

Juan Gabriel Belmonte Beitia

**ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO
LINEALES CON NO LINEALIDAD
ESPACIALMENTE INHOMOGÉNEA**

I.S.B.N. Ediciones de la UCLM
978-84-8427-678-4



Ediciones de la Universidad
de Castilla-La Mancha

Cuenca, 2009

UNIVERSIDAD DE CASTILLA - LA MANCHA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad espacialmente inhomogénea

Juan Gabriel Belmonte Beitia

Memoria presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas por la
Universidad de Castilla-La Mancha.

Dirigida por
Víctor Manuel Pérez García

Ciudad Real, 2008.

Agradecimientos

Hay muchas personas a las que quiero expresar mi agradecimiento por la ayuda que me han prestado en la gestación, desarrollo y finalización de esta tesis. En primer lugar, quiero dar las gracias a mi familia por su apoyo en todo momento, especialmente a mis padres, que siempre me han animado a continuar mi carrera académica. Sin ellos no estaría escribiendo estas líneas.

En segundo lugar, quiero dar las gracias a mi director de tesis, D. Victor Manuel Pérez García, por su ayuda, paciencia y dedicación. Su apoyo y consejo ha sido indispensable para llevar a cabo esta tesis. El ha puesto a mi disposición todos los recursos y ayudas que yo he necesitado. Gracias por darme la oportunidad de entrar en el fascinante mundo de la investigación.

También, quisiera expresar mi gratitud a todos los miembros del Departamento de Matemáticas de la E.T.S.I.I. de la Universidad de Castilla-La Mancha (Ciudad Real) por su ayuda, y en especial al profesor Vadym Vekslerchik por su inestimable colaboración en los trabajos que hemos realizado juntos. También quiero agradecer la ayuda que me brindaron los profesores Ernesto Aranda y Faustino Maestre, el primero con el entorno LaTeX, y el segundo en múltiples discusiones científicas.

Quiero agradecer al profesor Pedro Torres, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, la hospitalidad que me brindó en las diversas estancias que realicé en esa maravillosa ciudad, así como todas las interesantes y productivas discusiones matemáticas mantenidas, algunas de las cuales han sido plasmadas en diferentes trabajos, los cuales aparecen en esta tesis.

Agradezco al profesor Vladimir V. Konotop su inestimable ayuda y la cálida acogida que me dispensó en mi visita a Lisboa. Las discusiones científicas que hemos tenido han dado lugar a algunos de los trabajos que se encuentran en esta tesis.

Por último, quiero agradecer al profesor Eduardo Colorado su ayuda en la comprensión de algunos de los métodos matemáticos empleados en los trabajos que componen esta tesis, así como su paciencia por aclararme las numerosas dudas que me surgían con respecto a dichos métodos.

Esta tesis doctoral ha sido financiada por la beca predoctoral PAI-05-001 de la Consejería de Educación de la JCCM.

Índice general

1. La ecuación de Schrödinger no lineal	1
1.1. Introducción	1
1.2. Aplicaciones físicas de la NLSE I: Condensados de Bose-Einstein	3
1.3. Aplicaciones físicas de la NLSE II: Óptica no lineal	5
1.4. Solitones en una dimensión espacial	7
1.5. Estados estacionarios	8
1.6. Existencia y aproximación variacional	8
1.7. Estabilidad lineal de las soluciones	10
1.8. Formulación de Lagrange	11
1.9. Objetivos de la tesis y sumario	12
I Existencia y estabilidad de soluciones para la INLSE	15
2. Estabilidad de estados fundamentales para la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidades espacialmente inhomogéneas	17
2.1. Introducción	17
2.2. Estabilidad de soluciones estacionarias	18
2.3. No linealidades homogéneas: criterio de Vakhitov-Kolokolov	18
2.4. Estabilidad de las soluciones positivas en el caso inhomogéneo	19
2.5. Ejemplo 1: No linealidades localizadas exponencialmente	20
2.6. Ejemplo 2: El criterio V-K no garantiza la estabilidad	21
3. Existencia de solitones oscuros para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica con no linealidad periódica	23
3.1. Introducción	23
3.2. Existencia de soluciones periódicas	23
3.3. Existencia de solitones oscuros	25
3.4. Un ejemplo de solitón oscuro	26
4. Existencia de solitones brillantes para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbico-quíntica con no linealidad inhomogénea	29
4.1. Introducción	29
4.2. La aproximación variacional	29
4.3. Existencia de una solución positiva	30
5. Ondas solitarias para sistemas de Schrödinger no lineales acoplados linealmente y con coeficientes inhomogéneos	35
5.1. Introducción	35
5.2. Preliminares	36

5.3. Existencia de estados acotados positivos	38
5.4. Órbitas homoclinas impares al origen en el sistema con coeficientes simétricos	40
5.5. Aplicaciones físicas y ramas de soluciones en sistemas	41
II Soluciones analíticas de la INLSE	43
6. Simetrías de Lie, análisis cualitativo y soluciones exactas de ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad inhomogénea	45
6.1. Introducción	45
6.2. Teoría general de simetrías de Lie	45
6.3. Transformaciones canónicas e invariantes	47
6.4. Conexión entre la NLSE y la INLSE por medio de la LSE	49
6.5. Analisis cualitativo y soluciones exactas	49
6.6. Soluciones asimétricas de la INLSE	54
7. Soluciones exactas periódicas y localizadas de la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidades moduladas espacialmente: Redes lineales y no lineales	57
7.1. Introducción	57
7.2. Transformaciones de similaridad	57
7.3. Modos localizados estacionarios	59
7.4. Estabilidad de las soluciones	60
7.5. Soluciones periódicas exactas	62
7.6. Aplicaciones físicas	63
7.7. Soluciones exactas para otros modelos	65
8. Solitones en sistemas con no linealidades moduladas en el tiempo y en el espacio	67
8.1. Introducción	67
8.2. Teoría general	67
8.3. No linealidades localizadas	68
8.4. Solitones resonantes	70
8.5. Soluciones periódicas	71
8.6. Soluciones cuasiperiódicas	72
8.7. Solitones con su centro de masas desplazandose	72
III Aplicaciones de la INLSE a BECs	75
9. Pinzas láser para solitones atómicos	77
9.1. Introducción	77
9.2. Modelo y ecuaciones	77
9.3. Extracción atómica con pinzas estáticas y control	79
9.4. Extracción atómica con las pinzas en movimiento	82
10. Conclusiones y vías de ampliación	85
10.1. Existencia y estabilidad de soluciones para la INLSE	85
10.1.1. Estabilidad de estados fundamentales para la INLSE	85
10.1.2. Existencia de solitones oscuros para CINLSE con no linealidad periódica	85
10.1.3. Existencia de solitones brillantes en la CQINLSE	85
10.1.4. Ondas solitarias para sistemas de Schrödinger no lineales acoplados	86
10.2. Soluciones analíticas de la INLSE	86
10.2.1. Simetrías de Lie para la INLSE	86

10.2.2. Soluciones exactas periódicas y localizadas de la INLSE con no linealidades moduladas espacialmente: Redes lineales y no lineales .	86
10.2.3. Solitones con no linealidades moduladas en tiempo y en espacio . .	87
10.3. Aplicaciones de la INLSE a condensados de Bose-Einstein	87
10.3.1. Pinzas láser para solitones atómicos	87
A. La aproximación de Gross-Pitaevskii	89
Publicaciones y preprints	93
Bibliografía	95

Capítulo 1

La ecuación de Schrödinger no lineal

1.1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Schrödinger no lineal (NLS), en una de sus formas más generales

$$i\psi_t = -\Delta\psi + V(\mathbf{x}, t)\psi + g(\mathbf{x}, t)|\psi|^{2\sigma}\psi, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

es una de las ecuaciones más importantes de la física matemática. Esta ecuación aparece en la modelización de muchos fenómenos físicos con aplicaciones a diferentes campos (Vázquez *et al.*, 1996), tales como física de semiconductores (Brezzi & Markowich, 1991), óptica no lineal (Kivshar & Agrawal, 2003), condensación de Bose-Einstein (Dalfovo *et al.*, 1999), mecánica cuántica (Rosales & Sánchez-Gómez, 1992), física del plasma (Dodd *et al.*, 1982) o dinámica biomolecular (Davidov, 1985), por citar solo algunos ejemplos.

El estudio de este tipo de ecuaciones ha servido como catalizador en el desarrollo de nuevas ideas e incluso de conceptos matemáticos tales como solitones (Zakharov *et al.*, 1975) o singularidades en ecuaciones en derivadas parciales (Sulem & Sulem, 1999).

Cuando $V \equiv 0$ y $g = \text{constante}$, tenemos la “clásica” ecuación de Schrödinger no lineal homogénea (NLSE). Para el caso en que g y V sean funciones generales, se tiene la llamada ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea (INLSE).

La ecuación de Schrödinger no lineal homogénea proporciona una descripción canónica de la dinámica de una onda plana casi-monocromática $\epsilon\psi e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$, cuya amplitud es pequeña ($\epsilon \ll 1$) pero finita, que esta debilmente modulada con respecto al espacio y al tiempo, y que se está propagando en un sistema conservativo (Newell, 1985). En lo que sigue, veremos como derivar la NLSE.

Consideremos una ecuación de ondas no lineal escalar, escrita simbólicamente de la siguiente forma

$$L(\partial_t, \nabla)u + G(u) = 0, \quad (1.2)$$

donde L es un operador lineal con coeficientes constantes y G una función de u y sus derivadas. Para soluciones con amplitud pequeña ($\epsilon \ll 1$), los efectos no lineales pueden, en primera instancia, ser despreciados, y la ecuación admitiría soluciones tipo ondas planas casi-monocromáticas

$$u = \epsilon\psi e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (1.3)$$

con amplitud $\epsilon\psi$ constante. La frecuencia ω y el vector de onda \mathbf{k} son cantidades reales que vienen relacionadas por la siguiente relación de dispersión

$$L(-i\omega, i\mathbf{k}) = 0. \quad (1.4)$$

Esta ecuación algebraica admite, en general, varias soluciones. Nos concentraremos en las soluciones de la forma

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (1.5)$$

Aunque hemos asumido soluciones de onda con amplitud pequeña, se tiene que los efectos no lineales acumulados son significativos cuando las escalas de distancia de propagación y de tiempo son significativamente grandes. Un cálculo perturbativo de la solución de la ecuación (1.2) sobre la onda plana cuasi-monocromática (1.3) nos conduce a una serie de términos resonantes de diferentes órdenes, y que resultan en términos seculares de la expansión perturbativa de la solución (Sulem & Sulem, 1999). Otras aproximaciones equivalentes, usadas en la literatura, para derivar la ecuación de Schrödinger no lineal pueden encontrarse en (Newell, 1985; Sulem & Sulem, 1999).

Nosotros, en cambio, usaremos un argumento de tipo heurístico para derivar la NLS, ecuación (1.1), con $V \equiv 0$, $g(x, t) \equiv g = \text{constante}$ y $\sigma = 1$. Así, es conveniente reinterpretar la relación de dispersión lineal (1.5) de la siguiente forma

$$(i\partial_t - \omega(-i\partial_{\mathbf{x}})) \psi e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} = 0, \quad (1.6)$$

donde $\partial_{\mathbf{x}}$ es el gradiente con respecto a \mathbf{x} y $\omega(-i\partial_{\mathbf{x}})$ es el pseudo-operador diferencial obtenido reemplazando \mathbf{k} por $-i\partial_{\mathbf{x}}$ en $\omega(\mathbf{k})$.

En un medio debilmente no lineal y con respuesta adiabática (es decir, inmediata), se espera que la no linealidad afecte a la relación de dispersión. La frecuencia de la onda depende entonces de la intensidad y esto nos lleva a reemplazar la frecuencia $\omega(\mathbf{k})$ por una función $\Omega(\mathbf{k}, \epsilon^2|\psi|^2)$, con $\Omega(\mathbf{k}, 0) = \omega(\mathbf{k})$. Además, la amplitud de onda compleja ψ esta modulada en el espacio y en el tiempo de forma muy debil, dependiendo entonces de las variables $\mathbf{X} = \epsilon\mathbf{x}$ y $T = \epsilon t$. De esta forma, las derivadas ∂_t y $\partial_{\mathbf{x}}$ en la ecuación (1.6) son reemplazadas por $\partial_t + \epsilon\partial_T$ y por $\partial_{\mathbf{x}} + \epsilon\nabla$, respectivamente, donde ahora ∇ denota el gradiente con respecto a la variable espacial X . En consecuencia, la ecuación (1.6) puede ser reemplazada por la siguiente ecuación

$$[i\partial_t + i\epsilon\partial_T - \Omega(-i\partial_{\mathbf{x}} - i\epsilon\nabla, \epsilon^2|\psi|^2)] \psi e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} = 0. \quad (1.7)$$

De forma equivalente, en un medio debilmente no lineal, la relación de dispersión buscada es

$$[\omega + i\epsilon\partial_T - \Omega(\mathbf{k} - i\epsilon\nabla, \epsilon^2|\psi|^2)] \psi = 0. \quad (1.8)$$

Como el parámetro ϵ es pequeño, esta ecuación puede desarrollarse en serie de potencias de segundo orden para ϵ . Teniendo en cuenta también la relación de dispersión lineal, se obtiene

$$i(\partial_T + \mathbf{v}_g \cdot \nabla) \psi + \epsilon [\nabla \cdot (D\nabla\psi) + \gamma|\psi|^2, \psi] = 0, \quad (1.9)$$

donde $\mathbf{v}_g = \partial_{\mathbf{k}}\omega$ es la velocidad de grupo y $D = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial\omega}{\partial k_j \partial k_l}\right)$, con $j, l = 1, \dots, d$, es la mitad de la matriz hessiana de la frecuencia, estando ambas evaluadas sobre el vector de onda \mathbf{k} . El coeficiente de acoplamiento γ está asociado a la expansión en serie de potencias de la intensidad de la onda y viene dado por $\frac{\partial\Omega}{\partial(|\psi|^2)}$, evaluado en \mathbf{k} y en $|\psi|^2 = 0$.

Podemos considerar a la ecuación (1.9) como un problema de valor inicial en la variable temporal y, por tanto, podemos escribir convenientemente esta ecuación definiendo $\xi = \mathbf{X} - T\mathbf{v}_g$, esto es, cambiando el sistema de referencia inicial a un sistema de referencia que se mueve con una velocidad dada por la velocidad de grupo. Haciendo también el cambio de variable $\tau = \epsilon T$, obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal buscada

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nabla \cdot (D\nabla\psi) + \gamma|\psi|^2\psi = 0, \quad (1.10)$$

donde ahora las derivadas espaciales son hechas con respecto a la variable ξ . La ecuación NLS es a menudo llamada elíptica cuando el operador $F = \nabla \cdot (D\nabla)$, que es real y simétrico, lo es. En esta tesis, nos centraremos en el operador $F = \alpha\Delta$.

Para deducir esta ecuación, hemos asumido que la no linealidad es debil pero con dispersión finita, mientras que en situaciones donde los términos dispersivos y no lineales son igualmente debiles, una "expansión perturbativa" nos llevaría a ecuaciones con longitud de onda larga, como la ecuación de Korteweg-de Vries, la ecuación de Benjamin-Ono o,

en varias dimensiones, la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (Segur, 1978; Ablowitz & Segur, 1979).

Otra ecuación no lineal de tipo Schrödinger que despierta un gran interés es la ecuación de Schrödinger no lineal cúbico-quíntica (CQNLSE). Cuando la no linealidad sea espacialmente inhomogénea, denotaremos a esta ecuación como la (ICQNLSE):

$$i\psi_t = -\Delta\psi + g_1(\mathbf{x})|\psi|^2\psi + g_2(\mathbf{x})|\psi|^4\psi, \quad (1.11)$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$ y $g_1(\mathbf{x})$ y $g_2(\mathbf{x})$ funciones suficientemente regulares.

No queremos concluir esta introducción sin hacer referencia a los sistemas de Schrödinger no lineales acoplados, los cuales también veremos en esta tesis:

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\Delta\psi_1 - b(\mathbf{x})\psi_2 - c(\mathbf{x})F(\psi_1, \psi_2), \quad (1.12a)$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\Delta\psi_2 - e(\mathbf{x})\psi_1 - f(\mathbf{x})G(\psi_1, \psi_2), \quad (1.12b)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones de onda complejas, definidas en todo \mathbb{R}^d , las cuales deben decaer a cero en infinito:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.13)$$

y F y G son funciones, en principio, suficientemente regulares para nuestros propósitos.

1.2. APLICACIONES FÍSICAS DE LA NLSE I: CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

Como ya se ha dicho anteriormente, la ecuación de Schrödinger no lineal tiene múltiples aplicaciones en diversos campos de la física, tales como física del plasma, dinámica de fluidos, teoría cuántica de campos y gravitación. Recientemente, esta ecuación ha despertado el interés de muchos científicos por sus múltiples aplicaciones en la condensación de Bose-Einstein, que trataremos en este capítulo, y en óptica no lineal, que trataremos en el siguiente capítulo.

Vamos a empezar definiendo que es un condensado de Bose-Einstein (BEC). En física, el condensado de Bose-Einstein es el estado de agregación de la materia que se da en ciertos materiales a muy bajas temperaturas. La propiedad que lo caracteriza es que una cantidad macroscópica de las partículas del material pasan al nivel de mínima energía, denominado estado fundamental. El condensado es una propiedad cuántica, que no tiene análogo clásico. Debido al principio de exclusión de Pauli, sólo las partículas bosónicas (partículas cuánticas que tienen la característica de que su espín es un número entero) pueden tener este estado de agregación. Esto quiere decir que los átomos se separan y forman iones. A la agrupación de partículas en ese nivel se le llama condensado de Bose-Einstein.

Esto era conocido por Bose y por Einstein en la década de 1920, ya que estos predijeron que en un agregado de bosones indistinguibles, y tales que no tengan interacción mutua, estas partículas tienden a ocupar los niveles de menor energía, pudiendo alcanzar el estado fundamental un grado de ocupación macroscópico si la temperatura está por debajo de un valor finito T_{CBE} . Al encontrarse la mayoría de los átomos en el mismo estado fundamental, la totalidad del sistema puede describirse mediante una función de onda macroscópica, $\psi(\mathbf{x}, t)$.

En 1961, L. P. Pitaevskii introdujo por primera vez, de forma rigurosa, el concepto de función de onda macroscópica dependiente del tiempo (Pitaevskii, 1961). Es decir, Pitaevskii ya no se limita a considerar el condensado como el estado fundamental estacionario, tal y como habían hecho otros físicos, sino que muestra que el condensado tiene una dinámica propia, que puede ser deducida a partir de argumentos microscópicos y que responde a la llamada ecuación de Gross-Pitaevskii (Pitaevskii, 1961; Gross, 1963)

(véase el apéndice A, donde se muestra como deducir la ecuación de Gross-Pitaevskii, tanto independiente como dependiente del tiempo, para un condensado de Bose-Einstein)

$$i\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + G|\psi|^2\psi, \quad (1.14)$$

donde ψ es la función de onda macroscópica del condensado. En esta ecuación se encuentra la interacción promedio entre átomos, $G = 4\pi\hbar^2 a_s/m$, que origina un término no lineal nuevo en la mecánica cuántica. Como se puede observar, esta ecuación es equivalente a la NLSE. Cuando $a > 0$ la interacción entre las partículas del condensado es repulsiva y cuando $a < 0$ dicha interacción es atractiva. De hecho, la longitud de difusión a puede ser cambiada de forma continua de valores positivos a valores negativos variando el campo magnético externo u óptico. Estas modificaciones de la longitud de difusión son muy pronunciadas en la llamada resonancia Feshbach (FR) (Inouye *et al.*, 1998).

Este enorme interés por la teoría de condensados gaseosos llevó a numerosos grupos experimentales a intentar generar estos condensados. Esta carrera que comenzó en el MIT con experimentos con hidrógeno (Fried *et al.*, 1998), tuvo sus primeros resultados en los condensados de ^{87}Rb (Anderson *et al.*, 1995) y ^{23}Na (Davis *et al.*, 1995). Estos átomos se confinaban en el condensado usando una trampa magnética y eran enfriados a temperaturas extremadamente bajas. Desde entonces, se han hecho una serie de experimentos muy bellos en los que se manipulan estos condensados de múltiples formas, obteniéndose, entre otros fenómenos, la formación de solitones en un condensado de Bose-Einstein (Strecker *et al.*, 2002). A partir de aquí, se han obtenido experimentalmente diferentes estructuras como vórtices, solitones oscuros, etc.

Volviendo a la resonancia Feshbach, esta es una herramienta importante, tanto para aspectos teóricos como experimentales del problema. Se trata de una resonancia que ocurre en un sistema de muchas partículas, en el cual un estado ligado se forma si el acoplamiento entre los grados internos de libertad y las coordenadas de reacción es nulo. Realmente, el principio básico de la resonancia Feshbach es que dos partículas que colisionan con un cierto valor de la energía pueden asociarse en resonancia para formar un estado ligado. Para gases ultrafríos, este proceso de colisión se da a energías de difusión muy bajas, por lo que sólo se consideran ondas de tipo s .

El uso de la resonancia Feshbach hace posible, como ya se ha dicho antes, el poder controlar el tamaño de la longitud de difusión y además poder cambiar su signo, por medio de un campo magnético externo (Inouye *et al.*, 1998) o usando un control óptico (Theis *et al.*, 2004). Este mecanismo ha hecho posible, por ejemplo, el poder predecir la existencia de nuevos estados en una dimensión (Kevrekidis *et al.*, 2003), el colapso macroscópico de ondas de materia (Donley *et al.*, 2001), la creación de solitones atómicos (Pérez-García *et al.*, 1998; Strecker *et al.*, 2002; Khaykovich *et al.*, 2002), o el control de haces atómicos coherentes. Esta última aplicación es un desafío en la física moderna debido a sus potenciales aplicaciones en múltiples campos, como interferometría atómica (Kasevich & Chu, 1991), superposición de estados cuánticos (Unanyan *et al.*, 2004), relojes atómicos (Vanier, 2005), o información cuántica (Poizat & Grangier, 1993), entre otros.

Matemáticamente hablando, el hecho de usar la resonancia Feshbach para controlar el término de interacción no lineal significa agregarle a la ecuación de Gross-Pitaevskii, o a la NLSE, una modulación espacial (o temporal) de la no linealidad, de tal forma que se obtiene la siguiente ecuación

$$i\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + g(x,t)|\psi|^2\psi, \quad (1.15)$$

donde g es una función suficientemente regular para nuestros propósitos, que multiplica al término no lineal. En aplicaciones sobre un BEC, el hecho de poder usar la resonancia Feshbach para controlar la no linealidad ha permitido que surjan numerosas propuestas para el manejo de la longitud de difusión, tanto cuando esta depende solamente del tiempo,

es decir, $g \equiv g(t)$ (Abdullaev *et al.*, 2003a; Saito & Ueda, 2003; Abdullaev *et al.*, 2003b; Centurion *et al.*, 2006; Bergé *et al.*, 2000; Konotop & Pacciani, 2005; Zharnitsky & Pelinovsky, 2005; Itin *et al.*, 2006; Malomed, 2006) o cuando depende únicamente de la coordenada espacial, $g \equiv g(x)$ (Rodas-Verde *et al.*, 2005; Vázquez-Carpentier *et al.*, 2006; Abdullaev & Garnier, 2005; Garnier & Abdullaev, 2006; Theocharis *et al.*, 2005; Niarchou *et al.*, 2007; Sakaguchi & Malomed, 2005; Primatarowa *et al.*, 2005; Bludov & Konotop, 2006; Porter *et al.*, 2007; Fibich *et al.*, 2006; Sivan *et al.*, 2006; Torres, 2006), para diferentes fenómenos no lineales. Cuando $g \equiv g(x)$ es periódica, obtenemos las llamadas redes ópticas no lineales, de gran aplicación en la teoría de condensados de Bose-Einstein (Sakaguchi & Malomed, 2005; Fibich *et al.*, 2006; Sivan *et al.*, 2006).

Para terminar esta sección, trataremos las aplicaciones físicas que el sistema (1.12a), (1.12b) tiene en los condensados de Bose-Einstein. Un primer ejemplo surge en el estudio de condensados de Bose-Einstein compuestos de dos estados hiperfinos (por ejemplo, los estados $|F = 1, m_f = -1\rangle$ y $|F = 2, m_f = 1\rangle$ de átomos de ^{87}Rb) acoplados ópticamente. Estos sistemas han sido objeto de un gran estudio en los últimos años, tanto experimental (Matthews *et al.*, 1999a,b) como teórico (Williams *et al.*, 2000; García-Ripoll *et al.*, 2000), puesto que representan la mezcla más simple de diferentes gases degenerados cuánticos ultrafríos y fueron estudiados inmediatamente después de la obtención de la condensación de Bose-Einstein en 1995 (Dalfovo *et al.*, 1999).

1.3. APLICACIONES FÍSICAS DE LA NLSE II: ÓPTICA NO LINEAL

En el contexto de la óptica no lineal, los solitones se clasifican en dos formas: *temporales* o *espaciales*, dependiendo de si el confinamiento de la luz ocurre en el tiempo o en el espacio, durante la propagación de la onda. Los solitones temporales representan pulsos ópticos que mantienen su perfil, mientras los solitones espaciales representan haces guiados que permanecen confinados en las direcciones transversales, que son ortogonales a la dirección de propagación. Ambos tipos de solitones aparecen a partir de un cambio en la no linealidad del índice de refracción de un material óptico inducido por la intensidad lumínica, un fenómeno conocido como efecto Kerr óptico en el campo de la óptica no lineal (Warenghem *et al.*, 1998). La dependencia en la intensidad del índice de refracción lleva a una autofocalización (o autodefocalización) espacial y también a una modulación temporal de la fase (SPM), que son los dos mayores efectos no lineales responsables de la formación de solitones ópticos. Un solitón espacial se forma cuando la autofocalización del rayo óptico equilibra la dispersión que aparece inducida por el índice de refracción. En contraste, es la SPM la que neutraliza la dispersión natural de un pulso óptico, y lleva a la formación de solitones temporales. En ambos casos, el pulso (solitón temporal) o el haz (solitón espacial) se propagan a través del medio sin cambiar su perfil y se dice que el pulso está localizado o el haz está atrapado.

El primer ejemplo de solitón espacial aparece en el año 1964, cuando se descubre el fenómeno de los rayos ópticos propagándose en un medio no lineal (ver la referencia (Peccianti & Assanto, 2002) para una revisión del fenómeno). Durante los años 80, se observaron solitones espaciales estables, usando medios no lineales para los cuales el efecto de la difracción estaba limitado únicamente a una dirección transversal (Peccianti & Assanto, 2001).

El primer ejemplo de solitón temporal está íntimamente relacionado con el descubrimiento del fenómeno de la *transparencia autoinducida* en un medio resonante no lineal (Conti *et al.*, 2002). En este caso, un pulso óptico, con una energía y un perfil específico, se propaga a través del medio no lineal sin cambios, a pesar de que sufre pérdidas de absorción. En 1973, se encontró otro ejemplo de solitón temporal, cuando se descubrió que los pulsos ópticos pueden propagarse en el interior de una fibra óptica, un medio dispersivo no lineal, sin cambiar su perfil. En un experimento en 1980, se observó la propagación de estos solitones en fibras ópticas (Litvak & Sergeev, 1978). Desde entonces, se han encon-

trado aplicaciones prácticas de los solitones en fibras ópticas y en el diseño de sistemas de comunicaciones (ver, por ejemplo, la referencia (Kivshar & Agrawal, 2003)).

En el marco de la óptica no lineal, la ecuación de Schrödinger no lineal

$$i\partial_z\psi = -\psi_{xx} - |\psi|^2\psi, \quad (1.16)$$

sirve, entre otras aplicaciones, para modelar la propagación de un rayo láser en un medio. ψ , en este contexto, representa la intensidad del campo eléctrico, z es la dirección longitudinal (la dirección que sigue el haz de luz) y x es la dirección transversal. La no linealidad cúbica, o de tipo Kerr, en la ecuación (1.16), resulta de la dependencia del índice de refracción con respecto a la intensidad del campo eléctrico

$$n = n_0 + n_2|\psi|^2, \quad (1.17)$$

donde n_0 y n_2 son constantes que denotan los índices de refracción lineales y no lineales del medio, respectivamente.

Inicialmente, se han estudiado medios lineales, es decir, medios para los cuales n_0 está modulado mientras n_2 permanece uniforme. Si n_0 está modulado en la dirección de propagación del rayo, el índice de refracción resulta

$$n = n_0(z) + n_2|\psi|^2. \quad (1.18)$$

Este tipo de medios han sido estudiados de forma extensiva, tanto teórica como experimentalmente. Una revisión de estos trabajos puede encontrarse en la referencia (Aceves, 2000). Otro medios estudiados son aquellos en donde n_0 está modulado en la dirección transversal

$$n = n_0(\mathbf{x}) + n_2|\psi|^2. \quad (1.19)$$

Estos estudios pueden encontrarse, por ejemplo, en las referencias (Floer & Weinstein, 1986; Oh, 1989).

Recientemente, se ha realizado con éxito la fabricación de medios cuyo índice de refracción *no lineal* varía rápidamente (Hutchings, 2004). Esto corresponde a un medio donde n_2 está modulado espacialmente, y n_0 es constante. El caso de una no linealidad periódica en la dirección de propagación, es decir

$$n = n_0 + n_2(z)|\psi|^2, \quad (1.20)$$

ha sido analizado, por ejemplo, en la referencia (Berestycki *et al.*, 1981).

Finalmente, el último caso posible a considerar en este contexto, es el de una modulación de n_2 en la dirección transversal, es decir

$$n = n_0 + n_2(\mathbf{x})|\psi|^2. \quad (1.21)$$

Merle (Merle, 1996a,b) estudió las propiedades de las soluciones colapsantes de la ecuación

$$i\partial_z\phi = -\Delta\phi + g(x)|\phi|^{p-1}\phi, \quad (1.22)$$

para el caso crítico $p = 1 + 4/d$, donde d es la dimensión del espacio, para $g(x) < 0$. (Fibich & Wang, 2003) encontraron una condición para la estabilidad de estados acotados estrechos y radialmente simétricos de la ecuación (1.22) en el caso crítico. Finalmente, en (Fibich *et al.*, 2006), los autores consideraban la ecuación (1.22) para el caso particular $g(x) = 1 + m(Nx)$, donde $m(Nx)$ es una función periódica y físicamente representa una microestructura periódica.

El sistema (1.12a), (1.12b) aparece también en aplicaciones en óptica no lineal, en concreto como modelo para describir el comportamiento de fibras ópticas acopladas, donde las funciones ψ_1 y ψ_2 describen el haz de luz en el interior de cada fibra (Zafrany *et al.*, 2005). Otras situaciones de interés físico en este modelo pueden ser encontradas en (Kivshar & Agrawal, 2003).

Como podemos ver, son muchos los ejemplos físicos donde la ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea es relevante.

1.4. SOLITONES EN UNA DIMENSIÓN ESPACIAL

Una situación particular, muy interesante, aparece cuando consideramos la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica en una dimensión, ya que es un sistema hamiltoniano completamente integrable. En este caso, la ecuación puede resolverse por el método de la transformada inversa o, en inglés, inverse scattering transform (IST), y se pueden obtener soluciones de tipo solitón (Zakharov & Shabat, 1972). La descripción de este método, el cual reduce la resolución del problema de valor inicial al de un problema de transformada inversa para una ecuación de autovalores lineales asociada, se sale fuera del enfoque de esta tesis. En las referencias (Zakharov & Shabat, 1972) y (Newell, 1985) puede encontrarse una descripción de ese método. Nosotros expondremos un método diferente para resolver esta ecuación.

Sea la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica con no linealidad atractiva,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1.23)$$

donde $x \in \mathbb{R}$. Si la no linealidad fuera repulsiva se incrementaría la dispersión lineal, y un análisis detallado del problema nos diría que la solución tiene que ser distinta de cero en infinito. Es en este caso donde aparecen los llamados solitones oscuros o solitones dark (ver la referencia (Kivshar & Luther-Davies, 1998) para un estudio sobre este tipo de soluciones).

Entonces, buscaremos soluciones de la forma

$$\psi = e^{i(rx-st)}v(\xi), \quad (1.24)$$

con $\xi = x - Ut$, y r y s denotando constantes reales y asumiendo que la función v es real y se hace cero en infinito. Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger después de hacer el cambio $r = U/2$ (para eliminar el término de la derivada v'), y definiendo $\alpha = r^2 - s$, obtenemos la ecuación que da el perfil de la solución,

$$v'' - \alpha v + v^3 = 0. \quad (1.25)$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por v , la parte izquierda de la ecuación puede ser reescrita como una derivada. Asumiendo que v y su derivada se hacen cero en infinito, se tiene

$$v'^2 = \alpha v - \frac{1}{2}v^4. \quad (1.26)$$

Para soluciones que decaen a cero en infinito, el término que contiene la potencia cuarta es despreciable, para valores de x suficientemente grandes, por lo que para que existan estas soluciones α debe ser positivo. Dividiendo por v^4 y definiendo $w = 1/v$, se tiene

$$w'^2 = \alpha w^2 - \frac{1}{2}, \quad (1.27)$$

que implica que $w = \frac{1}{(2\alpha)^{1/2}} \cosh(\alpha^{1/2}\xi)$. De aquí, se obtiene que

$$v = (2\alpha)^{1/2} \frac{1}{\cosh(\alpha^{1/2}\xi)}. \quad (1.28)$$

De esta forma, obtenemos la existencia de soluciones localizadas en forma de onda solitaria

$$\psi(t, x) = (2\alpha)^{1/2} \frac{1}{\cosh(\alpha^{1/2}(x - Ut - x_0))} e^{i\left(\frac{U}{2}x + (\alpha - \frac{U^2}{4})t + \varphi_0\right)}, \quad (1.29)$$

donde las constantes x_0 y φ_0 reflejan la invariancia de la ecuación de Schrödinger por traslaciones en el espacio y por el desplazamiento de la fase, respectivamente. La velocidad U está asociada a la invariancia por la transformación de Galileo.

Las soluciones (1.29), que están localizadas en el espacio, preservan su forma y se propagan con velocidad constante. A estas soluciones se les denominan solitones brillantes o solitones bright. Debido a la integrabilidad del problema, los solitones tienen la característica de que cuando sufren algún choque, emergen con el mismo perfil y la misma velocidad. Estas ondas no lineales aparecen en una gran variedad de contextos físicos (Scott, 1999).

Dicho esto, surge un nuevo problema a considerar. Desde el punto de vista físico, ha surgido, tal y como se ha visto en las secciones anteriores, un nuevo modelo a estudiar: la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea (INLSE)

$$i\psi_t + \psi_{xx} + g(x)|\psi|^2\psi = 0, \quad (1.30)$$

con $g(x)$ una función, en principio, suficientemente regular para nuestros propósitos. Una pregunta que surge de forma inmediata es si es posible calcular soluciones exactas de esta ecuación, para diferentes funciones $g(x)$. Incluso, también se podría considerar una dependencia en la que estuvieran incluidas tanto la coordenada espacial como la coordenada temporal de la función $g: g(x, t)$. Intentaremos, en esta tesis, dar respuesta a estos problemas.

1.5. ESTADOS ESTACIONARIOS

Entre las múltiples aplicaciones físicas que tiene la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.31)$$

son de particular importancia aquellas en la que la distribución de la densidad de estados permanece constante. Tales estados se conocen como ondas solitarias, ondas estacionarias o estados estacionarios. Esta es la denominación con la que nos quedaremos: un estado estacionario posee su dependencia temporal factorizada en la forma de una fase global que crece linealmente en el tiempo

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})e^{i\lambda t}. \quad (1.32)$$

(De hecho, es trivial comprobar que si se factoriza $\psi(t, \mathbf{x})$ en la forma $\psi(t, \mathbf{x}) = f(t)\phi(\mathbf{x})$, necesariamente $f(t)$ debe ser una función exponencial).

La constante λ suele recibir la denominación física de potencial químico, pero es también el autovalor no lineal de la ecuación que satisface el estado estacionario

$$\Delta\phi - \lambda\phi + \phi^3 = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.33)$$

Cuando las condiciones de contorno cumplen que cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$, el autovalor λ debe ser positivo para que se cumplan estas condiciones de frontera.

1.6. EXISTENCIA Y APROXIMACIÓN VARIACIONAL

Es directo comprobar que la solución ϕ de la ecuación (1.33) es una solución del problema variacional

$$\delta\{H + \lambda N\} = 0, \quad (1.34)$$

donde $N = \int |\phi|^2 d\mathbf{x}$ y $H = \int (|\nabla\phi|^2 - \frac{g}{2}|\phi|^4) d\mathbf{x}$.

Definiendo $\Phi(\mathbf{x}) = \lambda^{-1/2}\phi(\lambda^{-1/2}\mathbf{x})$, se tiene que $N = \lambda^{1-d}N_0$, con $N_0 = \int |\Phi|^2 d\mathbf{x}$, y la ecuación resultante es

$$\Delta\Phi - \Phi + \Phi^3 = 0. \quad (1.35)$$

En una dimensión, existe una única solución de la ecuación (1.35) de la forma

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}, \quad (1.36)$$

satisfaciendo las condiciones de frontera cero en infinito. Este no es el caso en dimensiones mayores, donde existe un conjunto numerable de soluciones que pueden ser analizadas en detalle cuando se asume la condición de isotropía (Anderson & Derrick, 1970).

En dimensión $d \geq 2$, fijado un λ , existe una única solución ϕ de la ecuación (1.33) que es positiva y radialmente simétrica. La demostración de este resultado puede encontrarse en diferentes trabajos, como los que aparecen en las referencias (Strauss, 1977; Ambrosetti & Rabinowitz, 1973; Berestycki & Lions, 1983a,b). Básicamente, para obtener una solución de (1.33), lo que se hace es buscar puntos críticos en $H^1(\mathbb{R}^d)$ del funcional de Liapunov, que viene dado por

$$J(\phi) = \frac{1}{2}\{H(\phi) + \lambda N(\phi)\}. \quad (1.37)$$

Esta solución positiva y radialmente simétrica es un extremo de H para N fijo, y minimiza el funcional (1.37) de entre todas las soluciones no triviales de la ecuación (1.33). En analogía con el problema de una partícula cuántica en un potencial (Lieb & Loss, 2001), esta solución es denominada estado fundamental, mientras que el resto de soluciones son llamadas estados excitados y están caracterizados en el caso isótropo por su número de nodos.

Otros métodos usados en la búsqueda de soluciones de la ecuación (1.33) consisten en un método para ecuaciones diferenciales que busca directamente soluciones radialmente simétricas (Berestycki *et al.*, 1981), y también un método “local” que soluciona la ecuación (1.33) en una bola de radio finito con condiciones de frontera Dirichlet y luego se concluye con un paso al límite (ver la referencia (Berestycki & Lions, 1980)).

Un problema interesante surge al intentar probar la existencia de soluciones homoclinas (solitones brillantes) y soluciones heteroclinas (solitones oscuros) para la ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea en $1D$

$$-u'' + a(x)u = b(x)u^3, \quad (1.38)$$

con $a(x)$ y $b(x)$ pertenecientes a ciertos espacios funcionales que se precisarán en su momento. La forma de probar la existencia de estos dos tipos de soluciones es, en general, muy distinta una de la otra, con lo que queda asegurada la aplicación de diferentes técnicas matemáticas. Así, el estudio de la existencia de ondas estacionarias para ecuaciones similares a la ecuación (1.38) ha despertado el interés de muchos matemáticos en años recientes. Sin ser exhaustivos, nos referiremos a los siguientes trabajos (Ambrosetti *et al.*, 2005; Ambrosetti & Colorado, 2007; Ambrosetti *et al.*, 2007; Berestycki & Lions, 1983a,b; Bartsch & Wang, 1995; Lions, 1984). En la mayoría de estos trabajos, el uso de un criterio de compacidad es esencial para poder probar la existencia de estas soluciones.

Es interesante notar que, una forma de obtener ese criterio de compacidad en problemas elípticos semilineales en dominios no acotados es asumir la invariancia de los coeficientes bajo un grupo compacto de simetrías. Si tratamos con la ecuación

$$-\Delta u + a(x)u = b(x)|u|^{p-1}u, \quad (1.39)$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$, el embebimiento compacto radial de Strauss (ver, por ejemplo, (Willem, 1996)), implica la existencia de un estado fundamental radial positivo para el caso en el que tanto a como b son radialmente simétricos, positivos y acotados. Condiciones más sofisticadas han sido explotadas en la referencia (Bartsch & Willem, 1993), por ejemplo. Sin embargo, estos resultados no se aplican al caso unidimensional. El asumir simetría radial significa que los coeficientes a y b son funciones pares. Uno, por tanto, puede buscar soluciones pares, pero el espacio $H^1(0, +\infty)$ no tiene mejores propiedades de compacidad que $H^1(\mathbb{R})$. No obstante, el tener simetría es siempre una condición que simplifica el problema y ha sido ampliamente usada para encontrar órbitas que conecten entre sí en sistemas hamiltonianos inversos (Bartsch & Szulkin, 2005). En la referencia (Korman & Lazer, 1994), se obtuvo una solución homoclina positiva única para la ecuación (1.38) donde se asumía que a y b eran funciones pares, acotadas por debajo por una constante positiva y tales que $xa'(x) > 0$ y $xb'(x) < 0$ para cada $x \neq 0$.

Finalmente, queremos mencionar otra aproximación al problema. En la referencia (Torres, 2006), el autor, motivado por el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en un medio óptico multilaminado, probaba la existencia de dos tipos distintos de soluciones homoclinas al origen en la ecuación de Schrödinger no lineal, usando un teorema de punto fijo en conos.

A diferencia del caso anterior, existen pocos estudios sobre la existencia de solitones oscuros o soluciones heteroclinas. Nosotros solamente conocemos la referencia (Torres & Konotop, 2008), dedicada al estudio de la existencia de solitones oscuros para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbico-quintica con un término lineal periódico. Es este vacío el que nos impulsa a realizar un estudio sobre la existencia de solitones oscuros para la ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea, el cual se encuentra en el capítulo 3 del apartado I.

1.7. ESTABILIDAD LINEAL DE LAS SOLUCIONES

En esta sección vamos a presentar un análisis de la estabilidad lineal de las soluciones de la NLSE, cuyos inicios pueden verse en la referencia (Vakhitov & Kolokolov, 1973).

Para un λ fijo, denotemos por ϕ el estado fundamental de la ecuación (1.33) y por $\phi(\mathbf{x})e^{i\lambda t}$ la correspondiente solución tipo onda solitaria de la ecuación NLS. Si realizamos perturbaciones de esta solución en la amplitud y en la fase, resulta

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})(1 + r(\mathbf{x}, t))e^{i\lambda t + s(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.40)$$

o, después de hacer el desarrollo en serie

$$\psi(\mathbf{x}, t) = (\phi(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}, t) + iv(\mathbf{x}, t)) e^{i\lambda t}, \quad (1.41)$$

donde se han introducido las funciones reales $u = \phi r$ y $v = \phi s$. Si linealizamos la ecuación de Schrödinger no lineal alrededor del estado fundamental, obtenemos

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

y

$$L_- = -\Delta + \lambda - \phi^2(x), \quad (1.44)$$

$$L_+ = -\Delta + \lambda - 3\phi^2(x), \quad (1.45)$$

Para perturbaciones de la forma $u, v \propto e^{i\Omega t}$, se tiene

$$\Omega^2 u = L_- L_+ v. \quad (1.46)$$

Los operadores L_- y L_+ son autoadjuntos. Usando el hecho de que ϕ satisface la ecuación (1.33), fácilmente se comprueba que el operador L_- se puede reescribir como

$$L_- = -\frac{1}{\phi} \operatorname{div} \left(\phi^2 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\phi} \cdot \right) \right). \quad (1.47)$$

En consecuencia, $\int u L_- u dx = \int |\nabla \left(\frac{u}{\phi} \right)|^2 \phi^2 d\mathbf{x} \geq 0$, y el operador L_- es no negativo. Además, ϕ pertenece al núcleo de L_- y $\nabla \phi$ al núcleo de L_+ . El estado fundamental ϕ , que es positivo, es esféricamente simétrico con respecto a un punto O y decrece con

respecto a la coordenada radial de este punto. Entonces, tal y como fue probado en la referencia (Weinstein, 1985), cero es el segundo autovalor de L_+ , con lo cual este operador tiene exactamente un único autovalor negativo. Para soluciones u de (1.46), ortogonales a ϕ , se encuentra que el valor mínimo de Ω^2 viene dado por

$$\Omega_m^2 = \min \frac{\langle u|L_+|u \rangle}{\langle u|L_-^{-1}|u \rangle}, \quad (1.48)$$

donde se ha usado la notación $\langle a|L|b \rangle = \int aLbdx$. Para esta clase de funciones, L_- es definida positiva, por lo que el signo de Ω_m^2 viene dado por el signo de $\langle u|L_+|u \rangle$. El valor mínimo de $\langle u|L_+|u \rangle$ se obtiene para una función u (ortogonal a ϕ), y que satisface el problema de autovalores

$$L_+u = \mu u + \alpha\phi, \quad (1.49)$$

donde α es un multiplicador de Lagrange y $\mu = \langle u|L_+|u \rangle$. Sean μ_0, μ_1, \dots los autovalores de L_+ . Puesto que L_+ tiene solamente un autovalor negativo μ_0 , y dado que el autovector $\nabla\phi$ asociado al segundo autovalor $\mu_1 = 0$ es ortogonal a ϕ , la ecuación (1.49) se puede escribir como

$$u = \alpha(L_+ - \mu)^{-1}\phi, \quad (1.50)$$

siempre que $\mu_0 < \mu < \mu_2$, donde μ_2 es el primer autovalor positivo. Haciendo el producto escalar con ϕ y usando la condición de ortogonalidad $\langle \phi|u \rangle = 0$, la ecuación (1.50) queda como

$$f(\mu) \equiv \langle \phi|(L_+ - \mu)^{-1}\phi \rangle = 0. \quad (1.51)$$

Ahora, cuando μ crece desde μ_0 hasta μ_2 , $f(\mu)$ varía monótonamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, y, en consecuencia, corta al eje en $\mu = \mu_{\min} \in (\mu_0, \mu_2)$. Para determinar el signo de μ_{\min} es suficiente considerar el signo de $f(0) = \langle \phi|L_+^{-1}\phi \rangle$. Si este es positivo, μ_{\min} es negativo, mientras que si es negativo, μ_{\min} es positivo. Para calcular este valor, derivamos la ecuación que ϕ satisface, con respecto a λ , y obtenemos

$$L_+ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} + \phi = 0. \quad (1.52)$$

De aquí, se tiene que

$$f(0) = - \langle \phi | \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} \rangle = - \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial\lambda}, \quad (1.53)$$

donde $N = \int |\phi|^2 dx$. Según lo dicho anteriormente, es claro que $\partial N / \partial\lambda$ da el signo de μ_{\min} . Cuando $\partial N / \partial\lambda < 0$, μ_{\min} y por tanto Ω_m^2 es negativo. En este caso, las perturbaciones armónicas crecen exponencialmente y el estado fundamental es inestable. Para $\partial N / \partial\lambda > 0$, obtenemos que el estado fundamental es linealmente estable.

Otro método para deducir la estabilidad o inestabilidad de las soluciones puede verse en la referencia (Laedke *et al.*, 1983).

1.8. FORMULACIÓN DE LAGRANGE

Sea ψ una solución de la ecuación de Schrödinger no lineal escrita en forma canónica

$$i\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|^2)\psi = 0. \quad (1.54)$$

Asumiremos que el problema está definido en \mathbb{R}^N y que ψ y sus derivadas se hacen cero en infinito. También asumiremos que la no linealidad f es una función derivable. Definimos

$$F(\epsilon) = \int_0^\epsilon f(\epsilon) d\epsilon. \quad (1.55)$$

No es difícil demostrar que cada solución de la ecuación (1.54) es un punto crítico de la integral de acción

$$S(\psi, \psi^*) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^N} L d\mathbf{x} dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt, \quad (1.56)$$

donde la densidad lagrangiana viene dada por la siguiente expresión

$$L = \frac{i}{2} (\psi^* \psi_t - \psi \psi_t^*) - |\nabla \psi|^2 + F(|\psi|^2). \quad (1.57)$$

Consideraremos la acción como un funcional de todas las funciones regulares admisibles, satisfaciendo las condiciones $\psi(\mathbf{x}, t_0) = \psi_0(\mathbf{x})$ y $\psi(\mathbf{x}, t_1) = \psi_1(\mathbf{x})$. Así, la ecuación de Schrödinger no lineal surge del problema variacional

$$\frac{\partial S}{\partial \psi}(\psi) = 0, \quad \text{con } \psi(\mathbf{x}, t_0) = \psi_0(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}, t_1) = \psi_1(\mathbf{x}). \quad (1.58)$$

La utilidad de esta formulación es múltiple. Primero, descubriendo las simetrías de la acción (1.56), lo que nos permitiría obtener las cantidades conservadas de la ecuación. En segundo lugar, hay ocasiones en las que un método numérico basado en un principio variacional es preferible a un método numérico que sirva para la obtención directa de soluciones de la ecuación en derivadas parciales. Finalmente, el principio variacional puede simplificar el problema, reduciendo este a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para la evolución de unos cuantos parámetros característicos (Cooper *et al.*, 1992; Pérez-García *et al.*, 1996).

En relación con las cantidades conservadas, nuestra ecuación tiene dos importantes. Estas son la energía

$$E(\psi) = \frac{1}{2} \int |\nabla \psi|^2 - U(\psi) \quad (1.59)$$

donde $U(\psi) = \int_0^\psi f(\epsilon) \epsilon d\epsilon$ y la norma de la función de onda

$$N(\psi) = \|\psi\|_2^2 = \int |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (1.60)$$

La conservación de la norma surge de la invariancia de la ecuación bajo transformaciones de fase globales

$$\frac{d}{dt} N(\psi) = 0 \quad (1.61)$$

Para la conservación de la energía solo es necesario que la acción sea invariante bajo traslaciones en el tiempo

$$\frac{d}{dt} E(\psi) = 0 \quad (1.62)$$

1.9. OBJETIVOS DE LA TESIS Y SUMARIO

En esta tesis, tal y como se ha dejado entrever en las secciones anteriores, se estudiará una variante de la NLSE: La ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea (INLSE), ecuación (1.1).

Así, esta tesis está organizada en tres grandes bloques (o apartados):

En el apartado I, hacemos frente al problema de la existencia de soluciones para diferentes ecuaciones de tipo Schrödinger, incluidos sistemas acoplados. Además, dedicamos un capítulo al estudio de la estabilidad de las soluciones. Este apartado se compone de cuatro capítulos:

- En el capítulo 2 se desarrolla un análisis de la estabilidad de las soluciones de la INLSE, donde $g(x)$, que describe la modulación espacial de la no linealidad, es una función positiva y localizada. Además, se dan las condiciones precisas de estabilidad para soluciones positivas que estén bajo los efectos de no linealidades espacialmente localizadas.
- El capítulo 3 trata sobre la existencia de solitones oscuros para la INLSE. En la prueba de existencia usaremos diferentes técnicas, tales como teoría clásica de EDO's, topología y teoría cualitativa de sistemas dinámicos.
- En el capítulo 4 se prueba la existencia de solitones brillantes, utilizando una aproximación variacional junto con la teoría de puntos críticos, y un método minimax: El teorema de Mountain-Pass.
- En el capítulo 5, utilizando un método de punto fijo en espacios de Banach, se prueba la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones de Schrödinger no lineales acoplados linealmente y con coeficientes inhomogéneos, ecuaciones (1.12)(a) y (1.12)(b). Además, se estudian las ramas de soluciones en sistemas controlados por parámetros.

En el apartado II se tratan distintos métodos matemáticos para poder construir soluciones analíticas de la INLSE. Este estudio lo desarrollamos en tres capítulos:

- El capítulo 6 trata el problema de encontrar soluciones analíticas de la INLSE. Para ello, se utilizará el método de las simetrías de Lie. Esta es una técnica muy usada en la resolución de ecuaciones diferenciales y en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.
- En el capítulo 7, nos centramos en la búsqueda de soluciones exactas de la INLSE con coeficientes periódicos, caracterizando estas soluciones. Se realiza un análisis de estabilidad numérico y se estudian las aplicaciones físicas del método.
- En el capítulo 8, usando transformaciones de similaridad, vamos mas alla de lo realizado en los dos capitulos anteriores y construimos soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger no lineal dependiente del tiempo, y con coeficientes que dependen del espacio y del tiempo.

Finalmente, en el apartado III, se muestra una de las múltiples aplicaciones que tiene la INLSE a los condensados de Bose-Einstein. Este bloque se compone de un único capítulo:

- En el capítulo 9, describimos un método para extraer solitones de un condensado de Bose-Einstein: las pinzas láser. Mostraremos, en ese capítulo, como poder extraer y transportar un número controlable de átomos de un condensado. Se estudiarán las implicaciones físicas del método, junto con algunas ideas de como aplicarlo.

Para concluir, en el capítulo 10 se presentan las conclusiones y futuros trabajos a realizar.

Parte I

Existencia y estabilidad de soluciones para la INLSE

Estabilidad de estados fundamentales para la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidades espacialmente inhomogéneas

2.1. INTRODUCCIÓN

EN este primer capítulo después de la introducción, se desarrollará un análisis de la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} - g(x)|\psi|^2\psi, \quad (2.1)$$

con $x \in \mathbb{R}$, donde ψ denota la función de onda de la ecuación (2.1) y $g(x)$ describe la modulación espacial de la no linealidad. En este estudio, $g(x)$ es una función positiva y localizada, esto es $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

El estudio de la estabilidad ha generado muchos trabajos. Por ejemplo, en la referencia (Fibich & Wang, 2003), los autores probaron que las ondas solitarias correspondientes al estado fundamental de la NLSE crítica con no linealidad inhomogénea $V(\epsilon x)$, en dimensión $d \geq 2$, eran orbitalmente estables bajo ciertas condiciones relativas a la dimensión espacial, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. También, en (Fibich *et al.*, 2006) se dió una prueba de la estabilidad de ondas solitarias en una dimensión espacial y con un término no lineal periódico. Un estudio de la estabilidad de ondas solitarias en redes no lineales en un marco bidimensional fue hecho en la referencia (Sivan *et al.*, 2006). En la referencia (Hajaiej & Stuart, 2004), los autores estudiaron la estabilidad orbital de las ondas estacionarias de la ecuación de Schrödinger no lineal usando una aproximación variacional.

Sin embargo, la formulación precisa de las condiciones de estabilidad para soluciones positivas bajo los efectos de no linealidades espacialmente localizadas no ha sido presentado todavía. Además, en la literatura física se cree que el criterio de Vakhitov-Kolokolov (Sulem & Sulem, 1999) puede ser usado para caracterizar la estabilidad de ondas solitarias incluso para no linealidades inhomogéneas (Sakaguchi & Malomed, 2005). Demostraremos que esto no es cierto y presentaremos aquí condiciones precisas que van más allá de este criterio.

2.2. ESTABILIDAD DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS

Las ondas solitarias localizadas de la ecuación (2.1) vienen dadas por $\psi = \phi e^{i\lambda t}$, donde ϕ satisface

$$-\frac{1}{2}\phi_{xx} + \lambda\phi - g(x)\phi^3 = 0, \quad \phi(\pm\infty) = 0. \quad (2.2)$$

Definamos el siguiente operador

$$\widetilde{L}_1 = -\frac{1}{2}\partial_{xx} + \lambda - 3g(x)\phi^2. \quad (2.3)$$

y definamos la noción de estabilidad orbital:

Definición 2.1 *Sea ϕ una solución de (2.2). Entonces, $\psi = \phi e^{i\lambda t}$ es una solución orbitalmente estable de (2.1) si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para $\psi(x, 0) \in H^1(\mathbb{R})$ que satisface $\inf_{\theta} \|\psi(\cdot, 0) - \phi e^{i\theta}\|_{H^1} < \delta$, la correspondiente solución $\psi(x, t)$ de (2.1) satisface*

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{\theta} \|\psi(\cdot, t) - \psi e^{i\theta}\|_{H^1} < \epsilon \quad (2.4)$$

En la referencia (Fibich *et al.*, 2006) se probó que para modulaciones periódicas de la no linealidad, un estado acotado positivo ϕ de la INLSE es dinámicamente estable si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones

$$n_-(\widetilde{L}_1) \leq 1 \quad (\text{criterio espectral}), \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} > 0 \quad (\text{criterio de Vakhitov-Kolokolov}), \quad (2.5b)$$

donde $n_-(\widetilde{L}_1)$ es el número de autovalores negativos del operador \widetilde{L}_1 , y

$$N = \int |\phi_\lambda|^2 dx \quad (2.6)$$

es la norma $L^2(\mathbb{R})$ de la solución. Es fácil ver que este mismo criterio puede aplicarse al caso estudiado aquí, es decir, para el caso de no linealidades localizadas y positivas.

2.3. NO LINEALIDADES HOMOGÉNEAS: CRITERIO DE VAKHITOV-KOLOKOLOV

En el caso de no linealidades homogéneas ($g = 1$), el operador (2.3) es de la forma

$$L_1 = -\frac{1}{2}\partial_{xx} + \lambda - 3\phi^2. \quad (2.7)$$

El problema de autovalores asociado a este operador es

$$L_1 u = \omega u, \quad u(\pm\infty) = 0. \quad (2.8)$$

El espectro de L_1 está compuesto de (Grillakis *et al.*, 1987; Weinstein, 1985):

1. Un autovalor negativo simple, ω_m , con su correspondiente autofunción par f_m .
2. Un autovalor simple, $\omega_0 = 0$, con su correspondiente autofunción impar $\partial_x \phi$.
3. Un espectro continuo estrictamente positivo $[\lambda, \infty)$.

Entonces, $n_-(L_1) = 1$ y la estabilidad de las soluciones estacionarias en el caso de no linealidades homogéneas se determina usando el criterio de Vakhitov-Kolokolov. Para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica, $\partial N / \partial \lambda > 0$ y la solución positiva (el solitón sech) es estable.

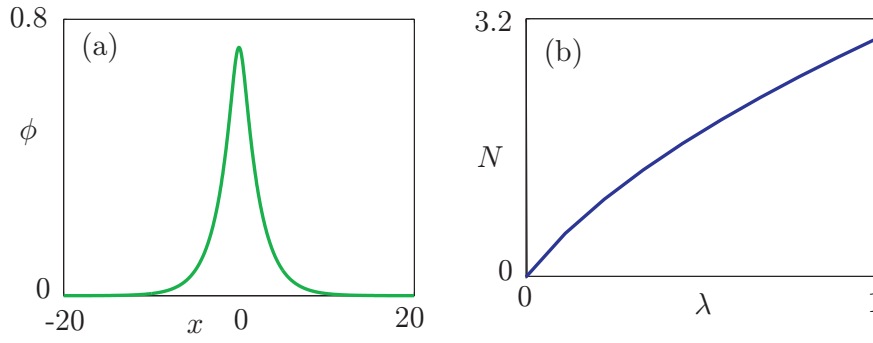


Figura 2.1: (a) Representación del estado fundamental (solución sin nodos), perteneciente a la familia infinita de soluciones dada por la ecuación (2.12), para $g_0 = 1$. (b) Representación de la norma N en $L^2(\mathbb{R})$ en función del parámetro λ para el estado fundamental del apartado (a). Se verifica que $\partial N/\partial \lambda > 0$ en todo el dominio y por tanto, se satisface el criterio de Vakhitov-Kolokolov.

2.4. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES POSITIVAS EN EL CASO INHOMOGÉNEO

En esta sección se considerará una no linealidad inhomogénea $g(x)$, satisfaciendo las propiedades de que sea una función localizada, par y positiva. Consideraremos el caso para el cual ϕ es una solución positiva de la ecuación (2.2), que es el caso del llamado estado fundamental. En lo que sigue, analizaremos el espectro de \widetilde{L}_1 .

Entonces, siguiendo la referencia (Coddington & Levinson, 1955) es fácil probar que los autovalores del operador adjunto \widetilde{L}_1 son reales y simples. Además, usando la simetría de la función $g(x)$, se puede probar que las autofunciones de \widetilde{L}_1 o son pares o son impares.

Así, podemos estudiar el espectro de \widetilde{L}_1 . Este espectro es similar al espectro de L_1 , ya que está compuesto de varios autovalores discretos y de un espectro continuo. En este caso, el número de autovalores puede ser mayor que dos. Denotemos por ω_{\min} y ω_1 el primer y segundo autovalor, respectivamente y al espectro continuo por $[\lambda, \infty)$.

De la caracterización variacional del principal autovalor de \widetilde{L}_1 (Evans, 1998; Coddington & Levinson, 1955), obtenemos la fórmula de Rayleigh:

$$\omega_{\min} = \min_{\phi \in H^1, \phi \neq 0} \frac{\langle \widetilde{L}_1 \phi, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle}. \quad (2.9)$$

Puesto que $\langle \phi, \phi \rangle > 0$, y usando el hecho de que $\widetilde{L}_0 \phi = 0$ (definido en la introducción), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{L}_1 \phi, \phi \rangle &= \left\langle -\frac{1}{2} \phi_{xx} + \lambda \phi - 3g(x)\phi^3, \phi \right\rangle = \\ &= \left\langle -\frac{1}{2} \phi_{xx} + \lambda \phi - g(x)\phi^3 - 2g(x)\phi^3, \phi \right\rangle = \\ &= -2 \langle g(x)\phi^3, \phi \rangle < 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

de donde concluimos que $\omega_{\min} < 0$ que, junto con la ecuación (2.5), implica que el signo del segundo autovalor determina la estabilidad. Para el caso del espectro continuo, como $g(x)$ es acotado, se tiene que $g(x)\phi^2$ decae a cero en infinito. Además, en este caso, el espectro esencial es igual al espectro continuo. Así, usando el teorema de Weyl sobre la estabilidad del espectro esencial, se tiene que el espectro continuo de \widetilde{L}_1 es igual al

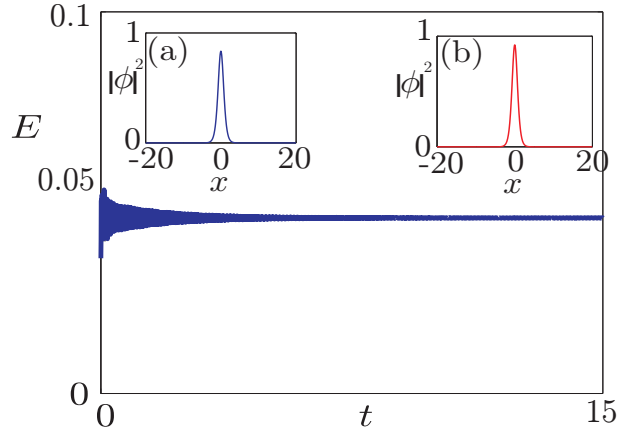


Figura 2.2: Evolución del estado fundamental con una perturbación de un 5% en amplitud (a) Estado fundamental inicial para $t = 0$ y (b) Evolución del estado fundamental bajo la perturbación anterior para $t = 15$. La parte inferior del gráfico muestra la evolución del error $E = \|\psi_p(x, t) - \psi(x, 0)\|_{L^\infty}$.

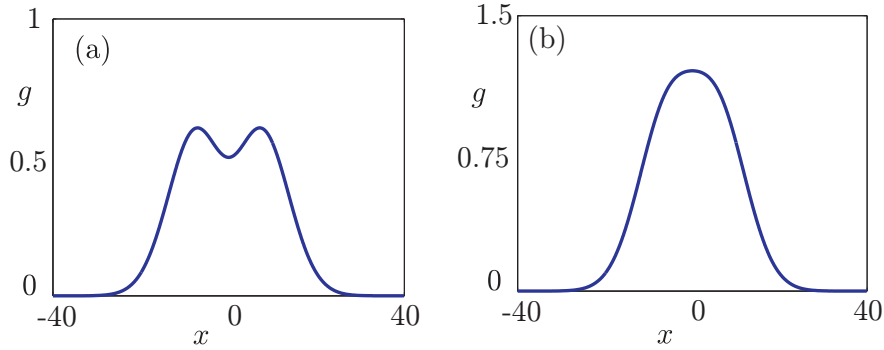


Figura 2.3: Distintas funciones $g(x)$, dadas por la ecuación (2.14) para $\gamma = 0,1$, $\lambda = 0,5$ y (a) $\beta = 0,5$, (b) $\beta = 1,2$.

espectro del operador $L = -(1/2)\partial_{xx} + \lambda$. Usando, entonces, la transformada de Fourier, se tiene que el espectro continuo viene dado por $[\lambda, \infty)$.

En conclusión, la condición espectral para la estabilidad de la solución positiva puede ser reducida al estudio del signo del segundo autovalor discreto de \tilde{L}_1 , el cual obviamente dependerá de la forma específica de la función $g(x)$.

2.5. EJEMPLO 1: NO LINEALIDADES LOCALIZADAS EXPONENCIALMENTE

En primer lugar, estudiaremos la estabilidad del estado fundamental bajo una modulación espacial de la forma

$$g(x) = \frac{g_0}{\cosh^3 x}, \quad (2.11)$$

con $g_0 > 0$. Esta función es una función positiva y exponencialmente localizada. Para el valor específico de $\lambda = 1/8$ es posible encontrar explícitamente un conjunto infinito de soluciones estacionarias

$$\psi_n(t, x) = \psi_0 \sqrt{\cosh x} \frac{\text{sn}(\xi(x), k_n)}{\text{dn}(\xi(x), k_n)} \exp\left(\frac{it}{8}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

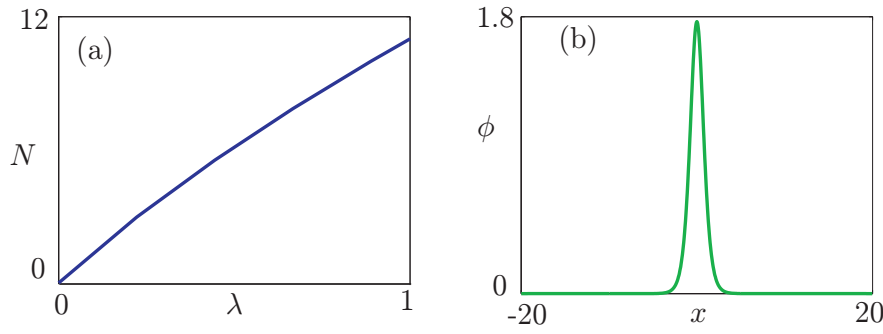


Figura 2.4: (a) Representación de la norma N en $L^2(\mathbb{R})$ en función del autovalor λ , para $\gamma = 0,1$, $\beta = 0,25$ y $\lambda = 0,5$. Como se muestra, $\partial N/\partial\lambda > 0$ en todo el dominio $\lambda \in [0, 1]$. (b) Solución fundamental de la ecuación (2.2), calculada para la no linealidad (2.14), con $\gamma = 0,1$, $\beta = 0,25$ y $\lambda = 0,5$.

donde sn y dn son las funciones elípticas de Jacobi, $|\psi_0|^2 = k_n^2(1 - k_n^2)/[4|g_0|(1 - 2k_n^2)]$ y

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2k_n^2}} \text{atan}(e^x). \quad (2.13)$$

El modulo de la función elíptica k_n viene dado por las soluciones de la ecuación $\frac{4}{\pi}\sqrt{1 - 2k^2}K(k) = 1/n$, para $n = 1, 2, \dots$, donde el valor de $K(k)$ viene dado por $K(k) = \int_0^{\pi/2} dx/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$, que garantiza el que $\psi(t, \pm\infty) = 0$. En la figura 2.1(a) dibujamos la solución positiva para $n = 1$, con $g_0 = 1$. Se tiene que el número de ceros para estas soluciones es igual al valor $n - 1$.

Si calculamos el número de autovalores negativos del operador \widetilde{L}_1 de forma numérica, donde hemos usado un método de diferencias finitas de segundo orden para \widetilde{L}_1 , y hemos usado una malla de 400 puntos, obtenemos que $n_-(\widetilde{L}_1) = 1$.

Para probar la estabilidad del estado fundamental, tenemos también que verificar el criterio de Vakhitov-Kolokolov. En la figura 2.1(b), hemos dibujado la norma L^2 , frente al autovalor λ . Se observa que $\partial N/\partial\lambda > 0$ en todo el dominio considerado. Así, se cumple el criterio de Vakhitov-Kolokolov y el estado fundamental es estable.

Para confirmar estos resultados, hemos estudiado numéricamente la evolución del estado fundamental bajo perturbaciones de amplitud finita (de hasta un 10%) y observado la subsecuente evolución. Hemos usado una malla de $N = 400$ puntos y un paso para la variable temporal de $dt = 0,005$. Además, se ha incluido un potencial absorbente en la frontera de la región de simulación para aproximar de forma apropiada la evolución del estado fundamental y poder extraer la radiación que se origina en la simulación. En la figura 2.2, se ha dibujado la norma $L^\infty(\mathbb{R})$ de la diferencia entre el estado inicial [figura 2.2(a)] y su evolución bajo el efecto de una perturbación del 5% en amplitud (la configuración final para $t = 15$ es mostrada en la figura 2.2(b)), es decir, el error viene dado por $E = \|\psi_p(x, t) - |\psi(x, 0)|\|_{L^\infty}$, donde ψ_p denota la solución perturbada.

2.6. EJEMPLO 2: EL CRITERIO V-K NO GARANTIZA LA ESTABILIDAD

Un estado puede ser inestable aunque verifique el criterio de Vakhitov-Kolokolov, un punto que a menudo es omitido en la literatura física. La violación de la condición espectral implica que el estado acotado exhibiría una inestabilidad de “arrastre”, que es diferente a la inestabilidad asociada con el incumplimiento del criterio de Vakhitov-Kolokolov. Todo esto puede verse en este segundo ejemplo.

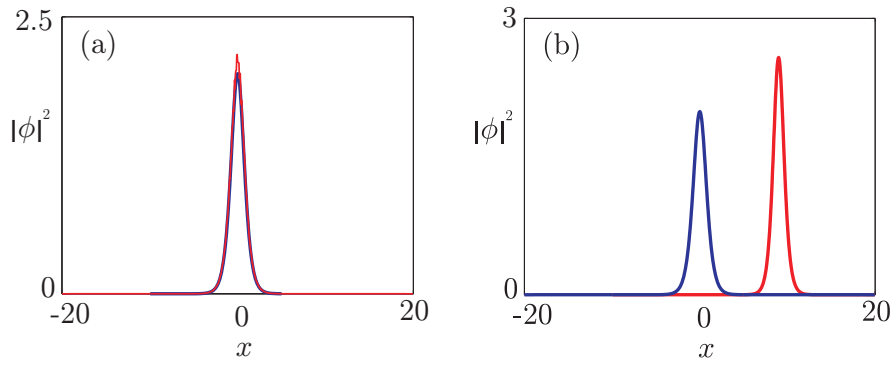


Figura 2.5: Evolución del estado fundamental bajo una pequeña perturbación de un 5 % en amplitud (a) Estado fundamental en $t = 0$ y (b) Solución perturbada en $t = 1$, para $\gamma = 0,1$ y $\beta = 0,5$. La acción de la inestabilidad de arrastre, que surge al no cumplirse el criterio espectral, lleva a la solución localizada fuera de su posición de equilibrio.

Elijamos la siguiente modulación de la no linealidad

$$g(x) = [(\gamma x)^2 + \beta] e^{-(\gamma x)^2}, \quad (2.14)$$

donde γ y β son constantes positivas.

Las figuras 2.3 (a) y (b) muestran la función $g(x)$, para $\gamma = 0,1$ y diferentes valores de β . El estado fundamental, solución de la ecuación (2.2), para esta elección de $g(x)$, con $\gamma = 0,1$ y $\beta < 1$, satisface $n_-(\widetilde{L}_1) = 2$, por lo que al no cumplirse el criterio espectral, se tiene que esta solución es inestable. Sin embargo, cuando $\beta \geq 1$ la solución de la ecuación (2.2) satisface el que $n_-(\widetilde{L}_1) = 1$, es decir, se verifica el criterio espectral.

La figura 2.4(a) muestra la norma en $L^2(\mathbb{R})$ del estado fundamental, en función del autovalor λ , para $\gamma = 0,1$ y $\beta = 0,25$. Notemos que para este caso, $n_-(\widetilde{L}_1) = 2$. Así, el criterio de Vakhitov-Kolokolov se satisface, pero la condición espectral no se cumple.

Por tanto, el estado acotado mostrado en la figura 2.4(b) tendría que ser inestable. Hemos verificado este hecho realizando simulaciones numéricas directas de la ecuación en derivadas parciales con el dato inicial perturbado y hemos encontrado que, efectivamente, existe una inestabilidad de arrastre, que lleva a la solución fuera de su posición de equilibrio. Esto puede verse en la figura 2.5, donde la figura 2.5(b) muestra que para $t = 1$, la solución localizada está fuera de su posición de equilibrio, para $\beta = 0,5$ (donde $n_-(\widetilde{L}_1) = 2$). Así, se tiene un ejemplo donde se prueba que solamente el que se satisfaga el criterio de Vakhitov-Kolokolov no garantiza la estabilidad de la solución.

Existencia de solitones oscuros para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica con no linealidad periódica

3.1. INTRODUCCIÓN

EN este trabajo, se dará una prueba de la existencia de solitones oscuros o solitones dark para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica con no linealidad modulada espacialmente y periódica. Este trabajo se basa en el estudio hecho en la referencia (Torres & Konotop, 2008). El hecho de que la función que modula al término no lineal sea periódica tiene interesantes aplicaciones físicas en redes ópticas, tal y como puede verse en las referencias (Abdullaev & Garnier, 2005; Fibich *et al.*, 2006; Sivan *et al.*, 2006).

Desde el punto de vista matemático, la estrategia de la prueba combina diferentes técnicas, tales como teoría clásica de EDO's (conceptos de sub y super solución), topología y sistemas dinámicos (grado topológico y homeomorfismos libres).

3.2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS

Sea la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea (INLSE) en \mathbb{R} ,

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + g(x)|\psi|^2\psi, \quad (3.1)$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica de período T que satisface las siguientes propiedades:

$$0 < g_{\min} \leq g(x) \leq g_{\max}, \quad (3.2a)$$

$$g(x) = g(-x). \quad (3.2b)$$

La solución del tipo onda solitaria de (3.1) viene dada por $\psi(x, t) = \phi(x)e^{i\lambda t}$, donde $\phi(x)$ es solución de

$$-\frac{1}{2}\phi_{xx} + \lambda\phi + g(x)\phi^3 = 0. \quad (3.3)$$

La solución ϕ de la ecuación (3.3) es definida como un solitón oscuro si verifica las siguientes condiciones de frontera,

$$\frac{\phi(x)}{\phi_{\pm}(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (3.4)$$

donde las funciones $\phi_{\pm}(x)$ son soluciones reales de la ecuación (3.3), con período T y de signo definido.

Analizaremos cuáles pueden ser los valores de λ para los que se pueden obtener soluciones no triviales de la ecuación (3.3).

Teorema 3.1 *Si $\lambda \geq 0$, la única solución acotada de la ecuación (3.3) es la trivial, $\phi = 0$.*

Demostración. Sea ϕ una solución no trivial de la ecuación (3.3). Podemos suponer que tal solución es positiva en un intervalo I (de lo contrario, tomaríamos $-\phi$). Entonces

$$\phi_{xx}(x_0) = 2\lambda\phi(x_0) + 2g(x_0)\phi^3(x_0) > 0, \quad (3.5)$$

para todo $x_0 \in I$. Si I es un intervalo acotado, integrando la ecuación (3.3) sobre I llegamos a una contradicción. Por otro lado, si I es un intervalo no acotado, se tiene una función convexa y acotada sobre un intervalo no acotado, lo cual es imposible. ■

Así, debido al teorema anterior, tomaremos $\lambda < 0$ a lo largo de este capítulo. Como $g_{\min} \leq g(x) \leq g_{\max}$, podemos considerar las siguientes ecuaciones autónomas auxiliares:

$$-\frac{1}{2}\phi_{xx}^{(1)} + \lambda\phi^{(1)} + g_{\min}(\phi^{(1)})^3 = 0, \quad (3.6)$$

$$-\frac{1}{2}\phi_{xx}^{(2)} + \lambda\phi^{(2)} + g_{\max}(\phi^{(2)})^3 = 0. \quad (3.7)$$

Estas ecuaciones tienen dos puntos de equilibrio no triviales

$$\xi^{(1)} = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{g_{\min}}}, \quad (3.8)$$

$$\xi^{(2)} = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{g_{\max}}}. \quad (3.9)$$

Estos puntos son puntos hiperbólicos (puntos silla). Denotamos por $\xi^{(i)}$ a los puntos de equilibrio positivos, donde $i = 1, 2$. Se tiene que $\xi^{(1)} > \xi^{(2)}$.

Antes de continuar, daremos una serie de resultados sobre ecuaciones de segundo orden. Estos resultados son conocidos (De Coster & Habets, 1996) y serán de utilidad en lo que sigue.

Sea la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$u_{xx} = f(x, u), \quad (3.10)$$

con f continua con respecto a ambos argumentos y con período T en la variable x .

Definición 3.1 (i) *Decimos que $\bar{u} : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una subsolución de la ecuación (3.10) si*

$$\bar{u}_{xx} > f(x, \bar{u}), \quad (3.11)$$

para todo $x > a$.

(ii) *De forma similar, $\underline{u} : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una supersolución de la ecuación (3.10) si*

$$\underline{u}_{xx} < f(x, \underline{u}), \quad (3.12)$$

para todo $x > a$.

En la siguiente proposición, se prueba la existencia de una solución con período T e inestable entre los puntos $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$.

Proposición 3.1 *Los puntos $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$, que han sido calculados anteriormente, son, respectivamente, soluciones constantes del tipo supersolución y subsolución de la ecuación (3.3). Además, existe una solución periódica inestable entre ambos puntos.*

Demostracion. Usando la ecuación (3.6) obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\xi_{xx}^{(1)} + \lambda\xi^{(1)} + g(x)(\xi^{(1)})^3 > \lambda\xi^{(1)} + g_{min}(\xi^{(1)})^3 = 0, \quad (3.13)$$

y, de forma similar, usando la ecuación (3.7):

$$-\frac{1}{2}\xi_{xx}^{(2)} + \lambda\xi^{(2)} + g(x)(\xi^{(2)})^3 < \lambda\xi^{(2)} + g_{max}(\xi^{(2)})^3 = 0. \quad (3.14)$$

Asi, usando la definición anterior, se tiene que $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ son super- y sub- soluciones, respectivamente. Siguiendo (De Coster & Habets, 1996), se tiene que existe una solución periódica con período T entre ambas soluciones. Como el índice de Brouwer asociado a la aplicación de Poincaré es -1 (ver, por ejemplo (Ortega, 1995)), tal solución es inestable.

Por tanto, tenemos una solución positiva, periódica, de período T de la ecuación (3.3), $\phi_+(x)$, satisfaciendo $\xi^{(2)} \leq \phi_+(x) \leq \xi^{(1)}$. Usando la simetría de la ecuación, también obtenemos una solución negativa $\phi_-(x) = -\phi_+(x)$. ■

3.3. EXISTENCIA DE SOLITONES OSCUROS

En esta sección, probaremos la existencia de una órbita heteroclinica conectando las soluciones periódicas ϕ_- y ϕ_+ .

El siguiente teorema es clave en nuestros resultados. Su demostración puede encontrarse en la referencia (Torres & Konotop, 2008), donde se usaron algunas ideas que aparecen en la referencia (Campos & Torres, 1999).

Teorema 3.2 Sean las siguientes funciones acotadas $u, v : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ verificando

1. $u(x) < v(x), \quad \forall x > a,$
2. $u_{xx}(x) > f(x, u)$ y $v_{xx}(x) < f(x, v), \quad \forall x > a.$

Entonces, existe una solución $\phi(x)$ de la ecuación (3.10) tal que

$$u(x) < \phi(x) < v(x). \quad (3.15)$$

Si además, existe x tal que

3. $\min_{\substack{x \in [0, T] \\ u \in [\inf_{x \geq a} u(x), \sup_{x \geq a} v(x)]}} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} > 0$

entonces, existe una solución $\rho(x)$, T -periódica tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|\phi(x) - \rho(x)| + |\phi_x(x) - \rho_x(x)|) = 0. \quad (3.16)$$

Ademas, $\rho(x)$ es la única solución T -periódica en el intervalo $[\inf_{x \geq x_0} u(x), \sup_{x \geq x_0} v(x)]$.

En lo que sigue, aplicaremos este teorema a nuestro modelo. Sea

$$f(x, \phi) = 2\lambda\phi(x) + 2g(x)\phi^3(x). \quad (3.17)$$

Como $g(x)$ es una función simétrica, podemos considerar el plano semi-infinito $x \geq 0$ y luego, extender la solución obtenida $\phi(x)$ como una función impar a $x < 0$. Las soluciones de las ecuaciones (3.6) y (3.7), $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$, que son órbitas heteroclinas uniendo $-\xi^{(1)}$ con $\xi^{(1)}$ y $-\xi^{(2)}$ con $\xi^{(2)}$, respectivamente, satisfacen las condiciones (1) y (2) del Teorema 3.2, con $v(x) = \phi^{(1)}(x)$ y $u(x) = \phi^{(2)}(x)$. Tenemos así una solución acotada $\phi(x)$ de la ecuación (3.3) tal que

$$\phi^{(2)}(x) < \phi(x) < \phi^{(1)}(x) \quad (3.18)$$

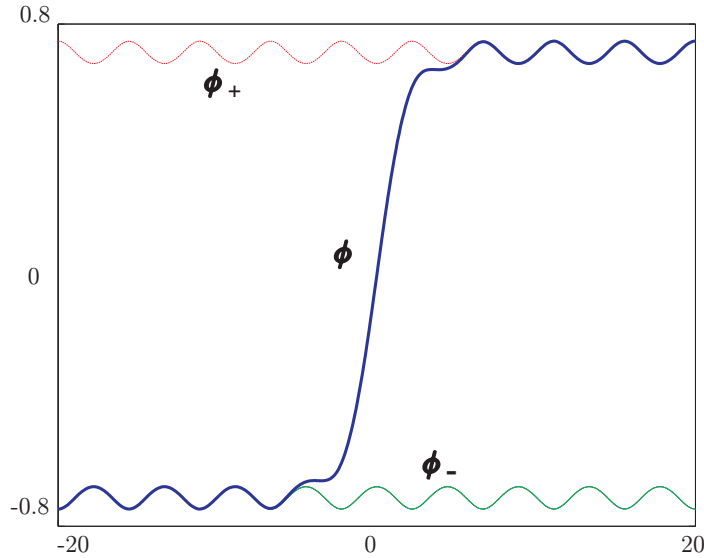


Figura 3.1: Representación del solitón oscuro $\phi(x)$ (línea azul) y de las soluciones periódicas hiperbólicas $\phi_{\pm}(x)$ (líneas roja y verde), para los valores $\lambda = -0,5$, $g_0 = 1$, $\alpha = 0,1$.

Ahora, probemos que $\phi(x)$ tiende a las funciones $\phi_+(x)$ y $\phi_-(x)$, encontradas en la proposición 1, cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Para ello, veamos que se verifica la condición (3) del Teorema 2.

Como a puede ser tomado arbitrariamente grande, la condición (3) es equivalente a

$$\min_{\substack{x \in [0, T] \\ u \in [\xi^{(2)}, \xi^{(1)}]}} [2\lambda + 6g(x)u^2] > 0 \quad (3.19)$$

Esta última desigualdad es equivalente a $2\lambda + 6g_{\min}(\xi^{(2)})^2 > 0$. Usando la ecuación (3.9) y el hecho de que $\lambda < 0$, se obtiene la siguiente condición entre g_{\min} y g_{\max} :

$$g_{\min} > \frac{g_{\max}}{3}. \quad (3.20)$$

Así, si se verifica esta condición, se cumplirían las hipótesis del Teorema 2 y se habría probado la existencia de solitones oscuros para la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea y periódica.

3.4. UN EJEMPLO DE SOLITÓN OSCURO

En esta sección, consideraremos un ejemplo de solitón oscuro proveniente de la ecuación (3.3), que ilustrará los conceptos previamente introducidos en este estudio. Para este ejemplo, tomaremos la función periódica $g(x)$ como

$$g(x) = \frac{g_0}{(1 + \alpha \cos(\omega x))^3} \quad (3.21)$$

con $\omega = 2\sqrt{|\lambda|}$ donde g_0 y $\alpha < 1$ son constantes positivas. Para que se satisfaga la condición (3.20), α debe verificar la relación $\alpha < (3^{1/3} - 1)/(3^{1/3} + 1)$.

La condición de frontera ϕ_+ viene dada por

$$\phi_+ = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha \cos \omega x)}{g_0}} \quad (3.22)$$

y $\phi_- = -\phi_+$.

En el capítulo 6, veremos que una solución analítica de la ecuación (3.3), con las condiciones de frontera (3.4), viene dada por

$$\phi(x) = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{g_0}} \sqrt{1+\alpha \cos \omega x} \tanh \left[\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}} X(x) \right] \quad (3.23)$$

con $X(t)$ dado por

$$\tan \left(\frac{\omega}{2} \sqrt{1-\alpha^2} X(x) \right) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \tan \frac{\omega x}{2}. \quad (3.24)$$

Esta solución está dibujada en la figura 3.1.

Capítulo 4

Existencia de solitones brillantes para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbico-quíntica con no linealidad inhomogénea

4.1. INTRODUCCIÓN

EN este capítulo, se probará la existencia de solitones brillantes o solitones bright para la ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea cúbico-quíntica estacionaria. Para ello usaremos la teoría de puntos críticos. Se utilizará una aproximación variacional para dicha ecuación, y probaremos que esta satisface las condiciones del teorema de Mountain-Pass o teorema del paso de la montaña.

4.2. LA APROXIMACIÓN VARIACIONAL

Sea la ecuación de Schrödinger no lineal cúbico-quíntica dependiente del tiempo, con no linealidades inhomogéneas $g_i(x)$, $i = 1, 2$, definida en \mathbb{R} , que denotaremos por (CQINLSE),

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - g_1(x)|\psi|^2\psi - g_2(x)|\psi|^4\psi, \quad (4.1)$$

con $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Ambas funciones satisfacen las siguientes propiedades:

$$g_i \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad g_i(x) > 0, \quad y \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Como ya hemos visto en capítulos anteriores, podemos hacer separación de variables, $\psi(x, t) = e^{i\lambda t}u(x)$, donde $u(x)$ es solución de la ecuación

$$-u_{xx} + \lambda u = g_1(x)u^3 + g_2(x)u^5, \quad (4.3)$$

y tal que puede ser identificado como solitón brillante, debido a sus condiciones de frontera

$$u(x) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow \pm\infty. \quad (4.4)$$

Al estar buscando soluciones positivas para $\lambda > 0$, la ecuación (4.3) puede ser escrita como

$$-u_{xx} + \lambda u = g_1(x)|u|^2u^+ + g_2(x)|u|^4u^+, \quad (4.5)$$

donde $u^+ = \max(u, 0)$. Por conveniencia, escribiremos u en lugar de u^+ en la prueba de existencia, pero teniendo en cuenta que u es una solución positiva de la ecuación (4.3).

El siguiente teorema proporciona la existencia de soluciones positivas para $\lambda > 0$.

Teorema 4.1 [Existencia de una solución positiva]. Cuando $\lambda > 0$, la ecuación (4.3) tiene una solución positiva $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Antes de probar este teorema, introduciremos un conjunto de definiciones y lemas preparatorios. Formalmente, la ecuación (4.3) es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional $J : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|u_x|^2 + \lambda|u|^2] dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} g_1(x)|u|^4 dx - \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} g_2(x)|u|^6 dx. \quad (4.6)$$

Definimos también

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 + \lambda|u|^2 dx, \quad (4.7)$$

$$\Psi_1(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} g_1(x)|u|^4 dx, \quad (4.8)$$

$$\Psi_2(u) = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} g_2(x)|u|^6 dx. \quad (4.9)$$

Así, podemos reescribir el funcional (4.6) de la siguiente forma,

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \Psi_1(u) - \Psi_2(u). \quad (4.10)$$

Es muy fácil comprobar que, para cada $\lambda > 0$, $\|\cdot\|$ es una norma equivalente a la norma usual en $H^1(\mathbb{R})$. Claramente, J es de clase C^2 y sus puntos críticos son soluciones de la ecuación (4.3), tales que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0$.

4.3. EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN POSITIVA

Para obtener puntos críticos de J , usaremos el teorema de Mountain-Pass, (Ambrosetti & Rabinowitz, 1973). Este teorema trata con la existencia de puntos críticos de un funcional $J \in C^1((E), \mathbb{R})$, donde E es un espacio de Hilbert (aunque en general, E puede ser un espacio de Banach), y tal que satisface las dos siguientes condiciones “geométricas”:

MP₁ Existen $r, \rho > 0$ tal que $J(u) \geq \rho$ para todo $u \in E$, con $\|u\| = r$.

MP₂ Existe $v \in E$, $\|v\| > r$ tal que $J(v) \leq 0 = J(0)$.

Además, se probará la condición de compacidad $(PS)_c$, llamada la condición de Palais-Smale a nivel c :

Cada sucesión u_n que verifica

1. $J(u_n) \rightarrow c$,
2. $J'(u_n) \rightarrow 0$,

tiene una subsucesión convergente. Las sucesiones satisfaciendo (1)-(2) son llamadas sucesiones $(PS)_c$.

Consideremos la clase de todos los caminos que unen $u = 0$ y $u = v$:

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}, \quad (4.11)$$

y sea

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)). \quad (4.12)$$

Por conveniencia, enunciaremos una versión simplificada del teorema de Mountain-Pass, (un enunciado más general puede verse en (Ambrosetti & Rabinowitz, 1973))

Teorema 4.2 [Teorema de Mountain-Pass]. Si $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisface las condiciones geométricas (1) y (2) y se cumple la condición de Palais-Smale $(PS)_c$, entonces c es un nivel crítico positivo para J . De forma mas precisa, existe $z \in E$ tal que $J(z) = c > 0$ y $J'(z) = 0$. En particular, $z \neq 0$ y $z \neq v$.

Una vez enunciado el teorema de Mountain-Pass, pasamos a enunciar el siguiente lema:

Lema 4.1 El funcional J satisface las condiciones geométricas del teorema de Mountain-Pass

Demostración: 1) De la definición de J , la hipótesis (3.2a) sobre $g_i, i = 1, 2$, y el embebimiento de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 2$, (ver, por ejemplo, (Willem, 1996)), obtenemos que

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Psi_1(u) - \Psi_2(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^4 - M\|u\|^6, \quad (4.13)$$

donde C y M son constantes positivas. En consecuencia, existen $r, \rho > 0$ tal que

$$J(u) \geq \rho, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}), \quad \text{con } \|u\| = r, \quad (4.14)$$

lo cual prueba que J verifica la condición MP_1 .

2) Consideremos $v_0 \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Entonces, para $t > 0$, se verifica que

$$J(tv_0) = \frac{t^2}{2}\|v_0\|_\lambda^2 - t^4\Psi_1(v_0) - t^6\Psi_2(v_0) \searrow -\infty, \quad \text{cuando } t \nearrow \infty. \quad (4.15)$$

En consecuencia, tomando $v = t_0 v_0$ con $t_0 \gg 1$ obtenemos $J_\lambda(v) < 0 = J_\lambda(0)$. De aquí, se sigue que $J(tv) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. ■

Ahora, para aplicar el teorema de Mountain Pass, tenemos que estudiar las sucesiones de Palais-Smale $(PS)_c$.

Lema 4.2 Las sucesiones de Palais-Smale son acotadas.

Demostración: De la condición (1), en la definición de sucesión de Palais-Smale, $J(u_n) \leq k$ y se obtiene que

$$\|u_n\|^2 \leq 2k + 2\Psi_1(u_n) + 2\Psi_2(u_n). \quad (4.16)$$

Como $J'(u_n) \rightarrow 0$, se infiere que

$$\left| \|u_n\|^2 - 4\Psi_1(u_n) - 6\Psi_2(u_n) \right| = |(J'(u_n)|u_n)| \leq \|J'(u_n)\| \|u_n\| = \epsilon \|u_n\|, \quad (4.17)$$

para $\epsilon > 0$. Así

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(x)u_n^4 + \int_{\mathbb{R}} g_2(x)u_n^6 \leq \|u_n\|^2 + \epsilon \|u_n\|. \quad (4.18)$$

Usando la ecuación (4.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &\leq 2k + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g_1(x)u_n^4 + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} g_2(x)u_n^6 \leq \\ &\leq 2k + \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}} g_1(x)u_n^4 + \int_{\mathbb{R}} g_2(x)u_n^6 \right] \leq 2k + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|u_n\|, \end{aligned} \quad (4.19)$$

y así, para todo n y algún k , se deduce que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 \leq 2k + \frac{\epsilon}{2}\|u_n\|. \quad (4.20)$$

De esta forma, se deduce que $\|u_n\| \leq K$, y la acotación de sucesiones de (PS) es clara. ■

Lema 4.3 Ψ_i es debilmente continuo y compacto, para cada $i = 1, 2$.

Demostración: Sea la sucesión u_n tal que $u_n \rightharpoonup u$, esto es, converge debilmente en $H^1(\mathbb{R})$. Como cualquier sucesión que converja debilmente es acotada, es decir, existe una constante $K > 0$ tal que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq K$, entonces, de acuerdo al teorema de embebimiento de Sobolev deben existir constantes $C, M > 0$ tales que $\|u_n\|_{L^4(\mathbb{R})} < C$ y $\|u_n\|_{L^6(\mathbb{R})} < M$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, de la condición (4.2), se sigue que existen $R_1, R_2 > 0$ tales que

$$\int_{|x| \geq R_1} g_1(x)(|u_n|^4 - |u|^4) dx \leq \epsilon, \quad (4.21)$$

$$\int_{|x| \geq R_2} g_2(x)(|u_n|^6 - |u|^6) dx \leq \epsilon. \quad (4.22)$$

Por otro lado, sean B_{R_1} y B_{R_2} entornos abiertos de radios R_1 y R_2 respectivamente. Dado que $H^1(B_{R_1})$ se inyecta de forma compacta en $L^4(B_{R_1})$ y también $H^1(B_{R_2})$ se inyecta de forma compacta en $L^6(B_{R_2})$, se tiene que $u_n \rightarrow u$ fuertemente en $L^4(B_{R_1})$ y $L^6(B_{R_2})$, respectivamente. Además, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| \left[\int_{|x| \leq R_1} g_1(x)|u_n|^4 dx \right]^{1/4} - \left[\int_{|x| \leq R_1} g_1(x)|u|^4 dx \right]^{1/4} \right| = \\ & = \left| \|g_1^{1/4} u_n\|_{L^4(B_{R_1})} - \|g_1^{1/4} u\|_{L^4(B_{R_1})} \right| \leq \|g_1^{1/4}(u_n - u)\|_{L^4(B_{R_1})} \leq M \|u_n - u\|_{L^4(B_{R_1})} \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (4.23)$$

para $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande. Es facil comprobar que una desigualdad similar existe para $g_2(x)$. Entonces, poniendo juntas las dos desigualdades precedentes, se sigue que $\Psi_i, i = 1, 2$ es debilmente continuo.

La prueba de que $\Psi'_i, i = 1, 2$ es un operador compacto es similar. Sea

$$\|\Psi'_1(u_n) - \Psi'_1(u)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left\{ \int g_1(x)(|u_n|^3 - |u|^3)\varphi dx \right\}, \quad (4.24)$$

para $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$. Usando la desigualdad de Holder, se obtiene

$$\|\Psi'_1(u_n) - \Psi'_1(u)\| \leq \|g_1(x)(|u_n|^3 - |u|^3)\|_{L^p(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})}. \quad (4.25)$$

con $1/p + 1/q = 1, p \geq 2, q < \infty$. Usando los argumentos anteriormente expuestos, se tiene que

$$\|g_1(x)(|u_n|^3 - |u|^3)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad (4.26)$$

para $n \gg 1$ y $\epsilon > 0$. Esto demuestra que Ψ'_1 es un operador compacto. La prueba para Ψ'_2 es similar. ■

Finalmente, ahora estamos preparados para probar el teorema 4.1.

Sea u_n una sucesión que verifica las condiciones de Palais-Smale (1) y (2). Como $\|u_n\| \leq K$, se tiene que $u_n \rightharpoonup u$ debilmente en $H^1(\mathbb{R})$. Usando el lema (4.3), Ψ'_i , para $i = 1, 2$, es compacto. Por tanto, existe una subsucesión, también denotada por u_n , tal que $\Psi'_i(u_n) \rightarrow \Psi'_i(u)$.

Por otro lado, sabemos que

$$J'(u) = u - \Psi'_1(u) - \Psi'_2(u), \quad (4.27)$$

puesto que $J'(u)$ esta definido como

$$(J'(u)|\zeta) = (u|\zeta) - (\Psi'_1(u)|\zeta) - (\Psi'_2(u)|\zeta), \quad \forall \zeta \in H^1(\mathbb{R}), \quad (4.28)$$

y

$$(\Psi'_1(u)|\zeta) = \int_{\mathbb{R}} g_1(x)u^3\zeta, \quad (4.29)$$

$$(\Psi'_2(u)|\zeta) = \int_{\mathbb{R}} g_2(x)u^5\zeta. \quad (4.30)$$

De aquí, se deduce que

$$u_n = J'(u_n) + \Psi'_1(u_n) + \Psi'_2(u_n). \quad (4.31)$$

Como $J'(u_n) \rightarrow 0$, dado que u_n es una sucesión de Palais-Smale, obtenemos que

$$u_n \rightarrow \Psi'_1(u) + \Psi'_2(u), \quad (4.32)$$

probando que $(PS)_c$ se cumple para cada c .

De esta forma, podemos aplicar el teorema de Mountain-Pass (4.2), ya que las condiciones de este teorema se satisfacen, tal y como acabamos de ver. Así, existe $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R})$, tal que $J(u_\lambda) = c$ y $J'(u_\lambda) = 0$. La positividad de la solución es clara, usando el principio del máximo, tal y como apuntábamos en la ecuación (4.5). ■

Se ha probado que para $\lambda > 0$, la ecuación (4.3) tiene una solución positiva $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Además, se puede probar que, para $\lambda = 0$, si existen soluciones diferentes de la solución trivial, estas soluciones deberían tener una cantidad infinita de nodos. Para ver esto, primero probaremos la no existencia de soluciones positivas de la ecuación

$$-u_{xx} - g_1(x)u^3 - g_2(x)u^5 = 0, \quad u(\pm\infty) = 0. \quad (4.33)$$

Sea u una solución estrictamente positiva de la ecuación (4.33). Entonces,

$$u_{xx} = -g_1(x)u^3(x) - g_2(x)u^5 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Sea x_0 un máximo global de la solución u , esto es, $u(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} u(x) > 0$. Este punto máximo existe por las condiciones de contorno. Entonces, $u'(x_0) = 0$ y, además, $u''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, en el intervalo $[x_0, +\infty)$, u debe ser decreciente y por tanto $u'(x) < 0$, $\forall x \in [x_0, +\infty)$. Luego u debe cortar al eje x , ya que $u''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, lo cual contradice la hipótesis inicial.

Como

$$u_{xx} = -g_1(x)u^3(x) - g_2(x)u^5(x) < 0, \quad \text{si } u > 0, \quad (4.35)$$

y

$$u_{xx} = -g_1(x)u^3(x) - g_2(x)u^5(x) > 0, \quad \text{si } u < 0, \quad (4.36)$$

es evidente que la solución tiene infinitos nodos.

Capítulo 5

Ondas solitarias para sistemas de Schrödinger no lineales acoplados linealmente y con coeficientes inhomogéneos

5.1. INTRODUCCIÓN

EL proposito de este capítulo es estudiar la existencia de soluciones positivas $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ para sistemas de Schrödinger no lineales con no linealidad inhomogénea en 1D

$$\begin{aligned} -u_1''(x) + a(x)u_1(x) - b(x)u_2(x) &= c(x)F(u_1, u_2)u_1, \\ -u_2''(x) + d(x)u_2(x) - e(x)u_1(x) &= f(x)H(u_1, u_2)u_2, \end{aligned} \quad (5.1a)$$

donde $a, b, c, d, e, f \in L^\infty(\mathbb{R})$ son funciones no negativas y $F(u_1, u_2)$ y $H(u_1, u_2)$ son funciones continuas.

Las soluciones buscadas deben verificar las siguientes condiciones de frontera

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_2(x) = 0, \quad (5.2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_1'(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_2'(x) = 0. \quad (5.3)$$

El estudio de la existencia de soluciones para sistemas similares a (5.1a) ha sido estudiado por muchos matemáticos en los últimos años (ver, por ejemplo, (Ambrosetti & Colorado, 2006, 2007; Ambrosetti *et al.*, 2007)). En estos trabajos, los autores mostraban la existencia de soluciones positivas para diferentes sistemas, usando teoría de puntos críticos.

Nuestra idea es completar la mencionada bibliografía con una nueva aproximación al problema. Para ello, proponemos el uso de un teorema de punto fijo debido a Krasnoselskii para operadores completamente continuos, definidos en conos de un espacio de Banach, junto con un estudio de la función de Green para la parte lineal del problema. Este método ha sido empleado de forma satisfactoria en problemas escalares sobre la recta real (Torres, 2006), y en algunos problemas con sistemas sobre dominios acotados (Chu *et al.*, 2007). Usando este tipo de técnica, probaremos la existencia de soluciones positivas del sistema (5.1a) bajo las condiciones (5.2).

El capítulo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2, introducimos algunos resultados preliminares. La sección 3 contiene el resultado principal del capítulo,

que es la existencia de órbitas homoclinas al origen o soluciones positivas. En la sección 4 probamos que, si además de las hipótesis del resultado principal de la sección 3, se asumen un conjunto de hipótesis extras en las funciones a, b, c, d, e, f , entonces, se puede demostrar que existe una segunda solución que es impar. Finalmente, la sección 5 contiene un resultado sobre el estudio de las ramas de soluciones dependientes de un parámetro.

En este trabajo, usaremos la siguiente notación: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Para una función dada, $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, el ínfimo esencial es denotado por a_* . El soporte de una función dada a es denotado por $\text{Supp}(a)$. El valor límite de una función dada u en $+\infty$ (o en $-\infty$), simplemente se escribiera como $u(+\infty)$ (o $u(-\infty)$).

5.2. PRELIMINARES

La prueba de la existencia de soluciones esta basada en el teorema del punto fijo en conos para un operador completamente continuo definido en un espacio de Banach, debido a Krasnoselskii (Krasnoselskii, 1964). Antes de escribir este teorema, introduciremos la definición de cono, la cual puede verse, por ejemplo, en la referencia (Granás & Dugundji, 2003).

Definición 5.1 Sea X un espacio de Banach y sea P un subconjunto cerrado, no vacío de X . P es un cono si

1. $\lambda x + \mu y \in P \quad \forall x, y \in P \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
2. $x, -x \in P$ implica que $x = 0$.

También queremos recordar que dado un operador, este es completamente continuo si la imagen de un conjunto acotado es relativamente compacto.

Teorema 5.1 Sea X un espacio de Banach, y sea $P \subset X$ un cono en X . Asumamos que Ω_1, Ω_2 son subconjuntos abiertos de X con $0 \in \Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ y sea $T : P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow P$ un operador completamente continuo, tal que una de las dos siguientes condiciones es satisfecha

1. $\|Tu\| \leq \|u\|$, si $u \in P \cap \partial\Omega_1$, y $\|Tu\| \geq \|u\|$, si $u \in P \cap \partial\Omega_2$.
2. $\|Tu\| \geq \|u\|$, si $u \in P \cap \partial\Omega_1$, y $\|Tu\| \leq \|u\|$, si $u \in P \cap \partial\Omega_2$.

Entonces, T tiene al menos un punto fijo en $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Este resultado ha sido empleado en el estudio de ecuaciones no lineales (Torres, 2006; Zima, 2001) y también en el estudio de sistemas no lineales sobre dominios acotados (Chu *et al.*, 2007; Jiang *et al.*, 2002). Sin embargo, para problemas definidos en intervalos no compactos tales como el nuestro, se tiene que el teorema de Ascoli-Arzelà no es válido para probar que el operador es completamente continuo. Nuestro operador será definido en el espacio de funciones continuas y acotadas denotado por $BC(\mathbb{R})$ y emplearemos el siguiente criterio de compacidad (inspirado en un resultado de (Zima, 2001)) para mostrar que el operador es completamente continuo.

Proposición 5.1 Sea $\Omega \subset BC(\mathbb{R})$. Supongamos que las funciones $u \in \Omega$ son equicontinuas en cada intervalo compacto de \mathbb{R} y que para todo $u \in \Omega$ se tiene

$$|u(x)| \leq \xi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

donde $\xi \in BC(\mathbb{R})$ verifica

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \xi(x) = 0. \quad (5.5)$$

Entonces, Ω es relativamente compacto.

Demostración: Dada una sucesión de funciones $\{u_n\}_n$ de Ω , tenemos que probar que existe una subsucesión uniformemente convergente a una cierta función u . Queremos notar que los elementos de Ω están uniformemente acotados por $\|\xi\|_\infty$ y son equicontinuos sobre intervalos compactos, por hipótesis. Por tanto, el teorema de Ascoli-Arzelà proporciona una subsucesión (que denotaremos de nuevo por $\{u_n\}_n$) y que es uniformemente convergente a un cierto u en un intervalo compacto. Por supuesto, u también satisface la condición (5.4). Ahora, tenemos que probar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ t.q. } n \geq n_0 \implies \|u_n - u\|_\infty < \varepsilon. \quad (5.6)$$

Usando (5.5), existe un $k > 0$ tal que $\max_{x \in \mathbb{R} \setminus]-k, k[} |\xi(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Por otro lado, usando la convergencia uniforme en intervalos compactos, se tiene que existe n_0 tal que $\max_{x \in [-k, k]} |u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces,

$$\|u_n - u\|_\infty \leq \max_{x \in [-k, k]} |u_n(x) - u(x)| + \max_{x \in \mathbb{R} \setminus]-k, k[} |u_n(x) - u(x)| < \quad (5.7)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2 \max_{x \in \mathbb{R} \setminus]-k, k[} |\xi(x)| < \varepsilon, \quad (5.8)$$

y se concluye la prueba. ■

Antes de que podamos aplicar el teorema 5.1, vamos a introducir una batería de lemas y proposiciones, con el fin de preparar la aplicación de este teorema a nuestro problema.

El siguiente resultado establece la estructura de la función de Green para problemas homogéneos en todo \mathbb{R} .

Lema 5.1 *Sea $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, $a > 0$. Consideremos el problema homogéneo*

$$-\phi'' + a(x)\phi = 0, \quad (5.9)$$

$$\phi(-\infty) = 0, \phi(\infty) = 0. \quad (5.10)$$

La función de Green asociada viene dada por

$$G_1(x, s) = \begin{cases} \phi_1(x)\phi_2(s), & -\infty < x \leq s < +\infty \\ \phi_1(s)\phi_2(x), & -\infty < s \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (5.11)$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son soluciones tales que $\phi_1(-\infty) = 0, \phi_2(+\infty) = 0$. Además, ϕ_1, ϕ_2 pueden ser elegidos como funciones positivas crecientes y decrecientes, respectivamente.

Notar que ϕ_1, ϕ_2 intersectan en un único punto x_0^1 . Entonces, podemos definir una función $p_1 \in BC(\mathbb{R})$, que viene dada por

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\phi_2(x)}, & x \leq x_0^1, \\ \frac{1}{\phi_1(x)}, & x > x_0^1. \end{cases} \quad (5.12)$$

De forma similar, podemos definir la función de Green para la siguiente ecuación

$$-\varphi'' + d(x)\varphi = 0, \quad (5.13)$$

$$\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) = 0, \quad (5.14)$$

donde $d \in L^\infty(\mathbb{R})$, $d > 0$, como

$$G_2(x, s) = \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(s), & -\infty < x \leq s < +\infty \\ \varphi_1(s)\varphi_2(x), & -\infty < s \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (5.15)$$

y podemos definir una función $p_2 \in BC(\mathbb{R})$ por

$$p_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi_2(x)}, & x \leq x_0^2, \\ \frac{1}{\varphi_1(x)}, & x > x_0^2. \end{cases} \quad (5.16)$$

donde x_0^2 es el único punto de intersección de las funciones φ_1, φ_2 .

Proposición 5.2 *Se cumplen las siguientes propiedades para las funciones de Green, definidas por (5.11) y (5.15).*

(P1) $G(x, s) > 0$ para cada $(x, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(P2) $G(x, s) \leq G(s, s)$ para cada $(x, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(P3) Dado un subconjunto compacto no vacío $P \subset \mathbb{R}$, definimos

$$m(P) = \min(u_1(\inf P), u_2(\sup P)). \quad (5.17)$$

Entonces,

$$G(x, s) \geq m(P)p(s)G(s, s) \quad \text{para todo } (x, s) \in P \times \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

5.3. EXISTENCIA DE ESTADOS ACOTADOS POSITIVOS

Desde ahora, asumimos que $M = \text{Supp}(b) \cup \text{Supp}(c) \cup \text{Supp}(e) \cup \text{Supp}(f)$ es un conjunto compacto no vacío. Para aplicar el teorema 5.1, tomamos el espacio de Banach $X = BC(\mathbb{R}) \times BC(\mathbb{R})$ con la norma $\|\mathbf{u}\| = \max_{i=1,2} |u_i|$, para $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in X$. Definimos

$$P = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in X : u_1(x), u_2(x) \geq 0 \quad \forall x, \quad \min_{x \in M} u_i(x) \geq m_i p_0^i \|\mathbf{u}\| \right\}, \quad (5.19)$$

donde $p_0^1 = \inf_M p_1(x)$, $p_0^2 = \inf_M p_2(x)$ y las constantes $m_1 \equiv m_1(M)$ and $m_2 \equiv m_2(M)$ estan definidas por la ecuación (5.17). Queremos hacer notar que la compacidad de M implica que $p_0^1 > 0$ y $p_0^2 > 0$. Además, por (P3), es facil ver que $m_i p_0^i < 1$, para $i = 1, 2$. Así, facilmente se puede verificar que P es un cono en X .

Sea $T : P \rightarrow X$ una aplicación con componentes (T_1, T_2) , donde T_1, T_2 estan definidas por

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{u})(x) &= \int_{\mathbb{R}} G_1(x, s) (b(s)u_2(s) + c(s)F(u_1, u_2)u_1(s)) ds \\ &= \int_M G_1(x, s) (b(s)u_2(s) + c(s)F(u_1, u_2)u_2(s)) ds \\ T_2(\mathbf{u})(x) &= \int_{\mathbb{R}} G_2(x, s) (e(s)u_1(s) + f(s)H(u_1, u_2)u_2(s)) ds \\ &= \int_M G_2(x, s) (e(s)u_1(s) + f(s)H(u_1, u_2)u_2(s)) ds. \end{aligned}$$

Un punto fijo de T es una solución del sistema (5.1a), perteneciente a $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, y que por tanto verifica las condiciones de frontera (5.2)

Lema 5.2 *Asumamos que*

$$F(u_1, u_2), H(u_1, u_2) \geq 0 \quad \text{para cada } u_1, u_2 \geq 0. \quad (5.20)$$

Entonces, $T(P) \subset P$.

Demostración: De forma evidente, la propiedad (P1) de la función de Green junto con que $b, c \in L^\infty, b, c > 0$ implican que $T_1 \mathbf{u}(x) \geq 0$ para todo x . Llamemos a x_m el valor donde se alcanza el $\min_{x \in M} T_1 \mathbf{u}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{u})(x_m) &= T_1(u_1, u_2)(x_m) = \int_M G_1(x_m, s) (b(s)u_2(s) + c(s)F(u_1, u_2)u_1(s)) ds \\ &\geq m_1 \int_M p(s)G_1(s, s) (b(s)u_2(s) + c(s)F(u_1, u_2)u_1(s)) ds \\ &\geq m_1 p_0^1 \int_M G_1(x, s) (b(s)u_2(s) + c(s)F(u_1, u_2)u_1(s)) ds \\ &= m_1 p_0^1 T_1(u_1, u_2)(x) = m_1 p_0^1 T_1(\mathbf{u})(x), \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde hemos usado las propiedades (P2) y (P3). De forma similar, podemos probar que $T_2(\mathbf{u})(x_m) \geq m_2 p_0^2 T_2(\mathbf{u})(x)$. Esto finaliza la demostración. ■

Lema 5.3 $T : P \rightarrow P$ es un operador continuo y completamente continuo.

Demostración: La continuidad es trivial. Probemos que las componentes de T son completamente continuas. Sea $\Omega \subset P$ un conjunto acotado, con una cota uniforme $C > 0$ para todos sus elementos. Las funciones del operador $T_1(\Omega)$ son equicontinuas para cada intervalo compacto (de hecho, la derivada es acotada sobre compactos), Por otro lado, para cualquier $\mathbf{u} \in \Omega$, se tiene que

$$|T_1(\mathbf{u})(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}} G_1(x, s) b(s) ds + C \max_{\|\mathbf{u}\| \leq C} F(u_1, u_2) \int_{\mathbb{R}} G_1(x, s) c(s) ds =: \xi(x).$$

Puesto que los soportes de b y c son compactos, se tiene que $\xi \in BC(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, y, por tanto, usando la proposición 5.1, $T_1(\Omega)$ es relativamente compacto. La demostración para T_2 es análoga. ■

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección

Teorema 5.2 Asumamos las siguientes hipótesis:

(i) $a_*, d_* > 0, b_*, c_*, e_*, f_* \geq 0$.

(ii) M es un conjunto compacto no vacío.

(iii) $F(u_1, u_2), H(u_1, u_2) \geq 0$ para cada $u_1, u_2 \geq 0$.

(iv) Existe $r_0 > 0$ y $\gamma, k > 0$ tales que dado $0 < r < r_0$,

$$F(u_1, u_2), H(u_1, u_2) < kr^\gamma, \text{ para todo } \|\mathbf{u}\| < r$$

(v) Existe $R_0 > 0$ y $\delta, K > 0$ tales que dados $R > R_0$,

$$F(u_1, u_2), H(u_1, u_2) > KR^\delta, \text{ si } u_1 \in [m_1 p_0^1 R, R] \text{ o } u_2 \in [m_2 p_0^2 R, R].$$

(vi) $\int_M G_1(x, s) b(s) ds, \int_M G_2(x, s) e(s) ds < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces, existe una solución no trivial $\mathbf{u} \in X$ del sistema (5.1a)-(5.2) tal que $r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R$.

Demostración: Definamos los conjuntos abiertos Ω_1 y Ω_2 como las bolas abiertas en X centradas en el origen, de radios r y R (que serán fijados mas tarde), respectivamente. Tomemos $\mathbf{u} \in P \cap \partial\Omega_1$. Así

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{u}\| &= \max_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_M G_1(x, s) (c(s)F(u_1, u_2)u_1(s) + b(s)u_2(s)) ds, \right. \\ &\quad \left. \int_M G_2(x, s) (f(s)H(u_1, u_2)u_2(s) + e(s)u_1(s)) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq kr^{\gamma+1} \max_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_M G_1(x, s) c(s) ds, \int_M G_2(x, s) f(s) ds \right) \\ &\quad + r \max_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_M G_1(x, s) b(s) ds, \int_M G_2(x, s) e(s) ds \right) \leq r = \|\mathbf{u}\|, \end{aligned} \quad (5.22)$$

para r suficientemente pequeño y donde hemos usado las hipótesis (iv) y (vi).

Por otro lado, tomemos $\mathbf{u} \in P \cap \partial\Omega_2$. Así, al menos una componente de \mathbf{u} , por ejemplo u_1 , satisface $\|u_1\|_\infty = R$ (el caso $\|u_2\|_\infty = R$ es similar). Entonces, $m_1 p_0^1 R \leq u_1(x) \leq R$, para todo $x \in M$. Por tanto, usando la hipótesis (v) obtenemos

$$\begin{aligned} &\max_{i=1,2, x \in M} (|T\mathbf{u}|)_i \geq \max_{x \in M} \int_M G_1(x, s) (c(s)F(u_1, u_2)u_1(s) + b(s)u_2(s)) ds \\ &\geq KR^{\delta+1} \min_{x \in M} \int_M G_1(x, s) c(s) ds \geq R = \|\mathbf{u}\|, \end{aligned} \quad (5.23)$$

para R suficientemente grande. Para el caso $\|u_2\|_\infty = R$, todo funciona exactamente igual.

Ahora, el teorema 5.1 garantiza que T tiene un punto fijo $\mathbf{u} \in P \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$. Así $r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R$ es una solución no trivial. ■

Aunque la hipótesis (vi) parece bastante técnica, su significado puede clarificarse si nos damos cuenta de que la función $\int_M G_1(x, s) b(s) ds$ (respectivamente $\int_M G_2(x, s) e(s) ds$) se puede interpretar como la única solución de la ecuación $-u'' + a(x)u = b(x)$ (respectivamente $-u'' + d(x)u = e(x)$) con condiciones de frontera $u(-\infty) = 0 = u(+\infty)$. Con esta idea en mente, formularemos el siguiente corolario.

Corolario 5.1 *El resultado anterior se sigue cumpliendo si la hipótesis (vi) se reemplaza por*

$$(vi') \quad \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{b(x)}{a(x)} < 1, \quad \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{e(x)}{d(x)} < 1.$$

Demostración: Definiendo $u(x) = \int_M G_1(x, s) b(s) ds$, necesitamos probar que $\|u\|_\infty < 1$. Tomemos x_0 tal que $u(x_0) = \|u\|_\infty$. Entonces u es una función convexa en un entorno de x_0 , por lo que de la ecuación $-u'' + a(x)u = b(x)$ obtenemos que

$$u(x_0) \leq \frac{b(x_0)}{a(x_0)} < 1.$$

De la misma forma, $\int_M G_2(x, s) e(s) ds < 1$ y ya se puede aplicar el Teorema 5.2. ■

5.4. ÓRBITAS HOMOCLINAS IMPARES AL ORIGEN EN EL SISTEMA CON COEFICIENTES SIMÉTRICOS

En la sección anterior, se ha demostrado la existencia de soluciones positivas del problema en consideración, que suele ser el caso considerado en la totalidad de los trabajos conocidos por el doctorando. En esta sección, probaremos la existencia de un nuevo tipo de soluciones, para el caso en el que los coeficientes del sistema sean pares. Para ello, definamos $p_0^1 = \inf_{M \cap \mathbb{R}^+} p_1(x)$, $p_0^2 = \inf_{M \cap \mathbb{R}^+} p_2(x)$ y $m_1 \equiv m_1(M \cap \mathbb{R}^+)$, $m_2 \equiv m_2(M \cap \mathbb{R}^+)$.

Teorema 5.3 *Bajo las hipótesis del teorema 5.2, si además a, b, c, d, e, f son funciones pares y $0 \notin M$, entonces, existe una solución no trivial impar $\mathbf{u} \in X$ de la ecuación (5.1a) tal que $r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R$.*

Demostración: La demostración mimetiza los pasos de la demostración del teorema 5.2, usando ahora la función de Green para el problema definido en la semirecta real \mathbb{R}_+ . El

operador $T : H^1(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ está definido de la misma forma (T_1, T_2) , donde ahora T_1, T_2 vienen dados por

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{u})(x) &= \int_{\mathbb{R}} G_1(x, s) (b(s)u_2(s) + c(s)F(u_1, u_2)u_1(s)) ds, \\ T_2(\mathbf{u})(x) &= \int_{\mathbb{R}} G_2(x, s) (e(s)u_1(s) + f(s)H(u_1, u_2)u_2(s)) ds. \end{aligned}$$

El cono adecuado, para este caso, es

$$P = \left\{ \mathbf{u} \in BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+) : u_1(0) = u_2(0) = 0, u_1(x), u_2(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \right. \\ \left. \min_{x \in M \cap \mathbb{R}_+} u_i(x) \geq m_i p_0^i \|u_i\| \right\} \quad (5.24)$$

Entonces $T(P) \subset P$ y T es un operador continuo y completamente continuo, puesto que la proposición 5.1 puede ser aplicada a funciones u_1, u_2 definidas solamente en \mathbb{R}_+ y tales que $u_1(0) = u_2(0) = 0$, simplemente extendiendo la función constante cero al eje negativo. Finalmente, los conjuntos Ω_1 y Ω_2 son definidos otra vez como bolas abiertas de radios r y R , respectivamente. Todo funciona de la misma forma, por lo que los detalles repetitivos son omitidos. En conclusión, obtenemos una solución no trivial positiva $\|\mathbf{u}\| \in BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ tal que $u_1(0) = u_2(0) = 0$ y haciendo la extensión impar, obtenemos la solución deseada. ■

Hay que hacer notar que la suposición $0 \notin M$ es necesaria para tener $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$, que es un punto clave en la definición de cono.

Finalmente, se tiene que también se cumple un análogo al corolario 1 para este caso.

5.5. APLICACIONES FÍSICAS Y RAMAS DE SOLUCIONES EN SISTEMAS

En esta sección, analizaremos las aplicaciones físicas de nuestros principales resultados. Presentaremos dos tipos de contribuciones no lineales

$$F(u_1, u_2) = u_1^2, \quad H(u_1, u_2) = u_2^2, \quad (5.25)$$

$$F(u_1, u_2) = H(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2, \quad (5.26)$$

Desde el punto de vista físico, ambas contribuciones no lineales son interesantes y tienen interesantes aportaciones en la literatura física (ver, por ejemplo, (Zafrany *et al.*, 2005), donde se hace uso de la no linealidad (5.25) y (Williams *et al.*, 2000), donde se hace uso de la no linealidad (5.26)). Así, el sistema (5.1a), con la no linealidad (5.25), modeliza una guía de ondas con un núcleo doble, y con la no linealidad cúbica confinada en diferentes núcleos, con un acoplamiento lineal entre ellos. Este modelo puede ser tratado en el marco de la óptica no lineal, usando fibras en cristales fotónicos.

Por otro lado, el sistema (5.1a) con la no linealidad (5.26), se usa en aplicaciones físicas para modelar un condensado de Bose-Einstein con dos componentes (Williams *et al.*, 2000). Para este caso, ambas componentes corresponden a diferentes estados hiperfinos internos de un condensado de Bose-Einstein. Para $e(x) = b(x) \equiv \alpha$ constante, esta constante denota la fuerza del acoplamiento. Esta clase de sistema ha recibido un gran interés en los últimos años.

Nuestros resultados también proporcionan información sobre la localización de las soluciones, que pueden ser de interés en el estudio de ramas de soluciones en sistemas controlados por parámetros. Como un ejemplo básico, consideremos el sistema (5.1a) con la contribución no lineal (5.25),

$$\begin{aligned} -u_1''(x) + a(x)u_1(x) &= b(x)u_2(x) + \lambda c(x)u_1^3(x), \\ -u_2''(x) + d(x)u_2(x) &= e(x)u_1(x) + \lambda f(x)u_2^3(x), \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $\lambda > 0$.

Corolario 5.2 *Asumamos las condiciones del teorema 5.2. Entonces, para todo $\lambda > 0$ existe una solución positiva $\mathbf{u}_\lambda = (u_{1\lambda}, u_{2\lambda}) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ de (5.27). Además*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}_\lambda\| = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}_\lambda\| = 0. \quad (5.28)$$

Si además a, b, c, d, e, f son funciones pares y $0 \notin M$, existe una segunda rama de soluciones impares $\tilde{\mathbf{u}}_\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ con las mismas propiedades.

Demostración: La aplicación del teorema 5.2 requiere la existencia de valores r_λ, R_λ , tales que

$$\begin{aligned} r_\lambda^2 &\leq \left[1 - \max_{x \in M} \left(\int_M G_1(x, s)b(s)ds, \int_M G_2(x, s)e(s)ds \right) \right] \times \\ &\left[\lambda \max_{x \in M} \left(\int_M G_1(x, s)c(s)ds, \int_M G_2(x, s)f(s)ds \right) \right]^{-1} \\ &\leq \left[\lambda m_0 p_0^1 \max_{x \in M} \int_M G_1(x, s)c(s)ds \right]^{-1} \leq R_\lambda^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Dado que $\int_M G_1(x, s)b(s)ds, \int_M G_2(x, s)e(s)ds < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tales r_λ, R_λ existen, y pueden ser elegidos para que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} r_\lambda = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} R_\lambda = 0. \quad (5.30)$$

Entonces, se obtiene una rama de soluciones \mathbf{u}_λ tal que $r_\lambda \leq \|\mathbf{u}_\lambda\| \leq R_\lambda$, y ahora, haciendo el paso al límite concluimos la demostración. Los argumentos para la rama de soluciones impares son análogos. ■

De esta forma, se obtiene una bifurcación desde infinito cuando $\lambda \rightarrow 0^+$.

Podemos incluir también el control λ en el término lineal, es decir

$$-u_1''(x) + a(x)u_1(x) = \lambda (b(x)u_2(x) + c(x)u_1^3(x)), \quad (5.31a)$$

$$-u_2''(x) + d(x)u_2(x) = \lambda (e(x)u_1(x) + f(x)u_2^3(x)), \quad (5.31b)$$

donde ahora $\lambda \in (0, m)$ es un parámetro positivo, con

$$m = \left[\max_{x \in M} \left(\int_M G_1(x, s)b(s)ds, \int_M G_2(x, s)e(s)ds \right) \right]^{-1}. \quad (5.32)$$

Entonces, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3 *Asumamos las condiciones del teorema 5.2. Entonces, para todo $\lambda \in (0, m)$ existe una solución positiva $\mathbf{u}_\lambda = (u_{1\lambda}, u_{2\lambda}) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ de (5.31a). Además*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}_\lambda\| = +\infty. \quad (5.33)$$

Si además a, b, c, d, e, f son funciones pares y $0 \notin M$, existe una segunda rama de soluciones impares $\tilde{\mathbf{u}}_\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ con las mismas propiedades.

Usando el mismo argumento que se utilizó en el corolario 5.1, se puede obtener una cota inferior explícita para m .

Parte II

Soluciones analíticas de la INLSE

Capítulo 6

Simetrías de Lie, análisis cualitativo y soluciones exactas de ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad inhomogénea

6.1. INTRODUCCIÓN

EN este capítulo trataremos el problema de encontrar soluciones analíticas de la INLSE:

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + V(x)\psi + g(x)|\psi|^2\psi, \quad (6.1)$$

donde $V(x), g(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

En este estudio, usando el método de las simetrías de Lie, encontramos una clase general de potenciales $V(x)$ y no linealidades $g(x)$ para las que podemos construir soluciones exactas, usando soluciones de la NLSE (la cual, como se ha comentado en la introducción, es integrable en dimensión uno). La idea básica del método de las simetrías de Lie es estudiar las propiedades invariantes de una ecuación diferencial dada bajo un grupo de transformaciones continuas. Este método se ha aplicado de forma satisfactoria a diferentes ecuaciones, tales como, por ejemplo, ecuaciones diferenciales que modelan osciladores anarmónicos (Leach, 1981; Leach & Maharaj, 1992) y ecuaciones de Madelung en fluidos (Baumann & Nonnenmacher, 1987).

Aquí, presentamos la teoría general, proporcionando diferentes ejemplos de interés físico, estudiamos el caso de soluciones asimétricas y usamos la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos para proporcionar un análisis mucho más completo del método y de sus aplicaciones a ecuaciones que tengan relevancia física.

6.2. TEORÍA GENERAL DE SIMETRÍAS DE LIE

De nuevo, como ya se hizo en capítulos anteriores, buscaremos soluciones estacionarias de la ecuación (6.1), las cuales podremos obtener haciendo separación de variables

$$\psi(x, t) = u(x)e^{-i\lambda t}, \quad (6.2)$$

Las soluciones estacionarias satisfacen, entonces, el siguiente problema de autovalores no lineal

$$-u_{xx} + V(x)u + g(x)u^3 = \lambda u, \quad (6.3a)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (6.3b)$$

Por definición (Bluman & Kumei, 1989; Olver, 1993), una ecuación diferencial de segundo orden $A(x, u, u', u'') = 0$ posee una simetría puntual de Lie de la forma

$$M = \xi(x, u)\partial/\partial x + \eta(x, u)\partial/\partial u, \quad (6.4)$$

si la acción de la segunda extensión de M , $M^{(2)}$, sobre A es igual a cero, es decir

$$M^{(2)}A(x, u, u', u'') = \left[\xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}(x, u)\frac{\partial}{\partial u'} + \eta^{(2)}(x, u)\frac{\partial}{\partial u''} \right] A(x, u, u', u'') = 0, \quad (6.5)$$

con $\eta^{(k)}$ dado por

$$\eta^{(k)}(x, u, u', u'', \dots, u^{(k)}) = \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - u^{(k)}\frac{D\xi(x, u)}{Dx}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

donde $\eta^{(0)} = \eta(x, u)$ y D/Dx es la derivada total, es decir

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u'\frac{\partial}{\partial u} + u''\frac{\partial}{\partial u'} + \dots + u^{(n+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(n)}} + \dots \quad (6.7)$$

Por ejemplo, $\eta^{(1)}$ es igual a

$$\eta^{(1)} = \eta_x + [\eta_u - \xi_x]u_x - \xi_u(u_x)^2. \quad (6.8)$$

En nuestro caso, $A(x, u, u_x, u_{xx})$ viene dado por

$$A(x, u, u_x, u_{xx}) = -u_{xx} + f(x, u), \quad (6.9)$$

donde $f(x, u) = V(x)u + g(x)u^3 - \lambda u$, y la acción del operador $M^{(2)}$ sobre $A(x, u, u_x, u_{xx})$ lleva a una ecuación polinomial en u_x . Igualando los coeficientes de las diversas potencias de u_x , se obtiene

$$\xi_{uu} = 0, \quad (6.10a)$$

$$\eta_{uu} - 2\xi_{ux} = 0, \quad (6.10b)$$

$$2\eta_{xu} - \xi_{xx} - 3f\xi_u = 0, \quad (6.10c)$$

$$\eta_{xx} - \xi f_x - \eta f_u + \eta_u f - 2\xi_x f = 0. \quad (6.10d)$$

Integrando las ecuaciones (6.10a) y (6.10b), obtenemos

$$\xi(x, u) = a(x)u + b(x), \quad \eta(x, u) = a'(x)u^2(x) + c(x)u + d(x). \quad (6.11)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (6.10c), se obtiene

$$2c'(x) = b''(x), \quad a(x) = 0. \quad (6.12)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (6.11) y (6.12) en la ecuación (6.10d), obtenemos

$$\xi(x, u) = b(x), \quad (6.13a)$$

$$\eta(x, u) = c(x)u, \quad (6.13b)$$

$$c''(x) - b(x)V'(x) - 2b'(x)(V(x) - \lambda) = 0, \quad (6.13c)$$

$$2c(x)g(x) + b(x)g'(x) + 2b'(x)g(x) = 0. \quad (6.13d)$$

También, la sustitución de la ecuación (6.12) en la ecuación (6.13d) da

$$g(x) = g_0 b^{-3}(x) e^{-2C \int_0^x 1/b(s) ds}. \quad (6.14)$$

donde g_0 y C son constantes arbitrarias.

Podemos resumir los cálculos anteriores de la siguiente forma: La simetría puntual de Lie es de la forma

$$M = b(x) \frac{\partial}{\partial x} + c(x) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (6.15)$$

donde

$$g(x) = g_0 b^{-3}(x) e^{-2C \int_0^x 1/b(s) ds}, \quad (6.16a)$$

$$c(x) = \frac{1}{2} b'(x) + C, \quad (6.16b)$$

$$c''(x) - b(x)V'(x) - 2b'(x)(V(x) - \lambda) = 0. \quad (6.16c)$$

Las ecuaciones (6.16) nos permiten construir pares $\{V(x), g(x)\}$ para los que la simetría de Lie existe. Así, dada la función $g(x)$ o $V(x)$, en principio, podemos elegir la otra función para que se satisfagan las ecuaciones (6.16). En lo que sigue, estudiaremos las implicaciones que surgen en la existencia de esta simetría de Lie.

6.3. TRANSFORMACIONES CANÓNICAS E INVARIANTES

Es conocido (Leach, 1981) que la invariancia de la energía está asociada a la invariancia traslacional. El generador de esta transformación, en nuestro caso, es de la forma $M = \partial/\partial X$. Para usar este hecho, definimos la siguiente transformación de las variables (x, u) a las nuevas variables (X, U)

$$X = h(x), \quad U = n(x)u, \quad (6.17)$$

donde las funciones $h(x)$ y $n(x)$ serán determinadas requiriendo que una ley de conservación de la energía, del tipo $M = \partial/\partial X$, exista para las variables canónicas. De hecho, usando la ecuación (6.17), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial u} = n(x) \frac{\partial}{\partial U}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = n'(x)u \frac{\partial}{\partial U} + h'(x) \frac{\partial}{\partial X}. \quad (6.19)$$

Introduciendo las expresiones (6.18) y (6.19) en la ecuación (6.15) y asumiendo la condición $M = \partial/\partial X$, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} h'(x)b(x) &= 1, \\ b(x)n'(x) + c(x)n(x) &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Introduciendo la ecuación (6.16b) en la ecuación (6.20), e integrando obtenemos las siguientes relaciones

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{b(s)} ds, \quad (6.21)$$

$$n(x) = b(x)^{-1/2} e^{-C \int_0^x 1/b(s) ds}. \quad (6.22)$$

De esta forma, podemos ahora escribir la ecuación (6.3a) en términos de las coordenadas canónicas U y X ,

$$-\frac{d^2 U}{dX^2} - 2C \frac{dU}{dX} + g_0 U^3 - EU = 0, \quad (6.23)$$

con

$$E = (\lambda - V(x)) b(x)^2 - \frac{1}{4} b'(x)^2 + \frac{1}{2} b(x) b''(x) + C^2. \quad (6.24)$$

La ecuación (6.23) es la llamada ecuación de Duffing, que aparece como un modelo para el oscilador no lineal forzado (Feng *et al.*, 2006). Se sigue de las ecuaciones (6.16b)-(6.16c) que la cantidad E dada por la ecuación (6.24) es una constante de movimiento.

Cuando $C = 0$, las transformaciones previas preservan la estructura Hamiltoniana, dado que la transformación canónica es simpléctica. En este caso, la ecuación (6.23) resulta

$$-\frac{d^2U}{dX^2} + g_0U^3 = EU. \quad (6.25)$$

Como E es una constante, esto significa que en las *nuevas variables*, obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE) sin potencial externo y con no linealidad homogénea.

Por supuesto, no todas las elecciones de $V(x)$ y $g(x)$ llevan a la existencia de una simetría de Lie o a una transformación canónica apropiada, puesto que ambas funciones están ligadas por las ecuaciones (6.16). Este hecho impone algunas restricciones obvias, como que por ejemplo $b(x)$ debe ser diferenciable y positiva.

Como la ecuación (6.25) es una ecuación de Schrödinger no lineal homogénea y estacionaria, puede ser reducida a cuadraturas. De esta forma, se obtiene

$$X - X_0 = \int_{U_0}^U \frac{dG}{\sqrt{2(N + \frac{1}{2}EG^2 + \frac{1}{4}g_0G^4)}}, \quad (6.26)$$

con N una constante de integración. Además, la energía del sistema viene dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dX} \right)^2 + \frac{1}{2}EU^2 - \frac{1}{4}g_0U^4. \quad (6.27)$$

Se conocen muchas soluciones de la ecuación (6.25). En este trabajo, se usarán las siguientes

$$U_1(X) = \eta \frac{1}{\cosh(\mu X)}, \quad \left(E = -\mu^2, g_0 = -\frac{2\mu^2}{\eta^2} \right), \quad (6.28a)$$

$$U_2(X) = \eta \tanh(\mu X), \quad \left(E = 2\mu^2, g_0 = \frac{2\mu^2}{\eta^2} \right), \quad (6.28b)$$

$$U_3(X) = \eta \frac{\operatorname{sn}(\mu X, k)}{\operatorname{dn}(\mu X, k)}, \quad \left(E = \mu^2(1 - 2k^2), g_0 = -\frac{2\mu^2 k^2(1 - k^2)}{\eta^2} \right), \quad (6.28c)$$

$$U_4(X) = \eta \operatorname{dn}(\mu X, k), \quad \left(E = \mu^2(k^2 - 2), g_0 = -\frac{2\mu^2}{\eta^2} \right), \quad (6.28d)$$

con $0 \leq k \leq 1$. La tabla 6.1 resume los parámetros requeridos para la existencia de las anteriores soluciones.

U	E	g_0	H
$U_1(X)$	negativa	negativa	0
$U_2(X)$	positiva	positiva	positiva
$U_3(X)$	ambos	negativa	positiva
$U_4(X)$	negativa	negativa	negativa

Cuadro 6.1: Valores de los parámetros E , g_0 y la energía H para la existencia de soluciones U_i , $i = 1, 4$ de la ecuación (6.25), las cuales vienen dadas por las ecuaciones (6.28).

6.4. CONEXIÓN ENTRE LA NLSE Y LA INLSE POR MEDIO DE LA LSE

Tomando $C = 0$ y eliminando $c(x)$ en las ecuaciones (6.16), obtenemos

$$g(x) = g_0/b(x)^3, \quad (6.29)$$

mas una ecuación relacionando $b(x)$ y $V(x)$

$$b'''(x) - 2b(x)V'(x) + 4b'(x)\lambda - 4b'(x)V(x) = 0. \quad (6.30)$$

La forma mas simple para generar soluciones es fijar $b(x)$ y entonces, calcular $V(x)$, dado que de esta forma debemos resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden. De forma alternativa, podemos definir $\rho(x) = b^{1/2}(x)$ y obtener una ecuación de Ermakov-Pinney (Ermakov, 1880; Pinney, 1950)

$$\rho_{xx} + (\lambda - V(x))\rho = E/\rho^3, \quad (6.31)$$

cuyas soluciones vienen dadas de la siguiente forma:

$$\rho = (\alpha\varphi_1^2 + 2\beta\varphi_1\varphi_2 + \gamma\varphi_2^2)^{1/2}, \quad (6.32)$$

con α, β, γ constantes y donde $\varphi_j(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger

$$\varphi_{xx} + (\lambda - V(x))\varphi = 0. \quad (6.33)$$

Con esta elección se tiene que $E = \Delta W^2$ con $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$ y siendo W el Wronskiano $W = \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'$, que es una constante. Así, dada una solución arbitraria de la *ecuación de Schrödinger* (6.33), *se pueden construir soluciones del problema no lineal, ecuación (6.3a), usando las (conocidas) soluciones de la ecuación (6.25)*. De esta forma todo el conocimiento sobre la ecuación de Schrödinger lineal puede ser de ayuda para buscar potenciales $V(x)$ para los que las funciones φ_1 y φ_2 son conocidas y poder calcular, entonces, la función $b(x)$, las transformaciones canónicas $h(x), n(x)$, la no linealidad $g(x)$ y la solución explícita $u(x)$.

6.5. ANALISIS CUALITATIVO Y SOLUCIONES EXACTAS

En esta sección, vamos a calcular soluciones analíticas de la ecuación (6.3a) para diferentes elecciones de las funciones $g(x)$ y $V(x)$, usando el método descrito en las secciones previas, para $C = 0$. Además usando la teoría de análisis cualitativo, describiremos algunas propiedades de las soluciones de la ecuación (6.3a), usando la conducta cualitativa de las soluciones de la ecuación (6.25).

Empezaremos calculando los puntos de equilibrio de esta última ecuación. Facilmente, se encuentra que la ecuación (6.25) tiene tres posibles puntos de equilibrio, dependiendo de los signos de E y g_0 :

$$\begin{aligned} U_{\pm} &= \pm\sqrt{E/g_0}, \\ U &= 0. \end{aligned} \quad (6.34a)$$

Entonces, podemos distinguir cuatro casos:

1. Para $E < 0, g_0 < 0$, se obtienen tres puntos de equilibrio. $U = 0$ es un punto de silla y U_{\pm} son centros, figura 6.1(a).
2. Cuando $E < 0, g_0 > 0$, se obtiene que $U = 0$ es el único punto de equilibrio, que es un punto de silla, figura 6.1(b).
3. Cuando $E > 0, g_0 > 0$, obtenemos tres puntos de equilibrio. U_{\pm} son puntos de silla y $U = 0$ es un centro, figura 6.1(c).

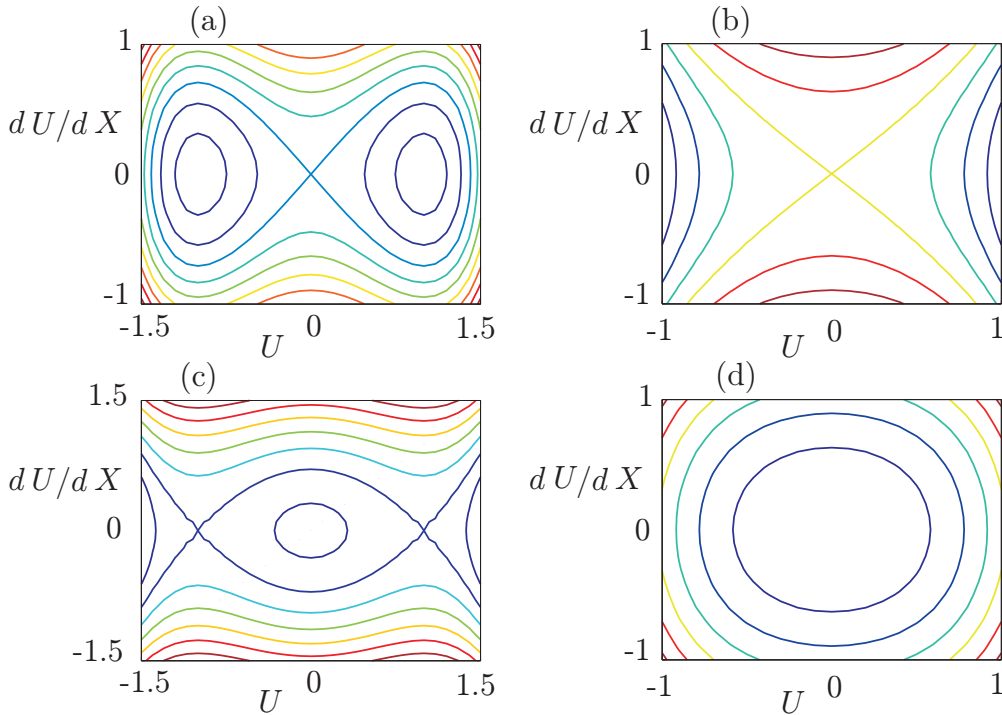


Figura 6.1: Mapa de fases de las soluciones reales de la ecuación (6.25) para (a) $E < 0$, $g_0 < 0$, (b) $E < 0$, $g_0 > 0$ (c) $E > 0$, $g_0 > 0$ y (d) $E > 0$, $g_0 < 0$

4. El último caso corresponde a $E > 0$, $g_0 < 0$. Para este caso, el único punto de equilibrio es la solución trivial $U = 0$, que es un centro global, figura 6.1(d).

Usando la ecuación (6.27), podemos dibujar el mapa de fases de la ecuación (6.25), como se puede ver en la figura 6.1.

En lo que sigue, presentaremos algunos ejemplos como aplicaciones de nuestra teoría:

Ejemplo 1. Como una primera aplicación del método, elijamos $V(x) = 0$, esto es, tenemos un sistema sin potencial externo. Entonces, la ecuación (6.30) resulta

$$b'''(x) + 4b'(x)\lambda = 0, \quad (6.35)$$

cuyas soluciones son

$$b(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x + C_3 \quad (\lambda > 0), \quad (6.36a)$$

$$b(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} + C_3 \quad (\lambda < 0), \quad (6.36b)$$

donde $\omega = 2\sqrt{|\lambda|}$. Usando la ecuación (6.29), obtenemos, para la ecuación (6.36a), una no linealidad periódica

$$g(x) = g_0(1 + \alpha \cos(2\sqrt{\lambda}x))^{-3}. \quad (6.37)$$

Para α pequeño, esta no linealidad es aproximadamente armónica

$$g(x) \simeq g_0(1 - 3\alpha \cos(2\sqrt{\lambda}x)), \quad \alpha \ll 1. \quad (6.38)$$

Entonces, podemos utilizar las transformaciones canónicas usando las ecuaciones (6.17) y obtener

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\alpha^2)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \tan(\sqrt{\lambda}x) \right). \quad (6.39)$$

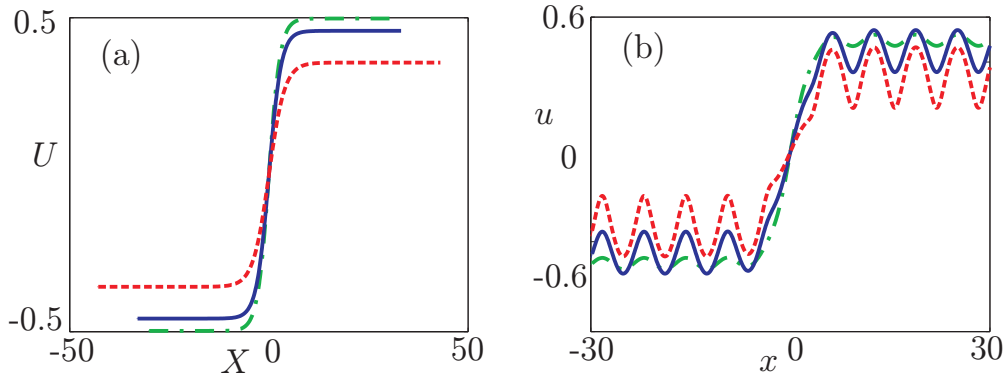


Figura 6.2: Ejemplo de solitón oscuro para la (a) ecuación (6.25), y para la (b) ecuación (6.3a) con $g_0 = 1$, $\lambda = 1/4$ y (i) $\alpha = 0,1$ (línea verde punto-rayada), (ii) $\alpha = 0,4$ (línea azul) y (iii) $\alpha = 0,7$ (línea roja rayada). Las soluciones mostradas en la figura 6.2(b) son obtenidas de las calculadas en la figura 6.2(a) por medio de las transformaciones (6.17).

Usando cualquier solución de la ecuación (6.25), con $E = \lambda(1 - \alpha^2)$, obtenemos que la transformación (6.39) proporciona soluciones de la ecuación (6.3a), donde $g(x)$ viene dada por (6.37). Por ejemplo, cuando $g_0 > 0$, podemos usar U_2 , definida por (6.28b), y cuyo mapa de fases es la órbita heteroclina mostrada en la figura 6.1(c). Así, la solución de la ecuación (6.3a) es de la forma

$$u(x) = \sqrt{\frac{\lambda(1 - \alpha^2)}{g_0}} \left(1 + \alpha \cos(2\sqrt{\lambda}x)\right) \times \tanh \left[\sqrt{\frac{\lambda(1 - \alpha^2)}{2}} X(x) \right]. \quad (6.40)$$

Como podemos ver en la figura 6.2(b), $u(x)$ es una conexión heteroclina entre soluciones periódicas de la ecuación (6.3a). Es importante notar que en el límite asintótico, el perfil de $u(x)$ es proporcional a $b^{1/2}(x)$. Por tanto, la transformación canónica (6.17), en este caso, transforma una órbita heteroclina en el mapa de fases $(U, dU/dX)$ en una conexión heteroclina, Eq. (6.40). Por otro lado, cualquier órbita cerrada U dentro de la órbita heteroclina del mapa de fases $(U, dU/dX)$ proporciona una nueva conexión heteroclina de la ecuación original (6.3a).

Centremonos ahora en el caso dado por la ecuación (6.36b). Sin pérdida de generalidad, podemos hacer $\omega = 1$, $C_1 = C_2 = 1/2$ y $C_3 = 0$. De esta forma, $b(x) = \cosh x$ y la ecuación (6.3a), con $g(x) = g_0/\cosh^3(x)$ y $\lambda = -1/4$ viene dada por

$$-u_{xx} + \frac{1}{4}u + \frac{g_0}{\cosh^3 x}u^3 = 0 \quad (6.41)$$

Además, $\cos X(x) = -\tanh x$, con lo que $0 \leq X \leq \pi$. Así, las condiciones de frontera $u(\pm\infty) = 0$ exigen que $U(0) = U(\pi) = 0$. Esto significa que la aplicación X lleva el dominio original, que es infinito, en la ecuación (6.41), a un dominio acotado para la ecuación (6.25).

Por otro lado, cuando $g_0 < 0$, la función

$$U(X) = \eta \frac{\operatorname{sn}(\mu X, k)}{\operatorname{dn}(\mu X, k)} \quad (6.42)$$

es solución de la ecuación (6.25), con

$$\mu^2 = 1/[4(1 - 2k^2)] \quad (6.43)$$

$$\eta^2 = \frac{k^2(1 - k^2)}{2|g_0|(1 - 2k^2)}. \quad (6.44)$$

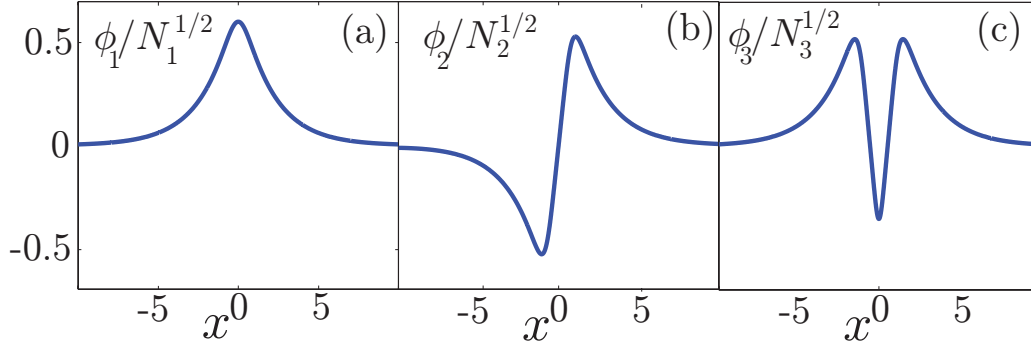


Figura 6.3: Soluciones de la ecuación (6.41) con $g_0 = 1$, para (a) $n = 1, k_1 = 0,634493$ (b) $n = 2, k_2 = 0,690727$ y (c) $n = 3, k_3 = 0,699957$.

La función $U(X)$ satisface $U(0) = 0$ y para satisfacer la otra condición de frontera, $U(\pi) = 0$, se debe cumplir la condición $\mu\pi = 2nK(k)$, donde $K(k)$ es la integral elíptica, $K(k) = \int_0^\pi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi$. Así, para que se satisfagan las condiciones de frontera, k debe cumplir la siguiente igualdad,

$$4nK(k) \sqrt{1 - 2k^2} = \pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.45)$$

Se puede probar que para cada número entero n , esta ecuación algebraica tiene solamente una solución k_n , lo que significa que existe un número infinito de soluciones de la ecuación (6.41), que vienen dadas por $u(x) = b^{1/2}(x)U(X)$. Además, cada una de estas soluciones tiene exactamente $n - 1$ ceros. En la figura 6.3 se han dibujado las soluciones correspondientes a $n = 1, 2, 3$. *Estas soluciones pueden ser vistas como “estados ligados” de varios solitones (n) con fases alternantes*, y su existencia es notable. Cuando la no linealidad es homogénea, $g(x) = g_0 < 0$, la ecuación (6.3a) tiene solamente una solución localizada para cada λ , la solución de tipo sech. En otras palabras: no existen estados acotados de varios solitones. Sin embargo, cuando $g(x)$ está modulada y tiene un decaimiento exponencial, *obtenemos un número infinito de soluciones localizadas, etiquetadas por su número de nodos*. Este es un nuevo e interesante aspecto de las no linealidades localizadas. Como $E > 0$ y $g_0 < 0$, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, estaríamos en el cuarto caso, figura 6.1(d), . Así, la solución $u(x) = b^{1/2}(x)U_3(X(x))$ que acabamos de calcular, es una órbita homoclina.

Ejemplo 2. Sistemas con potenciales cuadráticos $V(x) = x^2$. En este apartado discutimos un ejemplo de grán interés en aplicaciones a ondas de materia no lineales en condensados de Bose-Einstein, para los que $V(x) \propto x^2$.

Elijamos $b(x) = e^{x^2}$, que nos lleva a un potencial cuadrático $V(x) = x^2$ y a una no linealidad gaussiana, como las que se obtienen controlando ópticamente la resonancia Feschbach, que experimentalmente significa usar un láser que genere un perfil gaussiano (ver, por ejemplo, (Rodas-Verde *et al.*, 2005)). Así

$$g(x) = g_0 \exp(-3x^2), \quad V(x) = x^2. \quad (6.46)$$

Nuestra transformación canónica esta dada por $X(x) = \int_0^x dt \exp(-t^2) = (\sqrt{\pi}/2) \operatorname{erf} x$. Para este caso, la ecuación (6.3a) queda de la siguiente forma:

$$-U_{XX} + g_0 U^3 = 0. \quad (6.47)$$

Hay que hacer notar que el rango de X es otra vez finito, $-\sqrt{\pi}/2 \leq X \leq \sqrt{\pi}/2$, y por tanto, podemos otra vez construir soluciones localizadas de la ecuación (6.3a). Teniendo

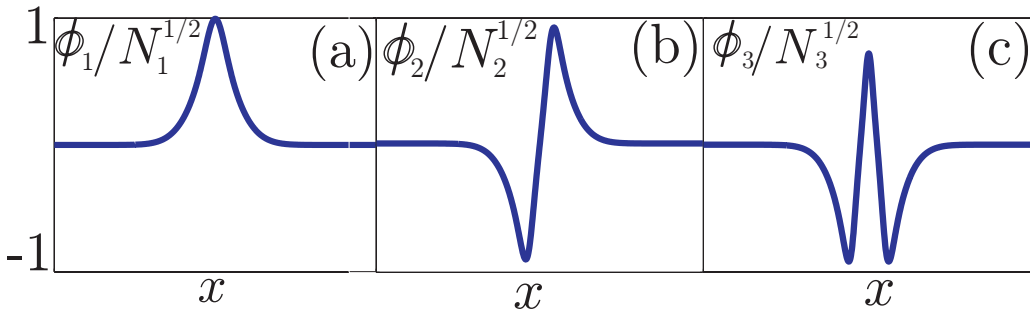


Figura 6.4: Soluciones de la ecuación (6.3a) para el potencial y la no linealidad dada por las ecuaciones (6.46). (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ y (c) $n = 3$. La región espacial mostrada corresponde a $x \in [-6, 6]$.

en cuenta que $g_0 < 0$, las funciones

$$U^{(1)}(X) = \frac{\mu}{\sqrt{|g_0|}} \operatorname{cn}(\mu X, k_*) \quad (6.48)$$

y

$$U^{(2)}(X) = \frac{\mu}{\sqrt{2|g_0|}} \frac{\operatorname{sn}(\mu X, k_*)}{\operatorname{dn}(\mu X, k_*)} \quad (6.49)$$

con $k_* = 1/\sqrt{2}$, son soluciones de la ecuación (6.47), y además se tiene que las funciones $U^{(1)}(X)$ y $U^{(2)}(X)$ se anulan cuando $\mu X = (2n+1)K(k_*)$ y $\mu X = 2nK(k_*)$, respectivamente. Así, obtenemos un número infinito de soluciones de la ecuación (6.47) cuyas condiciones de frontera se obtienen sobre el intervalo finito $-\sqrt{\pi}/2 \leq X \leq \sqrt{\pi}/2$. Finalmente, las soluciones localizadas de la ecuación de Schrödinger no lineal (6.3a), vienen dadas por

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{2nK(k_*)}{\sqrt{\pi|g_0|}} e^{x^2/2} \operatorname{cn}(\theta_n(x), k_*) & n = 1, 3, \dots \\ \frac{2nK(k_*)}{\sqrt{2\pi|g_0|}} e^{x^2/2} \frac{\operatorname{sn}(\theta_n(x), k_*)}{\operatorname{dn}(\theta_n(x), k_*)} & n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (6.50)$$

con

$$\theta_n(x) = nK(k_*) \operatorname{erf} x \quad (6.51)$$

Un simple análisis asintótico demuestra que los últimos factores en la ecuación (6.50) tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$ más rápidamente que $\exp(-x^2/2)$, por lo que verdaderamente hemos obtenido soluciones localizadas de nuestro problema, tal y como puede verse en la figura 6.4, donde mostramos los tres primeros estados acotados, para $n = 1, 2, 3$, ($u_n(x)$ posee $n-1$ ceros).

Ejemplo 3. Si elegimos $b(x) = \alpha/\sqrt{1+\beta x^2}$, con $\alpha, \beta > 0$, se obtiene

$$g(x) = \frac{g_0}{\alpha^3} (1+\beta x^2)^{3/2}, \quad (6.52)$$

y

$$V(x) = M(1+\beta x^2) + \frac{1}{4} \frac{3\beta x^2 - 2\beta + 4\lambda + 8\lambda\beta x^2 + 4\lambda\beta^2 x^4}{(1+\beta x^2)^2}, \quad (6.53)$$

con M una constante positiva. Aunque la expresión de $V(x)$ es complicada este potencial es simplemente un potencial cuasi-armónico y satisface el que $V(x) \sim x^2$, para $x \gg 1$. También, $V(x)$ puede verse como un potencial armónico con un término perturbativo acotado, figura 6.5(a). Para el término no lineal, se tiene que $g(x) \sim x^2$ para $|x| \ll 1$, y $g(x) \sim x^3$ para $|x| \gg 1$. Usando la ecuación (6.24), obtenemos $E = -\alpha^2 M$. Tomando

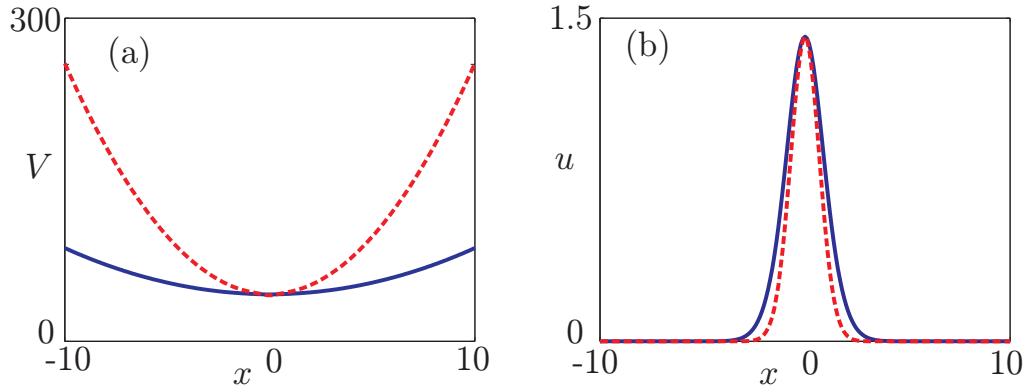


Figura 6.5: (a) Potencial cuasi-armónico para $M = 1$, $\lambda = 1$ y (i) $\beta = 0,5$ (línea azul) y (ii) $\beta = 2,5$ (línea roja con rayas). (b) Soluciones de la ecuación (6.3a) para $\alpha = 1$, $g_0 = -1$, $M = 1$ y (i) $\beta = 0,5$ (línea azul) y (ii) $\beta = 2,5$ (línea roja con rayas)

$g_0 < 0$, obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal cuyo término no lineal es atractivo, ecuación (6.25). Como $E < 0$ y $g_0 < 0$, todas las soluciones de la ecuación (6.25) son acotadas, (ver figura 6.1(a)). Si $U(X)$ es una de estas soluciones, es claro que

$$u(x) = b(x)^{1/2}U(X(x)), \quad (6.54)$$

es una órbita homoclina de la ecuación original. En particular, la solución dada por la ecuación (6.28a) es

$$U_1(X) = \sqrt{\frac{2E}{g_0}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{|E|}X)}. \quad (6.55)$$

Como $X(x) = x\sqrt{1 + \beta x^2}/(2\alpha) + \sinh^{-1}(\sqrt{\beta}x)/(2\alpha\sqrt{\beta})$, se tiene que

$$u(x) = b(x)^{1/2}U_1(X(x)). \quad (6.56)$$

En la figura 6.5(b) aparecen dibujadas las soluciones de la ecuación (6.3a) para diferentes valores del parámetro β .

En este ejemplo, hemos usado la solución $U_1(X)$ de la ecuación (6.25). Otra posibilidad es elegir una de las órbitas cerradas que son interiores a la homoclina de la figura 6.1(a), y que vienen dadas por la solución $U_4(X)$ en (6.28d). Queremos hacer notar que para este caso, la ecuación (6.27) satisfaría la condición $H \leq 0$, tal y como puede verse en la tabla 6.1.

La expresión analítica de las órbitas cerradas que son exteriores a la homoclina viene dada por la solución $U_3(X)$, con $k > 1/\sqrt{2}$. Tales órbitas satisfacen $H > 0$ (ver la tabla 6.1).

Como X es una aplicación biyectiva sobre la recta real, $b(x)$ es una función positiva y $U_3(X)$ es una función periódica con infinitos nodos sobre la recta real, la función $u(x) = b(x)^{1/2}U_3(X)$ tiene también infinitos nodos sobre la recta real, tal y como puede verse en la figura 6.6. Es inmediato comprobar que $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Además, los ceros de u se acumulan para valores grandes de x , puesto que la distancia entre dos ceros consecutivos viene dada por la expresión $x_{n+1} - x_n \sim \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Otras soluciones localizadas con infinitos nodos han sido estudiadas en un contexto diferente (por ejemplo en la referencia (Buryak & Akhmediev, 1995)).

6.6. SOLUCIONES ASIMÉTRICAS DE LA INLSE

En las secciones previas, hemos explorado el caso $C = 0$. Para este caso, la ecuación original (6.3a) es reducida a la ecuación de Schrödinger no lineal homogénea. En esta

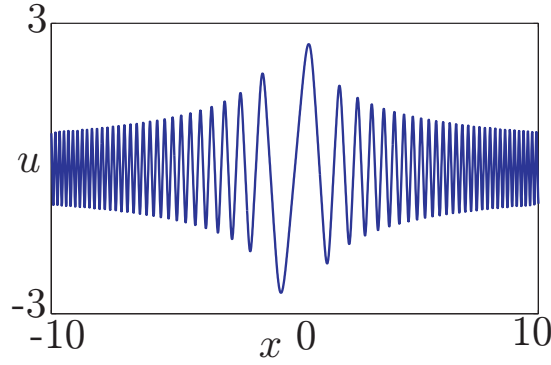


Figura 6.6: Solución de la ecuación (6.3a) con infinitos nodos para $\alpha = 1$, $\beta = 2,5$, $g_0 = -1$ y $k = 3/4$

sección, estudiaremos el caso $C > 0$. Si tomamos $g_0 < 0$ y $E > 0$, la ecuación resultante es

$$\frac{d^2U}{dX^2} + 2C\frac{dU}{dX} + |g_0|U^3 + EU = 0. \quad (6.57)$$

En general, esta ecuación no es integrable y la energía no es una cantidad conservada. Sin embargo, se pueden obtener soluciones analíticas de la ecuación (6.57) en casos particulares. En la referencia (Meimukhin & Gendelman, 2007) se dió una condición exacta de integrabilidad, que es

$$E = \frac{8}{9}C^2. \quad (6.58)$$

Para esta condición, podemos calcular una familia de soluciones analíticas de la ecuación (6.57), las cuales vienen dadas por

$$U_n(X) = \frac{\mu_n}{\sqrt{2|g_0|}} e^{-BX} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{\mu_n}{B}(1 - e^{-BX}), \sqrt{2}/2\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{\mu_n}{B}(1 - e^{-BX}), \sqrt{2}/2\right)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.59)$$

donde μ_n y B están relacionados con las condiciones de frontera del problema.

Podemos solucionar la ecuación (6.3a), usando las soluciones de la ecuación (6.57). Eligiendo $b(x) = \cosh(x)$ y usando las ecuaciones (6.30) y (6.24), podemos calcular el potencial $V(x)$:

$$V(x) = \lambda + 1/4 + \left(\frac{1}{4} + \frac{C^2}{9}\right) \frac{1}{\cosh^2(x)}. \quad (6.60)$$

El término no lineal es

$$g(x) = g_0 \cosh^{-3}(x) e^{-2CX(x)}. \quad (6.61)$$

Ahora, podemos construir la transformación canónica usando las ecuaciones (6.17) y obtener

$$\cos X(x) = -\tanh x. \quad (6.62)$$

Entonces, $0 \leq X \leq \pi$ y usando las condiciones de frontera para u , $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$, se tiene que imponer que $U(0) = U(\pi) = 0$.

Usando estas condiciones de frontera, se obtienen los valores de la amplitud μ_n en función del valor del entero n

$$\mu_n = \frac{4CK(\sqrt{2}/2)}{3(1 - e^{-2C\pi/3})} n,$$

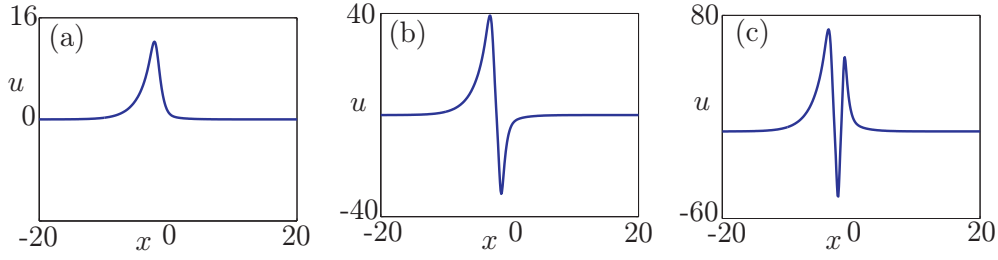


Figura 6.7: Soluciones asimétricas de la ecuación (6.3a) con $C = 4$ para (a) $n = 1$, (b) $n = 2$ y (c) $n = 3$.

y de $B = 2C/3$. De esta forma, las soluciones de la ecuación (6.57) son

$$U_n(X) = \frac{\mu_n}{\sqrt{2|g_0|}} e^{-2CX/3} \frac{\operatorname{sn}(2nK(\sqrt{2}/2)(1 - e^{-2CX/3})/(1 - e^{-2C\pi/3}), \sqrt{2}/2)}{\operatorname{dn}(2nK(\sqrt{2}/2)(1 - e^{-2CX/3})/(1 - e^{-2C\pi/3}), \sqrt{2}/2)},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.63)$$

donde $K(k)$ es la integral elíptica de primera especie

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}. \quad (6.64)$$

Luego, las soluciones de la ecuación (6.3a) son

$$u_n(x) = b^{1/2}(x) e^{CX(x)} U_n(X(x)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.65)$$

Usando la regla de L'Hopital, $u_n(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ en (6.65). Así, las soluciones (6.65) son soluciones localizadas de nuestro problema como puede verse en la figura 6.7. Estas soluciones son soluciones asimétricas de la ecuación (6.3a). Además, cada una de estas soluciones tiene exactamente $n - 1$ ceros, como en los ejemplos anteriores. En la figura 6.7 dibujamos algunas de estas soluciones, las cuales corresponden a los valores $n = 1, 2, 3$.

Soluciones exactas periódicas y localizadas de la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidades moduladas espacialmente: Redes lineales y no lineales

7.1. INTRODUCCIÓN

A L igual que en el capítulo anterior, vamos a encontrar soluciones exactas, tanto localizadas como periódicas, de la INLSE, pero ahora esta ecuación tendrá coeficientes periódicos. Es decir, tanto el potencial externo como la no linealidad serán funciones periódicas. Que nosotros conozcamos, soluciones exactas *localizadas* no han sido todavía calculadas en este contexto. Así, la principal meta de este trabajo es presentar por primera vez este tipo de soluciones. Además, un análisis del modelo y de sus soluciones nos permitirá realizar diversas conclusiones sobre redes lineales y sobre la estabilización de modos localizados por redes policromáticas.

7.2. TRANSFORMACIONES DE SIMILARIDAD

De nuevo, consideremos la ecuación NLS unidimensional con no linealidad inhomogénea

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + v(x)\psi + g(x)|\psi|^2\psi, \quad (7.1)$$

con $x \in \mathbb{R}$, y donde $v(x)$ y $g(x)$ son respectivamente los potenciales periódicos lineales y no lineales, y cuyos períodos son iguales. De forma más específica y sin pérdida de generalidad, impondremos que el período sea π : es decir $v(x + \pi) = v(x)$ y $g(x + \pi) = g(x)$. Además, para eliminar posibles constantes innecesarias, impondremos que el potencial periódico tenga valor medio igual a cero, es decir,

$$\langle v(x) \rangle \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v(x) dx = 0. \quad (7.2)$$

Nos referiremos al campo complejo $\psi(t, x)$ como a la función de onda macroscópica (esta terminología es usada en aplicaciones BEC, tal y como se vió en la introducción).

Haciendo separación de variables (ver introducción)

$$\psi(t, x) = \phi(x)e^{-i\mu t}, \quad (7.3)$$

en la ecuación (7.1), se tiene que $\phi(x)$ es una función de x y μ es una constante que físicamente representa el llamado potencial químico. Sustituyendo obtenemos

$$-\phi_{xx} + (v(x) - \mu)\phi + g(x)\phi^3 = 0. \quad (7.4)$$

La idea es encontrar una transformación para reducir la ecuación (7.4) a la ecuación estacionaria NLS

$$E\Phi = -\Phi'' + G|\Phi|^2\Phi, \quad (7.5)$$

donde $\Phi \equiv \Phi(X)$, E y G son constantes, y $X \equiv X(x)$ es la nueva variable espacial. Entonces, sea la siguiente transformación

$$\phi(x) = \rho(x)\Phi(X), \quad (7.6)$$

donde $\Phi(X)$ es una solución de la ecuación estacionaria (7.5) y donde $\rho(x)$ y $X(x)$ son funciones inicialmente arbitrarias que deben de ser calculadas utilizando el hecho de que $\phi(x)$ es solución de la ecuación (7.4). Obviamente, esta transformación puede verse como un caso particular del método de las simetrías de Lie usado en el capítulo anterior. El porque ahora desarrollamos este método de transformaciones en vez de usar el método de las simetrías de Lie, quedará claro en el capítulo 8. Aquí, solamente queremos notar que ambas transformaciones son equivalentes, en el sentido de que ambas proporcionan la misma información.

Sustituyendo la transformación (7.6) en la ecuación (7.4), obtenemos la siguiente condición:

$$(\rho^2 X_x)_x = 0, \quad (7.7)$$

ademas de las siguientes expresiones para $g(x)$ y $v(x)$, en función de $\rho(x)$ y $X(x)$:

$$g(x) = G \frac{X_x^2}{\rho^2}, \quad y \quad v(x) = \frac{\rho_{xx}}{\rho} + \mu - EX_x^2. \quad (7.8)$$

De la expresión para $g(x)$, se deduce la primera restricción de la teoría: el método es aplicable a modelos que tienen no linealidades de signo definido, por lo que se debe elegir $G = \text{sign}(g(x))$. Además, como estamos interesados en soluciones en toda la recta real, nos restringiremos al análisis de funciones $\rho(x) \in C^2(\mathbb{R})$ y tales que no se anulen. Como además, ni (7.8) ni (7.7) cambian cuando $\rho(x)$ cambia de signo (que simplemente refleja la invariancia de fase del modelo (7.4)), en lo que sigue nos centraremos en el caso $\rho(x) > 0$.

La solución de la ecuación (7.7) viene dada por

$$X(x) = \int_0^x \frac{ds}{\rho^2(s)}. \quad (7.9)$$

donde se ha tenido en cuenta que la constante que aparece en la primera integral con respecto a x puede ser tomada igual a la unidad. Así, se tiene que

$$X(0) = 0, \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} X(x) = \pm\infty. \quad (7.10)$$

De esta forma, los coeficientes de la ecuación (7.4) pueden ser reescritos de la siguiente forma

$$v(x) = \frac{\rho_{xx}}{\rho} - \frac{E}{\rho^4} + \mu, \quad g(x) = \frac{G}{\rho^6}. \quad (7.11)$$

Así, usando las ecuaciones (7.6) y (7.9), obtenemos diferentes soluciones de la ecuación (7.4). Esta solución depende de la función positiva $\rho(x)$, que debe ser escogida como una función periódica de periodo π .

Por supuesto, dicha elección es muy amplia. Así, siendo específicos, investigaremos en detalle el caso

$$\rho(t, x) = 1 + \alpha \cos(2x), \quad (7.12)$$

donde α es una constante real, tal que $|\alpha| < 1$, y

$$v(x) = -\frac{4\alpha \cos(2x)}{1 + \alpha \cos(2x)} - \frac{E}{(1 + \alpha \cos(2x))^4} + \mu, \quad (7.13)$$

$$g(x) = \frac{G}{(1 + \alpha \cos(2x))^6}, \quad (7.14)$$

donde μ debe satisfacer la condición (7.2) y vale

$$\mu = 4 - \frac{4}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + E \frac{2 + 3\alpha^2}{2(1 - \alpha^2)^{7/2}}. \quad (7.15)$$

En la última sección de este capítulo, se han introducido algunas generalizaciones de este modelo.

7.3. MODOS LOCALIZADOS ESTACIONARIOS

En esta sección, usando el método descrito en la sección anterior, calcularemos soluciones analíticas de la ecuación (7.4) y haremos un análisis de los modos localizados. Para ello, imponemos las condiciones de frontera $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0$ y teniendo en cuenta las ecuaciones (7.6) y (7.10), concluimos que $\Phi(X)$ debe también satisfacer las condiciones de frontera cero: $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} \Phi(X) = 0$. Así, si tomamos $G = -1$, una solución de la ecuación (7.5) viene dada por $\Phi(X) = \sqrt{-2E} / \cosh(\sqrt{-E}X)$. Entonces, usando lo expuesto en la sección anterior, la respectiva solución de la ecuación (7.4) es

$$\phi_s(x) = \sqrt{-2E} \frac{1 + \alpha \cos(2x)}{\cosh(\sqrt{-E}X(x))}, \quad X(x) = \int_0^x \frac{ds}{(1 + \alpha \cos(2s))^2}. \quad (7.16)$$

Consideremos en detalle la solución obtenida. En primer lugar, queremos recordar que el potencial químico de una solución estacionaria de la ecuación NLS, que tienda a cero o alcance el valor cero, y cuyo potencial sea periódico, debe pertenecer al gap prohibido de este potencial, siendo esta solución independiente de la fase. Así, este tipo de soluciones pueden ser tomadas como funciones de variable real (ver, por ejemplo, (Brazhnyi & Konotop, 2004; Alfimov *et al.*, 2002)). El potencial químico μ viene dado por la ecuación (7.15), y por tanto, según lo dicho antes, debe pertenecer a un gap del espectro del potencial $v(x)$. Este espectro viene determinado por el problema de autovalores de la ecuación de Hill:

$$-\varphi_{xx} + v(x)\varphi = \mathcal{E}\varphi. \quad (7.17)$$

Como la solución obtenida (7.16) existe para E arbitrarios y negativos, incluyendo el límite $E \rightarrow -\infty$, y además, $\mu < v(x)$, concluimos que $\mathcal{E} = \mu$ pertenece al gap semi-infinito $(-\infty, \mathcal{E}_1^{(-)})$ del espectro del potencial $v(x)$, es decir, $\mathcal{E}_1^{(-)} > \mu$, donde hemos usado la notación $\mathcal{E}_n^{(-)}$ y $\mathcal{E}_n^{(+)}$ para designar la frontera inferior y superior de la n -ésima banda, es decir, la región de estabilidad.

El fenómeno descrito está ilustrado en la figura 7.1 (específicamente en el panel (a)), donde mostramos la frontera de las bandas en función del parámetro α para cuatro situaciones típicas: $E < 0$ (panel (a)); $E = 0$ (panel (b)); $E \in (0, E_0)$ con $E_0 = \max_{\alpha} \{E_m(\alpha)\} = 2/5$, donde $E_m(\alpha) = 8(1 - \alpha^2)^3 / (20 + 15\alpha^2)$ es el mínimo local del potencial químico $\partial\mu/\partial E|_{E=E_0} = 0$, para un α dado, (panel (c)); $E > E_0$ (panel (d)).

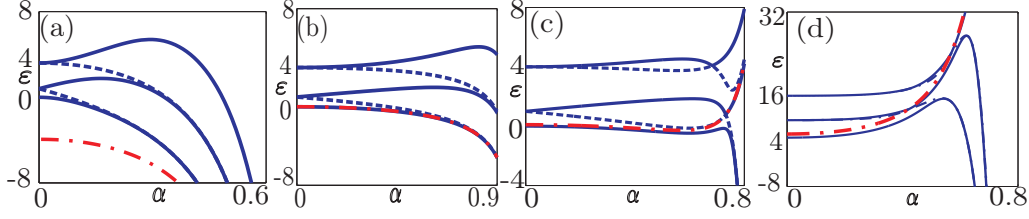


Figura 7.1: Fronteras de las bandas (5 primeras bandas) del espectro de la ecuación (7.17) en función de α para (a) $E = -5$ (b) $E = 0$, (c) $E = 0,1$, y (d) $E = 1$. Las líneas sólidas y rayadas corresponden a las fronteras $\mathcal{E}_n^{(-)}$ y $\mathcal{E}_n^{(+)}$, respectivamente. La línea roja punto-rayas representa el potencial químico μ .

Dejaremos la discusión de las situaciones ilustradas en las figuras 7.1 (c), (d) para la sección 7.5. Ahora, nos centraremos en los casos límites de la solución (7.16). Para $E \rightarrow -\infty$, la solución se aproxima al solitón de la NLS, es decir: $\phi_s(x) \sim \sqrt{-2E}(1 + \alpha) / \cosh(\sqrt{-E}(1 + \alpha)x)$, que refleja el hecho de que la región de localización, determinada por $1/\sqrt{|E|}$, es mucho más pequeña que el período del potencial. Así, (7.16) es un ejemplo de solución exacta, cuya forma aproximada ha sido calculada, de forma numérica, en (Sivan *et al.*, 2008).

Situaciones más interesantes corresponden a valores pequeños de $|E|$. Cuando $|E| \rightarrow 0$, el potencial químico se aproxima al borde de la banda. Este comportamiento aparece ilustrado en la figura 7.1 (b), donde $\mathcal{E} = \mu$ coincide con el borde de la banda semi-infinita (o en otras palabras, estamos tratando una situación donde hemos obtenido una fórmula que nos da la dependencia del borde de las bandas iniciales con respecto a los parámetros del problema. Esta fórmula viene dada explícitamente por (7.15)). Como es conocido (ver, por ejemplo, (Brazhnyi & Konotop, 2004; Alfimov *et al.*, 2002) y referencias en estos artículos), la solución está descrita por la aproximación de escalas múltiples y representa la envolvente del estado de Bloch correspondiente al borde de la banda. La forma de la solución (7.16) implica que $\Phi(X)$ es la envolvente, mientras que

$$\varphi(x) = 1 + \alpha \cos(2x), \quad (7.18)$$

es la función de Bloch *exacta* del potencial $v(x, 0)$, dado por (7.13), y que corresponde a la frontera inferior de la primera banda. En otras palabras, en el límite $|E| \rightarrow 0$, la solución (7.16) es la *solución exacta de un solitón* bifurcando desde el borde del espectro lineal. Que el autor sepa, la solución (7.16) es la primera solución conocida de este tipo. En la figura 7.2 se han dibujado los dos límites opuestos de (7.16), correspondiendo a la envolvente de un solitón (panel (a)) y a un solitón estrecho (panel (b)).

7.4. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES

Para comprobar la estabilidad lineal de la solución (7.3), estudiaremos la evolución de pequeñas perturbaciones de la forma $\psi(x, t) = (\phi(x) + f(x, t) + ih(x, t))$, donde f y h son reales. Linealizando la ecuación de Schrödinger alrededor de la solución (ver introducción), obtenemos

$$\partial_t \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & L_- \\ -L_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

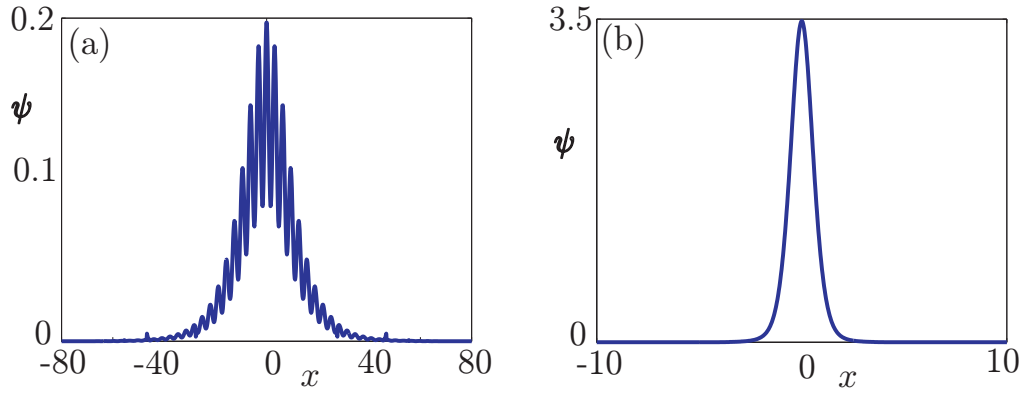


Figura 7.2: Soluciones de la ecuación (8.1), que vienen dadas por (7.16), para (a) $E = -0,01$, $\alpha = 0,3$ y (b) $E = -5$, $\alpha = 0,1$.

y

$$L_- = -\partial_{xx} + v(x) + g(x)\phi^2(x), \quad (7.21)$$

$$L_+ = -\partial_{xx} + v(x) + 3g(x)\phi^2(x), \quad (7.22)$$

Para perturbaciones de la forma $f, h \propto e^{i\Omega t}$, se tiene

$$\Omega^2 f = L_- L_+ f. \quad (7.23)$$

Los operadores L_- y L_+ son autoadjuntos. En lo que sigue, estudiaremos diversas propiedades de estos operadores. Usando el hecho de que ϕ satisface la ecuación (7.1), fácilmente se comprueba que el operador L_- se puede reescribir como

$$L_- = -\frac{1}{\phi} \partial_x \left(\phi^2 \partial_x \left(\frac{1}{\phi} \cdot \right) \right). \quad (7.24)$$

En consecuencia, $\int f L_- f dx = \int |\partial_x \left(\frac{f}{\phi} \right)|^2 \phi^2 dx \geq 0$, y el operador L_- es no negativo. Así, el espectro del operador L_- está compuesto de:

1. Un autovalor simple $\lambda_- = 0$, con su correspondiente autofunción par, la cual es solución de la ecuación (7.1).
2. Un espectro continuo estrictamente positivo $[\beta, \infty)$.

Con respecto al operador L_+ , este satisface la siguiente relación $L_+ = L_- + 2g(x)\phi^2(x)$. Como $g(x)$ es una función negativa, el primer autovalor de L_+ , λ_+ , satisface $\lambda_+ < 0$. Entonces, al menos, un autovalor de L_+ es negativo.

De esta forma, como el operador L_- es no negativo pero el operador L_+ es no positivo, la composición $L_- L_+$ es indefinida. Entonces, no podemos decir analíticamente nada del signo de Ω^2 . Además, el hecho de que el potencial (7.13) cambie de signo dificulta enormemente el estudio analítico. Por tanto, tenemos que recurrir a los métodos numéricos para resolver la ecuación (7.23).

Si algún autovalor Ω^2 tiene signo negativo, la solución asociada es inestable. En caso contrario, la solución es estable. Entonces, discretizando numéricamente el operador $L_- L_+$, podemos calcular sus autovalores. En las figuras 7.3 (a) y (b), mostramos las zonas estables de las soluciones (7.16), para distintos valores de los parámetros α y E . En la figura 7.3 (a), hemos estudiado el rango $-0,5 \leq E \leq -0,1$. Las zonas de estabilidad para el caso $-5 \leq E \leq -1$ se muestran en la figura 7.3(b).

Para confirmar este resultado, hemos hecho un estudio numérico de la evolución de las soluciones (7.16) bajo perturbaciones de amplitud finita. Hemos observado que estas soluciones son estables en el dominio dado en las figuras 7.3 (a) y (b).

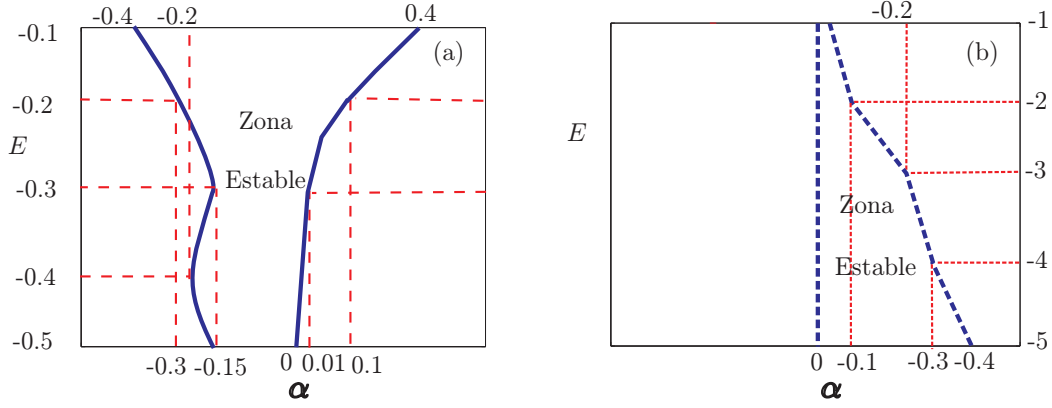


Figura 7.3: Regiones estables de las soluciones (7.16), para distintos valores de los parámetros α y E (a) $-0,5 \leq E \leq -0,1$ (b) $-5 \leq E \leq -1$.

7.5. SOLUCIONES PERIÓDICAS EXACTAS

Volvamos a las soluciones periódicas de la ecuación (7.1). Para ello, utilizaremos las soluciones de la ecuación (7.5), que vienen dadas en términos de las funciones elípticas de Jacobi (Lawden, 1989). Queremos hacer notar que diferentes funciones $\Phi(X)$, que son obtenidas trasladando el argumento, (como, por ejemplo, las soluciones (7.25a) y (7.25d) escritas debajo) y que, por consiguiente, representan la misma solución de la ecuación homogénea NLS, ahora dan origen a soluciones distintas de la ecuación (7.4), dado que estas soluciones vienen dadas por el producto de dos factores periódicos, uno de ellos proveniente de la estructura del potencial periódico (este factor viene descrito por la función $\rho(x)$) y el otro proveniente de las soluciones de la NLS homogénea, las cuales han sido mencionadas anteriormente, (ver la ecuación (7.6)).

Calculemos, entonces, las soluciones de la ecuación (7.4) para $g(x) < 0$ (es decir, $G = -1$). Estas son

$$\phi^{(1)}(x) = \sqrt{2}k\nu(1 + \alpha \cos(2x)) \operatorname{cn}(\nu X, k), \quad \nu^2 = \frac{E}{1 - 2k^2}, \quad (7.25a)$$

$$\phi^{(2)}(x) = \sqrt{2}\nu(1 + \alpha \cos(2x)) \operatorname{dn}(\nu X, k), \quad \nu^2 = \frac{E}{k^2 - 2}, \quad (7.25b)$$

$$\phi^{(3)}(x) = \sqrt{2(1 - k^2)}\nu(1 + \alpha \cos(2x)) \frac{1}{\operatorname{dn}(\nu X, k)}, \quad \nu^2 = \frac{E}{k^2 - 2}, \quad (7.25c)$$

$$\phi^{(4)}(x) = \sqrt{2(1 - k^2)}k\nu(1 + \alpha \cos(2x)) \frac{\operatorname{sn}(\nu X, k)}{\operatorname{dn}(\nu X, k)}, \quad \nu^2 = \frac{E}{1 - 2k^2}, \quad (7.25d)$$

Todas ellas son funciones reales. En particular, teniendo en cuenta que el módulo elíptico k está en el intervalo $k \in [0, 1]$, se tiene que las funciones $\phi^{(2)}(x)$ y $\phi^{(3)}(x)$ son válidas solamente para $E < 0$, es decir, son soluciones pertenecientes al gap semi-infinito, mientras que $\phi^{(1)}(x)$ y $\phi^{(4)}(x)$ pertenecen al gap $E < 0$ y $k > 1/\sqrt{2}$ (ver la figura 7.1(a)) o a la banda $E > 0$ and $k < 1/\sqrt{2}$ (ver las figuras 7.1(c) y (d)). Todas estas soluciones bifurcan desde el estado de Bloch lineal, ecuación (7.18), calculado para $E = 0$.

Las soluciones para $g(x) > 0$ ($G = 1$) son

$$\phi^{(5)}(x) = \sqrt{2}k\nu(1 + \alpha \cos(2x)) \operatorname{sn}(\nu X, k), \quad \nu^2 = \frac{E}{1 + k^2}, \quad (7.26a)$$

$$\phi^{(6)}(x) = \sqrt{2}k\nu(1 + \alpha \cos(2x)) \frac{\operatorname{cn}(\nu X, k)}{\operatorname{dn}(\nu X, k)}, \quad \nu^2 = \frac{E}{1 + k^2}. \quad (7.26b)$$

Es claro que estas soluciones solo son válidas para $E > 0$.

En las formulas anteriores (7.25a) – (7.26b), $X(x)$ está definido como en (7.16), y $\rho(x)$ viene dado por (7.12).

Consideremos ahora el par de soluciones (7.26a), (7.26b) (o alternativamente, el par (7.25a)), (7.25d)) en el límite “lineal” $k \rightarrow 0$. Obtenemos, entonces, dos autoestados del potencial $v(x)$

$$\varphi_1 = (1 + \alpha \cos(2x)) \sin(\sqrt{EX}), \quad (7.27)$$

$$\varphi_2 = (1 + \alpha \cos(2x)) \cos(\sqrt{EX}). \quad (7.28)$$

Estas soluciones son linealmente independientes. Es conocido (ver (Magnus & Winkler, 1979) para los detalles) que la coexistencia de tales soluciones ocurre solamente si uno de los gaps es cerrado. Así, en la dependencia con α del espectro del potencial $v(x)$, que viene dado por las ecuaciones (7.13), (7.15) para $E > 0$, deben existir puntos para los cuales el primer gap está lo suficientemente cerca de tal forma que el potencial químico dado por (7.15) cruza el gap. Esto es exactamente lo que se observa en los paneles (c) y (d) de la figura 7.1. La existencia de tales valores, para α suficientemente grande, se explica del hecho de que para $E > 0$, el potencial químico crece hasta infinito con respecto a α , mientras que el mínimo del potencial periódico con respecto a α tiende a $-\infty$.

Otras autofunciones exactas del potencial $v(x)$, dado por la ecuación (7.13), pueden ser obtenidas considerando el límite lineal de las soluciones (7.25c) y (7.25d), que corresponde a $k \rightarrow 1$. De esta forma, obtenemos un par de soluciones

$$\varphi_3 = (1 + \alpha \cos(2x)) \cosh(\sqrt{-EX}), \quad (7.29)$$

$$\varphi_4 = (1 + \alpha \cos(2x)) \sinh(\sqrt{-EX}). \quad (7.30)$$

A la vista de estas soluciones, queda claro que las combinaciones $\varphi_3 \pm \varphi_4$ son las soluciones asintóticas de la onda solitaria $\phi_s(x)$, que viene dada por la función (7.16), cuando $x \rightarrow \mp\infty$.

Teniendo en cuenta que $g(x)$ no cambia de signo, podemos realizar un análisis de la estabilidad de las soluciones, usando la referencia (Bronski *et al.*, 2001): dado que $\phi^{(2)}(x) > 0$ y $\phi^{(3)}(x) > 0$, se verifica que estas soluciones son linealmente inestables, mientras que la estabilidad de las soluciones $\phi^{(1)}(x)$, $\phi^{(4)}(x)$, $\phi^{(5)}(x)$ y $\phi^{(6)}(x)$ está indeterminada.

Para finalizar esta sección, consideremos el límite $k \rightarrow 1/\sqrt{2}$ para las soluciones (7.25a) y (7.25d), las cuales corresponden al límite de no linealidades grandes. En este caso, el potencial $v(x)$ puede ser visto como una pequeña perturbación de la ecuación NLS. Así, las soluciones mencionadas anteriormente pueden ser visualizadas como soluciones periódicas de la NLS, moduladas por la envolvente $\varphi(x)$.

7.6. APLICACIONES FÍSICAS

En esta sección discutiremos las aplicaciones físicas de los resultados obtenidos. El problema surge, naturalmente, del hecho de que las estructuras periódicas que nosotros hemos usado, ecuaciones (7.13) y (7.14), no son factibles dentro del marco experimental, donde solamente uno o unos pocos rayos láser son usados (teniendo en mente redes ópticas para aplicaciones en un BEC). Se puede entonces plantear la siguiente cuestión: ¿Las soluciones obtenidas representan, de forma satisfactoria, aproximaciones a algún modo localizado realista (como por ejemplo los encontrados numéricamente en (Bludov & Kotonop, 2006)), en modelos donde los coeficientes periódicos son representados por unos pocos armónicos de Fourier del potencial $v(x)$? En esta sección, intentaremos responder a esta pregunta.

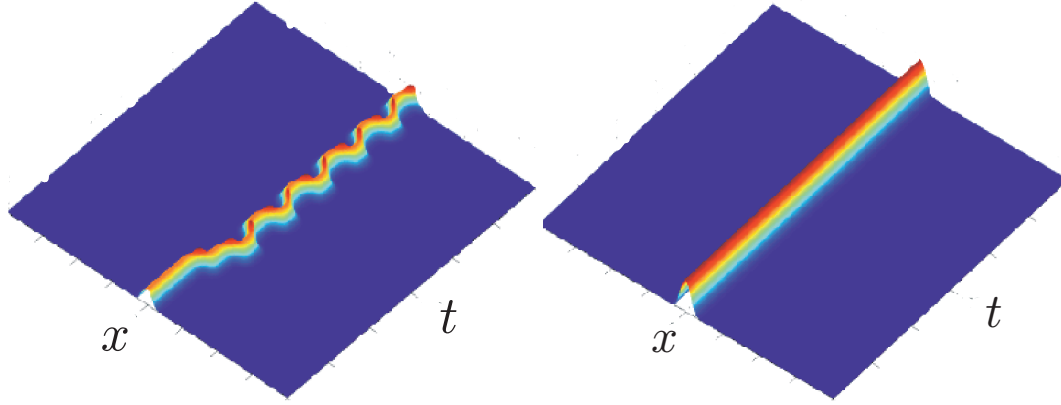


Figura 7.4: Evolución de las soluciones (7.16), con $x \in [-40, 40]$, $t \in [0, 1500]$, para $E = -0,5$ y $\alpha = -0,1$ (a) usando un solo armónico (b) usando dos armónicos. Para el caso (a), la solución es inestable. Para el caso (b) la solución es estable.

Para ello, desarrollemos en serie de Fourier las funciones $v(x)$ y $g(x)$ e introduzcamos los potenciales de corte $v_N(x)$ y $g_N(x)$, generados por la superposición de N armónicos:

$$v_N(x) = \sum_{n=1}^N v_n(\alpha, E) \cos(2nx), \quad g_N(x) = \sum_{n=0}^N g_n(\alpha) \cos(2nx), \quad (7.31)$$

donde, para $N = 2$

$$v_1(\alpha, E) = -8 \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} + E \frac{\alpha(4 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^{7/2}}, \quad (7.32a)$$

$$v_2(\alpha, E) = 8 \frac{(1 - \sqrt{1 - \alpha^2})^2}{\alpha^2} - E \frac{5\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^{7/2}}, \quad (7.32b)$$

y

$$g_0(\alpha) = -\frac{1}{8} \frac{40\alpha^2 + 8 + 15\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^{11/2}}, \quad (7.33a)$$

$$g_1(\alpha) = \frac{3\alpha}{4} \frac{8 + 12\alpha^2 + \alpha^4}{(1 - \alpha^2)^{11/2}}, \quad (7.33b)$$

$$g_2(\alpha) = -\frac{21\alpha^2}{4} \frac{2 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^{11/2}}. \quad (7.33c)$$

Ahora, usaremos las ecuaciones (7.31), (7.32a), (7.32b) y (7.33a), (7.33b), (7.33c) para aproximar las funciones $v(x)$ y $g(x)$, que vienen dadas por las ecuaciones (7.14) y (7.13), respectivamente. Así, por ejemplo, para $\alpha = -0,1$ y $E = -0,5$, que son valores para los que las soluciones de la ecuación (7.4) son estables, (ver figura 7.3(a)), obtenemos

$$g_N = -1,1099 - 0,6436 \cos(2x) - 0,1115 \cos(4x), \quad (7.34a)$$

$$v_N = 0,6107 \cos(2x) + 0,0561 \cos(4x). \quad (7.34b)$$

Hemos simulado numéricamente la dinámica del paquete de ondas con el perfil inicial dado por la solución (7.16), y descrito por la ecuación de evolución (7.1) y con los potenciales v_N y g_N con $N = 1, 2$, en vez de v y g , respectivamente. Algunos resultados se muestran en la figura 7.4. Se observa que mientras la solución analítica explícita (7.16) no es una aproximación satisfactoria para los potenciales armónicos, (en la figura 7.4(a) se observa

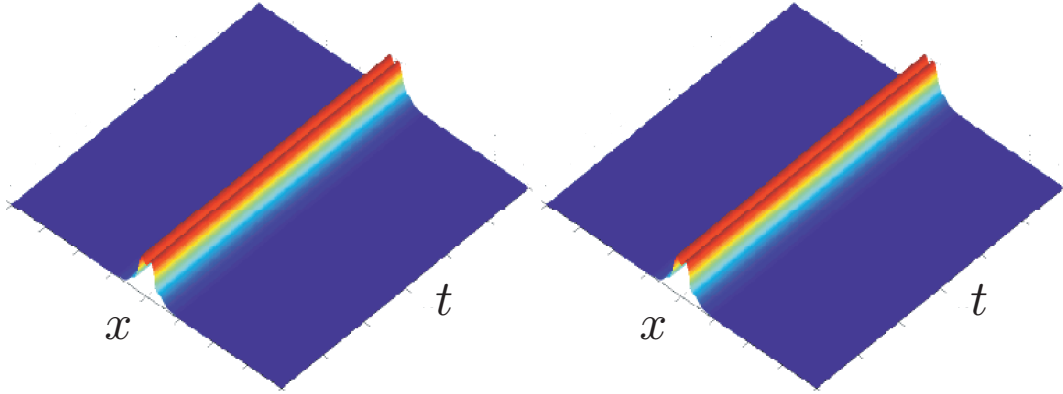


Figura 7.5: Evolución de las soluciones (7.16), con $x \in [-40, 40]$, $t \in [0, 1500]$, para $E = -0,1$ y $\alpha = -0,1$ donde las redes lineales y no lineales son aproximadas por un solo armónico (a) y dos armónicos (b). En ambos casos, la solución es estable.

una conducta oscilatoria de la solución), usando una aproximación con dos armónicos para los potenciales, se obtiene una conducta estable de la solución.

Se observa que para algunos valores específicos de los parámetros, las soluciones obtenidas representan muy buenas aproximaciones, incluso para un único potencial armónico. Un ejemplo de esta situación se muestra en la figura 7.5, donde hemos elegido $E = -0,1$ y $\alpha = -0,1$: se observa que no existe ninguna diferencia en el régimen dinámico entre la red monocromática (figura 7.5(a)) y la red en forma de superposición de dos armónicos (figura 7.5(b)).

Ambas figuras 7.4 y 7.5 fueron obtenidas por simulaciones numéricas directas de la ecuación (7.1), usando como dato inicial para la variable temporal la solución (7.16).

7.7. SOLUCIONES EXACTAS PARA OTROS MODELOS

En esta última sección, se presentan dos modelos más generales que el que se usó para obtener las ecuaciones (7.13) y (7.14).

El primer modelo corresponde a la elección

$$\rho(x) = (1 + \alpha \cos(2x))^p, \quad (7.35)$$

con $p \in \mathbb{R}$. Entonces, es claro que

$$g(x) = \frac{G}{(1 + \alpha \cos(2x))^{6p}}, \quad (7.36)$$

y el potencial externo viene dado por

$$v(x) = -4\alpha p(1 + \alpha \cos(2x))^{-2} [\alpha(1 - p) + \cos(2x) + p\alpha \cos^2(2x)] - \frac{E}{(1 + \alpha \cos(2x))^{4p}} + \mu. \quad (7.37)$$

Es obvio que cuando $p = 1$, recuperamos las expresiones (7.13) y (7.14).

El segundo modelo corresponde a

$$g(x) = \eta(\operatorname{dn}(\xi, k))^p, \quad (7.38)$$

con η una constante y dn la función elíptica de Jacobi. Calculando el potencial externo $v(x)$ obtenemos

$$v(x) = \frac{p}{6} \left[\left(1 - \frac{p}{6}\right) (\text{dn}(\xi, k))^2 \right] + \frac{p}{6} \left[(k^2 - 1) \left(1 + \frac{p}{6}\right) \frac{1}{(\text{dn}(\xi, k))^2} + p \left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{6}\right) \right] - E\left(\frac{\eta}{G}\right)^{2/3} (\text{dn}(\nu\xi, k))^{2p/3} + \mu. \quad (7.39)$$

De esta forma, podemos dar diferentes valores al parámetro p , para obtener la no linealidad $g(x)$ y el potencial $v(x)$ deseado.

Solitones en sistemas con no linealidades moduladas en el tiempo y en el espacio

8.1. INTRODUCCIÓN

HABITUALMENTE, las ecuaciones de onda no lineales que son integrables involucran no linealidades que solamente dependen del campo relevante, y no tienen dependencia explícita en las variables espaciales o temporales, ya que si tuvieran esa dependencia, se romperían las simetrías del sistema y, en particular, existiría una pérdida de integrabilidad. De todas formas, el que existan estas dependencias extras en las interacciones no lineales suele ser muy interesante desde el punto de vista físico, pues abre muchas posibilidades para la creación y el control de las soluciones que son de tipo solitón, tal y como veremos en el siguiente capítulo. Aunque estos estudios empezaron hace algún tiempo (Bruschi *et al.*, 1979; Chen & Liu, 1976; Scharf & Bishop, 1991; Konotop *et al.*, 1993), ha surgido, en los últimos años, un enorme interés por estos, sobre todo en el contexto de sistemas regidos por ecuaciones de Schrödinger no lineales (NLS) y sus aplicaciones a la teoría del campo medio de condensados de Bose-Einstein (BECs) (Pitaevskii & Stringari, 2003) y a la óptica no lineal (Kivshar & Agrawal, 2003).

En este trabajo, vamos un paso más allá de los estudios que hicimos en los dos capítulos anteriores, y consideramos por primera vez no linealidades y potenciales dependientes del tiempo y del espacio. A lo largo de este capítulo, construiremos diferentes tipos de soluciones explícitas, incluyendo soluciones periódicas o breathers, solitones resonantes y solitones cuasiperiódicos. Proporcionaremos expresiones explícitas para todas estas soluciones, utilizando no linealidades físicamente realistas que pueden ser aplicables en la teoría de condensados de Bose-Einstein.

8.2. TEORÍA GENERAL

Consideremos sistemas físicos regidos por la ecuación de Schrödinger no lineal

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + v(t, x)\psi + g(t, x)|\psi|^2\psi, \quad (8.1)$$

donde, físicamente, $\psi(t, x)$ representa una función de onda compleja, con $v(x, t)$ un potencial externo y $g(x, t)$ la llamada no linealidad. Nos centraremos en las llamadas soluciones localizadas para las que se verifica las siguientes condiciones de frontera: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(t, x) =$

0. Nuestra meta es reducir la ecuación (8.1) a la ecuación NLS estacionaria

$$\mu\Phi = -\Phi_{XX} + G|\Phi|^2\Phi, \quad (8.2)$$

donde $\Phi \equiv \Phi(X)$, $X \equiv X(t, x)$ es una función de variable real, μ es el autovalor de la ecuación no lineal, y G es una constante. En este trabajo, exploraremos el caso $G = -1$, esto es, no linealidad atractiva. El caso $G = 1$ no presenta ningún reto, y puede ser estudiada mas adelante.

Para pasar de las soluciones de la ecuación (8.1) a las soluciones de la ecuación (8.2), utilizaremos la siguiente transformación

$$\psi(t, x) = \rho(t, x)e^{i\varphi(t, x)}\Phi(X(t, x)) \quad (8.3)$$

donde

$$X(t, x) = F(\xi), \quad \xi(t, x) = \gamma(t)x + \delta(t), \quad (8.4)$$

siendo $\gamma(t)$ una función definida positiva, representando el inverso de la anchura de la solución localizada, y siendo $-\delta(t)/\gamma(t)$ la posición del centro de masas. Es facil de ver que esta transformación es similar a la utilizada en el capítulo 5 de esta tesis, pero ahora las funciones ρ , φ , y X , dependen, además de la variable espacial, de la variable temporal. En verdad, la transformación (8.3) es más general que la transformación usada en el capítulo 5 (eliminando la variable temporal en la transformación (8.3), obtenemos la transformación (7.6)). Otras transformaciones de similitud han sido estudiadas para ecuaciones NLS en diferentes contextos (Serkin & Hasegawa, 2000; Chen & Yi, 2005).

Utilizando el hecho de que $\Phi(X)$ satisface la ecuación (8.2) y $\psi(t, x)$ es solución de la ecuación (8.1) con potencial $v(t, x)$ y no linealidad $g(t, x)$, y realizando cálculos análogos a los del capítulo 5, obtenemos

$$v(t, x) = \frac{\rho_{xx}}{\rho} - \varphi_t - \varphi_x^2 - \mu \frac{\gamma^4}{\rho^4}, \quad g(t, x) = \frac{\gamma^4}{\rho^6}, \quad (8.5a)$$

$$\rho(t, x) = \sqrt{\frac{\gamma}{F'(\xi)}}, \quad \varphi(t, x) = -\frac{\gamma_t}{4\gamma}x^2 - \frac{\delta_t}{2\gamma}x + \alpha, \quad (8.5b)$$

donde $\alpha(t)$ es una función arbitraria del tiempo.

Así, eligiendo $\delta(t)$, $\gamma(t)$ y $F(\xi)$ (o de forma equivalente $\rho(x, t)$), podemos obtener pares de funciones $g(x, t)$, $v(x, t)$ para los que las soluciones de la ecuación (8.1) pueden obtenerse de las soluciones de la ecuación (8.2), usando las ecuaciones (8.3). Usaremos este hecho para construir soluciones solitónicas que tengan interes físico.

8.3. NO LINEALIDADES LOCALIZADAS

Como una primera aplicación del método anteriormente expuesto, estudiaremos el caso de no linealidades localizadas. La elección posible de los modelos es bastante rica, y empezaremos con una no linealidad con perfil gaussiano

$$g(t, x) = -\gamma(t) \exp(-3\xi^2), \quad (8.6)$$

y con un potencial incluyendo una combinación de trampas dipolares y armónicas, que es muy típico en experimentos BEC

$$v(t, x) = \omega^2(t)x^2 + f(t)x + h(t) - \mu\gamma^2(t) \exp(-2\xi^2), \quad (8.7)$$

donde

$$\omega^2(t) = \gamma^4 + (\gamma_{tt}\gamma - 2\gamma_t^2)/4\gamma^2, \quad (8.8a)$$

$$f(t) = (4\gamma^5\delta + \delta_{tt}\gamma - 2\delta_t\gamma_t)/2\gamma^2, \quad (8.8b)$$

$$h(t) = \gamma^2(1 + \delta^2) - \delta_t^2/4\gamma^2 - \alpha_t. \quad (8.8c)$$

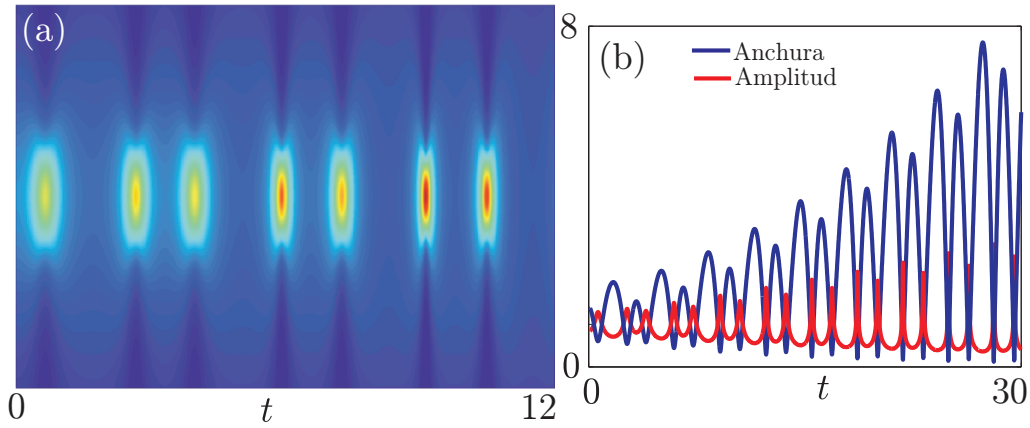


Figura 8.1: Solución de la ecuación (8.1), dada por la ecuación (8.16), para $n = 1$, $\omega_0 = 2$, y $\varepsilon = 0,5$. Los datos iniciales para la ecuación (8.10) son $\nu(0) = \sqrt{2}$ y $\nu_t(0) = 0$. (a) Gráfica en pseudocolor de $|\psi(x,t)|^2$ donde el dominio es $x \in [-3, 3]$ (b) Anchura $\nu(t)$ (línea azul) y amplitud $\sqrt{\gamma}$ (línea roja) frente al tiempo.

Esta elección corresponde a $\rho(t,x) = \sqrt{\gamma} \exp(\xi^2/2)$.

En el caso particular en el que $\delta(t) \equiv 0$, $\mu = 0$ y $\alpha(t) = \int \gamma^2(t) dt$, obtenemos

$$v(t,x) = \omega^2(t)x^2, \quad g(t,x) = -\gamma(t)e^{-3\gamma^2(t)x^2}. \quad (8.9)$$

Así, tenemos un potencial armónico y una no linealidad gaussiana modulada en el tiempo, que correspondería en experimentos en condensados de Bose-Einstein a un laser modulado para que pudiera controlar las interacciones de forma óptica.

Definiendo $\nu = 1/\gamma$, podemos reescribir la ecuación (8.8a) de la siguiente forma:

$$\nu_{tt} + 4\omega^2(t)\nu = 4/\nu^3, \quad (8.10)$$

Esta es la llamada ecuación de Ermakov-Pinney (Ermakov, 1880; Pinney, 1950). A la hora de calcular soluciones explícitas, elegimos la siguiente función para $\omega^2(t)$

$$\omega^2(t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega_0 t), \quad (8.11)$$

donde $\varepsilon \in (-1, 1)$ y $0 \neq \omega_0 \in \mathbb{R}$. Después de algunas operaciones algebraicas (Ermakov, 1880; Pinney, 1950), obtenemos la solución de las ecuaciones (8.10) y (8.11), las cuales son

$$\gamma(t) = [2y_1^2(t) + 2(y_2(t)/W)^2]^{-1/2} \quad (8.12)$$

donde $y_{1,2}(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Mathieu

$$y_{tt} + 4\omega^2(t)y = 0 \quad (8.13)$$

y donde W es su Wronskiano.

Por tanto, la ecuación de Mathieu determina la dinámica temporal de las soluciones obtenidas. Considerando las diferentes elecciones de los parámetros ω_0 y ε , se encuentran que existen tres tipos distintos de comportamiento, que pueden ser clasificados de la siguiente forma: (i) comportamiento *periódico*, que ocurre cuando $\varepsilon = 0$, o en las fronteras entre las regiones de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Mathieu (8.13), (ii) comportamiento *resonante*, que ocurre cuando $\varepsilon \neq 0$ e $y_{1,2}(t)$ pertenecen a la región de inestabilidad de la ecuación (8.13), y (iii) comportamiento *cuasiperiódico*, que se da cuando $y_{1,2}(t)$ están en la región de estabilidad. Daremos ahora ejemplos de todos estos casos.

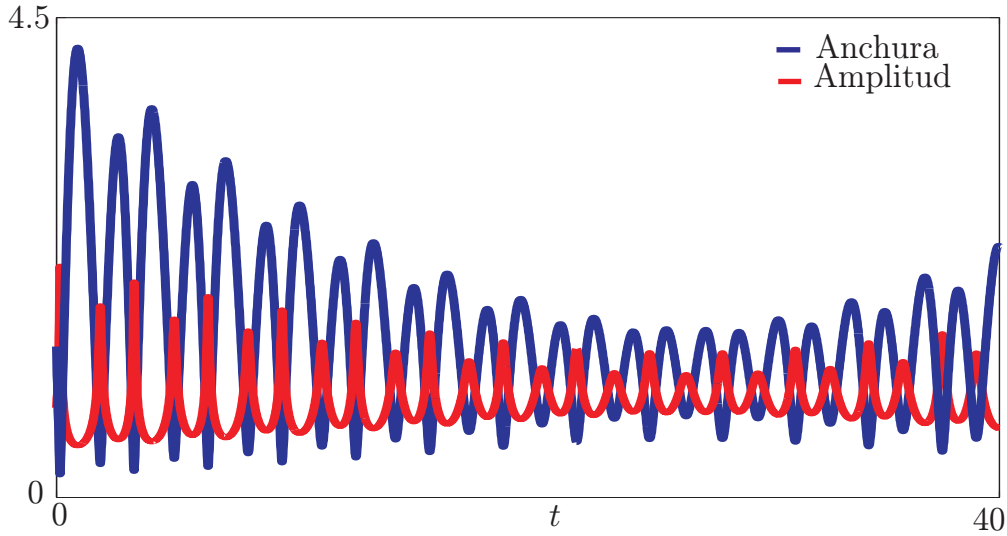


Figura 8.2: Anchura (línea azul) y amplitud (línea roja) con respecto al tiempo de la solución de la ecuación (8.1), dada por la ecuación (8.16) para $n = 1$, $\omega_0 = 2$, y $\varepsilon = 0,5$. Los valores iniciales para la ecuación (8.10) vienen dados por $\nu(0) = \sqrt{2}$, $\nu_t(0) = -6,125\sqrt{2}$.

Si centramos ahora nuestra atención en las soluciones de la ecuación (8.2), y dado que tomamos $\mu = 0$, esta ecuación se transforma en $\Phi'' + \Phi^3 = 0$, y su solución viene dada por

$$\Phi(X) = \frac{\eta \operatorname{sn}(\eta X, k_*)}{2 \operatorname{dn}(\eta X, k_*)}, \quad (8.14)$$

con η arbitrario y $k_* = 1/\sqrt{2}$. Por otro lado, X viene dado por

$$X(t, x) = \int_{-\infty}^{\gamma(t)x} e^{-\xi^2} d\xi, \quad (8.15)$$

que toma valores en el intervalo $(0, \sqrt{\pi})$. De esta forma, $\Phi \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Imponiendo la condición de frontera cero para $x \rightarrow +\infty$, obtenemos que $\eta = 2nK(k_*)/\sqrt{\pi}$, donde $K(k)$ es la integral elíptica. Esto nos lleva a obtener la siguiente familia de soluciones

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) &= n\sqrt{\gamma(t)} \exp(\gamma^2(t)x^2/2 + i\varphi(t, x)) \Phi_1(n\theta(t, x)), \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.16)$$

donde $\varphi(t, x) = -(\gamma_t/4\gamma)x^2 + \int \gamma^2(t)dt$,

$$\Phi_1(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K(k_*) \frac{\operatorname{sn}(\theta, k_*)}{\operatorname{dn}(\theta, k_*)} \quad (8.17)$$

y $\theta(t, x) = (2K(k_*)/\sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{\gamma(t)x} d\xi e^{-\xi^2}$. Es sencillo comprobar que $\psi(x, t) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ en la ecuación (8.16). Por tanto, estas soluciones corresponden a soluciones localizadas.

8.4. SOLITONES RESONANTES

La respuesta de sistemas no lineales a perturbaciones paramétricas es un campo de gran interés que ha sido recientemente estudiado en el marco de la dinámica no lineal de

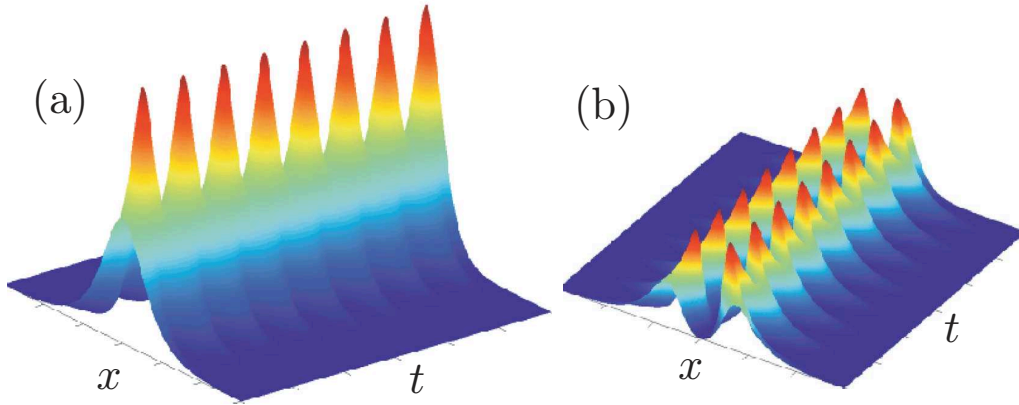


Figura 8.3: Gráficas de $|\psi(x,t)|^2$ para soluciones de tipo breather de la ecuación (8.1), cuyas soluciones explícitas viene dadas por (8.16), para $\varepsilon = 0$ en la ecuación (8.11), y $\gamma(t)$ dada por la ecuación (8.18), correspondiendo a (a) $n = 1$ (b) $n = 2$. En ambos casos, $x \in [-6, 6]$, $t \in [0, 10]$ y los valores iniciales para la ecuación (8.10) son $\nu(0) = \sqrt{2}$, $\nu_t(0) = 0$.

BECs, de forma tanto teórica (Pérez-García *et al.*, 2007; Shchesnovich & Konotop, 2007; Staliunas *et al.*, 2002) como experimental (Engels *et al.*, 2007).

Si nos centramos en el caso particular $\omega_0 = 2$, para la ecuación (8.11), observamos que cuando $\varepsilon \neq 0$, $y_{1,2}(t)$ se encuentran en la región de inestabilidad, por lo que las soluciones dadas por la ecuación (8.16) son *soluciones resonantes multisolitónicas*, dado que $\psi_n(x, t)$ posee $n - 1$ ceros. En la figura 8.1(a), hemos dibujado una solución resonante correspondiente a $n = 1$, con $\omega_0 = 2$. Dicho solitón tiene una conducta resonante creciente, tal y como se puede ver en la figura 8.1(b), donde hemos dibujado la anchura y amplitud del solitón frente al tiempo. En la figura 8.2, hemos dibujado la anchura y la amplitud frente al tiempo, del mismo solitón, pero ahora teniendo una conducta resonante decreciente y transitoria, para $n = 1$.

Es interesante que podamos construir solitones resonantes de forma explícita en un marco bastante complicado, que incluye una no linealidad localizada pulsante y una trampa modulada paramétricamente. Estas soluciones proporcionan un soporte analítico para el fenómeno de la dinámica resonante observada en experimentos en condensados de Bose-Einstein en una dimensión (ver la referencia (Engels *et al.*, 2007)).

También hemos estudiado la estabilidad de estas soluciones multisolitónicas, que vienen dadas por la ecuación (8.16), calculando numéricamente su evolución bajo perturbaciones de amplitud finita. Hemos encontrado que para el caso $n = 1$, el cual corresponde al estado fundamental, se tiene una solución estable, mientras que el resto son inestables (pequeñas perturbaciones llevan a la solución lejos de su perfil inicial).

8.5. SOLUCIONES PERIÓDICAS

Cuando $\varepsilon = 0$, $\gamma(t)$ es una función periódica. En este caso, $\omega(t) = 1$, y

$$\gamma(t) = \sqrt{2} [1 + 3 \cos^2(2t)]^{-1/2}. \quad (8.18)$$

Entonces, las soluciones dadas por la ecuación (8.16) son soluciones periódicas, también llamadas breathers, de hecho, son *breathers multisolitónicos*. En la figura 8.3, hemos dibujado las soluciones correspondientes a los valores $n = 1$, figura 8.3(a), y $n = 2$, figura 8.3(b).

Como en el ejemplo anterior, solamente para $n = 1$, (estado fundamental) la solución de tipo breather es estable.

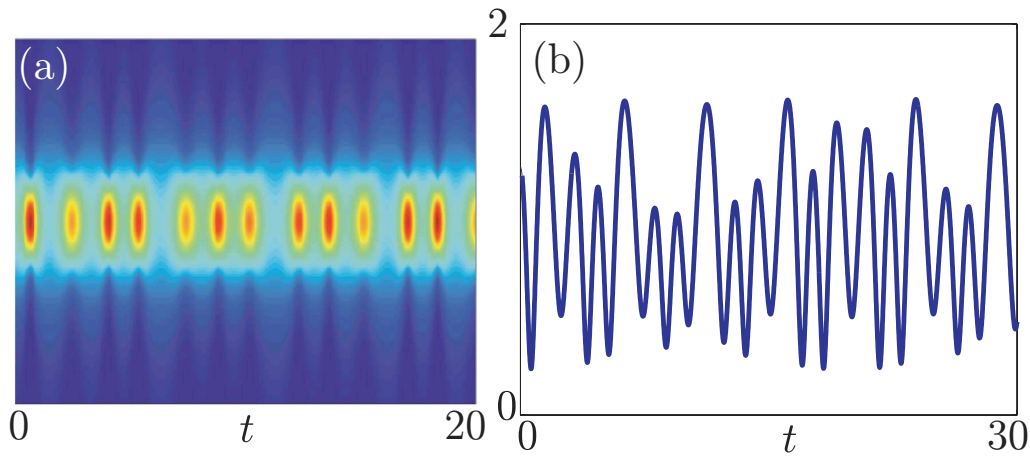


Figura 8.4: Solución de la ecuación (8.1), dada por la ecuación (8.16), que corresponde al valor $n = 1$, para $\omega^2(t) = 1 + \varepsilon \cos(\sqrt{2}t)$, con $\varepsilon = 0,5$. Los valores iniciales para la ecuación (8.10) son $\nu(0) = (2\sqrt{2})^{1/2}$ y $\nu_t(0) = 0$. (a) Gráfica pseudocolor $|\psi(x,t)|^2$ (b) Anchura $\nu(t)$.

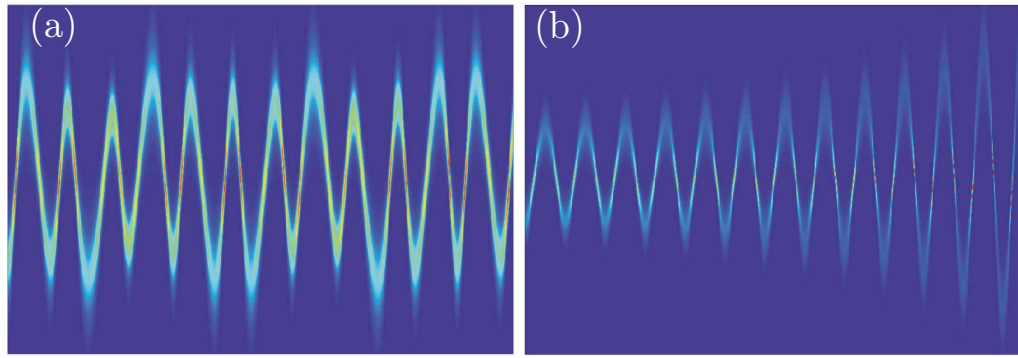


Figura 8.5: Gráficas en pseudocolor de las soluciones de la ecuación (8.1), cuando el centro de masas del solitón se desplaza con velocidad no nula. (a) Solución cuasiperiódica, con $x \in [-3, 3]$, $t \in [0, 40]$, para $\varepsilon = 0,6$ y $\nu(0) = (2\sqrt{2})^{1/2}$, $\nu_t(0) = 0$. (b) Solución resonante creciente, con $x \in [-6, 6]$, $t \in [0, 40]$ para $\varepsilon = 0,3$ y $\nu(0) = \sqrt{2}$, $\nu_t(0) = 0$.

8.6. SOLUCIONES CUASIPERIÓDICAS

En esta sección, buscaremos soluciones cuasiperiódicas de la ecuación (8.1). Para ello, elegimos $\omega_0 = \sqrt{2}$ en la ecuación (8.11), asegurándonos de que las soluciones $y_{1,2}(t)$ de la ecuación de Mathieu (8.13) se encuentran en la región de estabilidad. Entonces, la ecuación (8.11) tiene dos frecuencias inconmensurables. De esta forma, $\gamma(t)$ es una solución cuasiperiódica y, por tanto, las soluciones (8.16) son también cuasiperiódicas. Un ejemplo de esto puede verse en la figura 8.4. Por supuesto, al igual que en los ejemplos anteriores, se pueden construir *soluciones cuasiperiódicas multisolitónicas*.

8.7. SOLITONES CON SU CENTRO DE MASAS DESPLAZÁNDOSE

Como un ejemplo final de las muchas soluciones que pueden ser calculadas usando este método, presentamos soluciones de la ecuación (8.1) cuando el centro de masas del solitón se desplaza con velocidad distinta de cero. Para ello, sea $f(t)$ (en la ecuación (8.8b)), igual

a cero, y con $\delta \neq 0$, lo cual lleva a la siguiente ecuación para $\delta(t)$,

$$\delta_{tt} - 2(\gamma_t/\gamma)\delta_t + 4\gamma^4\delta = 0. \quad (8.19a)$$

Haciendo

$$\alpha_t = \gamma^2(1 + \delta^2) - \delta_t^2/4\gamma^2. \quad (8.19b)$$

se tiene que el potencial v y la no linealidad g siguen conservando las mismas expresiones, que vienen dadas por la ecuación (8.9). Las ecuaciones (8.19) pueden ser resueltas de forma analítica, obteniendo

$$\delta(t) = \delta_* \cos(2\tau(t)), \quad \alpha(t) = \tau(t) + \frac{1}{4}\delta_*^2 \sin(4\tau(t)), \quad (8.20)$$

donde $\tau(t) = \int \gamma^2(t)dt$, y δ_* es una constante arbitraria.

Así, podemos obtener otra vez breathers, soluciones resonantes y soluciones cuasiperiódicas con el centro de masas del solitón moviéndose de forma compleja, de acuerdo a la ecuación (8.20). En la figura 8.5, mostramos solitones cuasiperiódicos [figura 8.5(a)] y solitones resonantes [figura 8.5(b)] mientras el centro de masas del solitón se mueve de acuerdo a la ecuación (8.20).

Parte III

Aplicaciones de la INLSE a
condensados de Bose-Einstein

Pinzas láser para solitones atómicos

9.1. INTRODUCCIÓN

EL éxito de la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos alcalinos (Anderson *et al.*, 1995) (ver también sección 1.2 de la introducción), ha llevado a que se realice un gran esfuerzo en la investigación del diseño de nuevas herramientas para la manipulación y el control coherente de un conjunto de átomos en un condensado. En los últimos años se ha llevado a cabo un estudio intenso de los distintos mecanismos que se podrían usar en la obtención del control de ese conjunto de átomos del condensado, tanto teórica como experimentalmente. Entre las más importantes contribuciones, debemos citar la obtención de ventanas atómicas (Roach *et al.*, 1995), guías de ondas (Folman *et al.*, 2002; Leboeuf & Pavloff, 2001), y el diseño de aceleradores atómicos con geometrías lineales y circulares (Berg-Sørensen & Mølmer, 1998; Gupta *et al.*, 2005; Carpentier & Michinel, 2007). Los láseres atómicos han sido también desarrollados como mecanismos de control, como si fueran un mecanismo de acoplamiento, girando los espines de algunos de los átomos para poder liberarlos de la trampa a la que estaban sometidos (Mewes *et al.*, 1997). Posteriormente, otras fuentes atómicas coherentes han sido construidas llevando a la obtención de láseres uniatómicos o semicontinuos (Bloch *et al.*, 1999; Hagley *et al.*, 1999; Bloch *et al.*, 2001; Martin *et al.*, 2000; Mohring *et al.*, 2005; Guerin *et al.*, 2006).

En este capítulo, proponemos hacer uso de la longitud de difusión como una herramienta para diseñar pinzas atómicas que sean lo suficientemente precisas, para que puedan extraer una porción de átomos del BEC. Además de este método, se han propuesto otros para la extracción de átomos de un condensado (ver las referencias (Gustavson *et al.*, 2002) y (Boyer, 2006)). Nuestro método se inspira en una fuente atómica coherente, basada en la modificación espacial de la longitud de difusión (Rodas-Verde *et al.*, 2005; Vázquez-Carpentier *et al.*, 2006), la cual produce un número de pulsos atómicos altamente regulares y controlables, modulando la longitud de difusión a a lo largo de uno de los ejes donde está situado el BEC. Mostraremos que, en comparación con las trampas lineales, las cuales no alteran el valor de a , las interacciones no lineales construidas espacialmente producen un control robusto sobre el número de átomos que pueden ser extraídos del BEC, proporcionando nuevos caminos para la creación de estados cuánticos macroscópicamente superpuestos en condensados de Bose-Einstein (Dunningham *et al.*, 2006).

9.2. MODELO Y ECUACIONES

Asumiremos que el BEC está fuertemente confinado en las direcciones transversales (x, y) y debilmente confinado a lo largo de la dirección longitudinal z , obteniendo entonces

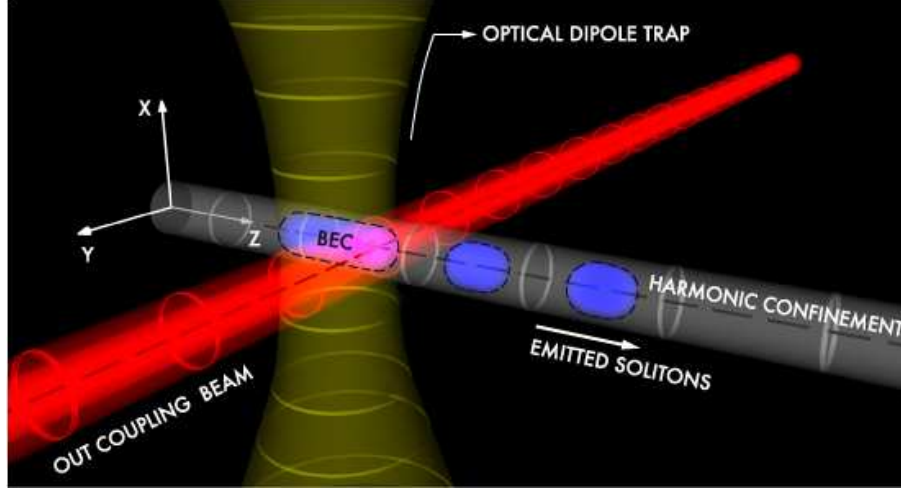


Figura 9.1: Dibujo del sistema que estudiaremos para el caso de las pinzas ópticas, las cuales son usadas para extraer un número dado de átomos de un condensado de Bose-Einstein. Usamos un láser sobre el condensado de Bose-Einstein, que está confinado transversalmente por un potencial magnético y confinado ópticamente en la dirección del movimiento del láser.

una configuración de tipo *cigarrillo*. Consideraremos que la longitud de difusión puede variar a lo largo del eje z , pudiendo pasar de valores positivos a negativos por medio del control óptico de la resonancia Feshbach (ver apartado 1.2). La región donde la longitud de difusión es negativa puede variar de tamaño y puede ser desplazada a lo largo del eje z , simplemente moviendo el láser. La elección de un control óptico (Theis *et al.*, 2004) en vez de un control magnético (Inouye *et al.*, 1998) nos permitirá una manipulación más fácil y rápida de las variaciones espaciales de la longitud de difusión.

La descripción en la aproximación del campo medio de la dinámica de un BEC, tal y como se explicó en la introducción (apartado 1.2), viene dada por la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), que es de la forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 \Psi + V(\vec{r})\Psi + U|\Psi|^2\Psi, \quad (9.1)$$

donde Ψ es la función de onda compleja, normalizada al número de átomos N de la nube atómica: $N = \int |\Psi|^2 d^3r$. $U = 4\pi\hbar^2 a/m$ caracteriza la interacción entre dos cuerpos determinada por el valor de la longitud de difusión a . La nube de N bosones iguales de masa m está fuertemente confinada a lo largo de los ejes (x, y) por un potencial armónico V_{\perp} de frecuencia ν_{\perp} y debilmente confinado a lo largo del eje z por el efecto de una trampa dipolar óptica V_z que puede ser producida usando un rayo láser de anchura dada a lo largo del eje z (Stamper-Kurn *et al.*, 1998; Martikainen, 2001). La expresión matemática del potencial es la siguiente:

$$V(\vec{r}) = V_{\perp} + V_z = \frac{m\nu_{\perp}^2}{2} (x^2 + y^2) + V_d \left[1 - \exp\left(-\frac{z^2}{L^2}\right) \right], \quad (9.2)$$

donde V_d es la profundidad del potencial dipolar óptico y L su anchura característica a lo largo del eje z . Para fijar ideas, se presentan datos específicos correspondientes al ${}^7\text{Li}$, usando los parámetros experimentales que aparecen en la referencia (Strecker *et al.*, 2002), donde $V_d \approx \hbar\nu_{\perp}$, siendo $\nu_{\perp} = 1$ kHz la frecuencia de la trampa en el plano transversal (x, y) , con un radio transversal de $r_{\perp} \approx 3\mu\text{m}$.

Los otros valores numéricos usados en nuestras simulaciones son $L = 4r_{\perp}$, $N = 3 \cdot 10^5$, $w_c = 5,4r_{\perp}$ y $a = -1,4$ nm. Queremos hacer hincapié en que este método debería ser

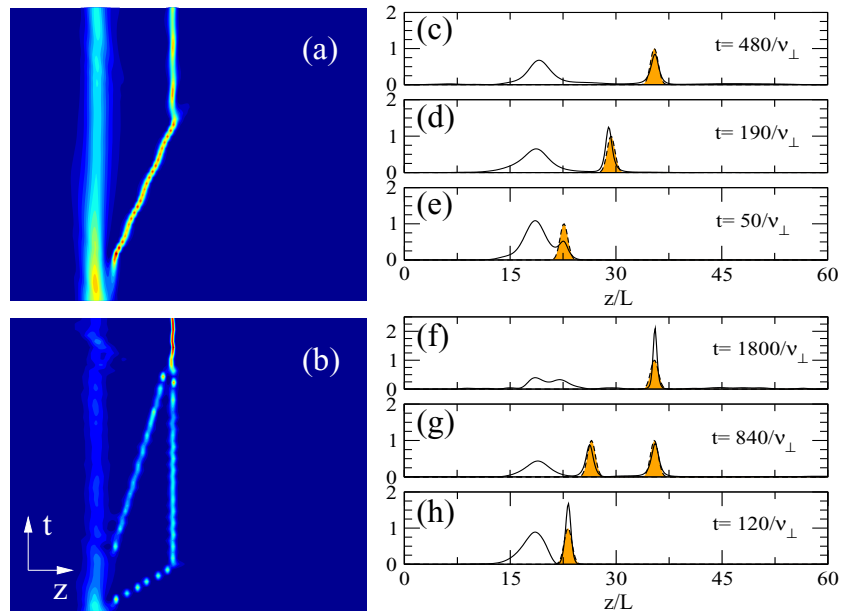


Figura 9.2: Emisión controlada de solitones atómicos del BEC. La extracción fue hecha empleando un láser con perfil gaussiano. Una vez que el solitón es emitido, el rayo se separa del condensado arrastrando los átomos emitidos. En (a) un rayo láser extrae un solitón y controla su posición a lo largo del eje z . En (b) se extraen dos solitones con dos rayos distintos y sus rutas son unidas. La variable temporal, mostrada en el eje vertical va desde $t = 0$ a $t = 500/\nu_{\perp}$ en (a) y desde $t = 0$ a $t = 1800/\nu_{\perp}$ en (b), donde $\nu_{\perp} = 1$ kHz es la frecuencia radial de la trampa. El eje horizontal mide 60 veces la anchura L de la trampa dipolar óptica, que confina el condensado en la dirección z . Las figuras a la derecha representan la densidad de átomos, mostrando los perfiles de los solitones en la reserva y los solitones emitidos (en línea continua negra), y del láser (línea negra con puntos y rayas) para distintos tiempos.

también satisfactorio para otras especies atómicas, como ^{85}Rb y ^{133}Cs , con un cambio adecuado en los parámetros.

9.3. EXTRACCIÓN ATÓMICA CON PINZAS ESTÁTICAS Y CONTROL

El problema que estudiaremos es el de la extracción controlable de átomos de un BEC, como ya se ha dicho. Consideraremos un sistema en el cual un condensado tipo cigarrillo está parcialmente solapado por un rayo láser (ver figura 9.1), en una configuración similar a la descrita en la referencia (Rodas-Verde *et al.*, 2005). Bajo adecuadas condiciones, el láser puede cambiar el valor local de la longitud de difusión a en una parte de la nube atómica. Si se cambia el valor de a a valores negativos suficientemente grandes, se podría emitir una gran cantidad de solitones atómicos desde el condensado. Si la distancia entre el rayo láser y el centro de la nube se mantiene constante, un solitón emitido podría rebotar y así permanecer atrapado en el condensado (Vázquez-Carpentier *et al.*, 2006). Una vez que los átomos son extraídos, el láser puede ser movido a lo largo del condensado. Esto también nos permite controlar la posición del solitón en la dirección z . La idea de esta extracción de átomos es radicalmente distinta que la que se usa en una trampa dipolar usual para extraer átomos, sin cambiar la longitud de difusión a valores negativos. En este último caso, los átomos sufrirían una serie de oscilaciones, conocidas como oscilaciones Josephson, entre el BEC y las pinzas, y solamente sería posible extraer una porción significativa. Así, el papel

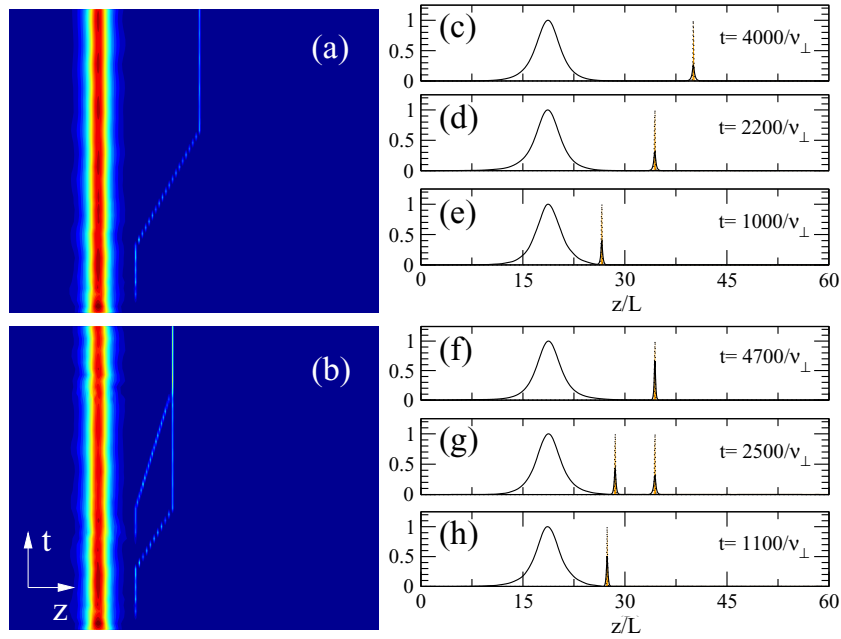


Figura 9.3: Igual que en la figura 9.2 pero para un rayo láser mas intenso y estrecho. El eje vertical corresponde a la variable temporal cuyo dominio va desde $t = 0$ a $t = 5000/\nu_{\perp}$. Los otros parámetros son los mismos que los utilizados para obtener la figura 9.2. Los gráficos de la derecha representan los perfiles del condensado y de los solitones emitidos (en línea negra) y de los rayos láser (en línea negra con puntos y rayas) para tres tiempos distintos de propagación.

de las interacciones no lineales es esencial en esta configuración estática para garantizar que una vez extraído los átomos, estos no vuelvan a la reserva de donde salieron.

Nuestros resultados están basados en simulaciones numéricas de la ecuación (9.1). Todos los resultados presentados aquí han sido obtenidos usando un método pseudoespectral de segundo orden en tiempo denominado split-step, y usando métodos de Fourier (Pérez-García & Liu, 2003) para evaluar las derivadas espaciales. En las figuras 9.2(a) y 9.2(b) se muestran algunas simulaciones numéricas, donde se indica como funcionan las pinzas anteriormente descritas. En ambos dibujos, se dan imágenes en pseudocolor de la densidad de la nube. El eje horizontal es el eje z y el vertical es el eje del tiempo. La extracción de átomos se hizo con un láser con perfil gaussiano. Si la longitud de difusión cambia a valores negativos suficientemente grandes, una parte de la nube atómica es extraída. Una vez que los átomos han dejado la reserva, se mueve el láser a lo largo del condensado, arrastrando parte de los átomos. En la figura 9.2(a) el láser extrae un solitón y controla su posición a lo largo del eje z . En la figura 9.2(b) dos solitones son extraídos con dos láseres distintos y su ruta es unida en un punto dado. El dominio de la variable temporal en el eje vertical va desde $t = 0$ a $t = 500/\nu_{\perp}$ en la figura 9.2 (a) y desde $t = 0$ a $t = 1800/\nu_{\perp}$ en la figura 9.2(b), donde $\nu_{\perp} = 1$ kHz es la frecuencia radial de la trampa. El eje horizontal mide 60 veces la anchura L de la trampa dipolar óptica, que confina el condensado en la dirección z . Las figuras a la derecha representan la densidad de átomos, mostrando los perfiles de los solitones en la reserva y los solitones emitidos (en línea continua negra), y del láser (línea negra con puntos y rayas) para tres tiempos distintos. Como se aprecia en las figuras, el método permite un fuerte control sobre los átomos extraídos.

Consideraremos ahora una configuración ligeramente diferente que sirva para mostrar la fuerza del método. Nos centraremos en el caso de un rayo láser más intenso y estrecho que el usado en las simulaciones anteriores. En este caso, se genera una alta interacción

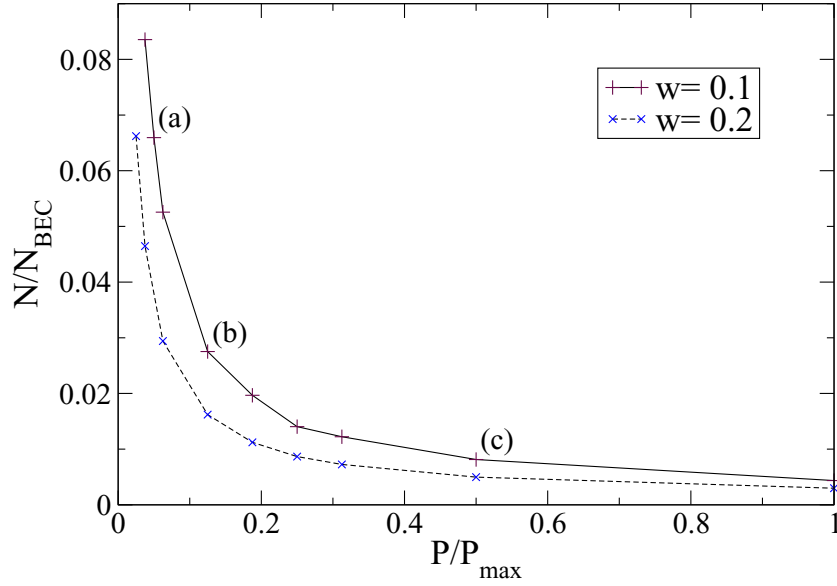


Figura 9.4: Gráfico del porcentaje de átomos extraídos (N/N_{BEC}) frente a la potencia del rayo láser (P/P_{max}) para dos anchuras distintas del rayo: $w \approx w_c/50$, dibujado con el símbolo +, en granate y $w \approx w_c/25$, dibujado con el símbolo × (en azul). El resto de los parámetros están indicados en la figura 9.5.

no lineal y algunos átomos son atraídos hacia esta región, que sigue teniendo longitud de difusión negativa, y son atrapados. Al igual que el caso anterior, la posición de los átomos extraídos a lo largo del eje z puede ser controlada moviendo el láser. En las figuras 9.3(a) y 9.3(b), mostramos una representación similar a la expuesta en las figuras 9.2(a) y 9.2(b).

Como hemos dicho, se ha usado un rayo más estrecho que en el caso anterior para poder suprimir los rebotes internos que sufre el solitón atómico extraído. En la figura 9.3(b), podemos observar la emisión de dos ondas de materia, empleando dos láseres distintos. Tal y como ya se ha dicho, se observa que si desplazamos los láseres, es posible controlar la posición relativa de los solitones extraídos. El eje vertical corresponde a la variable temporal cuyo dominio va desde $t = 0$ a $t = 5000/\nu_{\perp}$, en ambas figuras. Los gráficos de la derecha representan los perfiles del condensado y de los solitones emitidos (en línea negra), y de los haces láser (en línea negra con puntos y rayas) para tres tiempos distintos.

Claramente, el número de átomos extraídos depende de la intensidad del láser. En la figura 9.4 podemos ver el porcentaje de átomos extraídos y atrapados por la pinza láser en función de la potencia del láser, para dos haces de diferentes anchuras w (ambas anchuras mucho más pequeñas que el tamaño longitudinal w_c de la nube BEC). El haz con anchura $w \approx w_c/50$ (representado en la gráfica con el símbolo + en granate) puede extraer más átomos que el haz con anchura $w \approx w_c/25$ (representado en la gráfica con el símbolo × en azul). Tal y como se puede apreciar en la gráfica, el número de átomos extraídos decrece cuando la intensidad del láser se incrementa. Esto es debido al hecho de que el número de solitones emitidos se incrementa con la intensidad del láser, por lo que el número de átomos por solitón disminuye.

En la figura 9.5, mostramos tres simulaciones numéricas distintas, empleando haces de diferente intensidad. Cada figura se corresponde con los tres puntos etiquetados en la figura 9.4 como (a), (b) y (c). El eje vertical corresponde a la variable temporal cuyo rango va desde $t = 0$ a $t = 1500/\nu_{\perp}$. En $t = 1100/\nu_{\perp}$ el láser es puesto en movimiento a lo largo del eje z . Los perfiles superiores muestran la reserva del condensado y la distribución de los átomos extraídos.

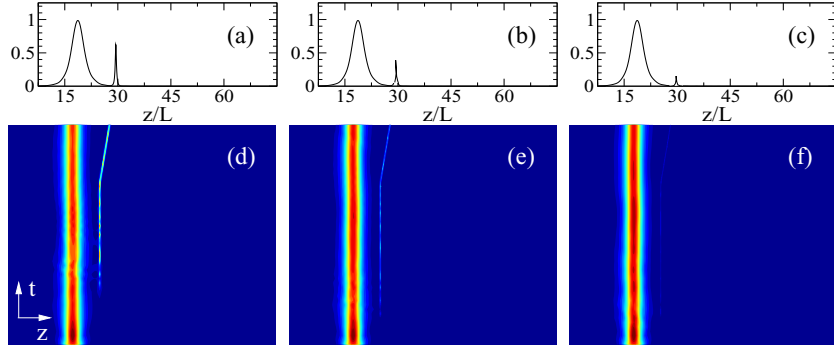


Figura 9.5: (a-c) Diferentes ejemplos de la extracción de un átomo de un condensado, para diferentes intensidades, las cuales corresponden a la figuras etiquetadas con (a), (b) y (c) en la figura 9.4. Mostramos los perfiles para un tiempo de $t = 1500/\nu_{\perp}$. El láser es separado de su posición original en $t = 1100/\nu_{\perp}$. (d-e) Dibujos en pseudocolor indicando la evolución completa del BEC en el tiempo $t \in [0, 1500/\nu_{\perp}]$.

9.4. EXTRACCIÓN ATÓMICA CON LAS PINZAS EN MOVIMIENTO

Otra interesante posibilidad es usar una configuración en la que los láseres estén moviéndose a velocidades variables. En este caso, la extracción de átomos se obtiene cuando el láser atraviesa al condensado, llevándose partículas en su movimiento. El número de átomos extraídos N_e varía con la velocidad, y con los parámetros principales del rayo. Hemos analizado, mediante simulaciones numéricas, la dependencia de N_e con respecto a la intensidad del láser para diferentes velocidades en dos casos distintos: El primer caso corresponde a un potencial lineal moviéndose y el segundo corresponde a nuestras pinzas no lineales. Físicamente, la primera situación consiste en una trampa dipolar óptica que no cambia el valor de la longitud de difusión. Asumimos que, en este caso, el láser que crea esta trampa lineal tiene la misma anchura y profundidad que en el caso no lineal. La única diferencia es que las interacciones no lineales son suprimidas. Nuestro propósito en esta comparación es evaluar el efecto que tienen las interacciones no lineales en el procedimiento de extracción. Para este fin, hemos empleado el mismo modelo que en las secciones previas, la ecuación de Schrödinger no lineal. En todas las simulaciones, un haz láser de anchura w es desplazado de la posición $z \ll 0$ a $z \gg 0$ a una velocidad fija dada v , extrayendo una fracción de átomos N_e/N_{BEC} de la reserva del condensado, la cual está centrado en $z = 0$.

Las simulaciones revelan que, en el caso no lineal, la fracción de átomos extraídos N_e/N_{BEC} depende crucialmente de los parámetros del láser, haciendo el proceso altamente controlable, simplemente cambiando la velocidad, intensidad o anchura del haz. En la figura 9.6 se muestra la dependencia del porcentaje de átomos extraídos frente a la velocidad del haz láser. La línea negra discontinua representa los valores obtenidos con las pinzas lineales. La línea negra continua muestra la dependencia de los átomos extraídos con la velocidad del láser para el caso no lineal. Tal y como se aprecia en la gráfica, la eficiencia de la pinza óptica no lineal es mucho mayor que en el caso lineal. Otra diferencia entre ambas configuraciones es la presencia de variaciones bruscas de N_e , para algunas velocidades, en la configuración no lineal, permitiendo mayor control en el número de átomos extraídos.

En la figura 9.7 hemos dibujado la variación de N_e/N_{BEC} frente a w [figura 9.7(a)] y también la variación de N_e/N_{BEC} frente a la profundidad del potencial óptico dipolar V_d , medido en unidades de $V_0 = \hbar\nu_{\perp}/2$ [figura 9.7(b)]. En ambos casos, los datos fueron obtenidos fijando la velocidad del láser a $v = 5 \text{ mm s}^{-1}$. Al igual que en la figura 9.6, la línea continua se refiere a la pinza no lineal y la línea rayada a la pinza lineal. Esta conducta

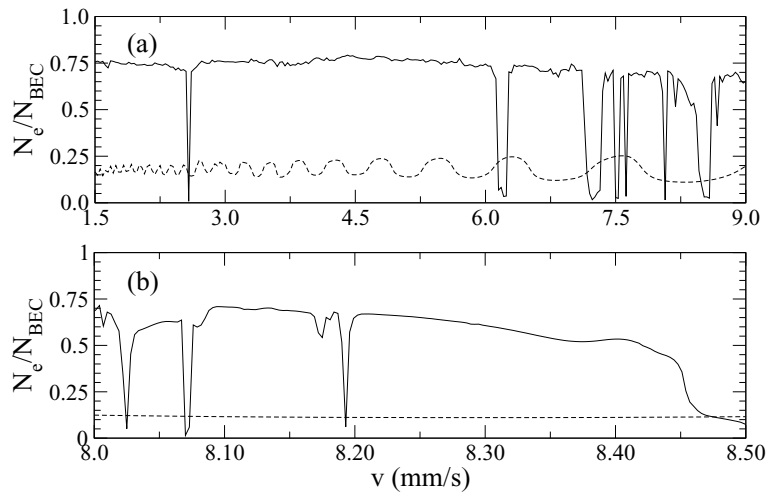


Figura 9.6: Figura superior: comparación entre el número de átomos extraídos usando las pinzas no lineales (línea continua) y las pinzas lineales (línea discontinua) para diferentes valores de la velocidad. El eje y indica el número de átomos confinados por las diferentes pinzas ópticas, normalizando estos átomos al número total de átomos que forman la cantidad inicial del BEC. El eje x representa la velocidad de la pinza cuando esta atraviesa el condensado. Figura inferior: Vista en detalle de la figura superior para $v \in [8,0, 8,5]$ mms^{-1} .

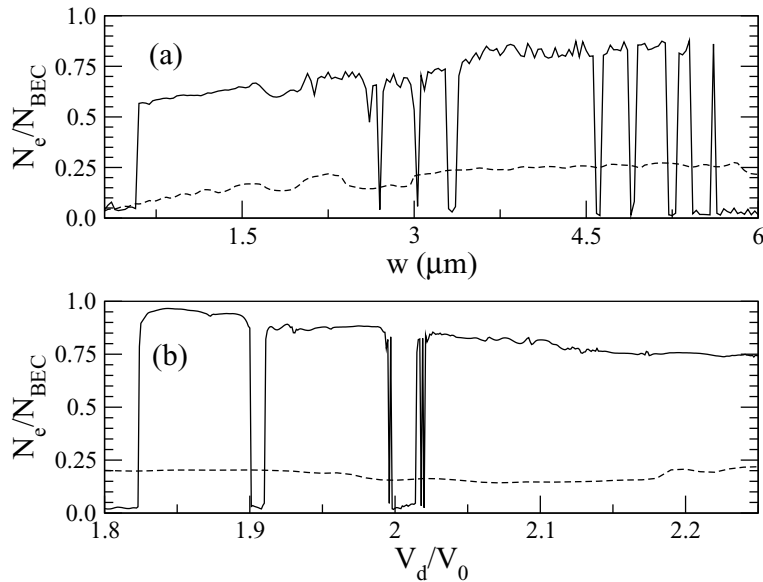


Figura 9.7: Fracción de átomos extraídos del condensado, en función de (a) la anchura w y (b) la intensidad I de las pinzas ópticas. La velocidad fue fijada al valor $v = 5 \text{ mm s}^{-1}$ en todos los casos. La línea continua se corresponde con los datos obtenidos para la pinza óptica no lineal. La línea discontinua corresponde a la pinza lineal.

es similar a las variaciones observadas en la figura 9.6. El efecto de las interacciones no lineales se traduce en la existencia de variaciones bruscas en el número de átomos extraídos para ciertos valores de la anchura y de la intensidad de la pinza láser. Esto añade diversas posibilidades de control que no se tienen al utilizar la trampa lineal.

Desde el punto de vista práctico, las regiones con variaciones complejas del número de partículas, en función de los parámetros anteriores (por ejemplo, la profundidad del potencial alrededor del valor $V_d/V_0 \approx 2,0$ en la figura 9.7(b)), son interesantes para proporcionar control sobre los átomos. Este efecto abre nuevas posibilidades para la creación de estados cuánticos macroscópicamente superpuestos en condensados de Bose-Einstein (Dunningham *et al.*, 2006). Finalmente, estas regiones tienen cierto parecido con las ventanas fractales, que aparecen en la teoría de difusión caótica y en la teoría de resonancias en colisiones de ondas no lineales. Estas teorías están siendo objeto de un estudio detallado (Goodman & Haberman, 2007; Zhu & Yang, 2007).

Capítulo 10

Conclusiones y vías de ampliación

SON muchos y muy diversos los resultados presentados a lo largo de esta tesis. A continuación se resumen, clasificados por temas, las conclusiones más importantes de cada capítulo, junto con algunas cuestiones que permanecen abiertas y que esperamos desarrollar en un futuro próximo.

10.1. EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PARA LA INLSE

10.1.1. ESTABILIDAD DE ESTADOS FUNDAMENTALES PARA LA INLSE

Hemos desarrollado un análisis de estabilidad para la ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea para el caso en el que $g(x)$ sea una función localizada. Hemos mostrado que para que una solución positiva y acotada sea estable tienen que cumplirse dos criterios:

- La condición espectral.
- El criterio de Vakhitov-Kolokolov.

Si alguna de estas dos condiciones se incumple, la solución es inestable.

- Una vía de ampliación muy interesante consistiría en buscar un criterio de estabilidad para soluciones con varios nodos o soluciones excitadas, esto es, soluciones que cambien de signo.

10.1.2. EXISTENCIA DE SOLITONES OSCUROS PARA CINLSE CON NO LINEALIDAD PERIÓDICA

Utilizando diversas técnicas matemáticas, tales como teoría clásica de EDO's (concepto de sub y super-solución), topología (grado topológico y homeomorfismos libres), y sistemas dinámicos, probamos la existencia de solitones oscuros para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica con no linealidad inhomogénea periódica.

Como posible vía de ampliación:

- Desarrollar un método similar donde la modulación espacial de la no linealidad $g(x)$ no sea periódica sino, por ejemplo, cuasiperiódica.

10.1.3. EXISTENCIA DE SOLITONES BRILLANTES EN LA CQINLSE

Hemos demostrado la existencia de solitones brillantes para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica quíntica inhomogénea, donde las no linealidades $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ eran positivas y pertenecían a $L^\infty(\mathbb{R})$, y tales que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_i(x) = 0$, $i = 1, 2$. Para ello,

hemos usado la teoría de puntos críticos y en concreto el teorema de Mountain-Pass, desarrollado por Ambrosetti y Rabinowitz (Ambrosetti & Rabinowitz, 1973).

Quedan muchos problemas abiertos en este campo. Quizás, los mas inmediatos sean:

- Modificar las condiciones sobre las funciones $g_i(x)$, $i = 1, 2$, de tal forma que no sean tan restrictivas.
- Generalizar al caso multidimensional y realizar la demostración con no linealidades distintas: no linealidades saturables, logarítmicas, etc.

10.1.4. ONDAS SOLITARIAS PARA SISTEMAS DE SCHRÖDINGER NO LINEALES ACOPLADOS LINEALMENTE Y CON COEFICIENTES INHOMOGÉNEOS

En este trabajo, probamos la existencia de soluciones homoclínicas al origen en sistemas de Schrödinger no lineales acoplados linealmente y con coeficientes inhomogéneos. Además, probamos la existencia de soluciones impares o soluciones con un nodo y estudiamos las ramas de soluciones en sistemas controlados por parámetros. Para ello, hemos usado el teorema del punto fijo de Krasnoselskii junto con un criterio de compacidad debido a Zima.

- Uno de los problemas abiertos es el de extender este resultado eliminando la hipótesis sobre el soporte en c y en f y asumir, por ejemplo, que $c, f \in L^r(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ para $r \in [0, \infty)$.
- Generalizar el método a problemas multidimensionales.

10.2. SOLUCIONES ANALÍTICAS DE LA INLSE

10.2.1. SIMETRÍAS DE LIE PARA LA INLSE

Hemos aplicado el método de simetrías de Lie para encontrar soluciones analíticas de la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea en una dimensión. Hemos introducido la teoría general de este método, proporcionando diferentes ejemplos de interés físico, y hemos usado la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos para proporcionar un análisis mas completo del método. Finalmente, hemos construido soluciones asimétricas.

Pensamos que quedan muchos problemas por resolver en este campo. Las mas relevantes a corto plazo son, quizás, los siguientes:

- Este método puede generalizarse y ser aplicado al estudio de sistemas de ecuaciones de Schrödinger y de ecuaciones de Schrödinger multidimensionales. En este último caso, al no existir una solución analítica de la NLSE, se podrían extraer distintas propiedades usando el método de los momentos (Pérez-García *et al.*, 2007), en escenarios bidimensionales y tridimensionales.

10.2.2. SOLUCIONES EXACTAS PERIÓDICAS Y LOCALIZADAS DE LA INLSE CON NO LINEALIDADES MODULADAS ESPACIALMENTE: REDES LINEALES Y NO LINEALES

En este trabajo construimos soluciones explícitas de la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea y con coeficientes periódicos. Obtenemos tanto soluciones localizadas como periódicas y estudiamos su estabilidad lineal. Además, haciendo un análisis del modelo y de sus soluciones proporcionamos distintas conclusiones sobre las redes lineales y sobre la estabilización de modos localizados por redes policromáticas.

- Un caso distinto del considerado en esta tesis sería el de tomar $|\alpha| \geq 1$ en vez de $|\alpha| < 1$, que es lo que se hizo en el capítulo 5. En este caso el dominio de las soluciones estaría acotado y obtendríamos soluciones en multipozos de potencial.

10.2.3. SOLITONES EN SISTEMAS CON NO LINEALIDADES MODULADAS EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO

En este capítulo, hemos calculado explícitamente soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal dependiente del tiempo cuando la no linealidad g y el potencial v dependen de las coordenadas espaciales y temporales. Hemos calculado soluciones periódicas o breathers, solitones resonantes, solitones cuasiperiódicos y soluciones cuyo centro de masas tiene un movimiento complejo. Todas estas soluciones son de interés físico en el campo de los condensados de Bose-Einstein.

Como posibles vías de ampliación:

- Las ideas contenidas en este trabajo podrían ser aplicadas a estudiar sistemas multi-componente y situaciones multidimensionales, así como otras ecuaciones no lineales, como la ecuación de Schrödinger no lineal cúbico-quintica.
- Este estudio podría ayudar en el diseño de potenciales y no linealidades para controlar la dinámica de los condensados de Bose-Einstein.

10.3. APLICACIONES DE LA INLSE A CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

10.3.1. PINZAS LÁSER PARA SOLITONES ATÓMICOS

En este capítulo hemos mostrado una de las aplicaciones físicas de la ecuación de Schrödinger no lineal. Hemos mostrado como poder extraer y controlar átomos de un condensado de Bose-Einstein, tanto si la pinza está estática como si está en movimiento. Además, hemos comparado la extracción no lineal con la extracción lineal, llegando a la conclusión que la extracción de átomos con pinzas no lineales es, en muchos aspectos, más eficiente que la extracción de átomos con pinzas lineales.

La aproximación de Gross-Pitaevskii

La aproximación más simple para la función de onda de un sistema de muchas partículas es (correctamente simetrizada) el producto de los estados de cada partícula simple. En el caso de un BEC para $T = 0$, esta aproximación es usualmente conocida como la aproximación de campo medio o la aproximación de Gross-Pitaevskii. Con esta aproximación se obtiene una ecuación o un conjunto de ecuaciones muy simples, que son muy convenientes para cálculos numéricos y, en el caso de un condensado de Bose-Einstein de gases alcalinos, dan una buena descripción cuantitativa de la conducta del gas. En este apéndice trataremos el caso de un gas hiperfino (gas sin espín), en equilibrio, a temperatura cero. Para otras aplicaciones, puede consultarse la referencia (Leggett, 2001). Asumiremos que todas las interacciones efectivas son repulsivas. Para el caso de especies con interacciones atractivas, puede consultarse, por ejemplo, la referencia (Dalfovo *et al.*, 1999).

La ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo

Consideremos un gas de N átomos, todos de la misma especie hiperfina, en equilibrio a temperatura cero y confinados por medio de un potencial atrapante $V_{\text{ext}}(r)$. Usando la teoría de Hartree-Fock, se tiene que el estado fundamental es

$$\Psi_N(r_1 \dots r_N) = \prod_{i=1}^N \chi_0(r_i), \quad (\text{A.1})$$

donde $\chi_0(r)$ es la función de onda normalizada de una partícula. Utilizando esta función de onda (A.1), el valor esperado de la energía es

$$\langle H \rangle_N = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \chi_0(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |\chi_0(\mathbf{r})|^2 \right] + \frac{1}{2} N(N-1) U_0 \int d\mathbf{r} |\chi_0(\mathbf{r})|^4, \quad (\text{A.2})$$

donde la constante de interacción efectiva U_0 viene dada por

$$U_0 \equiv 4\pi \hbar^2 a_s / m. \quad (\text{A.3})$$

Como en experimentos con un BEC, N tiene el valor de, al menos, 10^5 átomos, en lo que sigue despreciaremos la diferencia entre $N - 1$ y N . Minimizando la ecuación (A.2), sujeta a la restricción de la normalización de χ_0 , se obtiene la ecuación de Hartree para los bosones del condensado

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \chi_0(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \chi_0(\mathbf{r}) + N U_0 |\chi_0(\mathbf{r})|^2 \chi_0(\mathbf{r}) = \mu \chi_0(\mathbf{r}), \quad (\text{A.4})$$

donde μ es N^{-1} veces el multiplicador de Lagrange asociado a la normalización de χ_0 . En general μ no es la energía por partícula $\langle H \rangle_N / N$. De hecho, multiplicando la ecuación (A.4) por $\chi_0^*(\mathbf{r})$, integrando sobre \mathbf{r} , y usando el hecho de que $\langle H \rangle_N$ es estacionario frente a pequeñas variaciones de $\chi_0(\mathbf{r})$, vemos que μ es igual a $\delta \langle H \rangle_N / \delta N$, es decir, al potencial químico.

En la literatura, es convencional reescribir la ecuación de Schrödinger no lineal (A.4) en términos del parámetro de orden $\Psi(\mathbf{r})$, que viene definido por la siguiente ecuación

$$\Psi(\mathbf{r}t) \equiv \sqrt{N_0(t)}\chi_0(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.5})$$

con $N_0 = N$ a temperatura cero. Entonces, se tiene que la ecuación (A.4) se convierte en

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) + U_0|\Psi(\mathbf{r})|^2\Psi(\mathbf{r}) = \mu\Psi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.6})$$

con $\Psi(\mathbf{r})$ normalizada a $\int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = N$. La ecuación (A.6) es la celeberrima ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo.

Asociada a la ecuación (A.6) aparece el importante concepto de longitud característica del sistema (en inglés, healing length), el cual determina la distancia característica para la cual el parámetro de orden decrece desde su valor inicial al valor cero que se alcanzaría en la frontera del espacio. Consideremos una situación en la cual en una región dada del espacio, la densidad de partículas $\rho(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$ es prácticamente constante para un valor n . Entonces, la longitud característica del sistema ξ viene definida por

$$\xi \equiv \left(\frac{2mnU_0}{\hbar^2} \right)^{-1/2} = (8\pi n a_s)^{-1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Para entender el significado físico de ξ , consideremos por un momento el caso de un gas de $N \equiv nV$ átomos confinado en una caja de forma cúbica de volumen $V \equiv L^3$ y donde el potencial $V_{\text{ext}} \equiv 0$, dentro de la caja, y donde la función de onda $\chi_0(\mathbf{r})$ (y por tanto $\Psi(\mathbf{r})$) debe anularse en la frontera. Para un gas no interactuante, $\Psi(\mathbf{r})$ será el producto de ondas sinusoidales cuya longitud de onda es $2L$. Sin embargo, en presencia de interacciones repulsivas, el hacer que la densidad $\rho(\mathbf{r})$ sea prácticamente constante en el volumen de la caja hace que el sistema sea energéticamente favorable, y de hecho, soluciones explícitas de la ecuación de Gross-Pitaevskii (A.6) muestran este hecho. Entonces, cuando nos aproximamos al borde de la caja ($z \rightarrow 0$), $\Psi(z)$ “va” a cero como $\tanh z/(\sqrt{2}\xi)$ (de hecho, para el espacio semi-infinito, esta es la forma exacta de la solución). Así, ξ es realmente la longitud característica para la cual el parámetro de orden alcanza el valor nulo en la frontera.

Finalmente, queremos notar que en un BEC, la longitud ξ es grande comparada con a_s (aunque es generalmente pequeña comparada con las dimensiones típicas del potencial externo).

La ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo

Generalizando, de forma obvia, las ecuaciones (A.4) y (A.6) respectivamente, obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial \chi_0(\mathbf{r}t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\chi_0(\mathbf{r}t) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}t)\chi_0(\mathbf{r}t) + N_0(t)U_0|\chi_0(\mathbf{r}t)|^2\chi_0(\mathbf{r}t), \quad (\text{A.8})$$

y

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}t) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}t)\Psi(\mathbf{r}t) + U_0|\Psi(\mathbf{r}t)|^2\Psi(\mathbf{r}t). \quad (\text{A.9})$$

En la literatura, el término “ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo” se usa para referirse a la ecuación (A.8) o a la ecuación (A.9). Sin embargo, a diferencia de los casos “independientes del tiempo”, ecuaciones (A.4) y (A.6), las ecuaciones (A.8) y (A.9)

no son equivalentes a menos que el número $N(t)$ sea una cantidad conservada con respecto al tiempo. Puesto que esta condición se sigue de la ecuación (A.9), se tiene que la ecuación (A.9) implica a la ecuación (A.8), pero lo contrario no se cumple.

En lo que sigue, intentaremos responder a la validez de las ecuaciones (A.8) y (A.9).

Sea $T = 0$ y sea el Hamiltoniano para un sistema de muchas partículas que contiene los términos de energía cinética y energía potencial externa más el término de interacción $\frac{1}{2}U_0 \sum_{i,j} \delta(r_i - r_j)$. Sustituimos este Hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger que modela un sistema con muchas partículas. Por otro lado, una generalización del estado fundamental, ecuación (A.1), viene dada por

$$\Psi_N(r_1 r_2 \dots r_N : t) = \prod_{i=1}^N \chi_0(r_i : t). \quad (\text{A.10})$$

En primer lugar, queremos notar que en esta ecuación ya asumimos explícitamente que $N_0(t) = N = \text{constante}$. Sustituyendo este valor en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, para un sistema de muchas partículas, obtenemos

$$i\hbar \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi_0(r_i, t)}{\partial t} \cdot \Lambda_i(r_j : t) = \sum_i \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{ext}}(r_i) + \frac{1}{2} U_0 \sum_{j \neq i}^N \delta(r_i - r_j) \right] \cdot \chi_0(r_i : t) \Lambda_i(r_j : t), \quad (\text{A.11})$$

donde $\Lambda_i(r_j : t) = \prod_{j \neq i}^N \chi_0(r_j : t)$.

Teniendo en cuenta la ecuación (A.10) y realizando diversos razonamientos lógicos, llegamos a que si la ecuación (A.8) se cumple, también se satisface la ecuación (A.11) (ver la referencia (Leggett, 2001) para más detalles). Además, dado que ya se ha asumido que $N_0(t) = N = \text{constante}$, también se satisface la ecuación (A.9).

Estos argumentos muestran que una vez que se ha elegido la ecuación (A.10) como función de onda para el sistema de muchas partículas, se tiene que la única elección consistente de $\chi_0(\mathbf{r}t)$ es la función determinada por la ecuación (A.8). Esto, por supuesto, no asegura que la elección (A.10) sea consistente, y de hecho, en presencia de interacciones finitas, no lo es (incluso si empezamos en $t = 0$ con una simple función de onda definida como producto de funciones de onda simples del tipo (A.10), el último término en la ecuación (A.11) será, en general, un término mucho más complicado).

Publicaciones y preprints

PUBLICACIONES

- J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. E. Vekslerchik and V. V. Konotop *Localized nonlinear waves in systems with time and space modulated nonlinearities*, **aparecerá en** Phys. Rev. Lett. (2008).
- J. Belmonte-Beitia, P. J. Torres, *Existence of dark soliton solutions of the cubic nonlinear Schrödinger equation with periodic inhomogeneous nonlinearity*, **aparecerá en** Journal of nonlinear mathematical physics (2008).
- J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik and P. J. Torres, *Lie symmetries, qualitative analysis and exact solutions of nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, **9**, (2008), 221-233.
- J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik and P. J. Torres, *Lie symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities*, Phys. Rev. Lett., **98**, 064102, (2007).

ARTÍCULOS ENVIADOS

- J. Belmonte-Beitia, *On the existence of bright solitons in cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with inhomogeneous nonlinearity*, **enviado a** Math. Method. Appl. Sci.
- J. Belmonte-Beitia, *Exact solutions for the quintic nonlinear Schrödinger equation with inhomogeneous nonlinearity*, **enviado a** Chaos, Solitons and Fractals.
- J. Belmonte-Beitia, *Existence of dark solitons to nonlinear equations of Schrödinger type*, **enviado a** Appl. Math. Lett.
- J. Belmonte-Beitia, V. V. Konotop, V. M. Pérez-García and V. E. Vekslerchik, *Localized and periodic exact solutions to the nonlinear Schrödinger equation with spatially modulated parameters: Linear and nonlinear lattices*, **enviado a** Chaos, Solitons and Fractals.
- A. Vázquez-Carpentier, J. Belmonte-Beitia, H. Michinel and M. I. Rodas-Verde *Laser tweezers for atomic solitons*, **enviado a** Journal of Modern Optics.
- J. Belmonte-Beitia, P. J. Torres and V. M. Pérez-García, *Solitary waves for linearly coupled nonlinear Schrödinger systems with inhomogeneous coefficients*, **enviado a** J. Nonlinear Science.

- J. Belmonte-Beitia and G. F. Calvo *Exact solutions for the quintic nonlinear Schrödinger equation with time and space modulated nonlinearities and potentials*, **enviado a Physica D**.

Bibliografía

- Abdullaev, F. Kh., Kamchatnov, A. M., Konotop, V. V., & Brazhnyi, V. A. 2003a. Adiabatic Dynamics of Periodic Waves in Bose-Einstein Condensates with Time Dependent Atomic Scattering Length. *Phys. Rev. Lett.*, **90**(23), 230402.
- Abdullaev, Fatkhulla Kh., & Garnier, Josselin. 2005. Propagation of matter-wave solitons in periodic and random nonlinear potentials. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **72**(6), 061605.
- Abdullaev, Fatkhulla Kh., Caputo, Jean Guy, Kraenkel, Robert A., & Malomed, Boris A. 2003b. Controlling collapse in Bose-Einstein condensates by temporal modulation of the scattering length. *Phys. Rev. A*, **67**(1), 013605.
- Ablowitz, Mark J., & Segur, Harvey. 1979. On the evolution of packets of water waves. *J. Fluid Mech.*, **92**(4), 691–715.
- Aceves, A.B. 2000. Optical gap solitons: past, present and future; theory and experiments. *Chaos*, **10**, 584–589.
- Alfimov, G. L., Konotop, V. V., & Salerno, M. 2002. Matter solitons in Bose-Einstein Condensates with optical lattices. *Europhys. Lett.*, **58**, 7–13.
- Ambrosetti, Antonio, & Colorado, Eduardo. 2006. Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **342**(7), 453–458.
- Ambrosetti, Antonio, & Colorado, Eduardo. 2007. Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **75**(1), 67–82.
- Ambrosetti, Antonio, & Malchiodi, Andrea. 2006. *Perturbation methods and semilinear elliptic problems on \mathbf{R}^n* . Progress in Mathematics, vol. 240. Basel: Birkhäuser Verlag.
- Ambrosetti, Antonio, & Malchiodi, Andrea. 2007. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 104. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ambrosetti, Antonio, & Rabinowitz, Paul H. 1973. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, **14**, 349–381.
- Ambrosetti, Antonio, Felli, Veronica, & Malchiodi, Andrea. 2005. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **7**(1), 117–144.
- Ambrosetti, Antonio, Colorado, Eduardo, & Ruiz, David. 2007. Multi-bump solitons to linearly coupled systems of nonlinear Schrödinger equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **30**(1), 85–112.
- Anderson, D.L.T., & Derrick, G. H. 1970. Stability of time dependent particle like solutions in nonlinear field theories I. *J. Math. Phys.*, **11**, 1336–1346.
- Anderson, M. H., R., Ensher J., R., Matthews M., E., Wieman C., & E.A., Cornell. 1995. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, **269**, 198–201.

- Bartsch, Thomas, & Szulkin, Andrzej. 2005. Hamiltonian systems: periodic and homoclinic solutions by variational methods. *Pages 77–146 of: Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II.* Elsevier B. V., Amsterdam.
- Bartsch, Thomas, & Wang, Zhi Qiang. 1995. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on \mathbf{R}^N . *Comm. Partial Differential Equations*, **20**(9-10), 1725–1741.
- Bartsch, Thomas, & Willem, Michel. 1993. Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on \mathbf{R}^N . *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**(3), 261–276.
- Baumann, G., & Nonnenmacher, T. F. 1987. Lie transformations, similarity reduction, and solutions for the nonlinear Madelung fluid equations with external potential. *J. Math. Phys.*, **28**(6), 1250–1260.
- Berestycki, H., & Lions, P.L. 1980. *Existence of stationary states in nonlinear scalar field equations.* Nato Adv. Study Institutes Series, Ser. C. Reidel.
- Berestycki, H., & Lions, P.-L. 1983a. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **82**(4), 313–345.
- Berestycki, H., & Lions, P.-L. 1983b. Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **82**(4), 347–375.
- Berestycki, H., Lions, P.-L., & Peletier, L. A. 1981. An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in \mathbf{R}^N . *Indiana Univ. Math. J.*, **30**(1), 141–157.
- Berg-Sørensen, Kirstine, & Mølmer, Klaus. 1998. Bose-Einstein condensates in spatially periodic potentials. *Phys. Rev. A*, **58**(2), 1480–1484.
- Bergé, L., Mezentsev, V. K., Rasmussen, J. J., Leth Christiansen, P., & Gaididei, Y. B. 2000. Self-guiding light in layered nonlinear media. *Optics Letters*, **25**, 1037–1039.
- Bloch, Immanuel, Hänsch, Theodor W., & Esslinger, Tilman. 1999. Atom Laser with a cw Output Coupler. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(15), 3008–3011.
- Bloch, Immanuel, Köhl, Michael, Greiner, Markus, Hänsch, Theodor W., & Esslinger, Tilman. 2001. Optics with an Atom Laser Beam. *Phys. Rev. Lett.*, **87**(3), 030401.
- Bludov, Yu. V., & Konotop, V. V. 2006. Localized modes in arrays of boson-fermion mixtures. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **74**(4), 043616.
- Bluman, George W., & Kumei, Sukeyuki. 1989. *Symmetries and differential equations.* Applied Mathematical Sciences, vol. 81. New York: Springer-Verlag.
- Boyer, et al. 2006. Dynamic manipulation of Bose-Einstein condensates with a spatial light modulator. *Phys. Rev. A*, **73**(031402 (R)).
- Brazhnyi, V. A., & Konotop, V. V. 2004. Theory of nonlinear matter waves in optical lattices. *Mod. Phys. Lett. B*, **18**, 627.
- Brezzi, Franco, & Markowich, Peter A. 1991. The three-dimensional Wigner-Poisson problem: existence, uniqueness and approximation. *Math. Methods Appl. Sci.*, **14**(1), 35–61.
- Bronski, J. C., Carr, L. D., Carretero-González, R., Deconinck, B., Kutz, J.Ñ., & Promislow, K. 2001. Stability of attractive Bose-Einstein condensates in a periodic potential. *Phys. Rev. E*, **64**(5), 056615.
- Bruschi, M., Levi, D., & Ragnisco, O. 1979. Discrete version of the nonlinear Schrödinger equation with linearly x-dependent coefficients. *Nuovo Cimento*, **53**.
- Buryak, Alexander V., & Akhmediev, NailÑ. 1995. Stability criterion for stationary bound states of solitons with radiationless oscillating tails. *Phys. Rev. E*, **51**(4), 3572–3578.
- Campos, Juan, & Torres, Pedro J. 1999. On the structure of the set of bounded solutions on a periodic Liénard equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**(5), 1453–1462.
- Carpentier, A. V., & Michinel, H. 2007. A ring accelerator for matter-wave solitons. *Europhys. Lett.*, **78**, 10002.
- Centurion, Porter, Kevrekidis, & Psaltis. 2006. Nonlinearity Management in Optics: Ex-

- periment, Theory, and Simulation. *Phys Rev Lett*, **97**(3), 033903.
- Chen, Hsing-Hen, & Liu, Chuan-Sheng. 1976. Solitons in Nonuniform Media. *Phys. Rev. Lett.*, **37**(11), 693–697.
- Chen, Shihua, & Yi, Lin. 2005. Chirped self-similar solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation model. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, **71**(1), 016606.
- Chu, Jifeng, O'Regan, Donal, & Zhang, Meirong. 2007. Positive solutions and eigenvalue intervals for nonlinear systems. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **117**(1), 85–95.
- Coddington, Earl A., & Levinson, Norman. 1955. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London.
- Conti, C., Peccianti, M., & Assanto, G. 2002. *Nonlinear guide waves and their applications*. Optical society of America. Reidel.
- Cooper, F., Lucheroni, C., & Shepard, H. 1992. Variational method for studying self-focusing in a class of nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Lett. A*, **170**, 184–188.
- Dalfovo, Franco, Giorgini, Stefano, Pitaevskii, Lev P., & Stringari, Sandro. 1999. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, **71**(3), 463–512.
- Davidov, A.S. 1985. *Solitons in Molecular Systems*. Reidel, Dordrecht. New York: Springer.
- Davis, K. B., Mewes, M. O., Andrews, M. R., van Druten, N. J., Durfee, D. S., Kurn, D. M., & Ketterle, W. 1995. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(22), 3969–3973.
- De Coster, C., & Habets, P. 1996. Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results. *Pages 1–78 of: Non-linear analysis and boundary value problems for ordinary differential equations (Udine)*. CISM Courses and Lectures, vol. 371. Vienna: Springer.
- Dodd, Roger K., Eilbeck, J. Chris, Gibbon, John D., & Morris, Hedley C. 1982. *Solitons and nonlinear wave equations*. London: Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers].
- Donley, E. A., Claussen, N. R., Cornish, S. L., Roberts, J. L., Cornell, E. A., & E., Wieman C. 2001. Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Nature*, **412**, 295–299.
- Dunningham, J.A., Burnett, K., Roth, R., & Phillips, W.D. 2006. Creation of macroscopic superposition states from arrays of Bose-Einstein condensates. *New J. Phys.*, **8**, 182.
- Engels, P., Atherton, C., & Hofer, M. A. 2007. Observation of Faraday Waves in a Bose-Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, **98**(9), 095301.
- Ermakov, V. P. 1880. Transformation of differential equations. *Univ. Izv. Kiev.*, **20**, 1–19.
- Evans, Lawrence C. 1998. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Feng, Zhaosheng, Chen, Goong, & Hsu, Sze-Bi. 2006. A qualitative study of the damped Duffing equation and applications. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **6**(5), 1097–1112 (electronic).
- Fibich, G., Sivan, Y., & Weinstein, M. I. 2006. Bound states of nonlinear Schrödinger equations with a periodic nonlinear microstructure. *Phys. D*, **217**(1), 31–57.
- Fibich, Gadi, & Wang, Xiao-Ping. 2003. Stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities. *Phys. D*, **175**(1-2), 96–108.
- Floer, A., & Weinstein, A. 1986. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. *J. Funct. Anal.*, **69**, 397–408.
- Folman, R., P., Kruger, J., Schmiedmayer, J., Denschlag, & C., Henkel. 2002. Microscopic atom optics: from wires to an atom chip. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **48**, 263–356.
- Fried, Dale G., Killian, Thomas C., Willmann, Lorenz, Landhuis, David, Moss, Stephen C., Kleppner, Daniel, & Greytak, Thomas J. 1998. Bose-Einstein Condensation of Atomic

- Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, **81**(18), 3811–3814.
- García-Ripoll, Juan J., Cirac, Juan I., Anglin, J., Pérez-García, Víctor M., & Zoller, P. 2000. Spin monopoles with Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, **61**(5), 053609.
- Garnier, Josselin, & Abdullaev, Fatkhulla Kh. 2006. Transmission of matter-wave solitons through nonlinear traps and barriers. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **74**(1), 013604.
- Goodman, & Haberman. 2007. Chaotic Scattering and the n-Bounce Resonance in Solitary-Wave Interactions. *Phys Rev Lett*, **98**(10), 104103.
- Granas, Andrzej, & Dugundji, James. 2003. *Fixed point theory*. Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer-Verlag.
- Grillakis, Manoussos, Shatah, Jalal, & Strauss, Walter. 1987. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, **74**(1), 160–197.
- Gross, E.P. 1963. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, **4**, 195–207.
- Guerin, W., Riou, J.-F., Gaebler, J. P., Josse, V., Bouyer, P., & Aspect, A. 2006. Guided Quasicontinuous Atom Laser. *Phys Rev Lett*, **97**(20), 200402.
- Gupta, S., Murch, K. W., Moore, K. L., Purdy, T. P., & Stamper-Kurn, D. M. 2005. Bose-Einstein condensation in a circular waveguide. *Phys Rev Lett*, **95**(14), 143201.
- Gustavson, T.L., Chikkatur, A. P., Leanhardt, A. E., Gørllitz, A., Gupta, S., Pritchard, D. E., & Ketterle, W. 2002. Transport of Bose-Einstein condensates with optical tweezers. *Phys Rev Lett*, **88**(2), 020401.
- Hagley, E. W., Deng, L., Kozuma, M., Wen, J., Helmer, K., Rolston, S. L., & Phillips, W. D. 1999. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, **283**, 1706.
- Hajaiej, H., & Stuart, C. A. 2004. On the variational approach to the stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation. *Adv. Nonlinear Stud.*, **4**(4), 469–501.
- Hutchings, D.C. 2004. Theory of ultrafast nonlinear refraction in semiconductor superlattices. *IEEE Journal of selected topics in quantum electronics*, **10**, 1124–1132.
- Inouye, S., Andrews, M. R., Stenger, J., Miesner, H. J., Stamper-Kurn, D.M., & Ketterle, W. 1998. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, **392**, 151–154.
- Itin, Alexander, Morishita, Toru, & Watanabe, Shinichi. 2006. Reexamination of dynamical stabilization of matter-wave solitons. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **74**(3), 033613.
- Jiang, Daqing, Wei, Junjie, & Zhang, Bo. 2002. Positive periodic solutions of functional differential equations and population models. *Electron. J. Differential Equations*, No. 71, 13 pp. (electronic).
- Kasevich, Mark, & Chu, Steven. 1991. Atomic interferometry using stimulated Raman transitions. *Phys. Rev. Lett.*, **67**(2), 181–184.
- Kevrekidis, P. G., Theocharis, G., Frantzeskakis, D. J., & Malomed, Boris A. 2003. Feshbach Resonance Management for Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **90**(23), 230401.
- Khaykovich, L., Schreck, F., Ferrari, G., Bourdel, T., Cubizolles, J., Carr, L.D., Castin, Y., & Salomon, C. 2002. Formation of a matter-wave bright soliton. *Science*, **296**, 1290–1293.
- Kivshar, Y., & Agrawal, G. P. 2003. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic crystals*. Academic Press.
- Kivshar, Y., & Luther-Davies, B. 1998. Dark optical solitons: physics and applications. *Phys. Reports*, **298**, 81–197.
- Konotop, V. V., & Pacciani, P. 2005. Collapse of Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with a Time-Dependent Nonlinearity: Application to Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, **94**(24), 240405.
- Konotop, V. V., Chubykalo, O. A., & Vázquez, L. 1993. Dynamics and interaction of

- solitons on an integrable inhomogeneous lattice. *Phys. Rev. E*, **48**(1), 563–568.
- Korman, P., & Lazer, A. 1994. Homoclinic orbits for a class of symmetric Hamiltonian systems. *Electronic Journal Differential Equations*, **1994**(01), 1–10.
- Krasnoselskii, M. A. 1964. *Positive solutions of operator equations*. Translated from the Russian by Richard E. Flaherty; edited by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd. Groningen.
- Laedke, E. W., Spatschek, K. H., & Stenflo, L. 1983. Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions. **24**(12), 2764–2769.
- Lawden, Derek F. 1989. *Elliptic functions and applications*. Applied Mathematical Sciences, vol. 80. New York: Springer-Verlag.
- Leach, P. G. L. 1981. An exact invariant for a class of time-dependent anharmonic oscillators with cubic anharmonicity. *J. Math. Phys.*, **22**(3), 465–470.
- Leach, P. G. L., & Maharaj, S. D. 1992. A first integral for a class of time-dependent anharmonic oscillators with multiple anharmonicities. *J. Math. Phys.*, **33**(6), 2023–2030.
- Leboeuf, P., & Pavloff, N. 2001. Bose-Einstein beams: Coherent propagation through a guide. *Phys. Rev. A*, **64**(3), 033602.
- Leggett, Anthony J. 2001. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.*, **73**(2), 307–356.
- Lieb, Elliott H., & Loss, Michael. 2001. *Analysis*. Second edn. Graduate Studies in Mathematics, vol. 14. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Lions, Pierre Louis. 1984. The concentration-compactness principle in the calculus of variations - the locally compact case .1. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **1**(2), 109–145.
- Litvak, A. G., & Sergeev, A. M. 1978. Incoherent spatial solitary waves in nematic liquid crystals. *J.E.T.P. Lett.*, **27**, 517.
- Magnus, Wilhelm, & Winkler, Stanley. 1979. *Hill's equation*. New York: Dover Publications Inc. Corrected reprint of the 1966 edition.
- Malomed, B. A. 2006. *Soliton management in periodic systems*. New York: Springer.
- Martikainen, J.-P. 2001. Bose-Einstein condensation in shallow traps. *Phys. Rev. A*, **63**(4), 043602.
- Martin, J. L., McKenzie, C. R., Thomas, N. R., Warrington, D. M., & Wilson, A. C. 2000. RF coupling of a Bose-Einstein condensate in a TOP trap. *J. Phys. B*, **33**, 3919.
- Matthews, M. R., Anderson, B. P., Haljan, P. C., Hall, D. S., Wieman, C. E., & Cornell, E. A. 1999a. Vortices in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(13), 2498–2501.
- Matthews, M. R., Anderson, B. P., Haljan, P. C., Hall, D. S., Holland, M. J., Williams, J. E., Wieman, C. E., & Cornell, E. A. 1999b. Watching a Superfluid Untwist Itself: Recurrence of Rabi Oscillations in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(17), 3358–3361.
- Meimukhin, D., & Gendelman, O.V. 2007. Response regimes of integrable damped strongly nonlinear oscillator under impact periodic forcing. *Chaos, Solitons and Fractals*, **32**, 405–414.
- Merle, F. 1996a. Asymptotics for L^2 minimal blow-up solutions of critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. Inst. H. Poincaré non linéaire*, **13**, 553–565.
- Merle, F. 1996b. Nonexistence of minimal blow-up solutions of equations $iu_t = -\Delta u - k(x)|u|^{4/N}u$ in \mathbb{R}^N . *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **64**, 33–85.
- Mewes, M.-O., Andrews, M. R., Kurn, D. M., Durfee, D. S., Townsend, C. G., & Ketterle, W. 1997. Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(4), 582–585.
- Mohring, Bernd, Bienert, Marc, Haug, Florian, Morigi, Giovanna, Schleich, Wolfgang P., & Raizen, Mark G. 2005. Extracting atoms on demand with lasers. *Physical Review A*

- (*Atomic, Molecular, and Optical Physics*), **71**(5), 053601.
- Newell, Alan C. 1985. *Solitons in mathematics and physics*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 48. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Niarchou, P., Theocharis, G., Kevrekidis, P. G., Schmelcher, P., & Frantzeskakis, D. J. 2007. Soliton oscillations in collisionally inhomogeneous attractive Bose-Einstein condensates. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **76**(2), 023615.
- Oh, Y. 1989. Stability of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials. *Comm. Math. Phys.*, **121**, 11–33.
- Olver, Peter J. 1993. *Applications of Lie groups to differential equations*. Second edn. Graduate Texts in Mathematics, vol. 107. New York: Springer-Verlag.
- Ortega, Rafael. 1995. Some applications of the topological degree to stability theory. *Pages 377–409 of: Topological methods in differential equations and inclusions (Montreal, PQ, 1994)*. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 472. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
- Peccianti, M., & Assanto, G. 2001. Incoherent spatial solitary waves in nematic liquid crystals. *Opt. Lett.*, **26**, 1690.
- Peccianti, Marco, & Assanto, Gaetano. 2002. Nematic liquid crystals: A suitable medium for self-confinement of coherent and incoherent light. *Phys. Rev. E*, **65**(3), 035603.
- Pérez-García, Víctor M., & Liu, Xiao-yan. 2003. Numerical methods for the simulation of trapped nonlinear Schrödinger systems. *Appl. Math. Comput.*, **144**(2-3), 215–235.
- Pérez-García, Víctor M., Michinel, H., Cirac, J. I., Lewenstein, M., & Zoller, P. 1996. Low Energy Excitations of a Bose-Einstein Condensate: A Time-Dependent Variational Analysis. *Phys. Rev. Lett.*, **77**(27), 5320–5323.
- Pérez-García, Víctor M., Michinel, Humberto, & Herrero, Henar. 1998. Bose-Einstein solitons in highly asymmetric traps. *Phys. Rev. A*, **57**(5), 3837–3842.
- Pérez-García, Víctor M., Torres, Pedro J., & Montesinos, Gaspar D. 2007. The method of moments for nonlinear Schrödinger equations: theory and applications. *SIAM J. Appl. Math.*, **67**(4), 990–1015 (electronic).
- Pinney, Edmund. 1950. The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1**, 681.
- Pitaevskii, Lev, & Stringari, Sandro. 2003. *Bose-Einstein condensation*. International Series of Monographs on Physics, vol. 116. Oxford: The Clarendon Press Oxford University Press.
- Pitaevskii, L.P. 1961. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. J.E.T.P.*, **13**, 451–454.
- Poizat, J. Ph., & Grangier, P. 1993. Experimental realization of a quantum optical tap. *Phys. Rev. Lett.*, **70**(3), 271–274.
- Porter, Mason A., Kevrekidis, P. G., Malomed, Boris A., & Frantzeskakis, D. J. 2007. Modulated amplitude waves in collisionally inhomogeneous Bose-Einstein condensates. *Phys. D*, **229**(2), 104–115.
- Primatarowa, M. T., Stoychev, K. T., & Kamburova, R. S. 2005. Interaction of solitons with extended nonlinear defects. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, **72**(3), 036608.
- Roach, T. M., Abele, H., Boshier, M. G., Grossman, H. L., Zetie, K. P., & Hinds, E. A. 1995. Realization of a Magnetic Mirror for Cold Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(4), 629–632.
- Rodas-Verde, Maria I., Michinel, Humberto, & Perez-Garcia, Victor M. 2005. Controllable Soliton Emission from a Bose-Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, **95**(15), 153903.
- Rosales, J. L., & Sánchez-Gómez, J.L. 1992. Nonlinear Schrödinger equation coming from

- the action of the particles gravitational field on the quantum potential. *Phys. Lett. A*, **66**, 111–115.
- Saito, Hiroki, & Ueda, Masahito. 2003. Dynamically Stabilized Bright Solitons in a Two-Dimensional Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **90**(4), 040403.
- Sakaguchi, Hidetsugu, & Malomed, Boris A. 2005. Matter-wave solitons in nonlinear optical lattices. *Phys. Rev. E (3)*, **72**(4), 046610.
- Scharf, Rainer, & Bishop, A. R. 1991. Properties of the nonlinear Schrödinger equation on a lattice. *Phys. Rev. A*, **43**(12), 6535–6544.
- Scott, A. 1999. *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures*. Oxford Appl. and Eng. Mathematics, Vol. 1.
- Segur, Harvey. 1978. Solitons as approximate descriptions of physical phenomena. *Rocky Mountain J. Math.*, **8**(1-2), 15–24. Conference on the Theory and Application of Solitons (Tucson, Ariz., 1976).
- Serkin, Vladimir, & Hasegawa, Akira. 2000. Novel Soliton Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation Model. *Phys. Rev. Lett.*, **85**(21), 4502–4505.
- Shchesnovich, V. S., & Konotop, V. V. 2007. Nonlinear tunneling of Bose-Einstein condensates in an optical lattice: Signatures of quantum collapse and revival. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **75**(6), 063628.
- Sivan, Y., Fibich, G., & Weinstein, M. I. 2006. Waves in Nonlinear Lattices: Ultrashort Optical Pulses and Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, **97**(19), 193902.
- Sivan, Y., Fibich, G., Efremidis, N.K., & Bar-Ad, S. 2008. Analytic theory of narrow lattice solitons. *arXiv:0707.1589*.
- Staliunas, Kestutis, Longhi, Stefano, & de Valcárcel, Germán J. 2002. Faraday Patterns in Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **89**(21), 210406.
- Stamper-Kurn, D. M., Andrews, M. R., Chikkatur, A. P., Inouye, S., Miesner, H.-J., Stenger, J., & Ketterle, W. 1998. Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **80**(10), 2027–2030.
- Strauss, Walter A. 1977. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys.*, **55**(2), 149–162.
- Strecker, K.E., Partridge, G.B., Truscott, A.G., & Hulet, R.G. 2002. Formation and propagation of matter wave soliton trains. *Nature*, **417**, 150–153.
- Sulem, Catherine, & Sulem, Pierre-Louis. 1999. *The nonlinear Schrödinger equation*. Applied Mathematical Sciences, vol. 139. New York: Springer-Verlag. Self-focusing and wave collapse.
- Theis, M., Thalhammer, G., Winkler, K., Hellwig, M., Ruff, G., Grimm, R., & Denschlag, J. Hecker. 2004. Tuning the Scattering Length with an Optically Induced Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, **93**(12), 123001.
- Theocharis, G., Schmelcher, P., Kevrekidis, P. G., & Frantzeskakis, D. J. 2005. Matter-wave solitons of collisionally inhomogeneous condensates. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, **72**(3), 033614.
- Torres, Pedro J. 2006. Guided waves in a multi-layered optical structure. *Nonlinearity*, **19**(9), 2103–2113.
- Torres, P.J., & Konotop, V.V. 2008. On existence of dark solitons in cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with a periodic potential. (*preprint*).
- Unanyan, R. G., Pietrzyk, M. E., Shore, B. W., & Bergmann, K. 2004. Adiabatic creation of coherent superposition states in atomic beams. *Phys. Rev. A*, **70**(5), 053404.
- Vakhitov, N. G., & Kolokolov, A.A. 1973. Stationary solution of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation. *Radiophys. and Quantum Electronics*, **16**, 783–789.
- Vanier, J. 2005. Atomic clocks based on coherent population trapping: a review. *Appl. Phys. B.*, **81**(421).

- Vázquez, Luis, Streit, Ludwig, & Pérez-García, Victor M. (eds). 1996. *Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger systems: theory and applications*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc.
- Vázquez-Carpentier, A., Michinel, H., Rodas-Verde, M.I., & Pérez-García, V.M. 2006. Analysis of an atom soliton laser based on the spatial control of the scattering length. *Phys. Rev. A*, **74**(013619).
- Warenghem, M., Henninot, J. F., & Abbate, G. 1998. Bulk Optical Freedericksz Effect: non linear optics of nematic liquid crystals in capillaries. *Science*, **320**, 207–230.
- Weinstein, Michael I. 1985. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, **16**(3), 472–491.
- Willem, Michel. 1996. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc.
- Williams, J., Walser, R., Cooper, J., Cornell, E. A., & Holland, M. 2000. Excitation of a dipole topological state in a strongly coupled two-component Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, **61**(3), 033612.
- Zafrany, Arik, Malomed, Boris A., & Merhasin, Ilya M. 2005. Solitons in a linearly coupled system with separated dispersion and nonlinearity. *Chaos*, **15**(3), 037108, 10.
- Zakharov, V. E., & Shabat, A.B. 1972. Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional self modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. J.E.T.P.*, **34**, 62–69.
- Zakharov, V. E., L'vov, V.S., & Starobinets, S.S. 1975. Spin-wave turbulence beyond the parametric excitation threshold. *Sov. Phys. Usp.*, **17**(6), 896–919.
- Zharnitsky, Vadim, & Pelinovsky, Dmitry. 2005. Averaging of nonlinearity-managed pulses. *Chaos*, **15**(3), 037105, 6.
- Zhu, Yi, & Yang, Jianke. 2007. Universal fractal structures in the weak interaction of solitary waves in generalized nonlinear Schr[ö]dinger equations. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, **75**(3), 036605.
- Zima, Mirosława. 2001. On positive solutions of boundary value problems on the half-line. *J. Math. Anal. Appl.*, **259**(1), 127–136.