

Juan Ramón Trapero Arenas

**TÉCNICAS DE IDENTIFICACIÓN
ALGEBRAICAS Y ESPECTRALES DE
SEÑALES ARMÓNICAS. APLICACIONES
EN MACATRÓNICA Y ECONOMÍA**

I.S.B.N. Ediciones de la UCLM
978-84-8427-638-8



Ediciones de la Universidad
de Castilla-La Mancha

Cuenca, 2008



TESIS DOCTORAL



**Técnicas de Identificación Algebraicas y
Espectrales de Señales Armónicas.
Aplicaciones en Mecatrónica y Economía.**

por

Juan Ramón Trapero Arenas

Ingeniero Industrial

Presentada en la

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

de la

Universidad de Castilla-La Mancha

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Ciudad Real, Febrero de 2008



TESIS DOCTORAL



**Técnicas de Identificación Algebraicas y
Espectrales de Señales Armónicas.
Aplicaciones en Mecatrónica y
Economía.**

Autor: Juan Ramón Traperero Arenas

Directores: Vicente Feliu Batlle

Diego J. Pedregal Tercero

Agradecimientos

Sin duda alguna el desarrollo de esta tesis a lo largo de estos cuatro últimos años ha sido una de las experiencias más importantes en mi vida. En este tiempo muchas han sido las personas a las que tengo que agradecer que este hecho se haga realidad.

He de agradecer a Vicente Feliu el apoyo que me ha brindado desde el primer momento. En primer lugar él me ayudó para conseguir la financiación mediante una beca de investigación de la Junta de comunidades de Castilla-La Mancha. También, ha guiado mis primeros pasos dentro del mundo de la automática. Gracias a su apoyo he podido centrarme plenamente en el desarrollo de esta tesis.

También quiero agradecer a Diego Pedregal la confianza que siempre ha depositado en mí, y todas las facilidades que me ha proporcionado dentro del área de Organización de Empresas para poder realizar la tesis en las mejores condiciones posibles. Ha sido gracias a Diego que inicié mis andanzas en la investigación con interesantes y motivadoras aplicaciones económicas.

En la realización de la tesis es habitual encontrarse perdido y abrumado por los problemas a los que te tienes que enfrentar. Fue en esos momentos y gracias a Vicente que me puse en contacto con el profesor Hebertt Sira Ramírez. Gracias a su inestimable ayuda descubrí las técnicas de identificación algebraicas que han resultado ser una de las partes más importantes de esta tesis. También fue Hebertt quién me ayudó para preparar mi estancia con el profesor Mamadou en la Universidad René Descartes de París, al cual también le agradezco su hospitalidad. Pero si algo tengo que agradecer al profesor Hebertt es su calidad como persona y la enorme paciencia y amabilidad que siempre ha mostrado conmigo. Sin lugar a dudas ha sido una de las personas más influyentes en esta tesis.

Desde luego, tengo que agradecer el apoyo de mis compañeros de área y en especial a Fausto, cuyos consejos y experiencias siempre han sido muy apreciados. Espero que algún día pueda aprender alguna de sus famosas recetas de cocina internacional.

Es momento de acordarse de mis compañeros de doctorado con los que he compartido duros momentos de trabajo, pero también he compartido fantásticos momentos de diversión.

Tampoco puedo olvidar a los amigos de toda la vida de Puertollano por los momentos de esparcimiento que hemos compartido.

En estas líneas quiero expresar mi más sincera gratitud a una persona muy especial

para mí. Gracias Ana por tu comprensión y por estar a mi lado, sin tu apoyo esto se hubiera hecho muy difícil.

Por último pero no por ello menos importante, quiero agradecer el incondicional apoyo de mis padres y hermana. Definitivamente ellos son los coautores de esta obra porque sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

Resumen

La identificación de señales armónicas abarca un amplio rango de aplicaciones procedentes de disciplinas como la Mecatrónica o la Economía. En esta tesis se trata el problema de la identificación de señales armónicas utilizando técnicas de identificación de sistemas y análisis de series temporales.

En referencia a las aplicaciones mecatrónicas se han utilizado técnicas derivativas algebraicas para diseñar algoritmos capaces de estimar en línea los parámetros de una o varias ondas sinusoidales con y sin amortiguamiento en un tiempo inferior al periodo de dicha señal. Con el fin de validar estos estimadores se han aplicado a la monitorización de vibraciones procedentes de brazos flexibles experimentales, comparando los resultados obtenidos con otros estimadores de frecuencia recientemente publicados como son los filtros adaptativos de ranura. Además se han combinado los estimadores con controles en lazo cerrado y en lazo abierto para realizar controles adaptativos. Estos controles adaptativos han mostrado ser robustos frente al problema de cambios de masa en el extremo de brazos manipuladores flexibles.

Se ha aprovechado el conocimiento adquirido en el análisis de vibraciones de estructuras flexibles para abordar señales armónicas procedentes de aplicaciones económicas. Concretamente se ha tratado el problema de la predicción a corto plazo de la demanda y precios de energía eléctrica en el mercado liberalizado. Se han elegido estas series temporales ya que poseen un fuerte componente periódico, es decir tienen una estacionalidad diaria, semanal y un ciclo anual. Se han utilizado técnicas de identificación en el dominio de la frecuencia junto con modelos en Espacio de los Estados (EE) para la predicción de estas series temporales. La representación en EE permite extraer componentes no observables de la serie temporal como son la tendencia, la estacionalidad o el término irregular. Por otro lado, la estimación en el dominio la frecuencia permite realizar predicciones automáticas sin necesidad de cambiar los modelos cada cierto tiempo. Estos resultados obtenidos mejoran a otras metodologías típicas del análisis de series temporales. El mismo modelo desarrollado en EE se adapta para realizar predicciones de la demanda a medio y largo plazo.

Por último, es interesante el punto de vista que esta tesis aporta sobre el análisis del ciclo económico, donde se utilizan técnicas de identificación algebraica y filtros adaptativos de ranura para poder estudiar la evolución del ciclo de un indicador económico típico.

Abstract

The analysis of harmonic signals spans a wide range of applications which stem from different disciplines like Mechatronics or Economics. This thesis deals with the problem of harmonic signals identification by means of system identification and time series analysis techniques.

The novel algebraic derivative technique has been used to develop algorithms capable of estimating the parameters of harmonic signals in on-line environments. One important advantage of such technique is that estimation is accomplished in a time interval inferior to the signal period. Simulations and experimental vibratory data coming from flexible arms prototypes have been used to validate the algebraic estimators. In addition, these results have been compared to Adaptive Notch Filters (ANF) recently found in the literature. Moreover, open-loop and closed-loop adaptive controllers were implemented taking advantage of these algebraic identification procedures. These adaptive controllers are well suited to face the problem of payload mass changes in flexible manipulators.

The knowledge acquired in the analysis of flexible structure vibrations has been used to study other harmonic signals which come from economic scenarios. In particular, the problem of forecasting load demand and price of electric energy in deregulated markets is studied. These time series were chosen because of their strong periodic pattern, i.e, they have daily and weekly seasonality and even an annual cycle. Frequency domain techniques were used with models developed in a State Space framework. This State Space framework allows to extract unobservable components like the trend, seasonal or irregular terms. Additionally, frequency domain estimation yields automatic predictions without necessity of a re-identification of models. These results improve other typical methodologies in time series analysis. The same model and State Space framework is adapted in this thesis to produce mid and long term forecasts of electricity time series.

Finally, both the ANF filters and the algebraic estimators of periodic signals are used to explore the business cycle from a standard economic indicator in a novel way, i.e. by considering the period of such a cycle as varying in time.

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Lista de Figuras	XIII
Lista de Tablas	XVII
Lista de Abreviaturas	XIX
Lista de Publicaciones	XXI
1. Introducción	1
1.1. Objetivos de la tesis	3
1.2. Estructura de la tesis	6
2. Estado del arte	9
2.1. Modelos lineales	10
2.1.1. Modelos de función de transferencia	11
2.1.2. Modelos en Espacio de los Estados	11
2.2. Modelos no lineales	14
2.2.1. Modelos de Wiener y Hammerstein	15
2.2.2. Modelos Caja Negra no lineales	15
2.3. Señales	17
2.4. Criterios	18
2.4.1. Minimización del error de predicción	19
2.4.2. El método de la variable instrumental	20
2.4.3. Máxima Verosimilitud	20
2.4.4. El método de Bayes	21
2.5. Estimación en el dominio de la frecuencia	23
2.5.1. Ajustar el modelo a los datos	24
2.6. Importancia de la representación en EE para analizar series temporales	26
2.6.1. Modelo de componentes no observables	26
2.6.2. Estimación de los parámetros variantes en el tiempo	29
2.7. Identificación en tiempo continuo	31
2.8. Identificación algebraica	33

3.	Estimador de parámetros procedentes de una onda sinusoidal	37
3.1.	Formulación del problema	40
3.2.	Método algebraico	41
3.2.1.	Estimación de la frecuencia en línea	41
3.2.2.	Estimación en línea de la amplitud y la fase	42
3.3.	Estimación de parámetros de una señal ruidosa	43
3.4.	Simulaciones	44
3.5.	Estimador de una frecuencia procedente de una señal sesgada	45
3.5.1.	Estimación de la frecuencia en línea	47
3.5.2.	Estimación en línea de la amplitud y la fase	49
3.5.3.	Simulaciones	52
3.5.4.	Resultados experimentales	52
3.6.	Comparación con otros métodos propuestos recientemente	54
3.6.1.	Estimador adaptativo no lineal	55
3.6.2.	Un estimador globalmente convergente	56
3.7.	Robustez del estimador algebraico	58
3.7.1.	Efecto del tiempo de muestreo	60
3.7.2.	Efecto de la relación señal-ruido	62
3.7.3.	Distancia mínima entre frecuencias	65
4.	Estimador de parámetros procedente de la suma de dos ondas sinusoidales	69
4.1.	Formulación del problema	70
4.2.	Una solución algebraica al problema	70
4.2.1.	Cálculo exacto de las frecuencias en el caso libre de ruidos	71
4.2.2.	Estimación de las frecuencias en un ambiente con ruido	74
4.2.3.	Cálculo exacto de las amplitudes y fases en el caso libre de ruido	76
4.2.4.	Cálculo de las amplitudes y fases añadiendo ruido a la señal	80
4.3.	Simulaciones	80
4.3.1.	Efecto del ruido	84
4.3.2.	Complejidad computacional	87
4.4.	Resultados experimentales	88
4.5.	Metodología para estimar n frecuencias	88
5.	Análisis de vibración	93
5.1.	Simulaciones	95
5.2.	Caso de estudio	96
5.2.1.	Descripción del modelo	97
5.2.2.	Plataforma Experimental	99
5.2.3.	Estimación algebraica en línea	100
5.3.	Comparativa con otros métodos recientemente publicados	102
5.4.	Estimación de frecuencia ante cambios abruptos	104
5.5.	Estimador con amortiguamiento	107
5.5.1.	Formulación del problema	108
5.5.2.	Desarrollo del estimador algebraico para el caso amortiguado	108
5.5.3.	Simulaciones	109

5.6. Tiempo de estimación	111
6. Identificación algebraica con aplicación en control adaptativo	115
6.1. Control adaptativo en lazo cerrado	119
6.1.1. Estimación algebraica de la frecuencia natural	120
6.1.2. Control integral proporcional generalizado (GPI)	122
6.1.3. Procedimiento del control adaptativo	125
6.1.4. Experimentos	126
6.2. Control adaptativo en lazo abierto	132
6.2.1. Modelo del sistema	135
6.2.2. Control en lazo abierto	135
6.2.3. Estimador algebraico	136
6.2.4. Actualización de los parámetros del control en lazo abierto	138
6.2.5. Simulaciones	139
7. Aplicaciones económicas	143
7.1. Predicción de precios y demandas del mercado eléctrico a corto plazo	144
7.1.1. Modelado de las señales procedentes del mercado eléctrico	148
7.1.2. Metodología	153
7.1.3. Caso de estudio	154
7.2. Predicción de la demanda a medio plazo	163
7.3. Análisis del ciclo económico	175
7.3.1. Formulación del problema	176
7.3.2. Caso de estudio	177
8. Conclusiones	183
9. Conclusions	189
Referencias	195

Lista de Figuras

1.1. Relación entre el experto y las observaciones disponibles	2
1.2. Estructura flexible	4
1.3. Demanda de energía eléctrica en tiempo real obtenida de la página web de la Red Eléctrica de España, www.ree.es	6
2.1. El problema de la identificación de sistemas	9
3.1. Señal sinusoidal con ruido	45
3.2. Frecuencia estimada	46
3.3. (Arriba) Señal sinusoidal sesgada utilizada en la simulación. (Abajo) Estimación de la frecuencia	53
3.4. Estimación de la amplitud (arriba) y fase (abajo) de la señal sinusoidal simulada	53
3.5. Señal obtenida del generador de ondas	54
3.6. Estimaciones de frecuencia, amplitud y fase	55
3.7. Estimador de frecuencia adaptativo no lineal (-), valores teóricos (-)	57
3.8. Estimador de frecuencia globalmente convergente	59
3.9. Estimaciones del método algebraico para la señal $y(t) = 0.5 + 2.5 \sin(2t)$	60
3.10. Tiempo mínimo de estimación vs. Tiempo de muestreo	61
3.11. Tiempo de convergencia (s) vs. SNR (dB) sin usar filtros (línea continua) y con filtros (línea discontinua)	63
3.12. Histogramas obtenidos mediante simulaciones de Montecarlo para $SNR = 20, 40, 60, 80$ (dB)	64
3.13. Histogramas sin y con filtrado invariante para $SNR = 20$ (dB)	65
3.14. Tiempo mínimo de estimación (s), SNR (dB), f_2 (Hz) sin filtros	66
3.15. Tiempo mínimo de estimación (s), SNR (dB), f_2 (Hz) con filtros	67
4.1. Señal compuesta por dos ondas sinusoidales más ruido.	81
4.2. Resultados de simulación de la estimación algebraica de las frecuencias ω_1 y ω_2	82
4.3. Resultados de simulación de la estimación algebraica de las amplitudes A_1 y A_2	82
4.4. Resultados de simulación de la estimación algebraica de las fases ϕ_1 y ϕ_2	83

4.5. Resultados de simulación de la estimación algebraica de las frecuencias ω_1 y ω_2 sin usar filtros.	83
4.6. MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_1 sin filtrado invariante.	85
4.7. MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_2 sin filtrado invariante.	86
4.8. MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_1 con filtrado invariante.	86
4.9. MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_2 con filtrado invariante.	87
4.10. Señal experimental y resultados de la estimación de frecuencia en línea algebraica.	89
4.11. Resultados experimentales para la estimación algebraica de las amplitudes A_1 y A_2 de la señal experimental.	89
4.12. Resultados experimentales para la estimación algebraica de las fases ϕ_1 and ϕ_2 de la señal experimental.	90
5.1. Efecto del coeficiente de amortiguamiento sobre el tiempo de estimación (s) y el MAE. La tolerancia del criterio de estimación se muestra en línea discontinua (-)	97
5.2. Diagrama del brazo flexible de un solo eslabón	98
5.3. Plataforma	99
5.4. De arriba a abajo. Vibración obtenida por el par de acoplamiento. Estimaciones de frecuencia consecutivas (*), f_0 (- -). Tiempo necesario para cada estimación de frecuencia (o).	100
5.5. Estimación de la frecuencia de la señal real. Algebraico (*), Ziarani(-), Hou (:), Mojiri-Bakshai(-·), f_0 (- -)	103
5.6. Estimación de frecuencia de la señal real. Frecuencias nominales f_1, f_2, f_3 (- -), Ziarani(-), Hou (:), Algebraico (*), Mojiri-Bakhshai (-·)	106
5.7. Estimación de la frecuencia (:) y del coeficiente de amortiguamiento (-)	110
5.8. Error de estimación	111
5.9. Número de condición vs. tiempo	113
5.10. Error de estimación para diferentes valores de SNR	114
5.11. Tiempo de estimación mínimo vs. coeficiente de amortiguamiento para diferentes órdenes del filtrado invariante	114
6.1. Sistema brazo flexible-motor DC controlado por un control GPI de dos etapas.	123
6.2. Periodograma de la oscilación del brazo flexible	127
6.3. Estimación en línea de ω_0	129
6.4. Seguimiento de la trayectoria con la estimación en línea ω_0	129
6.5. Comparación entre seguimiento de trayectorias.	130
6.6. Voltaje de la señal de control al motor de corriente continua.	131
6.7. Resultados del segundo experimento.	131
6.8. (a) Estimación <i>mid-maneuver</i> de z ; (-·) valor teórico y (-) estimación. (b) Estimación <i>mid-maneuver</i> para D ; (-·) valor teórico y (-) estimación.	140
6.9. (a) Señal de entrada filtrada por el IS; (-) IS adaptativo y (-·) IS robusto. (b) Señal de salida filtrada por el IS; (-) IS adaptativo y (-·) IS robusto.	141
7.1. Precios y demandas de energía para el mercado PJM en el 2005	155

7.2.	Box plot para el e_{day} de la demanda en el PJM	158
7.3.	Box plot para el e_{day} del precio en el PJM	158
7.4.	Componentes extraídos de la señal de demanda correspondiente a Febrero 2005	162
7.5.	Colocación de observaciones en el eje temporal para la aplicación del modelo (7.15). Las líneas verticales indican la posición de las observaciones en la muestra de estimación y en la muestra de predicción	167
7.6.	Demanda de energía horaria para los años 1990 y 1991 registrados en un transformador de un compañía inglesa	169
7.7.	Mediana del MAPE para los 365 conjuntos de errores de predicción desde 1 hora hasta 2.016 horas hacia delante respecto a los tres modelos considerados	170
7.8.	Meda del MAPE para los 365 conjuntos de errores de predicción desde 1 hora hasta 2.016 horas hacia delante respecto a los tres modelos considerados . .	173
7.9.	Datos reales (:) y la predicción 12 semanas hacia delante producidas por los modelos UC2 (-) y UC (- -) comenzando el 1 de Agosto	174
7.10.	Serie temporal correspondiente al índice de producción industrial de EEUU.	178
7.11.	Ciclo económico extraído del IPI de EEUU mediante el filtro HP.	179
7.12.	(Arriba) Ciclo económico extraído mediante el filtro HP. (Abajo) Estimación del periodo mediante el ANF con $\alpha_1 = 0.2$ y $\alpha_2 = 9$ en línea continua (-) y estimación proporcionada por el estimador algebraico en línea discontinua (- -).	180

Lista de Tablas

2.1. Modelos de función de transferencia más utilizados	11
3.1. Estimación del sesgo y la varianza para diferentes valores de SNR	64
5.1. Parámetros del brazo flexible	99
5.2. Estimación del sesgo y varianza para el método algebraico	106
6.1. Datos del conjunto motor-reductora	127
7.1. Error de predicción global de la demanda energía	157
7.2. Error de predicción global de los precios	159
7.3. Error de predicción por meses de la demanda de energía	160
7.4. Error de predicción por meses de la serie de precios	161
7.5. Mediana y meda del MAPE en el experimento de predicción	171
7.6. Mediana y meda del MAPE obtenido en la predicción 12 semanas adelante	172
8.1. Características típicas en identificación y análisis de series temporales	188
9.1. Typical features of identification and time series analysis	193

Lista de Abreviaturas

AIS	Moldeo de la trayectoria adaptativo (<i>Adaptive Input Shaping</i>)
ANF	Filtros de ranura adaptativos (<i>Adaptive Notch Filters</i>)
ANN	Redes neuronales artificiales (<i>Artificial Neural Nets</i>)
BJ	Box-Jenkins
BSM	Modelo estructural básico (<i>Basic Structural Model</i>)
DT	Tendencia amortiguada (<i>Damped Trend</i>)
DHR	Regresión armónica dinámica (<i>Dynamic Harmonic Regression</i>)
EE	Espacio de los Estados
ETFE	Estimación empírica de la función de transferencia (<i>Empirical Transfer Function Estimate</i>)
FIR	Respuesta impulsiva finita (<i>Finite Impulse Response</i>)
FIS	Suavizado de Intervalo Fijo (<i>Fixed Interval Smoothing</i>)
GRW	Paseo aleatorio generalizado (<i>Generalized Random Walk</i>)
IIR	Respuesta a impulso infinita (<i>Infinite Impulse Response</i>)
IS	Moldeo de la trayectoria (<i>Input Shaping</i>)
HP	Filtro de Hodrick-Prescott
IFAC	<i>International Federation on Automatic Control</i>
IPI	Índice de producción industrial
IRW	Paseo aleatorio integrado (<i>Integrated Random Walk</i>)
KF	Filtro de Kalman (<i>Kalman Filter</i>)
KFE	Filtro de Kalman Extendido (<i>Kalman Filter Extended</i>)

LLT	Tendencia local lineal (<i>Local Linear Trend</i>)
MAPE	Error medio porcentual absoluto (<i>Mean Absolute Percentage Error</i>)
ML	Máxima Verosimilitud (<i>Maximum Likelihood</i>)
MP	Maximización del periodograma
MWE	Error medio semanal (<i>Mean Week Error</i>)
NARMAX	ARMAX no lineal (<i>Non linear ARMAX</i>)
NLS	Regresión no lineal por mínimos cuadrados (<i>Non Linear Squares</i>)
NVR	Cociente de varianza de ruidos (<i>Noise Variance Ratios</i>)
OE	Error en la salida (<i>Output Error</i>)
RW	Paseo aleatorio (<i>Random Walk</i>)
SNR	Relación señal-ruido (<i>Signal to Noise Ratio</i>)
SRW	Paseo aleatorio suavizado (<i>Smoothed Random Walk</i>)
SYSID	<i>Symposium on System Identification</i>
TTFE	Estimación de la función de transferencia variante en el tiempo (<i>Time-varying Transfer Function Estimation</i>)
TVP	Parámetro variante en el tiempo (<i>Time varying parameter</i>)
UC	Componentes no observables (<i>Unobserved Components</i>)

Lista de Publicaciones

Congresos nacionales

“Predicción de precios y demandas de energía eléctrica basada en modelos de regresión armónica dinámica” Juan R. Trapero, Diego J. Pedregal, Fausto P. García. IX Congreso de Ingeniería de Organización, Gijón (2005).

“La mejora de la seguridad y fiabilidad del transporte ferroviario mediante *RCM*²” Fausto P. García, Juan R. Trapero, Diego J. Pedregal. IX Congreso de Ingeniería de Organización, Gijón (2005).

“Identificación del modelo de un brazo de robot flexible de un eslabón mediante modelos Box-Jenkins” Juan R. Trapero, Emiliano Pereira, Diego J. Pedregal, Vicente Feliu. XXVI Jornadas de Automática, Alicante (2005).

“Métodos en el dominio de la frecuencia aplicados a mercados eléctricos” Juan R. Trapero, Diego J. Pedregal. X Congreso de Ingeniería de Organización, Valencia (2006).

“Estimación algebraica en línea de la frecuencia natural de un robot flexible” Juan R. Trapero, Jonathan Becedas, Vicente Feliu, Hebertt Sira-Ramírez. XXVII Jornadas de Automática, Almería (2006).

Congresos Internacionales

“An algebraic approach to fast perturbed sinusoidal signal parameters identification” Juan R. Trapero, Hebertt Sira Ramírez, Vicente Feliu. The 25th IASTED International Conference on Modeling, Identification and Control, Lanzarote (2006).

“Frequency identification in the noisy sum of two sinusoidal signals” Hebertt Sira Ramírez, Juan R. Trapero, Vicente Feliu. The 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto (2006).

“A fast on-line algebraic estimation of a single-link flexible arm applied to GPI control” J. Becedas, J.R. Trapero, G. Mamani, H. Sira-Ramírez, V. Feliu-Batlle, The 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, París (2006).

“Electricity markets forecasting based on frequency domain methods” Diego J. Pedregal, Juan R. Trapero. 26th International Symposium on Forecasting, Santander (2006).

“Fast identification method to control a flexible manipulator with parameter uncertainties” J. Becedas, J. R. Trapero, H. Sira-Ramírez, V. Feliu. IEEE International conference on robotics and automation, Roma (2007).

“Análisis del ciclo económico basado en filtros adaptativos de ranura” Juan R. Trapero, Diego J. Pedregal. XI Congreso de Ingeniería de Organización, Madrid (2007).

Revistas internacionales

“An algebraic frequency estimator for a biased sinusoidal signal”, Juan R. Trapero, Hebertt Sira-Ramírez, Vicente Feliu-Batlle. *Signal Processing*, vol. 87, pp. 1188-1201, 2007.

“Electricity price forecasting by automatic dynamic harmonic regression models”, Diego J. Pedregal, Juan R. Trapero. *Energy Conversion and Management*, vol. 48, pp. 1710-1719, 2007.

“A fast on-line frequency estimator of lightly damped vibration in flexible structures”, Juan R. Trapero, Hebertt Sira-Ramírez, Vicente Feliu-Batlle. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 307, pp. 365-378, 2007.

“On the algebraic identification of the frequencies, amplitudes and phases of two sinusoidal signals from their noisy sum”, Juan R. Trapero, Hebertt Sira-Ramírez, Vicente Feliu-Batlle. *International Journal of Control*. Special Issue in Honor of M. Fliess 60th Birthday, vol. 81, pp. 505-516, 2008.

Capítulo 1

Introducción

Desde el principio de nuestras vidas, estamos interactuando con nuestro entorno. Intuitivamente, hemos aprendido a controlar nuestras acciones para conseguir un efecto determinado. De alguna manera sabemos anticiparnos a los hechos basados en un modelo innato ajustado a la realidad, este modelo se va perfeccionando a medida que incorporamos nuevas experiencias. Empezamos por entender acciones muy simples (si empujo una bola, rueda), pero pronto somos capaces de realizar acciones más complejas (andar, correr, montar en bici, etc.) Finalmente, este proceso culmina en el diseño de sistemas complicados como ordenadores, aeronaves, o teléfonos móviles para satisfacer nuestras necesidades.

De estos experimentos podemos concluir que no se puede modelar la naturaleza de una sola vez, sino que siempre nos centramos en los aspectos que nos interesan. El trabajo consiste en dividir la naturaleza y sólo poner atención en una parte de la realidad. Esta parte se le llama sistema, el resto de la naturaleza es el entorno del sistema, ver [Pintelon01]. Las interacciones entre el sistema y su entorno se describen mediante entradas y salidas.

Durante mucho tiempo los modelos se han descrito cualitativamente, e incluso hoy en día la mayoría de las situaciones cotidianas se describen por este método simple: por ejemplo, si enciendes la calefacción aumentará la temperatura del salón, si subes la persiana entrará la luz del día, el cielo está oscuro parece que va a llover. No obstante, estos modelos cualitativos se han complementado con modelos cuantitativos basados en los avances matemáticos, y hasta la última década esta metodología parece la más adecuada

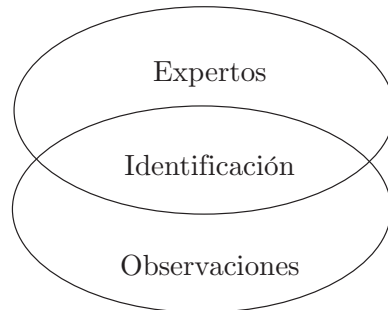


Figura 1.1: Relación entre el experto y las observaciones disponibles

para muchas disciplinas científicas. De esta forma la mayoría de las leyes de la física son modelos cuantitativos que describen alguna parte de nuestra impresión de la realidad. Sin embargo, pronto nos damos cuenta de que ajustar un modelo matemático a las observaciones disponibles y a nuestras experiencias no es una tarea fácil.

El arte de modelar subyace en las habilidades y conocimientos especializados del experto en el campo de estudio, es él quien decide qué aproximaciones se pueden hacer, sugiere cómo manipular el sistema, destaca los aspectos importantes, etc. Por tanto, es aconsejable que el modelado se realice por estos expertos. Naturalmente, ellos necesitan herramientas para extraer la información de interés. Sin embargo, la mayoría de los expertos no están familiarizados con la teoría de la identificación, de modo que pueden intentar desarrollar sus propias técnicas de identificación a medida, con la consecuente pérdida de tiempo sobre todo cuando estos problemas podrían ya estar resueltos en la literatura de identificación. En la Figura 1.1 se muestra gráficamente cómo la identificación de sistemas es el punto de encuentro entre el experto y las observaciones medibles.

Ajustar estos modelos a las observaciones disponibles crea nuevos problemas, ya que las observaciones que se realizan no son exactas: cuando se mide una longitud, se pesa una masa, etc., siempre estamos cometiendo errores porque los instrumentos que se usan no son perfectos. Incluso, los modelos son imperfectos: la realidad es mucho más compleja que la reglas que se proponen. Además, muchos sistemas no son deterministas, sino que muestran

un comportamiento estocástico que hace imposible predecir exactamente sus salidas. Por ejemplo, el ruido en un receptor de radio o la variación de la velocidad del viento en una tormenta muestran esta naturaleza estocástica.

El objetivo de la teoría de la identificación es proporcionar una metodología sistemática para ajustar un modelo matemático, así como fuera posible, a la componente determinista, eliminando las perturbaciones tanto como fuera posible. De hecho, la identificación de sistemas se puede entender como una herramienta muy potente para construir modelos precisos de sistemas complejos a partir de datos ruidosos. Esta herramienta se ha utilizado en numerosas aplicaciones procedentes de diversas disciplinas científicas oculta bajo una terminología diferente. Fue en 1966, en el tercer congreso de la IFAC (*International Federation on Automatic Control*) en Londres, cuando se reconoce la identificación de sistemas como un campo de investigación propio, aunque siempre ha estado ligado a la literatura de control, dado que la mayoría de investigaciones relevantes en identificación de sistemas se han publicado en revistas de control. De hecho, uno de los congresos más importantes de identificación de sistemas, el SYSID (*Symposium on System Identification*) está organizado bajo la tutela de la IFAC.

El trabajo realizado en esta tesis gira en torno a la identificación de sistemas. Concretamente, consiste en el análisis de señales armónicas mediante técnicas de identificación algebraicas y espectrales con aplicaciones en el campo de la mecatrónica y la economía. El marco de esta tesis se encuentra dentro del proyecto: “Monitorización y control de vibraciones en estructuras flexibles aeroespaciales”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (DPI2003-03326). Este proyecto, al igual que la tesis, está dirigida por un equipo multidisciplinar, donde participan áreas desde la ingeniería de control y automática hasta expertos en análisis de series temporales. Los objetivos y metas principales de esta tesis se discuten en el siguiente punto.

1.1. **Objetivos de la tesis**

De acuerdo al título del proyecto, una de las principales metas es monitorizar las vibraciones en estructuras flexibles. Para ello se proponen los siguientes objetivos:



Figura 1.2: Estructura flexible

- Desarrollar un estimador de parámetros de un señal sinusoidal monofrecuencia, que sea capaz de trabajar en línea y proporcionar estimaciones en un intervalo de tiempo inferior al ciclo de la misma onda.
- Extender el estimador al caso de varias ondas sinusoidales.
- Aplicar el estimador de frecuencias para monitorizar las frecuencias de resonancia de las vibraciones procedentes de las estructuras flexibles.

La importancia de monitorizar las frecuencias del sistema radica en la idea de que cambios en las frecuencias de vibración son debidos a cambios en la estructura. Por lo tanto, controlando los valores de las frecuencias de vibración tenemos una medida del estado de la estructura. También hay que indicar que este estimador se combinará con técnicas de control, ya sea en lazo abierto o en lazo cerrado, para realizar un control adaptativo de estructuras flexibles. Un ejemplo de estructura flexible se muestra en la Figura 1.2. Para mayor información sobre el desarrollo y modelado de este tipo de estructuras ver [Muñoz07].

Aparte de los objetivos iniciales enmarcados dentro del proyecto de las estructuras, donde el propósito de identificación está orientado hacia la monitorización y el control, la tesis ha sido codirigida por el departamento de Administración de Empresas. Por tanto, se busca extrapolar el conocimiento previamente adquirido en el análisis de vibraciones procedentes de estructuras flexibles, al análisis de señales armónicas procedentes de aplicaciones

económicas. En este último caso el propósito de la identificación está orientado sobre todo hacia la predicción.

Como se ha expuesto al principio de la introducción, nos hemos encontrado con que diferentes aplicaciones que necesitan identificar o estimar algún parámetro, se pueden enfocar desde el punto de vista de la teoría de identificación. En el caso de sistemas económicos, estos aspectos se han estudiado durante mucho tiempo en el campo de la Econometría y el análisis de series temporales.

Las series temporales son de gran importancia dentro del campo de la organización industrial. En particular, se han aplicado con propósitos de predicción. De hecho, la predicción es un punto muy importante en el desarrollo estratégico de cualquier empresa, ver [Makridakis96]. Por tanto, los economistas, ingenieros y otras disciplinas interesadas en la administración de empresas siempre se han interesado por el análisis de series temporales. Posiblemente en algunas ocasiones no se tiene en cuenta la similitud que existe entre el estudio de las series temporales y la identificación de sistemas. No obstante, aunque ambas disciplinas se puedan solapar en algunas ocasiones, es posible que el impacto que ha tenido las series temporales es mucho mayor que la misma identificación.

Desde el punto de vista del autor el análisis de series temporales reúne un mayor número de revistas especializadas, e incluso de compañías dedicadas exclusivamente a ello. Además cualquier programa de estadística que se precie debe incluir un módulo de análisis de series temporales.

Debido a la relación tan cercana entre la identificación de sistemas y el análisis de series temporales, además del equipo multidisciplinar que encuadra el trabajo de la tesis, era obligatorio intentar aprovechar el conocimiento proveniente de la teoría de la identificación de sistemas para el análisis de señales armónicas que se encuentran en los sistemas económicos.

Un ejemplo de señal armónica con relevante interés en el campo de la gestión de energía y economía son las series temporales correspondientes a las demandas de energía eléctrica y sus precios. Un ejemplo de demanda horaria se puede ver en la Figura 1.3. Por tanto se incluye como objetivo de esta tesis la predicción de la demanda y precio de la energía eléctrica. Estas señales, como se verá posteriormente, poseen múltiple estacionalidad por lo

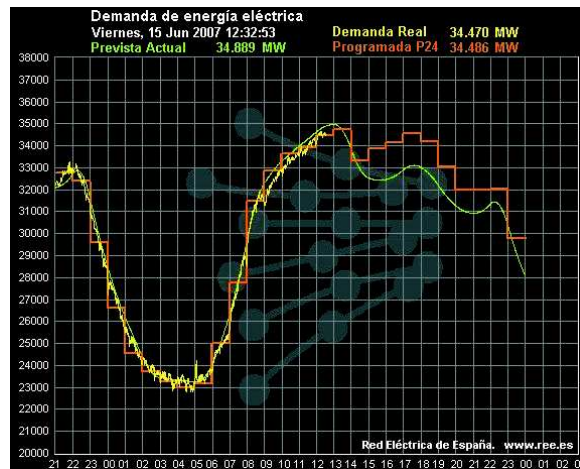


Figura 1.3: Demanda de energía eléctrica en tiempo real obtenida de la página web de la Red Eléctrica de España, www.ree.es

que comparten algunas características con las vibraciones de las estructuras flexibles.

Otra señal armónica que despierta un gran interés en el campo de la economía es el ciclo económico. De hecho, es habitual encontrarse con algún comentario en la prensa que haga referencia a este fenómeno. Una muestra de la importancia que tiene el estudio del ciclo económico se puede ver en la página web www.eabcn.org, la cual se centra en el estudio del ciclo económico en la zona euro. Por tanto, dada la importancia de este tema se concluyen los objetivos de esta tesis con el análisis de la señal armónica procedente del ciclo económico.

1.2. Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente forma:

El capítulo 1 muestra los principales objetivos de esta tesis así como la estructura de la misma.

El capítulo 2 está dedicado a la revisión del estado del arte de la identificación, incluyendo el análisis de series temporales desde un punto de vista centralizado y general. Dada la importancia de las aplicaciones propuestas, cada capítulo posterior posee un estudio del estado del arte más específico.

El capítulo 3 se centra en el desarrollo de un estimador de los parámetros de una

onda sinusoidal. Este estimador aproxima los valores de la amplitud, frecuencia y fase de la señal sinusoidal en un intervalo de tiempo inferior al periodo de la misma. A su vez, este algoritmo se ha desarrollado mediante la metodología derivativa algebraica con excelentes resultados, los cuales se verifican mediante su aplicación a simulaciones y resultados experimentales, donde se comparan con otras metodologías también bastante recientes.

El capítulo 4 basado en la misma identificación algebraica, desarrolla el estimador de parámetros para ondas procedentes de la suma de dos señales sinusoidales. Además realiza un análisis sobre la extensión del problema para la estimación de n frecuencias.

Una vez desarrollados los estimadores de frecuencia, éstos se aplican a las estructuras flexibles en el capítulo 5. En este mismo capítulo se analiza el efecto del amortiguamiento no modelado sobre la estimación, y se comparan los resultados con otros estimadores de frecuencia en un manipulador flexible.

El capítulo 6 propone un control adaptativo basado en la identificación algebraica. En primer lugar, se desarrolla un estimador capaz de utilizar las señales de entrada y salida del sistema para estimar la frecuencia natural de un brazo flexible, sin necesidad de que esté vibrando. El control adaptativo se completa enlazando la identificación algebraica con controles en lazo cerrado y en lazo abierto. Este capítulo cierra la parte mecatrónica de la tesis.

Con el conocimiento adquirido en los anteriores capítulos sobre el análisis de señales armónicas, y dentro de la teoría de la identificación, en el capítulo 7 nos centramos en aspectos relativos a series temporales. En el desarrollo de la tesis se intentará destacar los lazos de unión que existen entre el análisis de series temporales y la identificación de sistemas. La primera parte del capítulo describe la problemática asociada a las señales armónicas correspondientes a demandas y precios de la energía eléctrica de mercados liberalizados, donde se plantean soluciones en el dominio de la frecuencia. La identificación y estimación de este tipo de sistemas tienen por objetivo la predicción a corto plazo y a medio plazo. La segunda parte del capítulo 7 aúna los esfuerzos realizados en las aplicaciones mecatrónicas y económicas para dar un novedoso punto de vista en el análisis del ciclo económico. En esta parte se estudia el ciclo económico como una señal sinusoidal con amplitud y frecuencia variante en el tiempo. Esta señal se estudia mediante técnicas de identificación desarrolladas

en la literatura de control. Este análisis permite llegar a interesantes conclusiones sobre el ciclo económico.

Finalmente, el último capítulo está dedicado a subrayar las conclusiones más importantes que se han alcanzado a lo largo de esta tesis.

Capítulo 2

Estado del arte

El problema de la identificación de sistemas, según lo definió Zadeh, [Zadeh62], se puede explicar en un sentido amplio de acuerdo a la Figura 2.1, donde hay tres ingredientes principales: i) La clase de modelo utilizado; ii) El tipo de señales disponibles; iii) El criterio de estimación. Si el problema está bien diseñado respecto a estos tres factores, los resultados serán satisfactorios.

Sobre la base de estos ingredientes se pretende introducir las técnicas de identificación clásicas que guardan mayor relación con las técnicas que se van a utilizar a lo largo de esta tesis. Así, los modelos se tratan en las secciones 2.1 y 2.2 (lineales y no lineales, respectivamente); la sección 2.3 se dedica a las señales; y, finalmente los criterios posibles se tratan en la sección 2.4

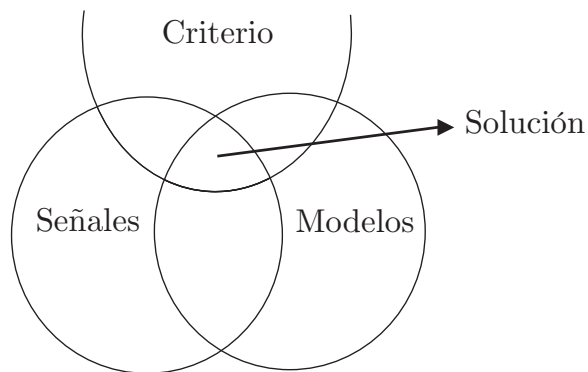


Figura 2.1: El problema de la identificación de sistemas

Una vez estudiadas estas técnicas clásicas, en la sección 2.5 se analiza las relaciones que unen las estimaciones en el dominio del tiempo con el dominio de la frecuencia, ya que en el dominio de la frecuencia se puede analizar las similitudes que existen entre el análisis de series temporales y la identificación de sistemas. Posteriormente, en la sección 2.6 se estudia la importancia de herramientas típicamente ingenieriles como son los modelos de Espacio de los Estados y el Filtro de Kalman para el análisis de series temporales, y se introducen los modelos de componentes no observables como caso particular de modelos de Espacio de los Estados.

Desde el punto de vista del autor las técnicas de identificación en tiempo discreto han alcanzado un gran auge dentro de la teoría de la identificación eclipsando la identificación en tiempo continuo. Sin embargo estas técnicas de identificación en tiempo continuo pueden aportar soluciones ventajosas en algunos problemas. Por este motivo, se ha añadido la sección 2.7, donde se establecen las ventajas y desventajas de identificar en tiempo continuo.

Finalmente, en la sección 2.8 se introduce la base matemática que utiliza la novedosa metodología de la identificación algebraica. En capítulos posteriores se mostrará la forma de desarrollar estimadores de parámetros mediante esta herramienta algebraica.

2.1. Modelos lineales

Los modelos de sistemas dinámicos pueden ser de diferentes tipos, ver [Söderström89]: i) mentales, intuitivos o verbales; ii) gráficos; iii) matemáticos. En esta tesis nos centraremos en los modelos matemáticos.

Un modelo general se puede escribir de la siguiente forma:

$$y(t) = G(\sigma)u(t) + H(\sigma)e(t) \quad (2.1)$$

donde σ se refiere al operador diferencia en tiempo continuo y al operador retardo en tiempo discreto. Se llaman modelos paramétricos a aquellos que expresan G y H en términos de un conjunto de números finitos. Las funciones de transferencia racionales y la descripción en espacio de los estados son ejemplos de estos modelos paramétricos. Generalmente $e(t)$ se

Tabla 2.1: Modelos de función de transferencia más utilizados

Polinomios utilizados	Nombre del modelo
B	FIR (<i>Finite Impulse Response</i>)
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE (<i>Output error</i>)
BFCD	BJ (<i>Box-Jenkins</i>)

supone una perturbación que se distribuye como una normal, de media cero y varianza λ . Con frecuencia, los coeficientes que definen G y H no se conocen, por lo que es necesario estimarlos, es decir, estos coeficientes definidos por θ son parámetros a determinar. De modo que la descripción del modelo queda:

$$y(t) = G(\sigma, \theta)u(t) + H(\sigma, \theta)e(t) \quad (2.2)$$

2.1.1. Modelos de función de transferencia

La forma más directa de parametrizar G y H es representarlos mediante funciones racionales con el numerador y denominador definidos por una serie de parámetros. La familia general de modelos expresados por función de transferencia de esta forma se podría escribir de la siguiente forma:

$$A(\sigma, \theta)y(t) = \frac{B(\sigma, \theta)}{F(\sigma, \theta)}u(t) + \frac{C(\sigma, \theta)}{D(\sigma, \theta)}e(t) \quad (2.3)$$

En función de los polinomios (A, B, C, D, F) que utilicemos obtendremos diferentes conjuntos de modelos. Los más utilizados se encuentran en la Tabla 2.1. Para mayor información sobre las características de cada conjunto ver [Ljung99]. En la ecuación (2.3) se ha supuesto que el retardo es nulo por simplificar la notación.

2.1.2. Modelos en Espacio de los Estados

En la representación en forma de Espacio de los Estados (EE), la relación entre las señales de entrada, ruido y salida se escribe mediante un sistema de ecuaciones diferenciales

(tiempo continuo) o en diferencias (tiempo discreto) utilizando un vector de estado $x(t)$ auxiliar. Esta descripción de los sistemas lineales dinámicos llegó a ser un método muy popular después del trabajo de Kalman en [Kalman60b] sobre predicción y control cuadrático lineal. Hay que destacar que la mayoría de los sistemas físicos se pueden expresar fácilmente mediante modelos EE.

Modelos EE en tiempo continuo

La mayoría de la leyes físicas (por ejemplo, las leyes de Newton) se describen en tiempo continuo en lugar de tiempo discreto, por tanto es lógico que los modelos EE se representen en tiempo continuo de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = F(\theta)x(t) + G(\theta)u(t) \quad (2.4)$$

donde F y G son matrices con la dimensión apropiada ($n \times n$ y $n \times m$, respectivamente, para un estado n -dimensional y una entrada m -dimensional). Además, θ es un vector de parámetros que normalmente se asocian con los parámetros físicos desconocidos, como pudieran ser constantes de los materiales. El modelado se realiza mediante las variables de estado x que poseen cierto significado físico (posición, velocidad, etc.), y por tanto, las salidas medibles serán combinaciones conocidas de los estados. Sea $\eta(t)$ la medida que se obtendría para un caso ideal libre de ruidos, tal que:

$$\eta(t) = Hx(t) \quad (2.5)$$

Utilizando p para el operador diferencia, (2.4) se puede escribir como:

$$[pI - F(\theta)]x(t) = G(\theta)u(t) \quad (2.6)$$

que significa que la función de transferencia entre u y η en (2.5) es

$$\begin{aligned} \eta(t) &= G_c(p, \theta)u(t) \\ G_c(p, \theta) &= H[pI - F(\theta)]^{-1}G(\theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

De esta forma, se ha obtenido un modelo del sistema en función de transferencia desarrollada en tiempo continuo, cuyos parámetros representan los coeficientes físicos de dicho sistema.

Muestreo de un sistema de EE en tiempo continuo

Dado que las señales medidas normalmente son discretas, ¿cómo se traslada la representación de las ecuaciones de EE desarrolladas en tiempo continuo a su equivalente en tiempo discreto? Se supone que la entrada es constante sobre el periodo de muestreo T , tal que:

$$u(t) = u_k = u(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (2.8)$$

Entonces la ecuación diferencial (2.4) se puede resolver desde $t = kT$ a $t = kT + T$, siendo:

$$x(kT + T) = A_T(\theta)x(kT) + B_T(\theta)u(kT) \quad (2.9)$$

donde

$$\begin{aligned} A_T(\theta) &= e^{F(\theta)T} \\ B_T(\theta) &= \int_{\tau=0}^T e^{F(\theta)\tau} G(\theta) d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

(Ver el desarrollo completo en [Ljung99], [Åström89].) La ecuación de observación muestreada en los instantes $t = kT$, $k = 1, 2, \dots$, conteniendo un ruido $v_T(kT)$, se puede escribir como:

$$y(kT) = Hx(kT) + v_T(kT) \quad (2.11)$$

Introduciendo el operador adelanto q de T unidades de tiempo, se puede escribir 2.9 como:

$$[qI - A_T(\theta)]x(kT) = B_T(\theta)u(kT) \quad (2.12)$$

o

$$\eta(kt) = G_T(q, \theta)u(kT) \quad (2.13)$$

$$G_T(q, \theta) = H[qI - A_T(\theta)]^{-1}B_T(\theta) \quad (2.14)$$

De la misma forma, (2.11) se puede escribir como:

$$y(kT) = G_T(q, \theta)u(kT) + v_T(kT) \quad (2.15)$$

Hay que destacar que la ecuación (2.10) puede ser una función muy complicada dependiendo de θ . Por tanto, cuando no hay interés en que los parámetros coincidan con las

constantes físicas, como puede ser el caso de sistemas económicos, donde el interés reside en ajustar los parámetros de forma que expliquen lo mejor posible los datos observados, se puede optar por un modelo de EE en tiempo discreto directamente. Suponiendo que $T=1$ (por simplicidad), se tiene:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= A(\tilde{\theta})x(t) + B(\tilde{\theta})u(t) \\y(t) &= C(\tilde{\theta})x(t) + v(t)\end{aligned}\tag{2.16}$$

que corresponde a la siguiente función de transferencia en tiempo discreto:

$$\begin{aligned}y(t) &= G(q, \tilde{\theta})u(t) + v(t) \\G(q, \theta) &= C(\tilde{\theta})[qI - A(\tilde{\theta})]^{-1}B(\tilde{\theta})\end{aligned}\tag{2.17}$$

En la representación de (2.16) y (2.17) los parámetros $\tilde{\theta}$ son diferentes a los parámetros θ de la EE en tiempo continuo (2.4). De hecho, la relación entre $\tilde{\theta}$ y θ puede llegar a ser muy compleja. Es bastante común, separar el término del ruido $v(t)$ en dos partes. La primera corresponde al *ruido de medida* $v(t)$ y la segunda al *ruido del proceso* $w(t)$, de manera que (2.16) se reescribe como:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + G(\theta)w(t) \\y(t) &= C(\theta)x(t) + v(t)\end{aligned}\tag{2.18}$$

2.2. Modelos no lineales

Las relaciones no lineales entre los datos de entrada y salida proporcionan mucha flexibilidad a la hora de describir un sistema. Modelos para identificar sistemas no lineales se discuten en [Haber90], y una extensa bibliografía clasificada por técnicas de identificación no lineal se puede encontrar en [Giannakis01].

Sin embargo, uno debe intentar aprovechar el conocimiento físico que se posea del sistema para intentar expresar las no linealidades de una manera adecuada. Esta es la idea que está detrás del *modelado semi-físico*, donde el conocimiento físico del problema propone formas de incorporar las no linealidades en el modelo, ver [Ljung99].

2.2.1. Modelos de Wiener y Hammerstein

Es común encontrarse con modelos cuya dinámica es lineal, pero poseen estáticas no lineales en la entrada y/o salida. Pudiera ser el caso de actuadores no lineales, por ejemplo debido a saturaciones, o si los sensores tienen características no lineales. Generalmente, un modelo con una no linealidad estática en la entrada se denomina un modelo de Hammerstein [Narendra66], mientras que si la no linealidad está en la salida se denomina un modelo de Wiener [Kalafatis97]. Por tanto, la combinación de no linealidades en la entrada y salida dará lugar a un modelo Wiener-Hammerstein.

Estos modelos no son mucho más complicados que los vistos hasta ahora si se puede parametrizar adecuadamente las no linealidades involucradas en la entrada y/o salida.

2.2.2. Modelos Caja Negra no lineales

Un modelo se puede interpretar como una función que transforma los datos pasados (Z^{t-1}) a un espacio de la salida. En el caso no lineal, esta función tiene la siguiente estructura general:

$$\hat{y}(t|\theta) = g(Z^{t-1}, \theta) \quad (2.19)$$

donde se ha omitido la dependencia explícita del tiempo. Si no se tiene ningún conocimiento específico de las propiedades del sistema, se deben buscar parametrizaciones de g lo suficientemente flexibles que permitan capturar el comportamiento del sistema. Esto proporcionaría un modelo de caja negra no lineal, que viene a completar los modelos caja negra lineales, anteriormente vistos en este capítulo. La cuestión es ¿cómo parametrizar estos modelos caja negra?

Regresores

De acuerdo a [Ljung99], la estructura mostrada en (2.19) es demasiado general, por tanto es útil escribir g como una cadena de dos funciones:

- La primera recoge las observaciones pasadas y las transforma en un vector de dimensión finita y fija $\phi(t)$.

- La segunda se encarga de llevar el vector $\phi(t)$ al espacio de las salidas, tal que:

$$g(Z^{t-1}, \theta) = g(\phi(t), \theta) \quad (2.20)$$

donde

$$\phi(t) = \phi(Z^{t-1}) \quad (2.21)$$

De forma que el vector ϕ es el vector de regresión y sus componentes son los regresores. En algunas ocasiones los regresores se eligen de la misma forma que en los modelos lineales, dando lugar a modelos NARX (nonlinear ARX), NARMAX, NOE, etc. Leontaritis y Billings en [Leontaritis85] proporcionan un estudio detallado sobre varios modelos paramétricos, como los NARMAX.

Características básicas de las Expansiones de Funciones y Funciones Base

Se define $g(\phi(t), \theta)$ función de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^p para un conjunto θ dado¹. Las Expansiones de Funciones se pueden parametrizar como la familia de funciones tal que:

$$g(\phi(t), \theta) = \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k(\phi), \quad \theta = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T \quad (2.22)$$

donde g_k son las funciones base. La idea de expresar la función $g(\phi(t), \theta)$ como expansiones de funciones base, es poder establecer un marco unificado para la mayoría de las estructuras de modelos de caja negra no lineales.

De acuerdo a [Ljung99], el aspecto relevante, es la selección de las funciones base g_k . La idea más inmediata es usar un desarrollo de Taylor, tal que:

$$g_k(\phi) = \phi^k \quad (2.23)$$

Este desarrollo se denomina las expansiones de Volterra y se utilizan ampliamente, ver [Rugh81].

Sin embargo la mayoría de las expansiones que están adquiriendo mayor interés son de un tipo diferente, y los siguientes puntos son muy importantes para poder entender las conexiones entre la mayoría de los modelos no lineales de caja negra:

¹De aquí en adelante con el fin de simplificar, solo se tratará con el caso de que la salida sea escalar, es decir, $p = 1$

- Las funciones g_k se basan en una *función base madre* que generalmente se define por $\kappa(x)$.
- Esta función $\kappa(x)$ depende una la variable escalar x .
- Normalmente las funciones g_k son versiones escaladas y trasladadas de κ . Para el caso escalar ($d = 1$) se puede escribir:

$$g_k(\phi) = g_k(\phi, \beta_k, \gamma_k) = \kappa(\beta_k(\phi - \gamma_k)) \quad (2.24)$$

donde los parámetros β_k definen los parámetros de escala y γ_k hace referencia a los parámetros de traslación.

La parametrización en función de θ puede venir definida en:

- Las coordenadas α
- Los parámetros de escala β
- Los parámetros de localización γ

Redes neuronales, wavelets y otros modelos no lineales “clásicos”

Algunas estructuras de identificación más populares como son las redes neuronales, wavelets y otros modelos no lineales “clásicos” como los estimadores de *kernel*, se pueden expresar como expansiones de funciones (2.22), combinadas con algún tipo de función base madre. Incluso los modelos *fuzzy* tienen una interpretación unificada. Para mayor información sobre este tratamiento unificado de los modelos no lineales ver [Ljung99], y sus referencias.

2.3. Señales

De acuerdo al esquema 2.1, uno de los ingredientes principales en el problema de la identificación de sistemas son el tipo de señales que se manejan. Aunque la mayoría de los sistemas físicos poseen una naturaleza continua en el tiempo, los avances digitales han contribuido a que la forma en que medimos esa naturaleza continua sea tomando muestras

cada cierto periodo. Es decir, discretizamos las señales continuas convirtiéndolas en señales discretas en el tiempo. Esta discretización conlleva un error, ya que entre muestra y muestra no conocemos la evolución de la señal verdadera. Además de estas señales en el dominio del tiempo, gracias a la Transformada Discreta de Fourier (DFT) podemos trasladar estas señales al dominio de la frecuencia. Normalmente esta transformación se realiza más eficientemente mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT), ver [Pintelon01]. Se podría decir, que generalmente se trabaja con señales discretas en el dominio del tiempo, o mediante su FFT estas señales se pueden trasladar también al dominio de la frecuencia. De forma que nos podemos encontrar con sistemas físicos continuos en el tiempo, que se tienen que identificar con señales discretas en el tiempo o en el dominio de la frecuencia.

2.4. Criterios

El ingrediente final para poder resolver la identificación de un sistema es seleccionar un criterio que sea capaz de ajustar los parámetros del modelo seleccionado al conjunto de datos observados en las señales. Este criterio se puede materializar en una expresión que nos permita evaluar la habilidad de un modelo para describir el proceso generador de los datos observados. Esto se puede expresar, por ejemplo, mediante el error de predicción de un determinado modelo $M(\theta_*)$ de la siguiente forma:

$$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t, \theta_*) \quad (2.25)$$

Cuando se conoce el conjunto de datos:

$$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)] \quad (2.26)$$

los errores de predicción se pueden calcular para $t = 1, 2, \dots, N$. Por tanto, es lógico seleccionar los parámetros del modelo que proporcionen un menor error de predicción. Pero ¿cómo se puede cuantificar la expresión “menor error”? En general, se puede hallar una norma escalar o alguna función que mida el tamaño de ε . Otra alternativa es exigir que $\varepsilon(t, \theta_*)$ no tenga correlación con el conjunto de datos, es decir, que las *proyecciones* de $\varepsilon(t, \theta_*)$ sean cero.

2.4.1. Minimización del error de predicción

La sucesión error de predicción obtenida en (2.25) puede ser vista como un vector en \mathbf{R}^N . Por tanto, este vector se puede medir con una norma en \mathbf{R}^N , ya sea cuadrática o no cuadrática. Una forma general de expresar el problema es el siguiente: Encontrar los parámetros $\theta = \hat{\theta}_N$ que minimizan la función:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N l(\varepsilon_F(t, \theta)) \quad (2.27)$$

donde $\varepsilon_F(t, \theta) = L(q)\varepsilon(t, \theta)$ es la sucesión del error de predicción filtrada por un filtro $L(q)$ que se utiliza para ponderar el ancho de banda de interés, ver [Ljung99]. Por otro lado $l(\cdot)$, define la norma mediante una función escalar. Esta forma de estimar θ encuadra un buen número de métodos conocidos. Denotaremos esta metodología como *métodos de identificación de error de predicción* (PEM, “*Prediction Error Method*”). Con el fin de aclarar esta nomenclatura se recurre a un ejemplo muy conocido como es el método de mínimos cuadrados aplicado a una regresión lineal.

Una forma de expresar una regresión lineal es la siguiente:

$$\hat{y}(t, \theta) = \varphi^T(t)\theta \quad (2.28)$$

donde $\varphi(t)$ es el vector regresión, tal que:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-n_a) \quad u(t-1) \dots u(t-n_b)]^T \quad (2.29)$$

De acuerdo con (2.25) el error de predicción es:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad (2.30)$$

y el criterio según (2.27), con $L(q) = 1$ y $l(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$, es

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N 1/2[y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \quad (2.31)$$

Este es el criterio de mínimos cuadrados para la regresión lineal. En este caso particular existe una solución analítica dada por:

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \quad (2.32)$$

2.4.2. El método de la variable instrumental

El método de la variable instrumental fue introducido en la estadística y econometría por Reiersøl en 1941, [Reiersøl41], y ha sido aplicado a numerosos problemas de estimación de parámetros en estadística (ver, por ejemplo, Kendall y Stuart en [Kendall61]). Un análisis histórico se puede encontrar en los trabajos dirigidos por Young en [Young76], [Young84].

Este método utiliza otro punto de vista para seleccionar el criterio de estimación. Se basa en suponer que el error de predicción $(\varepsilon(t, \theta))$ de un modelo ideal debe ser independiente de las observaciones anteriores Z^{t-1} . En otras palabras, el modelo debe recoger el patrón generador de datos del sistema de forma que los residuos no tengan relación ninguna, es decir, si el error de predicción tuviera cierta forma es debido a que el modelo no la captura y por tanto no describe correctamente los datos. Volviendo al caso de la regresión lineal, la estimación por mínimos cuadrados se puede expresar también como:

$$\hat{\theta}^{LS} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)[y(t) - \varphi^T(t)\theta] = 0 \right\} \quad (2.33)$$

donde $\text{sol}[f(x) = 0]$ significa la solución a la ecuación $f(x) = 0$. Si se supone que los datos siguen el siguiente proceso:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta_0 + v_0(t) \quad (2.34)$$

definimos los instrumentos o variables instrumentales a los elementos ζ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)[y(t) - \varphi^T(t)\theta] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)v_0(t) = 0 \right\} \quad (2.35)$$

Se puede observar de las ecuaciones (2.33) y (2.35) que $\zeta = \varphi$. De modo que el método de las variables instrumentales persigue que la correlación entre los instrumentos y el *ruido* sea cero.

2.4.3. Máxima Verosimilitud

La estimación por máxima verosimilitud fue introducida por Fisher en 1912, [Fisher12]. Este concepto es uno de los más utilizados en inferencia estadística y se estudia en cualquier

asignatura de estadística básica. Una explicación más detallada de este método se puede encontrar en [Peña01]. Supongamos una variable aleatoria continua x con función de densidad que representaremos por $f(X|\theta)$ para indicar que depende de un vector de parámetros θ , y una muestra aleatoria simple $X = (x_1, \dots, x_n)$. La función de densidad conjunta de la muestra es:

$$f(X|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (2.36)$$

cuando θ es conocido, esta función determina la probabilidad de aparición de cada muestra.

En un problema de estimación se conoce un valor particular de X , la muestra, pero θ es desconocido. Sin embargo, la función anterior sigue siendo útil, ya que si sustituimos X por el valor observado, $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$, la función $f(X_0|\theta)$ proporciona, para cada valor de θ , la probabilidad de obtener el valor muestral X_0 para ese θ . Cuando variamos θ , manteniendo X_0 fijo, se obtiene una función que llamaremos *función de verosimilitud*, $\ell(\theta|X)$ o $\ell(\theta)$.

Un procedimiento intuitivo de estimación es escoger aquel valor que haga máxima la probabilidad de aparición de los valores muestrales efectivamente observados; en otros términos, seleccionar como estimador del parámetro el valor que maximice la probabilidad de lo efectivamente ocurrido. Esto conduce a obtener el valor máximo de la función $\ell(\theta)$. Suponiendo que esta función es diferenciable y que su máximo no ocurre en un extremo de su campo de definición, el máximo se obtendrá resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_n} &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

El valor resultante así obtenido, $\hat{\theta}$, corresponderá a un máximo si la matriz hessiana de segundas derivadas, evaluada en dicho punto $\hat{\theta}$ es definida negativa.

2.4.4. El método de Bayes

El método de máxima verosimilitud funciona muy bien con muestras grandes, pero con muestras pequeñas o medianas no proporciona siempre respuestas satisfactorias. Otra

alternativa para solventar este problema es usar la estimación bayesiana, ver [Peña01]. El método de Bayes proviene del matemático inglés Thomas Bayes quién fue el primero en utilizar el teorema de Bayes para realizar inferencias.

En la estimación bayesiana se tiene en cuenta la información inicial que disponemos del problema. Si se ignora la información inicial, que llamaremos información *a priori*, que se tiene respecto a un parámetro a estimar no es importante si la muestra es grande, ya que entonces probablemente queremos despreciar nuestra información *a priori* frente a los datos, pero puede serlo cuando la información *a priori* sea significativa frente a los datos.

La inferencia bayesiana es un procedimiento general para combinar nuestra información *a priori* con la muestra para obtener una inferencia que tenga en cuenta toda la información existente en el problema. Este enfoque no tiene en cuenta al parámetro como una constante desconocida, sino una variable aleatoria sobre la que podemos establecer *a priori* una distribución de probabilidad que refleje nuestro conocimiento del problema. La inferencia respecto a sus posibles valores se obtiene aplicando el cálculo de probabilidades (teorema de Bayes) para combinar la información inicial con la muestral y obtener la distribución del parámetro condicionada a la información disponible. En concreto, se supone que antes de tomar la muestra se dispone de cierta información respecto al parámetro (o vector de parámetros) que se representa mediante una *distribución inicial o a priori*, $p(\theta)$. Después se toma la muestra $X = (x_1, \dots, x_n)$, y la probabilidad de obtener la muestra para cada valor posible del parámetro viene dada por la función de densidad conjunta de las observaciones $f(X|\theta)$. Se observa que una vez obtenida la muestra, en esta función los datos son fijos, porque ya han sido observados, mientras que la variable son los parámetros. Por tanto, cuando la muestra se observa, $f(X|\theta) = \ell(\theta|X)$ es la función de verosimilitud.

A continuación combinamos según las reglas del cálculo de probabilidades estos dos elementos de información para obtener la *distribución final o a posteriori*, que se obtiene mediante el teorema de Bayes. Llamando $p(\theta|X)$ a la distribución a posteriori, tendremos que:

$$p(\theta|X) = \frac{f(X|\theta)p(\theta)}{\int f(X|\theta)p(\theta)d(\theta)} \quad (2.38)$$

La distribución a posteriori contiene toda la información para hacer inferencias respecto al parámetro. Si se desea un estimador puntual, se tomará la media o la moda de dicha

distribución; si se desea un intervalo de confianza, se tomará la zona que encierre una probabilidad fijada en dicha distribución.

Las diferencias prácticas entre el enfoque clásico basado en la función de verosimilitud y el bayesiano pueden ser importantes en muestras pequeñas pero en muestras grandes no son significativas.

2.5. Estimación en el dominio de la frecuencia

La identificación de sistemas en el dominio de la frecuencia se trata de una manera muy formal en el libro de Pintelon and Schoukens in [Pintelon01]. También se interpreta la estimación en el dominio de la frecuencia en el libro de Ljung en [Ljung99]. Además de estas referencias, son interesantes las conexiones entre la identificación en el dominio del tiempo y de la frecuencia que se establecen en [Ljung04] y [Schoukens04].

Desde el punto de vista de las series temporales, el dominio de la frecuencia se ha utilizado también para la estimación de parámetros, ver [Harvey89], [Young99], entre otras. Sin embargo, no son muchas las aplicaciones en el contexto de series temporales que utilicen la estimación en el dominio de la frecuencia, a pesar de su gran potencial.

Para modelos y sistemas lineales la relación entre los métodos en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia es bien conocida y muy utilizada, como sucede en el diseño de control. En el caso de la identificación de sistemas lineales los enlaces entre los dominios del tiempo y de la frecuencia son igualmente importantes. Sin embargo, las herramientas tradicionalmente no han estado integradas. Naturalmente, los métodos para estimar la respuesta en frecuencia directamente de los datos en el dominio del tiempo mediante análisis espectral es un tema clásico. De hecho, estas técnicas se vienen utilizando desde 1960.

Al mismo tiempo se puede distinguir una “comunidad ”(generalmente ingenieros de control) que básicamente trabaja con datos en el dominio del tiempo y principalmente estima modelos paramétricos en el dominio del tiempo (modelos en el espacio de los estados y funciones de transferencia) y ocasionalmente se complementa con un análisis espectral. Otra comunidad (la mayoría ingenieros de “instrumentación y medida”) usa datos en el dominio

de la frecuencia, entradas periódicas y experimentos controlados para construir modelos similares (funciones de transferencia) así como estimaciones de la respuesta en frecuencia. Los analizadores de frecuencia son habitualmente utilizados para recoger y comprimir los datos. Por otro lado, el análisis modal y de vibración son aplicaciones comunes de este tipo.

Hubo un periodo de tiempo, donde ambas comunidades científicas no estaban muy bien comunicadas. Por ejemplo el hecho de que la entrada al sistema no fuera periódica fue percibido como un obstáculo para utilizar técnicas en el dominio de la frecuencia. Además, estos métodos frecuenciales tenían el problema del “leakage”, donde señales con poco ruido en el dominio del tiempo resultaban en medidas ruidosas de la función de la respuesta en frecuencia. Sin embargo, se demuestra en [Pintelon01], [Ljung99], que ambos dominios son equivalentes.

Entonces cabría preguntarse, si ambos dominios son equivalentes ¿para qué son necesarios los dos? La respuesta es que aunque ambos dominios aportan la misma información, puede ser más fácil acceder a esa información en un dominio que en otro ya que la información se representa de una forma diferente. Un ejemplo sencillo es una señal que sea la suma de tres ondas senoidales. En el dominio del tiempo sería muy difícil encontrar las tres frecuencias mientras que en el dominio de la frecuencia el problema se reduce a localizar tres picos en la respuesta frecuencial.

2.5.1. Ajustar el modelo a los datos

Datos procedentes del dominio del tiempo

El modelo discreto en el dominio del tiempo de una función de transferencia general puede ser:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (2.39)$$

Para datos muestreados equidistantes el error de predicción para este modelo es:

$$\varepsilon(t, \theta) = H^{-1}(q, \theta)(y(t) - G(q, \theta)u(t)) \quad (2.40)$$

Una forma natural para estimar θ es minimizar el tamaño de estos errores de predicción:

$$V_N(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(t, \theta) \quad (2.41)$$

Datos procedentes del dominio de la frecuencia

Si disponemos de las transformadas de Fourier de las señales de entrada y salida, la relación entre estas transformadas sería:

$$\begin{aligned} Y_N(e^{i\omega T}) &= G(e^{i\omega T}, \theta)U_N(e^{i\omega T}) + V_N(e^{i\omega T}, \theta) \\ E|V_N(e^{i\omega T})|^2 &= \lambda|H(e^{i\omega T}, \theta)|^2 = \Phi_v(\omega, \theta) \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde λ es la varianza de $e(t)$ que se supone gaussiano. La relación expuesta arriba no es exacta, solamente aproximada, ya que el transitorio y las desviaciones debidas al hecho de que los datos pudieran no ser periódicos no se han tratado por simplificar. Aplicando el criterio de mínimos cuadrados se obtiene:

$$V_N(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^N |Y_N^k - G(e^{i\omega_k T}, \theta)U_N^k|^2 / (\lambda|H(e^{i\omega_k T}, \theta)|^2) \quad (2.43)$$

donde, se ha reescrito $Y_N^k = Y(e^{i\omega_k T})$.

Conexión entre los dominios del tiempo y de la frecuencia

Para mostrar las similitudes entre ambos dominios se utiliza la relación de Parseval. La transformada de Fourier del error de predicción (2.40) es (ignorando el transitorio o asumiendo datos periódicos):

$$E_N(e^{i\omega T}, \theta) = H^{-1}(e^{i\omega T}, \theta)(Y_N(e^{i\omega T}) - G(e^{i\omega T}, \theta)U_N(e^{i\omega T})) \quad (2.44)$$

Aplicando la relación de Parseval a (2.41) e ignorando los efectos transitorios, el criterio (2.41) expresado en el dominio de la frecuencia es:

$$V_N(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^N |Y_N^k - G(e^{i\omega_k T}, \theta)U_N^k|^2 / |H(e^{i\omega_k T}, \theta)|^2 \quad (2.45)$$

Dividiendo esta expresión por la varianza λ se obtiene exactamente la misma ecuación (2.43). Por tanto, la expresión en el dominio del tiempo (2.40) se puede interpretar como un ajuste de curvas del modelo parametrizado a la estimación empírica de la función de transferencia $ETFE$, siendo ésta:

$$\hat{G}_N(e^{i\omega T}) = \frac{Y_N(e^{i\omega T})}{U_N(e^{i\omega T})} \quad (2.46)$$

Nota 2.5.1 *Es interesante resaltar en la ecuación (2.45), el efecto de ponderación de frecuencias que realiza el modelo de ruido definido en (2.42). Este es uno de los principales enlaces existente entre las comunidades de identificación de sistemas y de análisis de series temporales.*

Nota 2.5.2 *Un aspecto interesante en la estimación en el dominio de la frecuencia es que se pueden estimar modelos parametrizados en tiempo continuo directamente, simplemente sustituyendo $e^{i\omega T}$ que representa la transformada Z por $i\omega$ que representa la transformada de Laplace, en las expresiones anteriores.*

2.6. Importancia de la representación en EE para analizar series temporales

La representación en EE junto al Filtro de Kalman se ha aplicado, en el campo de control, al problema de estimar parámetros variantes en el tiempo en modelos del tipo de regresión, usualmente dentro de un contexto de sistemas dinámicos (ver por ejemplo, [Young84]). Sin embargo, numerosos trabajos han mostrado cómo este método se puede extender a problemas de predicción (*forecasting* y *backcasting*), suavizado y extracción de señal (ver por ejemplo, [Harvey89], [West89], [Ng90], [Young99]) dentro del análisis de series temporales pertenecientes a contextos socio-económicos y medioambientales. En este tipo de aplicaciones, la contribución más influyente es probablemente la realizada por Harvey [Harvey89]. Además del Filtro de Kalman, quizás uno de los desarrollos más importantes en este área ha sido la utilización de varias formas de Suavizado de intervalo fijo (FIS, “*Fixed Interval Smoothing*”) recursivo, [Bryson69], que proporciona un método adaptativo “off-line” a la estimación de estados y parámetros variables en el tiempo, permitiendo una interpolación, suavizado y extracción de señal óptima dentro de los *huecos* en los datos.

2.6.1. Modelo de componentes no observables

Un modelo de componentes no observables se basa en la separación de una serie temporal en una serie de componentes, los cuales no se pueden extraer directamente de

dicha serie temporal. Por ejemplo, una forma bastante general de expresar el modelo de componentes no observables es la siguiente:

$$y(t) = T(t) + C(t) + S(t) + f(u(t)) + N(t) + v(t) \quad v(t) \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.47)$$

donde $y(t)$ es la serie temporal observada; $T(t)$ es una tendencia o componente de baja frecuencia; $C(t)$ es una componente cíclica con un periodo superior a un año; $S(t)$ es una componente estacional con un periodo inferior a un año; $f(u(t))$ captura la influencia de un vector de variables exógenas $u(t)$ (entradas); $N(t)$ es un modelo de perturbación estocástico; y $v(t)$ es un componente “irregular”, normalmente definido como Gaussiano con media cero y varianza σ^2 . Con el fin de permitir la no estacionariedad en la serie temporal $y(t)$, los componentes en (2.47) se pueden caracterizar por una serie de Parámetros Variantes en el Tiempo (TVP, “*Time Varying Parameters*”) estocásticos, como se verá posteriormente.

Dado que en las series temporales bajo estudio no tienen por qué estar presentes todos los componentes descritos en (2.47), podemos simplificar dicha expresión. Por ejemplo en [Young99], se utiliza el modelo de regresión armónica dinámica DHR (“*Dynamic Harmonic Regression*”) cuyo modelo sólo contiene las componentes de tendencia, cíclica, estacional y ruido blanco, es decir:

$$y(t) = T(t) + C(t) + S(t) + v(t) \quad (2.48)$$

Conviene destacar que aunque las componentes $C(t)$ y $S(t)$ se describen de la misma manera, dado que el rango de frecuencias que describen tienen un significado diferente es preferible definir las separadamente, de modo que la componente estacional es:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{R_s} \{a_i(t) \cos(\omega_i t) + b_i(t) \sin(\omega_i t)\} \quad (2.49)$$

donde $a_i(t)$ y $b_i(t)$ son TVPs estocásticos y ω_i , $t = 1, \dots, R_s$ son la frecuencia fundamental y sus armónicos asociados con la estacionalidad en la serie. Por otro lado la componente cíclica viene descrita por:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{R_c} \{\alpha_i(t) \cos(f_i t) + \beta_i(t) \sin(f_i t)\} \quad (2.50)$$

donde $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ son TVPs estocásticos y f_i , $t = 1, \dots, R_c$ son la frecuencia fundamental y sus armónicos asociados con la componente cíclica en la serie (esta componente normalmente tiene un periodo mayor al estacional). La tendencia $T(t)$ puede ser incorporada en la componente cíclica o estacional como un componente de frecuencia cero (es decir, se introduce el índice $i = 0$ en el sumatorio de (2.49) o (2.50) con ω_0 o f_0 igual a cero).

En el caso más simple, los TVPs $a_i(t)$, $b_i(t)$, $\alpha_i(t)$ y $\beta_i(t)$ se pueden definir con un vector de estado de dos dimensiones $\mathbf{x}_{i,t}$. La evolución estocástica de cada $\mathbf{x}_i(t)$ se describe por un paseo aleatorio generalizado (GRW, “*Generalized Random Walk*”) de la forma:

$$x_i(t+1) = A_i x_i(t) + G_i w_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, R \quad (2.51)$$

donde $R = 1 + R_c + R_s$ y

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad G_i = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Este modelo general abarca varios casos particulares como el Paseo Aleatorio Integrado (IRW, “*Integrated Random Walk*”: $\alpha = \beta = \gamma = 1$; $\delta = 0$), el Paseo Aleatorio escalar (RW, “*Random Walk*”: $\alpha = \beta = \delta = 0$; $\gamma = 1$), el Paseo Aleatorio Suavizado (SRW, “*Smoothed Random Walk*”: $0 < \alpha < 1$; $\beta = \gamma = 1$ y $\delta = 0$); y la Tendencia Lineal Local de Harvey (LLT, “*Local Linear Trend*”: $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\delta = 1$) y la tendencia amortiguada (DT, “*Damped Trend*”: $\alpha = \beta = \delta = 1$; $0 < \gamma < 1$), ver [Harvey89] y [Koopmans95]. El modelo GRW fue introducido en el trabajo de Jakeman y Young en [Jakeman84] y discutido más profundamente en [Young89].

Una vez se han definido los TVPs, el modelo completo en EE se construye por la agregación de los subsistemas definidos en (2.51)-(2.52), con la ecuación de observación definida por (2.48), tal que:

$$x(t+1) = Ax(t) + Gw(t) \quad (2.53)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) \quad (2.54)$$

donde (2.53) es la ecuación de estado y (2.54) es la ecuación de observación. Las matrices que forman este conjunto de ecuaciones son: A de dimensión $n \times n$ constituida por la

concatenación de las matrices A_i en (2.52); análogamente G de dimensión $n \times n$ se forma por concatenación de las matrices G_i . La matriz de observación $C(t)$ se define apropiadamente por un vector $1 \times n$ que relaciona las observación escalares $y(t)$ con los estados variables definidos por (2.53), para que represente el modelo DHR en (2.48). Los ruidos del proceso se suponen ruido blanco en $w(t)$ con la matriz de covarianza definida por R_1 e independientes del ruido de observación $v(t)$

2.6.2. Estimación de los parámetros variantes en el tiempo

La introducción del concepto de mínimos cuadrados por Gauss [Gauss63] en 1795 ha sido la base de un gran número de teorías y técnicas hasta la fecha. Entre estas técnicas, probablemente la más útil a día de hoy es el Filtro de Kalman, ver [Sorenson70]. En este apartado se explicará brevemente los principales conceptos que definen el Filtro de Kalman (KF, “*Kalman Filter*”). El estudio detallado de esta herramienta se puede encontrar en [Anderson79], [Ljung99], [Grewal01].

Un enfoque intuitivo del KF es el dado por Maybeck en [Maybeck79], donde lo define como un *algoritmo óptimo recursivo de procesamiento de datos*. Hay varias maneras de definir *óptimo* dependiendo del criterio elegido. El KF es óptimo estadísticamente respecto a cualquier función cuadrática del error de estimación, [Grewal01].

La palabra *recursivo* en la definición anterior significa que no necesita almacenar todos los datos previos para calcular las estimaciones cada vez que se toma una nueva medida.

El filtro es de hecho un *algoritmo de procesamiento de datos*. A pesar de la típica connotación de un filtro como una “caja negra” que contiene redes eléctricas, el hecho es que en la mayoría de las aplicaciones prácticas, el filtro es simplemente un programa de ordenador, de tal forma que incorpora medidas muestreadas en tiempo discreto en lugar de señales en tiempo continuo.

La necesidad del *filtro* es debido a que con frecuencia las variables de interés no se pueden medir directamente. Por tanto, se deben inferir de alguna manera. Esta inferencia es complicada dado que el sistema es perturbado por entradas que se desconocen y las relaciones entre las variables de interés o *estados* y las salidas medidas se conocen con un

grado de incertidumbre. Además, cualquier medida está afectada por diferentes tipos de ruido. Un Filtro de Kalman combina todas las medidas disponibles, más el conocimiento del sistema que se tiene *a priori* para producir una estimación de las variables de interés de tal forma que el error se minimiza estadísticamente. En otras palabras, si se ejecutara varias veces diferentes filtros para la misma aplicación, el resultado promediado del Filtro de Kalman sería mejor que el resultado promediado de cualquier otro filtro.

Como se mencionó anteriormente la formulación del problema en EE es muy conveniente para la utilización del Filtro de Kalman. En el caso de que nuestra aplicación no sea “on-line” se puede acompañar este filtrado de un suavizado óptimo como es el Suavizado de Intervalo Fijo FIS (“*Fixed Interval Smoothing*”).

En el caso de análisis de series temporales, ver [Young99], es frecuente utilizar la siguiente formulación para KF [Kalman60a] y el FIS [Bryson69]. De modo que para una serie temporal $y(t)$ con $t = 1, 2, \dots, N$, el algoritmo es:

1. Filtro de Kalman (KF):

- Ecuaciones de predicción:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t-1) &= A\hat{x}(t-1) \\ \hat{P}(t|t-1) &= A\hat{P}(t-1)A^T + GQG^T\end{aligned}\quad (2.55)$$

- Ecuaciones de corrección:

$$\begin{aligned}F(t) &= \left[1 + C(t)\hat{P}(t|t-1)C(t)^T\right] \\ \hat{x}(t) &= \hat{x}(t|t-1) + \hat{P}(t|t-1)C(t)^T (y(t) - C(t)\hat{x}(t|t-1)) / F(t) \\ \hat{P}(t) &= \hat{P}(t|t-1) - \hat{P}(t|t-1)C(t)^T C(t)\hat{P}(t|t-1) / F(t)\end{aligned}\quad (2.56)$$

2. Suavizado de intervalo fijo (FIS):

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|N) &= \hat{x}(t|t-1) + \hat{P}(t|t-1)s(t-1) \\ \hat{P}(t|N) &= \hat{P}(t|t-1) - \hat{P}(t|t-1)s(t-1)\hat{P}(t|t-1) \\ s(t-1) &= C(t)^T (y(t) - C(t)\hat{x}(t|t-1)) / F(t) + \bar{\Phi}(t)^T s(t) \\ S(t-1) &= C(t)^T C(t) / F(t) + \bar{\Phi}(t)^T S(t)\bar{\Phi}(t) \\ \bar{\Phi}(t) &= \bar{\Phi}(t) - \bar{\Phi}(t)\hat{P}(t|t-1)C(t)^T C(t) / F(t)\end{aligned}\quad (2.57)$$

con $s_N, S_N = 0$

En estos algoritmos², las matrices de dimensión $n \times n$ Q , y la matriz de la misma dimensión P_t se definen como:

$$Q = \frac{R_1}{\sigma^2} \quad P_t = \frac{P_t^*}{\sigma^2} \quad (2.58)$$

donde R_1 es la matriz de covarianzas asociada con el ruido del proceso $w(t)$ y P_t^* es la matriz de covarianzas asociado con las estimaciones de estado. La matriz Q también se conoce como el Ratio de la Varianza del Ruido (NVR, “Noise Variance Ratio”), ya que ambas matrices se encuentran divididas por el ruido de observación σ^2 .

Nota 2.6.1 *Es importante señalar que en el caso del análisis de series temporales, el interés no reside en estimar los parámetros de las matrices del sistema o de observación sino el interés reside en estimar los hiper-parámetros NVR. De modo que mientras la comunidad de control generalmente centra la identificación en estimar los parámetros desconocidos en las matrices A y C (ya que esos parámetros están asociados a constantes físicas), en la comunidad de economía, lo que se estima son las varianzas de los ruidos. La explicación a esto se puede ver de una forma más clara en el dominio de la frecuencia, ver nota 2.5.1. De modo que cuando se analiza una serie temporal los modelos del ruido se comportan como filtros que ponderan las frecuencias más importantes en la serie temporal, recogiendo las características más importantes del proceso que ha generado la serie temporal.*

2.7. Identificación en tiempo continuo

Al final del apartado 2.5 se muestra la posibilidad de estimar los parámetros de modelos en tiempo continuo mediante datos en el dominio de la frecuencia. La siguiente pregunta que uno podría preguntarse sería: ¿es posible estimar éstos mismos parámetros relacionados al tiempo continuo mediante datos obtenidos en tiempo discreto? ¿Cuáles son las ventajas de estimar en tiempo continuo?

La modelización de un sistema normalmente está basada en la aplicación de los principios de la física. Esta descripción matemática nos proporciona una serie de parámetros clave en una forma genérica. Sin embargo, con el intensivo desarrollo digital que se

²En esta tesis se han utilizado las rutinas KF/FIS implementadas en la toolbox CAPTAIN, ver [Taylor07]

está dando actualmente, incluso la modelización de los sistemas también es digital. De hecho, la mayoría de las aplicaciones que utilizan las técnicas de identificación se basan exclusivamente en técnicas de identificación en tiempo discreto, dado que las propiedades de estas técnicas se encuentran bien detalladas, ver [Ljung99], [Söderström89].

No obstante, para la mayoría de nosotros, los coeficientes de los modelos discretos no ofrecen la misma interpretación física que los coeficientes de los modelos continuos. Además, la identificación en tiempo continuo también ha mantenido su avance, aunque desde el punto de vista del autor, ha estado bajo la sombra de la identificación en tiempo discreto. Un estado del arte de la identificación en tiempo continuo se puede desarrollar siguiendo a [Young81], [Unbehauen87], [Unbehauen90], [Unbehauen98].

La importancia de los modelos en tiempo continuo

Los principales argumentos a favor de los modelos en tiempo continuo son los siguientes:

- Los modelos de los sistemas físicos que se derivan de los principios físicos son inherentemente continuos en el tiempo, porque las leyes físicas donde se basa el modelado están en tiempo continuo (TC)
- Los modelos TC permiten un mejor entendimiento del comportamiento físico del sistema en consideración, ya que los parámetros del modelo están muy correlacionados con las propiedades físicas del sistema.
- El conocimiento parcial (si existe) se mantiene en los modelos TC. Si un modelo TC que contiene algunos parámetros conocidos se discretiza, estos parámetros se pierden en el proceso de discretización
- Los métodos convencionales en tiempo discreto (TD) no están en armonía con el espíritu del TC, donde periodos de muestreo pequeños no convergen a los resultados correspondientes al modelo TC original. Además, el retorno del modelo convencional en TD al modelo original en TC puede ser muy complicado.

Por tanto, si la identificación en tiempo continuo posee todas estas ventajas, ¿por qué se identifica generalmente en tiempo discreto? La respuesta es muy simple, la estimación de las derivadas temporales de las señales introducen ruido en la estimación.

La Problemática de la identificación en tiempo continuo

La principal dificultad en manejar modelos TC es debido a la presencia del operador derivada asociado con las señales de entrada y salida. Mientras que estas señales se pueden medir directamente, sus derivadas son indeseables desde el punto de vista práctico. Esto es debido a que las estimaciones de las derivadas de una señal en tiempo continuo se comportan como amplificadores del ruido de alta frecuencia proporcionando estimaciones de baja calidad.

Por tanto, es necesario tratar estas estimaciones de las derivadas. En general, estas estimaciones vienen acompañadas de un filtro de paso bajo para atenuar esta amplificación del ruido de alta frecuencia. Las maneras de abordar este filtrado son varias, un resumen de estas técnicas se puede consultar en [Unbehauen98] y la regularización de estos filtrados en [Moussaoui05].

2.8. Identificación algebraica

Como se puede observar en las técnicas de identificación clásicas que se han expuesto anteriormente, el criterio que se utiliza para ajustar los datos al modelo es la minimización del error. Este ejercicio de optimización a su vez se puede afrontar desde el dominio del tiempo o desde el dominio de la frecuencia. Dependiendo de las características de la señal, la superficie de la función de coste variará de forma que la rapidez con que se halle el óptimo también cambiará, ver [Mboup97].

Actualmente, también existe otra línea de identificación muy reciente con un punto de vista completamente diferente, ya que no se dispone de una función de coste a minimizar de alguna manera sino que, basándose en álgebra diferencial y cálculo operacional, se llega a desarrollar una serie de estimadores “a medida”, como se estudiará posteriormente en el análisis de señales armónicas. Además, tampoco se utilizará un marco estocástico, evitan-

do así la necesidad de conocer las distribuciones estadísticas de las perturbaciones. Estas estimaciones se realizan en línea y en tiempo continuo o discreto, ver [Sira-Ramírez02], [Fuchshumer06] y [Fliess06b]. Los principales desarrollos de esta tesis se realizarán en tiempo continuo. Finalmente, como se comprobará más adelante, este tipo de técnicas poseen una mayor rapidez que las técnicas clásicas.

La estimación paramétrica se puede formalizar como:

$$y = F(x, \Theta) + n \quad (2.59)$$

donde la señal observada es un funcional F de la señal *verdadera* x , que depende de un conjunto Θ de parámetros. Por otro lado, el ruido que perturba las observaciones viene definido por n .

Encontrar una *buena aproximación* de los componentes de Θ es el objeto de una vasta literatura en varios campos de la matemática aplicada.

Este problema se puede dirigir desde una nueva óptica (ver [Fliess03b], [Fliess03a] y [Mboup]) basada en las siguientes herramientas, con un carácter algebraico:

- Álgebra diferencial [Buium94], [Kolchin73], que realiza respecto a las ecuaciones diferenciales un papel similar que el álgebra conmutativa con respecto a las ecuaciones algebraicas. Estas técnicas fueron introducidas en la teoría de control no lineal por M. Fliess [Fliess90] hace veinte años.
- Cálculo operacional, [Mikusinski83], [Mikusinski87], [Yosida84] que ha sido una herramienta clásica entre los ingenieros de control y mecánicos. Con frecuencia se normaliza mediante la transformada de Laplace.

En este apartado, se proporciona una breve nota sobre el desarrollo matemático utilizado en la estimación de parámetros mediante el método derivativo algebraico. Los resultados fundamentales están basados en la teoría de módulos para sistemas lineales. Este resumen sigue muy cerca el trabajo de Fliess en [Fliess03b] (ver también, para un conocimiento general, Fliess and Glad [Fliess93]). Aunque los fundamentos matemáticos de la identificación algebraica son muy abstractos, se comprobará en los posteriores capítulos que su desarrollo es muy sencillo.

Base matemática

Se considera el campo de números reales o complejos descrito por k y se define como $k[\frac{d}{dt}]$ el anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes en k :

$$\sum_{j=0}^{\text{finite}} c_\nu \frac{d^j}{dt^j}, \quad c_\nu \in k$$

Los anillos de operadores diferenciales lineales también pueden ser llamados anillos diferenciales. Se considera un conjunto finito de indeterminaciones, tal que (y_1, \dots, y_m) , en asociación con un anillo de operadores lineales diferenciales.

Estas indeterminaciones representan las variables que describen, en el dominio del tiempo, las señales de donde se obtienen los parámetros desconocidos.

La forma más general en que los parámetros pueden aparecer en los coeficientes de una expresión diferencial incluyen expresiones algebraicas involucrando sumas, multiplicaciones, raíces, etc., de dichos parámetros. En otras palabras; las expresiones de los parámetros provienen de las soluciones de las ecuaciones algebraicas que envuelven los parámetros desconocidos.

Un objeto natural adecuado para expresar la complejidad de tales expresiones, que aparecen en los coeficientes de un polinomio diferencial, está dado por una *extensión algebraica finita* del campo de los números reales o complejos.

Sea $K = k(\Theta)$ una extensión algebraica finita del campo $k = C, R$ de los números complejos o reales, generados por un conjunto finito, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, de *parámetros constantes desconocidos*.

Sea S/K una extensión algebraica diferencial de dimensión finita, donde una señal es un elemento de S . Sea L/K una extensión algebraica diferencial y N un subconjunto de L . El sobre-campo diferencial de K generado por N se escribe tal que $K < N >$.

El conjunto Θ de parámetros desconocidos se dice ser *algebraicamente identificable* (respectivamente, *racionalmente identificable*) si, y solo si, cualquier componente de Θ es algebraico sobre (respectivamente, pertenece a) $k < t, y >$. Se dice ser *linealmente*

identificable si, y solo si,

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q$$

donde

- P y Q son matrices $r \times r$ y $r \times 1$
- las entradas de P y Q pertenecen al rango $_{k[\frac{d}{dt}]}(1, y)$
- $\det(P) \neq 0$.

donde $\text{rango}_{k[\frac{d}{dt}]}(1, y)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(1, y_1, \dots, y_m)$ *i.e.* $D_0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^m D_i y_i$. Los coeficientes D_i pertenecen a $k[\frac{d}{dt}]$. Por tanto, D_i es un operador diferencial de la forma

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\sum_{k=0}^{k_j} a_{k,j} t^k}{\sum_{l=0}^{l_j} b_{l,j} t^l} \right) \frac{d^j}{dt^j}$$

con $a_{k,j}, b_{l,j} \in k$.

Capítulo 3

Estimador de parámetros procedentes de una onda sinusoidal

Uno de los primeros objetivos en la tesis, es desarrollar un estimador de frecuencia que sea capaz de calcular la frecuencia de una señal sinusoidal en línea. Aunque este problema es no lineal, es un problema clásico en la teoría de sistemas. Existen numerosas aplicaciones que abarcan un amplio rango de campos científicos, desde la bio-medicina, sistemas de energía, economía, cancelación de vibraciones en sistemas mecánicos, etc.

En principio podemos distinguir tres bloques principales relacionados con la estimación de frecuencia, [Kootsookos99]:

- Estimación de un solo tono de frecuencia (monofrecuencia): donde la señal es una sola onda, con frecuencia constante. Este es el caso más simple que nos podemos encontrar.
- Estimación de una frecuencia con armónicos: donde la señal está compuesta por la suma de la frecuencia principal y sus armónicos.
- Estimación de múltiples tonos de frecuencia (multifrecuencia): donde la señal está compuesta por la suma de varias frecuencias independientes. Este problema a su vez se puede dividir en:
 - Estimación de todos los tonos de frecuencia mediante la utilización de un estimador de un sólo tono empleado secuencialmente.

- Estimación de todos los tonos de frecuencia simultáneamente. Esta metodología posee mayor resolución de frecuencia pero en contrapunto tiene un mayor coste computacional

En este capítulo nos centraremos en el estudio de los estimadores de una sola frecuencia y en el siguiente capítulo abordaremos el análisis de varias frecuencias.

Como se ha dicho anteriormente, el problema de estimar los parámetros en una señal sinusoidal ha atraído considerable atención en la pasada década. Aunque el problema posee una solución tecnológica simple en el área de la electrónica analógica, la literatura de control de sistemas, sólo recientemente, ha proporcionado diferentes soluciones, basadas principalmente en técnicas matemáticas dominadas por el control no lineal adaptativo. Las aplicaciones de este problema son muy variadas, comprendiendo desde bio-medicina hasta sistemas de energía eléctrica, ver Ziarani [Ziarani02a], Ziarani y Konrad [Ziarani02b]-[Ziarani04], Choi y Cho [Choi02], Karimi-Ghartemani y Iravani [Karimi-Ghartemani02].

Los métodos utilizados hasta ahora para solucionar este problema abarcan una amplio rango de metodologías. Una colección de referencias sobre el tema se puede encontrar en [Stoica93] y [Kootsookos99]. Los métodos clásicos incluyen la maximización del periodograma (MP) y la regresión no lineal por mínimos cuadrados (NLS), la cual coincide con el método de máxima verosimilitud si el ruido es blanco. Ambos MP y NLS son estadísticamente eficientes para la estimación de la frecuencia en el sentido de que el error de estimación alcanza la cota de Cramér-Rao, ver [Rife74], [Kay81], [Andersson06].

La estimación espectral no paramétrica se presenta en Kay and Marple [Kay81]. El análisis de autovalores en la estimación espectral se desarrolla en [Haykin91] y en Roy y Kailath [Roy89]. Un Filtro de Kalman Extendido se utiliza para este propósito en Bittanti y Savaresi [Bittanti00].

La estimación de la potencia espectral tiene el problema de no ser suficientemente precisa para aplicaciones con variación en el tiempo. El análisis de autovalores trabaja bien en el caso de altos valores de SNR (Signal to Noise Ratio) y es adecuado para aplicaciones en comunicación. El filtro de Kalman ha presentado buenos resultados en situaciones no estacionarias. No obstante, tanto el Filtro de Kalman Extendido como el análisis de auto-

valores tienen el inconveniente de necesitar gran capacidad computacional. En los casos de MP y NLS se necesitan algoritmos iterativos de optimización para calcular las estimaciones. Además, se requiere valores iniciales bastante precisos para asegurar la convergencia. Por otro lado, algunas aplicaciones como por ejemplo la cancelación de vibraciones, necesitan eficiencia computacional y una convergencia rápida para su implantación en línea. Por este motivo a menudo se prefieren los filtros adaptativos de ranura (ANF, “*Adaptive Notch Filters*”), ver [Bittanti97].

En Hsu, Ortega y Damm [Hsu99], se propuso un estimador globalmente convergente, es decir, dicho estimador converge a la frecuencia de la onda independientemente de las condiciones iniciales, proporcionando una formalización matemática del problema. Esta línea fue extendida en el trabajo de Mojiri y Bakshai [Mojiri04] para la estimación de parámetros en señales periódicas no necesariamente sinusoidales puras. Sin embargo, estos métodos requieren varios periodos de la señal para alcanzar una estimación. Además de un diseño de parámetros a priori. La elección de estos parámetros define un compromiso sobre la capacidad de seguimiento del estimador ante cambios de frecuencia y la precisión obtenida. Clarke en [Clarke01] estudió el efecto de estos parámetros proponiendo una serie de reglas que guiaban al diseño de los mismos en función de las características particulares de cada aplicación. Ziarani en [Ziarani02a] consiguió diseñar un estimador con menor dependencia de este diseño de parámetros, además se proporcionaban estimaciones de amplitud y fase.

Este tipo de filtros adaptativos se diseñaron en el dominio de tiempo continuo. Sin embargo, también hay una gran cantidad de literatura sobre filtros adaptativos que estiman la frecuencia de una señal en el dominio de tiempo discreto. Es importante destacar los trabajos realizados por T. H. Li y sus colaboradores en [Li93]-[Li94], Xiao and Tadokoro en [Xiao95] y Cheng y Tsai en [Cheng06]. En estos trabajos se consigue disminuir los tiempos de convergencia. Desafortunadamente, los algoritmos desarrollados en el dominio de tiempo discreto exhiben bastante sensibilidad respecto la frecuencia de muestreo y las condiciones iniciales elegidas. De hecho, si la frecuencia de muestreo es muy alta comparada con la constante natural del sistema los algoritmos diseñados en tiempo discreto pueden tener problemas de convergencia, [Unbehauen98].

A pesar de la gran cantidad de técnicas empleadas para estimar la frecuencia de una onda sinusoidal, ya procedan de un dominio de frecuencia, de tiempo discreto o continuo, lo que todavía parece que no se ha encontrado es un estimador capaz de proporcionar un valor de la frecuencia en un tiempo inferior al periodo de la señal sinusoidal. Pues bien, en este capítulo se propone una solución a este problema. Se pretende afrontar la estimación de la amplitud, frecuencia y fase de una onda sin la necesidad de parámetros de diseño, sin dependencia de las condiciones iniciales y a su vez, conseguir una estimación en un tiempo menor al de un ciclo de la onda. Con la idea de hacerlo en línea se estiman todos los parámetros simultáneamente.

Esta técnica está basada en los métodos algebraicos procedentes del método derivativo algebraico introducido por Fliess et al. [Fliess03a], [Fliess03b] para la estimación de parámetros constantes y estados, [Reger05], [Sira-Ramírez04b] y [Fliess04]. En el capítulo 2 dedicado al estado del arte, se han presentado los principales conceptos en que se basa ésta identificación algebraica. La metodología que se propone utiliza el método derivativo algebraico con la incorporación de filtros lineales variantes en el tiempo en forma de Brunovsky. En el caso de que la señal posea un contenido en ruido importante se aplicarán los clásicos filtros paso-bajo. Es importante destacar que la dinámica del estimador es inestable. Dado que se realiza la estimación en una fracción del periodo de la señal, esto no supone problema alguno, como se analizará posteriormente, si se reinicializa el algoritmo. Además dicha reinicialización es aconsejable si se espera que los valores de los parámetros vayan a cambiar.

3.1. Formulación del problema

Sea una señal sinusoidal:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \tag{3.1}$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia, ϕ es la fase, siendo estos números reales positivos. El objetivo principal es estimar la amplitud A , la frecuencia ω y la fase ϕ tan rápido como sea posible.

3.2. Método algebraico

En el capítulo anterior se introdujo la base matemática de la identificación algebraica. Es posible que el lector no familiarizado con la notación haya encontrado dicha lectura no muy alentadora. Sin embargo, con el desarrollo del estimador de frecuencia que se realizará a continuación, se podrá comprobar la facilidad de diseñar un estimador algebraico basándonos en las ecuaciones diferenciales que describen los procesos.

3.2.1. Estimación de la frecuencia en línea

La ecuación diferencial que rige el comportamiento de una señal sinusoidal es:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) \quad (3.2)$$

La transformada de Laplace de (3.2) es:

$$s^2 y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + \omega^2 y(s) = 0 \quad (3.3)$$

donde s es la variable compleja, y las condiciones iniciales son $y(0), \dot{y}(0)$. Dado que nos interesa obtener una expresión para la frecuencia ω se va a derivar la ecuación (3.3) respecto la variable s obteniendo una expresión que únicamente involucre integraciones de la señal $y(t)$. Si se diferencia *dos veces* la expresión (3.3) con respecto la variable compleja s , se eliminan las condiciones iniciales $y(0)$ y $\dot{y}(0)$.

$$s^2 \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 4s \frac{dy(s)}{ds} + \left(2y(s) + \omega^2 \frac{dy^2(s)}{ds^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Multiplicando por s^{-2} se eliminan todas las derivaciones implícitas en las potencias de s ,

$$\frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 4s^{-1} \frac{dy(s)}{ds} + s^{-2} \left(2y(s) + \omega^2 \frac{dy^2(s)}{ds^2} \right) = 0 \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.5) es fácil obtener el parámetro desconocido ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{- \left[\frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 4s^{-1} \frac{dy(s)}{ds} + s^{-2} 2y(s) \right]}{s^{-2} \frac{d^2 y(s)}{ds^2}} \quad (3.6)$$

Esta ecuación está expresada en el dominio de la frecuencia. La expresión equivalente de (3.6) en el dominio del tiempo se obtiene mediante el cociente de una convolución de integrales sobre la señal $y(t)$. Se puede verificar que:

$$\omega^2 = \frac{n(t)}{d(t)} = \frac{-\left[t^2 y(t) - 4 \int_0^t \sigma y(\sigma) d\sigma + 2 \int_0^t \int_0^\sigma y(\lambda) d\lambda d\sigma\right]}{\int_0^t \int_0^\sigma \lambda^2 y(\lambda) d\lambda d\sigma} \quad (3.7)$$

Una forma de implementar (3.7) es mediante los siguientes filtros variantes en el tiempo (inestables):

$$\begin{aligned} n(t) &= -[x_1 + t^2 y(t)] & d(t) &= x_3 \\ \dot{x}_1 &= x_2 + 4ty(t) & \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= 2y(t) & \dot{x}_4 &= t^2 y(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nota 3.2.1 *Apuntar que el cociente está mal definido en el tiempo $t = 0$. No obstante, está ciertamente bien definido al final de cualquier intervalo de la forma $[0, \epsilon]$ para $\epsilon > 0$ siendo un número real suficientemente pequeño elegido sobre la base de la precisión del procesador aritmético del ordenador.*

3.2.2. Estimación en línea de la amplitud y la fase

En algunas aplicaciones resulta interesante poder estimar la amplitud y fase de la onda. Para ello se pueden utilizar las condiciones iniciales de la señal. Dado que:

$$\begin{aligned} y(0) &= A \sin(\phi) \\ \dot{y}(0) &= A\omega \cos(\phi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

se pueden obtener estimaciones de la amplitud y fase a partir de las condiciones iniciales, si conocemos la frecuencia, mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\dot{y}(0)^2}{\omega^2} + y(0)^2} \\ \phi &= \arctan\left(\omega \frac{y(0)}{\dot{y}(0)}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por tanto podemos convertir el problema de estimar la amplitud y la fase en un problema de estimar las condiciones iniciales. De nuevo se utilizarán las derivaciones algebraicas.

Si se deriva *una vez* la ecuación (3.3) es fácil despejar la condición inicial $y(0)$. De la misma ecuación es inmediato despejar $\dot{y}(0)$ obteniendo:

$$y(0) = \frac{-ty(t) + 2 \int_0^t y(\sigma) d\sigma - \omega^2 \int_0^t \int_0^\sigma \lambda y(\lambda) d\lambda d\sigma}{t} \quad (3.11)$$

$$\dot{y}(0) = \frac{y(t) - y(0) + \omega^2 \int_0^t \int_0^\sigma y(\lambda) d\lambda d\sigma}{t} \quad (3.12)$$

Mediante la ecuación (3.10) y sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones (3.11) y (3.12) se obtiene las estimaciones de la amplitud y la fase.

3.3. Estimación de parámetros de una señal ruidosa

Los apartados previos han explicado el funcionamiento del algoritmo para la estimación de los parámetros amplitud, frecuencia y fase de una señal limpia de ruido. Sin embargo, cuando nos enfrentamos a un problema real, desafortunadamente, las señales tienen diversas fuentes de ruido. Por tanto se debe completar el estudio con un apartado que refleje el efecto del ruido sobre el algoritmo estudiado. Redefinimos la señal $y(t)$ como:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) + e(t) \quad (3.13)$$

donde se ha añadido el efecto del ruido con el término $e(t)$, siendo éste el ruido estocástico de media cero y distribución completamente desconocida. Dado que las estimaciones de los parámetros consisten en un cociente de términos, es posible aplicar el mismo filtro en el numerador y el denominador de las ecuaciones (3.7), (3.11) y (3.12). En el caso de la estimación de la frecuencia sería:

$$\omega^2 = \frac{-\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \left[t^2 y(t) - 4 \int_0^t \sigma y(\sigma) d\sigma + 2 \int_0^t \int_0^\sigma y(\lambda) d\lambda d\sigma \right]}{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \int_0^t \int_0^\sigma \lambda^2 y(\lambda) d\lambda d\sigma} \quad (3.14)$$

donde se ha aplicado un filtro de Butterworth de segundo orden con frecuencia de corte ω_n y coeficiente de amortiguamiento ζ . Al ser el mismo filtro aplicado al numerador y

denominador no afecta al resultado del cociente, esta idea se ha aplicado en [Feliu93]. La ecuación (3.14) se expresa en forma de filtros de Brunowsky del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 n(t) &= -[x_1 + t^2 y(t)] & d(t) &= x_3 \\
 \dot{x}_1 &= x_2 + 4ty(t) & \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_2 &= 2y(t) & \dot{x}_4 &= t^2 y(t) \\
 \dot{x}_5 &= x_6 & \dot{x}_7 &= x_8 \\
 \dot{x}_6 &= -2\zeta\omega_n x_6 - \omega_n^2(x_5 - n(t)) & \dot{x}_8 &= -2\zeta\omega_n x_8 - \omega_n^2(x_7 - d(t))
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Finalmente la estimación de ω^2 se obtiene según:

$$\omega^2 = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [0, \epsilon] \\ \frac{n_f(t)}{d_f(t)} = \frac{x_5}{x_7} & t \in (\epsilon, +\infty) \end{cases} \tag{3.16}$$

Nota 3.3.1 *El filtro invariante de paso fijo introducido arriba requiere un conocimiento a priori del ancho de banda del sistema. Si no se dispone de tal conocimiento es posible utilizar integraciones puras de la forma $1/s^p$, $p \geq 1$. Esta elección ha sido determinada bajo la hipótesis de ruidos de alta frecuencia en $e(t)$. Esta hipótesis está motivada y justificada por los desarrollos recientes dirigidos hacia una nueva teoría sobre el comportamiento del ruido. Los detalles se pueden encontrar en [Fliess06a].*

3.4. Simulaciones

Para mostrar el funcionamiento del algoritmo previamente discutido se han realizado una serie de simulaciones mediante MATLAB/SIMULINK. Supongamos que se desea obtener la amplitud, frecuencia y fase de la siguiente señal:

$$y(t) = 1 \sin(10t + 1) + e(t)$$

donde $e(t)$ es un proceso estocástico de media cero, generado por la instrucción *rand* en MATLAB. Esta señal estocástica está distribuida uniformemente en el intervalo $[-0.01, 0.01]$.

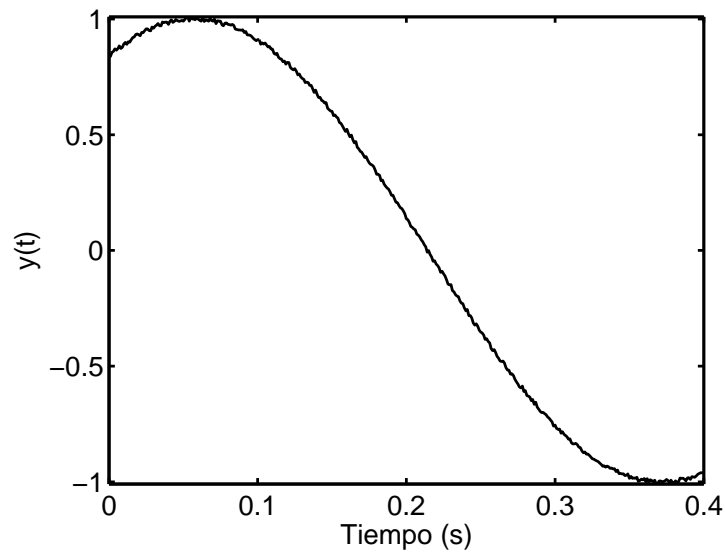


Figura 3.1: Señal sinusoidal con ruido

Las estimaciones han sido filtradas a través de un filtro Butterworth de paso bajo con las siguientes características: $\omega_n = 15$ (rad/s) and $\zeta = 0.707$, ver (3.14), donde ω_n es la frecuencia de corte y $\zeta = 0.707$ tiene este valor para que la respuesta en frecuencia del filtro sea plana (con las mínimas oscilaciones en la banda pasante).

La Figura 3.1 muestra la señal $y(t)$. La Figura 3.2 muestra la estimación de la frecuencia ω para la señal sinusoidal usando el método algebraico. La estimación de la frecuencia se consigue en 0.1 (s) mientras que el periodo T de la señal es $T \approx 0.63$ (s).

3.5. Estimador de una frecuencia procedente de una señal sesgada

En numerosas ocasiones las señales reales están alteradas por una perturbación constante o sesgo. Un ejemplo lo podemos encontrar en aquellas aplicaciones donde se trabaje con galgas extensométricas. En principio puede parecer que no es necesario modificar el algoritmo para este tipo de señales. Sin embargo, no incluir esta perturbación constante en el modelo puede provocar discrepancias entre el valor estimado y el real. Para solucionar

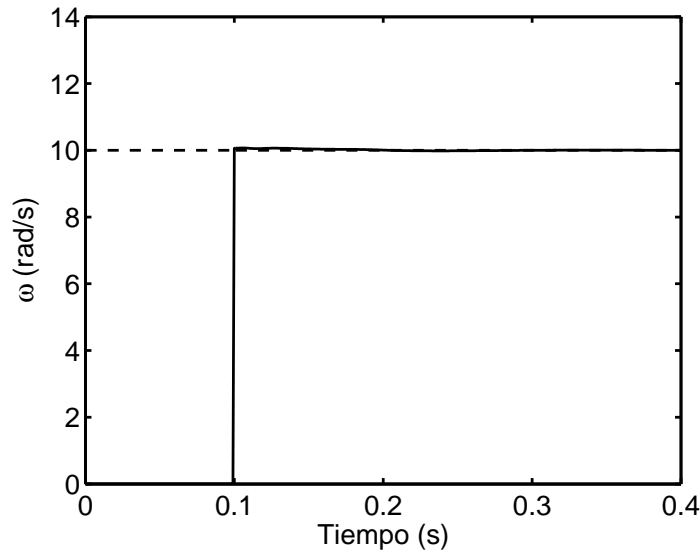


Figura 3.2: Frecuencia estimada

este problema vamos a incluir la perturbación constante en el modelo. De manera que la señal $y(t)$ queda:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) + K + e(t) \quad (3.17)$$

donde K es una constante de valor desconocido. Análogamente se desea calcular los valores desconocidos de amplitud A , frecuencia ω y fase ϕ de la señal $y(t)$.

En primer lugar, se define la señal libre de ruido estocástico $x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + K$, tal que $y(t) = x(t) + e(t)$. La transformada de Laplace de esta señal está dada por:

$$x(s) = \frac{A\omega \cos \phi}{s^2 + \omega^2} + \frac{sA \sin \phi}{s^2 + \omega^2} + \frac{K}{s} \quad (3.18)$$

Se supone que ϕ es estrictamente positivo y menor que 2π . Las manipulaciones algebraicas descritas en las siguientes secciones están dirigidas a eliminar el sesgo K y obtener expresiones para los parámetros desconocidos, involucrando solamente integraciones o convoluciones de integrales de la señal $y(t)$. Sea el vector de componentes: $p_3 = A\omega \cos \phi$, $p_2 = A \sin \phi$ y $p_1 = \omega^2$. Claramente el conocimiento del vector de parámetros constantes $p = (p_1, p_2, p_3)$

permite calcular unívocamente A , ϕ y ω a partir de las expresiones:

$$\omega = +\sqrt{p_1}, \quad A = \sqrt{\frac{p_3^2}{p_1} + p_2^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{p_2\sqrt{p_1}}{p_3}\right)$$

3.5.1. Estimación de la frecuencia en línea

Si se expresa la ecuación (3.18) en función de p resulta:

$$x(s) = \frac{p_3}{s^2 + p_1} + \frac{sp_2}{s^2 + p_1} + \frac{K}{s} \quad (3.19)$$

Multiplicando dicha expresión por el polinomio $s(s^2 + p_1)$ se obtiene, después de reajustar,

$$s^3x(s) + p_1sx(s) = (p_2 + K)s^2 + p_3s + Kp_1 \quad (3.20)$$

Diferenciando *tres veces* la expresión (3.20) con respecto a la variable compleja s , se eliminan la constante K y los términos p_3s y p_2s^2 , resultando como único término desconocido el parámetro p_1 :

$$s^3 \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9s^2 \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18s \frac{dx(s)}{ds} + 6x(s) + p_1 \left[s \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 3 \frac{d^2x(s)}{ds^2} \right] = 0$$

Multiplicando por s^{-3} se eliminan, en el dominio del tiempo, todas las derivaciones representadas por las potencias positivas de s ,

$$\begin{aligned} \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9s^{-1} \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18s^{-2} \frac{dx(s)}{ds} + 6s^{-3}x(s) \\ + p_1 \left[s^{-2} \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 3s^{-3} \frac{d^2x(s)}{ds^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

y despejando se obtiene la siguiente expresión del parámetro desconocido p_1 :

$$p_1 = - \left[\frac{\frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9s^{-1} \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18s^{-2} \frac{dx(s)}{ds} + 6s^{-3}x(s)}{s^{-2} \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 3s^{-3} \frac{d^2x(s)}{ds^2}} \right] \quad (3.22)$$

En el dominio del tiempo, encontramos que p_1 se obtiene en términos de un cociente de una combinación lineal de integrales sobre la señal $x(t)$, obteniéndose:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{n_{1x}(t)}{d_{1x}(t)} \\ n_{1x}(t) &= \left[t^3x(t) - 9 \int_0^t \sigma^2x(\sigma)d\sigma + 18 \int_0^t \int_0^\sigma \lambda x(\lambda)d\lambda d\sigma - 6 \int_0^t \int_0^\sigma \int_0^\lambda x(\rho)d\rho d\lambda d\sigma \right] \\ d_{1x}(t) &= - \int_0^t \int_0^\sigma \lambda^3x(\lambda)d\lambda d\sigma + 3 \int_0^t \int_0^\sigma \int_0^\lambda \rho^2x(\rho)d\rho d\lambda d\sigma \end{aligned} \quad (3.23)$$

Debido a que la señal $x(t)$ no es cuantificable y sólo se dispone de la señal ruidosa $y(t)$, hay que sustituir $x(t)$ por $y(t)$ en (3.23) para estimar p_1 . Posteriormente es posible filtrar la señal del numerador y denominador mediante un filtro paso bajo. Observando la formula en el dominio de la frecuencia (3.22) para p_1 resulta claro que usando el mismo filtro paso bajo para el numerador y el denominador el cociente no se ve afectado. Con el fin de enfatizar esta invarianza, se usa una combinación de notaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia, de modo que:

$$\hat{p}_1 = \frac{F(s)n_1(t)}{F(s)d_1(t)}$$

donde¹:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \\ n_1(t) &= t^3 y(t) - 9 \left(\int t^2 y(t) \right) + 18 \left(\int^{(2)} t y(t) \right) - 6 \left(\int^{(3)} y(t) \right) \\ d_1(t) &= - \int^{(2)} t^3 y(t) + 3 \left(\int^{(3)} t^2 y(t) \right) \end{aligned}$$

Conviene mencionar que se han utilizado idénticos filtros paso bajo con frecuencia de corte ω_n , y coeficiente de amortiguamiento ζ que en la sección 3.3. La implementación de esta fórmula en el dominio del tiempo se realiza de nuevo mediante filtros variantes (inestables) en el tiempo:

$$\begin{aligned} n_1(t) &= z_1 + t^3 y(t) & d_1(t) &= z_4 \\ \dot{z}_1 &= z_2 - 9t^2 y(t) & \dot{z}_4 &= z_5 \\ \dot{z}_2 &= z_3 + 18t y(t) & \dot{z}_5 &= z_6 - t^3 y(t) \\ \dot{z}_3 &= -6y(t) & \dot{z}_6 &= 3t^2 y(t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

El numerador y denominador filtrado, definidos como $n_{1f}(t)$ y $d_{1f}(t)$ son las soluciones de la ecuaciones diferenciales alimentadas con las señales del numerador y denominador. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \ddot{n}_{1f} &= -2\zeta\omega_n \dot{n}_{1f} - \omega_n^2 (n_{1f} - n_1(t)) \\ \ddot{d}_{1f} &= -2\zeta\omega_n \dot{d}_{1f} - \omega_n^2 (d_{1f} - d_1(t)) \end{aligned} \tag{3.25}$$

¹Definimos $\left(\int^{(j)} \phi(t) \right)$ como el conjunto de integrales $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{j-1}} \phi(\sigma_j) d\sigma_j \dots d\sigma_1$

Finalmente, la estimación del parámetro $p_1 = \omega^2$ se consigue según:

$$\hat{p}_1 = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [0, \epsilon] \\ \frac{n_{1f}(t)}{d_{1f}(t)} & t \in (\epsilon, +\infty) \end{cases} \quad (3.26)$$

3.5.2. Estimación en línea de la amplitud y la fase

Una vez que se ha calculado p_1 , es posible abordar el problema de estimar la amplitud y fase de la señal perturbada asumiendo que p_1 es conocido. Considérese de nuevo la transformada de Laplace de la señal $x(t)$ en (3.19). Multiplicando por s y diferenciando con respecto a s se obtiene:

$$x(s) + s \frac{dx(s)}{ds} = p_3 \left[\frac{1}{s^2 + p_1} - \frac{2s^2}{(s^2 + p_1)^2} \right] + p_2 \left[\frac{2s}{s^2 + p_1} - \frac{2s^3}{(s^2 + p_1)^2} \right]$$

Multiplicando la expresión por $(s^2 + p_1)^2$ y simplificando, se consigue:

$$(s^2 + p_1)^2 \left[x(s) + s \frac{dx(s)}{ds} \right] = -p_3 s^2 + 2s p_1 p_2 + p_1 p_3 \quad (3.27)$$

Diferenciando ahora dos veces con respecto a s se elimina el término $p_1 p_3$, y el término $2s p_1 p_2$. Por tanto se proporciona la siguiente fórmula, en el dominio de la frecuencia, para p_3 :

$$p_3 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s^2 + p_1)^2 \left[x(s) + s \frac{dx(s)}{ds} \right] \right\}$$

Entonces:

$$p_3 = -\frac{1}{2} \left[s^5 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 11s^4 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + s^3 \left(28 \frac{dx(s)}{ds} + 2p_1 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) + s^2 \left(12x(s) + 14p_1 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right) + s \left(20p_1 \frac{dx(s)}{ds} + p_1^2 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) + 4p_1 x(s) + 3p_1^2 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right] \quad (3.28)$$

Integrando cinco veces, es decir, multiplicando la expresión anterior por s^{-5} se llega a:

$$s^{-5} p_3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 11s^{-1} \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + s^{-2} \left(28 \frac{dx(s)}{ds} + 2p_1 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) + s^{-3} \left(12x(s) + 14p_1 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right) + s^{-4} \left(20p_1 \frac{dx(s)}{ds} + p_1^2 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} \right) + s^{-5} \left(4p_1 x(s) + 3p_1^2 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \right) \right] \quad (3.29)$$

El parámetro p_3 se calcula mediante la siguiente expresión:

$$p_3 = -\frac{12}{t^4} \left[-t^3 x(t) + 11 \left(\int t^2 x(t) \right) - 28 \left(\int^{(2)} t x(t) \right) + 12 \left(\int^{(3)} x(t) \right) + \right. \\ \left. p_1 \left(-2 \int^{(2)} t^3 x(t) + 14 \left(\int^{(3)} t^2 x(t) \right) - 20 \left(\int^{(4)} t x(t) \right) + 4 \left(\int^{(5)} x(t) \right) \right) \right. \\ \left. + p_1^2 \left(- \int^{(4)} t^3 x(t) + 3 \left(\int^{(5)} t^2 x(t) \right) \right) \right] \quad (3.30)$$

Dicha expresión puede implementarse mediante el cociente de las salidas de los siguientes filtros (inestables) invariantes en el tiempo en forma de Brunovski. De la misma manera, la señal ideal $x(t)$ es sustituida por la señal real $y(t)$. Por tanto, el parámetro p_3 se puede estimar mediante el siguiente cociente:

$$\frac{n_3(t)}{d_3(t)} \\ n_3(t) = [p_{31} + \hat{p}_1 p_{32} + \hat{p}_1^2 p_{33}] \quad d_3(t) = -\frac{t^4}{12} \\ \begin{array}{lll} p_{31} = z_1 - t^3 y(t) & p_{32} = z_4 & p_{33} = z_9 \\ \dot{z}_1 = z_2 + 11t^2 y(t) & \dot{z}_4 = z_5 & \dot{z}_9 = z_{10} \\ \dot{z}_2 = z_3 - 28ty(t) & \dot{z}_5 = z_6 - 2t^3 y(t) & \dot{z}_{10} = z_{11} \\ \dot{z}_3 = 12y(t) & \dot{z}_6 = z_7 + 14t^2 y(t) & \dot{z}_{11} = z_{12} \\ & \dot{z}_7 = z_8 - 20ty(t) & \dot{z}_{12} = z_{13} - t^3 y(t) \\ & \dot{z}_8 = 4y(t) & \dot{z}_{13} = 3t^2 y(t) \end{array} \quad (3.31)$$

Como en el caso de la estimación del parámetro p_1 , se pueden filtrar independientemente el numerador $n_3(t)$ y el denominador $d_3(t)$ en la expresión anterior (3.31), obteniéndose la siguiente estimación para el parámetro \hat{p}_3

$$\hat{p}_3 = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [0, \epsilon] \\ \frac{n_{3f}(t)}{d_{3f}(t)} & t \in (\epsilon, +\infty) \end{cases} \quad (3.32)$$

con

$$\begin{aligned} \ddot{n}_{3f} &= -2\zeta\omega_n \dot{n}_{3f} - \omega_n^2 (n_{3f} - n_3(t)) \\ \ddot{d}_{3f} &= -2\zeta\omega_n \dot{d}_{3f} - \omega_n^2 (d_{3f} - d_3(t)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

El parámetro desconocido p_2 se obtiene integrando *cinco veces* la expresión (3.27).

Se puede verificar que:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{n_{2x}(s)}{d_{2x}(s)} \\ n_{2x}(s) &= \frac{dx(s)}{ds} + s^{-1}x(s) + 2p_1s^{-2}\frac{dx(s)}{ds} + (2p_1)s^{-3}x(s) \\ &\quad + p_1^2s^{-4}\frac{dx(s)}{ds} + (p_1^2)s^{-5}x(s) + p_3s^{-3} - p_1p_3s^{-5} \\ d_{2x}(s) &= 2s^{-4}p_1 \end{aligned}$$

El parámetro p_2 se puede estimar de acuerdo con:

$$p_2 = \frac{3}{t^3 p_1} \left[-tx(t) + \int x(t) + 2p_1 \left(-\int^{(2)} tx(t) + \int^{(3)} x(t) \right) + \right. \\ \left. p_1^2 \left(-\int^{(4)} tx(t) + \int^{(5)} x(t) \right) - p_1 p_3 \frac{t^4}{24} + p_3 \frac{t^2}{2} \right] \quad (3.34)$$

Sustituyendo $x(t)$ por $y(t)$ es posible calcular simultáneamente el numerador y el denominador via el siguiente cociente:

$$\begin{aligned} \frac{n_2(t)}{d_2(t)} \\ n_2(t) &= \left[p_{21} + 2\hat{p}_1 p_{22} + \hat{p}_1^2 p_{23} - \hat{p}_1 \hat{p}_3 \frac{t^4}{24} + \hat{p}_3 \frac{t^2}{2} \right] \\ d_2(t) &= -\frac{t^3 \hat{p}_1}{3} \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde p_{21}, p_{22} y p_{23} son las ecuaciones de salida del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} p_{21} &= z_1 - ty(t) & p_{22} &= z_2 & p_{23} &= z_5 \\ \dot{z}_1 &= y(t) & \dot{z}_2 &= z_3 & \dot{z}_5 &= z_6 \\ & & \dot{z}_3 &= z_4 - ty(t) & \dot{z}_6 &= z_7 \\ & & \dot{z}_4 &= y(t) & \dot{z}_7 &= z_8 \\ & & & & \dot{z}_8 &= z_9 - ty(t) \\ & & & & \dot{z}_9 &= y(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Con el fin de estimar el parámetro p_2 , se propone la siguiente fórmula en el dominio del tiempo:

$$\hat{p}_2 = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [0, \epsilon] \\ \frac{n_{2f}(t)}{d_{2f}(t)} & t \in (\epsilon, +\infty) \end{cases}$$

donde $n_{2f}(t)$ y $d_{2f}(t)$ son las soluciones de los sistemas de segundo orden excitados, respectivamente, por $n_2(t)$ y $d_2(t)$. En otras palabras: $\ddot{n}_{2f}(t) = -2\zeta\omega_n\dot{n}_{2f} - \omega_n^2(n_{2f} - n_2(t))$ y $\ddot{d}_{2f}(t) = -2\zeta\omega_n\dot{d}_{2f} - \omega_n^2(d_{2f} - d_2(t))$

3.5.3. Simulaciones

Con el fin de verificar las expresiones obtenidas se han realizado una serie de simulaciones numéricas con MATLAB/SIMULINK para la estimación de la amplitud, fase y frecuencia de una señal sinusoidal sesgada y con ruido estocástico

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) + K + e(t)$$

donde $A = 20$, $\omega = 5$ (rad/s), $\phi = 1$ [rad], $K = 10$ y $e(t)$ es un proceso estocástico de media cero, generado por el comando *rand* de MATLAB. Esta señal estocástica está construida mediante una secuencia de variables aleatorias distribuidas uniformemente en el intervalo $[-0.1, 0.1]$. Las estimaciones han sido filtradas via un filtro paso bajo con las siguientes características: $\omega_n = 15$ (rad/s) and $\zeta = 0.707$

La Figura 3.3 representa la señal $y(t)$ (gráfico superior) y la estimación de la frecuencia (gráfico inferior). Se puede observar la calidad, rapidez y precisión en la estimación de la frecuencia usando el algoritmo mostrado en las ecuaciones (3.24)-(3.26). El tiempo necesario para calcular la frecuencia es 4×10^{-1} (s) mientras que el periodo T de la señal es $T \approx 1.26$ (s). La Figura 3.4 muestra la estimación de la amplitud y fase utilizando el algoritmo desarrollado.

3.5.4. Resultados experimentales

Con el fin de evaluar el funcionamiento del algoritmo propuesto se ha diseñado un experimento simple pero significativo. Éste consiste en estimar la frecuencia de la señal

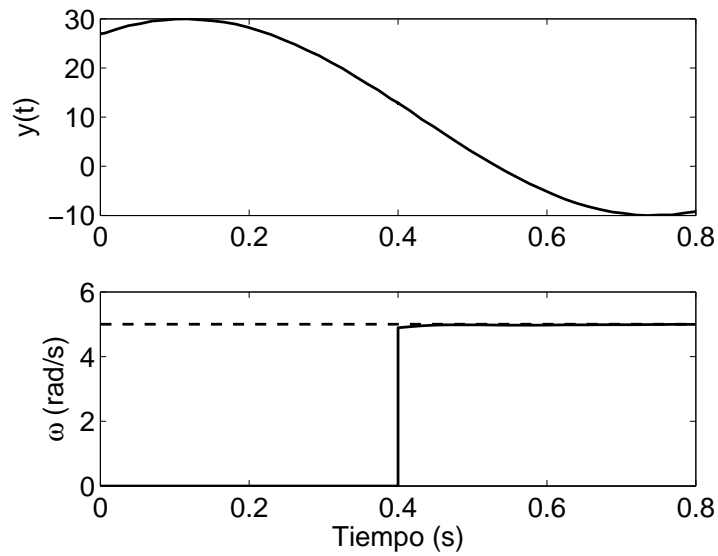


Figura 3.3: (Arriba) Señal sinusoidal sesgada utilizada en la simulación. (Abajo) Estimación de la frecuencia

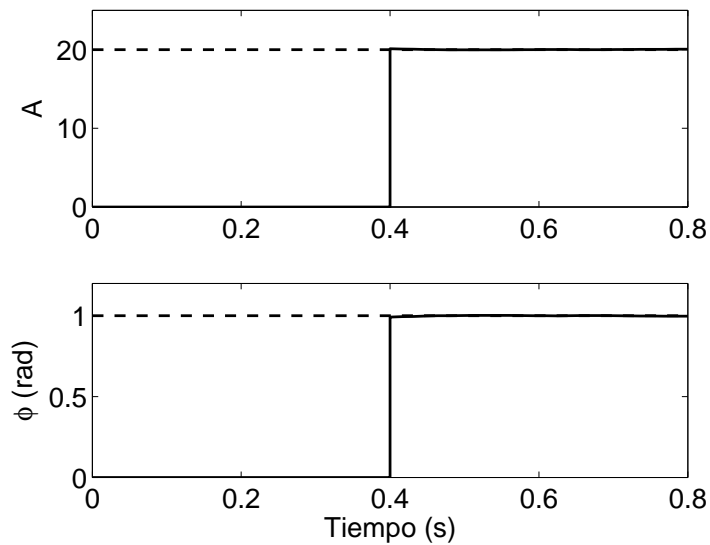


Figura 3.4: Estimación de la amplitud (arriba) y fase (abajo) de la señal sinusoidal simulada

producida por un generador de señales sinusoidales conectado a una tarjeta de adquisición de datos. La Figura 3.5 representa dos ciclos de la onda experimental utilizada como entrada al algoritmo de estimación. En la onda sinusoidal se puede observar la existencia de una

perturbación sinusoidal añadida cuya frecuencia es de 50 (Hz) aproximadamente (ruido de la red). En la Figura 3.6 se muestra la frecuencia, amplitud y fase estimada para la señal experimental. Las estimaciones se han alcanzado alrededor de 5×10^{-2} segundos mientras que el periodo de la onda está cerca de 0.28 seconds $\approx 2\pi$ (rad/s). En estas estimaciones se ha utilizado un filtro de segundo orden con $w_n = 40$ (rad/s) y $\zeta = 0.707$. La robustez de las estimaciones con respecto al ruido real periódico y el ruido medido desconocido es bastante alta.

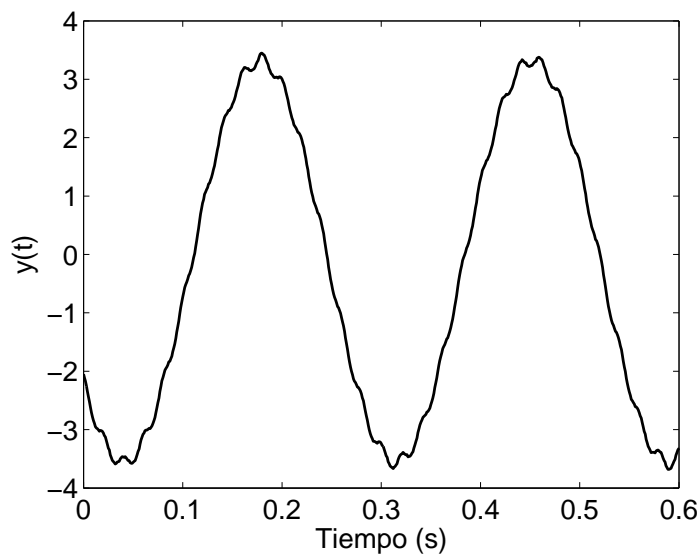


Figura 3.5: Señal obtenida del generador de ondas

3.6. Comparación con otros métodos propuestos recientemente

Como se expuso en la introducción, hay numerosos estudios que abordan la estimación de frecuencia de una onda sinusoidal. Sin embargo, sólo recientemente se han propuesto métodos que sean capaces de estimar la frecuencia en línea y en tiempo continuo. En este apartado se comparan los resultados obtenidos con el método algebraico con otras técnicas novedosas que también son bastante prometedoras.

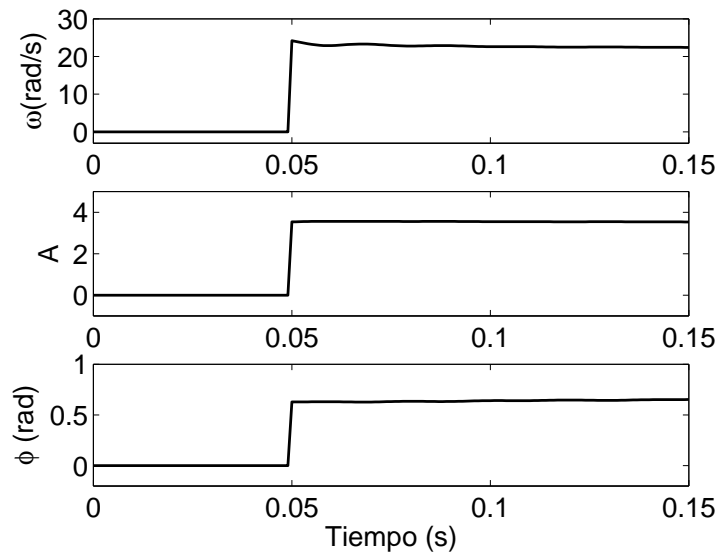


Figura 3.6: Estimaciones de frecuencia, amplitud y fase

3.6.1. Estimador adaptativo no lineal

Con el fin de ilustrar el método algebraico propuesto, se va a comparar su funcionamiento con otro algoritmo recientemente publicado. Ziarani y Konrad en [Ziarani04] presentan una novedosa técnica dedicada a la estimación de parámetros sinusoidales, dicha técnica exhibe un alto nivel de inmunidad al ruido y robustez. En la misma referencia se demostró ser superior a otros estimadores de frecuencia recientes, como los desarrollados por Hsu *et al.* [Hsu99], y La Scala y Bitmead [Scala97]. Además, Ziarani y Konrad han aplicado su método al problema de eliminar la interferencia en líneas de potencia (ver [Ziarani02b]). Hay que destacar que, a pesar del gran número de aplicaciones potenciales que poseen los estimadores de frecuencia, no hay muchos artículos en la literatura que apliquen estos métodos a señales reales. A continuación se presenta una pequeña introducción sobre el método de Ziarani y Konrad.

Teniendo en cuenta la señal sinusoidal descrita en (3.1), considérese el siguiente

conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dA(t)}{dt} &= 2\mu_1 e(t) \sin(\gamma(t)) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= 2\mu_2 e(t) A(t) \cos(\gamma(t)) \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= \omega(t) + \mu_3 \frac{d\omega(t)}{dt}\end{aligned}\quad (3.37)$$

donde:

$$\begin{aligned}e(t) &= y(t) - A(t) \sin(\gamma(t)) \\ \gamma(t) &= \omega t + \phi\end{aligned}\quad (3.38)$$

y μ_1, μ_2, μ_3 son parámetros de diseño que tienen que ser ajustados². Además, se requiere una estimación de la frecuencia inicial ω_0 .

La señal utilizada para comparar el funcionamiento del algoritmo de Ziarani y Konrad es la mostrada en la Figura 3.1. Los valores elegidos como parámetros de diseño son $\mu_1 = 10, \mu_2 = 1000, \mu_3 = 0.1$ y $\omega_0 = 1$ (rad/s). Los resultados obtenidos por el algoritmo de estimación adaptativo no lineal se muestran en la Figura 3.7. La figura ilustra el funcionamiento de esta técnica, la cual no converge al verdadero valor debido a la presencia de una perturbación constante. Además, la estimación de la amplitud está sesgada por un valor igual al de la perturbación constante de la señal original. En cambio, hay que recordar que las estimaciones de frecuencia y amplitud alcanzadas por el método algebraico convergen en 0.4 segundos con bastante precisión.

3.6.2. Un estimador globalmente convergente

Después del desarrollo del estimador de frecuencia globalmente convergente, propuesto por Hsu *et al.* en [Hsu99], se han presentado otros filtros adaptativos de ranura (ANF). Mojiri y Bakhshai en [Mojiri04] generalizaron el estimador para el caso general de señales periódicas, además de sinusoidales puras. Sin embargo, ninguno de estos métodos puede, simultáneamente, estimar la frecuencia y la amplitud de la señal. Este problema fue posteriormente resuelto por Hou en [Hou05], donde se desarrolló un estimador de frecuencia

²Al igual que en otros métodos de estimación de frecuencia, el *ajuste* de parámetros de diseño define un compromiso entre capacidad de seguimiento y precisión en las estimaciones.

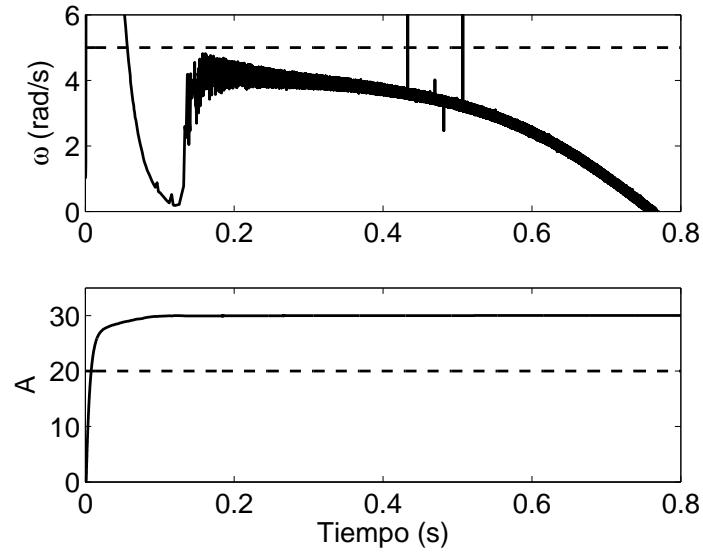


Figura 3.7: Estimador de frecuencia adaptativo no lineal (-), valores teóricos (-) .

y amplitud dinámica, con convergencia global y robusto a un término de sesgo. Por este motivo es posible comparar el método algebraico propuesto con el estimador globalmente convergente de [Hou05]. El algoritmo está descrito por el siguiente sistema de séptimo orden:

$$\dot{\eta}_1 = -\lambda\eta_1 + 3\lambda y(t) \quad (3.39)$$

$$\dot{\eta}_2 = -\lambda\eta_2 - 2\lambda y(t)^2 \quad (3.40)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + \eta'_1 \hat{\theta} + (1 + \alpha\lambda)(\lambda y(t)^2/2 - \hat{z}_1) \quad (3.41)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = \lambda\eta'_2 \hat{\theta} + \alpha(\lambda y(t)^2/2 - \hat{z}_1) \quad (3.42)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\eta(\lambda y(t)^2/2 - \hat{z}_1) \quad (3.43)$$

donde los escalares α, λ y los componentes de la matriz diagonal $\Gamma = \text{diag}(\gamma_0 \ \gamma_1 \ \gamma_2)$ son números reales positivos. Estos números influyen sobre el comportamiento del estimador respecto a características de seguimiento y precisión. Los estados de los observadores adaptativos, en (3.39)-(3.40), forman un vector definido por $\eta = [1 \ \eta_1 \ \eta_2]'$. Se puede demostrar que (ver [Hou05]) la matriz $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_0 \ \hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]$ converge a $\theta = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2]$. Esta última matriz viene dada por:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= (A^2 - K^2)\omega^2 \\
\theta_1 &= K\omega^2 \\
\theta_2 &= \omega^2
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Los parámetros de frecuencia y amplitud se pueden obtener fácilmente de las ecuaciones (3.44). Algunos autores encuentran dificultades a la hora de elegir un conjunto óptimo de parámetros α, λ y $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, ya que no se especifica ninguna regla para ayudar en dicha elección. Por tanto con la idea de establecer una comparación justa, se va a utilizar el mismo ejemplo tratado en el artículo [Hou05]. En este caso, la señal simulada está dada por $y(t) = 0.5 + 2.5 \sin(2t)$ y los parámetros de diseño elegidos son $\alpha = 10, \lambda = 20$ y $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 50$.

La Figura 3.8 ilustra la evolución de la estimación del parámetro de frecuencia correspondiente al método analizado en (3.39)-(3.43). En este caso, la estimación de parámetros se consigue en, aproximadamente, 25 segundos mientras que el método derivativo algebraico alcanza una precisa estimación de la frecuencia y amplitud en 0.4 segundos como se muestra en la Figura 3.9.

El algoritmo algebraico presentado en esta sección es capaz de proporcionar estimaciones bastante rápidas y precisas, a pesar de las perturbaciones constantes y el ruido. En cambio, esto no ocurre en el caso de otros estimadores que no alcanzan la convergencia o lo hacen muy lento. Además, dichos estimadores requieren un ajuste de parámetros *a priori*. Debido a la no linealidad de los algoritmos, encontrar un conjunto óptimo de dichos parámetros no resulta trivial. Entretanto, el método de estimación algebraico propuesto no necesita ningún tipo de diseño de parámetros además de ser completamente independiente de las condiciones iniciales.

3.7. Robustez del estimador algebraico

Con el fin de estudiar la robustez de este estimador se realizarán diferentes simulaciones variando las condiciones de funcionamiento del algoritmo. En primer lugar se

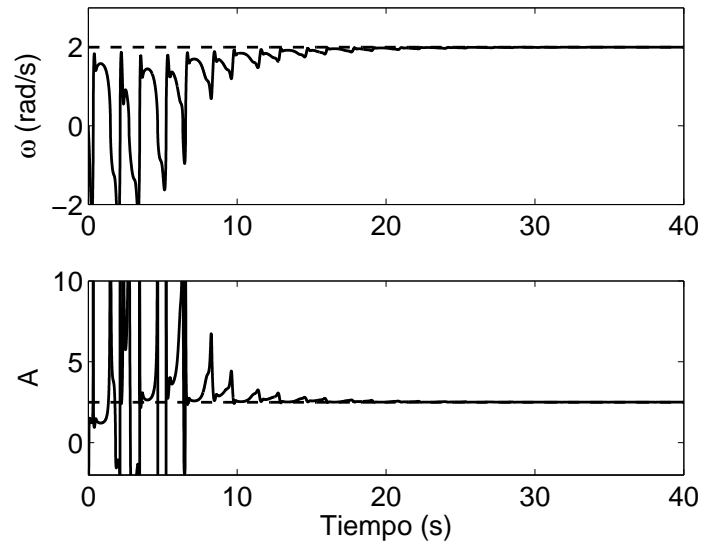


Figura 3.8: Estimador de frecuencia globalmente convergente

analizará el efecto del tiempo de muestreo. En segundo lugar se estudiará el efecto del ruido sobre el estimador calculando un rango de funcionamiento. Posteriormente se intentará calcular la separación mínima necesaria por el algoritmo para poder estimar una frecuencia contaminada por otra señal sinusoidal de diferente frecuencia.

Para llevar a cabo estas simulaciones se procede a normalizar la señal sinusoidal con el propósito de poder extrapolar los resultados. Considerando de nuevo la señal $y(t) = A \sin(2\pi ft)$ con amplitud A y frecuencia $\omega = 2\pi f$ definimos la señal normalizada tal que:

$$\hat{y} = \frac{y}{A} \quad (3.45)$$

$$\hat{t} = ft \quad (3.46)$$

Siendo $\hat{y}(t) = \sin(2\pi\hat{t})$ la señal normalizada con amplitud y frecuencia unidad. De manera que la señal tiene un periodo $T = 1$ (s), por tanto un ciclo corresponde a un segundo.

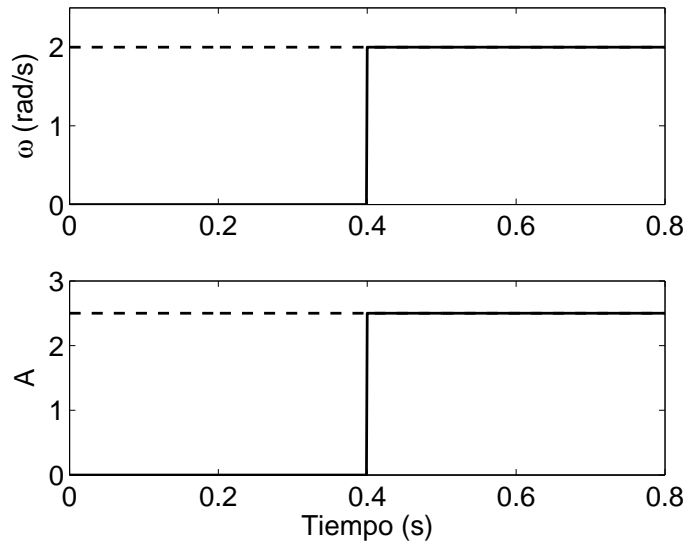


Figura 3.9: Estimaciones del método algebraico para la señal $y(t) = 0.5 + 2.5 \sin(2t)$

3.7.1. Efecto del tiempo de muestreo

El tiempo de muestreo es una variable de diseño que afecta directamente al funcionamiento del algoritmo. Estimadores diseñados en un dominio de tiempo discreto pueden ser bastante sensibles al periodo de muestreo (T_s). De hecho, Rife y Boorstyn en [Rife74] obtuvieron las cotas de Cramer-Rao para la estimación de parámetros sinusoidales. En concreto, si la fase y la amplitud son conocidos la varianza de la estimación de frecuencia está acotada por:

$$\text{Var}(\hat{\omega}) \geq \frac{12}{SNR^2 T_s^2 N(N^2 - 1)} \quad (3.47)$$

donde $\hat{\omega}$ es el estimador de frecuencia, SNR es la relación Señal Ruido (Signal to Noise Ratio) y N es el tamaño de la muestra. De la ecuación (3.47) se puede observar un problema típico relacionado con los métodos desarrollados en tiempo discreto: si se reduce el tiempo de muestreo la cota de la varianza del estimador aumentará de forma cuadrática.

Este fenómeno no se encuentra en armonía con el espíritu de los métodos desarrollados en tiempo continuo, (ver el resumen de Unbehauen en [Unbehauen98] para un mayor entendimiento acerca de las ventajas de los métodos en tiempo continuo) donde tiempos de muestreo más pequeños proporcionan mejores resultados.

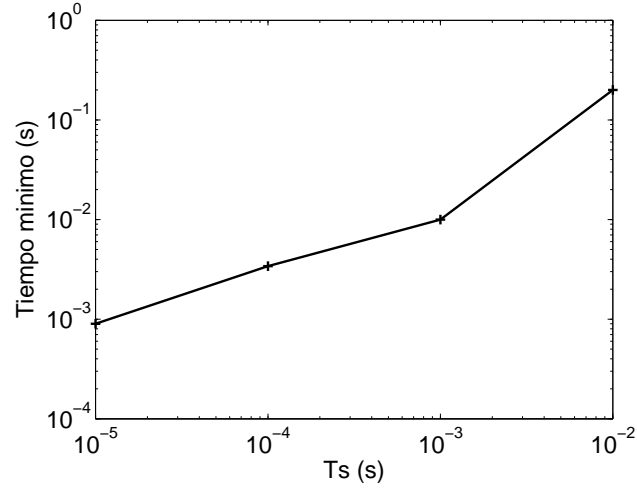


Figura 3.10: Tiempo mínimo de estimación vs. Tiempo de muestreo

El estimador algebraico propuesto se ha desarrollado en el dominio del tiempo continuo por lo tanto, se espera obtener mejores estimaciones cuanto menor sea el tiempo de muestreo utilizado. Sin embargo, el número de operaciones también aumenta con lo que el programa se hace más lento. De ahí el interés en analizar el tiempo de muestreo en una señal normalizada. Esto dará pie a una elección adecuada del tiempo de muestreo en función de nuestra aplicación. Con el fin de comprobar la relación entre el tiempo de muestreo y el tiempo mínimo de estimación se han realizado simulaciones variando el tiempo de muestreo y utilizando como criterio:

$$t_{min} = \frac{|\omega_i - 1|}{1} < tol, i = 1, 2, \dots, T_s \cdot N \quad (3.48)$$

donde tol es la banda donde se establecen las estimaciones, N es el tamaño de la muestra de forma que $N \cdot T_s = 1$. En la Figura 3.10 se puede observar la relación entre el tiempo mínimo de estimación y el tiempo de muestreo, donde ambos ejes están en escala logarítmica. En los siguientes apartados se usará un tiempo de muestreo $T_s = 0.001$ (s) y se calculará el tiempo mínimo de estimación con $tol = 0.05$ para estudiar el resto de variables de diseño.

3.7.2. Efecto de la relación señal-ruido

Dado que las señales reales son ruidosas es importante analizar como afecta este ruido a las estimaciones. Para realizar esto se han diseñado un conjunto de simulaciones donde se varía la cantidad de ruido de la señal. Definamos la señal de simulación $y(t)$ tal que:

$$\hat{y}(t) = \sin(2\pi t) + \nu(t) \quad (3.49)$$

donde $\nu(t)$ es ruido blanco con media cero y definido por la siguiente función de autocorrelación:

$$E[\nu(t)\nu^*(t - \tau)] = \begin{cases} \sigma_\nu^2, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

La cantidad de ruido en la señal, la medimos con la relación señal ruido SNR , la cual se puede escribir de la siguiente forma:

$$SNR = \frac{|A^2|}{|\sigma_\nu^2|} \quad (3.51)$$

La Figura 3.11 muestra en línea continua el efecto de aumentar el ratio SNR sobre el tiempo de convergencia sin utilizar filtros paso-bajo. Se puede observar que hay un valor umbral sobre 40 (dB).³ En línea discontinua se muestran los resultados después de haber filtrado tanto el numerador como el denominador del estimador algebraico mediante un filtro invariante paso-bajo:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.52)$$

con $\omega_n = 2\pi 10$ (rad/s) y $\zeta = 0.707$. Se puede deducir de la Figura 3.11 que la adición de dichos filtros al estimador mejora su robustez, consiguiendo menores tiempos de convergencia, y reduciendo el valor umbral a 20 (dB).

Con el fin de analizar el sesgo y la varianza de las estimaciones, se realizará una simulación de Montecarlo con diferentes valores de SNR . La estimación de la frecuencia

³Las unidades del ratio SNR están en decibelios, es decir: $SNR = 10 \log_{10} \frac{|A^2|}{|\sigma_\nu^2|}$ donde $A = 1$ es la amplitud de la señal sinusoidal normalizada

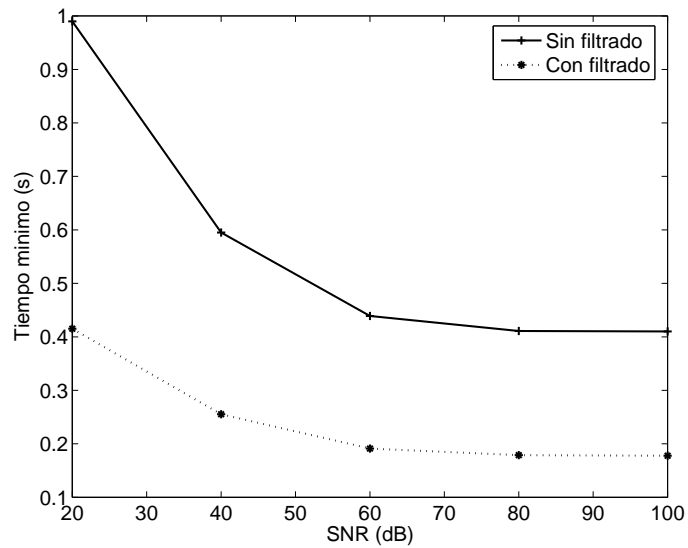


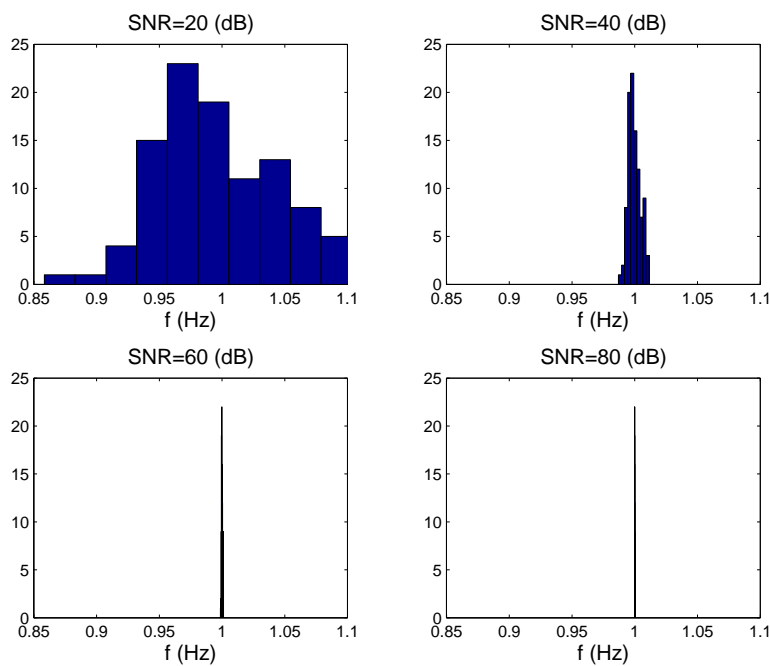
Figura 3.11: Tiempo de convergencia (s) vs. SNR (dB) sin usar filtros (línea continua) y con filtros (línea discontinua)

se llevará a cabo sobre un ciclo completo ($T=1$ (s)), y se repetirá cada experimento 1000 veces para cada valor de SNR . La Figura 3.12 representa el histograma obtenido para $SNR = 20, 40, 60, 80$ (dB). De esta figura se puede extraer que el sesgo y la varianza decrecen drásticamente cuando aumenta el SNR . No obstante, si la señal es bastante ruidosa, se puede aumentar el SNR con un filtrado invariante. La Figura 3.13 muestra los histogramas cuando se emplea el filtrado invariante para una señal con $SNR = 20$ (dB). En la parte inferior de esta figura se muestra la reducción de la varianza alcanzada con el filtrado paso-bajo. La Tabla 3.1 exhibe la convergencia exponencial respecto al sesgo⁴ y la varianza del algoritmo. Además, en el peor caso donde el nivel de ruido es $SNR = 20$ (dB) es posible usar un filtro invariante obteniendo una notable reducción de la varianza hasta $1.7 \cdot 10^{-8}$, mientras que el sesgo permanece aproximadamente constante.

⁴El sesgo y la varianza vienen definidos por la descomposición del error cuadrático medio (MSE: Mean Square Error) ($MSE = sesgo^2 + Varianza$)

Tabla 3.1: Estimación del sesgo y la varianza para diferentes valores de SNR

	SNR (dB)			
	20	40	60	80
Sesgo	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$
Varianza	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$

Figura 3.12: Histogramas obtenidos mediante simulaciones de Montecarlo para $SNR = 20, 40, 60, 80$ (dB)

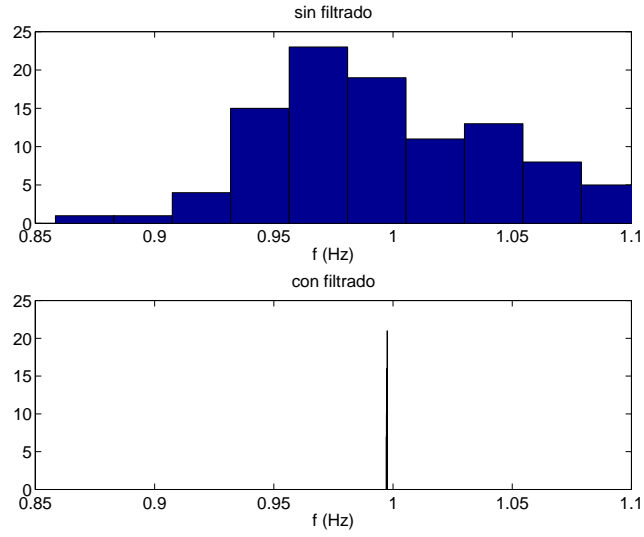


Figura 3.13: Histogramas sin y con filtrado invariante para $SNR = 20$ (dB)

3.7.3. Distancia mínima entre frecuencias

En numerosas aplicaciones se puede encontrar la señal sinusoidal (objetivo) contaminada por otra señal sinusoidal de alta frecuencia. En este apartado se estudiará tal efecto a través de varias simulaciones. En este caso se define la señal de simulación $y(t)$ como:

$$\hat{y}(t) = \sin(2\pi\hat{t}) + A_2 \sin(2\pi f_2 \hat{t}) \quad (3.53)$$

donde se hará variar la amplitud A_2 y la frecuencia f_2 , teniendo en cuenta que esos parámetros son relativos respecto a la señal normalizada donde $A_1 = f_1 = 1$. En este caso, considerando la ecuación (3.53) se define la relación señal ruido SNR como:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{A_1^2}{A_2^2} = 10 \log_{10} \frac{1}{A_2^2} (dB) \quad (3.54)$$

La Figura 3.14 muestra la evolución del tiempo de convergencia cuando varían los parámetros SNR y f_2 . Hay que destacar que el principal efecto es debido al nivel de SNR . El valor umbral es 40 (dB). Mientras que el parámetro f_2 no es tan importante. Análogamente, utilizaremos filtros paso-bajo de segundo orden para las mismas simulaciones usando $\omega_n = 2\pi 10$ (rad/s) y $\zeta = 0.707$. La Figura 3.15 muestra los resultados obtenidos.

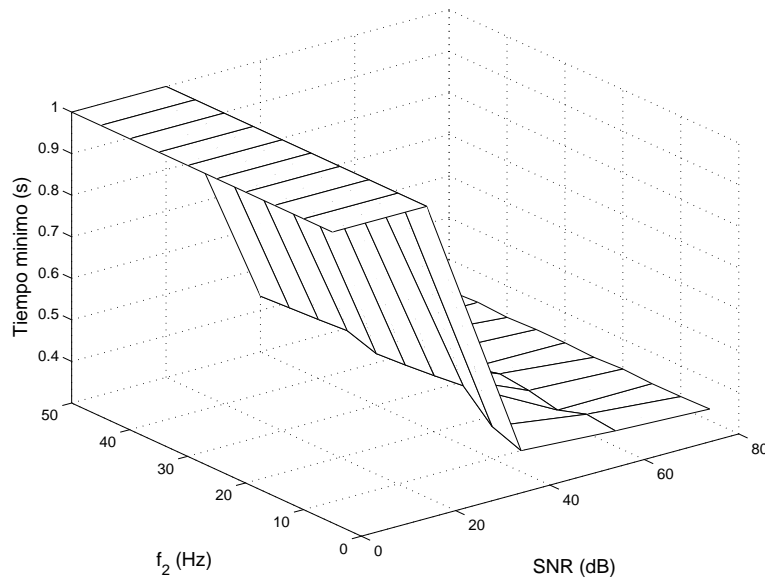
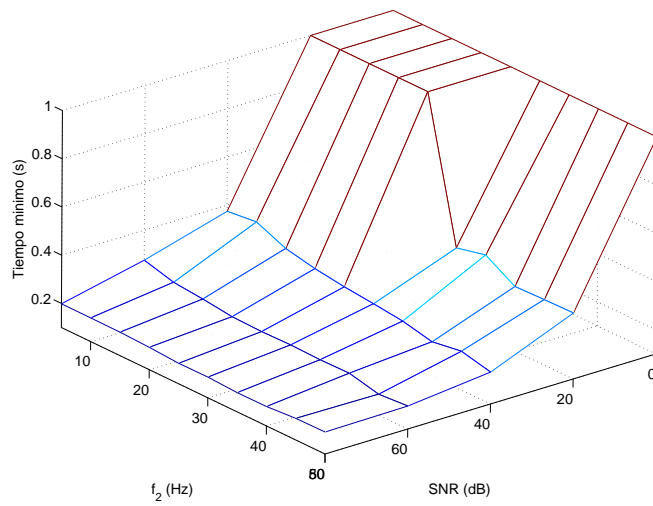


Figura 3.14: Tiempo mínimo de estimación (s), SNR (dB), f_2 (Hz) sin filtros

En dicha figura se puede observar que hay dos valores umbrales. El primero corresponde a $f_2 = 25$ (Hz) y el segundo a $SNR = 20$ (dB). De nuevo se verifica que usando filtros se consigue mejorar la robustez del estimador.

Figura 3.15: Tiempo mínimo de estimación (s), SNR (dB), f_2 (Hz) con filtros

Capítulo 4

Estimador de parámetros procedente de la suma de dos ondas sinusoidales

En el capítulo anterior se ha estudiado la estimación de una sola frecuencia, amplitud y fase procedentes de una onda senoidal. Este capítulo aborda la estimación de dos frecuencias, amplitudes y fases utilizando el método de identificación algebraica. El caso general de n frecuencias se estudiará al final de este capítulo.

En la literatura se pueden encontrar varias técnicas que tratan el caso general de estimar n frecuencias en el dominio del tiempo. En [Marino00] se usó un observador adaptativo, de dimension $5n-1$. En el trabajo de [Obregon-Pulido02] se presentó un estimador simultáneo y de frecuencias con una dimensión de $3n$. Además se aseguraba convergencia global. Un estimador diferente, también de dimensión $3n$, fue propuesto por [Xia04] como identificador adaptativo. Una característica común de estos trabajos es que no se han aplicado a señales experimentales ruidosas. Además sólo estiman las frecuencias pero no calculan otros parámetros como pueden ser las amplitudes y las fases¹.

Por otro lado, es interesante mencionar que varios artículos [Li93]-[Li94] han pro-

¹Aunque teóricamente estos estimadores se han desarrollado para n frecuencias sólo se han mostrado simulaciones con dos frecuencias. Este asunto se analizará en más detalle en el último apartado de este capítulo

puesto identificadores en el dominio discreto. En general estos identificadores son más rápidos que los desarrollados en tiempo continuo. Sin embargo, dichos métodos en el dominio discreto son más sensibles a las frecuencias de muestreo, a las condiciones iniciales y al ruido, como ocurre en el caso de una sola frecuencia.

En este capítulo se propone una solución algebraica al problema de la estimación de frecuencias para dos señales sinusoidales independientes. Además se proporciona la estimación de las amplitudes y las fases. Todo esto se realizará en línea para un tiempo inferior al periodo de la onda más lenta.

4.1. Formulación del problema

Dada la suma de dos señales sinusoidales con un ruido añadido:

$$y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + e(t)$$

donde $e(t)$ es un proceso estocástico de media cero *de alta frecuencia*. El objetivo es calcular de una manera rápida y fiable, las frecuencias desconocidas ω_1 y ω_2 , las amplitudes desconocidas A_1 , A_2 y, finalmente, las fases ϕ_1 y ϕ_2 .

En la siguiente sección se indica cómo calcular en línea las amplitudes y las fases. Sin embargo, inicialmente se va a abordar el sub-problema de la estimación de frecuencias. De modo que una vez se resuelva este problema *no lineal* mediante las técnicas de identificación *lineales*, las amplitudes y fases pueden ser fácilmente calculadas de la misma forma.

4.2. Una solución algebraica al problema

Las definiciones que se usan abajo pueden ser encontradas en [Fliess03b]. Considérese la señal libre de ruidos: $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$, tal que $y(t) = x(t) + e(t)$. Es fácil comprobar que $x(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial, *lineal*, invariante en el tiempo, de cuarto orden:

$$x^{(4)}(t) + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \ddot{x}(t) + \omega_1^2 \omega_2^2 x(t) = 0 \tag{4.1}$$

Los parámetros ω_1 y ω_2 son únicamente *débilmente linealmente identificables*, ver [Fliess03a]. Esto significa que si $X = \omega_1^2 + \omega_2^2$ y $Z = \omega_1^2\omega_2^2$, entonces el problema de estimar ω_1 y ω_2 se convierte en primero estimar los dos parámetros constantes X y Z que, al contrario que ω_1 y ω_2 , son de hecho *linealmente identificables*. Una vez que X y Z se han estimado es posible determinar ω_1 y ω_2 a partir de las relaciones no lineales:²

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[X \pm \sqrt{X^2 - 4Z} \right]}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2Z}{X \pm \sqrt{X^2 - 4Z}}} \quad (4.2)$$

Con el fin de facilitar el cálculo se supone que ϕ_1 y ϕ_2 pertenecen al intervalo $[-\pi, \pi]$. Las manipulaciones algebraicas que se describen en las siguientes secciones están dirigidas a obtener expresiones para los parámetros desconocidos, involucrando sólo integraciones o convoluciones de integrales de la señal $x(t)$, de la misma forma que se describió en el capítulo anterior. Naturalmente, en la implementación de la fórmula explícita obtenida se tendrá que sustituir la señal $x(t)$ por la medida real disponible $y(t)$.

4.2.1. Cálculo exacto de las frecuencias en el caso libre de ruidos

Se presenta un resultado fundamental en el cual se basa la estrategia de estimación.

Proposición 4.2.1 *Los parámetros constantes X y Z del sistema libre de ruido*

$$x^{(4)}(t) + X\ddot{x}(t) + Zx(t) = 0, \quad y(t) = x(t) \quad (4.3)$$

pueden ser calculados exactamente, en una manera no asintótica, después de un pequeño intervalo de tiempo arbitrario $t = \epsilon > 0$, mediante la fórmula:

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [0, \epsilon] \\ \begin{bmatrix} \frac{n_1(t)}{d(t)} \\ \frac{n_2(t)}{d(t)} \end{bmatrix} & t \in (\epsilon, +\infty) \end{cases} \quad (4.4)$$

²Destacar que solamente soluciones positivas ω_1 y ω_2 poseen sentido físico. El término: $\sqrt{X^2 - 4Z}$ debe tener el mismo signo en ambas expresiones ya que, de otra manera, no se verifica $Z = \omega_1^2\omega_2^2$. Finalmente, es interesante resaltar que las soluciones encontradas para ω_1 y ω_2 pueden ser intercambiadas.

con, $n_1(t)$, $n_2(t)$ y $d(t)$, dados por

$$\begin{aligned} n_1(t) &= \left[q(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t q(\sigma) d\sigma \right] \\ n_2(t) &= \left[\eta_1(t) \int_0^t q(\sigma) d\sigma - q(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma \right] \\ d(t) &= \left[\eta_1(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $q(t)$, ξ_1 y η_1 son las salidas de los filtros lineales, inestables, variantes en el tiempo:

$$\begin{aligned} q(t) &= -t^4 y(t) - z_1 & \xi_1 &= z_5 & \eta_1 &= z_9 \\ \dot{z}_1 &= z_2 - 16t^3 y(t) & \dot{z}_5 &= z_6 & \dot{z}_9 &= z_{10} \\ \dot{z}_2 &= z_3 + 72t^2 y(t) , & \dot{z}_6 &= z_7 & , & \dot{z}_{10} &= z_{11} + t^4 y(t) \\ \dot{z}_3 &= z_4 - 96t y(t) & \dot{z}_7 &= z_8 & & \dot{z}_{11} &= z_{12} - 8t^3 y(t) \\ \dot{z}_4 &= 24y(t) & \dot{z}_8 &= t^4 y(t) & & \dot{z}_{12} &= 12t^2 y(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

con condiciones iniciales nulas.

Demostración

La demostración de las expresiones previas está basada en la metodología de identificación algebraica introducida en el apartado 2.8, ver también [Fliess03b], [Mikusinski83], [Mikusinski87]. Una nota breve sobre esta metodología también se puede encontrar en [Trapero07].

Teniendo en cuenta que bajo la hipótesis de medidas perfectas $y(t) = x(t)$, la transformada de Laplace del sistema (4.3) está dada por:

$$s^4 y(s) - s^3 y(0) - s^2 \dot{y}(0) - s \ddot{y}(0) - y^{(3)}(0) + X(s^2 y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)) + Z y(s) = 0 \quad (4.7)$$

Diferenciando la expresión (4.7) *cuatro veces* con respecto a la variable compleja s , se obtiene una expresión que no depende de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} &\left[12 \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 8s \frac{d^3 y(s)}{ds^3} + s^2 \frac{d^4 y(s)}{ds^4} \right] X + \left[\frac{d^4 y(s)}{ds^4} \right] Z \\ &= - \left[24y(s) + 96s \frac{dy(s)}{ds} + 72s^2 \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 16s^3 \frac{d^3 y(s)}{ds^3} + s^4 \frac{d^4 y(s)}{ds^4} \right] \end{aligned}$$

Multiplicando esta expresión por el factor s^{-4} , representando *cuatro* integraciones anidadas en el dominio del tiempo, se obtiene una expresión libre de términos con potencias positivas

de la variable compleja s que representan derivadas en el dominio del tiempo. Se obtiene una expresión que involucra únicamente convoluciones temporales de la señal de salida $y(t)$,

$$\begin{aligned} & \left[12s^{-4} \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 8s^{-3} \frac{d^3 y(s)}{ds^3} + s^{-2} \frac{d^4 y(s)}{ds^4} \right] X + \left[s^{-4} \frac{d^4 y(s)}{ds^4} \right] Z \\ &= - \left[24s^{-4} y(s) + 96s^{-3} \frac{dy(s)}{ds} + 72s^{-2} \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + 16s^{-1} \frac{d^3 y(s)}{ds^3} + \frac{d^4 y(s)}{ds^4} \right] \end{aligned}$$

Sea \mathcal{L} la transformada del cálculo operacional que actúa sobre señales exponencialmente acotadas, ver [Mikusinski83]. Recuérdese que $\mathcal{L}^{-1} s(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$, $\mathcal{L}^{-1} \frac{d^\nu}{ds^\nu}(\cdot) = (-1)^\nu t^\nu(\cdot)$ y $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s}(\cdot) = \int_0^t (\cdot)(\sigma) d\sigma$. En el dominio del tiempo, se puede escribir esta última expresión como:

$$\eta_1(t)X + \xi_1(t)Z = q(t) \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} q(t) &= -t^4 y(t) - z_1 & \xi_1 &= z_5 & \eta_1 &= z_9 \\ \dot{z}_1 &= z_2 - 16t^3 y(t) & \dot{z}_5 &= z_6 & \dot{z}_9 &= z_{10} \\ \dot{z}_2 &= z_3 + 72t^2 y(t) , & \dot{z}_6 &= z_7 & \dot{z}_{10} &= z_{11} + t^4 y(t) \\ \dot{z}_3 &= z_4 - 96t y(t) & \dot{z}_7 &= z_8 & \dot{z}_{11} &= z_{12} - 8t^3 y(t) \\ \dot{z}_4 &= 24y(t) & \dot{z}_8 &= t^4 y(t) & \dot{z}_{12} &= 12t^2 y(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

La ecuación lineal (4.8) posee dos incógnitas X y Z , por tanto puede ser complementada por una ecuación adicional linealmente independiente, obtenida por una integración definida en el intervalo $[0, t]$ de la misma ecuación (4.8). De manera que se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{aligned} & \eta_1(t)X + \xi_1(t)Z = q(t) \\ & \left[\int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma \right] X + \left[\int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma \right] Z = \int_0^t q(\sigma) d\sigma \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

Es posible comprobar las siguientes expresiones para el cálculo exacto de X y Z ,

$$\begin{aligned} X &= \frac{q(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t q(\sigma) d\sigma}{\eta_1(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma} \\ Z &= \frac{\eta_1(t) \int_0^t q(\sigma) d\sigma - q(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma}{\eta_1(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Hay que tener en cuenta que los cocientes que definen X y Z están mal definidos en el tiempo $t = 0$, donde se obtiene una indeterminación de la forma: $0/0$. No obstante, esos cocientes están bien definidos al final de algún intervalo de la forma $[0, \epsilon]$, con $\epsilon > 0$ siendo un número real muy pequeño como se mostrará en simulaciones posteriores. Destacar que ni el numerador ni el denominador pueden ser idénticamente cero sobre cualquier intervalo abierto de tiempo evaluado. Si esto fuera cierto, el valor de $y(t)$, como puede verificarse fácilmente, no dependería de ω_1 , ni de ω_2 , lo cual es una contradicción.

□

Nota 4.2.2 *La naturaleza inestable de los sistemas lineales en forma de Brunovsky (4.9) no tiene una consecuencia práctica sobre la determinación de los parámetros desconocidos ya que: 1) Sistemas lineales excitados por señales de tiempo polinómicas no exhiben tiempos de escape finitos. 2) Los cálculos en línea se realizan en un periodo de tiempo ϵ que para aplicaciones prácticas usando procesadores aritméticos actuales, no sobrepasa una fracción del mayor periodo de las señales sinusoidales involucradas. 3) Es posible resetear tanto los sistemas variantes en el tiempo inestables, como el esquema de estimación, especialmente cuando se sepa que vayan a aparecer cambios repentinos de los valores. 4) Una vez se haya obtenido una estimación de parámetros fiable después de un cierto tiempo $t = \epsilon > 0$, la estimación total del proceso puede ser desconectada.*

4.2.2. Estimación de las frecuencias en un ambiente con ruido

Como se hizo en el capítulo anterior, se pueden filtrar independientemente las señales del numerador y el denominador usando el mismo filtro paso bajo con el fin de aumentar el SNR. De este modo los resultados en la sección previa se utilizarán para la estimación no asintótica de X y Z cuando el conocimiento sobre $x(t)$ se obtiene a través de una medida con ruido de alta frecuencia $y(t) = x(t) + e(t)$.

Se propone el siguiente procedimiento de estimación:

Los parámetros constantes X y Z del sistema con ruido

$$x^{(4)}(t) + X\ddot{x}(t) + Zx(t) = 0, \quad y(t) = x(t) + e(t) \quad (4.12)$$

pueden ser estimados, de una forma no asintótica, después de un cierto intervalo de tiempo $t = \epsilon > 0$, mediante la fórmula:

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = \begin{cases} \text{arbitrario} & t \in [0, \epsilon] \\ \begin{bmatrix} \frac{n_{1f}(t)}{d_f(t)} \\ \frac{n_{2f}(t)}{d_f(t)} \end{bmatrix} & t \in (\epsilon, +\infty) \end{cases} \quad (4.13)$$

donde $n_{1f}(t)$, $n_{2f}(t)$ y $d_f(t)$ representan, respectivamente, las señales filtradas de $n_1(t)$, $n_2(t)$ y $d(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{n}_{1f} &= -2\zeta\omega_n\dot{n}_{1f} - \omega_n^2(n_{1f} - n_1(t)) \\ \ddot{n}_{2f} &= -2\zeta\omega_n\dot{n}_{2f} - \omega_n^2(n_{2f} - n_2(t)) \\ \ddot{d}_f &= -2\zeta\omega_n\dot{d}_f - \omega_n^2(d_f - d(t)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

con, $n_1(t)$, $n_2(t)$ y $d(t)$, dados, respectivamente, por las ecuaciones (4.5) y (4.6) con $y(t)$ siendo ahora la medida ruidosa de $x(t)$, es decir, $y(t) = x(t) + e(t)$.

Con el fin de enfatizar la invarianza del filtrado propuesto, se mezcla la notación en el dominio del tiempo y de la frecuencia tal que:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \frac{F(s)n_1(t)}{F(s)d(t)} \\ \hat{Z} &= \frac{F(s)n_2(t)}{F(s)d(t)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \\ n_1(t) &= \left[q(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t q(\sigma) d\sigma \right] \\ n_2(t) &= \left[\eta_1(t) \int_0^t q(\sigma) d\sigma - q(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma \right] \\ d(t) &= \left[\eta_1(t) \int_0^t \xi_1(\sigma) d\sigma - \xi_1(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nota 4.2.3 *El filtrado paso bajo invariante propuesto arriba puede también ser sustituido por filtros basados en integradores puros, usando factores de la forma $1/s^p$, $p \geq 1$. Esta elección ha sido determinada bajo la hipótesis de ruidos $\xi(t)$ de “alta frecuencia”. Esta hipótesis está motivada y justificada por recientes desarrollos apuntando hacia una nueva teoría de ruidos evitando un marco estocástico, basado en un análisis no estándar. Detalles de todo esto puede encontrarse en [Fließ06a].*

4.2.3. Cálculo exacto de las amplitudes y fases en el caso libre de ruido

Supóngase conocidas las condiciones iniciales del sistema libre de ruidos (4.3).

Entonces se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x(0) &= A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \\ \dot{x}(0) &= A_1 \omega_1 \cos \phi_1 + A_2 \omega_2 \cos \phi_2 \\ \ddot{x}(0) &= -A_1 \omega_1^2 \sin \phi_1 - A_2 \omega_2^2 \sin \phi_2 \\ x^{(3)}(0) &= -A_1 \omega_1^3 \cos \phi_1 - A_2 \omega_2^3 \cos \phi_2 \end{aligned}$$

De esas relaciones es posible obtener expresiones para las fases desconocidas ϕ_1 y ϕ_2 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arctan \left(\omega_1 \frac{x(0)\omega_2^2 + \ddot{x}(0)}{\dot{x}(0)\omega_2^2 + x^{(3)}(0)} \right) \\ \phi_2 &= \arctan \left(\omega_2 \frac{x(0)\omega_1^2 + \ddot{x}(0)}{\dot{x}(0)\omega_1^2 + x^{(3)}(0)} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Las amplitudes A_1 y A_2 se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{[x(0)\omega_2^2 + \ddot{x}(0)]^2 + \frac{1}{\omega_1^2} [\dot{x}(0)\omega_2^2 + x^{(3)}(0)]^2}}{|\omega_2^2 - \omega_1^2|} \\ A_2 &= \frac{\sqrt{[x(0)\omega_1^2 + \ddot{x}(0)]^2 + \frac{1}{\omega_2^2} [\dot{x}(0)\omega_1^2 + x^{(3)}(0)]^2}}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Las fases ϕ_1 , ϕ_2 y las amplitudes A_1 , A_2 , son calculadas fácilmente una vez que se conocen las frecuencias y las condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0)$, $x^{(3)}(0)$ del sistema

homogéneo (4.3) definido por la señal $x(t)$. Por tanto, los esfuerzos irán dirigidos a conocer dichas condiciones iniciales de la señal $x(t)$. Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4.2.4 *Sean X y Z perfectamente conocidas. Entonces, los valores iniciales de los estados del sistema lineal homogéneo (4.3), representado por el vector:*

$$[x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0), x^{(3)}(0)],$$

son linealmente identificables y, por tanto, pueden ser exactamente determinados a partir de la señal libre de ruidos $y(t) = x(t)$ en un cierto tiempo $t = \epsilon > 0$ que es arbitrariamente pequeño.

Demostración

Considérese la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (4.3) para la señal $x(s)$, donde los parámetros $X = \omega_1^2 + \omega_2^2$ y $Z = \omega_1^2 \omega_2^2$, se asumen conocidos:

$$s^4 y(s) - s^3 x(0) - s^2 \dot{x}(0) - s \ddot{x}(0) - x^{(3)}(0) + X [s^2 y(s) - s x(0) - \dot{x}(0)] + Z y(s) = 0 \quad (4.19)$$

donde se ha usado $y(s)$ simplemente para enfatizar que y es la medida perfecta de la variable x , mientras que los estados iniciales: $x(0)$, $\dot{x}(0)$, etc. corresponden a cantidades desconocidas del sistema lineal generador.

Derivando esta última expresión tres, dos, y una vez con respecto a la variable s , y multiplicando cada una de las expresiones obtenidas por s^{-4} se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales para $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0)$ y $x^{(3)}(0)$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{s^4} & \frac{1}{s^3} & \left(\frac{1}{s^2} + \frac{X}{s^4}\right) & \left(\frac{1}{s} + \frac{X}{s^3}\right) \\ 0 & \frac{1}{s^4} & \frac{2}{s^3} & \left(\frac{3}{s^2} + \frac{X}{s^4}\right) \\ 0 & 0 & \frac{2}{s^4} & \frac{6}{s^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{s^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(3)}(0) \\ \ddot{x}(0) \\ \dot{x}(0) \\ x(0) \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} [s^{-2}y(s)X] + [s^{-4}y(s)]Z + y(s) \\ [2s^{-3}y(s) + s^{-2}\frac{dy(s)}{ds}]X + [s^{-4}\frac{dy(s)}{ds}]Z + 4s^{-1}y(s) + \frac{dy(s)}{ds} \\ [2s^{-4}y(s) + 4s^{-3}\frac{dy(s)}{ds} + s^{-2}\frac{d^2y(s)}{ds^2}]X + [s^{-4}\frac{d^2y(s)}{ds^2}]Z + 12s^{-2}y(s) \\ + 8s^{-1}\frac{dy(s)}{ds} + \frac{d^2y(s)}{ds^2} \\ [6s^{-4}\frac{dy(s)}{ds} + 6s^{-3}\frac{d^2y(s)}{ds^2} + s^{-2}\frac{d^3y(s)}{ds^3}]X + [s^{-4}\frac{d^3y(s)}{ds^3}]Z + 24s^{-3}y(s) \\ + 36s^{-2}\frac{dy(s)}{ds} + 12s^{-1}\frac{d^2y(s)}{ds^2} + \frac{d^3y(s)}{ds^3} \end{bmatrix} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Los valores exactos de las condiciones iniciales se obtienen, evitando la singularidad inicial en tiempo $t = 0$, resolviendo este sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo tras un pequeño intervalo de tiempo de duración ϵ .

En el dominio del tiempo, los cálculos realizados después de $t = 0$ se organizan de una manera recursiva, gracias a la estructura triangular de la matriz en la parte izquierda de (4.20), de modo que:

$$x(0) = \frac{1}{t^3} [\alpha_1 X + \beta_1 Z + \gamma_1] \quad (4.21)$$

donde α_1, β_1 y γ_1 son las salidas en el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= z_1 & \beta_1 &= z_5 & \gamma_1 &= z_9 - t^3 y(t) \\
\dot{z}_1 &= z_2 & \dot{z}_5 &= z_6 & \dot{z}_9 &= z_{10} + 12t^2 y(t) \\
\dot{z}_2 &= z_3 - t^3 y(t) & \dot{z}_6 &= z_7 & \dot{z}_{10} &= z_{11} - 36ty(t) \\
\dot{z}_3 &= z_4 + 6t^2 y(t) & \dot{z}_7 &= z_8 & \dot{z}_{11} &= 24y(t) \\
\dot{z}_4 &= -6ty(t) & \dot{z}_8 &= -t^3 y(t)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Una vez se estima X, Z y $x(0)$ es posible calcular $\dot{x}(0)$ tal que:

$$\dot{x}(0) = \frac{3}{t^3} [\alpha_2 X + \beta_2 Z + \gamma_2 - 3x(0)t^2] \tag{4.23}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= z_{12} & \beta_2 &= z_{16} & \gamma_2 &= z_{20} + t^2 y(t) \\
\dot{z}_{12} &= z_{13} & \dot{z}_{16} &= z_{17} & \dot{z}_{20} &= z_{21} - 8ty(t) \\
\dot{z}_{13} &= z_{14} + t^2 y(t) & \dot{z}_{17} &= z_{18} & \dot{z}_{21} &= 12y(t) \\
\dot{z}_{14} &= z_{15} - 4ty(t) & \dot{z}_{18} &= z_{19} \\
\dot{z}_{15} &= 2y(t) & \dot{z}_{19} &= t^2 y(t)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Análogamente:

$$\ddot{x}(0) = \frac{6}{t^3} \left[\alpha_3 X + \beta_3 Z + \gamma_3 - (3t + X \frac{t^3}{6})x(0) - \dot{x}(0)t^2 \right] \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= z_{22} & \beta_3 &= z_{25} & \gamma_3 &= z_{29} - ty(t) \\
\dot{z}_{22} &= z_{23} & \dot{z}_{25} &= z_{26} & \dot{z}_{29} &= 4y(t) \\
\dot{z}_{23} &= z_{24} - ty(t) & \dot{z}_{26} &= z_{27} \\
\dot{z}_{24} &= 2y(t) & \dot{z}_{27} &= z_{28} \\
& & \dot{z}_{28} &= -ty(t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Finalmente:

$$x^{(3)}(0) = \frac{6}{t^3} \left[\alpha_4 X + \beta_4 Z + \gamma_4 - \frac{t^2}{2} \ddot{x}(0) - \left(t + \frac{X}{6} t^3 \right) \dot{x}(0) - \left(1 + X \frac{t^2}{2} \right) x(0) \right] \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= z_{30} & \beta_4 &= z_{32} & \gamma_4 &= y(t) \\ \dot{z}_{30} &= z_{31} & \dot{z}_{32} &= z_{33} & & \\ \dot{z}_{31} &= y(t) & \dot{z}_{33} &= z_{34} & & \\ & & \dot{z}_{34} &= z_{35} & & \\ & & \dot{z}_{35} &= y(t) & & \end{aligned} \quad (4.28)$$

Una vez calculadas todas las condiciones iniciales se pueden obtener los valores de amplitudes y fases a través de las ecuaciones (4.17)-(4.18).

4.2.4. Cálculo de las amplitudes y fases añadiendo ruido a la señal

El cálculo de amplitudes y fases se puede llevar a cabo sustituyendo la señal limpia de ruido $y(t) = x(t)$ por su equivalente con ruido: $y(t) = x(t) + e(t)$ en todas las fórmulas previas y permitiendo el tiempo suficiente al procesador aritmético para ser capaz de calcular el cociente de dos cantidades bastante pequeñas. Análogamente al caso de las frecuencias se puede añadir un filtrado paso bajo invariante. Una vez las condiciones iniciales se obtienen fiablemente en un tiempo $t = \epsilon$, se procede a la determinación no lineal de las fases y amplitudes usando las expresiones (4.17) y (4.18) donde los valores estimados para las frecuencias sustituyen ω_1 y ω_2 .

4.3. Simulaciones

Las siguientes simulaciones se realizaron mediante el entorno MATLAB-SIMULINK para la estimación de las frecuencias procedentes de un señal suma de dos sinusoidales con ruido añadido:

$$y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + e(t)$$

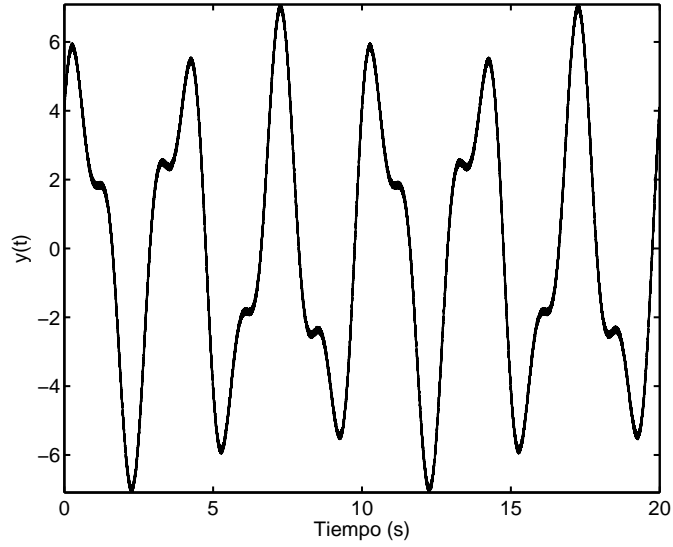


Figura 4.1: Señal compuesta por dos ondas sinusoidales más ruido.

donde $A_1 = 2$, $A_2 = 5$ y $f_1 = 0.7$ (Hz), $f_2 = 0.3$ (Hz). Por tanto $\omega_1 = 2\pi f_1 \approx 4.40$ (rad/s) y $\omega_2 = 2\pi f_2 \approx 1.89$ (rad/s). Las fases son $\phi_1 = 1$ [rad], $\phi_2 = 0.5$ [rad] y el ruido $e(t)$ es un proceso estocástico de media cero, generado por la instrucción *rand* en el paquete MATLAB. Esta señal estocástica generada por ordenador se distribuye uniformemente en el intervalo $[-0.1, 0.1]$.

La Figura 4.1 muestra la señal $y(t)$ que contiene la suma de dos ondas desconocidas y el ruido. La Figura 4.2 representa la calidad, precisión y velocidad de la estimación simultánea de ambas frecuencias en la señal dada usando el algoritmo algebraico. Los filtros paso bajo idénticos usados tenían una frecuencia de corte de 10 (rad/s) y un coeficiente de amortiguamiento de $\xi = 0.707$. El cálculo de la frecuencia se establece en 2 (s). Esto muestra que las inestabilidades del filtro no causan ningún problema en particular.

Las Figuras 4.3 y 4.4 representan, respectivamente, la estimación de las amplitudes y fases procedentes de la señal ruidosa $y(t)$. En el caso que no se utilice ningún filtro se aumenta la varianza de las estimaciones, como se puede observar en la Figura 4.5.

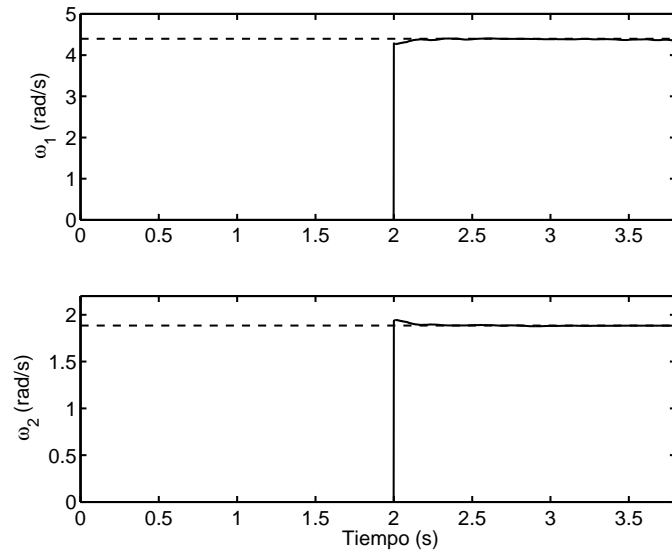


Figura 4.2: Resultados de simulación de la estimación algebraica de las frecuencias ω_1 y ω_2 .

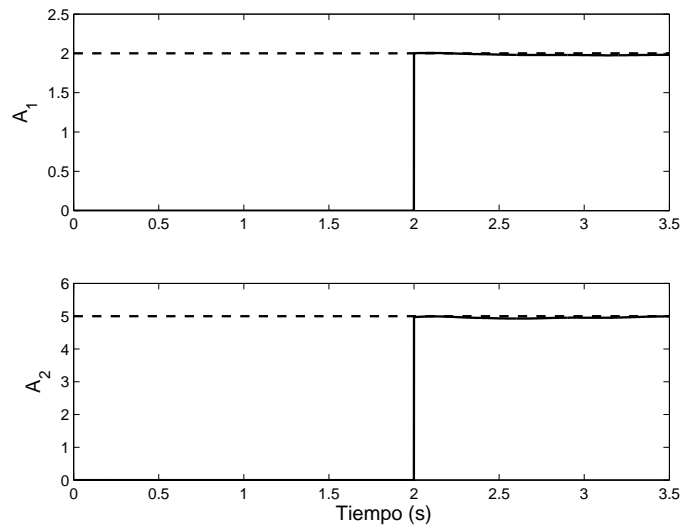


Figura 4.3: Resultados de simulación de la estimación algebraica de las amplitudes A_1 y A_2 .

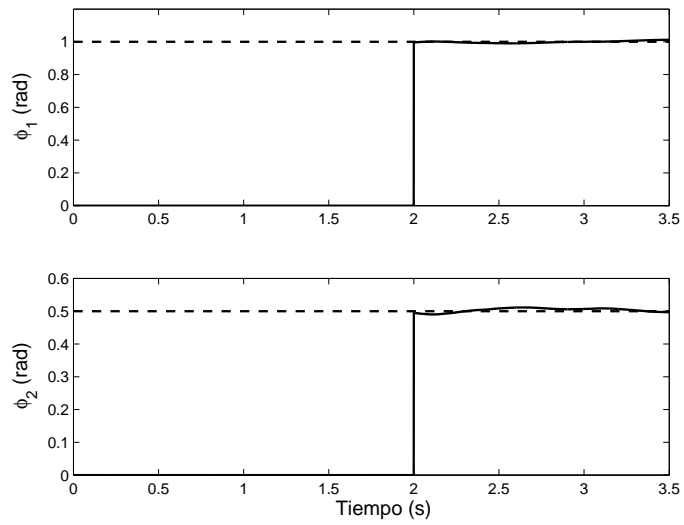


Figura 4.4: Resultados de simulación de la estimación algebraica de las fases ϕ_1 y ϕ_2 .

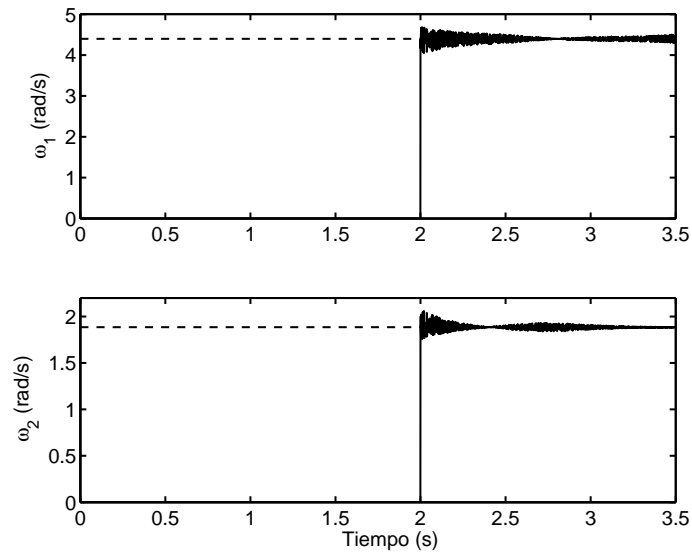


Figura 4.5: Resultados de simulación de la estimación algebraica de las frecuencias ω_1 y ω_2 sin usar filtros.

4.3.1. Efecto del ruido

Con el fin de analizar como el ruido en las medidas reales puede afectar el funcionamiento del estimador, se han propuesto varias simulaciones. Para simplificar el experimento, solamente se tendrán en cuenta las estimaciones de frecuencia, ya que una vez conocemos las frecuencias, las amplitudes y fases se obtienen fácilmente. La simulación consiste en variar dos parámetros de la señal: (i) la distancia relativa entre frecuencias (f_2/f_1), (ii) la varianza del ruido $e(t)$. No se ha incluido un análisis de la amplitud relativa (A_2/A_1), dado que si las amplitudes son diferentes se obtienen resultados con una precisión parecida. No obstante, si existe un componente senoidal con una amplitud relativa muy grande (mayor que dos décadas), entonces las estimaciones de frecuencia, amplitud y fase de dicha senoidal son más precisas. La normalización de la señal se puede hacer estableciendo los siguientes valores: $A_1 = A_2 = f_1 = 1$ y fases ϕ_1, ϕ_2 aleatorias, de acuerdo a (4.1). De este modo el parámetro f_2 puede cambiar. Se ha elegido un ruido normalmente distribuido con media cero y varianza ν^2 para simular la perturbación de la señal.

Las Figuras 4.6 y 4.7 representan el error calculado en la estimación de las frecuencias, f_1 y f_2 , respectivamente, donde la relación señal ruido (SNR) está dada por:

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{(|A_1| + |A_2|)^2}{\nu^2} \quad (4.29)$$

y el error se mide por el error absoluto medio porcentual (MAPE), tal que:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{|f - \hat{f}_j|}{|f|} \times 100 \quad (4.30)$$

donde f es el valor real de la frecuencia y \hat{f}_j son las estimaciones en la observación j . Sea N la longitud de la muestra donde se calcula el error. En estas simulaciones el tamaño de la muestra N es igual a las últimas 100 observaciones, donde la frecuencia de muestreo es 1 KHz y el tiempo total del experimento es el periodo de la señal simulada. Este tiempo corresponde al periodo de la onda más lenta, en este caso sería $f_1 = 1$ (Hz), por tanto el periodo es $T_1 = 1/f_1 = 1$ (s).

La Figura 4.6 muestra la evolución del error en relación al parámetro f_1 , versus el nivel de ruido en la señal, donde ocurre una degradación de la estimación para un SNR por

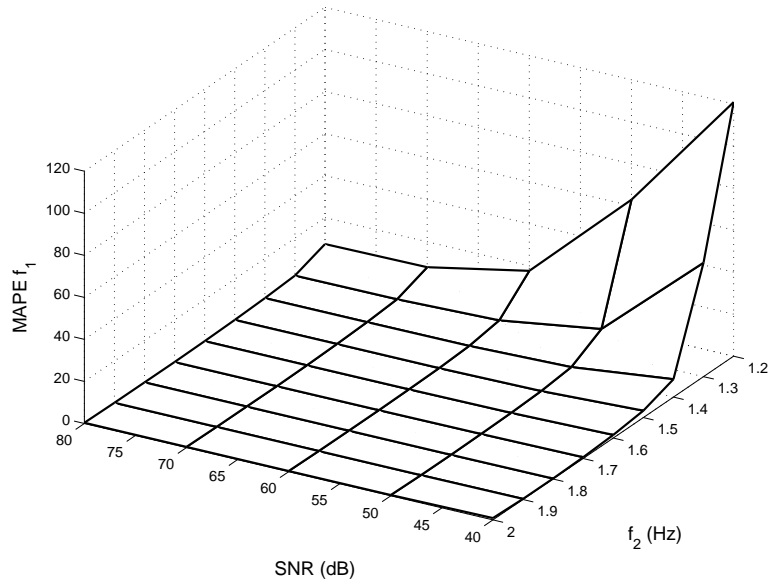


Figura 4.6: MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_1 sin filtrado invariante.

debajo de 40 (dB) aproximadamente. La Figura 4.7 representa el MAPE para la segunda frecuencia f_2 . En este caso el MAPE de ambas frecuencias f_1 y f_2 aumenta cuando f_2 tiende a f_1 para niveles bajos de SNR. Por este motivo, en el caso particular de $f_1 = f_2$ puede ser más conveniente usar un estimador de una sola frecuencia, ver [Trapero07]. De hecho, si se espera que las frecuencias puedan ser iguales, es recomendable revisar continuamente el error residual. Si este error es bastante grande se debería conmutar al estimador de una frecuencia.

Anteriormente se mostró que la utilización de un filtrado invariante puede mejorar la robustez de la estimación, ver (4.15)-(4.16). Suponiendo que disponemos de cierta información del sistema, es posible diseñar filtros sofisticados. Incluso cuando no conocemos nada acerca del sistema se pueden emplear integradores puros como filtros. Las Figuras 4.8 y 4.9 muestran el MAPE obtenido para la estimación de las frecuencias f_1 y f_2 , respectivamente. En este caso se ha usado un filtro de segundo orden de acuerdo a (4.16). Este filtro queda definido por los parámetros $\omega_n \approx 31.4$ (rad/s) y $\zeta = 0.707$, donde la frecuencia de corte se localiza en 5 (Hz). Como consecuencia de este filtrado, se produce una reducción del nivel de ruido aceptable por el estimador hasta unos 20 (dB) aproximadamente.

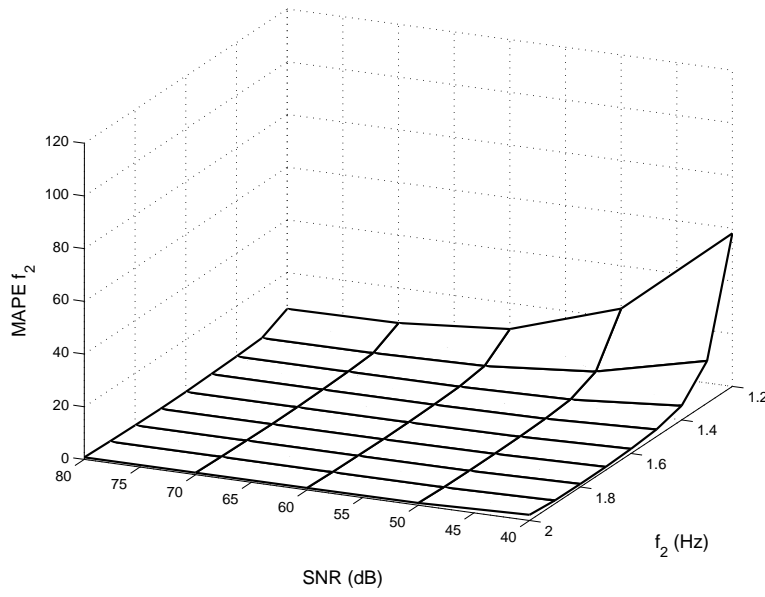


Figura 4.7: MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_2 sin filtrado invariante.

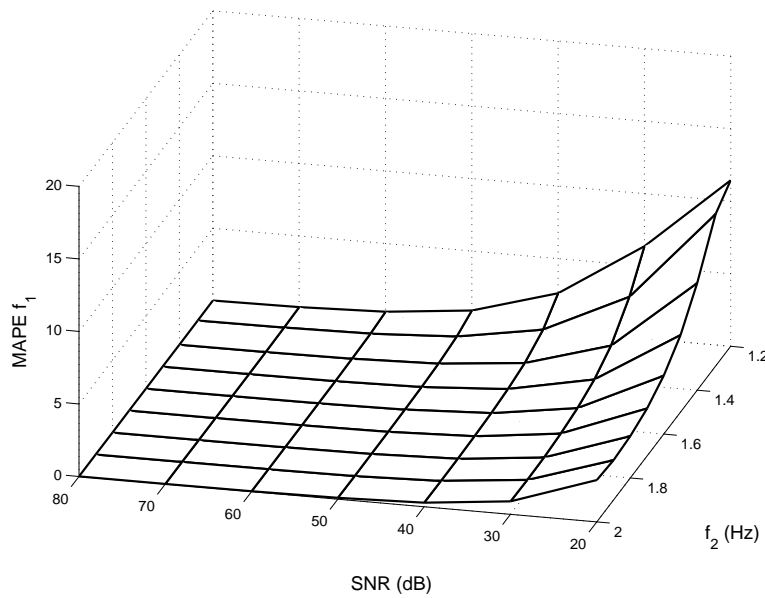


Figura 4.8: MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_1 con filtrado invariante.

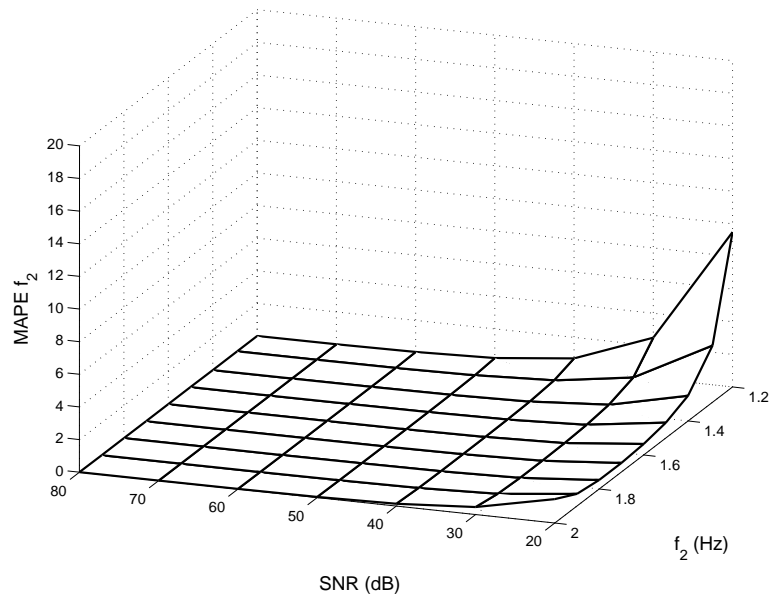


Figura 4.9: MAPE obtenido en la estimación de la frecuencia f_2 con filtrado invariante.

4.3.2. Complejidad computacional

Un aspecto importante relacionado con aplicaciones en tiempo real, es la complejidad computacional. Hay varias formas de medirla, sin embargo nuestro interés reside en conocer las limitaciones de esta técnica en su utilización en tiempo real.

La simulación consiste en medir el tiempo necesario para calcular las estimaciones de frecuencia, amplitud y fase un paso adelante. Los parámetros utilizados son $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $f_1 = 1$ (Hz), $f_2 = 1.5$ (Hz) y fases aleatorias. El ordenador utilizado es un Pentium IV con una CPU de 3 GHz y una memoria RAM de 512 MHz. El tiempo transcurrido fue de un orden de magnitud igual a 10^{-4} segundos. Por tanto, para aplicaciones en línea de este algoritmo deben elegirse tiempos de muestreo superiores a 10^{-4} segundos.

4.4. Resultados experimentales

La Figura 4.10 muestra una señal real, procedente de un generador de ondas, constituida por la suma de dos sinusoidales de amplitudes y frecuencias dadas por:

$$A_1 = 0.7, \quad \omega_1 = 2\pi(13.7) \approx 86.08 \text{ (rad/s)},$$

$$A_2 = 1.16, \quad \omega_2 = 2\pi(10.1) \approx 63.46 \text{ (rad/s)}$$

Las fases de las señales son completamente desconocidas y el tiempo de muestreo es 1×10^{-3} (s).

La misma Figura 4.10, muestra los resultados de las estimaciones en línea de las frecuencias constantes de las señales sinusoidales con ruido integrado. El conjunto de filtros de segundo orden utilizados tiene las siguientes características: 1) frecuencia de corte: $\omega_n = 125$ (rad/s). Este valor representa, aproximadamente, 19.89 (Hz) y 2) el factor de amortiguamiento en $\xi = 0.707$.

En las Figuras 4.11 y 4.12 respectivamente se pueden observar los resultados de las estimaciones en línea de las amplitudes y fases de la señal.

4.5. Metodología para estimar n frecuencias

Por último sería deseable extender los resultados previos para el caso de n frecuencias. Supóngase que se dispone de una señal senoidal con ruido de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \\ y(t) &= x(t) + e(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde $e(t)$ es un proceso estocástico de media cero. Se desea calcular tan rápido como sea posible los parámetros A_i , ω_i y ϕ_i . Diferenciando la señal senoidal $x(t)$ dos veces se obtiene:

$$\ddot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

donde $\alpha_i = -\omega_i^2$. En [Xia04] se demuestra que si se continua derivando hasta $2n$ veces, la ecuación característica del sistema es:

$$F(s) = \prod_{i=1}^n (s^2 + \omega_i^2) = s^{2n} + \theta_1 s^{2n-2} + \dots + \theta_{n-1} s^2 + \theta_n \quad (4.32)$$

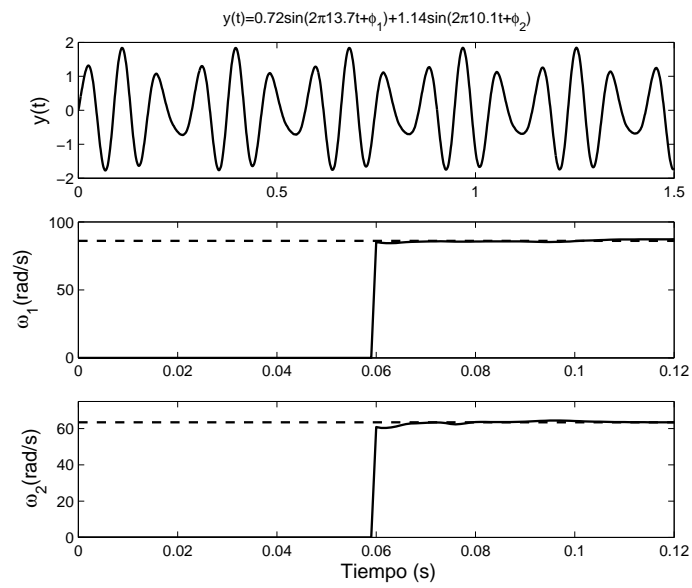


Figura 4.10: Señal experimental y resultados de la estimación de frecuencia en línea algebraica.

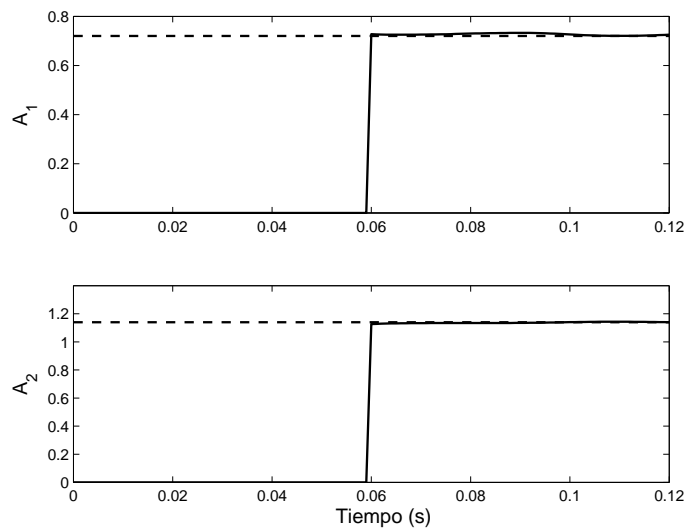


Figura 4.11: Resultados experimentales para la estimación algebraica de las amplitudes A_1 y A_2 de la señal experimental.

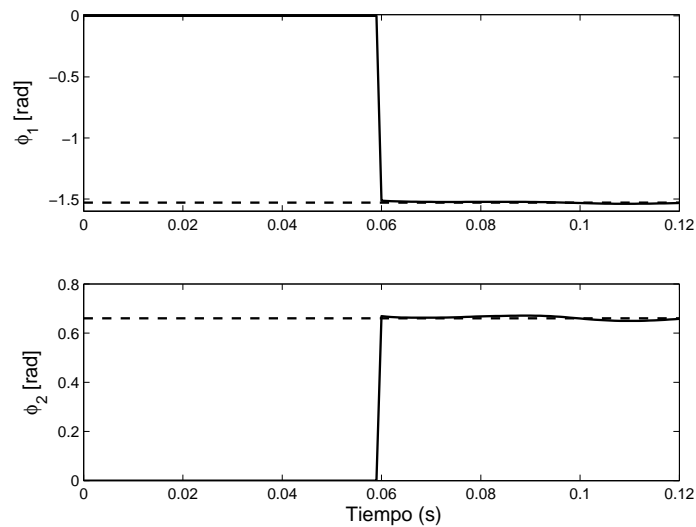


Figura 4.12: Resultados experimentales para la estimación algebraica de las fases ϕ_1 and ϕ_2 de la señal experimental.

La ecuación (4.32) es una reparametrización inversa de las n frecuencias originales $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

En esta nueva forma de expresar el problema hay que estimar los parámetros θ_i que se relacionan con las frecuencias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \\
 &\vdots \\
 \theta_{n-1} &= \sum_{j=1}^n \prod_{i=1, i \neq j}^n \omega_i^2 \\
 \theta_n &= \prod_{i=1}^n \omega_i^2
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

De este modo, si se pueden estimar los parámetros θ_i , las frecuencias ω_i se pueden conocer a través de (4.33).

La descripción de la metodología necesaria para construir el estimador de frecuencias se presenta a continuación:

1. Realizar la transformada de Laplace.

2. Aplicar la diferenciación algebraica de orden $2n$, $\frac{d^{2n}}{ds^{2n}}$ para eliminar las condiciones iniciales.
3. Aplicar la integración algebraica de orden $2n$, es decir multiplicar por s^{-2n}
4. Expresar los parámetros θ_i como cocientes de filtros lineales en la forma de Brunovski.
5. Integrar en el dominio del tiempo $n - 1$ veces para obtener n ecuaciones con n incógnitas.
6. Estimar ω_i a través de (4.33)

Todos estos pasos se pueden resumir en la siguiente expresión:

$$\frac{1}{s^\nu} \frac{1}{s^{2n}} \frac{d^{2n}}{ds^{2n}}(s^{2n} F(s)) = 0; \quad \nu = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4.34)$$

Teóricamente mediante las expresiones (4.33) y (4.34) uno podría realizar un estimador de n frecuencias. Sin embargo, hay que considerar ciertas restricciones. La primera de ellas es que este estimador está orientado a una aplicación en línea y por tanto los recursos computacionales pueden ser escasos. No obstante, el mayor problema podría estar en el paso 6, respecto la reparametrización inversa en (4.33), ya que cuando el número de parámetros es mayor que 2, no se puede hallar una relación analítica a este problema no lineal. De hecho, algunos de los artículos que presentan estimadores de n frecuencias solo presentan resultados simulados para el caso de dos frecuencias, ver [Xia04], [Obregon-Pulido02], [Hou07].

Para solucionar este problema práctico Rew *et al.* en [Rew02] emplean el método de Bairstow para hallar las frecuencias naturales de una estructura inteligente. Este método muestra ser computacionalmente eficiente. Aún así, intentar calcular más de dos frecuencias simultáneamente mediante estimadores de frecuencia no parece ser la solución más práctica aunque teóricamente sea muy elegante. Por este y otros motivos, Tjahyadi y Sammut en [Tjahyadi06] prefieren estimar las frecuencias mediante un conjunto de filtros pasobanda colocados en paralelo para estimar cada frecuencia por separado. Incluso, se altera el tiempo de muestreo para facilitar la estimación de la frecuencia seleccionada. Esta modificación del tiempo de muestreo es muy útil si el estimador está diseñado en tiempo discreto. En cambio, los estimadores en tiempo continuo son independientes del tiempo de muestreo mientras sean lo suficientemente pequeños de acuerdo al teorema de Shannon.

Capítulo 5

Análisis de vibración

Una gran parte de robots manipuladores que se utilizan actualmente, se diseñan para minimizar la vibración en el extremo. Esto normalmente implica altos valores de rigidez, es decir, materiales pesados y diseños voluminosos. Estos diseños, además, conducen a un elevado consumo de energía y a una reducción de la velocidad de trabajo. Para superar estas desventajas, muchos investigadores han estudiado brazos manipuladores ligeros, es decir son brazos con una alta relación entre la carga en el extremo y el peso del mismo brazo. De forma que los manipuladores flexibles pueden ser una alternativa interesante para aumentar la productividad.

Los robots flexibles abarcan un amplio rango de aplicaciones: industria aeroespacial, mantenimiento nuclear, micro-cirugía, control de colisiones, reconocimiento de patrones y muchas otras. Una revisión del estado del arte respecto a brazos flexibles se puede encontrar en [Dwivedy06]. No obstante, los brazos flexibles tienen una importante desventaja y es que exhiben vibraciones. Estas vibraciones se deben controlar y es entonces cuando los estimadores de frecuencia se pueden utilizar para estimar la frecuencia de vibración con el fin de poder controlarla. Uno de los objetivos de este capítulo es analizar los estimadores de frecuencia en vibraciones procedentes de un brazo flexible.

La razón de utilizar estimadores de frecuencia aplicado a vibraciones es que, generalmente hablando, las vibraciones pueden ser descritas por la suma de una o varias ondas desacopladas, como se realiza en un *análisis modal*. Por ejemplo, en el caso de un sólo mo-

do de vibración, la frecuencia angular del comportamiento sinusoidal de dicha vibración es el parámetro que se debe estimar. El problema se complica en el caso en que la frecuencia de vibración cambie inesperadamente entre diferentes valores que son constantes pero desconocidos, ver [Feliu05].

En este capítulo se propone utilizar el algoritmo algebraico de estimación de frecuencia descrito en el capítulo 3 para la determinación de la frecuencia de vibración procedente de un brazo flexible. La idea de utilizar estimadores de frecuencia para identificar vibraciones ha sido aplicada en problemas de control de ruido activo. En este sentido son interesantes los trabajos realizados por Kim y Park en [Kim01] y en [Kim99]. También es interesante el trabajo dirigido por K.H. Rew en [Rew02], donde se comparan varios estimadores de frecuencia diseñados en tiempo discreto utilizando señales procedentes de una estructura inteligente (*smart structure*). La importancia de conocer la frecuencia de vibración radica en la idea de que cambios en la estructura se traducen en cambios en la frecuencia de vibración. Por ejemplo, un fallo en la estructura se podría detectar mediante una monitorización en línea de la frecuencia de vibración. Además, si es posible detectar el cambio en la frecuencia y estimarlo, se pueden diseñar algoritmos de control adaptativo que automáticamente reajusten los parámetros de control y la estructura permanezca bajo control efectivo.

Desafortunadamente, los estimadores discretos de frecuencia analizados en [Rew02] mostraron importantes dificultades en experimentos realizados sobre estructuras reales. Una posible causa de los errores en la estimación pudo ser debida al fenómeno de amortiguamiento que no se modela cuando suponemos las vibraciones como ondas sinusoidales puras con amplitud constante. Sin embargo, el estimador de frecuencia algebraico desarrollado en tiempo continuo puede proporcionar rápidas estimaciones de la frecuencia natural del brazo flexible. De hecho, este estimador puede ser lo suficientemente rápido para conseguir una estimación antes de que el fenómeno de amortiguamiento llegue a ser apreciable. Además, este algoritmo se comparará con otros métodos publicados recientemente que no se han aplicado en este tipo de estructuras flexibles hasta ahora.

5.1. Simulaciones

Con el fin de estudiar el efecto del amortiguamiento no modelado en las estructuras flexibles se han diseñado varias simulaciones realizadas en MATLAB-SIMULINK, donde la señal sinusoidal se ha normalizado. Supongamos que la respuesta de un sistema de segundo orden amortiguado se pudiera modelar como:

$$y(t) = Ae^{-\zeta_n 2\pi f t} \sin(2\pi f \sqrt{1 - \zeta_n^2} t + \phi) \quad (5.1)$$

donde ζ_n es el coeficiente de amortiguamiento y f es la frecuencia natural en Hertzios. La normalización de la señal se basa en obtener una señal sinusoidal que tenga un periodo de $T = 1$ (s), así como una amplitud unidad si el coeficiente de amortiguamiento es igual a cero. Se proponen los siguientes cambios de escala de tiempo y amplitud:

$$\hat{t} = f \sqrt{1 - \zeta_n^2} t, \quad \hat{y}(t) = \frac{y(t)}{A} \quad (5.2)$$

Como resultado de esta normalización, donde \hat{t} es el tiempo normalizado y \hat{y} es la amplitud normalizada, la ecuación (5.1) se puede formular como:

$$\hat{y}(t) = e^{-2\pi \frac{\zeta_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \hat{t}} \sin(2\pi \hat{t} + \phi) \quad (5.3)$$

La simulación consiste en estimar la frecuencia de la señal sinusoidal amortiguada variando el parámetro ζ_n . La fase de la señal (5.1) es cero. Si tuviéramos una fase distinta de cero, los resultados que se obtendrían serían mejores, porque el estimador dispondría de entradas¹ distintas de cero en el instante inicial $t = 0$. Dada la rapidez del estimador es necesario establecer un criterio para determinar cuándo el estimador ha proporcionado un valor de frecuencia fiable. Denominamos el tiempo de estimación como aquél que se obtiene de acuerdo al siguiente criterio:

$$\frac{MA(k) - MA(k - M)}{MA(k)} < \text{tolerancia} \quad (5.4)$$

donde:

$$MA(k) = \frac{\sum_{i=0}^M \hat{f}(k - i)}{M + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.5)$$

¹El diseño de entradas dentro de la identificación algebraica es actualmente un problema abierto.

es la media móvil de la estimación de frecuencia $\hat{f}(k)$ en un tiempo $t = kT_s$, siendo T_s el tiempo de muestreo. M es el tamaño de la ventana, i.e, el número de retardos que se deben tener en cuenta y N es el número total de observaciones. Se han elegido los siguientes valores: $T_s = 2 \cdot 10^{-3}$ (s) y una tolerancia de 10^{-3} .

Por otro lado, la precisión del algoritmo se mide según el error absoluto medio (MAE) que es dado por:

$$MAE = |\hat{f}(T^*) - 1| \quad (5.6)$$

donde T^* es el tiempo de estimación de acuerdo a (5.4).

La Figura 5.1 representa el efecto del coeficiente de amortiguamiento sobre el tiempo de estimación y el MAE. Se puede observar que el tiempo de estimación decrece cuando se incrementa ζ_n , pero a su vez, el MAE aumenta exponencialmente. La tolerancia del criterio de estimación (10^{-3}) se muestra en línea discontinua. En particular, cuando ζ_n es igual a cero el estimador algebraico alcanza la tolerancia dada. El tamaño de la ventana según (5.4) es $M = 10$. Es interesante destacar que cuanto mayor es el valor de M mayor es la precisión de la estimación, mientras que valores pequeños proporcionan estimaciones más sensibles a los cambios abruptos en la frecuencia. Por tanto, dependiendo de los requisitos de cada aplicación hay que buscar un conjunto de valores adecuados.

En la Figura 5.1 se han mostrado los efectos de un conjunto de pequeños valores de amortiguamiento sobre el tiempo de estimación y el MAE. Uno podría preguntarse el por qué de solo representar valores tan pequeños. Esto es debido a una de las propiedades de las estructuras flexibles, que es su bajo valor de ζ_n . Por tanto, no debería haber ninguna dificultad en aplicar el estimador de frecuencia algebraico a este tipo de estructuras.

5.2. Caso de estudio

Como se explicó anteriormente una aplicación inmediata del estimador de frecuencia algebraico es la determinación de los modos de vibración de una estructura flexible. En [Rew02] se propusieron varios estimadores multi-frecuencia para el análisis y control de estructuras inteligentes. En dicha referencia, se mostró como técnicas de estimación bien conocidas no alcanzan resultados razonables bajo condiciones de trabajo severas. En este

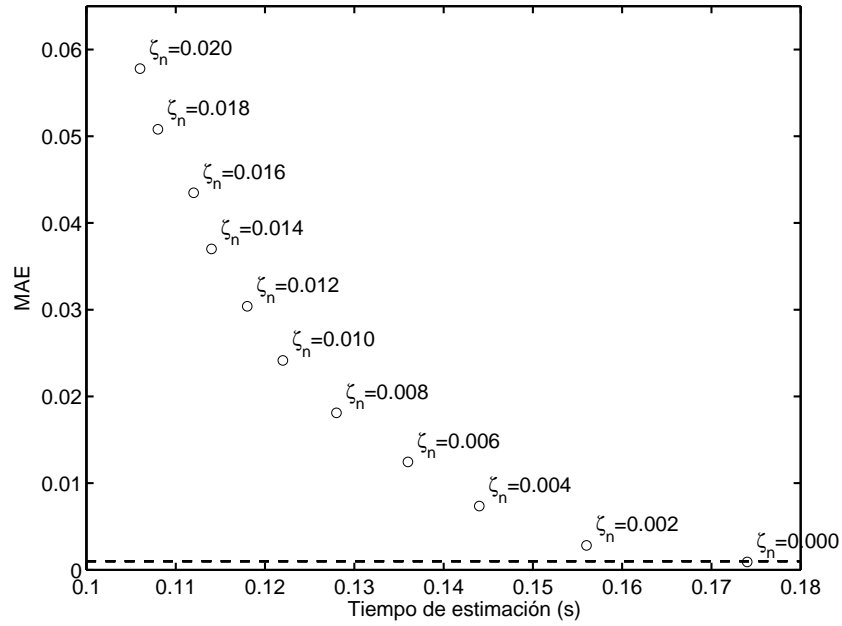


Figura 5.1: Efecto del coeficiente de amortiguamiento sobre el tiempo de estimación (s) y el MAE. La tolerancia del criterio de estimación se muestra en línea discontinua (—)

apartado, se llevará a cabo una implantación experimental del algoritmo algebraico propuesto sobre un brazo flexible de un solo eslabón².

5.2.1. Descripción del modelo

Sea el siguiente modelo simplificado de un brazo flexible de un solo eslabón (ver [Feliu05]) con toda su masa concentrada en el extremo, accionado por un motor de corriente continua como se muestra en la Figura 5.2. La dinámica del sistema viene descrita por:

$$mL^2\ddot{\theta}_t = c(\theta_m - \theta_t) \quad (5.7)$$

$$ku = J\ddot{\theta}_m + \nu\dot{\theta}_m + \hat{\Gamma}_c + \hat{\Gamma}_{coup} \quad (5.8)$$

$$\hat{\Gamma}_{coup} = \frac{c}{n}(\theta_m - \theta_t) \quad (5.9)$$

donde m es una masa desconocida en el extremo. L y c son respectivamente, la longitud del brazo flexible y la rigidez de la barra, ambos perfectamente conocidos. J es la inercia del motor, ν es el coeficiente viscoso de rozamiento, $\hat{\Gamma}_c$ es el par de Coulomb de valor

²La descripción del modelo y la plataforma experimental que se presenta a continuación, van a ser también utilizadas para mostrar diferentes aplicaciones en los próximos capítulos.

desconocido, $\hat{\Gamma}_{coup}$ es el par de acoplamiento medido entre el motor y el eslabón, k es una constante que involucra el amplificador y la constante electromagnética del motor, u es la señal de voltaje que controla el motor, $\ddot{\theta}_m$ representa la aceleración de la reductora, así como $\dot{\theta}_m$ es la velocidad. El factor constante n es la relación de reducción de la reductora; por tanto $\theta_m = \hat{\theta}_m/n$. Se define por $\hat{\theta}_m$ la posición angular del motor mientras que θ_t es la posición angular del extremo, la cuál no se puede medir directamente.

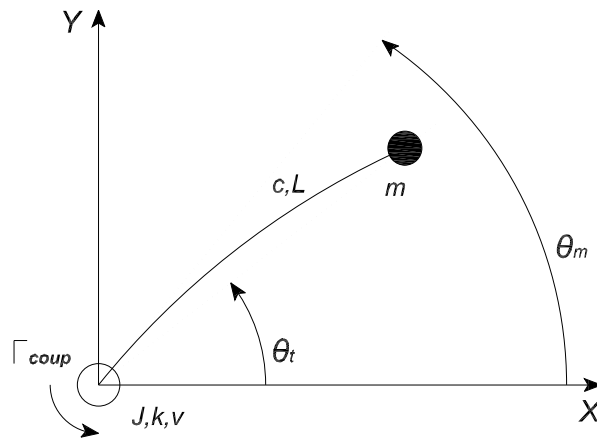


Figura 5.2: Diagrama del brazo flexible de un solo eslabón

La función de transferencia de (5.7) expresada en el dominio de Laplace se puede expresar tal que:

$$Gb(s) = \frac{\theta_t(s)}{\theta_m(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} \quad (5.10)$$

donde

$$\omega_0 = (c/mL^2)^{1/2} = 2\pi f_0 \quad (5.11)$$

es la frecuencia natural de la barra empotrada por su base. De (5.10), es fácilmente visible que el sistema queda completamente determinado por el parámetro ω_0 . Dado que no conocemos el valor de masa en el extremo m , tampoco conocemos el valor de ω_0

Tabla 5.1: Parámetros del brazo flexible

Rigidez (Nm)	Diámetro (mm)	Longitud (mm)
1.56	3	700

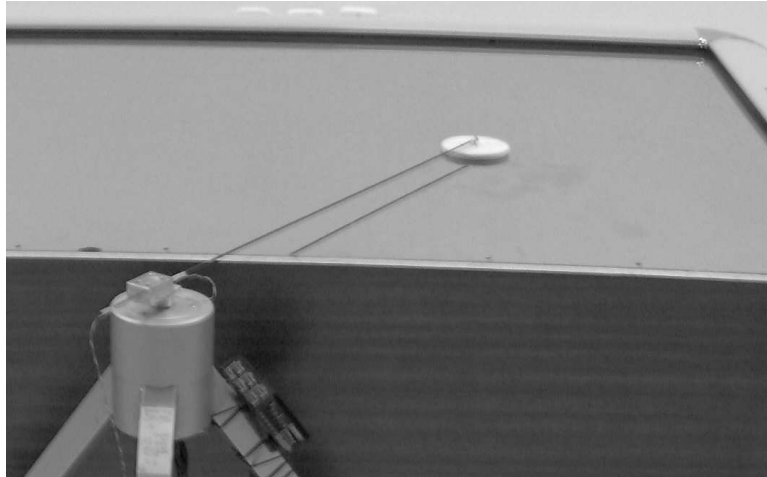


Figura 5.3: Plataforma

5.2.2. Plataforma Experimental

El brazo flexible que se presenta es una barra flexible de fibra de carbono, cuyas características se describen en la Tabla 5.1. Esta barra está empotrada en el eje del motor (ver Figura 5.3). En el extremo de la barra hay una carga con la forma de un disco. La carga rota libremente respecto a su eje vertical y por tanto, no hay efectos del par producido por la inercia de la masa. Además, la carga está flotando sobre la superficie de una mesa de aire, de modo que se pueden despreciar los efectos producidos por la gravedad y el rozamiento.

El motor de corriente continua está alimentado por un servo amplificador que acepta señales de control en el rango de $[-10,10]$ (V). El sistema sensorial consiste en un encoder y un conjunto de galgas extensométricas. El encoder está empotrado en el motor y nos permite conocer la posición del motor con una precisión de 7×10^{-5} (rad). El par de galgas extensométricas poseen un factor de 2.16 y una resistencia de 120.2 (Ω). El tiempo de muestreo para el procesamiento de las señales es 2×10^{-3} (s).

El control del motor se basa en un esquema Proporcional Derivativo (PD), que utiliza la realimentación del ángulo del motor como se describe en [Feliu05]. No se ha

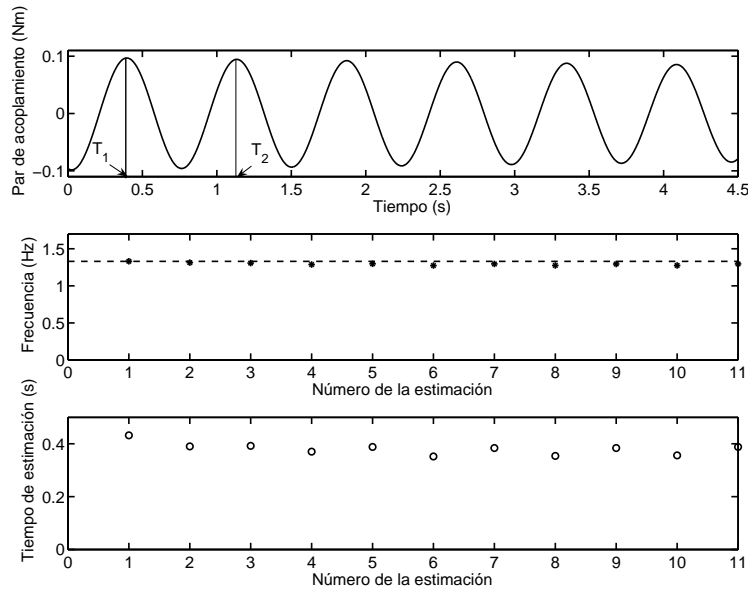


Figura 5.4: De arriba a abajo. Vibración obtenida por el par de acoplamiento. Estimaciones de frecuencia consecutivas (*), f_0 (- -). Tiempo necesario para cada estimación de frecuencia (o).

introducido ningún controlador para cancelar las vibraciones del brazo, por tanto después de cualquier movimiento del motor, el brazo flexible vibra con una frecuencia ω_0

5.2.3. Estimación algebraica en línea

En el capítulo 3 se han desarrollado las expresiones que describen el estimador de frecuencia, tanto si la señal sinusoidal está centrada en cero o con cierto sesgo. En este apartado utilizaremos el estimador de frecuencia definido por las expresiones (3.15) y (3.16). Este estimador proporciona resultados precisos en un breve periodo de tiempo, de modo que es posible usar el algoritmo de estimación de frecuencia para obtener un valor de ω_0 a pesar de no modelar el amortiguamiento.

La Figura 5.4 muestra el par de acoplamiento ($\Gamma_{coup} = \hat{\Gamma}_{coup}n$) obtenido del robot flexible de la Figura 5.3. La referencia al sistema de control del motor θ_m^* es una rampa de pendiente y valor final igual a la unidad. En las estructuras flexibles, los experimentos con respuesta a rampa, así como otro tipo de trayectorias, proporcionan señales con una amplitud que no es constante, es decir, estas señales exhiben la influencia de un coeficiente

de amortiguamiento no modelado. En el caso de la estructura flexible que se presenta aquí, este amortiguamiento es relativamente bajo. Además, si T_1 y T_2 son los instantes donde la señal alcanza un pico, según se muestra en la parte superior de la Figura 5.4, su coeficiente de amortiguamiento puede ser aproximado por:

$$\zeta_0 = \frac{\ln\left(\frac{y(T_2)}{y(T_1)}\right)}{2\pi f_0(T_2 - T_1)} \quad (5.12)$$

Sustituyendo $y(T_1) = 0.0969$, $y(T_2) = 0.0945$, $T_1 = 0.394$ y $T_2 = 1.136$, resulta que $\zeta_0 \approx 0.004$. Con este valor de amortiguamiento y considerando la Figura 5.1, se concluye que es posible estimar la frecuencia natural ω_0 .

Hay que destacar que la masa es desconocida, pero se usa la expresión (5.11) para comparar los resultados obtenidos por el estimador. Si se sustituyen los valores de la Tabla 5.1 y se usa un valor de masa: $m = 45.55$ (g), se obtiene $f_0 = 1.33$ (Hz). La estimación de frecuencia se lleva a cabo aplicando el algoritmo propuesto hasta cumplir con el criterio (5.4). Una vez que el estimador cumpla con dicho criterio, se resetea el estimador y se repite el proceso de estimación.

Este procedimiento proporciona estimaciones consecutivas (algo parecido a muestreo aperiódico del valor de la frecuencia de vibración) en instantes determinados por el criterio (5.4). Empleando el algoritmo propuesto, se obtiene una secuencia de estimaciones de frecuencia representadas por un asterisco (*) en el gráfico central de la Figura 5.4, donde la frecuencia nominal f_0 se representa por una línea discontinua. La media muestral de las estimaciones de frecuencia es $\hat{f} = 1.31$ (Hz). Por tanto, el periodo sinusoidal es $\hat{T} \approx \frac{1}{1.31} \approx 0.76$ (s). En estas estimaciones, se ha utilizado un filtro de segundo orden con $\omega_c = 6\pi$ (rad/s) y $\zeta = 0.707$. El tamaño de la ventana es $M = 3$ (ver (5.4)). Como las estimaciones de frecuencia se obtuvieron bastante rápido, la distorsión de la señal sinusoidal pura causada por el amortiguamiento no modelado, afecta mínimamente a la precisión de la estimación. La parte inferior de esta figura representa los tiempos de estimación alcanzados para cada estimación de frecuencia. El tiempo de estimación está cercano a la mitad del periodo.

Las estimaciones consecutivas obtenidas por el método algebraico vienen representadas por asteriscos (*) en la Figura 5.5, donde se muestran también otros métodos de

estimación con fines de comparación. El siguiente apartado trata con detalle este asunto.

5.3. Comparativa con otros métodos recientemente publicados

Con el fin de comparar el funcionamiento del estimador de frecuencia algebraico, se realiza la estimación de la misma señal mediante la técnica descrita por Ziarani y Konrad en [Ziarani04]. Una breve descripción de esta técnica se realizó en el capítulo 3, donde se definió la dinámica del estimador mediante las expresiones (3.37)-(3.38). La frecuencia natural estimada por este método se muestra en la Figura 5.5, en línea continua (-), donde los valores seleccionados para los parámetros de diseño son $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 3000$, $\mu_3 = 0.1$ y $\omega_i = 6\pi$ (rad/s). La figura muestra el funcionamiento de esta técnica adaptativa no lineal, que alcanza una estimación del parámetro con un tiempo de estimación mucho mayor que el utilizado por el método algebraico, que sólo necesita un tiempo menor a 0.5 (s) para realizar una estimación fiable. La estimación representada en la Figura 5.5 se puede suavizar con una adecuada selección μ_1, μ_2, μ_3 , sin embargo, la versión suavizada necesitará un tiempo de estimación aún mayor.

El método algebraico también es capaz de estimar otros parámetros importantes de la señal sinusoidal, como son la amplitud y la fase. El trabajo presentado por Hou en [Hou05] corresponde a un estimador dinámico de frecuencia con la propiedad de convergencia global. Este estimador también fue introducido en el capítulo 3 mediante las ecuaciones (3.39)-(3.44). Este algoritmo también puede obtener estimaciones sobre la amplitud y la fase. Sin embargo, en esta aplicación particular solamente nos centramos en la obtención de la frecuencia, por lo que el estimador de Hou se puede simplificar, ver [Hou05], a un sistema de segundo orden descrito por:

$$\dot{z} = -\alpha_1 z + (\alpha_2 y^2/2 - \eta - \alpha_1^2)y \quad (5.13)$$

$$\dot{\eta} = \alpha_2 y(z + \alpha_1 y) \quad (5.14)$$

$$\hat{\theta} = \eta - \alpha_2 y^2/2 \quad (5.15)$$

donde α_1 y α_2 son números reales positivos que influyen sobre el comportamiento del esti-

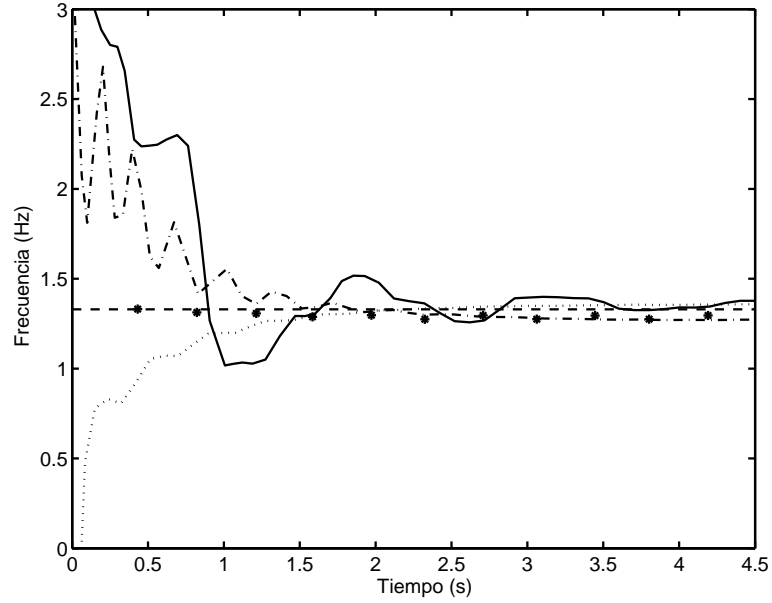


Figura 5.5: Estimación de la frecuencia de la señal real. Algebraico (*), Ziarani(-), Hou (:), Mojiri-Bakshai(-·), f_0 (- -)

mador respecto a la capacidad de seguimiento de la frecuencia (*tracking*) y la precisión de la estimación. El parámetro $\hat{\theta}$ converge al valor cuadrado de la frecuencia cuando el tiempo tiende a infinito. La propiedad de convergencia global se analiza en [Hou05].

La Figura 5.5 muestra la frecuencia estimada según (5.13)-(5.15), en línea punteada (:), donde $\alpha_1 = 10$ y $\alpha_2 = 5000$ son los valores elegidos para definir los parámetros de diseño. En este caso, la estimación de la frecuencia desconocida se realiza en 1.5 segundos aproximadamente.

Mojiri y Bakhshai en [Mojiri04] propusieron un estimador de frecuencia de señales periódicas, pero no necesariamente, sinusoidales puras. Dicho estimador se basa en una modificación del algoritmo presentado por Hsu *et al.* en [Hsu99], donde la señal sinusoidal $y(t)$ se escala por un factor $2\xi_1\theta^2$. El conjunto de ecuaciones diferenciales que definen el estimador es el siguiente:

$$\ddot{x} + 2\xi_1\theta\dot{x} + \theta^2x = 2\xi_1\theta^2y(t) \quad (5.16)$$

$$\dot{\theta} = -\xi_2x(2\xi_1\theta^2y(t) - 2\xi_1\theta\dot{x}) \quad (5.17)$$

donde ξ_1 y ξ_2 son parámetros de diseño, y la señal θ converge a ω . Para el caso de una señal

sinusoidal pura, la órbita periódica se localiza en:

$$O = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cos \omega t \\ A\omega \sin \omega t \\ \omega \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Si la señal $y(t)$ no es una sinusoidal pura, el estimador convergerá a una vecindad próxima al ciclo límite de la frecuencia fundamental aproximadamente. La precisión de la convergencia dependerá de los parámetros de diseño y de la distorsión de la señal. En este estimador, se proporciona una condición de estabilidad que tiene que cumplir el diseño de los parámetros, de modo que:

$$\frac{A^2 \xi_2}{2} < 1 \quad (5.19)$$

La estimación de la frecuencia, proporcionada por este último método, se muestra en línea $(-\cdot)$, en la Figura 5.5. La convergencia de este método se lleva a cabo en aproximadamente 1.5 segundos. Aquí los valores elegidos para el diseño de parámetros son $\xi_1 = 0.1$ y $\xi_2 = 1.25$. El vector de condiciones iniciales es: $[x, \dot{x}, \theta_i] = [1, 1, 6\pi]$, donde las unidades de θ_i son (rad/s), por tanto $f_i = 3$ (Hz). Hay que destacar que respecto al método propuesto por Mojiri-Bakhshai se observan mejores estimaciones si el valor de la frecuencia inicial se elige de manera que sea mayor que la frecuencia real.

Se puede concluir que todos los métodos analizados aquí necesitan varios ciclos para la convergencia de la estimación. Mientras que el estimador algebraico converge aproximadamente en la mitad del ciclo de la señal sinusoidal. Además, el resto de métodos requieren un diseño de parámetros previo, y una definición de unas condiciones iniciales. Estas elecciones son determinantes a la hora de definir características tan importantes como el tiempo de convergencia y la precisión. Tal diseño no es necesario en el desarrollo del método algebraico.

5.4. Estimación de frecuencia ante cambios abruptos

En este apartado se diseña un experimento para evaluar la robustez del estimador propuesto ante cambios abruptos de frecuencia. Para ello, se realizarán cambios de masa en el

extremo del robot mostrado en la Figura 5.3. Básicamente, los cambios de masa se traducen en cambios de frecuencia. Se han elegido como masas los siguientes valores, $m_1 = 30$ (g), $m_2 = 45.55$ (g) y $m_3 = 61.17$ (g), que corresponden, de acuerdo a la expresión (5.11), al conjunto de frecuencias $f_1 = 1.64$, $f_2 = 1.33$ y $f_3 = 1.15$ (Hz). Además, se han cambiado los valores finales de las señales de entrada tipo rampa para conseguir diferentes vibraciones con diferentes relaciones señal-ruido. De modo que las señales aquí analizadas muestran unas condiciones de funcionamiento bastante severas para la mayoría de los algoritmos.

La parte superior de la Figura 5.6 muestra la señal analizada que corresponde a varios registros de vibración con diferentes masas en el extremo, además de diferentes entradas. Se puede observar que en las vibraciones producidas por la primera masa se tiene una relación señal ruido baja, y en la tercera masa se puede distinguir una atenuación de la señal altamente no lineal. El segundo y tercer gráfico de la Figura 5.6 representa la estimación de la frecuencia proporcionada por los diferentes métodos. El conjunto de parámetros elegidos son: $u_1 = 10$, $u_2 = 3000$, $u_3 = 0.1$; $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 5000$; $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 1.25$, $f_i = 3$ (Hz) para los métodos de Ziarani, Hou y Mojiri-Bakshai, respectivamente, donde f_i es la condición inicial. Las frecuencias nominales $f_1 = 1.64$, $f_2 = 1.33$ y $f_3 = 1.15$ (Hz) también se han dibujado en línea discontinua en el segundo y tercer gráfico de la Figura 5.6 con el fin de evaluar el funcionamiento de los algoritmos.

A pesar de iniciar la estimación cerca de la frecuencia inicial, ningún método puede estimar los tres cambios de frecuencia de la barra excepto el algebraico, cuyas estimaciones están muy cercanas a las frecuencias nominales, ver Figura 5.6. Para realizar estas estimaciones se ha realizado un filtrado invariante determinado por $\omega_c = 6\pi$ y $\xi = 0.707$. Además, el tamaño de la ventana del criterio de estimación es $M = 3$. Un análisis estadístico de las estimaciones proporcionadas por la técnica algebraica se muestra en la Tabla 5.2, donde el sesgo y la varianza vienen dadas por la descomposición del error cuadrático medio.

Dado que el primer experimento se caracteriza por una baja relación señal ruido, la estimación de frecuencia \hat{f}_1 tiene una varianza mayor que las estimaciones producidas en el segundo y tercer experimento. Este error se ha calculado frente a las frecuencias obtenidas mediante la expresión (5.11) basándonos en el conocimiento de la dinámica del brazo y su masa en el extremo. Por tanto, se puede verificar que el método algebraico es más robusto

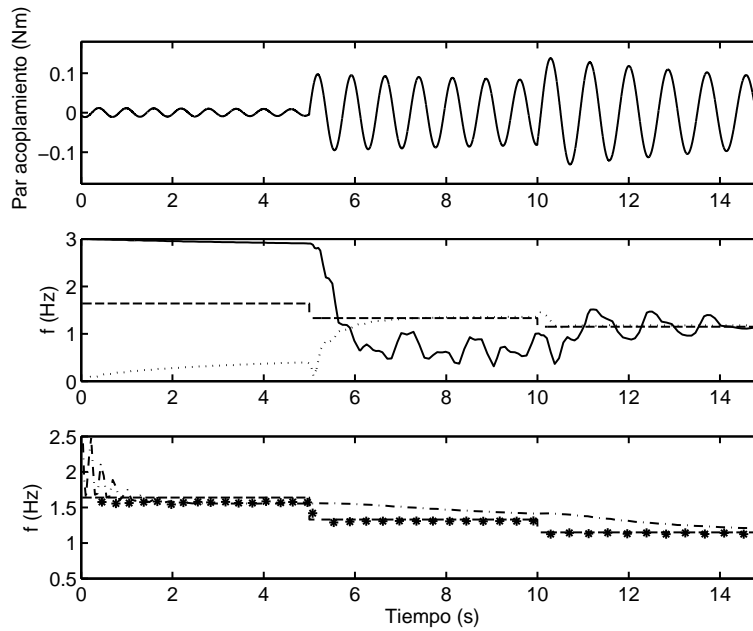


Figura 5.6: Estimación de frecuencia de la señal real. Frecuencias nominales f_1 , f_2 , f_3 (- -), Ziarani(-), Hou (:), Algebraico (*), Mojiri-Bakhshai (-·)

Tabla 5.2: Estimación del sesgo y varianza para el método algebraico

	f (Hz)		
	1.64	1.33	1.15
Sesgo	$7.0 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
Varianza	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-5}$

y rápido que el resto de los métodos aquí estudiados. Además, la técnica aquí propuesta no requiere ningún parámetro de diseño y es completamente independiente de las condiciones iniciales.

Estas ventajas sitúan al método propuesto en un lugar privilegiado para afrontar el problema de las vibraciones en estructuras flexibles. En particular, cuando es posible que la estructura pueda experimentar cambios abruptos de frecuencia. La aplicación de este algoritmo a monitorización de estructuras mecánicas puede albergar importantes mejoras.

5.5. Estimador con amortiguamiento

Como se describió en el apartado anterior, se ha analizado la vibración de las estructuras como ondas sinusoidales puras, es decir, hemos desarrollado un estimador de frecuencia algebraico donde no se ha modelado el efecto del amortiguamiento. De modo, que este estimador algebraico sólo puede funcionar correctamente para bajos coeficientes de amortiguamiento como se mostró en las simulaciones de la Figura 5.1. Entonces la siguiente cuestión sería: ¿Es posible desarrollar un estimador algebraico capaz de estimar la frecuencia y el amortiguamiento a partir de una vibración amortiguada? En otras palabras, ver si es posible estimar los parámetros ξ_n y f de la ecuación:

$$y(t) = Ae^{-\zeta_n 2\pi f t} \sin(2\pi f \sqrt{1 - \zeta_n^2} t + \phi) \quad (5.20)$$

Hay que destacar el carácter no lineal de esta ecuación, porque es posible que sea este carácter no lineal el responsable de que los esfuerzos de los investigadores se hayan dirigido a estimar únicamente la frecuencia de la vibración ignorando el efecto del amortiguamiento. Además si fuésemos capaces de estimar ambos parámetros simultáneamente, el ámbito de aplicaciones de este estimador sería mayor, es decir, cualquier sistema que puede ser descrito por un modelo correspondiente a un sistema de segundo orden podría utilizar el estimador de frecuencia y amortiguamiento. De hecho, este estimador es el caso general para cualquier valor de amortiguamiento, mientras que en los apartados anteriores solamente se ha analizado el caso particular de valores de amortiguamiento cercanos a cero.

Pues bien, este problema puede ser resuelto por la metodología derivativa algebraica de identificación, de forma que, como se verá a continuación, se podrá desarrollar un estimador para el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural de la vibración. El desarrollo de este estimador se basa en los trabajos de Neve *et al.* en [Neves07] y Mboup en [Mboup]. En estas referencias se compara el funcionamiento de este estimador frente al algoritmo de Prony modificado, ver [Osborne75].

5.5.1. Formulación del problema

Sea una señal sinusoidal amortiguada $y(t)$ de la siguiente forma:

$$y(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi) + \gamma + n(t) \quad (5.21)$$

donde A , ω , ϕ y α son, respectivamente, la amplitud, la frecuencia, la fase y el coeficiente de amortiguamiento. Se busca calcular tan rápido como sea posible, los parámetros desconocidos de la frecuencia ω y el coeficiente de amortiguamiento α . El ruido de la señal viene representado por un sesgo $\gamma(t)$ y un proceso fluctuante de alta frecuencia con media cero $n(t)$. No se supone ningún tipo de conocimiento estadístico sobre la señal $n(t)$.

5.5.2. Desarrollo del estimador algebraico para el caso amortiguado

Considérese la señal (5.21) libre de ruidos de alta frecuencia: $y(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi) + \gamma$. Es fácil verificar que $y(t)$ satisface:

$$\ddot{y}(t) = 2\alpha\dot{y}(t) - (\alpha^2 + \omega^2)(y(t) - \gamma) \quad (5.22)$$

cuyos coeficientes dependen de los parámetros desconocidos. Esta ecuación es claramente no lineal en los parámetros α y ω , que se recogen en el vector $\Theta = (\alpha, \omega)$. Sin embargo, si se define $\theta'_1 = 2\alpha$ y $\theta'_2 = -(\alpha^2 + \omega^2)$, la ecuación (5.22) se convierte en una ecuación lineal en los parámetros:

$$\Theta' = \begin{bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Por tanto, θ'_1 y θ'_2 se consideran ahora como los dos nuevos parámetros independientes que se necesita estimar. Trasladando (5.22) en el dominio operacional, se obtiene, después de eliminar las condiciones iniciales y el sesgo constante γ ,

$$s^3y^{(3)} + 9s^2y'' + 18sy' + 6x = (s^2y^{(3)} + 6sy'' + 6y')\theta'_1 + (sy^{(3)} + 3y'')\theta'_2 \quad (5.24)$$

Dado que hay que estimar dos parámetros, es recomendable completar (5.24) con una segunda ecuación para obtener un sistema completamente determinado. Esto se puede hacer derivando ambas partes de la ecuación (5.24) respecto a s , tal que:

$$s^3y^{(3)} + 9s^2y'' + 18sy' + 6x = (s^2y^{(3)} + 6sy'' + 6y')\theta'_1 + (sy^{(3)} + 3y'')\theta'_2 \quad (5.25)$$

$$s^3y^{(4)} + 12s^2y^{(3)} + 36sy'' + 24y' = (s^2y^{(4)} + 8sy^{(3)} + 12y'')\theta'_1 + (sy^{(4)} + 4y^{(3)})\theta'_2 \quad (5.26)$$

Eliminando las derivadas temporales, de acuerdo al desarrollo de los estimadores algebraicos previos, se llega al siguiente sistema:

$$\hat{P}\tilde{\Theta}' = \hat{Q} \quad (5.27)$$

donde la matriz \hat{P} y el vector \hat{Q} vienen dados por:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \frac{y^{(3)}}{s^{\nu-2}} + 6\frac{y''}{s^{\nu-1}} + 6\frac{y'}{s^\nu} & \frac{y^{(3)}}{s^{\nu-1}} + 3\frac{y''}{s^\nu} \\ \frac{y^{(4)}}{s^{\nu-2}} + 8\frac{y^{(3)}}{s^{\nu-1}} + 12\frac{y''}{s^\nu} & \frac{y^{(4)}}{s^{\nu-1}} + 4\frac{y^{(3)}}{s^\nu} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

y

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \frac{y^{(3)}}{s^{\nu-3}} + 9\frac{y''}{s^{\nu-2}} + 18\frac{y'}{s^{\nu-1}} + 6\frac{y}{s^\nu} \\ \frac{y^{(4)}}{s^{\nu-3}} + 12\frac{y^{(3)}}{s^{\nu-2}} + 36\frac{y''}{s^{\nu-1}} + 24\frac{y'}{s^\nu} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Este estimador elimina las derivadas temporales de la señal cuando $\nu \geq 4$.

Una vez se han obtenido las estimaciones de Θ' , los parámetros α y ω se obtienen de acuerdo a las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\alpha = \frac{\theta'_1}{2} \quad (5.30)$$

$$\omega^2 = -(|\theta'_1|/4 + \theta'_2) \quad (5.31)$$

Los parámetros Θ' estimados, se dicen linealmente identificables, mientras que los parámetros $\Theta = [\alpha, \omega]$ que se obtienen de funciones algebraicas que dependen de Θ' se dicen débilmente linealmente identificables, ver [Fliess03a].

5.5.3. Simulaciones

Para comprobar el funcionamiento del estimador algebraico desarrollado en el apartado anterior, se va a realizar una simulación recuperando la forma normalizada vista en (5.3). Comparando las ecuaciones (5.3) y (5.21), se puede verificar que para el caso de la onda amortiguada normalizada ($f = 1$ Hz), se tiene:

$$\alpha = -2\pi \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \quad (5.32)$$

$$\omega = 2\pi \quad (5.33)$$

El ejercicio consiste en simular una onda sinusoidal amortiguada con un coeficiente de amortiguamiento $\xi_n = 0.2$, siendo éste valor de amortiguamiento un orden de magnitud

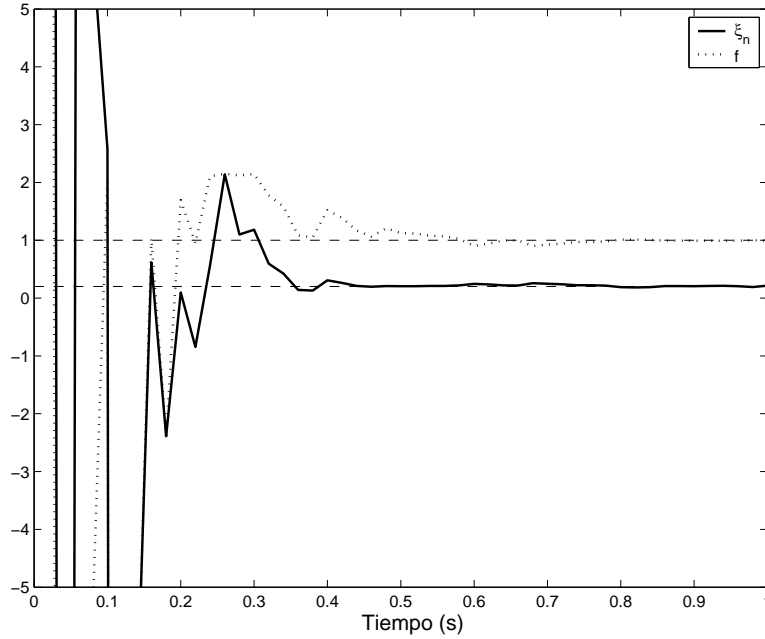


Figura 5.7: Estimación de la frecuencia (·) y del coeficiente de amortiguamiento (-)

mayor que los valores mostrados en la Figura 5.1, además con un ruido simulado que se divide en: una componente de sesgo constante $\gamma = 1$ y un ruido fluctuante modelado por un ruido blanco con desviación típica $\sigma = 0.001$. El orden de los filtros invariantes en (5.28)-(5.29) es $\nu = 4$.

En la Figura 5.7 se muestra la estimación de la frecuencia natural normalizada y el coeficiente de amortiguamiento. Ambas estimaciones proporcionan un valor adecuado antes del tiempo correspondiente al periodo de la onda ($T = 1$ (s)). De forma que en el caso que la estructura posea un coeficiente de amortiguamiento elevado para utilizar el estimador de frecuencia de una onda sinusoidal pura, es recomendable utilizar un estimador de frecuencia y amortiguamiento descrito en (5.27)-(5.29), ya que este estimador está basado en un modelo más preciso.

Para tener una idea de la precisión de la estimación se puede calcular el error de la estimación como:

$$\epsilon(t) = |y(t) - \hat{y}(t)| \quad (5.34)$$

donde $y(t)$ es la señal real y $\hat{y}(t)$ representa la señal estimada basada en los cálculos de f y

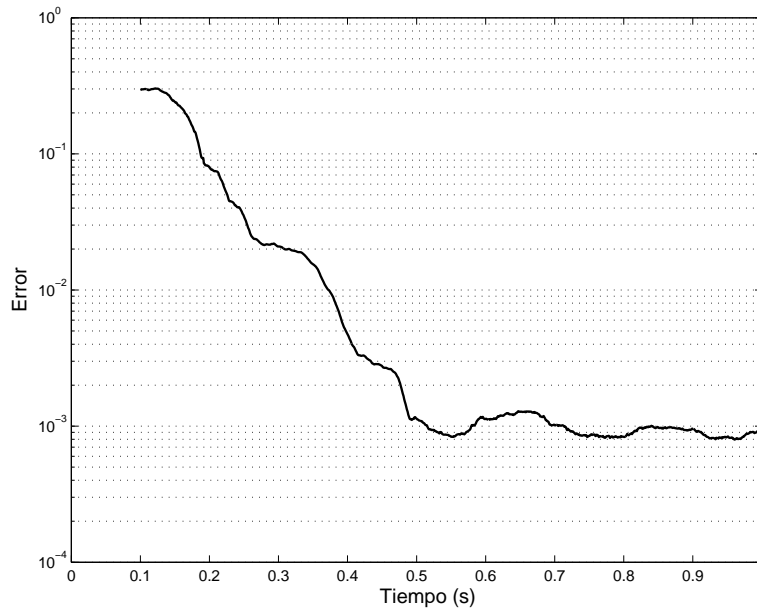


Figura 5.8: Error de estimación

ξ mostrados en la Figura 5.7. De esta manera, la Figura 5.8 muestra el error de estimación, donde el eje de abscisas está en una escala logarítmica. Con el fin de obtener un señal de error menos oscilante se ha utilizado una versión suavizada del error (5.34), mediante una media móvil. En otras palabras, la señal de error mostrada en la Figura 5.8 corresponde a:

$$\bar{\epsilon}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \epsilon(t - i) \quad (5.35)$$

donde M es el número de muestras que definen la dimensión de la ventana. En este caso, para un periodo de muestreo $T_s = 10^{-3}$ (s), el parámetro M se fijó a 100 muestras. En esta misma figura se puede observar que el error de estimación alrededor de la mitad del periodo de la señal sinusoidal amortiguada alcanza una precisión equivalente al orden de magnitud del ruido simulado.

5.6. Tiempo de estimación

En numerosas ocasiones, como en las aplicaciones de control adaptativo, es necesario conocer cuándo las estimaciones de los parámetros son adecuadas para actualizar los

parámetros del control. Éste instante de tiempo se conoce como el tiempo de estimación. Generalmente se supone que cuando la señal tiene una alta relación SNR se espera obtener las estimaciones más rápido que cuando la señal tiene una baja relación SNR. Sin embargo, otra forma de ver el problema es encontrar un tiempo de estimación que haga que las estimaciones sean robustas a las variaciones en los ruidos que puedan tener las señales.

Esto se puede conseguir gracias al número de condición $K(P) = \|P^{-1}\| \|P\|$ de la matriz P en (5.27), donde se ha utilizado la norma L_2 en el comando *cond* de MATLAB para calcular dicho número de condición. De forma que si se encuentra un tiempo que proporcione un número de condición bajo para la matriz P , ese será el tiempo de estimación que proporcionará soluciones más robustas. De acuerdo a este argumento se ha realizado un simulación de Montecarlo, donde se ha recuperado la señal normalizada en (5.3). La idea es variar el tiempo final de cada simulación entre $t=0.2:0.01:2$, de manera que para cada tiempo final de simulación se obtenga un número de condición $K(P)$, y así poder comprobar si existe algún mínimo. Éste experimento se ha repetido 100 veces.

La Figura 5.9 muestra la evolución del número de condición promediado con respecto al tiempo. De hecho, para un tiempo $t \approx 0.92$ (s) el número de condición alcanza un mínimo. Por tanto, la estimación de los parámetros será más fiable si se realizan en el tiempo $t = 0.92$ aproximadamente.

Con el fin de comprobar que el previamente mencionado tiempo de estimación proporciona buenas estimaciones, se propone otra simulación de Montecarlo. En este caso se analiza el error de estimación cuando se varía el nivel de ruido de la señal. Cada experimento se repite 1000 veces.

Para realizar esta simulación se define la relación SNR como:

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1} |y(t_i) - \gamma|^2}{\sum_{i=0}^{N-1} |n(t_i)|^2} \right) \quad (5.36)$$

donde N es el número total de muestras en la simulación. Dado que el interés reside en estudiar el tiempo de estimación dentro de un ciclo completo de la señal sinusoidal, se ha elegido $N=1000$ muestras. La Figura 5.10 muestra el error promediado que se ha obtenido para diferentes valores de SNR. En esta misma Figura se puede observar que el error en $t=0.9$ (s) alcanza un valor equivalente al orden de magnitud del ruido introducido en la señal. Estos

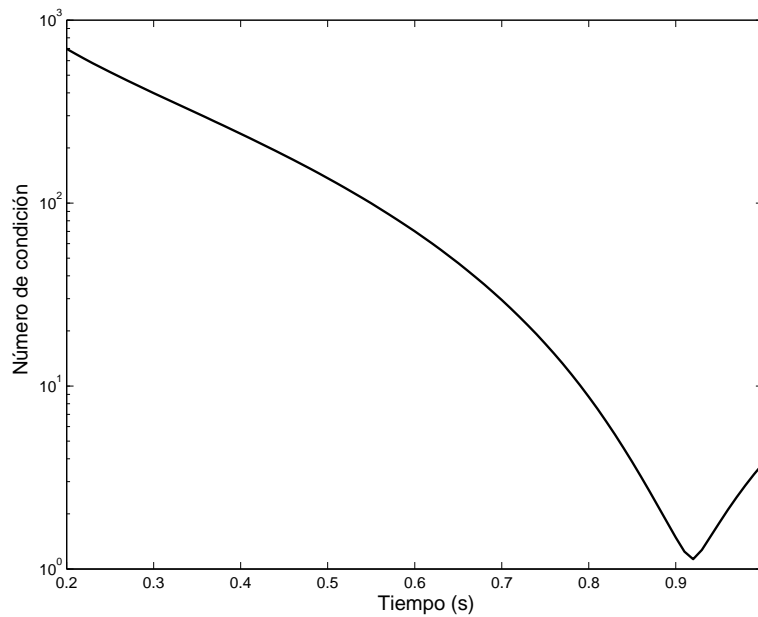


Figura 5.9: Número de condición vs. tiempo

resultados son extrapolables a cualquier onda amortiguada deshaciendo la normalización vista en (5.2). Es interesante destacar que si la señal posee un nivel de SNR alto se pueden alcanzar estimaciones con una tolerancia aceptable en un tiempo inferior a la mitad del periodo de la señal. De hecho, la rapidez de la estimación es uno de los puntos fuertes de la identificación algebraica.

No obstante, el tiempo de estimación también depende del coeficiente de amortiguamiento y del orden del filtro invariante elegido. Para mostrar esta dependencia se han realizado varias simulaciones. En la Figura 5.11 se muestra el tiempo de estimación mínimo frente al coeficiente de amortiguamiento ξ_n , donde se define el tiempo de estimación mínimo como el tiempo de estimación donde se alcanza el menor número de condición. En esta misma Figura se puede observar como el tiempo de estimación mínimo disminuye cuando el coeficiente de amortiguamiento aumenta. Por otro lado, si aumentamos el orden del filtro invariante se aumenta el retardo en la estimación.

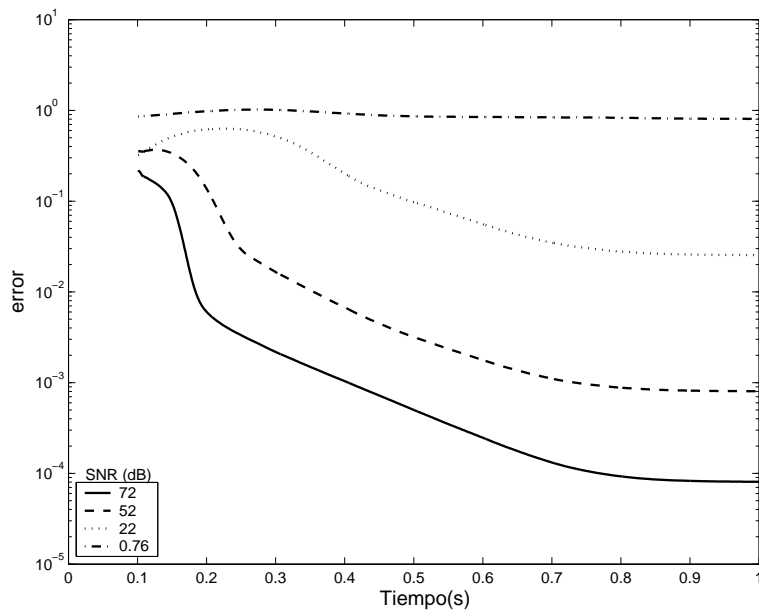


Figura 5.10: Error de estimación para diferentes valores de SNR

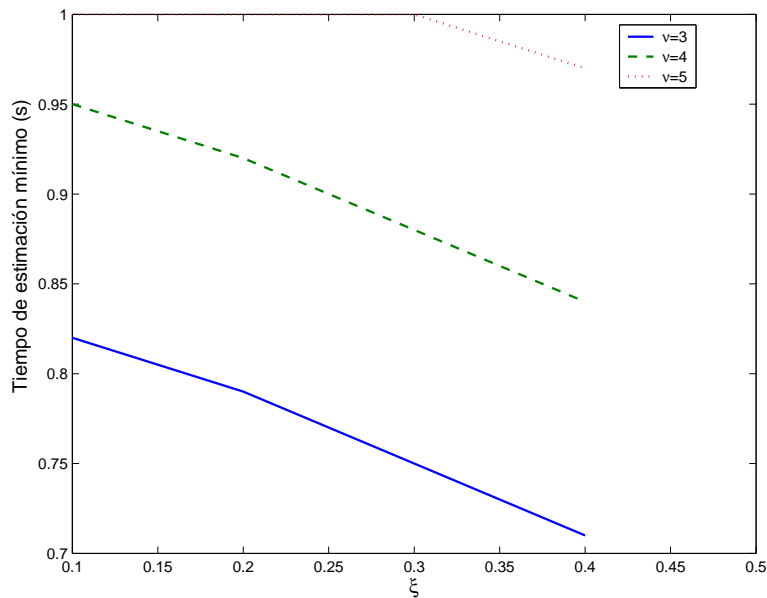


Figura 5.11: Tiempo de estimación mínimo vs. coeficiente de amortiguamiento para diferentes órdenes del filtrado invariante

Capítulo 6

Identificación algebraica con aplicación en control adaptativo

En el capítulo anterior se describió la importancia de los robots flexibles. A su vez, se evaluaron diferentes estimadores de frecuencia en el análisis de vibraciones procedentes de estructuras flexibles. Sin embargo, para utilizar estos estimadores de frecuencia necesitamos que la estructura esté vibrando ya que modelamos la vibración como una onda sinusoidal. No obstante, en algunas ocasiones no se dispone de la estructura vibrando continuamente sino que se requiere que la estructura siga una trayectoria determinada y no vibre en ningún momento, es decir que la estructura esté bajo control.

El objetivo de este capítulo es desarrollar un identificador algebraico de los parámetros del sistema desconocidos combinado con un controlador, sea en lazo cerrado (por ejemplo, un controlador integral proporcional generalizado (GPI)) o en lazo abierto (por ejemplo, un input shaping (IS)).

Aunque en la redacción del estado del arte en el capítulo 2 pudiera parecer que la identificación ha sido una teoría independiente, la evolución de la identificación de sistemas, generalmente, ha estado bajo la tutela de la teoría de control. De hecho, la mayoría de los artículos más destacados sobre identificación están publicados en revistas orientadas al control. De modo que para entender la relación entre el control y la identificación es útil

realizar un breve resumen de la evolución histórica del control¹.

En el comienzo del siglo XX, el control automático permaneció como una especialidad de los ingenieros mecánicos. Esto fue seguido de un periodo donde los reguladores y controladores eléctricos llegaron a ser bastante comunes. Alrededor de 1940, ingenieros eléctricos, mecánicos, y químicos estuvieron diseñando mecanismos de control automático en sus respectivos campos usando métodos muy similares alcanzados por diversos caminos y ocultos bajo terminologías completamente diferentes. Aunque al principio no se reconoció ninguna conexión entre estos desarrollos, gradualmente, se empezó a entender que poseían un base común y al final de la segunda guerra mundial, se empezó a fundar una teoría que era matemáticamente elegante y universal. En 1948, Wiener denominó esta nueva disciplina como Cibernética, [Wiener48].

La historia del control automático ha sido testigo del esfuerzo continuo hacia métodos más rápidos y precisos. Los métodos de respuesta en frecuencia fueron desarrollados basados en los esfuerzos de Black, Nyquist, y Bode en el diseño de amplificadores electrónicos. La inevitable presencia de ruido en las variables de entrada y salida propició soluciones estadísticas para problemas de estimación y control, donde el problema del regulador gaussiano cuadrático lineal (LQG) utilizando el principio de separación y el desarrollo del filtro de Kalman llegaron a ser un hito, alrededor de los años 60.

Incluso cuando los esfuerzos han sido grandes, en numerosas ocasiones los modelos lineales no han sido lo suficientemente útiles para la descripción de determinados procesos más complejos. Esto ha dado lugar al desarrollo de nuevas áreas de control, entre las que se encuentran los sistemas adaptativos. Pero, ¿qué es un sistema adaptativo? El término adaptación se define en biología como “una conformación ventajosa de un organismo a cambios en su entorno”. En 1957, Drenick and Shahbender en [Drenick57] introdujeron el término sistema adaptativo en teoría de control para representar sistemas de control que monitorizan su propio funcionamiento y ajustan sus parámetros en la dirección de un mejor funcionamiento. De cualquier forma, posteriormente han ido surgiendo otras definiciones ya que no ha habido una que satisfaga a todos los autores unánimemente. Un estudio de las

¹Este resumen sigue de cerca la introducción del libro *Stable Adaptive Systems* cuyo autor es K. Narendra, [Narendra89]

definiciones generalmente aceptadas se puede encontrar en [Narendra89].

Suponiendo que un controlador A se usa para controlar una determinada planta o proceso B, el problema se puede clasificar como determinístico, estocástico, o adaptativo dependiendo de la información disponible *a priori* de A con respecto a B, ver Feldbaum en [Feldbaum65].

Por ejemplo, en el caso determinístico, las características del proceso B, la información sobre las perturbaciones, el conocimiento del estado del sistema así como también el índice de funcionamiento están disponibles. Por tanto, la acción de control óptimo se puede determinar mediante la teoría de control.

En el caso estocástico, las perturbaciones que actúan sobre el proceso B son desconocidas. Éstas se pueden estimar midiendo las observaciones del sistema. Sin embargo, si lo que se necesita es el control de un sistema parcialmente conocido (el caso adaptativo) ninguno de los anteriores procedimientos es adecuado. Es decir, intentar controlar una planta desconocida sin identificación puede dar lugar a una respuesta errónea.

Por tanto, de acuerdo a Feldbaum, el controlador A en un sistema de control automático con información incompleta acerca del proceso B debe, simultáneamente, solucionar dos problemas que están íntimamente relacionados pero muy diferentes entre sí. Feldbaum se refirió a esto como el *control dual*.

Primero, sobre la base de la información recogida, el controlador debe determinar las características y estados de la planta B. Segundo, sobre la base de este conocimiento adquirido, tiene que determinar qué acciones son necesarias para un control apropiado. El primer problema puede ser considerado de estimación o identificación mientras que el segundo es un problema de control.

Existen dos vertientes diferentes, filosóficamente hablando, para la solución del problema del control adaptativo previamente discutido. La primera línea se refiere al *control indirecto*, donde los parámetros de la planta se estiman en línea y los parámetros de control se ajustan de acuerdo a esas estimaciones. Este procedimiento también se conoce en la literatura como *identificación explícita*, ver [Åström80]. En cambio, en lo que se refiere a *control directo*, no se identifica los parámetros de la planta sino que los parámetros del control son directamente ajustados para mejorar el índice de funcionamiento. Esto también

se conoce como *identificación implícita*.

Este trabajo se centra en la identificación explícita y por tanto se realiza un control indirecto. De hecho, se parte de las ecuaciones diferenciales que definen el brazo flexible, y se estima la frecuencia natural ω_0 , que es el parámetro que se espera pueda cambiar. De acuerdo al recopilatorio de métodos de control dual realizado por Filatov y Unbehauen en [Filatov00], este tipo de controlador, además sería de equivalencia cierta, ya que no se tiene en cuenta la incertidumbre de la estimación. De cualquier forma, serán los aspectos concernientes a la identificación los que se abordarán con mayor detalle en este capítulo.

Una vez introducida la necesidad de identificar un sistema (parcialmente desconocido) para realizar un control adecuado, es posible adentrarse un poco más en el análisis de las técnicas de identificación disponibles.

Dado que los sistemas físicos utilizados en control se suelen modelar en tiempo continuo, para realizar este control dual necesitamos identificar en tiempo continuo. De modo que enlazando con la introducción de identificación en tiempo continuo que se ha realizado en el capítulo 2 del estado del arte, en el apartado 2.7. las diferentes metodologías de identificación en tiempo continuo se suelen clasificar en dos categorías:

1. Métodos Directos: se intentan estimar los parámetros definidos en tiempo-continuo de los datos obtenidos en tiempo-discreto mediante aproximaciones para las señales y operadores en el modelo en tiempo-continuo.
2. Métodos Indirectos: se necesita un modelo equivalente en tiempo-discreto para ajustar los datos. Posteriormente, se transfieren los parámetros estimados en tiempo-discreto al tiempo-continuo. En el caso del método indirecto, hay una teoría clásica desarrollada (ver [Ljung99]). No obstante, estos métodos Indirectos tienen varias desventajas:
 - Necesitan algoritmos de minimización que requieren un coste computacional alto sin garantía de convergencia.
 - Los parámetros estimados pueden no guardar correlación con las propiedades físicas del sistema.
 - Para periodos de muestreo muy pequeños comparado con las constantes naturales del sistema, los polos y ceros se concentran cerca del punto -1 en el plano-z.

Por tanto, numerosos investigadores dirigen sus esfuerzos hacia los métodos Directos, ver por ejemplo [Moussaoui05], [Söderström00], [Larsson02] y [Mahata06], entre otros.

Desafortunadamente, la identificación de sistemas robóticos se centra generalmente en métodos Indirectos (ver [Johansson00], [Eker04]), y por tanto las referencias que utilizan métodos directos son escasas. Por otro lado las técnicas de identificación existentes, incluidas las procedentes de los métodos Directos, no se caracterizan por su rapidez en la estimación. Son estas razones las que han motivado la utilización de la identificación algebraica, que como se ha demostrado en anteriores capítulos, posee la rapidez en la estimación como uno de sus puntos fuertes.

6.1. Control adaptativo en lazo cerrado

Centrándose en los aspectos relativos a identificación en lazo cerrado, hay que poner de manifiesto también la problemática que acarrea la identificación en lazo cerrado respecto la identificación en lazo abierto. En [Ljung99], páginas 428-440 se trata este tema. Resumiendo se podría decir que:

- Los experimentos en lazo cerrado contienen menos información que los obtenidos en lazo abierto. De hecho, uno de los objetivos de la realimentación es hacer al sistema menos sensible a posibles cambios.
- Métodos basados en el error de predicción con un modelo de ruido erróneo respecto al verdadero sesga las estimaciones obtenidas. Este problema no existe en el caso de identificar en lazo abierto.

Las técnicas de identificación algebraicas se basan en fórmulas exactas a partir del modelo físico, donde no se realiza ninguna hipótesis acerca de las propiedades estadísticas del ruido, por lo que estas desventajas mostradas en la identificación clásica en lazo cerrado no afectan a la metodología algebraica. Por tanto, utilizaremos la técnica algebraica derivativa desarrollada a lo largo de esta tesis para realizar la tarea de identificación dentro del control adaptativo en lazo cerrado.

El objetivo de este apartado es la rápida identificación algebraica en línea y en lazo cerrado de la frecuencia natural de un brazo flexible, combinada con un controlador integrador proporcional generalizado (GPI). Este controlador se propuso por primera vez por Marquez en [Marquez00] pero era internamente inestable aunque el sistema en lazo cerrado fuera asintóticamente estable. En [Becedas07] se propuso, por manipulaciones algebraicas de un reconstructor integral, un esquema de control internamente estable.

Se parte del sistema descrito en el capítulo anterior en el subapartado 5.2.1 para la aplicación del control adaptativo en lazo cerrado. Este modelo viene descrito por las ecuaciones (5.7)-(5.11).

En el siguiente punto se mostrarán las manipulaciones algebraicas necesarias para desarrollar un estimador que parte de las ecuaciones diferenciales (5.7)-(5.11), incorporando las señales medibles de una manera apropiada.

6.1.1. Estimación algebraica de la frecuencia natural

Para facilitar la obtención del estimador se supone que las señales no son ruidosas. El principal objetivo es obtener ω_0^2 tan rápido como sea posible.

Proposición 6.1.1 *El parámetro constante ω_0^2 del sistema sin ruido descrito en (5.7)-(5.11) se puede calcular exactamente, de una manera no asintótica, para un tiempo arbitrariamente pequeño $t = \Delta > 0$, mediante la expresión:*

$$[\omega_0^2]_{est} = \begin{cases} \text{arbitrario} & \text{para } t \in [0, \Delta) \\ \frac{n_e(t)}{d_e(t)} & \text{para } t \in [\Delta, +\infty) \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $n_e(t)$ y $d_e(t)$ son las salidas del filtro inestable, lineal y variante en el tiempo:

$$\begin{aligned} n_e(t) &= t^2\theta_t(t) + z_1 & d_e(t) &= z_3 \\ \dot{z}_1 &= z_2 - 4t\theta_t(t) & \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_2 &= 2\theta_t(t) & \dot{z}_4 &= t^2(\theta_m(t) - \theta_t(t)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Demostración

Considérese la ecuación (5.7)

$$\ddot{\theta}_t = \omega_0^2(\theta_m - \theta_t) \quad (6.3)$$

La transformada de Laplace de (6.3) es:

$$s^2\theta_t(s) - s\theta_t(0) - \dot{\theta}_t(0) = \omega_0^2 (\theta_m(s) - \theta_t(s)) \quad (6.4)$$

Derivando dos veces respecto a la variable compleja s , se cancelan las condiciones iniciales:

$$\frac{d^2(s^2\theta_t)}{ds^2} = \omega_0^2 \left(\frac{d^2(\theta_m)}{ds^2} - \frac{d^2(\theta_t)}{ds^2} \right) \quad (6.5)$$

Utilizando la regla de la cadena, se obtiene:

$$s^2 \frac{d^2(\theta_t)}{ds^2} + 4s \frac{d\theta_t}{ds} + 2\theta_t = \omega_0^2 \left(\frac{d^2(\theta_m)}{ds^2} - \frac{d^2(\theta_t)}{ds^2} \right) \quad (6.6)$$

Consecuentemente, para evitar multiplicaciones por potencias positivas de s , que son equivalentes a derivadas temporales en el dominio del tiempo², se multiplica la expresión anterior por s^{-2} y después de algunos reajustes se obtiene:

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{d^2(\theta_t)}{ds^2} + 4s^{-1} \frac{d\theta_t}{ds} + 2s^{-2}\theta_t}{s^{-2} \left(\frac{d^2(\hat{\theta}_m)}{ds^2} - \frac{d^2(\hat{\theta}_t)}{ds^2} \right)} \quad (6.7)$$

Sea \mathcal{L} la transformada usual del cálculo operacional actuando sobre señales acotadas exponencialmente, ver [Mikusinski83], [Mikusinski87]. Recordar que $\mathcal{L}^{-1}s(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot)$, $\mathcal{L}^{-1}\frac{d^\nu}{ds^\nu}(\cdot) = (-1)^\nu t^\nu(\cdot)$ y $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}(\cdot) = \int_0^t(\cdot)(\sigma)d\sigma$. Teniendo esto en cuenta se puede trasladar (6.7) en el dominio del tiempo:

$$\omega_0^2 = \frac{\left[t^2\theta_t(t) - 4 \int_0^t \sigma\theta_t(\sigma)d\sigma + 2 \int_0^t \int_0^\sigma \theta_t(\lambda)d\lambda d\sigma \right]}{\int_0^t \int_0^\sigma \lambda^2\theta_m(\lambda)d\lambda d\sigma - \int_0^t \int_0^\sigma \lambda^2\theta_t(\lambda)d\lambda d\sigma} \quad (6.8)$$

La realización temporal de (6.8) se puede escribir mediante filtros (inestables) lineales y variantes en el tiempo:

$$\begin{aligned} n_e(t) &= t^2\theta_t(t) + z_1 & d_e(t) &= z_3 \\ \dot{z}_1 &= z_2 - 4t\theta_t(t) & \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_2 &= 2\theta_t(t) & \dot{z}_4 &= t^2(\theta_m(t) - \theta_t(t)) \end{aligned} \quad (6.9)$$

²De hecho, el principal problema de los métodos en tiempo-continuo es el cálculo de derivadas temporales, ya que son amplificadores de ruido, ver [Moussaoui05]

El estimador de la frecuencia natural ω_0^2 viene dado por:

$$[\omega_0^2]_{est} = \begin{cases} \text{arbitrario} & \text{para } t \in [0, \Delta) \\ \frac{n_e(t)}{d_e(t)} & \text{para } t \in [\Delta, +\infty) \end{cases} \quad (6.10)$$

donde Δ es un número real pequeño arbitrario. Obsérvese que para el tiempo $t = 0$, $n_e(t)$ y $d_e(t)$ son ambos cero. De forma que el cociente está indefinido para un pequeño periodo de tiempo. Después de un tiempo $t = \Delta > 0$ el cociente se puede calcular fiablemente. El tiempo $t = \Delta$ depende de la precisión del procesador aritmético de la tarjeta de adquisición de datos.

□

La naturaleza inestable del sistema lineal expresado en (6.9) no tiene consecuencias prácticas en la determinación de parámetros desconocidos, ya que:

1. Es posible resetear los sistemas inestables variantes en el tiempo y el esquema completo de estimación, además es necesario cuando los parámetros desconocidos se espera que puedan cambiar bruscamente para alcanzar otros valores constantes.
2. Una vez la estimación del parámetros se ha realizado después del tiempo $t = \Delta > 0$, el proceso completo de estimación se puede desconectar.

Las únicas señales que se necesitan medir son θ_m y Γ_{coup} , dado que θ_t se obtiene de acuerdo a (6.15). Desafortunadamente, las señales disponibles θ_m y Γ_{coup} son ruidosas, de modo que la precisión de la estimación proporcionada por el estimador en (6.1)-(6.2) dependerá de la relación señal ruido (SNR). Como se ha explicado en anteriores capítulos, este SNR se puede aumentar mediante filtros invariantes aplicados simultáneamente al numerador y denominador del estimador.

6.1.2. Control integral proporcional generalizado (GPI)

La segunda parte del problema del control dual es definir la técnica de control a utilizar. En este caso se usará el GPI, cuyo diseño completo del GPI se describe en [Becedas07].

Con el fin de comprender como el estimador previamente desarrollado contribuye a la actualización de los parámetros del controlador GPI, se van a extraer las principales funciones de transferencia del controlador y el esquema de control mostrado en [Becedas07].

El esquema de control utilizado se muestra en la Figura 6.1. A continuación se presenta el controlador de lazo externo e interno de dicha figura.

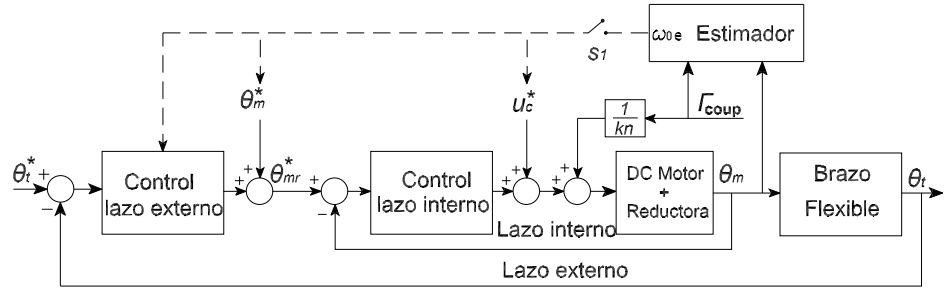


Figura 6.1: Sistema brazo flexible-motor DC controlado por un control GPI de dos etapas.

Controlador del lazo externo

De acuerdo con el modelo del brazo flexible, descrito en (5.7), y suponiendo que se conoce el parámetro desconocido ω_0 , dicho subsistema es plano, con salida plana dada por θ_t . Esto significa que todas las variables del sistema se pueden escribir en función de la salida plana y un número finito de sus derivadas temporales (Ver [Sira-Ramírez04a]). La parametrización de θ_m en término de θ_t viene dada por:

$$\theta_m = \frac{mL^2}{c}\ddot{\theta}_t + \theta_t = \frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\theta}_t + \theta_t \quad (6.11)$$

El sistema (6.11) es un sistema de segundo orden donde se desea regular la posición en el extremo, θ_t , de acuerdo a una trayectoria de referencia $\theta_t^*(t)$, con θ_m actuando como la señal de entrada *auxiliar*. Obviamente, si existe una entrada auxiliar de control en lazo abierto, $\theta_m^*(t)$, que idealmente realiza el seguimiento de $\theta_t^*(t)$ para unas determinadas condiciones iniciales, ha de satisfacer la dinámica de segundo orden tal que:

$$\theta_m^*(t) = \frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\theta}_t^*(t) + \theta_t^*(t) \quad (6.12)$$

De modo que para calcular $\theta_m^*(t)$ es necesario conocer ω_0 . De acuerdo al desarrollo del GPI realizado en [Becedas07], el controlador del lazo externo viene descrito por la siguiente función de transferencia:

$$(\theta_m - \theta_m^*) = \left[\frac{\gamma_1 s + \gamma_0}{s + \gamma_2} \right] (\theta_t^* - \theta_t) \quad (6.13)$$

Se recuerda que la posición angular en el extremo no se puede medir directamente, pero se puede calcular a través del ángulo del motor (θ_m) y el par de acoplamiento (Γ_{coup}):

$$\Gamma_{coup} = c(\theta_m - \theta_t) = mL^2\ddot{\theta}_t \quad (6.14)$$

Por tanto, la posición angular θ_t se expresa como,

$$\theta_t = \theta_m - \frac{1}{c}\Gamma_{coup} \quad (6.15)$$

El sistema del lazo exterior en la Figura 6.1 es exponencialmente estable. Los parámetros, $\{\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0\}$ se determinan a partir de conocer la posición deseada de los polos en lazo cerrado. Los tres polos se pueden colocar en el mismo punto del semieje negativo, $s = -a$, utilizando la siguiente ecuación polinomial con a estrictamente positivo,

$$(s + a)^3 = s^3 + 3as^2 + 3a^2s + a^3 = 0 \quad (6.16)$$

donde el parámetro a representa la colocación deseada de los polos. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es,

$$s^3 + \gamma_2 s^2 + \omega_0^2(1 + \gamma_1)s + \omega_0^2(\gamma_2 + \gamma_0) = 0 \quad (6.17)$$

Identificando cada término de la expresión (6.16) con aquellos de (6.17), el diseño de parámetros $\{\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0\}$ puede ser único si se conoce ω_0 y a tal que:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{a}{\omega_0^2}(a^2 - 3\omega_0^2) \\ \gamma_1 &= \frac{3a^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} \\ \gamma_2 &= 3a \end{aligned} \quad (6.18)$$

Por tanto, estimando ω_0 se pueden ajustar los parámetros del controlador del lazo exterior.

Controlador del lazo interno

De la misma forma, la ley de control para el lazo interno viene descrita por:

$$(u_c - u_c^*) = \left[\frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s(s + \alpha_3)} \right] (\theta_{mr}^* - \theta_m) \quad (6.19)$$

El control en lazo abierto $u_c^*(t)$ que idealmente logra el seguimiento en lazo abierto del lazo interno viene dado por

$$u_c^*(t) = \frac{1}{A} \ddot{\theta}_m^*(t) + \frac{B}{A} \dot{\theta}_m^*(t) \quad (6.20)$$

El sistema de lazo interno en la Figura 6.1 es asintóticamente exponencialmente estable. Con el fin de diseñar los parámetros $\{\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0\}$ se pueden colocar los polos del lazo cerrado en el semiplano negativo. Como se hizo con el lazo externo estos polos pueden tener el mismo valor real y $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ y α_0 se pueden determinar igualando los términos de los dos polinomios siguientes (p estrictamente positivo) :

$$(s + p)^4 = s^4 + 4ps^3 + 6p^2s^2 + 4p^3s + p^4 = 0 \quad (6.21)$$

$$s^4 + (\alpha_3 + B)s^3 + (\alpha_3B + \alpha_2A)s^2 + \alpha_1As + \alpha_0A = 0 \quad (6.22)$$

Ahora el parámetro p representa la localización común de todos los polos en lazo cerrado. En este caso A y B son parámetros del motor DC conocidos, donde $A = K/J$ y $B = \nu/J$ de acuerdo a (5.8)

6.1.3. Procedimiento del control adaptativo

La Figura 6.1 muestra el sistema de control adaptativo implementado en la práctica en nuestro laboratorio. El estimador está conectado, desde el tiempo $t_0 = 0$ (s), a las señales que provienen del encoder, θ_m , y del par de galgas extensométricas, Γ_{coup} . Por tanto, el estimador comienza a estimar cuando el lazo cerrado comienza a trabajar; y entonces, se pueden obtener estimaciones del parámetro muy rápido. Cuando la frecuencia natural del sistema se estima en un tiempo t_1 , el conmutador s_1 se activa y el sistema de control se actualiza con este nuevo parámetro estimado. Esto está hecho en línea y en lazo cerrado para un periodo de tiempo muy corto como se verá posteriormente en los resultados experimentales obtenidos. La actualización del sistema de control se realiza sustituyendo ω_0 por el parámetro estimado ω_{0e} en las ecuaciones (6.12) y (6.18).

De hecho, el término *feedforward*, que controla idealmente en lazo abierto el sub-sistema del lazo interno u_c^* (ver ecuación (6.20)), también depende de ω_0 porque la variable θ_m^* se obtiene del conocimiento de la frecuencia natural del sistema, ver (6.12). Obviamente, hasta que el estimador obtiene una aproximación de la frecuencia natural, el sistema de control comienza a funcionar con un valor inicial ω_{0i} . Teniendo en cuenta estas consideraciones, el controlador adaptativo se puede definir de la manera siguiente.

Para el lazo externo, la ecuación (6.12) se calcula como:

$$\theta_m^*(t) = \frac{1}{x^2} \ddot{\theta}_t^*(t) + \theta_t^*(t) \quad (6.23)$$

y la ecuación (6.17):

$$s^3 + \gamma_2 s^2 + x^2(1 + \gamma_1)s + x(\gamma_2 + \gamma_0) = 0 \quad (6.24)$$

Para el lazo interno sólo cambia el término *feedforward* en la ecuación (6.20) que depende de las derivadas acotadas del nuevo $\theta_m^*(t)$ en (6.23).

La variable x se define como:

$$x = \omega_{0i}, \quad t < t_1 \quad (6.25)$$

$$x = \omega_{0e}, \quad t \geq t_1 \quad (6.26)$$

El tiempo de conmutación t_1 se elige cuando el estimador proporciona un valor de ω_0 fiable. Se puede utilizar, por ejemplo, el criterio mostrado en (5.4).

6.1.4. Experimentos

Con el fin de verificar el control adaptativo se ha utilizado de nuevo la plataforma experimental, presentada en el capítulo anterior en la Figura 5.3. Los parámetros del motor se muestran en la Tabla 6.1. Estos valores numéricos se usan para implementar el lazo interno del controlador sobre la plataforma física real.

Con el fin de obtener la frecuencia natural del sistema ω_0 para validar la estimación, se ha aplicado un par al eje del motor para que vibre el extremo del brazo. Esta oscilación se traduce en un pico en el periodograma³ (ver la Figura 6.2). Es interesante resaltar que

³Se recuerda que el periodograma de la señal $u(t)$, $t = 1, 2, \dots, N$ es $|U_N(\omega)|^2$, donde $U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N U_N(2\pi k/N) e^{i2\pi kt/N}$, $k = 1, \dots, N$ representa la transformada discreta de Fourier (DFT) para $\omega = 2\pi k/N$

Tabla 6.1: Datos del conjunto motor-reductora

J (kgm^2)	ν ($N \cdot m \cdot s$)	k ($\frac{N \cdot m}{V}$)	n	A ($\frac{N}{V \cdot kg \cdot s}$)	B ($\frac{N \cdot s}{kg \cdot m}$)
6.87×10^{-5}	1.041×10^{-3}	0.21	50	61.14	15.15

la maximización del periodograma es equivalente a la estimación por máxima verosimilitud de la frecuencia de una señal sinusoidal perturbada con ruido blanco.

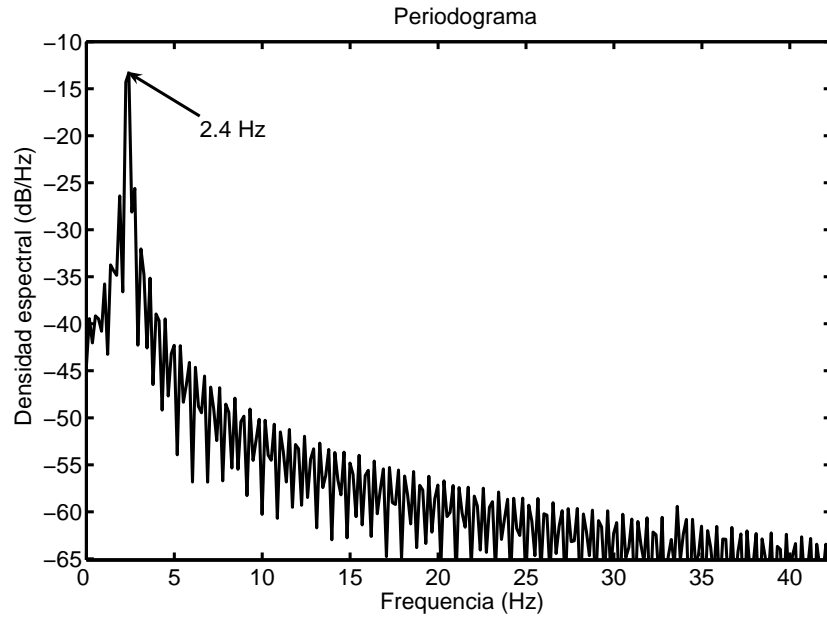


Figura 6.2: Periodograma de la oscilación del brazo flexible

La estimación obtenida por el pico del periodograma, observada en el eje de la abscisa es $f_0 \approx 2.4$ (Hz), esto es $\omega_0 \approx 2.4 \cdot 2\pi \approx 15.1$ (rad/s). Con el método de identificación algebraica desarrollado en las ecuaciones (6.1)-(6.2) el valor ω_0 obtenido fue 15.22 (rad/s) aproximadamente, ver Figura 6.3. Esto demuestra el correcto funcionamiento del método y el modelo usado para diseñar el sistema de control.

El sistema debe ser lo más rápido posible, pero teniendo cuidado de no saturar el motor, lo cual ocurre en 10 (V). Los polos se pueden situar en un lugar razonable del eje real negativo. Si los polos en lazo cerrado se sitúan por ejemplo en -95 , la función de transferencia del controlador (6.19), que depende de la localización de los polos en lazo

cerrado del lazo interno y de los parámetros del motor A y B como se muestra en (6.21) y (6.22) respectivamente, se puede calcular con los siguientes parámetros:

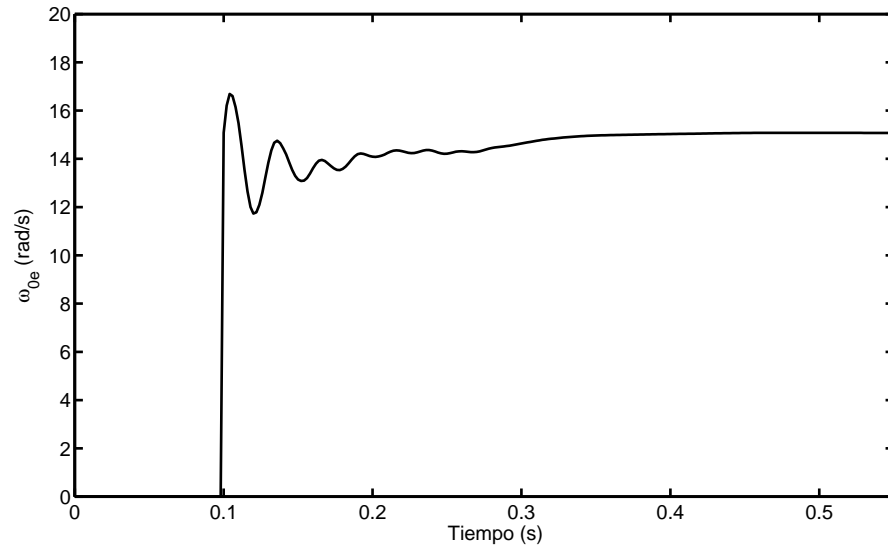
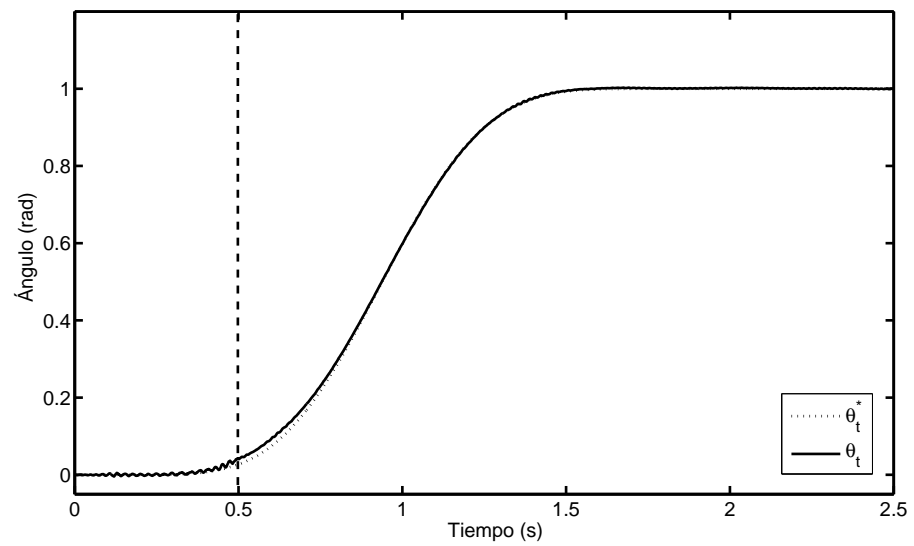
$$\alpha_0 = 1.3 \cdot 10^6 \quad \alpha_1 = 5.6 \cdot 10^4 \quad \alpha_2 = 798 \quad \alpha_3 = 365 \quad (6.27)$$

Los parámetros utilizados para el brazo flexible son $c = 1.6$ (Nm) y $L = 0.5$ (m). La masa, m , se considera desconocida. Los polos para el diseño del lazo externo se sitúan en -10 en el eje real para asegurar que el lazo externo es más lento que el interno. Se considera una estimación inicial de la frecuencia natural de la barra $\omega_{0i} = 9$ (rad/s). La función de transferencia del controlador (6.13), que depende de la localización de los polos en lazo cerrado del lazo externo y de la frecuencia natural de la barra como se muestra en (6.16) y (6.17) respectivamente, se puede calcular con los siguientes parámetros:

$$\gamma_0 = 17.7 \quad \gamma_1 = 2.7 \quad \gamma_2 = 30 \quad (6.28)$$

La trayectoria de referencia utilizada para el problema de seguimiento del brazo flexible se especifica como un polinomio de Bezier de octavo orden. Se recuerda que en la identificación clásica en lazo cerrado, se necesita que la entrada de referencia sea persistentemente excitada para proporcionar estimaciones consistentes, ver [Ljung99]. En cambio, el estimador algebraico no tiene esta restricción, por lo que se pueden utilizar señales de referencia muy suaves como la de Bezier. La estimación algebraica en línea del parámetro desconocido ω_0 , de acuerdo con (6.1), y (6.2), se lleva a cabo en $\Delta = 0.5$ segundos (ver Figura 6.3). Se puede comprobar que la estimación se obtiene cuando hay un mínimo de señal, ver la Figura 6.4. Al final de este pequeño intervalo de tiempo el controlador se actualiza inmediatamente con la estimación del parámetro dado por $\omega_{0e} = 15.2$ (rad/s). La Figura 6.4 muestra la actualización del controlador y como, después de esta actualización (después de la línea vertical discontinua) la posición en el extremo θ_t sigue la trayectoria deseada θ_t^* sin error en estado permanente. La función de transferencia correspondiente de este nuevo controlador se calcula de acuerdo con los siguiente parámetros.

$$\gamma_0 = 25.7 \quad \gamma_1 = 0.3 \quad \gamma_2 = 30 \quad (6.29)$$

Figura 6.3: Estimación en línea de ω_0 .Figura 6.4: Seguimiento de la trayectoria con la estimación en línea ω_0 .

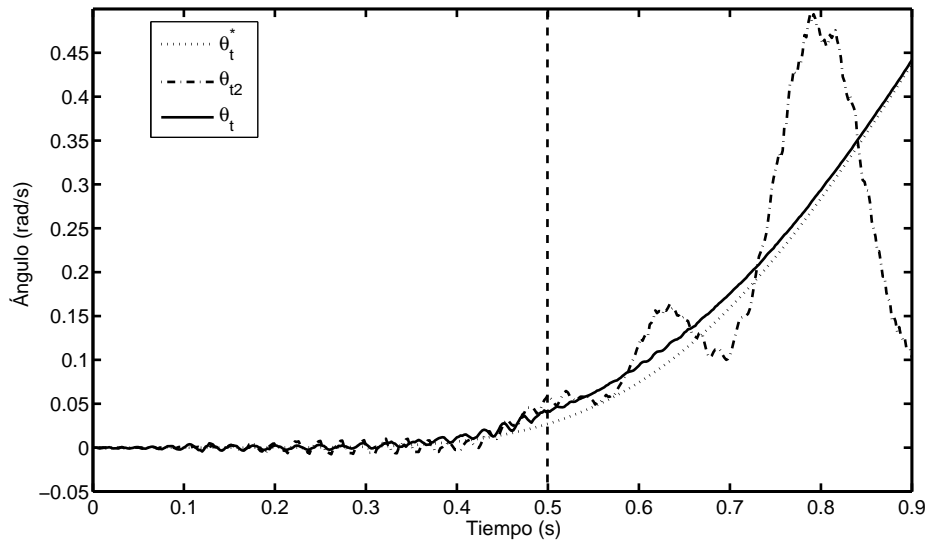


Figura 6.5: Comparación entre seguimiento de trayectorias.

La Figura 6.5 representa la trayectoria de referencia θ_t^* y la respuesta del sistema en lazo cerrado θ_{t2} cuando el controlador realimentado utiliza una estimación errónea de ω_0 dada por la especificación: $\omega_{0i} = 9$ (rad/s). La respuesta del brazo controlado exhibe claramente una respuesta altamente oscilatoria, aunque el controlador intenta seguir la trayectoria. En cambio, la posición en el extremo θ_t , a partir de 0.5 (s), cuando el controlador realimentado incorpora la estimación en línea ω_{0e} consigue un seguimiento de la trayectoria deseada bastante precisa, ver la Figura 6.5, (ver también la Figura 6.4).

La Figura 6.6 muestra el voltaje de la señal de control al motor de corriente continua. Es interesante observar cómo el controlador no funciona correctamente antes de 0.5 (s) de modo que satura el motor a $[10, -10]$ (V). En ese mismo instante el controlador se actualiza con la estimación en línea de ω_{0e} . Posteriormente, el controlador elimina rápidamente el error de seguimiento y, por tanto, el voltaje de la entrada de control se suaviza y no satura el amplificador.

Para validar los resultados anteriores se realiza un segundo experimento. Ahora, se utiliza como frecuencia natural inicial $\omega_{0i} = 20$ (rad/s). La frecuencia natural real se estima con el método algebraico en aproximadamente 0.5 segundos siendo el valor estimado

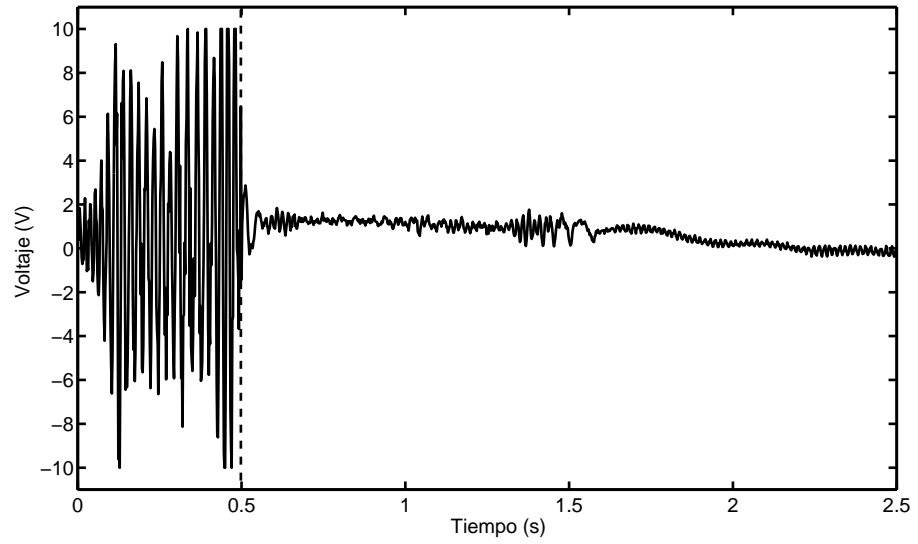


Figura 6.6: Voltaje de la señal de control al motor de corriente continua.

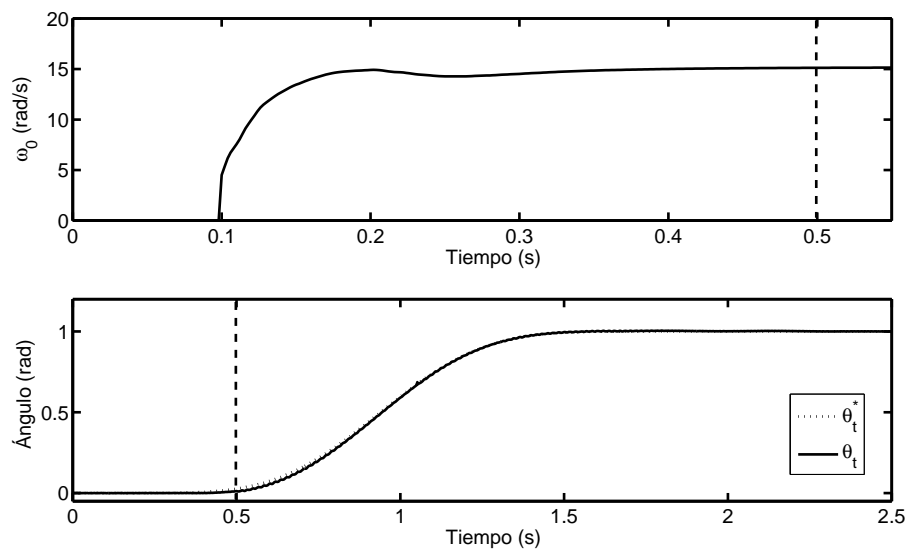


Figura 6.7: Resultados del segundo experimento.

$\omega_{0e} = 15.2$ (rad/s). Ver el primer gráfico de la Figura 6.7. El controlador se actualiza en ese instante con una estimación del parámetro. El segundo gráfico de la Figura 6.7 representa el buen seguimiento de la trayectoria. Estos resultados son similares a los obtenidos en el experimento anterior con $\omega_{0i} = 9$ (rad/s).

Nota 6.1.2 *Llegado este punto uno podría considerar en qué se diferencia el estimador de frecuencia desarrollado en el capítulo de análisis de vibración y el estimador de frecuencia desarrollado en el control adaptativo. Pues bien, en el análisis de vibración el estimador solamente dispone de la información de la vibración (una señal) la cual modela como una onda sinusoidal pura y a partir de ahí estima la frecuencia. En el control adaptativo se dispone de las medidas de la entrada y salida al sistema (dos señales) y el estimador se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales que describen dicho sistema.*

6.2. Control adaptativo en lazo abierto

Una vez que se ha expuesto la combinación entre la identificación algebraica y el control GPI en lazo cerrado, cabe preguntarse: ¿se puede utilizar la misma idea pero con un control en lazo abierto? La respuesta es afirmativa gracias a la identificación algebraica. A lo largo de este apartado se expondrá la motivación del control en lazo abierto y se diseñará un estimador algebraico para un sistema genérico de segundo orden.

La técnica de control en lazo abierto se puede entender como una entrada de referencia que no excita las frecuencias naturales del sistema, además de no modificar la salida en régimen permanente. Por otra parte, el control en lazo abierto se puede usar en combinación con un control en lazo cerrado sin tener que incrementar el número de sensores y reduciendo significativamente la complejidad del control de lazo cerrado.

En la literatura se han propuesto diferentes metodologías que tratan el control en lazo abierto. Una de las más utilizada es el moldeo de la trayectoria (IS, *Input Shaping*), que filtra la referencia para generar la trayectoria deseada, ver [Singer90]. La técnica IS es un caso particular de un filtro FIR, que se implementa mediante la convolución de la referencia con una secuencia de impulsos (coeficientes del filtro). Desde que Singer y Seering en [Singer90] presentaran la técnica IS, diferentes métodos se han desarrollado. Estos métodos intentan

mejorar el compromiso entre el retraso introducido por el orden del filtro y la robustez a las incertidumbres en el modelo. De modo que se puede encontrar en la literatura IS robustos, con aprendizaje y adaptativos (AIS, *Adaptive Input Shaping*).

En el caso de un IS robusto se aumenta el orden del filtro que viene acompañado de un incremento en el tiempo que tarda en alcanzar el régimen permanente. Hay un gran número de trabajos sobre el diseño de IS robustos, como [Singhose96] y [Singhose97], entre otros. Aunque, cuando la variación en los parámetros sea grande, esta técnica no es la más apropiada, ya que el orden del filtro es demasiado grande y el funcionamiento del sistema llega a ser muy lento.

Las técnicas de aprendizaje, ver [Park01] y [Park06], hacen que el sistema de control sea robusto a parámetros desconocidos, no linealidades y variaciones en la dinámica del sistema durante la trayectoria. Sin embargo, solamente es válido para movimientos repetitivos.

En cambio, la técnica AIS se puede emplear en sistemas dinámicos operando con movimientos no repetitivos y con una variación en la dinámica del sistema entre movimientos. El AIS se puede clasificar dependiendo de dónde se realice la adaptación: en *post-maneuver* AIS la adaptación se produce entre movimientos mientras que en *mid-maneuver* AIS la adaptación se realiza durante los movimientos. El funcionamiento del AIS depende del procedimiento de identificación que se utilice. De forma que nos podemos encontrar con AIS desarrollados en el dominio de la frecuencia (ver [Yurkovich93]), o en el dominio del tiempo [Bodson98], [Rhim01], [Rhim04], [Cutforth04].

Tzes and Yurkovich [Yurkovich93] utilizan la estimación de la función de transferencia variante en el tiempo (TTFE) para ajustar en línea los intervalos de tiempo de los impulsos característicos del IS. El TTFE se basa en la identificación de los polos y ceros del sistema como máximos y mínimos locales de la amplitud de la respuesta en frecuencia del sistema. El TTFE presenta una mayor robustez respecto al periodo de muestreo y al ruido, y en algunos casos incluso una mejor convergencia. Sin embargo, es necesaria una carga computacional adicional para transformar las características en el dominio de la frecuencia a una función de transferencia tipo (ARMA). Además se necesita al menos un periodo del modo fundamental de vibración para realizar la primera estimación, y el nivel

de SNR requerido es elevado. Estas desventajas han motivado que la mayor parte de AIS se desarrollen en el dominio del tiempo en lugar del dominio frecuencial.

Bodson [Bodson98] propuso una estimación de la frecuencia natural de la planta y su amortiguamiento en tiempo continuo. Esta identificación estaba basada en una parametrización polo/cero del controlador en lazo abierto. La identificación se lleva a cabo cuando el sistema se excita. Sin embargo, se necesitan varias trayectorias para adaptar el controlador.

El trabajo de Rhim and Book en [Rhim01] estudia el efecto del ruido sobre el AIS usando técnicas de identificación en tiempo discreto. Se compara el funcionamiento del AIS cuando los parámetros del IS se estiman de forma directa y directa. El AIS indirecto se basa en un modelo ARX, ver [Ljung99] donde las entradas y salidas del sistema se utilizan para obtener los parámetros correspondientes a la frecuencia natural y al coeficiente de amortiguamiento. Por tanto, los parámetros del IS se calculan de acuerdo a esas constantes estimadas. En cambio, el AIS directo, el número de impulsos (tres para un único modo de vibración) y los retardos temporales se fijan *a priori*. De modo que se lleva a cabo una estimación directa de los coeficientes del filtro IS. Se muestra que la estimación directa es más robusta al ruido. Sin embargo, un esquema IS donde los retardos temporales son fijos no es una solución robusta. Además, el esquema de control solamente se puede usar durante *post-maneuver*. Finalmente, una generalización para sistemas multimodo se presenta en [Rhim04].

Cutforth y Pao [Cutforth04] suponen que el coeficiente de amortiguamiento es despreciable y fijan el número de coeficientes. Se usa el esquema de control propuesto por [Rhim01] y el estimador de frecuencia presentado en [Park01] para desarrollar el AIS. Sin embargo, al igual que los métodos presentados anteriormente en esta introducción, necesitan más de un movimiento para identificar los parámetros del sistema.

En este apartado se presenta un AIS para un sistema con un único modo de vibración dominante, capaz de estimar la frecuencia natural del sistema y su amortiguamiento en cada trayectoria. El desarrollo de estos estimadores se basan en la metodología de identificación algebraica estudiada en capítulos anteriores. Se destaca que éste es el único AIS capaz de suprimir la vibración en un único movimiento, de modo que se podría catalogar

dentro de los AIS *mid-maneuver*. Por tanto, si se produjera una variación del sistema entre movimientos no afectaría al funcionamiento del sistema.

6.2.1. Modelo del sistema

En esta ocasión se va a modelar también el coeficiente de amortiguamiento del sistema, a diferencia del modelo utilizado en el control en lazo cerrado. De forma que el modelo del sistema considerado es uno de segundo orden con la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_f \omega_f^2}{s^2 + 2\xi_f \omega_f s + \omega_f^2} \quad (6.30)$$

donde $Y(s)$ es la salida, $U(s)$ es la entrada, ξ_f es el coeficiente de amortiguamiento, ω_f es la frecuencia natural, y K_f es la ganancia del sistema. Generalmente, una estructura flexible se representa por una ecuación en derivadas parciales (ver referencia [Meirovitch97]). Además, hay varios métodos de modelado comunes, que se utilizan para resolver dichas ecuaciones en derivadas parciales de las estructuras flexibles. Tales métodos podrían ser: análisis modal, Rayleigh-Ritz, o métodos de elementos finitos. Por ejemplo, desde el punto de vista Lagrangiano y utilizando la técnica de análisis modal, la función de transferencia de estos sistemas se puede escribir de la siguiente forma (ver referencia [Meirovitch97]):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_i \omega_i^2}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (6.31)$$

donde K es una constante proporcional a la ganancia del sólido rígido ($i = 0$ y $\omega_0 = 0$) o proporcional a la ganancia del modo de vibración, e i es el correspondiente modo. En este apartado se va a utilizar el modelo simplificado de un modo suponiendo que el resto de modos se pueden filtrar, ver [Cutforth04].

6.2.2. Control en lazo abierto

El control en lazo abierto empleado en este trabajo (IS) se puede definir como un filtro de respuesta impulsiva finita (FIR). El diseño de este filtro se basa en colocar los zeros exactamente o en la vecindad de las posiciones donde se sitúan los modos resonantes. Por

tanto, para dicho diseño es necesario conocer las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento de los modos de vibración.

El compromiso más importante en el diseño de los controladores en lazo abierto es la relación entre la vibración residual y el tiempo de establecimiento. Especialmente, en un AIS, la robustez del controlador depende de la precisión de la estimación. En este trabajo se utilizan controladores en lazo abierto que consiguen una vibración residual nula para un sistema de segundo orden. La ecuación del filtro empleado para caracterizar los IS es la siguiente:

$$C(s) = \left(\frac{1 + ze^{-sD}}{1 + z} \right)^p \quad (6.32)$$

donde

$$z = e^{-\xi_f \pi / \sqrt{1 - \xi_f^2}}; \quad D = \pi / \omega_f \sqrt{1 - \xi_f^2} \quad (6.33)$$

y p es un parámetro de diseño que incrementa la robustez del controlador, que depende a su vez de la precisión en la estimación. Hay que tener en cuenta que se debe elegir el mínimo valor de p , ya que el tiempo de establecimiento aumenta con una relación pD . De modo que si $p = 1$ corresponde con un ZV (*Zero Vibration*) IS, $p = 2$ es equivalente a un ZVD (*Zero Vibration Derivative*) IS, etc. Es importante destacar que, el tiempo para obtener las estimaciones de ω_f y ξ_f tiene que ser menor que D para que la adaptación de D tenga lugar en el primer movimiento.

6.2.3. Estimador algebraico

Este apartado desarrolla el estimador de la frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento de un sistema de segundo orden que se describe por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi_f \omega_f \dot{y}(t) + \omega_f^2 y(t) = K_f \omega_f^2 u(t) \quad (6.34)$$

La Transformada de Laplace de (6.34) es:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + \alpha_1 (sY(s) - y(0)) + \alpha_2 (Y(s) - K_f U(s)) = 0 \quad (6.35)$$

Se puede comprobar fácilmente que:

$$\xi_{f,est} = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}; \quad \omega_{f,est} = +\sqrt{\alpha_2} \quad (6.36)$$

donde $\omega_{f,est}$ y $\xi_{f,est}$ son las estimaciones de ω_f y ξ_f . De acuerdo a [Fliess03a] este sistema es débilmente identificable, ya que los parámetros desconocidos ($\omega_{f,est}$ y $\xi_{f,est}$) se obtienen a partir los realmente estimados (α_1 y α_2) a través de manipulaciones algebraicas. Eliminamos las condiciones iniciales mediante dos derivadas respecto a la variable compleja, tal que:

$$\frac{d^2(s^2Y)}{ds^2} + \alpha_1 \frac{d^2(sY)}{ds^2} + \alpha_2 \left[\frac{d^2(Y)}{ds^2} - K_f \frac{d^2(U)}{ds^2} \right] = 0 \quad (6.37)$$

Desarrollando las ecuaciones mediante la regla de la cadena, se obtiene:

$$s^2 \frac{d^2(Y)}{ds^2} + 4s \frac{dY}{ds} + 2Y + \alpha_1 \left(s \frac{d^2(Y)}{ds^2} + 2 \frac{dY}{ds} \right) + \alpha_2 \left(\frac{d^2(Y)}{ds^2} - K_f \frac{d^2(U)}{ds^2} \right) = 0 \quad (6.38)$$

Las multiplicaciones por la variable compleja s son equivalentes a derivadas temporales. Con el fin de evitar estas derivadas temporales, que en la práctica se comportan como amplificadores de ruido de alta frecuencia, ver [Moussaoui05], se multiplica la ecuación (6.38) por s^{-2} , obteniéndose la siguiente expresión:

$$\frac{d^2Y}{ds^2} + 4s^{-1} \frac{dY}{ds} + 2s^{-2}Y + \alpha_1 \left(s^{-1} \frac{d^2Y}{ds^2} + 2s^{-2} \frac{dY}{ds} \right) + \alpha_2 \left(s^{-2} \frac{d^2Y}{ds^2} - K_f s^{-2} \frac{d^2U}{ds^2} \right) = 0 \quad (6.39)$$

Trasladamos la expresión (6.39) en el dominio temporal, tal que:

$$\eta_1(t) + \alpha_1 \eta_2(t) + \alpha_2 \eta_3(t) = 0 \quad (6.40)$$

donde:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= t^2 y(t) - 4 \int_0^t \sigma y(\sigma) d\sigma + 2 \int_0^t \int_0^\sigma y(\lambda) d\lambda d\sigma \\ \eta_2 &= \int_0^t \sigma^2 y(\sigma) d\sigma - 2 \int_0^t \int_0^\sigma \lambda y(\lambda) d\lambda d\sigma \\ \eta_3 &= \int_0^t \int_0^\sigma \lambda^2 y(\lambda) d\lambda d\sigma - K_f \int_0^t \int_0^\sigma \lambda^2 u(\lambda) d\lambda d\sigma \end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones de arriba puede ser fácilmente implementado mediante filtros lineales (inestables) variantes en el tiempo, tal que:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= t^2 y + x_1 & \eta_2 &= x_3 & \eta_3 &= x_5 \\ \dot{x}_1 &= -4ty + x_2 & \dot{x}_3 &= t^2 y + x_4 & \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_2 &= 2y & \dot{x}_4 &= -2ty & \dot{x}_6 &= t^2(y - K_f u) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Si se integra la ecuación (6.40), se obtiene:

$$\int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma + \alpha_1 \int_0^t \eta_2(\sigma) d\sigma + \alpha_2 \int_0^t \eta_3(\sigma) d\sigma = 0 \quad (6.42)$$

De modo que se dispone de dos ecuaciones y dos incógnitas, con lo que se pueden hallar los valores de α_1 y α_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{n_1(t)}{d(t)} = \frac{\eta_3(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma - \eta_1(t) \int_0^t \eta_3(\sigma) d\sigma}{\eta_2(t) \int_0^t \eta_3(\sigma) d\sigma - \eta_3(t) \int_0^t \eta_2(\sigma) d\sigma} \\ \alpha_2 &= \frac{n_2(t)}{d(t)} = \frac{\eta_1(t) \int_0^t \eta_2(\sigma) d\sigma - \eta_2(t) \int_0^t \eta_1(\sigma) d\sigma}{\eta_2(t) \int_0^t \eta_3(\sigma) d\sigma - \eta_3(t) \int_0^t \eta_2(\sigma) d\sigma} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Como consecuencia y teniendo en cuenta (6.36) se puede calcular la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

En el caso de que las señales sean ruidosas se puede utilizar el filtrado invariante dentro del estimador, como en los anteriores capítulos.

Recuérdese que otros métodos, por ejemplo [Cutforth04] y [Rew02], sólo estiman la frecuencia natural del sistema suponiendo que no hay amortiguamiento. Es decir modelan las vibraciones como ondas sinusoidales puras. Nuestro método sí tiene en cuenta la amortiguación por lo que se espera que los resultados sean más precisos, ya que partimos de un modelo que se ajusta más a la realidad.

6.2.4. Actualización de los parámetros del control en lazo abierto

El estimador algebraico es capaz de proporcionar las estimaciones en un tiempo inferior a D , ver (6.33). Este tiempo D corresponde a la mitad del periodo de la frecuencia natural (ω_n) estudiada, tal que $\omega_n = \omega_f \sqrt{1 - \xi_f^2}$ que depende de los parámetros desconocidos ω_f y ξ_f . Por tanto, el valor de D también es desconocido y por ende se desconoce el momento en que hay que realizar la actualización de parámetros.

Para solucionar este problema se propone un criterio para establecer el tiempo de estimación. Este problema se ha tratado anteriormente en el capítulo 5, de acuerdo al criterio (5.4). Se puede observar que esta solución heurística se puede refinar⁴. En esta

⁴El problema de encontrar un tiempo de estimación óptimo es todavía un problema abierto en la identificación algebraica

ocasión se propone un criterio que se basa en la *suavidad* de la media y la desviación típica de las estimaciones de ω_f y ξ_f en la ventana temporal elegida.

Sea $\omega_{f,est}(n)$ y $\xi_{f,est}(n)$ las salidas del estimador algebraico en el instante $n \cdot T_s$, donde T_s es el tiempo de muestreo. Se define el criterio de estimación como:

$$\frac{\sigma}{E[\phi_{f,est}]} \leq \Delta \quad (6.44)$$

donde

$$E[\phi_{f,est}] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} \phi_{f,est}(n-k) \quad (6.45)$$

$$\sigma = \sqrt{E[\phi_{f,est}^2] - (E[\phi_{f,est}])^2} \quad (6.46)$$

representan la media muestral y la desviación típica de las estimaciones de $\phi_{f,est}$ que puede ser $\omega_{f,est}(n)$ o $\xi_{f,est}(n)$. Los parámetros Δ y M definidos en las ecuaciones (6.44)-(6.46) se deben ajustar de acuerdo a las especificaciones de nuestro problema, llegando a un compromiso entre la rapidez en la estimación y la precisión obtenida en la misma.

Una vez que se cumple el criterio (6.44) en el instante n^* se obtienen los valores de $\omega_{f,est}(n^*)$ o $\xi_{f,est}(n^*)$, y por tanto también conocemos D . Es importante darse cuenta de que el instante $n^* \cdot T_s$ puede ser inferior al instante D , por lo que la diferencia temporal $L \cdot T_s = D - n^* \cdot T_s$ se puede aprovechar para mejorar la estimación. En otras palabras, dado que la estimación de los parámetros se puede realizar en un tiempo inferior a D se puede aprovechar el tiempo que disponemos hasta D para refinar la estimación. Por ejemplo, si se define $n_f \cdot T_s = D$, la estimación refinada se puede definir como:

$$\phi_f = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{L} \phi_{f,est}(n_f - k) \quad (6.47)$$

6.2.5. Simulaciones

Para comprobar el funcionamiento del estimador combinado con el control en lazo abierto se han realizado varias simulaciones. Se ha fijado un nivel de SNR de aproximadamente 30 dB, y se ha variado la frecuencia natural de vibración entre los siguientes valores: $(2\pi, \pi$ y $3\pi)$. Por otro lado el coeficiente de amortiguamiento se ha considerado fijo e igual a 0.05. Se ha propuesto dejar fijo el coeficiente de amortiguamiento ya que en la realidad,

éste suele permanecer aproximadamente constante y con un valor muy pequeño. Se han establecido para las simulaciones los siguientes valores: $T_s = 0.01$ (s), $M=100$ y $\Delta = 0.05$.

La Figura 6.8 muestra los parámetros D y z basados en la estimación de ω_f y ξ_f . La condición inicial para z es igual a 1, que corresponde con $\xi_f=0$. Concretamente, la Figura 6.8(a) representa la estimación durante la trayectoria del parámetro z , donde la actualización ocurre entre distintas trayectorias. En cambio, la Figura 6.8(b) corresponde a estimaciones durante la trayectoria del parámetro D , donde la actualización ocurre en la misma trayectoria. Es interesante destacar que una vez se obtengan las estimación de z y D durante la primera trayectoria, la actualización del parámetro z no puede realizarse hasta el siguiente movimiento porque sino se modificaría la respuesta en régimen permanente de la entrada de referencia.

La Figura 6.9 representa en línea continua (-) las señales de entrada y salida de un sistema de segundo orden cuando se le aplica un *mid-maneuver* AIS. Para comparar los resultados obtenidos se ha diseñado un IS robusto, con un valor $p = 4$ y parámetros $\omega_f = 2\pi$, $\xi_f = 0$. Los resultados obtenidos con este IS robusto se representan en línea discontinua en la Figura 6.9. Se puede observar que el retraso introducido por el controlador y la vibración residual son mucho mayores en el IS robusto que en el caso adaptativo.

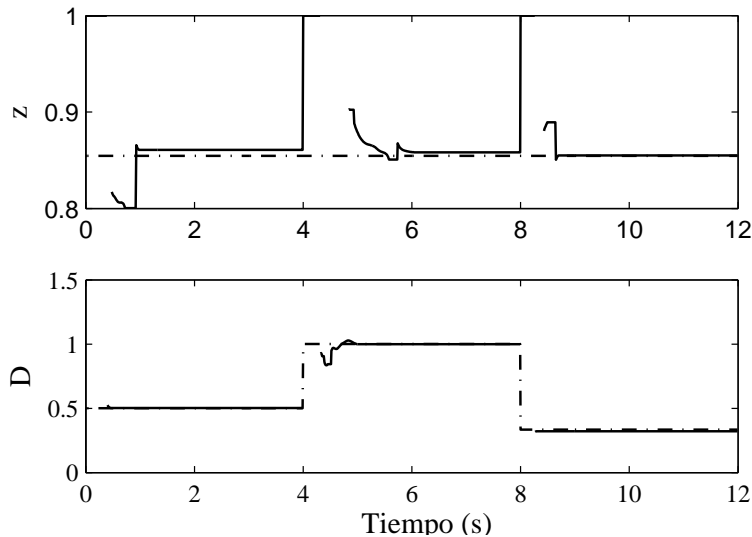


Figura 6.8: (a) Estimación *mid-maneuver* de z ; (-) valor teórico y (-) estimación. (b) Estimación *mid-maneuver* para D ; (-) valor teórico y (-) estimación.

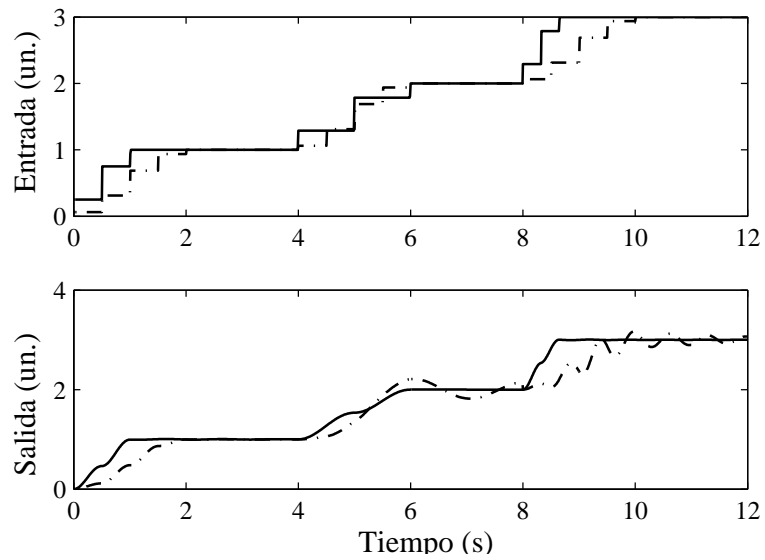


Figura 6.9: (a) Señal de entrada filtrada por el IS; (-) IS adaptativo y (-.) IS robusto. (b) Señal de salida filtrada por el IS; (-) IS adaptativo y (-.) IS robusto.

Capítulo 7

Aplicaciones económicas

Esta tesis se encuentra dentro de un marco interdepartamental entre ingeniería de control y administración de empresas. Como se ha explicado en el estado del arte, la ingeniería de control se ha encargado de desarrollar la teoría de identificación de sistemas. Por otro lado, expertos en economía, estadística industrial y otras ramas socioeconómicas han puesto una mayor atención sobre el análisis de series temporales, de modo que pudiera parecer que la identificación de sistemas y el análisis de series temporales fueran dos disciplinas distintas.

En la realización del estado del arte se ha puesto de manifiesto que el núcleo central de la identificación de sistemas y el análisis de series temporales es el mismo. De hecho, algunos autores consideran que las series temporales son un caso particular dentro de la identificación de sistemas, ver [Söderström89], aunque el estudio de dichas series pudiera haber alcanzado una mayor difusión en el ámbito empresarial. Por tanto, entre los objetivos de la tesis se propusieron el análisis de señales armónicas procedentes de problemas relacionados con la economía, con el fin de extrapolar los conocimientos adquiridos en el análisis de señales armónicas procedentes de las vibraciones de estructuras flexibles. Además, como objetivo añadido se encuentra establecer los lazos de conexión entre el análisis de series temporales y la identificación de sistemas.

Un problema que trata con señales armónicas y de gran importancia en la actualidad, es la predicción de precios y demanda de la energía eléctrica en los mercados

liberalizados. Este problema tiene mucho interés para cualquier agente que acuda al mercado, incluso los mismos operadores del mercado necesitan hacer predicciones. Por tanto, la primera parte de este capítulo tratará en detalle este problema desde un punto de vista de identificación de sistemas, ya que las herramientas que se utilizarán son modelos de espacio de los estados, y ajuste de datos en el dominio de la frecuencia principalmente.

La segunda sección de este capítulo está dedicada a la extensión de los modelos de componentes no observables para la predicción de la demanda de energía eléctrica a medio plazo, es decir se plantea el problema para un horizonte de predicción más lejano que el estudiado en la primera sección de este mismo capítulo.

Como cierre de este capítulo dedicado a señales armónicas en aplicaciones económicas, nos centraremos en el análisis de los cambios de frecuencia que sufre el denominado ciclo económico. Este problema atrae el interés de numerosos sectores no sólo de ámbito académico o de investigación. De hecho, es habitual encontrar alguna alusión al ciclo económico en las secciones económicas de la prensa, sobre todo cuando la sombra de la recesión está presente en algunos escenarios económicos.

7.1. Predicción de precios y demandas del mercado eléctrico a corto plazo

Los cambios ocurridos en los mercados de electricidad durante estas dos últimas décadas, principalmente debidos a los procesos de liberalización, han creado una necesidad de herramientas de predicción más precisas. Productores y consumidores necesitan predicciones tan exactas como sea posible para establecer sus estrategias de optimización en el mercado. Esto se cumple para los agentes que operan en contratos bilaterales o en el pool, [Sheblé99], [Shahidehpour02].

La predicción de la demanda es importante para el desarrollo de cualquier modelo referente a planificación. Las predicciones se utilizan normalmente como entradas en algoritmos utilizados en la generación y transmisión de electricidad que intentan minimizar costes y asegurar la demanda incluso cuando puedan ocurrir fallos o eventos inesperados relacionados con el comportamiento de los consumidores. Generalmente, la demanda de

energía está influenciada de forma no lineal por variables meteorológicas, efectos estacionales (ciclos diarios y semanales, vacaciones, etc.), eventos especiales, etc. Las variaciones meteorológicas parecen críticas a la hora de predecir la demanda para un horizonte superior a un día, [Taylor03], aunque estas variaciones pierden relevancia para horizontes más pequeños. Además, hay que tener en cuenta que los datos meteorológicos y sus predicciones pueden ser bastante difíciles de encontrar.

Por otro lado, la predicción de los precios es crucial para los agentes en el pool para establecer sus estrategias de oferta óptimas en un corto plazo. Las operaciones basadas en contratos bilaterales requieren en cambio predicciones varios meses hacia delante. El precio de la energía eléctrica está relacionado con otras entradas, principalmente la demanda, [Nogales02], [Zareipour06].

Dadas las dificultades de modelar sistemas de entrada-salida para datos muestreados a alta frecuencia y también imprecisiones sobre los datos de entrada, los modelos univariantes constituyen una buena alternativa para la predicción de la demanda y los precios. Además, los métodos univariantes se consideran buenos modelos para evaluar metodologías más sofisticadas, ya que son fáciles y rápidos de estimar y usar. De este modo cualquier técnica novedosa debería mejorar los métodos univariantes más simples para poder justificar su uso.

Se han aplicado muchas metodologías al problema de la predicción de la demanda o precios, sirvan como ejemplo las revisiones del estado del arte realizadas por Metaxiotis *et al.* [Metaxiotis03] y Li *et al.* [Li05] para la predicción de la demanda de energía eléctrica y precios, respectivamente.

La mayoría de los métodos más citados sobre predicción de series temporales eléctricas se pueden clasificar en las siguientes categorías: (i) métodos clásicos; (ii) inteligencia artificial; y (iii) modelos de componentes no observables.

Métodos clásicos

La naturaleza estocástica de la demanda y los precios frecuentemente se han modelado con ARIMA estacionales; modelos de suavizado exponencial; métodos de regresión; funciones de transferencia; y métodos paramétricos y no paramétricos; etc. [Box94],

[Abraham01], [Darbellay00], [Contreras03], [Nogales02], [Conejo05a], [Taylor06], [Fosso99] y [Zhou06]. En algunas ocasiones estos métodos clásicos se usan como métodos de comparación para evaluar las posibles alternativas.

A pesar del uso extendido de la metodología ARIMA en este contexto, ésta tiene dos inconvenientes. Por un lado, la etapa de identificación normalmente depende del criterio de un experto, y diferentes expertos pueden obtener diferencias significativas en la precisión de las predicciones. Por otro lado, esta técnica no es adaptativa y por tanto, se tienen que identificar diferentes modelos ARIMA para los precios y demandas, así como para cada estación del año, o para cada mercado eléctrico, ver [Conejo05a].

Inteligencia artificial

Las redes neuronales artificiales (ANN, “*Artificial Neural Network*”) se han aplicado ampliamente a este problema de diferentes maneras, ver [Abraham01], [Darbellay00], [Hong02], [Zhang03], [Szkuta99], [Reis05] y [Song06]. Sin embargo, las conclusiones no siempre son favorables a las redes neuronales. Es interesante destacar que cada cierto tiempo aparecen métodos clásicos en la literatura que superan técnicas más modernas en general, y ANN en particular [Conejo05a] y [Taylor06]. Además, surgen numerosas críticas que se centran en la interpretación de este tipo de modelos, que son con frecuencia interpretados como cajas negras necesitando, además, una carga numérica importante en los procesos de identificación y estimación.

Modelos de componentes no observables

Sería deseable encontrar una solución capaz de superar los inconvenientes mencionados anteriormente. En particular, desde el punto de vista del autor, son dos las características más importantes: (i) aplicación general para diferentes series temporales, estaciones o mercados con modificaciones mínimas o nulas de los modelos y (ii) la eliminación de la necesidad de la intervención humana subjetiva en la etapa de identificación.

Los modelos de componentes no observables (UC, “*Unobserved Components*”) ofrecen la posibilidad de realizar las tareas previamente expuestas, como se describirá posteriormente en el capítulo. Sin embargo, las referencias relacionadas con los modelos UC

son considerablemente más escasas en comparación con el resto de metodologías previas. Entre las referencias de modelos UC más destacables encontramos [Harvey93],[Pedregal06],[Garcia-Marquez07] y [Pedregal07]. Una ventaja añadida de los modelos UC respecto a otras técnicas es que permiten obtener ciertas características de las series temporales, como la tendencia, las componentes estacionales diarias o semanales y la componente irregular. Esta información puede ser de gran utilidad para realizar predicciones a medio o largo plazo.

El primer objetivo por tanto, es el desarrollo de modelos univariantes establecidos dentro del marco de modelos de componentes no observables (UC) con un conjunto de novedosas propiedades: (i) la etapa de identificación no es necesaria ya que el comportamiento de la serie queda incluido en el modelo; (ii) la estimación de parámetros desconocidos está basada en el dominio de la frecuencia; (iii) la estimación adaptativa de los estados del sistema y las tareas de predicción se llevan a cabo mediante el Filtro de Kalman (KF, “*Kalman Filter*”) y el Suavizado de Intervalo Fijo (FIS, “*Fixed Interval Smoothing*”); (iv) características interesantes de la serie temporal como podrían ser la tendencia, la componente diaria o semanal están disponibles explícitamente gracias a la utilización de un marco en Espacio de los Estados.

El segundo objetivo es demostrar que la combinación de métodos es mejor que considerar modelos individualmente. En este aspecto, se mostrarán resultados combinando las predicciones producidas por las estimaciones en el dominio de la frecuencia sobre el modelo base UC propuesto en ([Harvey89], [Young99]). El resultado final es un sistema que combina diferentes tipos de modelos en un sólo método, capaz de mejorar la precisión del resto de métodos considerados individualmente.

La motivación para introducir una regla de combinación de métodos es que generalmente en la literatura de predicción de precios, los diferentes modelos se han presentado como competitivos e incompatibles, sin reconocer que todos ellos tiene puntos fuertes y débiles además de que la precisión en la predicción puede variar respecto al tiempo o el mercado utilizado. Este tema en el caso de las demandas de energía sí se ha puesto sobre la mesa, ver [Kang04]. De hecho, la combinación de predicciones ha atraído considerable atención en los últimos treinta años desde diferentes disciplinas científicas, alcanzando una conclusión unánime: es bastante improbable encontrar un método que mejore al resto de los

métodos sistemáticamente y, por tanto, combinar diferentes predicciones proporciona resultados más precisos que los producidos por cualquier método considerado individualmente. Desarrollos recientes respecto a este tema se pueden consultar en [Zou04], [Hibon05].

La robustez del método que aquí se presenta se valida mediante un exhaustivo experimento de predicción basado en datos horarios de los precios y demandas obtenidos del mercado PJM de los EEUU, durante el año 2005. Los resultados se compararán con los obtenidos con modelos ARIMA.

7.1.1. Modelado de las señales procedentes del mercado eléctrico

Con el fin de modelar las series temporales procedentes del mercado eléctrico, como son las demandas y precios de la electricidad, se han utilizado los modelos UC. Estos modelos se explicaron de una forma general en el capítulo del estado del arte en el apartado 2.6.1 dentro del marco de espacio de los estados. El uso de modelos UC aplicado a mercados eléctricos ha sido previamente estudiado en [Harvey93], [Pedregal06], y [Pedregal07]. A continuación se explicará como se pueden utilizar este tipo de modelos para la predicción de precios y demandas del mercado eléctrico de una manera automática.

Un modelo UC común viene dado en la ecuación (7.1), donde la serie temporal del precio o la demanda de energía de cualquier mercado eléctrico ($y(t)$) se descompone como la suma de una tendencia ($T(t)$), una componente estacional ($S(t)$) y una componente irregular ($v(t)$). La componente irregular es simplemente una señal Gaussiana de ruido aleatorio.

$$y(t) = T(t) + S(t) + v(t) = T(t) + \sum_{k=1}^{P/2} S_k(t) + v(t) \quad (7.1)$$

La componente estacional es de hecho la suma de $P/2$ sub-componentes $S_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, P/2$), donde P es el periodo fundamental de la componente estacional, es decir, el número de observaciones por ciclo. En el caso de estudio posterior $P = 168$ ya que los datos son horarios y hay un ciclo semanal claro.

Los modelos UC de múltiples salidas son posibles y/o otros componentes pueden aparecer en el modelo, como términos adicionales relacionando precios o demandas con otras variables de entrada de una forma lineal o no lineal, ver [Harvey89], [Pedregal02].

En este trabajo, no obstante, tales términos adicionales no se han incluido, dado que nos concentramos exclusivamente en métodos univariantes automáticos.

El modelo queda completamente definido cuando el comportamiento dinámico y estocástico de la tendencia y sub-componentes estacionales son especificados. Hay un amplio rango de opciones disponibles en la literatura para cualesquiera de ellos [Harvey89], [Pedregal02] y [West89]. Los modelos elegidos aquí se explican brevemente a continuación.

La ecuación (7.2) muestra el modelo seleccionado para la tendencia. Formalmente, se denomina Tendencia Lineal Local (LLT), donde $T(t)^*$ hace referencia a un estado adicional no observable necesario para la especificación de la tendencia $T(t)$; y $w(t)$ y $w(t)^*$ son ruidos aleatorios Gaussianos, independientes entre sí, con media cero y con unas varianzas determinadas por σ_T^2 y σ_T^{2*} , respectivamente.

$$\begin{pmatrix} T(t+1) \\ T(t+1)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ T(t)^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t)^* \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Cada una de las sub-componentes estacionales $S_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, P/2$) en la ecuación (7.1) se pueden modelar de forma trigonométrica, de acuerdo a la ecuación (7.3), donde $S_k(t)^*$ es un estado adicional necesario para escribir la representación trigonométrica; $w_k(t)$ y $w_k(t)^*$ son ruidos aleatorios independientes con varianza común σ_k^2 (aunque $\sigma_k^2 \neq \sigma_j^2$ para cualquier $k \neq j$).

$$\begin{pmatrix} S_k(t+1) \\ S_k(t+1)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{P} & \sin \frac{2\pi k}{P} \\ -\sin \frac{2\pi k}{P} & \cos \frac{2\pi k}{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k(t) \\ S_k(t)^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_k(t) \\ w_k(t)^* \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

El modelo UC completo (7.1) se forma ensamblando las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.3). El resultado del ensamblaje es un sistema de Espacio de los Estados que puede ser tratado en la forma estándar, donde la ecuación (7.1) es la ecuación de observación, y la encadenación de bloques de (7.2) y (7.3) para $k = 1, 2, \dots, P/2$ proporciona la ecuación de Estado o Transición. Representando el sistema de esta forma ciertos algoritmos recursivos, como el Filtro de Kalman (KF) y el (FIS), producen las estimaciones óptimas de los momentos de primer y segundo orden del vector de estados en el sentido de minimización del Error Cuadrático Medio.

Los estados en nuestro modelo vienen determinados por $T(t)$; $T(t)^*$; $S_k(t)$; y $S_k(t)^*$, con $k = 1, 2, \dots, P/2$. De todos éstos, solamente $T(t)$ y $S(t) = \sum_{k=1}^{P/2} S_k(t)$ tienen significado físico representando la tendencia y las componentes estacionales, respectivamente. Además, si se seleccionan ciertas sumas del término $S_k(t)$, se pueden definir otros componentes de interés. Por ejemplo, se puede estimar un ciclo diario sumando los sub-componentes estacionales correspondientes a la frecuencia diaria y sus armónicos, es decir, $D_t = \sum_{j=1}^{12} S_{7j}(t)$. Análogamente, un ciclo semanal se puede formar sumando el término periódico semanal y sus armónicos no incluidos en el ciclo diario.

La aplicación de los algoritmos KF/FIS recursivos requiere el conocimiento de todas las matrices del sistema. La mayoría de los elementos de estas matrices son conocidas en muchas aplicaciones, sin embargo hay un número de éstos que son desconocidos (con frecuencia llamados hiper-parámetros) y deben ser estimados por métodos eficientes. Los hiper-parámetros en el modelo (7.1)-(7.3) son las varianzas de los ruidos, es decir, σ_T^2 ; σ_T^{2*} ; σ_k^2 con $k = 1, 2, \dots, P/2$; y σ^2 , la varianza de la componente irregular.

En algunas aplicaciones que utilizan sistemas UC con una única salida, el número de parámetros desconocidos se puede reducir en un elemento, normalizando todas las varianzas por la varianza de la componente irregular. De esta forma, se define la matriz de los Ratios de la Varianza del Ruido (NVR) como: σ_T^2/σ^2 ; σ_T^{2*}/σ^2 ; σ_k^2/σ^2 con $k = 1, 2, \dots, P/2$. Cuando se realiza este cambio, el KF y el FIS se tienen que actualizar de manera acorde [Harvey89], [Young99], [Pedregal02], ver ecuaciones (2.55)-(2.58).

Hay diferentes maneras para manejar el problema de la estimación de los NVR, sin embargo, el método de Máxima Verosimilitud (ML) en el dominio del tiempo que se obtiene por una descomposición del error de predicción es el más común, gracias a sus buenas propiedades teóricas [Harvey89]. No obstante, en ciertas situaciones, como la estimación de modelos UC en la próxima sección, ML no es la mejor alternativa si el número de parámetros a estimar es alto, como suéle ser el caso en datos muestreados rápidamente que son el tipo de datos estudiados en este trabajo. La principal razón porque ML falla es que la superficie de verosimilitud es plana o multimodal alrededor del óptimo. Tal problema desaparece cuando el número de parámetros se reduce y ésta es la razón por la que algunos modelos son reducidos, [Harvey93], [Pedregal06], [Pedregal02], [West89].

Afortunadamente, para series temporales con un marcado comportamiento periódico, el dominio de la frecuencia ofrece una alternativa en que las funciones objetivo están mejor definidas que en el dominio del tiempo, incluso para modelos con una gran dimensión. Una de las ventajas de los métodos desarrollados en el dominio de la frecuencia en un marco UC es que la estimación es mucho más rápida, porque (i) se basa en una estimación del espectro de los datos, que se puede obtener fácilmente por medio de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) y (ii) la estimación del espectro del modelo (7.1)-(7.3) es una función lineal en los parámetros NVR desconocidos. La ventaja más destacable del dominio de la frecuencia respecto al dominio del tiempo es que tanto el espectro empírico de los datos y los términos lineales del espectro del modelo sólo se estiman una vez. Por tanto, el proceso de estimación es mucho más rápido que los métodos en el dominio del tiempo.

En esta primera parte del capítulo se analizan dos procedimientos de estimación en el dominio de la frecuencia¹ que suelen ser los más citados en la literatura UC: el método de Máxima Verosimilitud y el Ajuste Espectral.

Nota 7.1.1 *Esta conclusión por la que se utiliza el dominio de la frecuencia para estimar parámetros cuando la señal es periódica también se alcanzó en el desarrollo de estimadores de frecuencia para el análisis de vibraciones de estructuras flexibles cuando el número de frecuencias a estimar era mayor que dos. De hecho, el dominio de la frecuencia permite un mejor acceso a la información cuando los datos tienen un carácter periódico. La principal diferencia entre el problema de estimación en el dominio de la frecuencia aplicado a mercados eléctricos y el análisis de vibración, es que en las series temporales de los mercados eléctricos conocemos las frecuencias fundamentales y se estiman las varianzas, mientras que en el análisis de vibración se estiman las frecuencias fundamentales.*

Máxima Verosimilitud en el Dominio de la Frecuencia

Esta es la traducción natural del ML desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, basada en una transformada de Fourier, [Harvey89]. La función de máxima

¹Un estudio general sobre herramientas espectrales se desarrolla en [Kay81]

verosimilitud expresada en logaritmos en el dominio de la frecuencia viene dada por:

$$\log(L) = -\frac{1}{2}P\log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{P-1} \log(g_j) - \pi \sum_{j=0}^{P-1} \frac{I(\omega_j)}{g_j} \quad (7.4)$$

donde $I(\omega_j)$ es el espectro empírico (periodograma) y g_j es la función generatriz espectral, que es una función lineal de los parámetros NVR desconocidos: $g_j = g[e^{i\omega_j}]$, definida en los puntos $\omega_j = 2\pi j/P$, $j = 0, \dots, P-1$. Los parámetros NVR modifican la forma de la función generatriz espectral hasta maximizar (7.4). Generalmente, se necesita una transformación de estacionariedad mediante el operador diferencia aplicado sobre el modelo y los datos de la serie temporal previamente a la etapa de estimación. Para más detalles acerca la estimación ML en el dominio de la frecuencia de modelos UC consultar [Harvey89], páginas 191-205. De aquí en adelante este método se referenciará como ML.

Ajuste Espectral

El otro método de estimación analizado en esta sección es el ajuste en el dominio de la frecuencia. La forma más intuitiva de formular este problema es mediante un problema de mínimos cuadrados, es decir, minimizar la siguiente función objetivo, [Young99]:

$$F(I^*(\omega_j), g_j) = \sum_{j=0}^{P-1} [\log(I^*(\omega_j)) - \log(g_j)]^2 \quad (7.5)$$

Una vez más el espectro del modelo (g_j) modifica su forma mediante los parámetros NVR desconocidos para aproximar tan preciso como sea posible el espectro empírico de los datos, $I^*(\omega_j)$, en un sentido de mínimos cuadrados.

En esta sección no se ha aplicado ninguna transformación estacionaria al espectro empírico. $I^*(\omega_j)$ en este caso se calcula mediante un AR-espectro, cuyo orden se selecciona por el Criterio de Información de Akaike (AIC, “*Akaike Information Criterium*”), que es un criterio que depende del tamaño del ajuste, y que penaliza el número de parámetros utilizado en el modelo. Para más información consultar [Young99]. De aquí en adelante, este método espectral se referenciará como SF.

7.1.2. Metodología

Resumiendo, el modelo UC completo establecido en un marco del Espacio de los Estados se forma ensamblando la ecuación de observación (7.1) y un conjunto de ecuaciones de estado del tipo (7.2) y (7.3) para una frecuencia fundamental y sus armónicos. De estas ecuaciones, los hiper-parámetros desconocidos son los NVR.

La metodología completa de modelado comprende un número típico de etapas, brevemente resumidas en los siguientes subapartados.

Identificación

Aunque ésta es una etapa típica en el análisis de series temporales, en el caso del modelo UC en este contexto es muy obvia, ya que la estructura del modelo es fija e independiente del tipo de serie (precio o demanda), estación del año, o cualquier otra consideración. Lo que establece la estructura del modelo en este aspecto de identificación es simplemente el periodo de muestreo al que los datos son recogidos y el periodo de la componente periódica más grande que se observa en los datos.

Dado que los datos en el caso de estudio que se analizará más adelante se muestrean de forma horaria y el máximo periodo encontrado es semanal, el periodo es $P = 168$ por ciclo con 84 armónicos, cada uno con un parámetro NVR diferente. Además hay que añadir dos parámetros NVR para la componente de tendencia LLT, que suman un total de 86 hiper-parámetros desconocidos. Por lo demás, no hay que tener en cuenta ninguna consideración adicional, por lo que esta etapa se puede considerar automática.

Estimación de los NVR

Una vez que se conoce la estructura del modelo, la estimación de los NVR se realiza en el dominio de la frecuencia mediante las funciones objetivo introducidas anteriormente en (7.4) y (7.5). Es interesante destacar que la única información aportada por el usuario es el máximo periodo de los datos P ($P = 168$ en el caso de estudio presentado más adelante).

La estimación del modelo en el dominio de la frecuencia referente al Ajuste Espectral, ha sido realizado con la toolbox de *MATLAB*TM denominada *CAPTAIN* [Taylor07].

La estimación de ML en el dominio de la frecuencia se llevó a cabo mediante rutinas específicas programadas en *MATLAB*TM.

Filtrado y Suavizado

Una vez que los parámetros NVR se han estimado, se pueden ejecutar los algoritmos KF/FIS, ver (2.55)-(2.57), para obtener las predicciones, interpolaciones, o estimaciones de las componentes semanales, diarias e irregular.

Los algoritmos KF/FIS utilizados para predicción y extracción de señal tanto para los métodos SF y ML están incluidos en la toolbox *CAPTAIN*, haciendo perfectamente comparables los resultados obtenidos por ambos métodos.

Validación del modelo

La etapa final corresponde a la validación del modelo, donde hay que comprobar que el proceso de las innovaciones, una salida natural del Filtro de Kalman, se comporta como una señal ruidosa aleatoria puramente Gaussiana con media cero, varianza constante, y temporalmente independiente. Cualquier técnica típica para realizar el test estadístico puede ser válida para este propósito, [Young99], [Harvey89], [West89] y [Pedregal02].

7.1.3. Caso de estudio

Con el fin de verificar el funcionamiento de estos métodos de predicción, se han usado las señales de demandas de energía y precios correspondientes al mercado eléctrico del PJM de los EEUU durante el año 2005. El ejercicio de predicción consiste en un experimento exhaustivo durante el año completo, donde se realizan predicciones desde 1 hasta 24 horas adelante, utilizando una muestra de estimación de 60 días anteriores al origen de predicción. Dicho origen se mueve un día adelante y las estimaciones se actualizan cada semana. En total, se han realizado 365 conjuntos de 1 hasta 24 predicciones adelante por cada método.

La evaluación de las predicciones obtenidas por los modelos se ha realizado mediante una medida de error utilizada en [Conejo05b]: Error Absoluto Diario Medio (e_{day}). Esta medida de error se define en la ecuación (7.6), donde $y(t+i)$ son los valores reales tanto de los precios como de las demandas en los instantes $t+i$, e $\hat{y}(t+i)$ representan

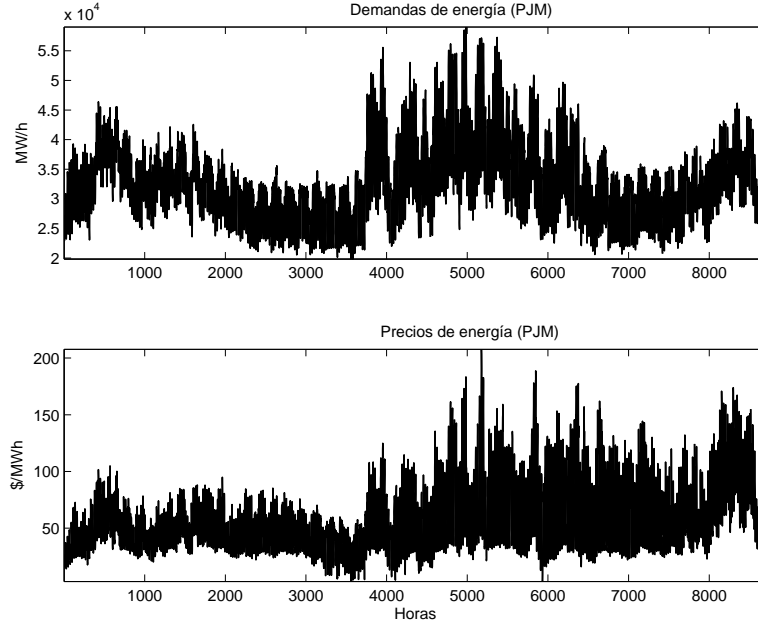


Figura 7.1: Precios y demandas de energía para el mercado PJM en el 2005

las predicciones i pasos hacia delante respecto el origen t . Hay que tener en cuenta que se utiliza un valor promedio en el denominador con el fin de evitar degradaciones en la medida de error cuando los valores de la serie temporal puedan tener valores cercanos a cero (como ocurre en el caso de los precios). Dicha medida es:

$$e_{day}(t) = \frac{1}{24} \frac{\sum_{i=1}^{24} |\hat{y}(t+i) - y(t+i)|}{\bar{p}} \quad (7.6)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} y(t+i) \quad (7.7)$$

El funcionamiento de los modelos de predicción se compara con un modelo ARIMA con doble estacionalidad identificado automáticamente de acuerdo a [Taylor03] y [Pedregal07], donde los órdenes correspondientes a los polinomios AR y MA se seleccionan entre un amplio conjunto de modelos con polinomios cuyos órdenes van desde cero hasta 2 minimizando el Criterio Bayesiano de Schwartz (SBC, “*Schwarz Bayesian Criterium*”), tal que:

$$SBC = -2\ln\left(\sum \hat{a}(t)^2\right) + K\ln(n) \quad (7.8)$$

donde $\hat{a}(t)$ son los residuos del modelo; K es el número de parámetros utilizados y n es el número de residuos calculados para el modelo. El mejor modelo es aquél con el valor SBC más pequeño, [Schwartz78].

Mercado PJM

El PJM es una Organización Regional de Transmisión que coordina la asignación de electricidad en todas las partes de Delaware, Illinois, Indiana, Kentucky, Maryland, Michigan, New Jersey, North Carolina, Ohio, Pennsylvania, Tennessee, Virginia, West Virginia y el distrito de Columbia. Ofrece servicios para un área de una población aproximada de 51 millones y una energía anual de 728 millones megawatt-hora ². Las series temporales correspondientes a la demanda de energía y precios del PJM están representadas en la Figura 7.1. Se puede observar, que este tipo de series no tienen ni la media ni la varianza constantes.

Con el fin de comparar las predicciones obtenidas por cada método, se han realizado los diagramas de caja (boxplot) de la variable e_{day} a lo largo del año 2005 y se han representado en las Figuras 7.2 y 7.3, que corresponden a la demanda de energía y a los precios, respectivamente. De ambas figuras se pueden extraer varias conclusiones. En primer lugar, los errores de predicción en los precios son mucho mayores que los producidos por las demandas de energía, como era de esperar ya que los precios son más volátiles. Esto se puede determinar observando la mediana y la dispersión de los errores en ambas Figuras. En segundo lugar, es interesante destacar la reducción de la media y mediana del error de los métodos frecuenciales, especialmente el SF, respecto al ARIMA. Finalmente, la dispersión de los errores de predicción se mantienen parecidos, ésto se hace más evidente en el caso de la demanda.

La Tabla 7.1 y la Tabla 7.2 muestran medidas estadísticas agregadas de la variable e_{day} . Teniendo en cuenta que la presencia de atípicos puede afectar a las medidas estadísticas típicas, como la media y la desviación típica (std.), se han elegido otras medidas como la mediana y la meda (la mediana de las desviaciones con respecto a la mediana en valor

²más información y los datos utilizados en este trabajo están disponibles en www.pjm.com

Tabla 7.1: Error de predicción global de la demanda energía

	e_{day}			
	ML	SF	Mixto	ARIMA
Media	4.7	4.3	4.1	4.8
Mediana	3.9	3.4	3.4	3.8
Std.	3.1	2.9	3.0	3.6
Meda	1.6	1.7	1.6	1.7

absoluto), que son más robustas frente a valores atípicos, ver [Peña01]. De hecho, las Tablas 7.1 y 7.2 revelan que los valores de media y desviación típica son mayores que los obtenidos por la mediana y la meda.

Comparando la segunda, tercera y quinta columna de las Tablas 7.1 y 7.2 se muestra que generalmente, tanto el ML como el SF mejoran al ARIMA. Aunque en el caso de la demanda de energía el ML y el ARIMA proporcionan errores de predicción muy similares.

Estas afirmaciones también se pueden comprobar en las Tablas 7.3 y 7.4, donde se han desagregado los resultados en meses. Respecto a la demanda, los métodos frecuenciales son mejores que el modelo ARIMA en cinco y ocho meses de los doce considerados respectivamente. Sin embargo, respecto a los precios el modelo ARIMA alcanza una precisión peor, ya que es mejorado por los métodos frecuenciales en 8 y 7 ocasiones con un amplio margen, respectivamente.

En cuanto a la complejidad computacional que involucra el cálculo de los NVR, la estimación en el dominio de la frecuencia es bastante rápida, dado que el tiempo necesario para la estimación de los parámetros NVR está alrededor de 30 (s). Todos los experimentos se implementaron en MATLAB 7.0 sobre un PC con un Pentium HT CPU de 3.0 GHz y una memoria RAM de 512 MHz.

Combinación de metodologías

En general, la precisión alcanzada por los métodos desarrollados en el dominio de la frecuencia supera a los modelos ARIMA. No obstante, aún cuando los dos métodos frecuenciales proporcionan buenos resultados, es difícil elegir alguno de los dos asegurando que

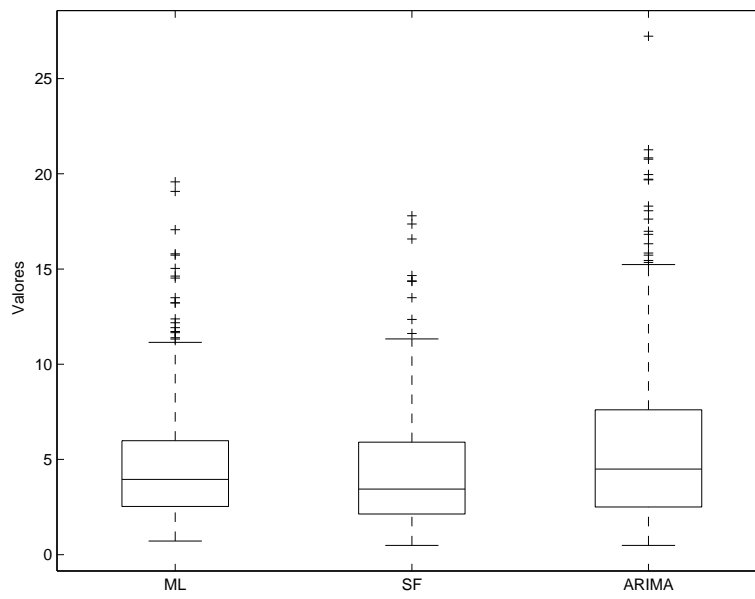
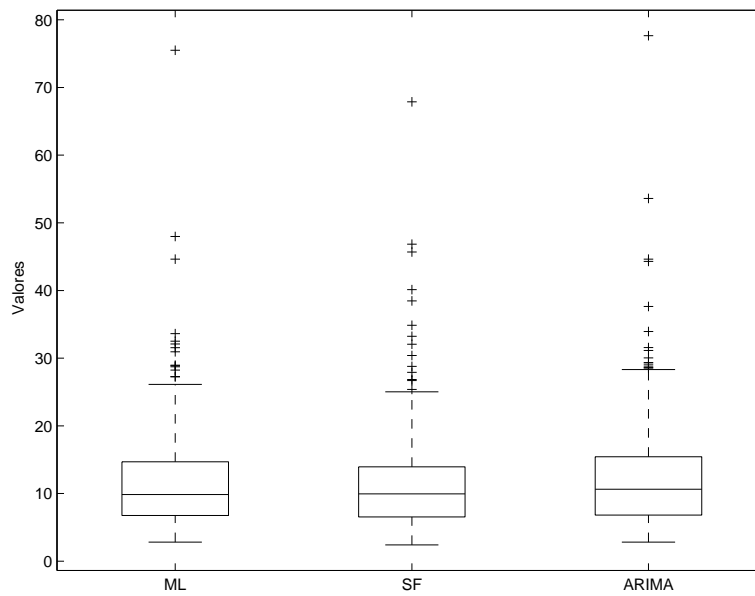
Figura 7.2: Box plot para el e_{day} de la demanda en el PJMFigura 7.3: Box plot para el e_{day} del precio en el PJM

Tabla 7.2: Error de predicción global de los precios

	e_{day}			
	ML	SF	Mixto	ARIMA
Media	11.8	11.5	10.8	12.3
Mediana	9.8	9.9	9.2	10.6
Std.	7.4	7.2	7.6	8.1
Meda	3.5	3.6	3.5	4.2

va a funcionar siempre mejor que el otro en una situación real de predicción. En principio, de acuerdo a los resultados mostrados en las Tablas 7.1-7.4 uno podría considerar elegir como mejor opción el modelo SF. Sin embargo, los resultados mostrados en estas tablas son un promedio del comportamiento de los modelos, de modo que uno se podría preguntar si es posible mejorar los resultados en base a un criterio que nos permita seleccionar qué método es el mejor en cada predicción. Una posibilidad para solucionar esta ambigüedad es combinar las predicciones.

El objetivo de esta sección es proporcionar un procedimiento para combinar los modelos frecuenciales para obtener una única predicción combinada. La idea es establecer diferentes pesos para cada técnica, tal que:

$$\hat{y}_{comb}(t) = c_1(t)\hat{y}_1(t) + c_2(t)\hat{y}_2(t) \quad (7.9)$$

donde $\hat{y}_1(t)$ y $\hat{y}_2(t)$ son los vectores de predicción 24 horas adelante producidas por los métodos ML y SF, respectivamente, con el origen de predicción en el instante t . Como resultado, $\hat{y}_{comb}(t)$ es la predicción que se obtiene con la combinación. Los parámetros variantes en el tiempo $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son los pesos que varían acordes con el origen de predicción. Estos pesos se calculan teniendo en cuenta los siguientes puntos:

1. El mayor peso corresponde al método con menor error de predicción sobre los datos pasados más cercanos.
2. Los pesos tienen que sumar uno.

Una manera posible de implementar los puntos de arriba es definir los pesos tal

Tabla 7.3: Error de predicción por meses de la demanda de energía

	e_{day}			
	ML	SF	Mixto	ARIMA
Ene	4.8	3.4	3.5	3.9
Feb	4.5	3.4	3.8	2.9
Mar	3.7	3.2	3.5	3.2
Abr	3.9	3.8	3.5	4.3
May	2.7	2.2	2.4	2.5
Jun	4.7	5.0	4.5	4.6
Jul	5.0	5.0	4.7	6.2
Ago	5.9	4.7	4.6	4.1
Sep	4.7	5.2	4.4	6.8
Oct	2.3	2.3	2.0	2.4
Nov	2.5	2.7	2.3	3.6
Dic	2.9	2.9	2.9	2.7

que:

$$c_i(t) = \frac{1/e_i}{\sum_{i=1}^2 1/e_i} \quad i = 1, 2. \quad (7.10)$$

siendo $1/e_i$ la inversa del error de predicción producido por el método ML ($i = 1$) y el SF ($i = 2$). Para tener en cuenta la estacionalidad diaria y semanal, el error de predicción e_i se define de forma que:

$$e_i = e_{day}(t - 24) + e_{day}(t - 168) \quad (7.11)$$

donde $e_{day}(t - 24)$ de acuerdo a (7.6)-(7.7) es el error de predicción del día antes y $e_{day}(t - 168)$ es el error de predicción del mismo día la semana anterior.

La cuarta columna (Mixto) de todas las tablas representa el error cometido por el procedimiento de combinación previamente presentado. En todas las tablas, el modelo Mixto y ARIMA se comparan y la mejor opción se realza en letra negrita. Desde un punto de vista global (tablas 7.1 y 7.2), la combinación de predicciones produce una mejora *sobre cualquier modelo individual*.

La Tabla 7.3 muestra que combinando los modelos frecuenciales estimados se producen unos resultados de predicción más precisos en 8 meses para el caso de la demanda y en 9 meses para los precios.

Tabla 7.4: Error de predicción por meses de la serie de precios

	e_{day}			
	ML	SF	Mixto	ARIMA
Ene	10.8	10.9	9.9	10.8
Feb	8.2	7.2	7.6	6.6
Mar	9.5	10.1	9.3	11.3
Abr	9.9	9.6	9.9	9.1
May	7.4	8.9	7.1	7.5
Jun	12.0	11.1	10.8	12.3
Jul	8.6	11.1	9.5	8.2
Ago	9.1	8.1	9.6	13.5
Sep	11.7	12.4	11.6	14.6
Oct	9.0	9.6	8.7	10.2
Nov	9.6	10.5	9.6	11.1
Dic	10.7	10.0	10.6	11.7

Extracción de la señal

Como se mencionó en la introducción, los modelos UC tienen la ventaja de que las series temporales, ya sean precios o demandas, se pueden descomponer en distintos componentes con cierto interés. De acuerdo con lo explicado en el apartado 7.1.1, el marco de Espacio de los Estados propuesto nos permite obtener tales componentes, que en este caso de estudio son la tendencia, las componente diaria y semanal. Por ejemplo, la Figura 7.4 dibuja los componentes extraídos para Febrero (2005) correspondiente a la demanda de energía en el mercado PJM.

Esta descomposición destaca propiedades importantes de la series, por ejemplo, la señal es compatible con una tendencia suavizada que puede ser muy útil para la predicción a medio o largo plazo, ver [González-Romera06]; la componente diaria es mucho más estable durante la muestra que la componente semanal; y la componente irregular, es decir, la parte aleatoria que no puede ser explicada por el modelo, es muy pequeña comparada con el resto de componentes.

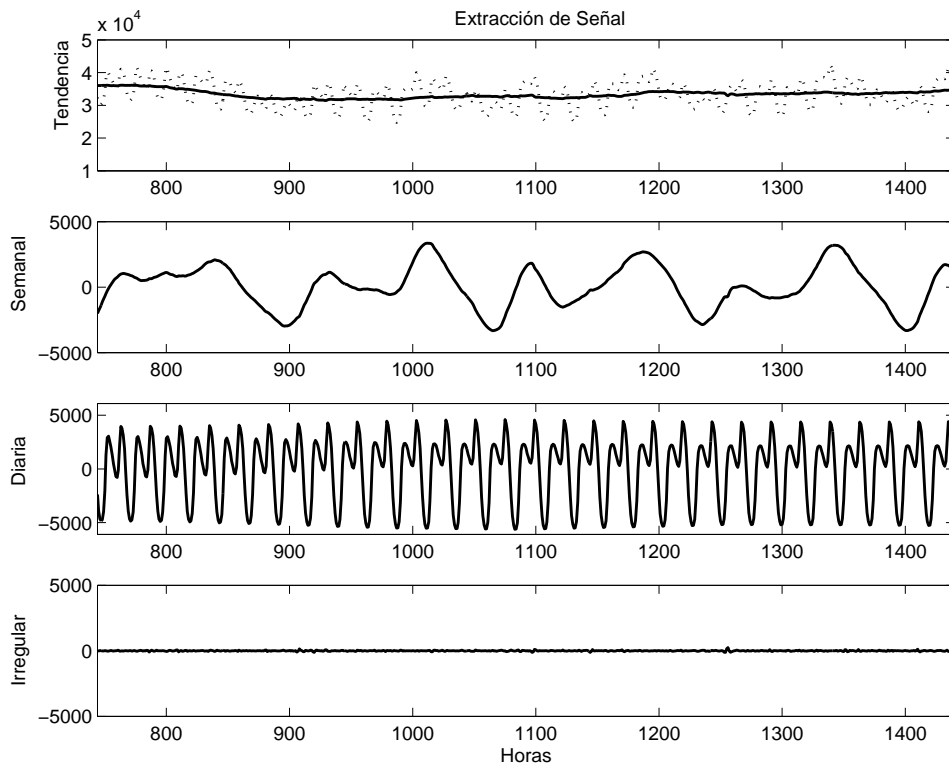


Figura 7.4: Componentes extraídos de la señal de demanda correspondiente a Febrero 2005

7.2. Predicción de la demanda a medio plazo

Hasta ahora, nos hemos centrado en la predicción a corto plazo, 24 horas hacia delante de las demandas de energía y precios. De hecho, la mayoría de la literatura se centra en predicción a corto plazo hasta una semana como mucho, como se ha explicado en la introducción. Sin embargo, también es necesario realizar predicciones con un horizonte más lejano. Obviamente, las dificultades para realizar predicciones a medio-largo plazo son mucho mayores que para el caso del corto plazo, y esto se refleja en los pocos artículos dedicados a este aspecto.

En este apartado se va a tratar exclusivamente la serie temporal de demandas de energía, ya que es una serie menos volátil que los precios y las predicciones a medio-largo plazo son más fiables.

Entre los artículos dedicados a la predicción del medio-largo plazo de la demanda de energía, algunos están basados en métodos de regresión de la demanda con variables económicas o meteorológicas, modelos ARIMA para series temporales, etc. (ver por ejemplo, Barakat y Al-Rashid, [Barakat92]; Tamura *et al.*, [Tamura95]; Kandil *et al.*, [Kandil01]; Al-Hamadi y Soliman, [Al-Hamadi05]; Mirasgedis *et al.*, [Mirasgedis06]; González-Romera *et al.*, [González-Romera06]). Las referencias de predicción a largo o medio-plazo son muy heterogéneas en muchos aspectos, pero son dos los aspectos más importantes desde el punto de vista de este trabajo. En primer lugar, la variedad de métodos implementados es considerable, dada la complejidad del asunto. En segundo lugar, y más importante, la naturaleza de los datos empleados, principalmente su periodo de muestreo, es muy diferente de unas referencias a otras.

El objetivo de este apartado es desarrollar una metodología general multi-paso con el fin de encontrar predicciones tan precisas como sea posible para un horizonte a medio plazo (hasta doce semanas en los ejemplos que se mostrarán más tarde, es decir, sobre tres meses) con datos muestreados horariamente. Este tiempo o paso de muestreo restringe considerablemente el número de aplicaciones parecidas encontradas en la literatura. El horizonte de predicción se puede extender tanto como sea sensato hacerlo, dependiendo de la cantidad y calidad de los datos, sin ser una restricción impuesta por el método.

La solución multi-paso que se propone implica la estimación de diferentes modelos para los mismos datos que tienen periodos de muestreo diferentes (mensual y horario en los posteriores ejemplos). Cada modelo incorpora las características apropiadas de los datos para su respectivo periodo de muestreo, y ambos tipos de predicciones se integran en una sola predicción mediante técnicas de agregación temporal que resultan sencillas de formular en un marco de Espacio de los Estados.

El método es general en el sentido de que cualquier modelo horario que se pueda escribir como un sistema lineal en Espacio de los Estados puede funcionar con la metodología general propuesta. En este apartado se ha utilizado un modelo de Componentes no Observables, pero cualquier otro modelo particular se podría implementar de la misma forma.

Metodología multi-paso

Una limitación importante del modelo (7.1) para datos cuyo tiempo de muestreo es horario es que cuando el horizonte de predicción es a medio-largo plazo no se tiene en cuenta el patrón estacional anual ($A(t)$). Esto es debido a que en predicciones a corto plazo ese término se puede despreciar. Todo lo contrario ocurre en predicciones con horizontes más lejanos ya que es una componente muy importante. De esta manera el modelo completo para predicciones a medio-largo plazo sería:

$$y(t) = T(t) + S(t) + A(t) + v(t) \quad (7.12)$$

Sin embargo, existe un problema numérico a la hora de incluir $A(t)$ en el modelo, ya que el periodo de esta componente estacional es de $P = 8760$ horas. Entonces surge la siguiente cuestión: ¿Cómo incorporar el efecto estacional anual eficientemente?

Es posible encontrar diferentes opciones para incorporar este componente. Una opción que es accesible y eficiente es predecir las series temporales con diferentes tiempos de muestreo y unir ambas predicciones con técnicas de agregación temporal. El procedimiento se divide en dos etapas que serán explicadas posteriormente en un algoritmo más detallado:

1. Encontrar predicciones óptimas para los próximos meses necesarios utilizando datos mensuales y modelos que incorporen la estacionalidad anual explícitamente

2. Construir un modelo para un horizonte a corto plazo con datos muestreados por horas y realizar la predicción *horaria* para los próximos meses con este modelo, pero asegurándose de que se cumplan ciertas restricciones. Tales restricciones son que la suma de las predicciones horarias para cada mes sean exactamente igual a las predicciones mensuales calculadas en la etapa anterior

El principal problema técnico es encontrar las predicciones en la etapa 2 que cumplan con las restricciones necesarias. No obstante, esto se puede hacer con relativa facilidad si el modelo en la etapa 2 se puede escribir en Espacio de los Estados mediante técnicas de agregación temporal, de modo que los algoritmos KF/FIS se puedan aplicar para realizar las predicciones.

Supongamos que el modelo establecido en forma de Espacio de los Estados en la ecuaciones (7.1)-(7.3), (también conocido como Modelo Básico Estructural (BSM, “*Basic Structural Model*”), [Harvey89]) se puede escribir de una manera compacta como en la ecuación (7.13), donde $x(t)$ es el vector de estado general, es decir, la tendencia, las componentes periódicas y todos los estados auxiliares; Φ , E y H son las matrices del sistema³, formadas por concatenación de los bloques de las matrices de los sistemas individuales en (7.1)-(7.3).

$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi x(t-1) + Ew(t) \\y(t) &= Hx(t) + v(t)\end{aligned}\tag{7.13}$$

Para formular el modelo (7.13) de manera que la agregación temporal se tenga en cuenta, se tiene que definir explícitamente una variable acumulador, [Harvey89]. Un primer paso es incluir la ecuación de observación del vector de estado, de modo que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & H\Phi \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ x(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & HE \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7.14}$$

Obsérvese que el sistema (7.14) es completamente equivalente al sistema (7.13). El segundo paso es incorporar la variable acumulador de manera que se ajuste a las restricciones

³En este apartado se ha cambiado la notación referente a las matrices de EE con el fin de no confundir el componente anual $A(t)$ con la matriz del sistema.

propuestas. Esta variable es binaria y se define como: i) $C_t = 0$ si t =cada hora dentro de la muestra de estimación y la primera hora de cada mes en la muestra de predicción; ii) $C_t = 1$ en cualquier otro caso.

El modelo final queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_t & H\Phi \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ x(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & HE \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.15)$$

El modelo (7.15) tiene algunas peculiaridades:

- No hay ruido observado
- El primer estado reproduce exactamente los datos observados
- Mientras que el sistema (7.14) es invariante en el tiempo, en (7.15) hay una matriz del sistema variante en el tiempo debida a la introducción de la variable acumulador
- El primer estado del sistema son los datos para la muestra de estimación, que es a su vez una versión acumulada de la salida en la muestra de predicción.

La manera en que las predicciones se producen de acuerdo al modelo de Espacio de los Estados definido se puede resumir en el siguiente algoritmo:

1. Encontrar las predicciones mensuales óptimas basadas en observaciones mensuales y en un procedimiento óptimo. En los posteriores ejemplos se utilizará un BSM mensual.
2. Formular y estimar los parámetros desconocidos en el dominio de la frecuencia basados en un modelo BSM para datos horarios con un ciclo semanal, es decir, el modelo (7.12) sin el ciclo anual $A(t)$.
3. Formar una serie temporal nueva agregando dos sub-series. La primera serie la forman los datos horarios en la muestra de estimación. La segunda parte son las predicciones mensuales obtenida en 1 colocadas adecuadamente en una escala de muestreo horaria, con huecos en el medio. Las posiciones de las observaciones reales como las predicciones

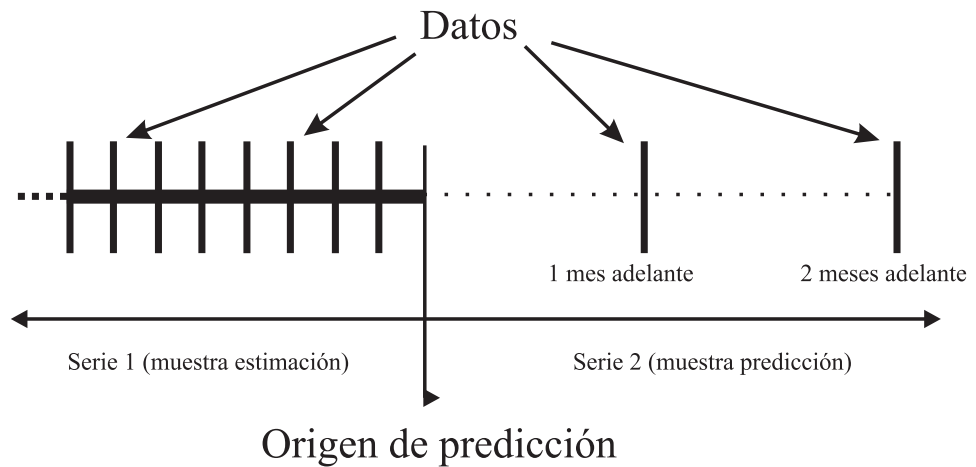


Figura 7.5: Colocación de observaciones en el eje temporal para la aplicación del modelo (7.15). Las líneas verticales indican la posición de las observaciones en la muestra de estimación y en la muestra de predicción

mensuales se muestran en la Figura 7.5, donde las líneas verticales indican los puntos temporales en que los datos están disponibles, tanto los datos reales en la muestra de estimación o las predicciones del modelo mensual

4. Ejecutar el Filtro de Kalman y el Suavizado de Intervalo Fijo sobre las series temporales formadas en el paso 3
5. Dado que el primer estado es la salida acumulada del sistema en el periodo de predicción, las predicciones finales deben realizarse mediante la operación inversa a la acumulación hecha por el modelo presentado.

El papel de la variable acumulador C_t en el sistema (7.15) es la clave en esta metodología. Dado que el primer estado del sistema es la salida (es decir, los datos observados), para cualquier valor que tome la salida este primer estado acumula dichos valores horarios. Tal acumulación se reinicia tan pronto como su valor sea cero. Entonces, dada la distribución de ceros para C_t (la primera hora de cada mes en el periodo de predicción) el algoritmo de suavizado realizará una predicción para el último valor de cada mes. Pero estos valores han sido fijados previamente como las predicciones mensuales del modelo mensual. De esta forma se incluyen las restricciones mensuales.

Es importante destacar que el procedimiento es muy general, gracias a su formulación en Espacio de los Estados. De hecho, la única restricción es que el modelo para los datos con un periodo de muestreo más pequeño se pueda expresar en la forma de Espacio de los Estados. El resto de la metodología es completamente automática. Esto significa que se puede aplicar cualquier otra combinación de periodos de muestreo y modelos que el analista considere oportunos. Concretamente, los modelos con el periodo de muestreo más grande pueden ser no lineales, incorporar entradas, etc. Mientras que el modelo con el tiempo de muestreo más pequeño puede ser el utilizado en este trabajo, o un ARIMA, Suavizado Exponencial, etc.

Sin embargo, al menos existen dos problemas que dificultan su implementación práctica, como se ha mencionado en este apartado. En primer lugar, la dimensión del modelo BSM horario, ya que se necesita la estimación de un mayor número de parámetros que en otras aplicaciones donde este modelo se ha usado. Este hecho ha motivado la estimación por ML en el dominio de la frecuencia, ver apartado 7.1.1. En segundo lugar, las propiedades específicas del sistema (7.15), principalmente que una matriz del sistema varía con el tiempo. Como consecuencia de estos problemas, no se dispone de un software comercial en el mercado para solucionar estos aspectos, y por tanto se ha tenido que desarrollar unas rutinas específicas en *MATLABTM*

Resultados empíricos

El conjunto de datos utilizados para ilustrar el método propuesto en los apartados anteriores proviene de un transformador de una importante compañía eléctrica en UK. Los datos fueron proporcionados por la compañía bajo el compromiso de confidencialidad. La base de datos es algo antigua (medidas horarias desde el 1 de Enero del 1990 hasta el final de Abril del 1994, con un total de 37.753 observaciones), sin embargo es muy apropiada para mostrar el funcionamiento del método. La Figura 7.6 muestra la serie temporal de demanda analizada para los dos primeros años de la muestra, donde algunas características típicas de este tipo de datos se observan claramente, siendo el ciclo anual $A(t)$ uno de las características más importantes para este trabajo.

Los dos aspectos más importantes abordados en este apartado son:

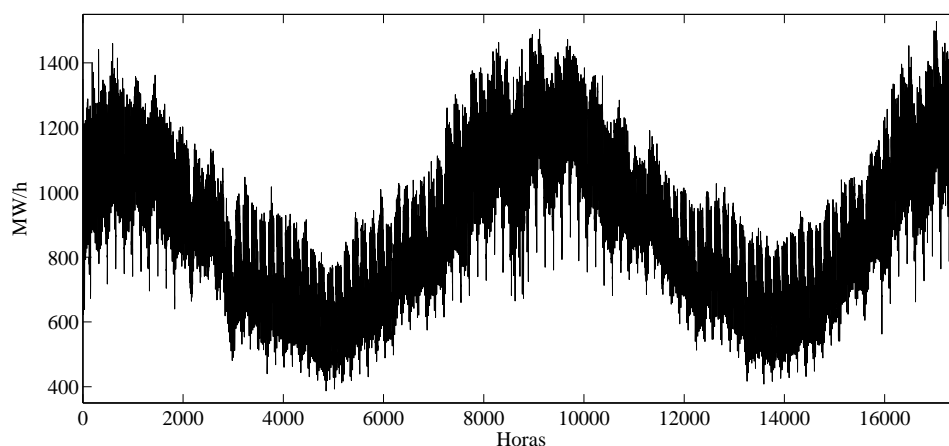


Figura 7.6: Demanda de energía horaria para los años 1990 y 1991 registrados en un transformador de una compañía inglesa

1. Cuánto se mejora en la predicción horaria si se usa un modelo que incluya el ciclo anual con respecto a un modelo típico de predicción a corto plazo, donde no se incluye el ciclo anual.
2. Encontrar el horizonte de predicción a partir del cuál las mejoras introducidas por el modelo aquí presentado sean considerables.

Con el fin de encontrar una respuesta a estas cuestiones, se ha diseñado un experimento donde se aplica el algoritmo de una forma iterativa durante el año 1993. El horizonte de predicción comprende desde una hora hasta 2.016 horas hacia delante (12 semanas, alrededor de 3 meses), no obstante se pueden emplear horizontes temporales incluso más lejanos. Una vez que se ha realizado la predicción, el origen de predicción se mueve un día adelante, hasta completar 365 conjuntos de predicciones 3 meses adelante. La estimación de los modelos se actualiza cada día. Además, para comparar las predicciones se ha formulado un modelo típico en la predicción a corto plazo 24 horas adelante (que no incluye el ciclo anual), presentado en la primera sección de este capítulo.

La medida utilizada para medir el error es el MAPE (Error absoluto medio porcentual), dado por:

$$MAPE(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{y}(t+i) - y(t+i)|}{y(t+i)} \cdot 100 \quad (7.16)$$

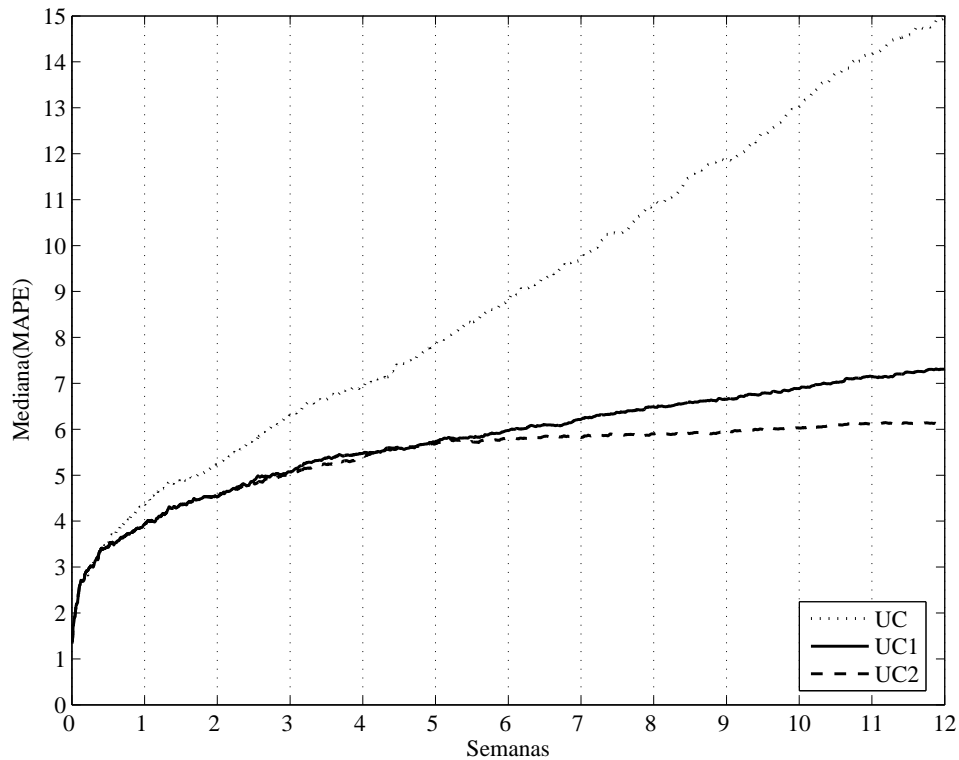


Figura 7.7: Mediana del MAPE para los 365 conjuntos de errores de predicción desde 1 hora hasta 2.016 horas hacia delante respecto a los tres modelos considerados

donde $\hat{y}(t+i)$ representan los valores estimados en los instantes $t+i$; $y(t+i)$ son los valores reales de demanda y n varía desde 1 a 2.016 horas.

La Figura 7.7 presenta el funcionamiento del algoritmo de predicción (UC1 desde ahora), comparado con la alternativa más simple, típica de los contextos de predicción a corto plazo (UC). Cada línea en la Figura representa la mediana⁴ del MAPE para el conjunto completo de los 365 errores de predicción desde 1 hora hasta 2.016, obtenidas a lo largo del año completo. Las líneas verticales indican el comienzo de cada semana. En un formato similar, la Figura 7.8 muestra la meda. Se completan los resultados con la información proporcionada por la Tabla 7.5

De toda esta información se pueden extraer varias conclusiones. En primer lugar, hay un incremento rápido en las medidas del error en todos los modelos para horizontes

⁴Se utiliza la mediana como medida estadística porque es robusta a atípicos

Tabla 7.5: Mediana y meda del MAPE en el experimento de predicción

Horizonte temporal	UC		UC1		UC2	
	Mediana	Meda	Mediana	Meda	Mediana	Meda
1 hora	1.34	0.84	1.36	0.84	1.36	0.84
1 día	2.68	0.81	2.69	0.81	2.69	0.81
1 semana	4.37	1.05	3.92	0.91	3.92	0.91
4 semanas	6.95	1.67	5.47	0.90	5.41	0.91
8 semanas	10.86	2.94	6.49	1.44	5.90	1.15
12 semanas	14.98	4.73	7.30	1.91	6.14	1.06

de predicción a corto plazo, no obstante, estos incrementos se reducen considerablemente después de media semana para el modelo UC1, mientras que el modelo UC todavía sigue creciendo. En segundo lugar, se verifica que la inclusión del ciclo anual en el modelo es muy importante, ya que el error se reduce casi a la mitad para una predicción tres meses adelante si tenemos en cuenta la mediana como medida de error y más de la mitad si consideramos la meda. En otras palabras, las predicciones son mucho más exactas y su dispersión es mucho menor. En tercer lugar, la mejora aumenta considerablemente con el horizonte de predicción. Por último, el hecho de tener en cuenta el ciclo anual comienza a ser rentable para horizontes de predicción de una semana o superiores. Se puede observar que, para horizontes hasta un día adelante que son típicos de aplicaciones para corto plazo, la adición del ciclo anual no produce ninguna mejora. Por lo tanto no es recomendable tenerlo en cuenta.

Los resultados se pueden analizar con más detalle si los errores de predicción se clasifican por meses, con el fin de detectar algún patrón anual. Para este propósito la Tabla 7.6 muestra la mediana y la meda de los errores (MAPE) 12 meses adelante clasificados por meses. Hay diferencias sistemáticas entre los modelos UC y UC1 para cada mes, como se esperaba. En particular, estas diferencias son muy importantes para los meses de Febrero a Abril y Septiembre a Noviembre.

Un aspecto que no se trata directamente en este trabajo es el perfil variable de algunos componentes a lo largo de las estaciones del año. El más importante y estudiado es el perfil diario, que en general tiende a tener dos picos durante los meses de invierno, pero solo un pico en los meses de verano. Este aspecto, tampoco tiene importantes implicaciones

Tabla 7.6: Mediana y meda del MAPE obtenido en la predicción 12 semanas adelante

Meses	UC		UC1		UC2	
	Mediana	Meda	Mediana	Meda	Mediana	Meda
Abril	20.61	3.22	7.89	0.40	7.54	0.34
Mayo	12.50	3.31	8.91	0.40	7.38	0.75
Junio	12.23	1.84	10.56	0.75	7.14	0.27
Julio	10.91	1.24	10.67	0.36	7.56	0.57
Agosto	11.93	1.94	9.76	1.23	7.99	1.40
Septiembre	18.18	3.37	5.17	0.63	4.55	0.47
Octubre	25.10	1.52	5.02	0.32	4.32	0.35
Noviembre	21.26	1.90	6.36	0.34	4.61	0.14
Diciembre	13.50	1.77	7.76	0.20	5.47	0.30
Enero ¹	9.92	0.96	6.94	0.70	6.00	0.09
Febrero ¹	15.51	7.17	5.27	0.45	6.10	0.11
Marzo ¹	15.53	4.89	4.96	0.22	6.22	0.16

para predicciones a corto plazo, pero para largo plazo es necesario y puede producir considerables mejoras en términos de predicción. El problema es que el modelo no es capaz de representar el cambio de propiedades de la componente diaria dada la reducción del modelo que se realiza. El resultado es que el perfil diario que se proyecta en el futuro (varios meses adelante) es un promedio ponderado del perfil diario visto en el pasado. Para modelos de corta memoria las predicciones tendrán el patrón diario visto en las observaciones más recientes, que se extenderán para predicciones a largo plazo. Para modelos de memoria más amplia el patrón diario futuro será una especie de media de las observaciones diarias partiendo de observaciones lejanas en el pasado, y esto se proyectará en el futuro lejano. En cualquiera de los dos casos las predicciones diarias serán inexactas para horizontes lo suficientemente lejanos, y especialmente en meses con cambio de estación.

Debido a estas razones se ha optado por modificar el componente diario de la siguiente forma:

1. Se forma un perfil diario variante en el tiempo del año anterior al periodo de predicción, aplicando el modelo horario a los datos que están divididos en diferentes estaciones.
2. Se modifican las predicciones realizadas por el modelo UC1 de manera que para pre-

¹Estos meses corresponden al año 1994

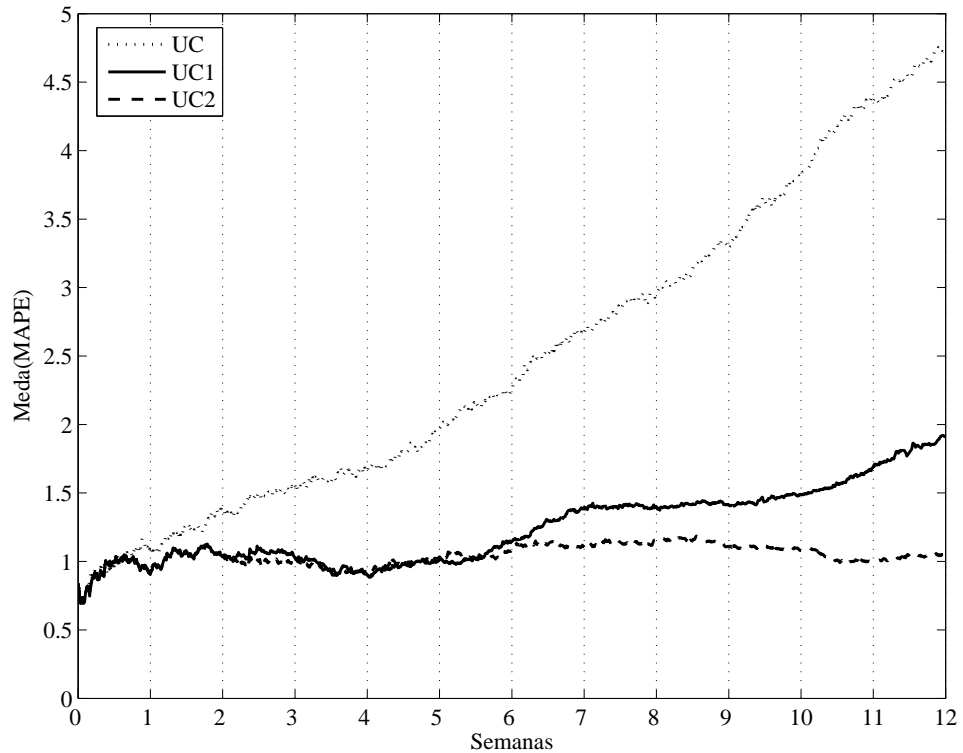


Figura 7.8: Meda del MAPE para los 365 conjuntos de errores de predicción desde 1 hora hasta 2.016 horas hacia delante respecto a los tres modelos considerados

dicciones horarias desde 2 a 12 semanas adelante, el componente diario se reemplaza por el perfil diario del año anterior para las mismas fechas y el mismo tipo de día (UC2 de ahora en adelante). De este modo, para cada horizonte de predicción, las predicciones hasta 2 semanas adelante son exactamente las mismas en ambos casos (UC1 y UC2), pero para el resto de semanas la componente diaria tendrá un patrón diferente. Por tanto, las diferencias observadas en los errores de predicción obtenidos por UC1 y UC2 son exclusivamente debidas a las diferencias del componente diario.

Las curvas y columnas denominadas como UC2 en las Figuras 7.7 y 7.8 y en las Tablas 7.5 y 7.6 ilustran las ventajas de sustituir la componente diaria. Se puede observar claramente en las Figuras 7.7 y 7.8 que desde la sexta semana en adelante existen un mejora continua en reemplazar el componente diario por el perfil diario del año anterior (hay que señalar que las mejoras se deben solamente a las diferencias en el perfil diario). Es aún más

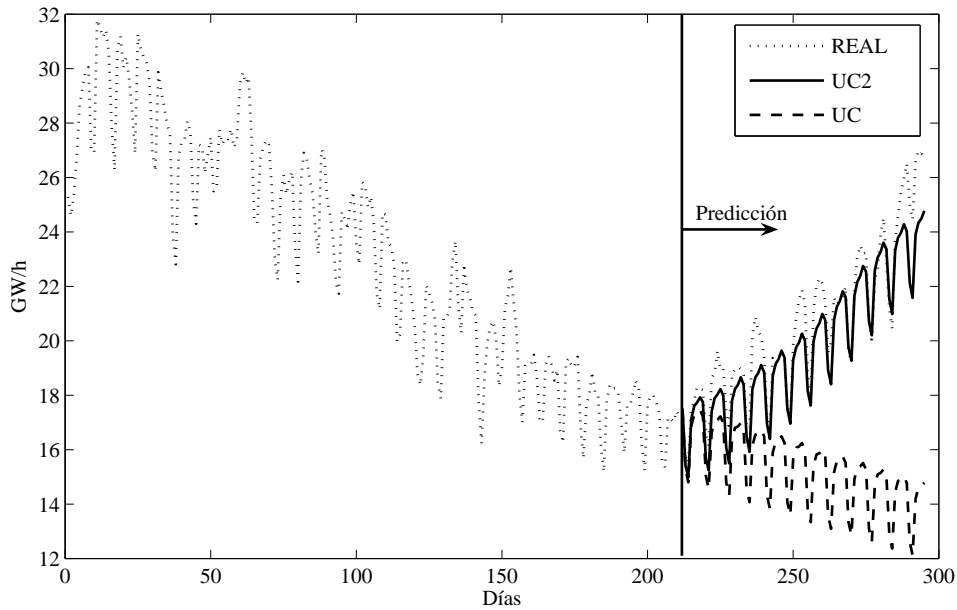


Figura 7.9: Datos reales (:) y la predicción 12 semanas hacia delante producidas por los modelos UC2 (-) y UC (- -) comenzando el 1 de Agosto

sorprendente como la mediana del MAPE llega a ser plana desde la sexta semana y la mediana es aproximadamente plana desde la primera semana. En la mediana, hay una mejora del 1.16% sobre el modelo UC1 para un horizonte de 12 semanas.

Una ilustración final del método se muestra en la Figura 7.9 donde se comparan las predicciones obtenidas por los modelos UC y UC2 con los datos reales (el dibujo muestra los datos agregados de forma diaria, en lugar de horaria con el fin de hacer la figura más clara). Dado que la información reciente en la muestra indica una tendencia descendente, el modelo UC es incapaz de ver el cambio de tendencia produciendo unas estimaciones que no siguen la evolución real de los datos. No obstante, las predicciones realizadas por UC2 sí se adaptan a este cambio por el hecho de haber tenido en cuenta el ciclo anual, que ha sido previamente capturado en el modelo mensual.

7.3. Análisis del ciclo económico

Desde el siglo XIX diferentes investigadores han realizado un gran esfuerzo en buscar una explicación a las dramáticas caídas que cada cierto tiempo registraba la actividad económica. En 1863, el francés Clement Juglar demostró con pruebas estadísticas que las crisis no eran fenómenos aislados, sino parte de una fluctuación cíclica de la actividad comercial, bursátil e industrial y que los periodos de prosperidad y crisis se seguían unos a otros. Este fue uno de los trabajos pioneros en torno al ciclo económico. Actualmente, una definición de ciclo económico generalmente aceptada podría ser la dada por el NBER⁵ (National Bureau of Economic Research): "fluctuaciones encontradas en la actividad económica agregada, de duración media 4 años y rango entre 1-12".

Esta sucesión de subidas y bajadas con un rango tan amplio de variación del periodo demuestra que la actividad económica es variante. Es por esto que intentar buscar una explicación a estos fenómenos es de vital importancia, ya que cuanto mayor sea nuestro conocimiento sobre esta dinámica mayores serán nuestros recursos para anticiparse y tomar las medidas oportunas. Un ejemplo del interés que atrae el estudio del ciclo económico se puede encontrar en la página web <http://www.eabcn.org/index.shtml>, destinada al estudio del ciclo económico en la zona euro.

Al margen de las posibles explicaciones teóricas que indaguen sobre las causas del ciclo económico, gran parte de la investigación empírica llevada a cabo sobre este tema se puede clasificar dependiendo: (i) si el enfoque es univariante o multivariante, (ii) si se permite la asimetría del ciclo o no se permite, ver [Cancelo05].

Esta sección se centra en el enfoque univariante mediante análisis de series temporales y que permite que el ciclo sea asimétrico.

Hay que destacar el trabajo de Burns y Mitchell en [Burns46] "Measuring the Business Cycle", el cuál puede ser considerado un primer paso hacia la evaluación empírica sobre esta materia. De hecho, uno de los temas que mayor número de publicaciones atrae es la obtención del ciclo económico a partir del indicador económico estudiado. En otras palabras, dada una serie temporal qué parte de la señal corresponde a la tendencia, al ciclo

⁵Más información en <http://www.nber.org/>

o a la componente irregular. Por ejemplo, el filtro presentado por Hodrick y Prescott en [Hodrick97] se utiliza comúnmente para este propósito. Una extracción de la tendencia más general puede realizarse usando filtros paso banda del tipo Butterworth, ver Harvey and Trimbur en [Harvey03], Kaiser y Maravall en [Kaiser99], Bógalo y Quilis en [Bógalo03] entre otros. Por otro lado, se ha demostrado que los resultados de suavizado obtenidos por el filtro de Hodrick y Prescott (HP) son equivalentes a los obtenidos por el Suavizado de Intervalo Fijo (FIS) enmarcado en un problema de Espacio de los Estados estocástico, ver Young y Pedregal (1999).

Por tanto, el uso de filtros paso bajo, alto o banda se está explotando actualmente en esta aplicación. No obstante, este tipo de técnicas delimita un ancho de banda donde se supone se encuentra el ciclo económico, pero no aportan información acerca de cómo varía la frecuencia en función del tiempo. Los filtros adaptativos de ranura (ANF), o los estimadores algebraicos estudiados en el capítulo 3 son unas herramientas que pueden arrojar algo de luz en la estimación del periodo correspondiente al ciclo económico.

En esta sección se pretende aprovechar las características de *tracking* de los filtros adaptativos de ranura así como la rapidez de la estimación proporcionada por las técnicas algebraicas para estudiar el periodo cambiante del ciclo económico. Se utilizará como indicador económico el índice de la producción industrial de los EEUU.

7.3.1. Formulación del problema

Supongamos que el ciclo económico se modela a partir de una onda sinusoidal dada por la siguiente ecuación:

$$y(t) = A \sin(\omega(t) \cdot t + \phi) \quad (7.17)$$

donde A es la amplitud de la onda, $\omega(t)$ es la frecuencia en (rad/s) y ϕ es la fase. El único parámetro que se supone variante es la frecuencia $\omega(t)$.

En el capítulo 3 se estudiaron varios ANF, entre ellos el más reciente era el presentado por Hou (2005) [Hou05], donde propuso un ANF globalmente convergente para la estimación de la frecuencia y amplitud de una onda sinusoidal proporcionando una formalización matemática del problema. El estimador de amplitud y frecuencia analizado en las

ecuaciones (3.39)-(3.44), es un sistema de orden 7. Sin embargo, si sólo estamos interesados en la frecuencia se puede simplificar el algoritmo a un sistema de segundo orden, ver [Hou05]. Por tanto, el algoritmo simplificado capaz de estimar la frecuencia de una señal sinusoidal queda como:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -\alpha_1 z + (\alpha_2 y^2/2 - \eta - \alpha_1^2)y \\ \dot{\eta} &= \alpha_2 y(z + \alpha_1 y) \\ \hat{\theta} &= \eta - \alpha_2 y^2/2\end{aligned}\tag{7.18}$$

donde α_1 y α_2 son números reales positivos que definen el comportamiento del estimador de frecuencia. Los estados del sistema vienen definidos por las variables z y η . El parámetro $\hat{\theta}$ converge a ω^2 cuando $t \rightarrow \infty$ para estados iniciales y $\theta(0)$ arbitrarios. La propiedad de convergencia global está demostrada en [Hou05].

Este filtro se comparará con el estimador algebraico desarrollado en capítulo 3, ver (3.14), donde se ha utilizado como filtro invariante un integrador puro del tipo $1/s^2$.

7.3.2. Caso de estudio

El indicador económico utilizado para analizar el ciclo económico es el índice de producción industrial (IPI) de los EEUU entre los años 1959-1997. Aunque este índice representa solamente un sector de la economía total, históricamente ha capturado gran parte de las fluctuaciones agregadas.

La Figura 7.10 muestra la serie temporal del IPI de los EEUU. El ciclo económico de esta serie se ha extraído mediante la aplicación de filtros HP aplicados en cascada conforme a la definición del ciclo proporcionada por el NBER y se muestra en la Figura 7.11.

Hasta ahora toda la información que se puede extraer del ciclo económico se muestra en la Figura 7.11. Sin embargo, en este trabajo se pretende dar un paso adelante utilizando el filtro adaptativo de ranura globalmente convergente y el estimador algebraico. El interés de utilizar estos estimadores es poder analizar la evolución de la frecuencia del ciclo económico, no solo el rango donde ésta se encuentra.

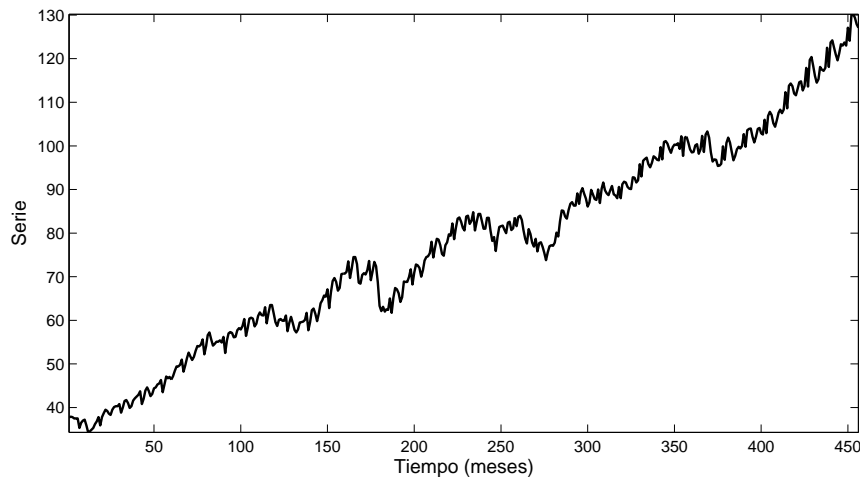


Figura 7.10: Serie temporal correspondiente al índice de producción industrial de EEUU.

Hay que señalar que aunque en numerosos estudios se reconoce que la frecuencia del ciclo no es constante, en muchos estudios de corte empírico se proponen modelos con periodo constante. La no constancia del periodo se puede observar a simple vista en la Figura 7.11. La idea de utilizar los estimadores de frecuencia es poder superar la limitación de la hipótesis de frecuencia constante con una estimación de la evolución de la frecuencia.

El problema práctico que es necesario afrontar es decidir los valores de los parámetros de diseño, α_1 y α_2 en (7.18). La elección óptima de los parámetros α_1 y α_2 es un problema abierto. Una referencia que estudia el efecto de estos parámetros de diseño en los estimadores ANF, es la proporcionada por Clarke en [Clarke01]. Según el diseño de estos parámetros el estimador llegará a un compromiso entre la robustez al ruido o la sensibilidad ante los cambios de frecuencia.

Por tanto, ante la ausencia de una metodología sistemática para la elección de parámetros de diseño, se introducirán diferentes valores de α_1 y α_2 hasta alcanzar unos resultados razonables, en base a la definición de ciclo dada por el NBER que se mencionó anteriormente.

Con el fin de facilitar la discusión de los resultados, se ha dibujado la serie temporal correspondiente al ciclo económico y la estimación del periodo de dicha serie en la parte superior e inferior de la Figura 7.12, respectivamente. Los resultados obtenidos con el ANF,

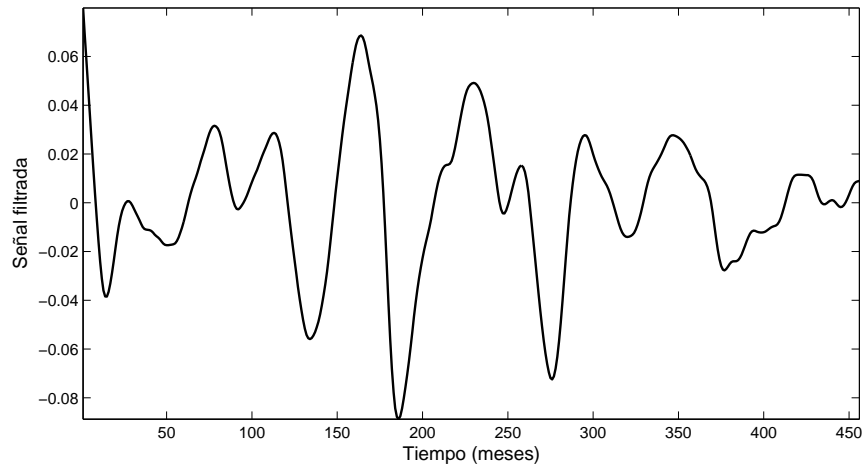


Figura 7.11: Ciclo económico extraído del IPI de EE.UU mediante el filtro HP.

cuyos parámetros de diseño son $\alpha_1 = 0.2$ y $\alpha_2 = 9$, se muestran en línea continua en la parte inferior de la Figura 7.12. En línea discontinua se muestran las estimaciones proporcionadas por el estimador algebraico. Aunque la serie temporal está muestreada mensualmente, las estimaciones del periodo se muestran en años para hacer la interpretación más intuitiva.

En primer lugar, analizando los resultados del ANF se puede observar que el periodo medio de la estimación está alrededor de 4 años como se mencionó en la introducción. Además se puede comprobar la buena capacidad de seguimiento del estimador, donde los crecimientos económicos del ciclo vienen acompañados de un aumento del periodo del ciclo también. Por tanto, se puede decir que el periodo de la etapa del crecimiento económico es mayor que el correspondiente a la recesión. Es decir, si el valor de la serie temporal aumenta, el periodo también lo hace.

Sin embargo, como se estudió en el capítulo 3 el estimador ANF necesita varios ciclos de duración antes de converger, y en el caso del ciclo económico los cambios de frecuencia pueden ocurrir en un tiempo inferior. Por tanto, se requiere el uso de un estimador de frecuencia que sea lo suficientemente rápido para obtener la frecuencia en un tiempo inferior al periodo de la misma. De este modo, la metodología algebraica puede ser de gran ayuda.

En la parte inferior de la Figura 7.12 se representa los resultados obtenidos por

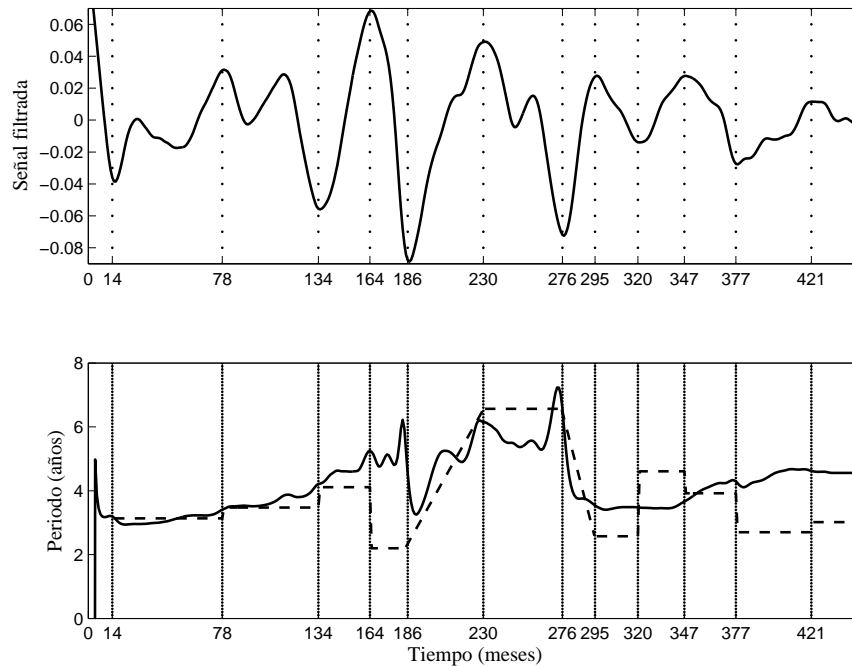


Figura 7.12: (Arriba) Ciclo económico extraído mediante el filtro HP. (Abajo) Estimación del periodo mediante el ANF con $\alpha_1 = 0.2$ y $\alpha_2 = 9$ en línea continua (-) y estimación proporcionada por el estimador algebraico en línea discontinua (- -).

el estimador de frecuencia algebraico en línea discontinua (- -). Dado que el estimador algebraico supone la frecuencia constante, se va a resetear el estimador en cada máximo y mínimo que pase por cero de la serie del ciclo económico. De este modo se supone que en estos tramos la frecuencia permanece constante. La delimitación de estos tramos viene representada en la figura por líneas verticales punteadas.

Si se utiliza el criterio de convergencia definido en el capítulo 5, ver ecuaciones (5.4)-(5.5) siendo $M = 3$ y la tolerancia igual a $1 \cdot 10^{-2}$. Se puede observar que el estimador algebraico no converge en 3 de los 13 tramos definidos anteriormente. Concretamente en los tramos correspondientes a las siguientes observaciones:

- T1=0-14
- T2=186-230
- T3=276-295

En el primer tramo (T1), la falta de convergencia puede venir dada por el efecto del filtro de HP y que hay pocas observaciones en dicho intervalo. En los tramos T2 y T3 se debe a que la frecuencia no es constante como se puede ver en la estimación proporcionada por el ANF. Por tanto en esos tramos estamos suponiendo que la frecuencia es constante y no es así. Una forma de resolver este problema es suponiendo que la frecuencia (periodo) varía linealmente con el tiempo y por tanto interpolar las estimaciones algebraicas proporcionadas por el tramo anterior y posterior a cada uno de los huecos T2 y T3.

Es interesante discutir las diferencias que ocurren entre el estimador ANF y el algebraico durante los tramos correspondientes a las observaciones:

- T4=164-186
- T5=377-456

En el tramo T4 las diferencias se deben al tiempo que necesita el ANF para alcanzar una estimación estable. De manera que cuando empieza a decrecer la estimación del ANF por la recesión económica ocurre otro cambio de frecuencia demasiado rápido. En cambio el estimador algebraico con pocas observaciones es capaz de converger. Por otro lado, la señal correspondiente al tramo T5 es muy ruidosa por lo que es normal que haya ciertas discrepancias entre las estimaciones.

En resumen, las estimaciones de frecuencia obtenidas por el ANF nos permite hacer un seguimiento de los cambios de frecuencia que sigue el ciclo económico en cada observación. Sin embargo, dado que estos cambios ocurren rápidamente y el ANF no consigue alcanzar un valor estable, es conveniente completar la estimación con el algoritmo algebraico que realiza estimaciones de frecuencia por tramos.

Entre las conclusiones aportadas por las estimaciones de frecuencia se puede extraer que los crecimientos económicos vienen acompañados de crecimientos en el periodo del ciclo mientras que las recesiones acarrearán una disminución del periodo del ciclo.

A pesar de que estas conclusiones ya estaban mencionadas en la literatura del análisis del ciclo económico de una manera cualitativa, ver Keynes en [Keynes36] y Burns y Mitchell en [Burns46], estas afirmaciones no eran muy precisas, según apunta Engel *et al.* en [Engel05]. En este trabajo, gracias a los estimadores de frecuencia, estas afirmaciones

pueden ser cuantificadas. De modo que muchas herramientas econométricas o estadísticas pueden ser aplicadas de una forma directa, donde el periodo del ciclo económico puede ser tratado como un dato conocido en lugar de un problema no lineal a resolver. De hecho, esta estimación puede ser utilizada para una mayor comprensión del ciclo tanto si el objetivo es el análisis como si es la predicción.

Por tanto, este estudio del ciclo económico se debe entender como un punto de partida para futuras líneas de investigación que necesariamente profundizarán en dos direcciones, al menos:

1. La estimación simultánea del ciclo con periodo cambiante en el tiempo y el resto de componentes del modelo
2. Análisis de un conjunto amplio de indicadores económicos, entre los que tendrá especial relevancia el Producto Interior Bruto (PIB)

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis se ha presentado el análisis de señales armónicas procedentes de diferentes disciplinas, como son la mecatrónica, ingeniería de control, procesado de señal, o economía. Este análisis se ha enfocado desde un punto de vista centralizado en la identificación de sistemas, y se han intentado establecer puentes de unión entre el análisis de series temporales, la identificación en tiempo discreto o continuo o incluso el ajuste de datos en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

Según el punto de vista del autor estas herramientas parecen estar separadas según el campo científico, cuando todas pertenecen a la misma teoría de identificación. De modo que, generalmente hablando, el análisis de series temporales parece estar reservado a aplicaciones econométricas o medioambientales, la identificación en el dominio del tiempo pertenece a los ingenieros de control y la identificación en el dominio de la frecuencia a los ingenieros de instrumentación y electrónicos. Además, dada la revolución digital que se está produciendo en la sociedad, la identificación en tiempo discreto parece imponerse a la identificación en tiempo continuo.

Sin embargo, una de las primeras conclusiones de esta tesis es que hay que tener en cuenta todas estas herramientas porque dependiendo de la aplicación y de los requisitos de la misma, unas técnicas pueden ser más adecuadas que otras. De hecho, aunque en el desarrollo de la tesis solamente se ha trabajado con señales armónicas, el contexto y los requisitos de la aplicación nos ha delimitado la técnica más apropiada para tratar estas

señales armónicas.

Dado que esta tesis se encuentra en el marco del proyecto de investigación titulado “Monitorización y control de vibraciones en estructuras flexibles aeroespaciales”, uno de los principales objetivos de la misma era encontrar un algoritmo capaz de monitorizar la frecuencia de vibración de estas estructuras, con la idea de que conociendo estas frecuencias podemos entender el estado de la estructura. Por tanto, lo primero que se hizo fue modelar estas vibraciones como ondas sinusoidales y hacer una búsqueda bibliográfica acerca de estimadores de frecuencia de señales sinusoidales.

El problema de encontrar los parámetros de una onda sinusoidal, es un problema de importancia relevante en numerosas disciplinas científicas y debido a que es un problema no lineal, esta cuestión cuenta con numerosas soluciones. El hecho de que hubiera tantas soluciones indicaba que en función de nuestros requisitos así debíamos elegir una u otra metodología. Así en el capítulo 3 se analizaron los diferentes estimadores de frecuencia, encontrando los filtros adaptativos de ranura entre los más prometedores. Sin embargo, estos filtros necesitaban de varios periodos de la señal sinusoidal para estimar la frecuencia, además había que ajustar unos parámetros de diseño que definían críticamente el estimador. Estos problemas se solventaron mediante la utilización de la novedosa identificación algebraica. Esta identificación nos permitía estimar en línea la frecuencia de la onda, incluso su amplitud y fase en un tiempo inferior al periodo de dicha onda, independientemente de las condiciones iniciales y sin realizar ninguna hipótesis del tipo estadístico sobre las perturbaciones de la señal. Además, se verificó el funcionamiento de este estimador comparándolo con otros estimadores muy recientes.

Una vez se analizó el caso de una sola frecuencia, se extendió el estimador algebraico al caso de dos frecuencias, amplitudes y fases, en el capítulo 4. Al igual que en el capítulo anterior, este estimador algebraico obtenía las estimaciones en un tiempo inferior al periodo de la onda e independientemente de las condiciones iniciales. Posteriormente se generalizó la metodología para el caso de n frecuencias. No obstante, intentar estimar en línea más de dos frecuencias mediante estos estimadores algebraicos u otros desarrollados en el dominio del tiempo quizás no era la opción más realista, sino que el dominio de la frecuencia podría ser una alternativa más apropiada.

Habiendo desarrollado estos estimadores de frecuencia se estaba en condiciones de dar un paso adelante, e implementar estos algoritmos en plataformas experimentales. Concretamente, en el capítulo 5 se utilizaron las vibraciones de una barra flexible, donde se modificaba la masa en el extremo para poder observar los cambios de frecuencia asociados a esos cambios de masa. De nuevo, se compararon los resultados obtenidos con el estimador algebraico con otros estimadores de frecuencia muy recientes, que hasta ahora no se habían aplicado a este tipo de problemas. Y, aunque los resultados obtenidos por todos los estimadores eran muy competitivos, la rapidez del estimador algebraico junto con su robustez al ruido le sitúan en una posición ventajosa para este tipo de aplicaciones.

Sin embargo, estos estimadores de frecuencia solamente se pueden aplicar al caso de estructuras muy flexibles, es decir, estructuras cuyo coeficiente de amortiguamiento es muy pequeño. De hecho, cuando se desarrolla un estimador de frecuencia la onda se modela con un coeficiente de amortiguamiento nulo, de forma que en el caso donde las vibraciones estén amortiguadas estos estimadores no se pueden utilizar. No obstante, en el último apartado del capítulo 5 se corrobora el potencial de la identificación algebraica desarrollando un estimador de frecuencia y coeficiente de amortiguamiento a partir de una única medida, que es la vibración de la estructura.

Como se ha explicado en la introducción, uno de los principales objetivos de la identificación es el control. De hecho, la identificación y el control son dos disciplinas muy ligadas. En el capítulo 6 se ha propuesto un esquema de control adaptativo basado en la identificación algebraica previamente estudiada. La razón que motivó este control adaptativo fue que para poder estimar la frecuencia (y amortiguamiento) necesitábamos que la estructura estuviera vibrando, pero en muchas ocasiones no se dispone de la estructura vibrando, sino que lo que se persigue es que la estructura flexible, sea por ejemplo un brazo manipulador, siga una determinada trayectoria. En este caso afortunadamente, se dispone de la entrada al sistema y la salida del mismo. Pues bien, gracias al conocimiento físico del sistema (muchas veces modelado por un sistema de segundo orden) y a la identificación algebraica se desarrollaron estimadores algebraicos de frecuencia (y amortiguamiento) que se combinaron con controles en lazo cerrado o en lazo abierto, configurando así un control adaptativo aplicado a estructuras flexibles con parámetros desconocidos. El control en lazo

cerrado estaba basado en un control integral proporcional generalizado, mientras que el control en lazo abierto venía configurado por un moldeo de trayectoria.

Hasta aquí se cumplieron los objetivos principales que se propusieron dentro del proyecto relacionado con las estructuras flexibles. Este proyecto multidisciplinar contaba con la colaboración del Departamento de Administración de Empresas, concretamente el área especializada en análisis de series temporales para encargarse de las tareas de identificación. En esta colaboración surgió la posibilidad de aprovechar el conocimiento adquirido en este proyecto para aplicar estas técnicas de identificación a señales armónicas procedentes de la disciplina de economía.

En particular, el problema era predecir la demanda de energía eléctrica y sus precios a corto plazo en mercados liberalizados, como por ejemplo es el PJM de los EEUU. Como se explicó en el capítulo 7, esta cuestión es muy importante para la planificación estratégica de cualquier agente que acuda al mercado liberalizado. El punto de unión de este problema con el análisis de las vibraciones de las estructuras flexibles, es que ambas señales son armónicas. De modo que las series temporales de demandas y precios así como las vibraciones de las estructuras poseen un patrón que se repite en el tiempo. Para solucionar este problema se propuso una modelización de componentes no observables dentro de un marco de Espacio de los Estados, se estimaron los parámetros en el dominio de la frecuencia, y se realizó la predicción mediante el Filtro de Kalman (KF) y el Suavizado de Intervalo Fijo (FIS). Los resultados fueron muy satisfactorios, siendo sus puntos fuertes:

- Gracias a la identificación en el dominio de la frecuencia, la estimación de parámetros es automática¹ y además no es necesaria ninguna reducción del modelo.
- Gracias a la estimación del KF y del FIS las predicciones son adaptativas.
- Debido al marco en Espacio de los Estados, se pueden extrapolar componentes muy importantes de la serie como es la tendencia, la estacionalidad o la componente irregular. Esta información puede ser muy valiosa para los sistemas de información que utilizan los gerentes de las compañías que trabajan en el mercado eléctrico.

¹Se prescinde de la necesidad de tener que reidentificar los modelos de predicción para cada mes

Con esta metodología se realizaron predicciones de demanda y precios de electricidad a corto plazo (24 horas).

Por otra parte, las metodologías encargadas de hacer predicciones de demanda² a medio o largo plazo eran muy escasas y heterogéneas. De modo que se pasaba de realizar predicciones a corto plazo (24 horas) con datos muestreados horariamente, a realizar predicciones a largo plazo (anuales) con datos muestreados mensualmente. De manera que había una necesidad de realizar predicciones a medio plazo utilizando datos muestreados horariamente. Así pues, en la segunda sección del capítulo 7 se extiende la metodología de predicción anteriormente expuesta para que sea capaz de realizar predicciones a medio plazo/largo plazo, utilizando datos con distinto periodo de muestreo y técnicas de agregación temporal en EE. Varios experimentos de simulación verificaron la reducción del error cometido en la predicción mediante esta metodología. Un posible trabajo futuro para las predicciones a medio/largo plazo con datos muestreados horariamente es utilizar modelos en EE en tiempo continuo, ya que como se ha explicado anteriormente los modelos desarrollados en tiempo continuo son más robustos frente al periodo de muestreo que los desarrollados en tiempo discreto.

Después de realizar estos trabajos, resultaron interesantes las peculiaridades que se encontraron si la identificación tenía como objetivo el control de un sistema físico o si el objetivo de la identificación era la predicción de algún indicador económico. En la Tabla 9.1 se comparan algunas propiedades generales que se han encontrado en el desarrollo de la tesis, como por ejemplo el tratamiento de las entradas y salidas al sistema, la naturaleza del problema o el objetivo de la identificación. Así pues, en la segunda columna de dicha tabla se ha denominado como identificación para control, la parte de la teoría de identificación que quizás es más conocida por los ingenieros de control. Por otro lado en la tercera columna, se han comparado las características que describen la parte de la teoría de la identificación que se dedica al análisis de series temporales.

Finalmente, se analizó otra señal armónica muy importante para el estudio de la economía de cualquier país. Se trata del ciclo económico. En la última sección del capítulo 7

²Realizar predicciones a medio/largo plazo de la serie temporal de precios de electricidad no se ha contemplado porque es una serie más volátil que la de las demandas de energía.

Tabla 8.1: Características típicas en identificación y análisis de series temporales

	Identificación para control	Análisis de series temporales
Entradas-Salidas	Se conoce la entrada y la salida. La entrada se puede manipular	Se conoce la salida. La entrada no se puede manipular.
Naturaleza	Tiempo continuo. Procesos físicos descritos por ecuaciones diferenciales Baja componente estocástica	Tiempo discreto. Procesos artificiales descritos por ecuaciones en diferencias Alta componente estocástica
Objetivo	Control	Predicción

dedicado a las aplicaciones económicas, se aplican los estimadores de frecuencia estudiados en el capítulo 3 para analizar la evolución del periodo del ciclo económico.

Utilizando este novedoso punto de vista se llegan a conclusiones como que las recesiones tienen un periodo más corto que los crecimientos del ciclo. Estas conclusiones ya se conocían en el campo pero no se habían cuantificado de manera formal. Por tanto con esta metodología se abre una nueva vía de exploración para el estudio del ciclo económico. El trabajo presentado en esta sección es sólo el inicio de lo que se espera pueda ser una futura línea de investigación.

Chapter 9

Conclusions

This thesis presents the analysis of harmonic signals which stem from different disciplines like Mechatronics, Control Engineering, Signal Processing, or Economics. This analysis focuses on system identification and tries to unify different points of view from time series analysis, frequency and time domain estimation and continuous and discrete time identification.

As far as the author is concerned, these tools are used as if they were different depending on the scientific field, while all of them belong to a common system identification theory. Therefore, generally speaking, the time series analysis seems to be reserved to econometric or environmental applications, time domain identification is used by control engineers and frequency domain identification is related to instrumentation and electronic engineers. In addition, the digital revolution which is happening in the society nowadays has motivated that discrete time identification techniques predominate over the continuous time counterpart.

Nonetheless, one of the main conclusions of this thesis is that all these tools should be available to face any identification problem, independently of the scientific discipline to which it is applied. In fact, even when this thesis has considered only harmonic signals, the different particular features of each signal has determined the more suitable identification tool.

The project which supports this thesis is denominated “Monitoring and control of

aerospace structures vibrations”, and thus one of the objectives of this thesis was to find an algorithm capable of monitoring the frequency of vibration of these kind of structures. The idea behind this monitoring process is that if the frequency of vibration is known on a continuous basis, any change in the state of the structure may be detected straight away. Hence, vibrations were modeled as sinusoids and different frequency estimators were tested.

The problem of finding the parameters which define a sinusoidal signal has a remarkable importance in numerous scientific fields, and it counts with a vast number of approaches as a consequence of its non-linearity nature. In order to find the more appropriate technique, chapter 3 analyzes the most promising frequency estimators remarking the performance of Adaptive Notch Filters. Nevertheless, these filters required several full cycles of the signal to achieve a frequency estimation and additionally, design parameters which define important features of robustness and tracking properties had to be tuned and there is no an optimal way of achieving this tuning. These inconveniences were overcome by using the novel algebraic identification. Algebraic estimators were designed to estimate the frequency, amplitude and phase of the sinusoidal signal on-line. This estimation is carried out in an interval of time inferior to the period of the signal, independently of the initial conditions and without any assumption about the statistical properties of the noise. Moreover, the performance of this algebraic technique was verified by comparison to other frequency estimators recently published in the open literature.

Once the single frequency case was studied the algebraic identification method was extended to the case of two frequencies, amplitudes and phases in chapter 4. As well as the previous chapter, this algebraic estimator is able to achieve the parameters required in a small period of time which is less than the period of the signal. The general n frequencies case was analyzed too. However, it was found that the on-line estimation of more than two frequencies by estimators developed in the time domain was not the best way of solving the problem. In this case an alternative solution based on the frequency domain could provide better results.

Several simulations were carried out to verify the algebraic approach performance. After that, the frequency estimator implementation was done in experimental platforms. Basically, frequency estimations were obtained using measured vibrations from a flexible

bar. Several experiments were driven, where the payload mass changed abruptly in order to study the associated changes of frequency. Again, the results obtained by the algebraic estimator were superior to other approaches.

The potential of the algebraic identification methodology is corroborated in the last section of chapter 5, where real damped sinusoids are studied in order to obtain estimators for the unknown damping factor and frequency. This is important because vibrations from flexible structures suffer from a damping phenomenon and so, a pure sinusoidal model can not be adequate.

In numerous occasions the vibration of the flexible structure is not available. In fact, it is desired that the flexible structure follows a determined trajectory without vibration. In that case, the algebraic identification methodology is based on the physical knowledge of the system, which is represented as a second order system, instead of sinusoidal models. Chapter 6 proposes an adaptive control scheme based on the algebraic identification using the input/output measurements. The adaptive control schemes were designed in closed-loop and open-loop operation. In the closed-loop case a Generalized Proportional Integral controller was used, meanwhile in the open-loop case the control task was done by an Input Shaping technique. It is shown that thanks to the fastness of the algebraic technique, these adaptive control approaches are placed in a better position with respect to other adaptive control alternatives.

The objectives proposed so far in the project which supports this thesis were fulfilled. Nonetheless, the multi-disciplinary supervision of this thesis motivated the application of the knowledge learned from the flexible structures to harmonic signals obtained from an economic environment.

An interesting application which deals with harmonic signals is the problem of forecasting the load demand and prices of electric energy in deregulated markets. As it was explained in chapter 7, strategic planning of deregulated market agents are based on the prediction of those time series. A model of unobservable components developed in a State-Space framework was proposed to model the time series. Moreover, according to the conclusions obtained from the analysis of vibration in flexible structures when the number of unknown parameters is high the frequency domain is more adequate than the

time domain. Therefore, several frequency domain estimation techniques were used to obtain the parameters. Once the identification step was done, the next step is the prediction of the time series¹. The prediction was carried out by the Kalman Filter (KF) and Fixed Interval Smoothing (FIS) algorithms. The advantages of the results obtained were:

- Automatic parameter estimation thanks to the frequency domain identification. In addition, there is no necessity of re-identify the model or reduce it.
- Adaptive predictions thanks to the adaptive nature of the KF/FIS routines.
- Important components of the time series (trend, seasonality or irregularity) are available due to the State-Space model. This information can be very useful for the information systems used by the managers of electric companies.

This methodology was used to predict electricity load demand and prices in a short term (up to 24 hours) for an international market, like the PJM Interconnection of the USA.

In addition, the number of references related to forecasting of load demand for a mid/long term² are very scarce. Indeed, a big gap can be found in the prediction horizon between short term predictions (24 hours) of hourly sampled data and long term predictions (years ahead) of monthly sampled data. Therefore, there was the necessity of filling this gap with mid/long term predictions using hourly sampled data. As in the second section of chapter 7 is suggested, the previous forecasting methodology used for short term forecasting is re-designed to be able of producing mid/long term predictions gathering different sampling times through temporal aggregation techniques developed in a State Space framework. Several simulation experiments verified the prediction error reduction using this method. A future work for the mid/long term forecasting is using a continuous time model with data hourly sampled because continuous time models are more robust to small sampling times than discrete time methods.

It is interesting to note the differences found if the identification objective were the control of a physical system or the prediction of an economic indicator. Some general

¹Notice that the identification objective in the vibration analysis case was the control. In the load and price time series analysis, by contrast, the objective is the prediction.

²Mid/long term prediction of the prices were not consider due to the high volatility of the prices.

Tabla 9.1: Typical features of identification and time series analysis

	Identification for control	Time series analysis
Input-Output	Input and output known Input is accessible	Output known Input is not accessible
Nature	Continuous time Physical processes described by differential equations Low stochastic component	Discrete time Artificial processes described by difference equations High stochastic component
Objective	Control	Prediction

properties are compared in Table 9.1, like for instance the input/output treatment, the problem nature or the final objective. In that way, the second column of this table represents the identification for control (identification theory more popular to control engineers). On the other hand, the third column describes the identification theory more common to time series analysers.

Finally, the last part of chapter 7 studied another very important harmonic signal. This signal is the business cycle. Frequency estimators from chapter 3 were used in order to find a business with a period changing in time.

This novel point of view allows us to reach conclusions like the shorter duration of recessions of the economy in relation to the expansion periods. Despite the fact this statement was known in the literature, it was not quantified empirically. Hence, these frequency estimators open up a new exploration path in order to study the business cycle. The work here presented is just the beginning of a future line of research.

Referencias

- [Abraham01] Abraham, A. y Nath, B. A neuro-fuzzy approach for modeling electricity demand in Victoria. *Applied Sof Computing Journal*, 1:127–138, 2001.
- [Al-Hamadi05] Al-Hamadi, H. M. y Soliman, S. A. Long-term/mid-term electric load forecasting based on short-term correlation and annual growth. *Electric power systems research*, 74:353–361, 2005.
- [Anderson79] Anderson, B. D. O. y Moore, J. B. *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1979.
- [Andersson06] Andersson, T. y Händel, P. IEEE standard 1057, Cramér-Rao bound and the Parsimony principle. *IEEE Trans. Intrum. Meas.*, 55(1):44–53, 2006.
- [Åström80] Åström, K. *Self-tuning regulators - Design principles and applications*. New York: Academic Press, 1980.
- [Åström89] Åström, K. y Wittenmark, B. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [Barakat92] Barakat, E. y Al-Rashid, S. Long-term peak demand forecasting under conditions of high growth. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7:1483–1486, 1992.
- [Becedas07] Becedas, J., Trapero, J. R., Sira-Ramírez, H., y V.Feliu. Fast identification method to control a flexible manipulator with parameters

- uncertainties. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA '07*, 2007.
- [Bittanti97] Bittanti, S., Campi, M., y Savaresi, S. Unbiased estimation of a sinusoid in colored noise via adapted notch filters. *Automatica*, 33:698–713, 1997.
- [Bittanti00] Bittanti, S. y Savaresi, S. On the parameterization and design of an extended Kalman filter frequency tracker. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45:1718–1724, 2000.
- [Bodson98] Bodson, M. An adaptive algorithm for the tuning of two input shaping methods. *Automatica*, 34:771–776, 1998.
- [Bógalo03] Bógalo, J. y Quilis, E. Estimación del ciclo económico mediante filtros de Butterworth. *Instituto Nacional de Estadística. Boletín Trimestral de Coyuntura*, 87, 2003.
- [Box94] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., y Reinsel, G. C. *Time series analysis: Forecasting and Control. (3rd. Edition)*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- [Bryson69] Bryson, A. y Ho, Y. *Applied Optimal Control, Optimization, Estimation and Control*. Blaisdell Publishing Company, 1969.
- [Buium94] Buium, A. *Differential Algebra and Diophantine Geometry*. Hermann, Paris, 1994.
- [Burns46] Burns, A. y Mitchell, W. *Measuring Business Cycles*. NBER, New Cork, 1946.
- [Cancelo05] Cancelo, J. R. Análisis empírico del ciclo económico con un modelo factorial dinámico con cambio de régimen. *Estadística Española*, 47(159):253–277, 2005.

- [Cheng06] Cheng, M. y Tsai, J. A new IIR adaptive notch filter. *Signal Processing*, 86(7):1648 – 1655, 2006.
- [Choi02] Choi, J. y Cho, N. Suppression of narrow-band interference in DS-spread spectrum systems using adaptive IIR notch filter. *Signal Processing*, 82(12):2003–2013, 2002.
- [Clarke01] Clarke, D. W. On the design of adaptive notch filter. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15:715–744, 2001.
- [Conejo05a] Conejo, A., Contreras, J., Espínola, R., y Plazas, M. Forecasting electricity prices for a day-ahead pool-based electricity energy market. *International Journal of Forecasting*, 21:435–462, 2005.
- [Conejo05b] Conejo, A., Plazas, M., Espínola, R., y Molina, A. Day-ahead electricity price forecasting using the wavelet transform and ARIMA models. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(2):1035–1042, 2005.
- [Contreras03] Contreras, J., Espínola, R., Nogales, F., y Conejo, A. ARIMA models to predict next-day electricity prices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18:1014–1020, 2003.
- [Cutforth04] Cutforth, C. y Pao, L. Y. Adaptive input shaping for manoeuvring flexible structures. *Automatica*, 40:685–693, 2004.
- [Darbellay00] Darbellay, G. y Slama, M. Forecasting the short-term demand for electricity- do neural networks stand a better chance? *International Journal of Forecasting*, 16:71–83, 2000.
- [Drenick57] Drenick, R. y Shahbender, R. Adaptive servomechanisms. *AIEE Transactions*, 76:286–292, 1957.
- [Dwivedy06] Dwivedy, S. K. y Eberhard, P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41(7):749–777, 2006.

- [Eker04] Eker, I. Open-loop and closed-loop experimental on-line identification of a three-mass electromechanical system. *Mechatronics*, 14:549–565, 2004.
- [Engel05] Engel, J., Haugh, D., y Pagan, A. Some methods for assessing the need for non-linear models in business cycle analysis. *International Journal of Forecasting*, 21:651–662, 2005.
- [Feldbaum65] Feldbaum, A. *Optimal control system*. New York: Academic Press, 1965.
- [Feliu93] Feliu, V., Rattan, D. S., y Brown, H. B. Control of flexible arms with friction in the joints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(4):467–475, 1993.
- [Feliu05] Feliu, V. y Ramos, F. Strain gauge based control of single-link flexible very light weight robots robust to payload changes. *Mechatronics*, 15:547–571, 2005.
- [Filatov00] Filatov, N. y Unbehauen, H. Survey of adaptive dual control methods. *En IEE Proceedings*, tomo 147, págs. 118–128. 2000.
- [Fisher12] Fisher, R. On an absolute criterion for fitting frequency curves. *Mess. Math.*, págs. 41–155, 1912.
- [Fliess90] Fliess, M. Some basic structural properties of generalized linear system. *System and Control Letters*, 15:391–396, 1990.
- [Fliess93] Fliess, M. y Glad, T. *An algebraic approach to linear and nonlinear control*. H. Trentelman, J. Willems (Eds.), *Essays in Control: Perspective in the Theory and its Applications*, Birkhauser, págs. 223–267. 1993.
- [Fliess03a] Fliess, M., Mboup, M., Mounier, H., y Sira-Ramírez, H. *Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples*, cap. 1. Innovaciøn Editorial Lagares, México City, 2003.

- [Fliess03b] Fliess, M. y Sira-Ramírez, H. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Contr. Optim. and Calc. of Variat.*, 9:151–168, 2003.
URL <http://www.emath.fr/cocv>
- [Fliess04] Fliess, M. y Sira-Ramírez, H. Reconstructeurs d'état. *C.R. Acad. Sci. Paris I*, 338(1):91–96, 2004.
- [Fliess06a] Fliess, M. Analyse non standard du bruit. *C.R. Acad. Sci. Paris*, págs. Ser. I 342, pp. 797–802, 2006.
- [Fliess06b] Fliess, M., Fuchshumer, S., Schlacher, D., y Sira-Ramírez, H. Discrete-time liner parametric identification: An algebraic approach. *En JIME'2006, Poitiers, France*. 2006.
- [Fosso99] Fosso, O., Gjelsvik, A., Haugstad, A., Birger, M., y Wangensteen, I. Generation scheduling in a deregulated system. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):75–81, 1999.
- [Fuchshumer06] Fuchshumer, S. *Algebraic linear identification, modelling, and applications of flatnessbased control*. Tesis Doctoral, Johannes Kepler Universität, Linz, 2006.
- [Garcia-Marquez07] Garcia-Marquez, F. P., Pedregal-Tercero, D. J., y Schmid, F. Unobserved component models applied to the assessment of wear in railway points: A case study. *European Journal of Operational Research*, 176:1703–1712, 2007.
- [Gauss63] Gauss, K. F. *Theory of Motion of the Heavenly Bodies*. New York: Dover, 1963.
- [Giannakis01] Giannakis, G. B. y Serpedin, E. A bibliography of non linear system identification. *Signal Processing*, 81:553–580, 2001.

- [González-Romera06] González-Romera, E., Jaramillo-Moran, M., y Carmona-Fernández, D. Monthly electric energy demand forecasting based on trend extraction. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(4):1946–1953, 2006.
- [Grewal01] Grewal, M. S. y Andrews, A. P. *Kalman Filtering: Theory and Practice using MATLAB. Second Edition*. John Wiley & Sons, 2001.
- [Haber90] Haber, R. y Unbehauen, H. Structure identification of nonlinear dynamic systems - a survey on input/output approaches. *Automatica*, 26:177–202, 1990.
- [Harvey89] Harvey, A. *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, 1989.
- [Harvey93] Harvey, A. C. y Koopman, S. J. Forecasting hourly electricity demand using time-varying splines. *Journal of the American Statistical Association*, 88:1228–1242, 1993.
- [Harvey03] Harvey, A. y Trimbur, T. General model-based filters for extracting cycles and trends in economic time series. *The review of economics and statistics*, 85:244–255, 2003.
- [Haykin91] Haykin, S. *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [Hibon05] Hibon, M. y Evgeniou, T. To combine or not to combine: selecting among forecasts and their combinations. *International Journal of Forecasting*, 21:15–24, 2005.
- [Hodrick97] Hodrick, T. y Prescott, E. Post-war US business cycles: An empirical investigation. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 29:1–16, 1997.
- [Hong02] Hong, Y. y Hsiao, C. Locational marginal price forecasting in deregulated electricity markets using artificial intelligence. *IEEE*

- Proceeding-Generation, Transmission and Distribution*, 149(5):621–626, 2002.
- [Hou05] Hou, M. Amplitude and frequency estimator of a sinusoid. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 50(6):855–858, 2005.
- [Hou07] Hou, M. Estimation of sinusoidal frequencies and amplitudes using adaptive identifier and observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(3):493–499, 2007.
- [Hsu99] Hsu, L., Ortega, R., y Damm, G. A globally convergent frequency estimator. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 44(4):698–713, 1999.
- [Jakeman84] Jakeman, A. J. y Young, P. C. Recursive filtering and the inversion of ill-posed causal problems. *Utilitas Mathematica*, 35:351–376, 1984.
- [Johansson00] Johansson, R., Robertsson, A., Nilsson, K., y Verhaegen, M. State-space system identification of robot manipulator dynamics. *Mechatronics*, 10:403–418, 2000.
- [Kaiser99] Kaiser, R. y Maravall, A. Short-term and long-term trends, seasonal adjustment, and the business cycle. *Banco de España. Documento de Trabajo n. 9918.*, 1999.
- [Kalafatis97] Kalafatis, A., Wang, L., y Cluett, W. R. Identification of wiener-type nonlinear systems in a noisy environment. *International Journal of Control*, 66:923–941, 1997.
- [Kalman60a] Kalman, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Transactions, Journal Basic Engineering*, 83-D:95–108, 1960.
- [Kalman60b] Kalman, R. E. On the general theory of control systems. *En First IFAC Congress, Moscow.*, págs. 481–492. 1960.

- [Kandil01] Kandil, M., El-Debeiky, S., y Hasanién, N. Overview and comparison of long-term forecasting techniques for a fast developing utility: part i. *Electric Power Systems Research*, 58:11–17, 2001.
- [Kang04] Kang, C., Cheng, X., Xia, Q., Huang, Y., y Gao, F. Novel approach considering load-relative factors in short-term load forecasting. *Electric Power Systems Research*, 70:99–107, 2004.
- [Karimi-Ghartemani02] Karimi-Ghartemani, M. y Iravani, M. R. A nonlinear adaptive filter for on-line signal analysis in Power Systems: Applications. *IEEE Trans. on Power Del.*, 17:617–622, 2002.
- [Kay81] Kay, S. y Marple, S. Spectral analysis, a modern perspective. *En Proc. IEEE*, tomo 69, págs. 1380–1419. 1981.
- [Kendall61] Kendall, M. G. y Stuart, A. *Advanced Theory of Statistics*. Griffin, London, 1961.
- [Keynes36] Keynes, J. *The general theory of employment interest and money*. London: MacMillan, 1936.
- [Kim99] Kim, S. y Park, Y. Active control of multi-tonal noise with reference generator based on on-line frequency estimation. *Journal of sound and vibration*, 277(3):647–666, 1999.
- [Kim01] Kim, S. y Park, Y. On-line fundamental frequency tracking method for harmonic signal and application to ANC. *Journal of sound and vibration*, 241:681–691, 2001.
- [Kolchin73] Kolchin, E. *Differential Algebra and Algebraic Groups*. Academic Press, New York, 1973.
- [Koopmans95] Koopmans, S. J., Harvey, A. C., Doornik, J. A., y Shepard, N. *STAMP 5.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. London: Chapman & Hall, 1995.

- [Kootsookos99] Kootsookos, P. J. A review of the frequency estimation and tracking problems. Inf. téc., DSTO, Salisbury Site, 1999.
- [Larsson02] Larsson, E. K. y Söderström, T. Identification of continuous-time AR processes from unevenly sampled data. *Automatica*, 38:709–718, 2002.
- [Leontaritis85] Leontaritis, I. J. y Billings, S. A. Input-output parametric models for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41:303–344, 1985.
- [Li93] Li, T. H. y Kedem, B. Strong consistency of the contraction mapping method for frequency estimation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 39:989–998, 1993.
- [Li94] Li, T. H. y Kedem, B. Iterative filtering for multiple frequency estimation. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 42:1120–1132, 1994.
- [Li05] Li, G., Liu, C. C., Lawarree, J., Gallanti, M., y Venturini, A. State-of-the-art of electricity price forecasting. *En Proc. 2nd CIGRE/IEEE Power Eng. Soc. Int. Symp., San Antonio, TX, Oct. 5-7. 2005*.
- [Ljung99] Ljung, L. *System Identification, Theory for the user*. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice Hall, 2^a ed^{ón}., 1999.
- [Ljung04] Ljung, L. State of the art in linear system identification: Time and frequency domain methods. *En Proceeding of the 2004 American Control Conference. Boston, Massachusetts. 2004*.
- [Mahata06] Mahata, K. y Fu, M. Modeling continuous-time processes via input-to-state filters. *Automatica*, 42:1073–1084, 2006.
- [Makridakis96] Makridakis, S. Forecasting: its role and value for planning and strategy. *International Journal of Forecasting*, 12:513–537, 1996.

- [Marino00] Marino, R. y Tomei, P. Global estimation of n unknown frequencies. *En Proceedings of the 39th. IEEE Conference on Decision and Control*, tomo 2, págs. 1143–1147. Sidney, Australia, 2000.
- [Marquez00] Marquez, R., Delaleau, E., y Fliess, M. Commande par PID généralisé d'un moteur électrique sans capteur mécanique. *En Première Conférence Internationale Francophone d'Automatique*. 2000.
- [Maybeck79] Maybeck, P. S. *Stochastic models, estimation, and control*, tomo 141 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc, 1979.
- [Mboup] Mboup, M. Parameter estimation via differential algebra and operational calculus. In preparation.
- [Mboup97] Mboup, M., Regalia, P. A., y Ashari, M. A multivariable steiglitz-mcbride method: stationary points and *a priori* error bound. *International Journal of Control*, 68(1):125–153, 1997.
- [Meirovitch97] Meirovitch, L. *Principles and techniques of Vibration*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [Metaxiotis03] Metaxiotis, K., Kagiannas, A., Askounis, D., y Psarras, J. Artificial intelligence in short term electric load forecasting: a state-of-the-art survey for the researcher. *Energy Conversion and Management*, 44:1525–1534, 2003.
- [Mikusinski83] Mikusinski, J. *Operational Calculus, Vol. I*. PWN Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [Mikusinski87] Mikusinski, J. y Boehme, T. K. *Operational Calculus, Vol. 2*. PWN Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [Mirasgedis06] Mirasgedis, S., Sarafidis, Y., Georgopoulou, E., Lalas, D., Moschovits, M., Karagiannis, F., y Papakonstantinou, D. Models for mid-

- term electricity demand forecasting incorporating weather influences. *Energy*, 31:208–227, 2006.
- [Mojiri04] Mojiri, M. y Bakhshai, A. R. An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 49:314–318, 2004.
- [Moussaoui05] Moussaoui, S., Brie, D., y Richard, A. Regularization aspects in continuous-time model identification. *Automatica*, 41:197–208, 2005.
- [Muñoz07] Muñoz, I. *Desarrollo, modelado e instrumentación de estructuras flexibles para la cancelación activa de vibraciones*. Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad de Castilla-La Mancha, 2007.
- [Narendra66] Narendra, K. S. y Gallman, P. G. An iterative method for identification of nonlinear systems using a hammersteing model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:546–550, 1966.
- [Narendra89] Narendra, K. y Annaswamy, A. *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [Neves07] Neves, A., Miranda, M. D., y Mboup, M. Algebraic parameter estimation of damped exponentials. *En 15th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2007*. 3-7 September 2007.
- [Ng90] Ng, C. y Young, P. Recursive estimation and forecasting of nonstationary time series. *Journal of forecasting*, 9:173–204, 1990.
- [Nogales02] Nogales, F., Contreras, J., Conejo, A., y Espínola, R. Forecasting next-day electricity prices by time series models. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(2):342–348, 2002.
- [Obregon-Pulido02] Obregon-Pulido, G., Castillo-Toledo, B., y Loukianov, A. A globally convergent estimator for n frequencies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):857–863, 2002.

- [Osborne75] Osborne, M. R. Some special nonlinear least squares problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 12:571–592, 1975.
- [Park01] Park, J. y Chang, P. H. Learning input shaping technique for non-LTI systems. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123:288–293, 2001.
- [Park06] Park, J., Chang, P. H., Park, H. S., y Lee, E. Design of learning input shaping technique for residual vibration suppression in an industrial robot. , *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 11:55–65, 2006.
- [Peña01] Peña, D. *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, 2001.
- [Pedregal02] Pedregal, D. J. y Young, P. C. *Statistical approaches to modelling and forecasting time series*, cap. 4, págs. 69–104. Companion to Economic Forecasting Blackwell Publishers, 2002.
- [Pedregal06] Pedregal, D. y Young, P. Modulated cycles, a new approach to modelling seasonal/cyclical behaviour in unobserved component models. *International Journal of Forecasting*, 22:189–194, 2006.
- [Pedregal07] Pedregal, D. J. y Trapero, J. R. Electricity prices forecasting by automatic dynamic harmonic regression models. *Energy Conversion and Management*, 48:1710–1719, 2007.
- [Pintelon01] Pintelon, R. y Schoukens, J. *System Identification. A Frequency Domain Approach*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. New York, 2001.
- [Reger05] Reger, J., Sira-Ramírez, H., y Fliess, M. On non asymptotic estimation of nonlinear systems. *En 44th. IEEE Conf. on Decision and Control*, págs. 4219–4224. Sevilla, 2005.
- [Reiersøl41] Reiersøl, O. Confluence analysis by means of lag moments and other methods of confluence analysis. *Econometrica*, 9:1–23, 1941.

- [Reis05] Reis, A. y da Silva, A. Feature extraction via multiresolution analysis for short-term load forecasting. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(1):189–198, 2005.
- [Rew02] Rew, K. H., Kim, S., y I. Lee, Y. P. Real-time estimations of modal frequencies for smart structures. *Smart Mater. Struct.*, 11:36–47, 2002.
- [Rhim01] Rhim, S. y Book, W. J. Noise effect on adaptive command shaping methods for flexible manipulator control. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 9:84–92, 2001.
- [Rhim04] Rhim, S. y Book, W. J. Adaptive time-delay command shaping filter for flexible manipulator control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 9:619–626, 2004.
- [Rife74] Rife, D. C. y Boorstyn, R. R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Transactions on information theory*, 20(5):591–598, 1974.
- [Roy89] Roy, R. y Kailath, T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. Signal Processing*, 37:984–995, 1989.
- [Rugh81] Rugh, W. J. *Nonlinear systems Theory. The Volterra/Wiener Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [Scala97] Scala, B. L. y Bitmead, R. Design of an extended Kalman filter frequency tracker. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 45:2001–2009, 1997.
- [Schoukens04] Schoukens, J., Pintelon, R., y Rolain, Y. Time domain identification, frequency domain identification. equivalences! differences? *En Proceeding of the 2004 American Control Conference. Boston, Massachusetts*. 2004.

- [Schwartz78] Schwartz, G. Estimating the dimension of a model. *Ann. Stat.*, 6:461–464, 1978.
- [Shahidehpour02] Shahidehpour, M., Yamin, H., y Li, Z. *Market Operations in Electric Power Systems: Forecasting, Scheduling, and Risk Management*. New York: John Wiley and Sons, 2002.
- [Sheblé99] Sheblé, G. B. *Computational Auction Mechanisms for Restructured Power Industry Operation*. Norwell, MA: Kluwer, 1999.
- [Singer90] Singer, N. C. y Seering, W. C. Preshaping command inputs to reduce system vibration. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1:76–82, 1990.
- [Singhose96] Singhose, W. E., Derezinski, S., y Singer, N. Extra-insensitive input shapers of controlling flexible spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2:385–391, 1996.
- [Singhose97] Singhose, W. E., Porter, L. J., Tuttle, T. D., y Singer, N. C. Vibration reduction using multi-hump input shapers. *ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, 119:320–326, 1997.
- [Sira-Ramírez02] Sira-Ramírez, H. y Fliess, M. On discrete-time uncertain visual based control of planar manipulators: an on-line algebraic identification approach. *En Proc. IEEE CDC, Las Vegas*. 2002.
- [Sira-Ramírez04a] Sira-Ramírez, H. y Agrawal, S. *Differentially flat systems*. Marcel Dekker, 2004.
- [Sira-Ramírez04b] Sira-Ramírez, H. y Fliess, M. On the output feedback control of a synchronous generator. *En 43d. IEEE Conf. on Decision and Control*, tomo 4, págs. 4459–4464. Bahamas, 2004.
- [Söderström89] Söderström, T. y Stoica, P. *System Identification*. Prentice Hall International, London, 1989.

- [Söderström00] Söderström, T. y Mossberg, M. Performance evaluation of methods for indentifying continuous-time autoregressive processes. *Automatica*, 36:53–59, 2000.
- [Song06] Song, K., Ha, S., Park, J., Kweon, D., y Kim, K. Hybrid load forecasting method with analysis of temperature sensitivities. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(2):869–876, 2006.
- [Sorenson70] Sorenson, H. W. Least-squares estimation: from gauss to kalman. *IEEE Spectrum*, 7:63–68, 1970.
- [Stoica93] Stoica, P. List of references on spectral line analysis. *Signal Processing*, 31:329–340, 1993.
- [Szkuta99] Szkuta, B., Sanabria, L., y Killon, T. Electricity price short-term forecasting using artificial networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(3):851–857, 1999.
- [Tamura95] Tamura, Y., Deping, Z., Umeda, N., y Sakashita, K. Load forecasting using grey dynamic model. *IEEE Transactions on Power Systems*, págs. 361–365, 1995.
- [Taylor03] Taylor, J. y Buizza, R. Using weather ensemble predictions in electricity demand forecasting. *International Journal of Forecasting*, 19(1):57–70, 2003.
- [Taylor06] Taylor, J., Menezes, L., y McSharry, P. A comparison of univariate methods for forecasting electricity demand up to a day ahead. *International Journal of Forecasting*, 22:1–16, 2006.
- [Taylor07] Taylor, C. J., Pedregal, D. J., Young, P. C., y Tych, W. Environmental time series analysis and forecasting with the captain toolbox. *Environmental Modelling & Software*, 22(6):797–814, 2007.

- [Tjahyadi06] Tjahyadi, H. y Sammut, K. Multi-mode vibration control of a flexible cantilever beam using adaptive resonant control. *Smart Materials and Structures*, 15:270–278, 2006.
- [Trapero07] Trapero, J. R., Sira-Ramírez, H., y Feliu-Batlle, V. An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal. *Signal Processing*, 87:1188–1201, 2007.
- [Unbehauen87] Unbehauen, H. y Rao, G. *Identification of continuous systems*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1987.
- [Unbehauen90] Unbehauen, H. y Rao, G. P. Continuous-time approaches to system identification-a survey. *Automatica*, 26(1):23–35, 1990.
- [Unbehauen98] Unbehauen, H. y Rao, G. A review of identification in continuous-time systems. *Annual Reviews in Control*, 22:145–171, 1998.
- [West89] West, M. y Harrison, J. *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer-Verlag, 1989.
- [Wiener48] Wiener, N. *Cybernetics*. Cambridge, MA:M.I.T. Press, 1948.
- [Xia04] Xia, X. Global frequency estimation using adaptive identifiers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1188–1193, 2004.
- [Xiao95] Xiao, Y. y Tadokoro, Y. LMS-based notch filter for the estimation of sinusoidal signals in noise. *Signal Processing*, 46(2):223–231, 1995.
- [Yosida84] Yosida, K. *Operation Calculus - A Theory of Hyperfunctions*. Springer, New York,, 1984.
- [Young76] Young, P. C. Some observations on instrumental variable methods of time series analysis. *International Journal of Control*, 23:593–612, 1976.
- [Young81] Young, P. Parameter estimation for continuous-time models - a survey. *Automatica*, 17:23–29, 1981.

- [Young84] Young, P. C. *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [Young89] Young, P. C. *Recursive estimation, forecasting and adaptive control*, tomo 30. San Diego: Academic Press, 1989.
- [Young99] Young, P., Pedregal, D., y Tych, W. Dynamic harmonic regression. *Journal of Forecasting*, 18:369–394, 1999.
- [Yurkovich93] Yurkovich, S. y Tzes, A. An adaptive input shaping control scheme for vibration reduction suppression in slewing flexible structures. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2:114–121, 1993.
- [Zadeh62] Zadeh, L. A. From circuit theory to system theory. *Proc. IRE*, 50:856–865, 1962.
- [Zareipour06] Zareipour, H., Cañizares, C. A., Bhattacharya, K., y Thomson, J. Application of public-domain market information to forecast Ontario's wholesale electricity prices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(4):1707–1717, 2006.
- [Zhang03] Zhang, L., Luh, P., y Kasiviswanathan, K. Energy clearing price prediction and confidence interval estimation with cascaded neural networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(1):99–105, 2003.
- [Zhou06] Zhou, M., Yan, Z., Ni, Y., Li, G., y Nie, Y. Electricity price forecasting with confidence-interval estimation through an extended ARIMA approach. *Generation, Transmission and Distribution*, 153:187–195, 2006.
- [Ziarani02a] Ziarani, A. *Extractions of nonstationary sinusoids*. Tesis Doctoral, University of Toronto, 2002.
- [Ziarani02b] Ziarani, A. y Konrad, A. A nonlinear adaptive method for elimination of power line interference in ECG signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 49:540–547, 2002.

- [Ziarani04] Ziarani, A. y Konrad, A. A method of extraction of nonstationary sinusoids. *Signal Processing*, 84:1323–1346, 2004.
- [Zou04] Zou, H. y Yang, Y. Combining time series models for forecasting. *International Journal of Forecasting*, 20:69–84, 2004.