presentan, para algunos valores de dicho módulo, bifurcaciones de tipo "flip" o de tipo de "duplicación de período" pero bajo diferentes condiciones de no degeneración. Por tanto, y en cuarto lugar, se mostró que en el caso de la función sn la condición de no degeneración se refiere a las derivadas parciales terceras, y en el caso de la función cosam a derivadas parciales quintas. Así pues, se presentaron ejemplos con este tipo de no degeneración, ya que hasta ese momento no se conocían funciones analíticas reales con este tipo de bifurcación.

Cuando se utilizan sistemas dinámicos discretos en la modelización de fenómenos de las ciencias experimentales se plantea un problema de cierto interés; si en lugar de la verdadera función f del modelo, usamos otra parecida aproximada f' , ¿qué ocurre con las órbitas del espacio de fases?, ¿se comportarán de una forma similar? Luego, en quinto lugar, se dio respuesta a este tipo de preguntas.

Sistemas transitivos y modelos localmente Cournot

A continuación se presenta un breve resumen de la tesis doctoral titulada "Sistemas transitivos y modelos localmente Cournot" (Martínez, 2010),

realizada por la Dra. Raquel Martínez Lucas y codirigida por el Dr. Miguel Ángel López.

Dado un sistema dinámico discreto tratamos de estudiar su dinámica, es decir, averiguar el comportamiento asintótico de las trayectorias de todos los puntos del espacio de fases. Este comportamiento depende fuertemente de la topología existente en el espacio de fases y de la morfología de la aplicación definida sobre él. Como consecuencia de esta dependencia, a este tipo de estudio se le conoce como análisis de la "dinámica topológica" del sistema.

El objetivo de este trabajo es doble y está estrechamente relacionado con la evolución histórica de la teoría de los sistemas dinámicos. Por un lado estudiamos problemas relacionados con una de las nociones dinámicas que está presente en muchas de las definiciones de la noción de caos, transitividad topológica, estableciendo las relaciones de implicación entre este concepto con las principales definiciones del concepto de caos y entropía topológica. Para el análisis de la estabilidad del concepto de transitividad nos centramos en sistemas dinámicos discretos inducidos por funciones transitivas de clase C^1 definidas en el intervalo $[0,1]$ y que sean topológicamente conjugadas a un polinomio algebraico. Mostramos que existen pequeñas perturbaciones del modelo original fijado que rompen la noción de transitividad. También somos capaces de construir otro sistema perteneciente a la misma clase que el sistema original tan cerca, en una norma adecuada, como queramos al sistema original.

Por otro lado estudiamos ciertas aplicaciones a modelos que proceden de la economía, son los llamados modelos de tipo Cournot, es decir, sistemas dinámicos discretos n -dimensionales que constituyen, por un lado la generalización del bien conocido modelo económico del duopolio de Cournot y por otro lado, conforman el entorno de modelización matemática para ciertos procesos económicos y biológicos. Se plantea un modelo n -dimensional que se encuentra a mitad de camino entre la competencia perfecta y el oligopolio y para el que existen rudimentos teóricos para poder estudiar su dinámica. Finalmente se estudia la dinámica de los modelos con competencia local citados anteriormente. Para dimensiones 3 y 4 y conjunto de vecinos de influencia de dimensión 1 se estudian los puntos de equilibrio y se da cierta información sobre las órbitas periódicas de periodo 2. Para el caso de dimensión 4 se realiza un estudio completo y pormenorizado de la dinámica del sistema.

La planificación de la implantación de la alta velocidad ferroviaria. Un estudio comparativo de la política de ordenación desde el análisis de las implicaciones territoriales

Este es el resultado de la colaboración entre profesores del Departamento de Matemáticas de la UCLM y profesores del Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación de la UCLM, que desarrollan su actividad docente e investigadora en la Escuela Politécnica de Cuenca. De esta colaboración se alcanza la tesis doctoral (Mota, 2013) cuyo título es el mismo que el de este epígrafe, realizada por la Dra. Carmen Mota Utanda y codirigida por el Dr. Miguel Ángel López. Aunque esta tesis tiene una gran componente urbanística, en este capítulo se menciona la parte directamente relacionada con las matemáticas, más concretamente, con la teoría de grafos.

La accesibilidad es un concepto empleado en diversos campos científicos, como la planificación del transporte, la planificación urbana y la geografía, ocupando un papel primordial en la configuración de políticas económicas y sociales. No obstante, se trata de un concepto de compleja definición en términos inequívocos y objetivamente cuantificables. La medida de la accesibilidad basada en la infraestructura desempeña un papel crucial en las políticas de transporte, de tal manera que la planificación de las políticas de transporte en muchos países es sometida a la aplicación matemática, como ha sido el caso de la planificación nacional del transporte del Reino Unido o el holandés.

El problema más interesante que hemos abordado ha sido el análisis del grado de accesibilidad de la estación de la alta velocidad ferroviaria en su contexto local, con el propósito de facilitar el establecimiento de un marco comparativo sobre las diferentes políticas de integración llevadas a cabo en ciudades de un rango similar. Se presenta un modelo basado en la teoría de grafos y en el estudio estático y dinámico de las redes aplicado a la red de autobuses de transporte público urbano.

Estos estudios estáticos y dinámicos que evalúan el grado de conexión de la estación respecto a una red secundaria de transporte, se han aplicado en cuatro ciudades de tamaño intermedio, dos alemanas, Ulm-Neu Ulm y Fulda, y dos españolas, Toledo y Lleida. Los resultados revelan diferencias de importante consideración, apuntando a la necesaria revisión de las políticas de integración del transporte en la localidad, sin cuya adecuación la irradiación de los efectos positivos de la misma decrece sustancialmente.

Análisis de las curvas de producción en la promoción pública de VPO en Castilla-La Mancha

Esto es otra investigación resultado de la colaboración entre profesores del Departamento de Matemáticas de la UCLM y profesores del Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación de la UCLM, que desarrollan su actividad docente e investigadora en la Escuela Politécnica de Cuenca. De esta colaboración se está finalizando la tesis doctoral, cuyo título es el mismo que el de este epígrafe, del doctorando D. Juan Pedro Ruiz Fernández y codirigida por el Dr. Miguel Ángel López.

El análisis de la distribución en el tiempo de los costos de construcción a través de datos históricos es un tema inédito en España, no así en la esfera internacional, donde existen investigaciones desde el último cuarto de siglo pasado.

El objetivo es dotar a promotores y constructores de una herramienta fiable para la previsión temprana de los flujos de caja originados en el proceso de materialización del proyecto de construcción. En nuestro caso analizamos los flujos de caja de 161 promociones públicas de VPO dentro del ámbito territorial de Castilla-La Mancha en base a las certificaciones mensuales abonadas por el promotor al constructor. El estudio se centra en dos tipologías muy concretas: edificios de viviendas en bloque y edificios de viviendas unifamiliares adosadas. Mantenemos que un análisis estadístico, desactivando buena parte de los factores que influyen sensiblemente en la producción, proporciona curvas de previsión fiables.

Por otro lado, hemos medido las diferencias de producción ocasionadas por los efectos estacionales en las obras de edificación estudiadas. Los resultados de flujos de caja que pudiéramos obtener gracias a las curvas de producción estándar atemporales serán mucho más precisos si se cuantifican los efectos producidos por los factores estacionales, obteniendo de esta forma pronósticos de flujos de caja mensuales concretos para fechas concretas de inicio de obra.

Participación en proyectos de investigación nacionales y autonómicos

A continuación se presentan algunos de los proyectos nacionales y autonómicos (financiados por la Junta de Comunidades de Castilla-La

Mancha) en los que los profesores actuales del Departamento de Matemáticas han participado como colaboradores o como investigador principal del proyecto. Como en los proyectos se pretenden alcanzar varios objetivos, aquí solo vamos a presentar un breve resumen en el que se describa la participación de estos profesores.

Proyecto de investigación nacional (1995-1996): Dinámica topológica en sistemas uni y bidimensionales

Se estudiaron una serie de problemas en sistemas dinámicos unidimensionales mediante el uso de métodos topológicos para el conocimiento de la dinámica. Se investigó cómo evitar el comportamiento caótico de ciertos osciladores no lineales no autónomos que de forma natural lo presentan. Esto se hizo a través de excitaciones paramétricas de tipo armónico de los términos lineal y cuadrático del oscilador. Se realizó un estudio desde el punto de vista analítico y numérico.

Proyecto de investigación nacional (1996-1999): Dinámica en sistemas bidimensionales

Se colaboró en el estudio de los sistemas dinámicos discretos bidimensionales que aparecen vía la aplicación de Poincaré asociada a sistemas autónomos tridimensionales de ecuaciones diferenciales ordinarias, sobre todo en aquellas zonas próximas a órbitas homoclínicas, donde resulta casi imposible entender cómo es la dinámica en el sistema. Se siguió con la investigación de evitar el comportamiento caótico de ciertos osciladores pero mediante forzamientos adicionales.

Proyecto de investigación nacional (1999-2002): Sistemas dinámicos bidimensionales: estructura periódica, caos y supresión del comportamiento caótico

Se investigó cómo evitar el comportamiento caótico de ciertos osciladores no lineales no autónomos que de forma natural lo presentan. Como ya se

había resuelto este problema a través de excitaciones paramétricas de tipo armónico de los términos lineal y cuadrático del oscilador, se generalizó utilizando las funciones elípticas de Jacobi como débiles perturbaciones ya que producían efectos más precisos sobre la inhibición del caos pero a costa de complicar enormemente la manipulación analítica del problema.

***Proyecto de investigación autonómico (2002-2004):
Dinámica de ecuaciones de onda no lineales y álgebra
numérica: teoría y aplicaciones en sistemas caóticos y
criptografía***

Se investigó sobre la supresión de caos en sistemas caóticos. Se trabajó sobre el diseño e implementación de criptosistemas seguros. También se investigó la posible utilización de sistemas dinámicos no lineales en ruptura de claves. Se trabajó en la relación entre la dinámica de ecuaciones no lineales y la criptografía.

***Proyecto de investigación nacional (2002-2005):
Complejidad asintótica en la dinámica: omega-límites,
caos y minimalidad***

Tomando como eje conductor el estudio de la estructura de los conjuntos omega-límite en sistemas dinámicos, se analizaron diversas cuestiones relacionadas con la complejidad asintótica en la dinámica, con especial énfasis en las diferentes nociones de caos y la universalidad. Se siguió con la investigación de la supresión del escape caótico al modificar la forma de onda de las excitaciones.

***Proyecto de investigación nacional (2005-2008): Aspectos
topológicos de la dinámica diferenciable***

Se ha investigado la estructura topológica de los conjuntos omega-límite de transformaciones bidimensionales en el plano intentando obtener una caracterización de los mismos. También se analizan otros conjuntos con

propiedades de retorno más débiles como los conjuntos de puntos no errantes.

***Proyecto de investigación autonómico (2006-2008):
Asintoticidad en sistemas dinámicos: conjuntos omega-
límite, orden-caos, universalidad y minimalidad***

Aunque se han analizado diversas cuestiones relacionadas con la complejidad asintótica de la dinámica de los sistemas dinámicos, se ha participado más directamente en la supresión del escape caótico (transición orden-caos) al modificar la forma de onda de las excitaciones. Se ha investigado la posible extensión de los resultados obtenidos para los osciladores de Helmholtz y Thompson a otros osciladores. Se ha investigado si es posible suprimir la condición de resonancia entre la frecuencia responsable de la supresión del escape caótico y la frecuencia del forzamiento que la origina.

***Proyecto de investigación nacional (2009-2011):
Ecuaciones en diferencias y diferenciales y series
temporales: aspectos puros y aplicados de la dinámica no
lineal***

Considerando la clase D formada por las funciones $f: I \rightarrow I$ de clase C^∞ , transitivas y topológicamente conjugadas a un polinomio, se ha probado la siguiente propiedad de estabilidad: la clase D no tiene puntos aislados y para cada f de D y cualquier ϵ mayor que 0, real y arbitrariamente pequeño, existe una función g de D compartiendo con f los mismos puntos fijos excepto uno y tal que la diferencia entre f y g en la norma 1 es igual a ϵ . Por el contrario, se ha estudiado también que para cada f de D existe una función de clase C^∞ ; topológicamente conjugada a un polinomio, no transitiva y en la norma 1 cerca de la función f . También se ha generalizado el teorema del muestreo del Shannon para una clase de señales que no son de banda limitada y que juega un papel central en la teoría de la señal.

**Proyecto de investigación autonómico (2009-2012):
Sistemas dinámicos discretos y continuos con aplicaciones**

Se ha investigado sobre la dinámica de modelos procedentes de la química y la economía. Se ha iniciado una línea de investigación sobre dinámica de sistemas hamiltonianos y sobre ciertos modelos mecánicos con formulación hamiltoniana. También se ha generalizado el teorema del muestreo del Shannon para una clase de señales que no son de banda limitada y que juega un papel central en la teoría de la señal.

Proyecto de investigación nacional (2012-2015): Sistemas dinámicos discretos diferenciables y dinámica hamiltoniana con énfasis en la estructura periódica

Se investiga en el análisis de la estructura periódica en sistemas dinámicos discretos diferenciables, es decir, obtención de información sobre los posibles conjuntos de periodos de las órbitas periódicas del sistema. Se usa la teoría del promedio para sistemas dinámicos para obtener información de sistemas hamiltonianos y de ecuaciones diferenciales con órbitas periódicas aisladas. También se colabora en las aplicaciones de los sistemas dinámicos diferenciables a la química, a la economía y a la ingeniería.

Algunas publicaciones relevantes

A continuación se presentan algunas de las publicaciones más relevantes en las que han participado los profesores pertenecientes al Departamento de Matemáticas y que actualmente imparten docencia e investigan en la Escuela Politécnica de Cuenca. Se han subrayado los profesores participantes en esos artículos. Se presentan por orden creciente de año de publicación y, excepto en tres artículos, los autores aparecen en orden alfabético.

Chacón, R., Balibrea, F. y López, M.A. (1996). Inhibition of chaotic escape from a potential well using small parametric modulations. *Journal of Mathematical Physics* 37(11), 5518-5523.

Chacón, R., Balibrea, F. y López, M.A. (1997). Role of parametric resonance in the inhibition of chaotic escape from a potential well. *Physics Letters A* 235, 153-158.

Balibrea, F., Chacón, R. y López, M.A. (1998). Inhibition of chaotic escape by an additional driven term. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 8(8), 1719-1723.

Balibrea, F., Chacón, R. y López, M.A. (2001). Bifurcations on elliptic functions. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 11(3), 793-800.

Chacón, R., Balibrea, F. y López, M.A. (2001). Role of nonlinear dissipation in the suppression of chaotic escape from a potential well. *Physics Letters A* 279, 38-46.

Balibrea, F., Chacón, R. y López, M.A. (2005). Reshaping-induced order-chaos routes in a damped driven Helmholtz oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals* 24, 459-470.

Balibrea, F., Guirao, J.L. y López, M.A. (2010). Disturbing smooth transitive interval maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 20(9), 2949-2953.

Antuña, A., Guirao, J.L. y López, M.A. (2011). An asymptotic sampling recomposition theorem for gaussian signals. *Mediterranean Journal of Mathematics* 8, 349-367.

Guirao, J.L., López, M.A., Llibre, J. y Martínez, R. (2012). A note on the equilibria of an economic model with local competition `à la Cournot'. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236, 3052-3057.

Guirao, J.L., López, M.A. y Vera, J.A. (2012). C1 non-integrability of a hydrogen atom in a circularly polarized microwave field. *Central European Journal of Physics* 10(4), 742-748.

López, M.A. y Martínez, R. (2013). A note on the generalized Rayleigh equation: limit cycles and stability. *Journal of Mathematical Chemistry* 51, 1164-1169.

De Bustos, M.T., López, M.A. y Martínez, R. (2013). On the Periodic Auto-Oscillations of an Electric Circuit with Periodic Imperfections on Its Variables. *Applied Mathematics & Information Sciences* 7(6), 2105-2111.

De Bustos, M.T., López, M.A. y Martínez, R. (2014). On the periodic solutions of a linear chain of three identical atoms. *Nonlinear Dynamics* 76(2), 893-903.

Antuña, A., Guirao, J.L., y López, M.A. (2014). Pseudo-radioactive decomposition through an generalized Shannon's recomposition theorem. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 72(2), 403-410.

López, M.A., Martínez, R. y Mota C. (2014). Analysis of transport networks in the urban environment in order to plan the integration of

high-speed rail. *Applied Mathematics & Information Sciences*, Aceptado, 1-9.

De Bustos, M.T., López, M.A. y Martínez, R. (2014). On the periodic orbits of the perturbed Wilberforce pendulum. *Journal of Vibration and Control*, Aceptado, 1-11.

Antuña, A., Guirao, J.L., y López, M.A. (2015). Shannon Whittaker Kotel'nikov's theorem generalized. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 73(2), 385-396.

Bibliografía

López, M.A. (1998). Umbral orden-caos y bifurcaciones en sistemas no autónomos bajo perturbaciones periódicas generalizadas. *Tesis doctoral*, Universidad de Murcia.

Martínez, R. (2010). Sistemas transitivos y modelos localmente Cournot. *Tesis doctoral*. Universidad Politécnica de Cartagena.

Mota, C. (2013). La planificación de la implantación de la alta velocidad ferroviaria. Un estudio comparativo de la política de ordenación desde el análisis de las implicaciones territoriales. *Tesis doctoral*. Universidad de Castilla-La Mancha.

